

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1, -5, 3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x} dx$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$

(0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \text{ y } g(x) = x^2 - 10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad a^2 - 4 \quad 2a - 3 \quad -a^2 - 2a \\ -1 \quad -a^2 + 2a \quad 1 \quad a^2 \\ \hline 0 \quad 2a - 4 \quad 2a - 2 \quad -2a \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad a^2 - 4a + 4 \quad a^2 - 2a \quad -a^2 + a - 1 \\ -1 \quad -a^2 + 2a \quad 1 \quad a^2 \\ \hline 0 \quad -2a + 4 \quad a^2 - 2a + 1 \quad a - 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & -2a + 4 & a^2 - 2a + 1 & a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2a + 4 \quad a^2 - 2a + 1 \quad a - 1 \\ 0 \quad 2a - 4 \quad 2a - 2 \quad -2a \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2 - 1 \quad -a - 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -a - 1 \end{pmatrix}$$

La nueva matriz de coeficientes tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 \end{vmatrix} = (2a - 4)(a^2 - 1) = 2(a - 2)(a - 1)(a + 1)$$

Vemos cuando se anula. $|A| = 0 \Rightarrow 2(a-2)(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido por Gauss anteriormente.

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ (2a - 4)y + (2a - 2)z = -2a \\ (a^2 - 1)z = -a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ 2(a - 2)y + 2(a - 1)z = -2a \\ (a - 1)(a + 1)z = -(a + 1) \end{cases} \Rightarrow \{a + 1 \text{ es no nulo}\} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ 2(a - 2)y + 2(a - 1)z = -2a \\ (a - 1)z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ (a - 2)y + (a - 1)z = -a \\ \boxed{z = \frac{-1}{a - 1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - \frac{-1}{a - 1} = -a^2 \\ (a - 2)y + \cancel{(a - 1)} \frac{-1}{\cancel{a - 1}} = -a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y + \frac{1}{a - 1} = -a^2 \\ (a - 2)y - 1 = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y = -a^2 - \frac{1}{a - 1} \\ (a - 2)y = -a + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \\ \boxed{y = \frac{-a + 1}{a - 2}} \end{cases} \Rightarrow x + (a^2 - 2a) \frac{-a + 1}{a - 2} = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + a \cancel{(a-2)} \frac{-a+1}{\cancel{a-2}} = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a-1} \Rightarrow x + a(-a+1) = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a-1} - a(-a+1) = \frac{-a^3 + a^2 - 1 + a(a-1)^2}{a-1} = \frac{-a^3 + a^2 - 1 + a(a^2 + 1 - 2a)}{a-1}$$

$$x = \frac{\cancel{-a^3} + a^2 - 1 + \cancel{a^3} + a - 2a^2}{a-1} = \frac{-a^2 + a - 1}{a-1}$$

La solución es $x = \frac{-a^2 + a - 1}{a-1}$, $y = \frac{-a+1}{a-2}$, $z = \frac{-1}{a-1}$

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ -2y = -2 \\ 0 = -2 \end{array} \right\} \text{ La última ecuación plantea una igualdad imposible.}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = -4 \\ z = -2 \\ 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - z = -4 \\ z = -2 \\ z = -1 \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 4. $a = -1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

por lo que el rango de A es 2, el de la ampliada también 2 y es menor que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ -3y - 2z = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = -1 + z \\ -3y = 1 + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = -1 + z \\ y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 3\left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}z\right) = -1 + z \Rightarrow x - 1 - 2z = -1 + z \Rightarrow \boxed{x = 3z}$$

La solución es $x = 3t$; $y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Calculamos la expresión del determinante de $A^{26} + A^{25}$.

$$A^{26} + A^{25} = A^{25}(A + I) \Rightarrow |A^{26} + A^{25}| = |A^{25}| |A + I| = |A|^{25} |A + I|$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = 1$ tenemos que $|A^{26} + A^{25}| = |A|^{25} |A + I| = 1^{25} |A + I| = |A + I|$

Para que la matriz $A^{26} + A^{25}$ sea singular su determinante debe ser nulo y para ello debe serlo el determinante de $A + I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t + 1$$

$$|A + I| = 0 \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

El valor buscado es $t = -1$.

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1, -5, 3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ z = 10 - 3x \end{cases} \Rightarrow -x - y - 10 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y - 7 = 0 \Rightarrow 2x - 7 = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -7 + 2t \\ z = 10 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -3) \\ P_r(0, -7, 10) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, -1, 1) \\ Q_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (1, 2, -3) \\ \vec{v}_s &= (-2, -1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -2, 2) - (0, -7, 10) = (0, 5, -8)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 30 - 0 - 32 - 5 = 1 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por $T \equiv (1, -5, 3)$ y no conocemos su vector director $\vec{w}_t = (a, b, c)$.

Las rectas r y t se cortan por lo que los vectores $\vec{w}_t$, $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{P_r T}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_t &= (a, b, c) \\ \vec{u}_r &= (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{P_r T} &= (1, -5, 3) - (0, -7, 10) = (1, 2, -7) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_t, \vec{u}_r, \overrightarrow{P_r T}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14a - 3b + 2c - 2c + 7b + 6a = 0 \Rightarrow -8a + 4b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Las rectas s y t se cortan por lo que los vectores $\vec{w}_t$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{Q_s T}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (a, b, c) \\ \vec{v}_s = (-2, -1, 1) \\ \overrightarrow{Q_s T} = (1, -5, 3) - (0, -1, 2) = (1, -4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_t, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_s T}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + b + 8c + c + 2b + 4a = 0 \Rightarrow 3a + 3b + 9c = 0 \Rightarrow \boxed{a + b + 3c = 0}$$

Sustituimos b por $2a$.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + 3c = 0 \\ b = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2a + 3c = 0 \Rightarrow 3c = -3a \Rightarrow \boxed{c = -a}$$

El vector director de la recta t queda $\vec{w}_t = (a, 2a, -a)$, por lo que tomando $a = 1$ un vector director sería $\vec{w}_t = (1, 2, -1)$.

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

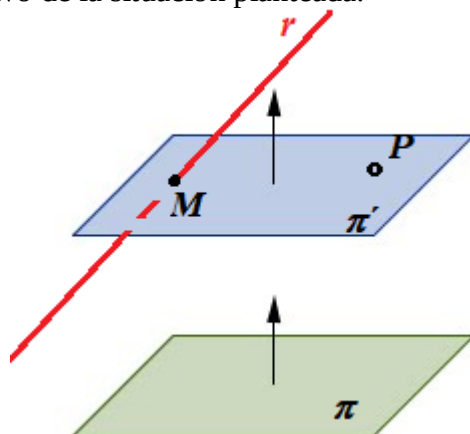
$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (1, 2, -1) \\ T \equiv (1, -5, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}}$$

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Hacemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



Hallamos el plano π' paralelo a π que pasa por el punto P. Al ser un plano paralelo solo cambia el término independiente D.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi // \pi' \\ P(1, 2, -1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ P(1, 2, -1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte del plano π' con la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \\ \pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x \quad -y \quad -z \quad -3 = 0 \\ -3x \quad +3y \quad -6z \quad -6 = 0 \\ \hline 0 \quad 2y \quad -7z \quad -9 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x \quad -y \quad +z \quad +1 = 0 \\ -2x \quad +2y \quad -4z \quad -4 = 0 \\ \hline 0 \quad y \quad -3z \quad -3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \\ y - 3z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ 2y \quad -6z \quad -6 = 0 \\ -2y \quad +7z \quad +9 = 0 \\ \hline 0 \quad z \quad +3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \\ \boxed{z = -3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - 6 + 2 = 0 \\ 2y + 21 - 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 4 \\ 2y = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 4 \\ y = \frac{-12}{2} = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 6 = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2} \Rightarrow \boxed{M(-2, -6, -3)}$$

La recta s que buscamos pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$ y el punto $M(-2, -6, -3)$

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv (1, 2, -1) \\ M(-2, -6, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-2, -6, -3) - (1, 2, -1) = (-3, -8, -2)$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_s = -\overrightarrow{PM} = (3, 8, 2) \\ P \equiv (1, 2, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}}$$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x} dx$$

(1.25 puntos)

Primera integral

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 1+t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2t dt}{2(1+t^2)t} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t = \boxed{\arctg(\sqrt{x-1}) + K}$$

Segunda integral

$$\begin{aligned} \int (3-2x)e^{-2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 3-2x \rightarrow du = -2dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\} = \\ &= (3-2x) \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} (-2) dx = -\frac{3}{2} e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (-2) e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{3}{2} e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} = \boxed{-e^{-2x} + x e^{-2x} + K} \end{aligned}$$

P6) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$ (0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo. (2.5 puntos)

a) La función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ángulo del 2º o 4º cuadrante} \\ \text{en la bisectriz de dichos cuadrantes} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi] \\ x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi] \end{array} \right.$$

La función no está definida en $x = \frac{3\pi}{4}$

La función es continua en $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

b)

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - (\cos x - \operatorname{sen} x)}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} = \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} = 0 \Rightarrow -\cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi] \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi] \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de la derivada entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$, entre $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$, y por último

entre $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \pi$.

- En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tomamos $x = \frac{\pi}{8}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{-\cos \frac{\pi}{8} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}}{\left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}} < 0. \text{ La función decrece en } \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

- En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tomamos $x = \frac{\pi}{2}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}}} > 0. \text{ La función crece en } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

- En el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tomamos $x = \frac{7\pi}{8}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{-\cos\frac{7\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}}{\left(\sin\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}}} < 0. \text{ La función decrece en } \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$. Como $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \simeq 2.03$

Las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$

P7) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) La función es composición de funciones continuas. El único problema es en $x = 0$ que se anula el denominador del exponente, pero $0 \notin [-2, -1]$.

La función es continua en $[-2, -1]$

b) Utilizando el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):

Sea f continua en $[a, b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = m$.

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2-2} - e^{x^2-2}}{x^2} = \frac{2x^2e^{x^2-2} - e^{x^2-2}}{x^2} = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2-2}}{x^2}$$

Consideramos la función $f'(x) = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2-2}}{x^2}$ se cumple que es continua en $[-2, -1]$

$$\text{Como } f'(-1) = \frac{(2(-1)^2 - 1)e^{(-1)^2-2}}{(-1)^2} = e^{-1} \approx 0.368 \text{ y } f'(-2) = \frac{(2(-2)^2 - 1)e^{(-2)^2-2}}{(-2)^2} = \frac{7e^2}{4} \approx 12.93.$$

Tenemos que $f'(-1) \approx 0.368 < e \approx 2.72 < f'(-2) \approx 12.93$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $c \in (-2, -1)$ tal que $f'(c) = e$

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 10$$

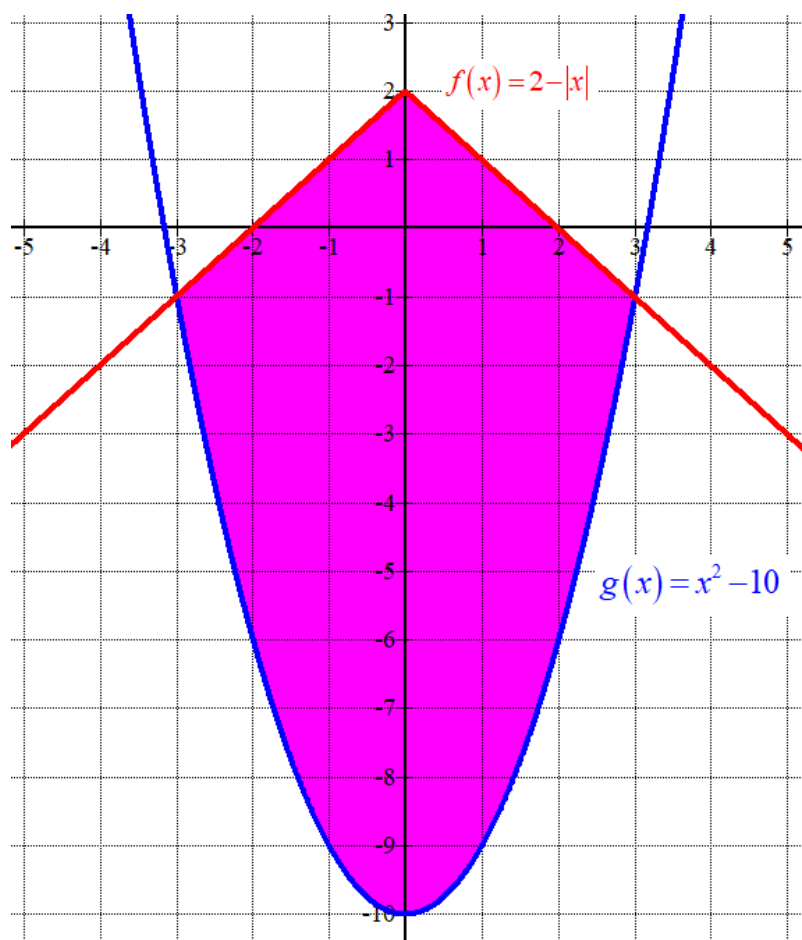
Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - |x| = x^2 - 10 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = x^2 - 10 & \text{si } x > 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ 0 \\ 2 + x = x^2 - 10 & \text{si } x < 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$1^{\text{a}} \text{ opción } (x > 0) \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 = x \\ \frac{-1-7}{2} = -4 < 0. \text{ No vale} \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ opción } (x < 0) \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{1+7}{2} = 4 > 0. \text{ No vale} \\ \frac{1-7}{2} = -3 = x \end{cases}$$



El área se encuentra entre $x = -3$ y $x = 3$. Dividimos el recinto en dos partes pues la función valor absoluto cambia de definición en $x = 0$.

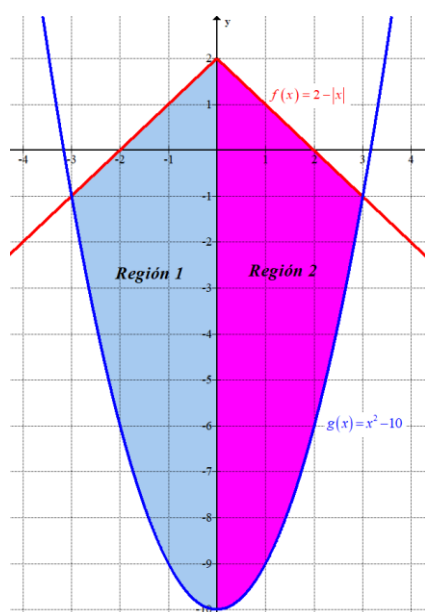
$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \left| \int_{-3}^0 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_{-3}^0 (2+x) - (x^2 - 10) dx \right| = \\
 &= \left| \int_{-3}^0 -x^2 + x + 12 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-3}^0 \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 12 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} + 12(-3) \right] \right| = \left| -9 - \frac{9}{2} + 36 \right| = \boxed{22.5u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área 2} &= \left| \int_0^3 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_0^3 (2-x) - (x^2 - 10) dx \right| = \\
 &= \left| \int_0^3 -x^2 - x + 12 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_0^3 \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 12 \cdot 0 \right] \right| = \left| -9 - \frac{9}{2} + 36 \right| = \boxed{22.5u^2}
 \end{aligned}$$

Sale el mismo valor de área ya que las funciones son simétricas.

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas. Área total vale 45 unidades cuadradas.

También podíamos haber utilizado la simetría de la función para calcular el área total como el doble del área de la región 2.



es igual a el doble de

