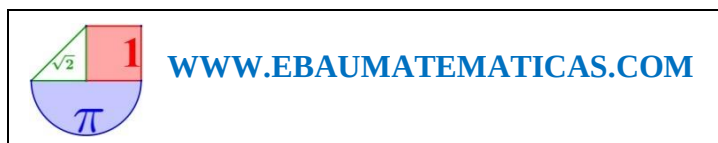


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en Asturias



Años 2017 a 2025



Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EBAU de Asturias desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	21
EBAU Extraordinaria 2024.....	41
EBAU Ordinaria 2024	60
EBAU Extraordinaria 2023.....	78
EBAU Ordinaria 2023	92
EBAU Extraordinaria 2022	108
EBAU Ordinaria 2022	123
EBAU Extraordinaria 2021.....	137
EBAU Ordinaria 2021	152
EBAU Extraordinaria 2020.....	165
EBAU Ordinaria 2020	178
EBAU Julio 2019.....	191
EBAU Junio 2019.....	205
EBAU Julio 2018.....	221
EBAU Junio 2018.....	236
EBAU Julio 2017.....	250
EBAU Junio 2017.....	263

PAU Extraordinaria 2025



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

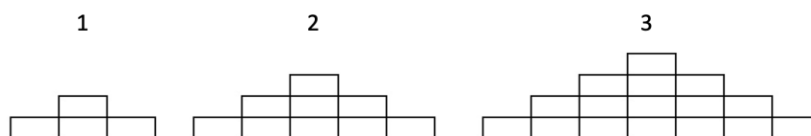
- Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**
- ¿Qué valor toma f en $x = 0$? Estudia la monotonía de f en $x = 0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$. **(2 puntos)**

Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x - 500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500 - x)$ kg.

- Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**
- ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.

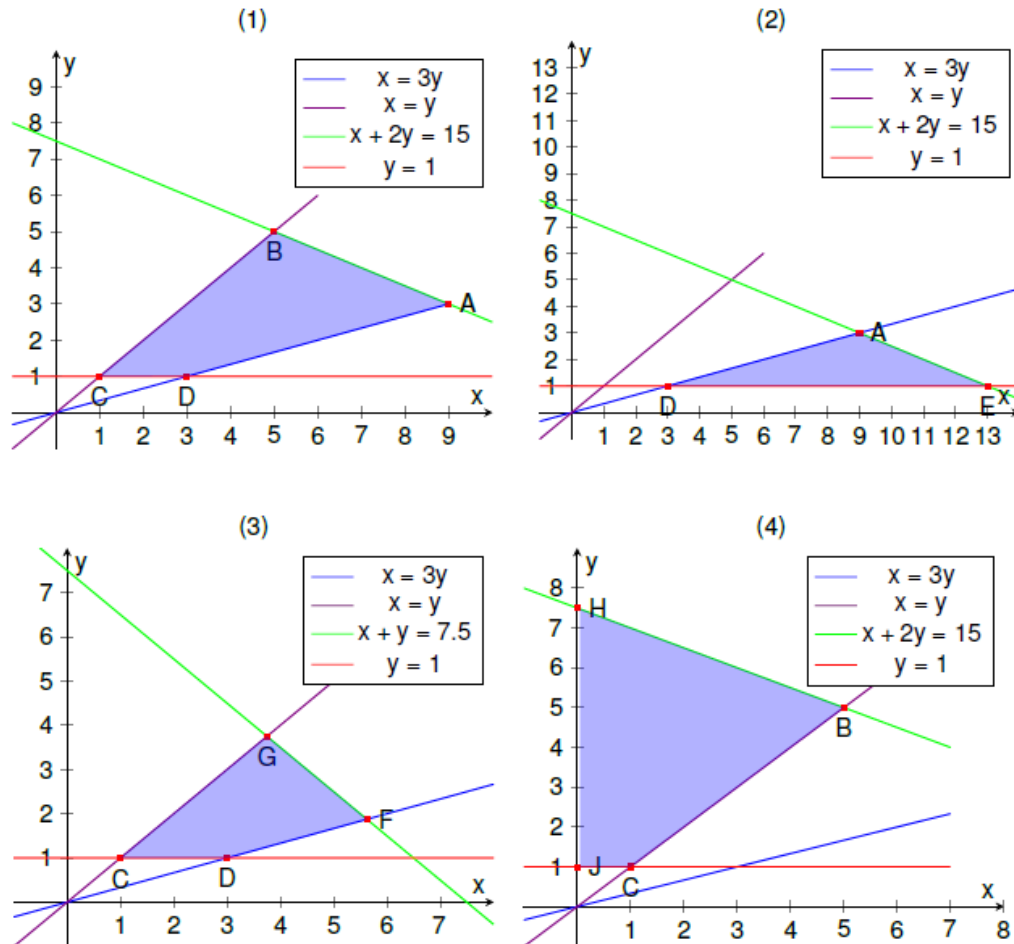


- Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: “con n represento el número de figura”). **(2 puntos)**
- Encuentra un número “ x ” mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente “ x ” rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

- ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**
- Si llamamos “ x ” al número de sesiones de tipo A e “ y ” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles

soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y :

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1,5 puntos)**
 b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
 b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local y el 60% de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

- a) Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**
- b) Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A, el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.

- a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**
- b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

- a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**
 - (1) (147.971, 149.029)
 - (2) (147.871, 149.129)
 - (3) (149, 371, 150, 629)
 - (4) (148.057, 148.943)

Pregunta 5. Opción B. * Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

- a) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**
- b) A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**
- c) Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

* Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n :

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

En ambas expresiones, $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**

b) ¿Qué valor toma f en $x=0$? Estudia la monotonía de f en $x=0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x=-1$ y $x=1$. **(2 puntos)**

a) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -x^3 - x^2 + 2x dx = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + K$$

Utilizamos que $F(1) = 2$ para obtener el valor de K .

$$F(x) = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + K \quad \left. \begin{array}{l} F(1) = 2 \\ F(x) = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + K \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{-1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 + K \Rightarrow 2 = \frac{-1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 = -3 - 4 + 12 + 12K \Rightarrow 12K = 19 \Rightarrow K = \frac{19}{12} \Rightarrow F(x) = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{19}{12}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{19}{12}$.

b) En $x=0$ la función vale $f(0) = -0^3 - 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$.

Calculamos la derivada de la función y su valor en $x=0$.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(0) = -3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$$

Como $f'(0) = 2 > 0$ la función crece en $x=0$.

La función vale 0 para $x=0$ y en este valor crece. Considerando el intervalo $(-1, 1)$ que contiene $x=0$ podemos asegurar que en este intervalo la función toma valores negativos (antes de 0) y valores positivos (después de 0).

Estudiamos la monotonía de la función en su dominio $\mathbb{R}$.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3) \cdot 2}}{2(-3)} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{-3} = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{7}}{-3} \approx 0.55 \\ \frac{1 + \sqrt{7}}{-3} \approx -1.22 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = -3(-2)^2 - 2(-2) + 2 = -6 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = -3 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right).$$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty, \frac{1+\sqrt{7}}{-3}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{7}}{-3}, +\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{-3}, \frac{1-\sqrt{7}}{-3}\right)$.

La función decrece indefinidamente a partir de $\frac{1-\sqrt{7}}{-3}$.

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje X.

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 2x = -x(x^2 + x - 2) = \dots$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\dots = -x(x-1)(x+2)$$

La función corta el eje X en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

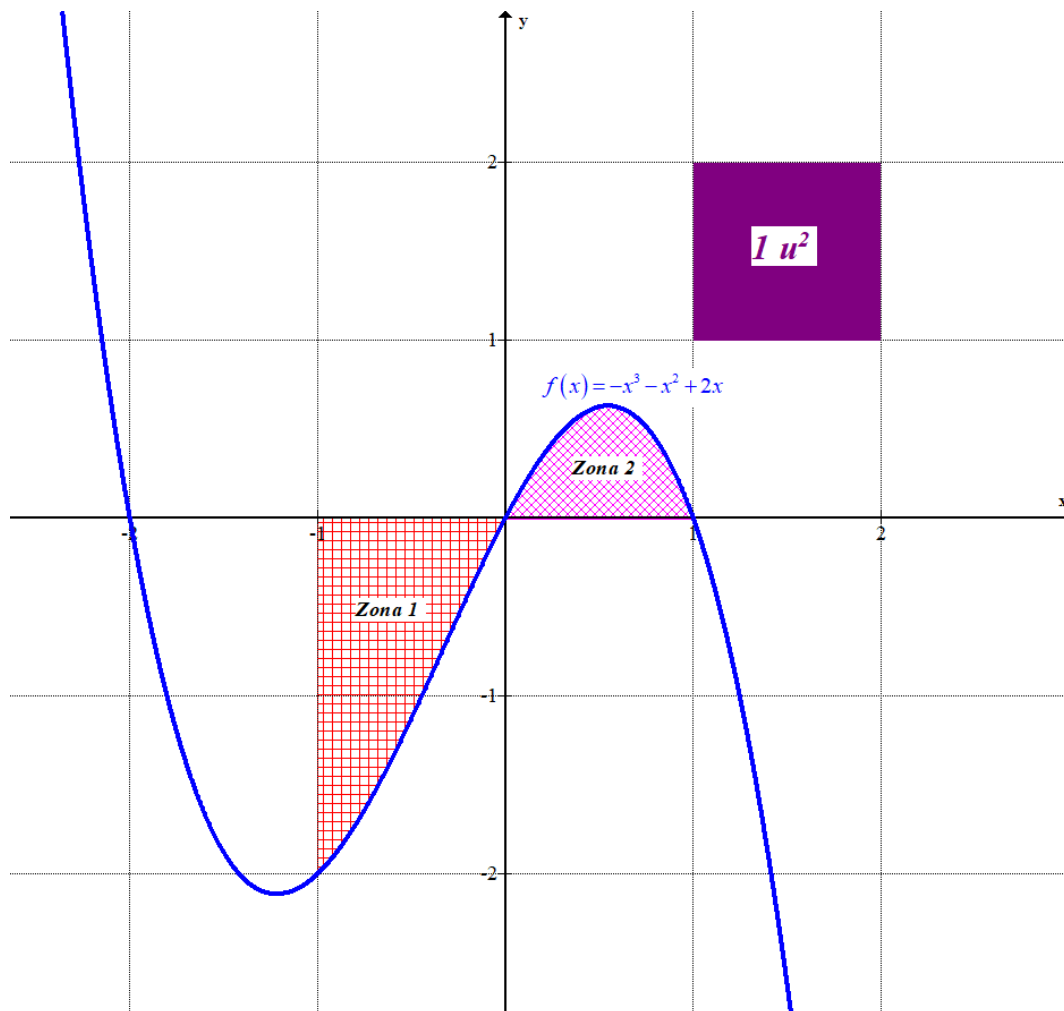
El recinto limitado por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ lo dividimos en dos partes para calcular el área. Como la función es negativa antes de $x = 0$ y positiva después, el área pedida será el valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 más la integral definida de la función entre 0 y 1 .

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^0 -x^3 - x^2 + 2x dx \right| + \int_0^1 -x^3 - x^2 + 2x dx = \left[\left[\frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right] + \left[\frac{-x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left[\left[\frac{-0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] - \left[\frac{-(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right] \right] + \left[\left[\frac{-1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 \right] - \left[\frac{-0^4}{4} - \frac{0^3}{3} + 0^2 \right] \right] =$$

$$= \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 \right| - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3}{2} = 1.5 u^2$$

El área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ vale 1.5 unidades cuadradas.



Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x-500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500-x)$ kg.

- a) Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**
- b) ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

- a) Con un precio de 500 €/kg se venden 5000 kg.

Con un precio de $x > 500$ €/kg se venden $5000 - 10(x - 500) = 5000 - 10x + 5000 = 10000 - 10x$ kg.

Con un precio de $x < 500$ €/kg se venden $5000 + 10(500 - x) = 5000 + 5000 - 10x = 10000 - 10x$ kg.

Los kilogramos vendidos en función del precio (x) son $10000 - 10x$ kg.

La expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x) es $f(x) = x(10000 - 10x) = 10000x - 10x^2$.

- b) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 10000x - 10x^2 \Rightarrow f'(x) = 10000 - 20x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 10000 - 20x = 0 \Rightarrow 20x = 10000 \Rightarrow x = \frac{10000}{20} = 500$$

Sustituimos $x = 500$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = 10000 - 20x \Rightarrow f''(x) = -20 \Rightarrow f''(500) = -20 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 500$

Las ventas son máximas para un precio de 500 €/kg.

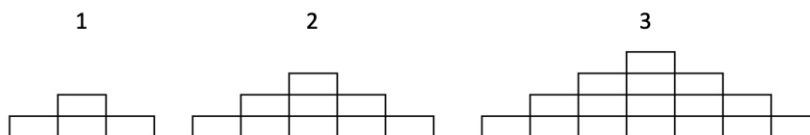
Como $f(500) = 10000 \cdot 500 - 10 \cdot 500^2 = 2500000$, el importe de las ventas máximas es de 2 millones y medio de euros.

Averiguamos cuando $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(10000 - 10x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 10000 - 10x = 0 \Rightarrow x = 1000 \end{cases}$$

Tiene sentido un precio entre 0 y 1000 €/kg, que es el intervalo donde las ventas dan valores positivos o cero.

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.



- a) Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: “con n represento el número de figura”). **(2 puntos)**
- b) Encuentra un número “ x ” mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente “ x ” rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

- a) Denominamos “ n ” al número de figura y “ r_n ” al número de rectángulos en la figura “ n ”. Indicamos en cada figura cuantos rectángulos aparecen.

$$n = 1 \rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2 = (1+1)^2$$

$$n = 2 \rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 = (2+1)^2$$

$$n = 3 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 = (3+1)^2$$

Siguiendo esta pauta en la figura 13 habrán $(13+1)^2 = 196$ rectángulos.

Siguiendo esta pauta en la figura “ n ” habrán $r_n = (n+1)^2$ rectángulos.

Lo comprobamos para $n = 4$.

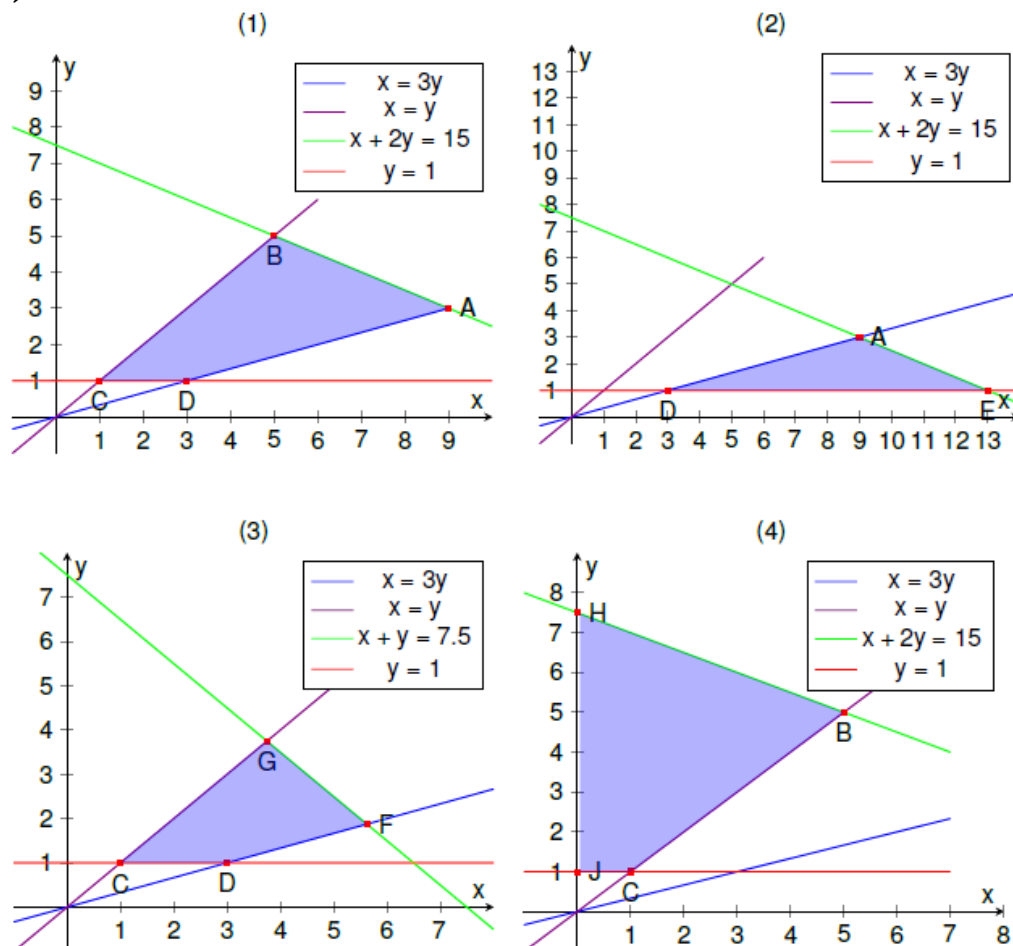
$$n = 4 \rightarrow \begin{cases} 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \\ (4+1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow ¡Se cumple!$$

- b) En la figura 13 hay 196 rectángulos. Probamos con la figura 19 donde hay $(19+1)^2 = 20^2 = 400$ rectángulos. Esta figura nos sirve, pero también valdría la figura 18 que tiene $(18+1)^2 = 19^2 = 361$ rectángulos. O la figura 17 que tiene $(17+1)^2 = 18^2 = 324$ rectángulos.

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**

b) Si llamamos “x” al número de sesiones de tipo A e “y” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

a) Con 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B necesitaría $8 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 540$ minutos = 9 horas.

Como solo dedica 7 horas y media a estas sesiones no sería posible lo planteado.

b) Llamamos “x” al número de sesiones de tipo A e “y” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta.

Obtenemos las restricciones del problema.

“Dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos (0.5 h), y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos (1 h). En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes” $\rightarrow 0.5x + y \leq 7.5 \rightarrow x + 2y \leq 15$.

“Al menos una sesión al día siempre es de tipo B” $\rightarrow y \geq 1$.

“Quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B” $\rightarrow x \geq y; x \leq 3y$

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

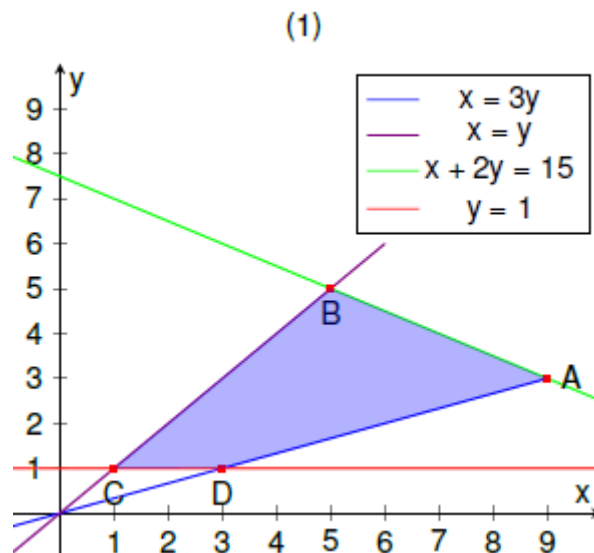
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 15 \\ y \geq 1 \\ y \leq x \\ x \leq 3y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema de inecuaciones no se corresponde con la gráfica (3) pues la recta $x + y = 7.5$ no se corresponde con ninguna restricción.

La región factible debe estar entre las rectas $y = x$ e $x = 3y$, por lo que no puede ser ni la (2) ni la (4).

La región factible se corresponde con la gráfica (1).



Los vértices de la región factible son A(9,3), B(5,5), C(1,1) y D(3,1).

- c) Si llamamos p al precio de las sesiones de tipo A, entonces el precio de las de tipo B es $3p$, así la función a maximizar son los beneficios que vienen expresados como $B(x, y) = px + 3py$. Queremos maximizar la función objetivo sujeta a las restricciones anteriores. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(9,3) \rightarrow B(9,3) = 9p + 9p = 18p$$

$$B(5,5) \rightarrow B(5,5) = 5p + 15p = 20p \quad \text{¡Máximo!}$$

$$C(1,1) \rightarrow B(1,1) = p + 3p = 4p$$

$$D(3,1) \rightarrow B(3,1) = 3p + 3p = 6p$$

El beneficio máximo se alcanza si en el día planea 5 sesiones de tipo A y 5 de tipo B.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y :

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1,5 puntos)**

b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

a) Intentamos resolver el sistema.

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow 10(y - m) + (10 + m)y = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y - 10m + 10y + my = 150 \Rightarrow (20 + m)y = 150 + 10m \Rightarrow \{ \text{Si } 20 + m \neq 0 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{150 + 10m}{20 + m}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{150 + 10m}{20 + m} - m = \frac{150 + 10m - 20m - m^2}{20 + m} = \frac{150 - 10m - m^2}{20 + m}}$$

Para cualquier valor de m distinto de -20 tenemos que $m + 20 \neq 0$ y el sistema se puede resolver

teniendo una única solución: $x = \frac{150 - 10m - m^2}{20 + m}$, $y = \frac{150 + 10m}{20 + m}$.

b) Para que el sistema tenga infinitas soluciones las dos ecuaciones deben ser proporcionales.

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = -10\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

Si tomamos $\lambda = -15$ y $m = -20$ las dos ecuaciones son proporcionales.

$$\left. \begin{cases} 10x - 10y = -10\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \\ \lambda = -15 \\ m = -20 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = -10(-15) \\ 10x + (10 - 20)y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 10y = 150 \\ 10x - 10y = 150 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x - 10y = 150 \Rightarrow x - y = 15 \Rightarrow \boxed{x = y + 15}$$

Las infinitas soluciones tienen la expresión $x = y + 15$. Si tomamos $y = 0$ tenemos que $x = 0 + 15 = 15$. Una de las soluciones es $x = 15$ e $y = 0$.

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
 b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C + D = E &\Rightarrow \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3m & m+3-3m \\ 2m & 2m+2-2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\begin{cases} 3mx + (3-2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{cases}}$$

El sistema que se obtiene de la ecuación matricial es $\left. \begin{matrix} 3mx + (3-2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{matrix} \right\}$.

- b) El sistema tiene la matriz de coeficientes $Co = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$Am = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m & m \\ 2m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Para que el sistema no tenga solución estas matrices deben tener distintos rangos, es decir, la matriz de coeficientes debe tener rango 1 (determinante nulo) y la matriz ampliada debe tener rango 2.

$$|Co| = \begin{vmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6m - 6m + 4m^2 = 0 \Rightarrow 4m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Comprobamos que para $m=0$ el rango de la matriz ampliada es 2.

Para $m=0$ la matriz ampliada queda $Am = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

El rango de la matriz ampliada es 2 y el rango de la matriz de coeficientes es menor de 2. Rangos distintos implica que el sistema no tiene solución.

Para $m=0$ el sistema queda $\left. \begin{matrix} 3y = 0 \\ 2y = 1 \end{matrix} \right\}$ y no tiene solución.

Pregunta 4. Opción A. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local y el 60% de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

- a) Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**
- b) Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pasamos los datos porcentuales a datos absolutos.

Supongamos que hay 1000 asistentes a un partido de fútbol. El 70% de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local ($0.70 \cdot 1000 = 700$). El resto, del equipo visitante ($1000 - 700 = 300$).

Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30% de los aficionados del equipo local ($0.30 \cdot 700 = 210$) y el 60% de los aficionados del equipo visitante ($0.60 \cdot 300 = 180$) compraron su entrada por internet.

Colocamos estos datos en una tabla.

	Internet	Taquilla	
Aficionado local	210		700
Aficionado visitante	180		300
			1000

Completamos la tabla.

	Internet	Taquilla	
Aficionado local	210	490	700
Aficionado visitante	180	120	300
	390	610	1000

- a) De los 1000 asistentes al partido 390 compraron su entrada por internet. La probabilidad de que al elegir un asistente al azar este haya comprado su entrada por internet vale $\frac{390}{1000} = 0.39$.
- b) En taquilla compraron la entrada 610 personas y 120 eran del equipo visitante. La probabilidad de que al elegir al azar una persona que ha comprado la entrada en taquilla esta sea aficionada del equipo visitante vale $\frac{120}{610} \approx 0.1967$.

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A, el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.

- a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**
 b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir un bolso tipo A, B o C respectivamente” y D a “el bolso es defectuoso”.

Sabemos que $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.35$, $P(C) = 1 - 0.3 - 0.35 = 0.35$, también sabemos que $P(D) = 0.03$, $P(D/A) = 0.03$ y $P(D/C) = 0.05$.

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.03 = 0.3 \cdot 0.03 + 0.35 \cdot P(D/B) + 0.35 \cdot 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.03 - 0.009 - 0.0175 = 0.35 \cdot P(D/B) \Rightarrow P(D/B) = \frac{0.0035}{0.35} = 0.01$$

La probabilidad de que un bolso del tipo B sea defectuoso es de 0.01.

- b) Calculamos $P(A/D)$, $P(B/D)$ y los comparamos.

$$\left. \begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.03} = 0.3 \\ P(B/D) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.01}{0.03} = \frac{7}{60} \approx 0.1167 \end{aligned} \right\}$$

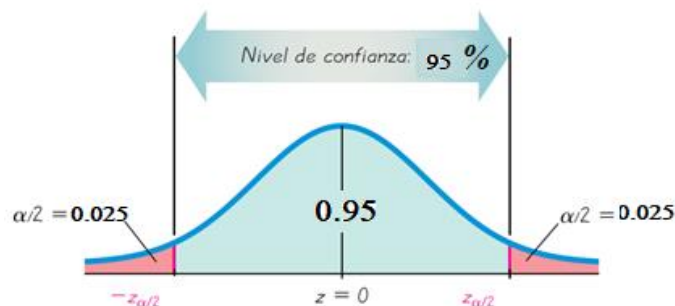
Hemos visto que $P(A/D) = 0.3 > 0.1167 = P(B/D)$. Es más probable que el bolso defectuoso sea del tipo A.

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

- a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**
- (1) (147.971, 149.029)
 (2) (147.871, 149.129)
 (3) (149, 371, 150, 629)
 (4) (148.057, 148.943)

Sea X = El peso en gramos de los yogures de cierta marca. $X = N(\mu, 2.7)$.

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0.90$; $F(1,64) = 0.95$; **$F(1,96) = 0.975$** ; $F(2,33) = 0.99$ y $F(2,58) = 0.995$.

Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.96 \cdot \frac{2.7}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = \frac{5.292}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5.292}{0.5} = 10.584 \Rightarrow \boxed{n = 10.584^2 = 112.02}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 113 yogures.

- b) El intervalo (3) no es válido pues la media muestral ($\bar{x} = 148.5$ gramos) no pertenece al intervalo (149, 371, 150, 629).
 El intervalo (1) tiene la amplitud $149.029 - 147.971 = 1.058$.
 El intervalo (2) tiene la amplitud $149.129 - 147.871 = 1.258$.
 El intervalo (4) tiene la amplitud $148.943 - 148.057 = 0.886$.

La mayor amplitud la tiene el intervalo (2) que se corresponde con mayor nivel de confianza. Obtenemos el valor de este nivel de confianza.
 El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{1.258}{2} = 0.629$$

Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.629 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2.7}{\sqrt{100}} \Rightarrow 0.629 = 0.27 z_{\alpha/2} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.629}{0.27} \approx 2.33$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; **$F(2,33) = 0,99$** y $F(2,58) = 0,995$.

$$\text{Tenemos que } 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.98.$$

El nivel de confianza del intervalo (147.871, 149.129) es del 98%.

Pregunta 5. Opción B. * Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

- Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**
- A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**
- Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0.90$; $F(1,64) = 0.95$; $F(1,96) = 0.975$; $F(2,33) = 0.99$ y **$F(2,58) = 0.995$** .

Al no tener una proporción muestral se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es $p = 0.5$.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{2.58} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{2.58} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{2.58} \right)^2} = 665.64 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo es de 666 clientes.

b) Tamaño de la muestra $n = 600$ clientes.

La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$p = \frac{0.395 + 0.475}{2} = 0.435$$

De los 600 clientes los que hicieron todas sus gestiones por internet en dicha muestra fueron $0.435 \cdot 600 = 261$ clientes.

- No tiene sentido pues la proporción de 0.5 no pertenece al intervalo de confianza (0.395, 0.475) obtenido con un nivel de confianza del 95%. Es posible que sea esa la verdadera proporción (5% de posibilidades), pero es mucho más probable que no lo sea (95% de posibilidades).

PAU Ordinaria 2025



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

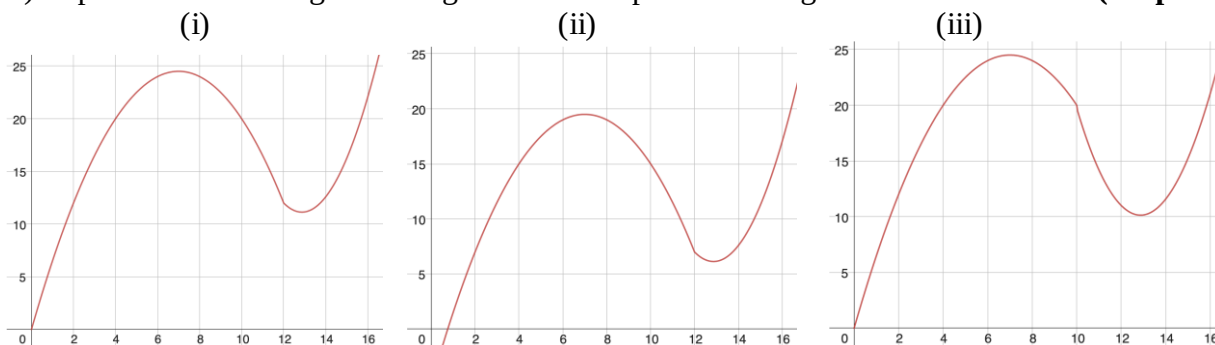
- Responde en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 12 \\ -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \leq 20 \end{cases}$$

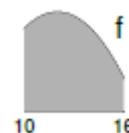
donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

- ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**
- Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**
- Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f . **(0.5 puntos)**

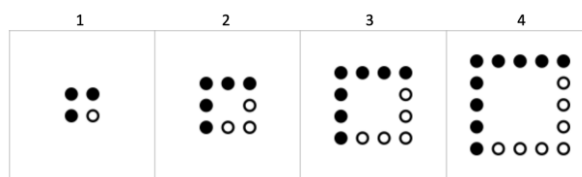


Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

- Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**
- La función f determina, entre $x = 10$ m y $x = 16$ m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



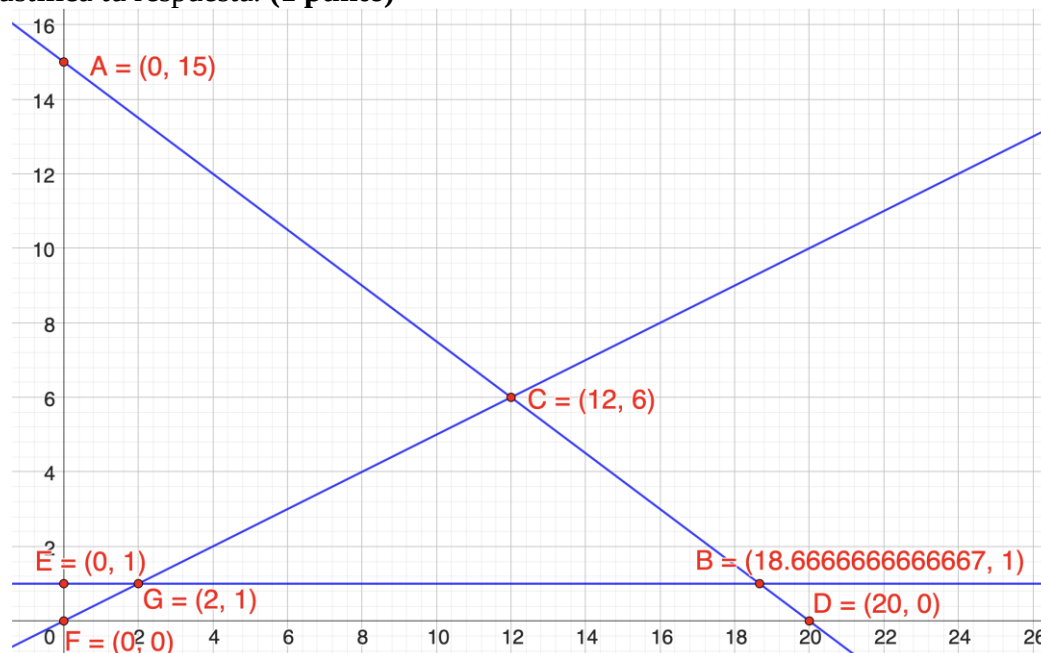
- El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que

relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: n es el número de figura). **(2 puntos)**

- b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

- a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**
- b) Siendo “ x ” el número de viajes en el dragón rojo e “ y ” el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción. Señala los vértices (p. ej.: B, D, F y G) y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



- c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción A. En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, “ x ” e “ y ”. Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

- a) Si $m = 15$, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**
- b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**
- c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2} D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
- b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75% tienen “siga jugando” y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen “siga jugando” y el resto, otros premios.

- a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**
- b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía “siga jugando”, ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60% combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

- a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**
- b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**
- c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

- a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90% con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**
- b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95% de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947 , 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**
- c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**
- (i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor (A) (10.0947 , 11.9053)
- (ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño (B) (10.9238 , 13.0762)
- (iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente (C) (11.216 , 12.784)

Pregunta 5. Opción B. * Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n . En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90% y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95% de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102, 0.7898), (0.5565, 0.7435) y (0.6248, 0.7752).

- Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90% de confianza? **(1.5 puntos)**
- Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n ? ¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

* Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n :

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

En ambas expresiones, $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$.

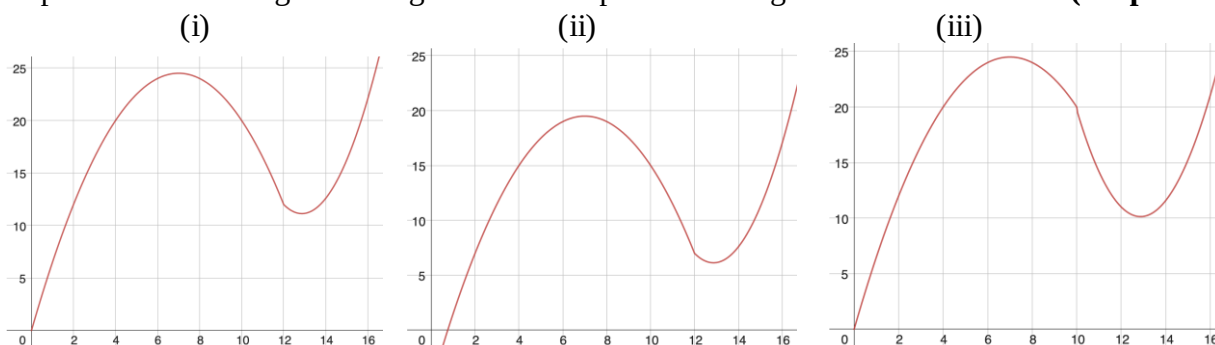
SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 12 \\ -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \leq 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

- a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**
 b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**
 c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f . **(0.5 puntos)**



a) En el intervalo $[0, 12)$ la función tiene la expresión $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x$. Su derivada es

$f'(x) = -x + 7$. Esta derivada se anula para $x = 7$.

- En el intervalo $[0, 7)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -1 + 7 = 6 > 0$. La función crece en $[0, 7)$.
- En el intervalo $(7, 12)$ tomamos $x = 8$ y la derivada vale $f'(8) = -8 + 7 = -1 < 0$. La función decrece en $(7, 12)$.

En el intervalo $(12, 20]$ la función tiene la expresión $f(x) = -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220$. Su

derivada es $f'(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34$. Estudiamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34 = 0 \Rightarrow x^2 - 108x + 1224 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{108 \pm \sqrt{(-108)^2 - 4 \cdot 1224}}{2} = \frac{108 \pm 12\sqrt{47}}{2} = 54 \pm 6\sqrt{47} = \begin{cases} 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.86 \in (12, 20) \\ 54 + 6\sqrt{47} \approx 95.1 \notin (12, 20) \end{cases}$$

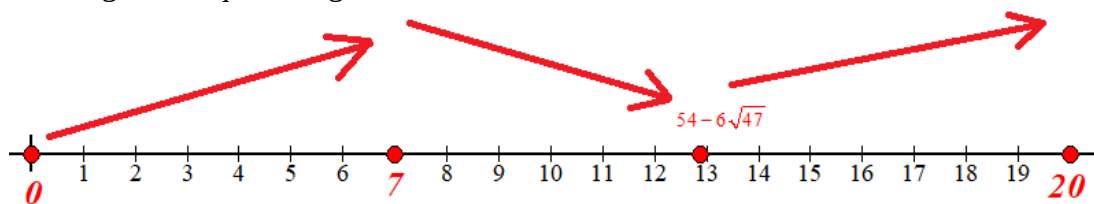
- En el intervalo $(12, 54 - 6\sqrt{47})$ tomamos $x = 12.5$ y la derivada vale

$f'(12.5) = -\frac{1}{36}12.5^2 + 3 \cdot 12.5 - 34 = -0.8 < 0$. La función decrece en $(12, 54 - 6\sqrt{47})$.

- En el intervalo $(54 - 6\sqrt{47}, 20)$ tomamos $x=13$ y la derivada vale

$$f'(13) = \frac{-1}{36}13^2 + 3 \cdot 13 - 34 = 0.3 > 0. \text{ La función crece en } (54 - 6\sqrt{47}, 20).$$

La función sigue el esquema siguiente.



Resumiendo: La función crece en $[0, 7) \cup (54 - 6\sqrt{47}, 20)$ y decrece en $(7, 54 - 6\sqrt{47})$.

- b) En el segundo 1 la función vale $f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 = 6.5$. En el segundo 7 la función vale

$$f(7) = -\frac{1}{2} \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 = 24.5. \text{ La función crece del segundo 1 al 7 y es continua por lo que en}$$

ningún momento alcanza un valor inferior a 5. En el segundo 12.86 la función toma el valor

$$\frac{-1}{108}(54 - 6\sqrt{47})^3 + \frac{3}{2}(54 - 6\sqrt{47})^2 - 34(54 - 6\sqrt{47}) + 220 = 11.1. \text{ La función decrece del}$$

segundo 7 al 12.86 pero no baja de 11, por lo que sigue sin alcanzar un valor inferior a 5.

Del segundo 12.86 al 20 la función crece, partiendo de un valor de 11.1, por lo que tampoco en este intervalo toma un valor inferior a 5.

La función no toma nunca un valor inferior a 5 km/h.

¿Supera los 70 km/h en algún momento?

La función empieza valiendo 6.5 km/h, crece hasta 24.5 en el segundo 7, baja hasta 11.1 en el segundo 12.86 y crece hasta el segundo 20 que alcanza un valor de

$$\frac{-1}{108}20^3 + \frac{3}{2}20^2 - 34 \cdot 20 + 220 = 65.9. \text{ La función no supera el valor 70 en ningún momento.}$$

- c) Las tres gráficas se ajustan al esquema de la evolución de la función obtenido en el apartado a). Hemos visto que la función alcanza el valor 24.5 en el segundo 7 que es un máximo relativo de la función. Este requisito no lo cumple la gráfica (ii) pues en el segundo 7 alcanza un valor inferior a 20.

En la gráfica (iii) observamos que la función presenta un cambio brusco para $x=10$, lo cual no debe ocurrir pues el cambio de definición se produce para $x=12$.

La gráfica que se corresponde con la función es la gráfica (i).

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**

b) La función f determina, entre $x = 10$ m y $x = 16$ m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie.

¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30 dx = -\frac{1}{12}x^3 + 3x^2 - 30x + C$$

Obtenemos el valor de C necesario para que se cumpla que $F(2) = 2$.

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{12}x^3 + 3x^2 - 30x + C \\ F(2) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = -\frac{1}{12} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 30 \cdot 2 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = -\frac{8}{12} + 12 - 60 + C \Rightarrow \boxed{C = 2 + \frac{2}{3} - 12 + 60 = \frac{152}{3}}$$

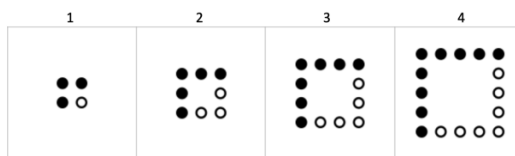
La primitiva que buscamos es $F(x) = -\frac{1}{12}x^3 + 3x^2 - 30x + \frac{152}{3}$.

b) Calculamos el área de la zona a pintar como la integral definida de la función entre 10 y 16.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{10}^{16} f(x) dx = \left[-\frac{1}{12}x^3 + 3x^2 - 30x \right]_{10}^{16} = \\ &= \left[-\frac{1}{12} \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 - 30 \cdot 16 \right] - \left[-\frac{1}{12} \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 30 \cdot 10 \right] = \\ &= -\frac{1}{12} \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 - 30 \cdot 16 + \frac{1000}{12} = \boxed{30 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

Debemos pintar 30 metros cuadrados. Con cada bote se pintan 15 metros cuadrados, por lo que necesitaremos 2 botes de pintura.

Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



- a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: n es el número de figura). **(2 puntos)**
- b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

- a) Pasamos los datos visuales a datos numéricos. Denominamos “ n ” al número de figura, “ b ” al número de puntos blancos.

Indicamos en cada figura cuantos puntos blancos aparecen y cuantos negros.

$$n = 1 \rightarrow \begin{cases} (1+1) + 1 = 3 \text{ puntos negros} \\ 1 \text{ punto blanco} \end{cases}$$

$$n = 2 \rightarrow \begin{cases} (2+1) + 2 = 5 \text{ puntos negros} \\ 2 + (2-1) = 3 \text{ puntos blancos} \end{cases}$$

$$n = 3 \rightarrow \begin{cases} (3+1) + 3 = 7 \text{ puntos negros} \\ 3 + (3-1) = 5 \text{ puntos blancos} \end{cases}$$

$$n = 4 \rightarrow \begin{cases} (4+1) + 4 = 9 \text{ puntos negros} \\ 4 + (4-1) = 7 \text{ puntos blancos} \end{cases}$$

Siguiendo esta pauta en la figura 17 habrán $(17+1) + 17 = 35$ puntos negros y $17 + (17-1) = 33$ puntos blancos.

Siguiendo esta pauta en la figura “ n ” habrán $(n+1) + n = 2n+1$ puntos negros y

$n + (n-1) = 2n-1$ puntos blancos.

- b) El número de puntos negros de una figura cualquiera es $2n+1$. Este valor nunca puede ser par, es siempre impar, pues es la suma de un número par ($2n$) más 1 unidad.

En ninguna figura pueden aparecer un número par de puntos negros.

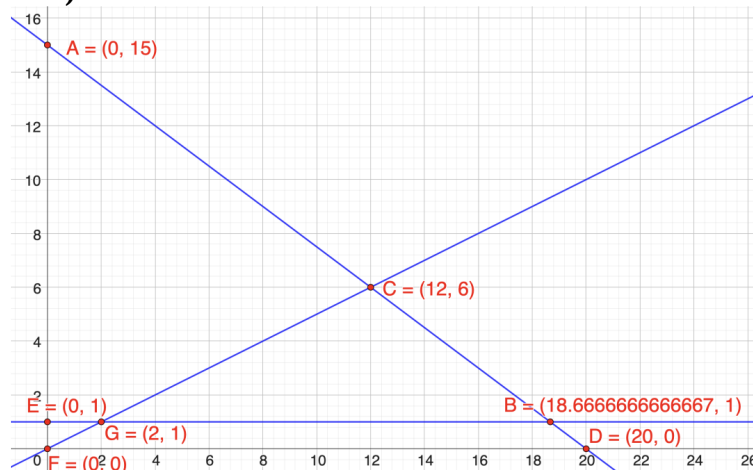
Otra forma de razonarlo es que si observamos la secuencia del número de puntos negros es:

$$3, 5, 7, 9, \dots$$

En cada nueva figura se añaden 2 puntos negros más por lo que el número de puntos negros empieza siendo impar y se va a mantener siempre con valor impar.

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

- a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**
- b) Siendo “x” el número de viajes en el dragón rojo e “y” el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción. Señala los vértices (p. ej.: B, D, F y G) y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



- c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

- a) Llamamos “x” al número de viajes en el dragón rojo e “y” al número de viajes en el gran loop.

“Le quedan 2 horas = 120 minutos” $\rightarrow 6x + 8y \leq 120$.

“Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop” $\rightarrow y \geq 1; x \leq 2y$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 8y \leq 120 \\ y \geq 1 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 60 \\ y \geq 1 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop?

$$x = 8 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 24 + 4y \leq 60 \\ y \geq 1 \\ 8 \leq 2y \\ 8 \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y \leq 36 \\ y \geq 1 \\ 4 \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 9 \\ y \geq 1 \\ 4 \leq y \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \leq y \leq 9$$

En estas circunstancias puede hacer entre 4 y 9 viajes en el gran loop.

¿Puede subir 6 veces a cada atracción?

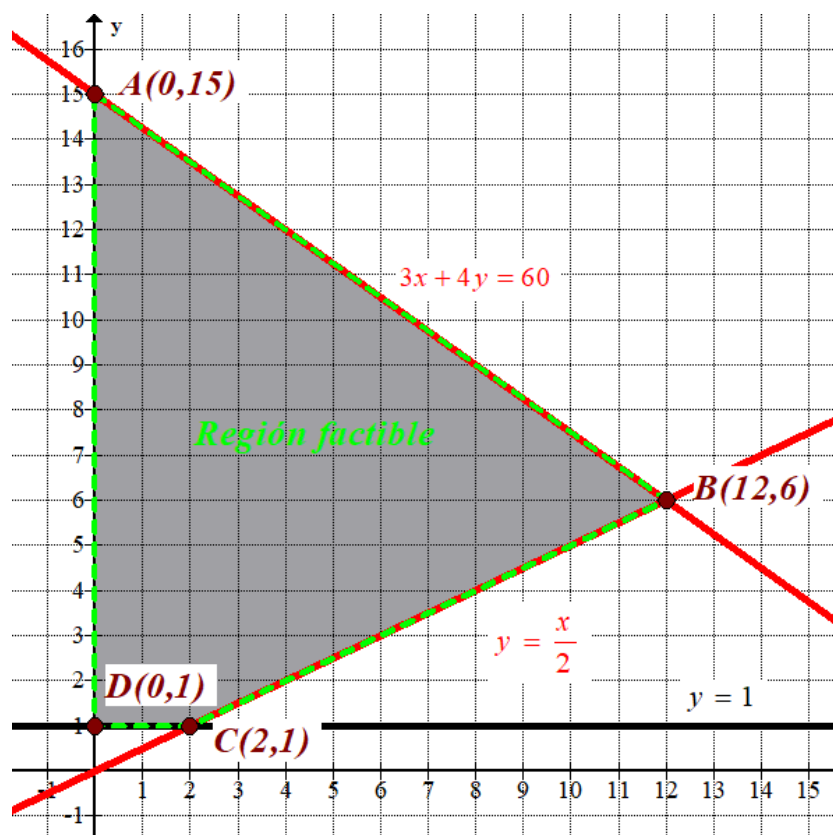
$$\left. \begin{array}{l} x=6 \\ y=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \leq 60 \\ 6 \geq 1 \\ 6 \leq 2 \cdot 6 \\ 6 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18 + 24 \leq 60 \\ 6 \geq 1 \\ 6 \leq 12 \\ 6 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

Si es posible, pues se cumplen todas las restricciones expresadas como inecuaciones.

b) Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 60 \\ y \geq 1 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante ($$

$x \geq 0; y \geq 0$) situada por encima de la recta horizontal ($y \geq 1$), por encima de la recta que pasa por el origen ($x \leq 2y$) y por debajo de la recta decreciente ($3x + 4y \leq 60$).



c) La función objetivo es el coste de los viajes $C(x, y) = 5x + 3y$. Buscamos su valor máximo y mínimo en la región factible. Valoramos la función en cada vértice.

$$A(0, 15) \rightarrow C(0, 15) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 15 = 45$$

$$B(12, 6) \rightarrow C(12, 6) = 5 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 78 \text{ Máximo}$$

$$C(2, 1) \rightarrow C(2, 1) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13$$

$$D(0, 1) \rightarrow C(0, 1) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \text{ Mínimo}$$

Como máximo puede gastar 78 € haciendo 12 viajes con el dragón rojo y 6 con el gran loop. Como mínimo puede gastar 3 € haciendo 1 viaje con el dragón rojo y 0 con el gran loop.

Pregunta 3. Opción A. En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, “x” e “y”. Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

- a) Si $m = 15$, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**
 b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**
 c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

a) Sustituimos en el sistema el valor de m y lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \\ m = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + 15y = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90 - 3y \\ 2x + 15y = 225 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(90 - 3y) + 15y = 225 \Rightarrow 180 - 6y + 15y = 225 \Rightarrow 9y = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = 90 - 3 \cdot 5 = 75}$$

Con $m = 15$ el pase VIP cuesta 75 € y el normal 5 €.

b) Resolvemos el sistema sin darle ningún valor concreto a m .

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90 - 3y \\ 2x + my = 15m \end{cases} \Rightarrow 180 - 6y + my = 15m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m - 6)y = 15m - 180 \Rightarrow (m - 6)y = 15(m - 12) \Rightarrow \dots$$

Nos surgen dos situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m = 6$

Seguimos resolviendo el sistema.

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ (m - 6)y = 15(m - 12) \end{cases} \Rightarrow 0 = 15(6 - 12) \rightarrow 0 = -90 \text{ ¡Imposible!}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

CASO 2. $m \neq 6$

Seguimos resolviendo el sistema.

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} (m - 6)y = 15(m - 12) \\ m \neq 6 \rightarrow m - 6 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{15(m - 12)}{m - 6}} \Rightarrow x = 90 - 3 \frac{15(m - 12)}{m - 6} =$$

$$= \frac{90m - 540 - 45m + 540}{m - 6} = \boxed{\frac{45m}{m - 6} = x}$$

En este caso el sistema tiene una única solución $x = \frac{45m}{m - 6}$, $y = \frac{15(m - 12)}{m - 6}$.

Si tomamos $m = 5$ el sistema tiene solución, pero la solución es $x = \frac{45 \cdot 5}{5 - 6} = -225$, e

$y = \frac{15(5 - 12)}{5 - 6} = 105$. Esta solución es absurda pues tenemos un valor negativo para las entradas VIP.

c) Hemos visto en el apartado anterior que el sistema no tiene solución para $m = 6$.

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2}D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
 b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C &= \frac{1}{2}D + E \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -m-m & 3 \\ 3m-8-m & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3m-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ m-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} -2mx+3y \\ (2m-8)x-9y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ m-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -2mx+3y=2 \\ (2m-8)x-9y=m-4 \end{cases}} \end{aligned}$$

El sistema que se obtiene de la ecuación matricial es $\begin{cases} -2mx+3y=2 \\ (2m-8)x-9y=m-4 \end{cases}$.

- b) Para que el sistema tenga infinitas soluciones el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo. El sistema es $\begin{pmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ m-4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18m - 6m + 24 = 0 \Rightarrow 12m = -24 \Rightarrow \boxed{m = \frac{-24}{12} = -2}$$

Comprobamos que para $m = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Para $m = -2$ el sistema queda $\begin{cases} -2(-2)x+3y=2 \\ (2(-2)-8)x-9y=-2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=2 \\ -12x-9y=-6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 4x+3y=2 \\ -12x-9y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=2 \\ 4x+3y=2 \end{cases} \Rightarrow 4x+3y=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y = 2 - 4x \Rightarrow y = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

Para $m = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75% tienen “siga jugando” y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen “siga jugando” y el resto, otros premios.

- a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**
 b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía “siga jugando”, ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

a) La probabilidad de obtener el peluche gigante al elegir un sobre verde es $\frac{3}{30} = 0.1$.

La probabilidad de obtener el peluche gigante al elegir un sobre rojo es $\frac{2}{40} = 0.05$.

Es más probable obtener el peluche gigante eligiendo un sobre verde ($0.1 > 0.05$).

De los 70 sobres hay $2 + 3 = 5$ que tienen un peluche gigante de premio, la probabilidad de ganar un peluche gigante al elegir un sobre al azar es $\frac{5}{70} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$.

b) De los 40 sobres rojos hay $0.75 \cdot 40 = 30$ que tienen “siga jugando”. De los 40 sobres verdes hay $40 - 2 - 30 = 8$ que tienen otro tipo de premio.

De los 30 sobres verdes hay $30 - 3 - 23 = 4$ que tienen otro tipo de premio.

Hay $8 + 4 = 12$ sobres con otro tipo de premio y de estos solo 4 son verdes. La probabilidad de que habiendo elegido un sobre con otro tipo de premio este sobre sea de color verde es

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0.3333.$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Para evitar todo este razonamiento, podemos completar una tabla con los datos.

	Peluches	Siga jugando	Otro premio	TOTAL
Sobres verdes	3	23		30
Sobres rojos	2	$0.75 \cdot 40 = 30$		40
TOTAL				70

Completamos la tabla.

	Peluches	Siga jugando	Otro premio	TOTAL
Sobres verdes	3	23	4	30
Sobres rojos	2	$0.75 \cdot 40 = 30$	8	40
TOTAL	5	53	12	70

a) Calculamos las probabilidades de obtener peluche con sobres verdes o con sobres rojos.

$$\left. \begin{array}{l} P(P/V) = \frac{3}{30} = 0.1 \\ P(P/R) = \frac{2}{40} = 0.05 \end{array} \right\} \Rightarrow P(P/V) = 0.1 > 0.05 = P(P/R)$$

Es más probable ganar un peluche gigante si elegimos un sobre verde.

Hay 5 sobres con un premio de peluche gigante de un total de 70 sobres. La probabilidad de obtener un peluche gigante al elegir un sobre sin mirar el color es $\frac{5}{70} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$.

- b) Hay 12 sobres con “otro tipo de premio” y 3 de estos sobres son verdes. La probabilidad de que habiendo elegido un sobre con “otro tipo de premio” este sobre sea de color verde es $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$.

Pregunta 4. Opción B. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60% combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

- a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**
- b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**
- c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Hay 200 trabajadores en el parque. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años, es decir, $0.80 \cdot 200 = 160$ son menores de 30 años.

De los 160 trabajadores menores de 30 años el 60% combinan el trabajo con estudios, es decir, $0.6 \cdot 160 = 96$ trabajadores son menores de 30 años que combinan el trabajo con estudios.

Como son 120 trabajadores que compaginan el trabajo con estudios entonces $120 - 96 = 24$ son trabajadores de 30 años o más que compaginan el trabajo con los estudios.

Ponemos todos estos datos en una tabla para que estén ordenados.

	Estudian	No estudian	TOTALES
Menores de 30 años	96		160
30 años o más			
TOTALES	120		200

Completamos la tabla

	Estudian	No estudian	TOTALES
Menores de 30 años	96	64	160
30 años o más	24	16	40
TOTALES	120	80	200

a) Hay 64 personas menores de 30 años que no estudian.

b) Hay 120 personas que compaginan trabajo y estudios y de estas son 96 las menores de 30 años. La probabilidad de que al elegir un trabajador que compagina trabajo y estudios este sea menor de 30 años vale $\frac{96}{120} = 0.8$.

c) Llamamos M al suceso “ser menor de 30 años” y C al suceso “estudiar”.

Para que sean independientes se debe cumplir $P(M \cap C) = P(M)P(C)$.

$$\left. \begin{aligned} P(M \cap C) &= \frac{96}{200} = 0.48 \\ P(M)P(C) &= \frac{160}{200} \cdot \frac{120}{200} = 0.48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M \cap C) = 0.48 = P(M)P(C)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos son independientes.

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

- a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90% con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**
- b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95% de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947, 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**
- c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**

- (i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor (A) (10.0947, 11.9053)
- (ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño (B) (10.9238, 13.0762)
- (iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente (C) (11.216, 12.784)

Sea X = El gasto por visitante en una atracción. $X = N(\mu, 8)$.

- a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 2.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 1.64 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{13.12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{13.12}{2} = 6.56 \Rightarrow \boxed{n = 6.56^2 = 43.03}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 44 visitantes.

- b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

El gasto medio es el valor central del intervalo de confianza.

$$\mu = \frac{11.0947 + 12.9053}{2} = 12$$

El gasto medio por visitante en esa muestra es de 12 €.

El error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{12.9053 - 11.0947}{2} = 0.9053$$

Utilizamos la fórmula del error, lo igualamos a 0.9053 y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.9053 = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.9053 = \frac{15.68}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{15.68}{0.9053} \Rightarrow n = \left(\frac{15.68}{0.9053} \right)^2 = 299.99$$

El tamaño de la muestra ha sido de 300 visitantes.

c) (i) Con un nivel de confianza mayor el valor de $z_{\alpha/2}$ debe ser mayor y el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

también es mayor, el intervalo de confianza debe tener mayor amplitud, siendo el mismo valor central, por lo que debe ser la opción (B).

(ii) Con una muestra de mayor tamaño (n) el error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ disminuye, entonces el

intervalo debe tener menor amplitud, siendo el mismo valor central, se debe corresponder con la opción (C).

(iii) Con una media muestral diferente el intervalo debe moverse sin cambiar de amplitud, cambia el valor central del intervalo, debe corresponderse con la opción (A). La media muestral ha bajado 1 €.

Las correspondencias son (i) $\rightarrow$ (B), (ii) $\rightarrow$ (C) y (iii) $\rightarrow$ (A).

Pregunta 5. Opción B. * Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n . En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90% y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95% de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102, 0.7898), (0.5565, 0.7435) y (0.6248, 0.7752).

- a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90% de confianza? **(1.5 puntos)**
- b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n ? ¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

Tenemos dos muestras del mismo tamaño: $n_1 = n_2$ y con porcentaje de visitantes que realiza alguna compra con valor $p_1 = 0.7$ y $p_2 = ?$.

- a) El valor central del intervalo es el valor de la proporción muestral.

$$(0.6102, 0.7898) \rightarrow p = \frac{0.6102 + 0.7898}{2} = 0.7$$

$$(0.5565, 0.7435) \rightarrow p = \frac{0.5565 + 0.7435}{2} = 0.65$$

$$(0.6248, 0.7752) \rightarrow p = \frac{0.6248 + 0.7752}{2} = 0.7$$

A la primera muestra corresponden el primer y el tercer intervalo pues tienen la misma proporción muestral que la primera muestra 0.7.

Obtenemos el error del primer y tercer intervalo. Sabemos que es la mitad de la amplitud.

$$(0.6102, 0.7898) \rightarrow Error = \frac{0.7898 - 0.6102}{2} = 0.0898$$

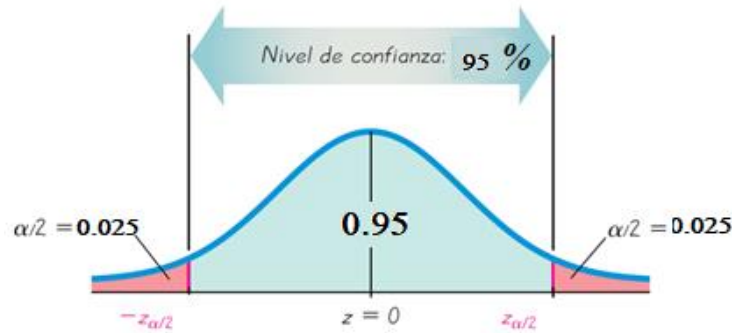
$$(0.6248, 0.7752) \rightarrow Error = \frac{0.7752 - 0.6248}{2} = 0.0752$$

Con un nivel de confianza del 90 % (menor que el 95%) se obtiene un valor de $z_{\alpha/2}$ menor y el error también será menor, por lo que el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de confianza del 90% debe ser el tercero (0.6248, 0.7752).

- b) En la segunda muestra el intervalo de confianza es (0.5565, 0.7435) con una proporción muestral de $p_2 = 0.65$. En esta muestra el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$(0.5565, 0.7435) \rightarrow Error = \frac{0.7435 - 0.5565}{2} = 0.0935$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0,0935 = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,65 \cdot 0,35}{n}} \Rightarrow \frac{0,0935}{1,96} = \sqrt{\frac{0,2275}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0,0935}{1,96} \right)^2 = \frac{0,2275}{n} \Rightarrow n = \frac{0,2275}{\left(\frac{0,0935}{1,96} \right)^2} = 99,97 \end{aligned}$$

El número de visitantes cogidos en la muestra es de 100.

Como la proporción de visitantes que compraron fue del 0.65 entonces $0,65 \cdot 100 = 65$ visitantes de la muestra elegida compraron algo en la tienda del parque de atracciones.



Universidad de
Oviedo

EBAU Extraordinaria 2024
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [1.25 puntos] Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [1.25 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

- a) [1.75 puntos] ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
- b) [0.75 puntos] Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + a & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

- a) [0.75 puntos] Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.
- b) [1.75 puntos] Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 300]$. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

- a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.
- b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

- a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?
- b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

- a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES**Pregunta 1.** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1.25 puntos]** Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} A \cdot B - C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2m+1 \\ -1-m & -m+m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2m+1 \\ -1-m & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+m & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A \cdot B - C) \cdot D = E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ (-1+m)x+y=1 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} x+y=1 \\ (-1+m)x+y=1 \end{cases}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+m & 1 \end{pmatrix} \text{ y el de la matriz ampliada } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1+m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1+m & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1+m) = 2 - m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

Analizamos las dos situaciones que se plantean.

- Si $m \neq 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.
El sistema queda $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones iguales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+y=1$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Conclusión: El sistema tiene solución para cualquier valor de m . La solución es única cuando $m \neq 2$.

Resolvemos el sistema para $m = -1$. Sabemos que tiene solución única.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1 - x \\ -2x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 1 - x = 1 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{y = 1 - 0 = 1}$$

Para $m = -1$ la solución es $x = 0$, $y = 1$.

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

- a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
- b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

- a) Llamamos “x” al número de adultos e “y” al número de menores.
Obtenemos las restricciones.

“El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas” $\rightarrow x + y \leq 180$

“El número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores” $\rightarrow x \geq \frac{y}{4}$.

“Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará” $\rightarrow x + y \geq 45$

“El número de menores, al menos, la mitad del número de adultos” $\rightarrow y \geq \frac{x}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ x \geq \frac{y}{4} \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \geq 45 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$x + y = 180$$

$$x = \frac{y}{4}$$

$$y = \frac{x}{2}$$

$$x + y = 45$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

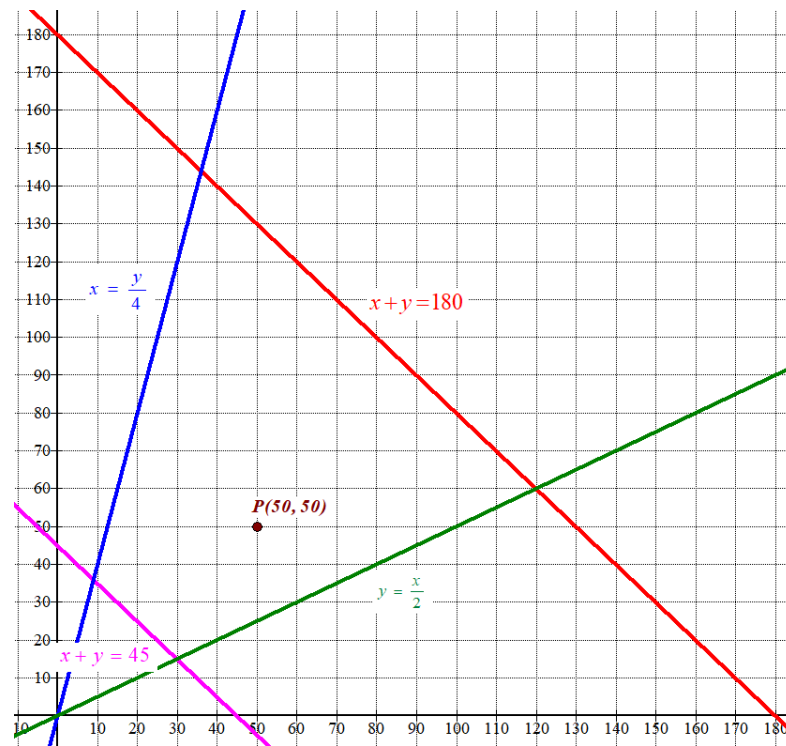
x	y = 180 - x
0	180
120	60

x	y = 4x
0	0
45	0

x	y = $\frac{x}{2}$
0	0
30	15
120	60

x	y = 45 - x
0	45
30	15
45	0

Primer
cuadrante



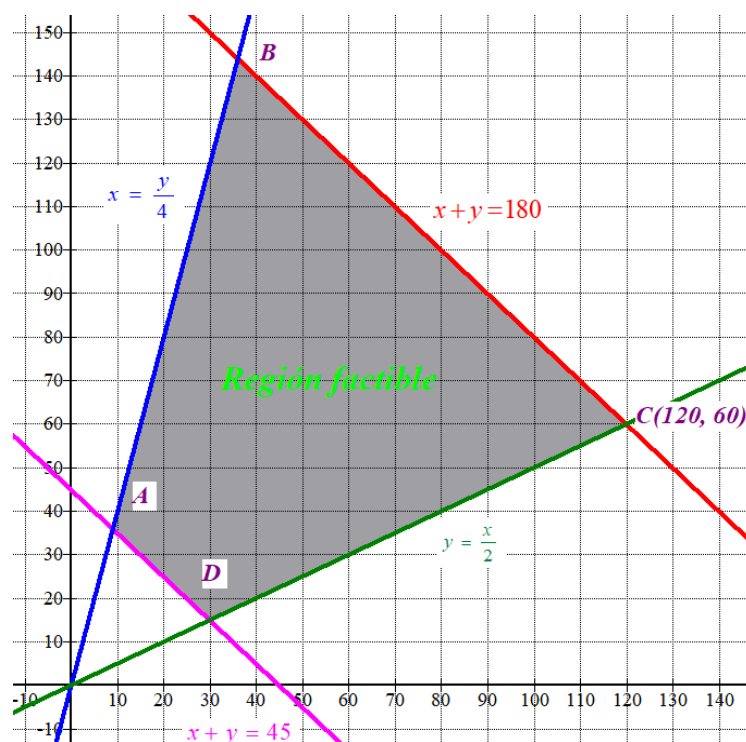
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ x \geq \frac{y}{4} \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \geq 45 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Como las restricciones son } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ x \geq \frac{y}{4} \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \geq 45 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región que contiene las soluciones del sistema es la}$$

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto $P(50, 50)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 50 \leq 180 \\ 50 \geq \frac{50}{4} \\ 50 \geq \frac{50}{2} \\ 50 + 50 \geq 45 \\ 50 \geq 0; 50 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de gris en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y D.

$$A \rightarrow \begin{cases} x + y = 45 \\ x = \frac{y}{4} \rightarrow y = 4x \end{cases} \Rightarrow x + 4x = 45 \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow A(9, 36)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} x + y = 180 \\ x = \frac{y}{4} \rightarrow y = 4x \end{cases} \Rightarrow x + 4x = 180 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{5} = 36 \Rightarrow$$

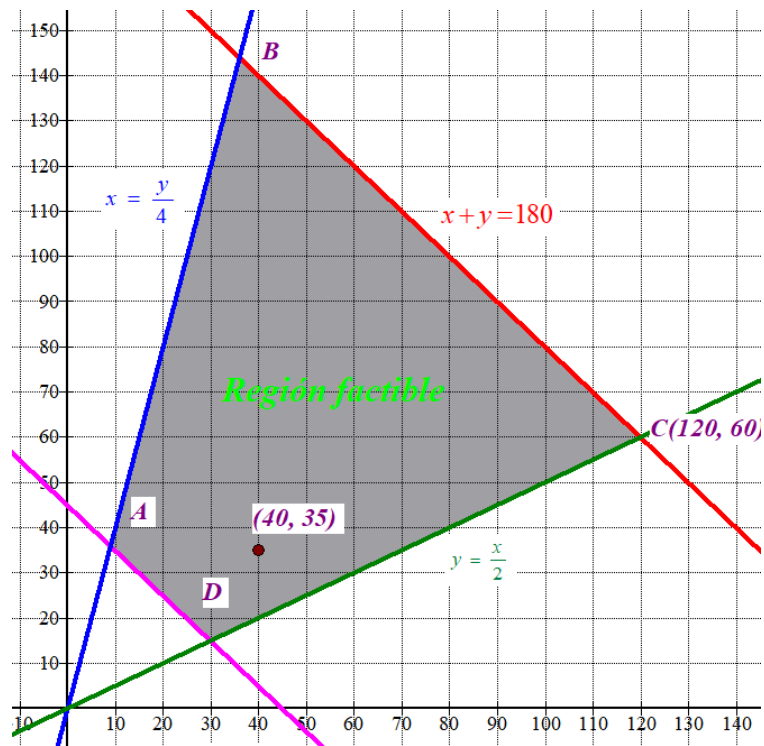
$$\Rightarrow y = 4 \cdot 36 = 144 \Rightarrow B(36, 144)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x + y = 45 \\ y = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2y \end{cases} \Rightarrow 2y + y = 45 \Rightarrow 3y = 45 \Rightarrow y = \frac{45}{3} = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot 15 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow D(30, 15)$$

¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

El punto (40, 35) pertenece a la región factible, por lo que si pueden asistir 40 adultos y 35 niños.



b) Si cada adulto paga 18 € y cada niño 10 € los ingresos son $I(x, y) = 18x + 10y$. Deseamos maximizarlos.

Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

$$A(9, 36) \rightarrow I(9, 36) = 18 \cdot 9 + 10 \cdot 36 = 522$$

$$B(36, 144) \rightarrow I(36, 144) = 18 \cdot 36 + 10 \cdot 144 = 2088$$

$$C(120, 60) \rightarrow I(120, 60) = 18 \cdot 120 + 10 \cdot 60 = 2760 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(30, 15) \rightarrow I(30, 15) = 18 \cdot 30 + 10 \cdot 15 = 690$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 2760 euros con la venta de 120 entradas de adulto y 60 de menor.

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + a & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$$

- a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.
- b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 300]$. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.

La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x = 200$.

- Existe $f(200) = \frac{-200^2}{2000} + 50 = 30$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200^-} \frac{-x^2}{2000} + 50 = 30$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 200^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + a = \frac{200^2}{1000} - \frac{3 \cdot 200}{5} + a = a - 80$.

Para que la función sea continua los tres valores deben ser iguales.

$$30 = a - 80 \Rightarrow a = 110$$

Para $a = 110$ la función es continua en $x = 200$.

Para $a = 110$ la función es continua en todo su dominio.

b) La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + 110 & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases}$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{1000} & \text{si } 0 \leq x < 200 \\ \frac{x}{500} - \frac{3}{5} & \text{si } 200 < x \leq 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x}{1000} = 0 \rightarrow x = 0 \in [0, 200] \\ \frac{x}{500} - \frac{3}{5} = 0 \rightarrow x = 300 \in (200, 300] \end{cases}$$

$f'(x) = 0$

Los puntos críticos están situados en los extremos de los intervalos.

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $[0, 200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $f'(100) = \frac{-100}{1000} = -0.1 < 0$.

La función decrece en $[0, 200)$.

- En el intervalo $(200, 300]$ tomamos $x = 250$ y la derivada vale

$$f'(250) = \frac{250}{500} - \frac{3}{5} = -0.1 < 0. \text{ La función decrece en } (200, 300].$$

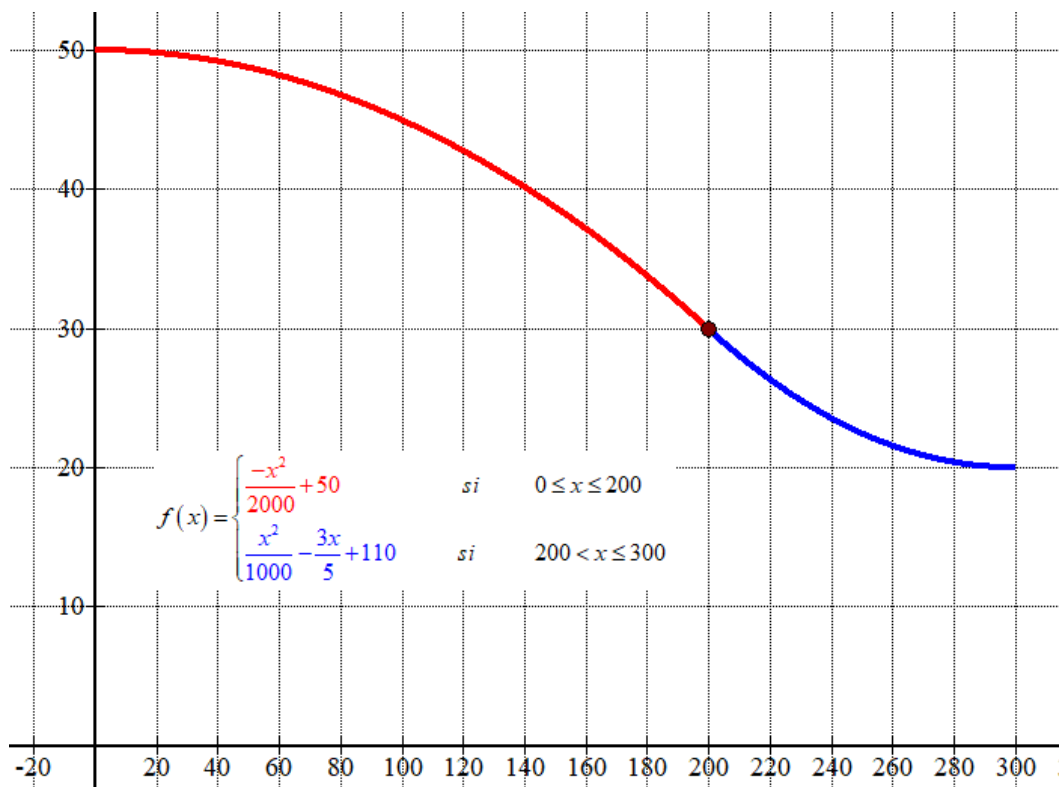
La función decrece en todo su dominio. como la función es continua el valor máximo está situado en $x = 0$ y el valor mínimo en $x = 300$.

Como $f(0) = \frac{-0^2}{2000} + 50 = 50$ el tiempo máximo que tarda un empleado en hacer una tarea es de

50 minutos. Como $f(300) = \frac{300^2}{1000} - \frac{3 \cdot 300}{5} + 110 = 20$ el tiempo mínimo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 20 minutos.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = \frac{-x^2}{2000} + 50$	x	$y = \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + 110$
0	50	250	27.5
100	45	300	20
200	30		



Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.
 b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -x^2 - 2x + 3 dx = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K$$

Como debe ser $F(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K \\ F(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 + K = 1 \Rightarrow K = 1 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

- b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua. Su gráfica es una parábola. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

$$\text{Eje } OX \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = -3 = x \rightarrow B(-3, 0) \\ \frac{2-4}{-2} = 1 = x \rightarrow C(1, 0) \end{cases}$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

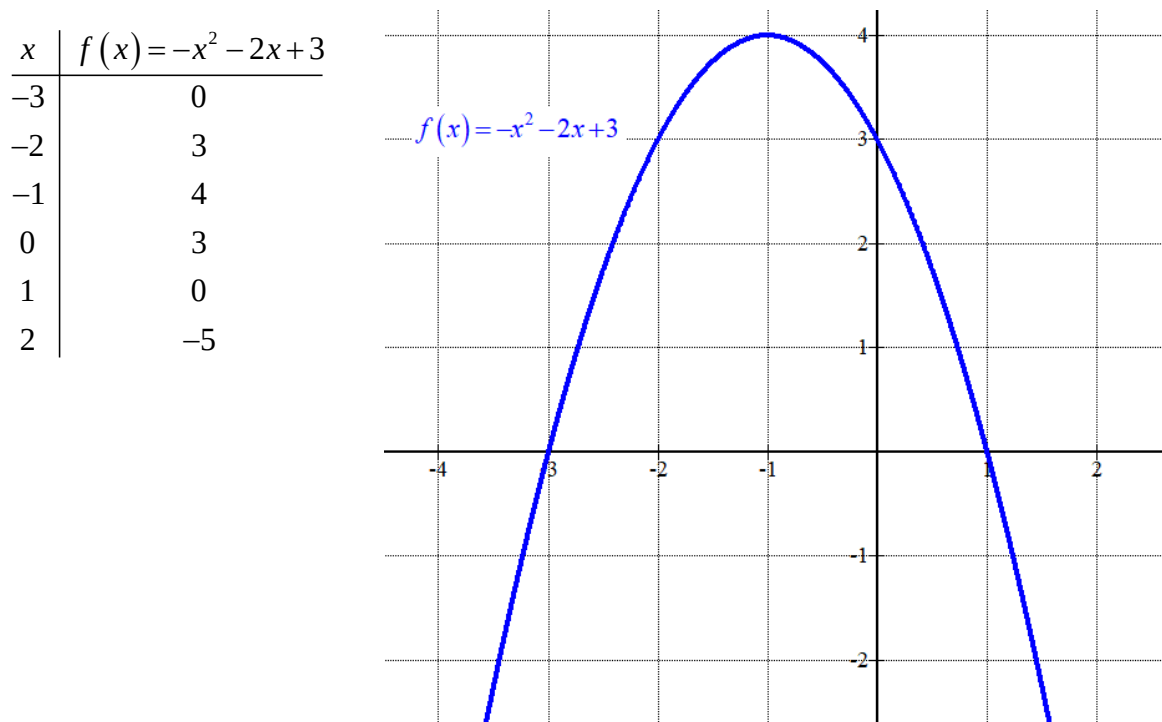
Estudiamos el signo de la segunda derivada en este punto crítico.

$$f'(x) = -2x - 2 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-1) = -2 < 0$$

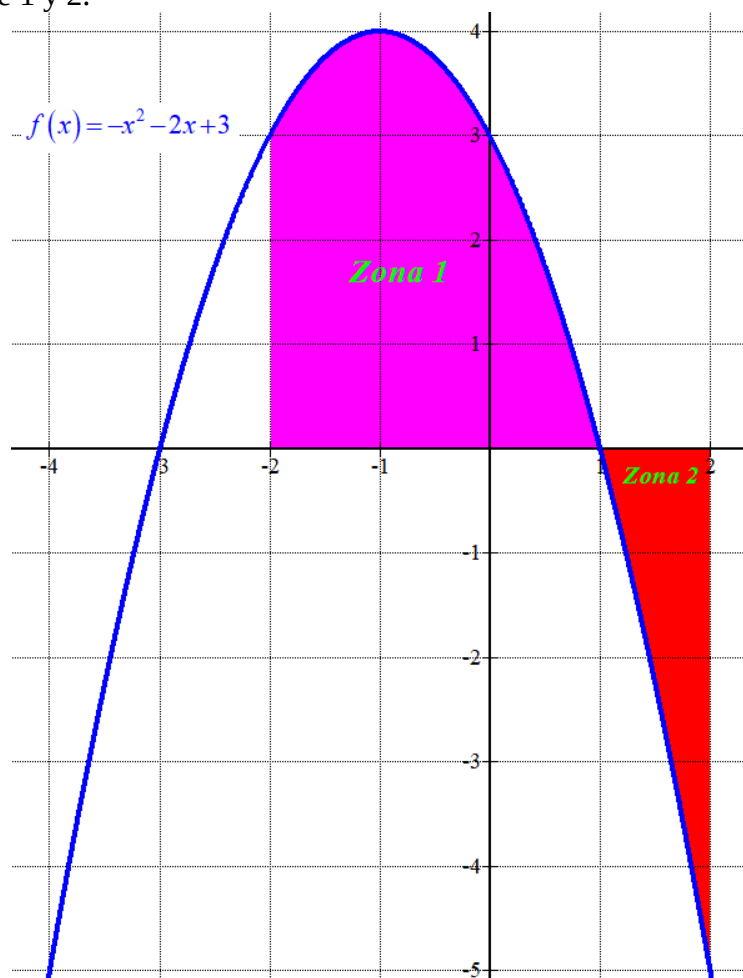
En $x = -1$ la función presenta un máximo relativo y absoluto.

La función crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.



Como la función corta el eje X en $x = 1 \in (-2, 2)$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$ la dividimos en dos partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre -2 y 1 y otra entre 1 y 2 .



$$\begin{aligned}\text{Área zona 1} &= \left| \int_{-2}^1 -x^2 - 2x + 3 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-2}^1 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3(-2) \right] \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{2}{3} + 4 + 6 \right| = \boxed{11u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área zona 2} &= \left| \int_1^2 -x^2 - 2x + 3 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_1^2 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \right] \right| = \left| -\frac{8}{3} - 4 + 6 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \right| = \boxed{\frac{7}{3}u^2}\end{aligned}$$

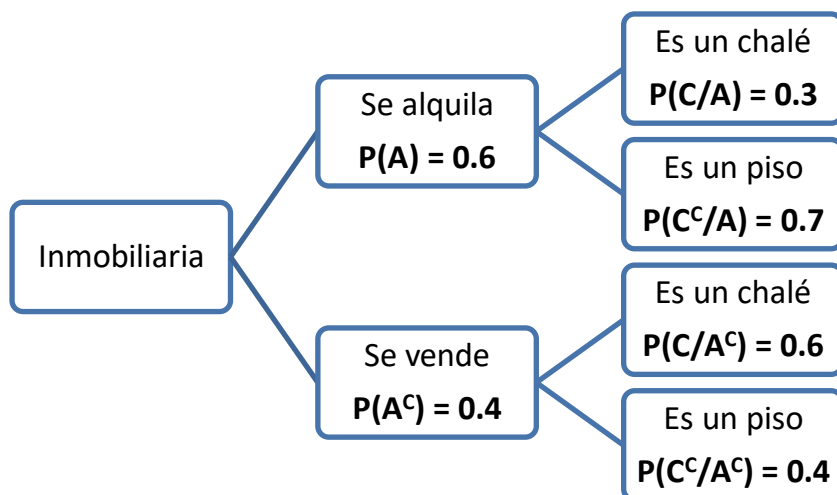
El área total es la suma de las dos áreas calculadas: $11 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{38}{3} \simeq 12.667u^2}$

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

- a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?
- b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Llamamos A al suceso “la vivienda se alquila”, A^C al suceso “la vivienda se vende”, C a “la vivienda es un chalé” y C^C a “la vivienda es un piso”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A/C^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C^C) = \frac{P(A \cap C^C)}{P(C^C)} = \frac{P(A)P(C^C/A)}{P(A)P(C^C/A) + P(A^C)P(C^C/A^C)} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.4} = \boxed{\frac{21}{29} \approx 0.7241}$$

La probabilidad de que se alquile sabiendo que es un piso tiene un valor aproximado de 0.7241.

- b) Nos piden calcular $P(A^C \cup C)$.

$$P(A^C \cup C) = P(A^C) + P(C) - P(A^C \cap C) = P(A^C) + P(C) - P(A^C)P(C/A^C) =$$

$$= P(A^C) + (P(A)P(C/A) + P(A^C)P(C/A^C)) - P(A^C)P(C/A^C) =$$

$$= 0.4 + (0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.6) - 0.4 \cdot 0.6 = 0.4 + 0.18 + 0.24 - 0.24 = \boxed{0.58}$$

La probabilidad de que esté en venta o sea un chalé es de 0.58

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 viviendas. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan (60), el resto se venden (40). Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan ($0.30 \cdot 60 = 18$) y el 60% de las que se venden ($0.6 \cdot 40 = 24$) son chalés. El resto son pisos: $60 - 18 = 42$ son pisos que se alquilan, $40 - 24 = 16$ son pisos que se venden.

a) Hay $42 + 16 = 58$ pisos. De estos hay 42 que se alquilan. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A/C^c) = \frac{42}{58} = \boxed{\frac{21}{29}}$$

b) De las 100 viviendas hay 40 en venta (24 chalés y 16 pisos). También hay 18 chalés que se alquilan.

$$P(A^c \cup C) = \frac{40 + 18}{100} = \boxed{0.58}$$

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5		40
No tienen hijos (H^C)			
	20		100

Completamos la tabla.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5	35	40
No tienen hijos (H^C)	15	45	60
	20	80	100

- a) Nos piden calcular $P(H^C \cap S^C)$. Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P(H^C \cap S^C) = \frac{45}{100} = \boxed{0.45}$$

La probabilidad de que un habitante elegido al azar no tenga ni hijos, ni estudios superiores es de 0.45.

- b) Nos piden calcular $P(H^C / S)$. Hay 20 personas con estudios superiores y de ellas 15 no tienen hijos. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(H^C / S) = \frac{15}{20} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que elegido un habitante con estudios superiores no tenga hijos es de 0.75.

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

- a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

- a) X = El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera (en miles de euros).

$$X = N(\mu, 35)$$

El tamaño de la muestra es $n = 150$. La media muestral es $\bar{x} = 138$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

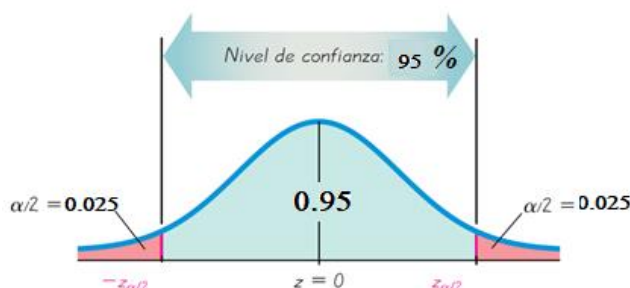
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \frac{35}{\sqrt{150}} \approx 4.6867$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (138 - 4.6867, 138 + 4.6867) = (133.3133, 142.6867)$$

- b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Sustituimos en la fórmula del error el valor 5 y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1.96 \frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 1.96 \cdot 35 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 35}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 35}{5} \right)^2 \simeq 188.23$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 189 hipotecas.

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

- a) Tamaño de la muestra es $n = 180$ hogares. La proporción muestral de los hogares que contratarían la fibra es $p = \frac{130}{180} = \frac{13}{18} \approx 0.7222$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{13}{18} \cdot \frac{5}{18}}{180}} \approx 0.0654$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.7222 - 0.0654, 0.7222 + 0.0654) = (0.6568, 0.7876)$$

- b) El error de estimación es de 0.0654.

Si aumentásemos el nivel de confianza aumentaría el valor de $z_{\alpha/2}$. Entonces aumentaría el

$$\text{error: } Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$



Universidad de
Oviedo

EBAU Ordinaria 2024
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) [1.25 puntos] Si $\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [1.25 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

- a) [1.75 puntos] ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?
- b) [0.75 puntos] Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

- a) [1.75 punto] Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.
- b) [0.75 puntos] Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

- a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.
- b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?
- b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

- a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.*

- a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?
- b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

Pregunta 8. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l.*

- a) **[1.5 puntos]** Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.
- b) **[0.5 puntos]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?
- c) **[0.5 puntos]** Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:**Pregunta 1.** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A+B \cdot C = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ m-2m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E \Rightarrow (A+B \cdot C) \cdot D = 3E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{cases}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A . Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

$$\begin{cases} |A| = 4 - m^2 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m \neq \pm 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.
El sistema queda $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una única ecuación: $x + 2y = 3$. El sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $m = -2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.
El sistema queda $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una ecuación: $x - 2y = 3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Respuestas: El sistema tiene solución para cualquier valor de m . La solución es única cuando $m \neq \pm 2$.

Resolvemos el sistema para $m = 1$. Sabemos que tiene solución única.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ x + 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 - y + 4y = 3 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = 3 - 0 = 3}$$

La solución es $x = 3$, $y = 0$.

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) [0.75 puntos] Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

a) Llamamos “x” al número de gorros e “y” al número de bufandas.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Metros de lana blanca	Metros de lana negra
Número de gorros (x)	50x	40x
Número de bufandas (y)	100y	100y
	50x+100y	40x+100y

“Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro” →

$$50x + 100y \leq 2200; 40x + 100y \leq 2000$$

“El número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas” → $x \leq 2y$

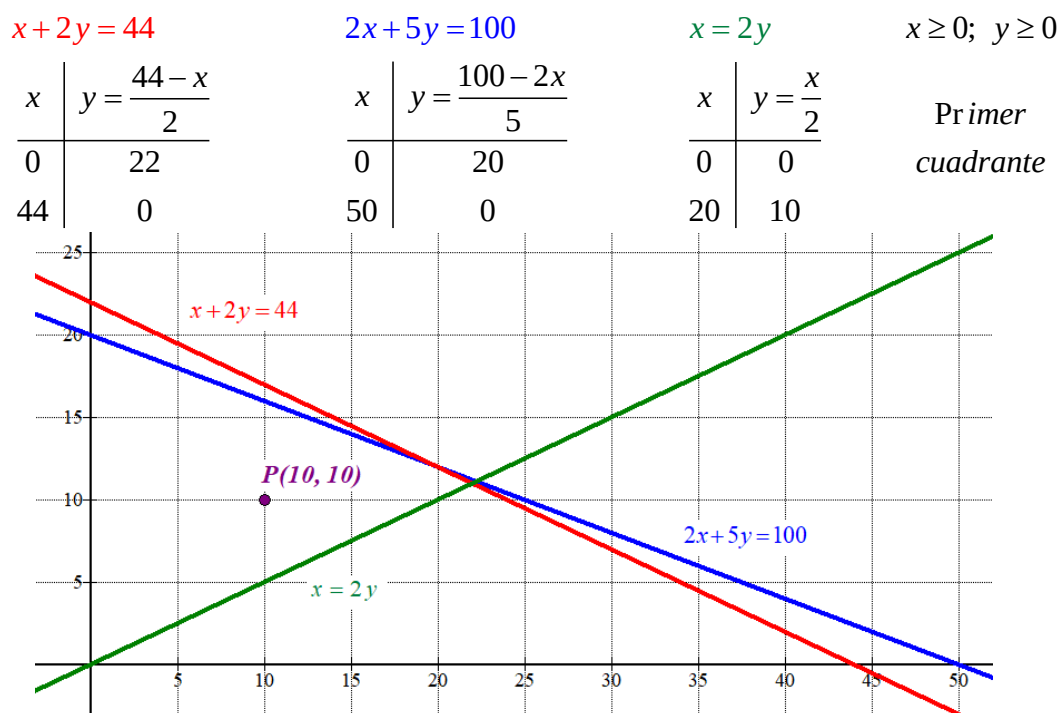
Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 100y \leq 2200 \\ 40x + 100y \leq 2000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.



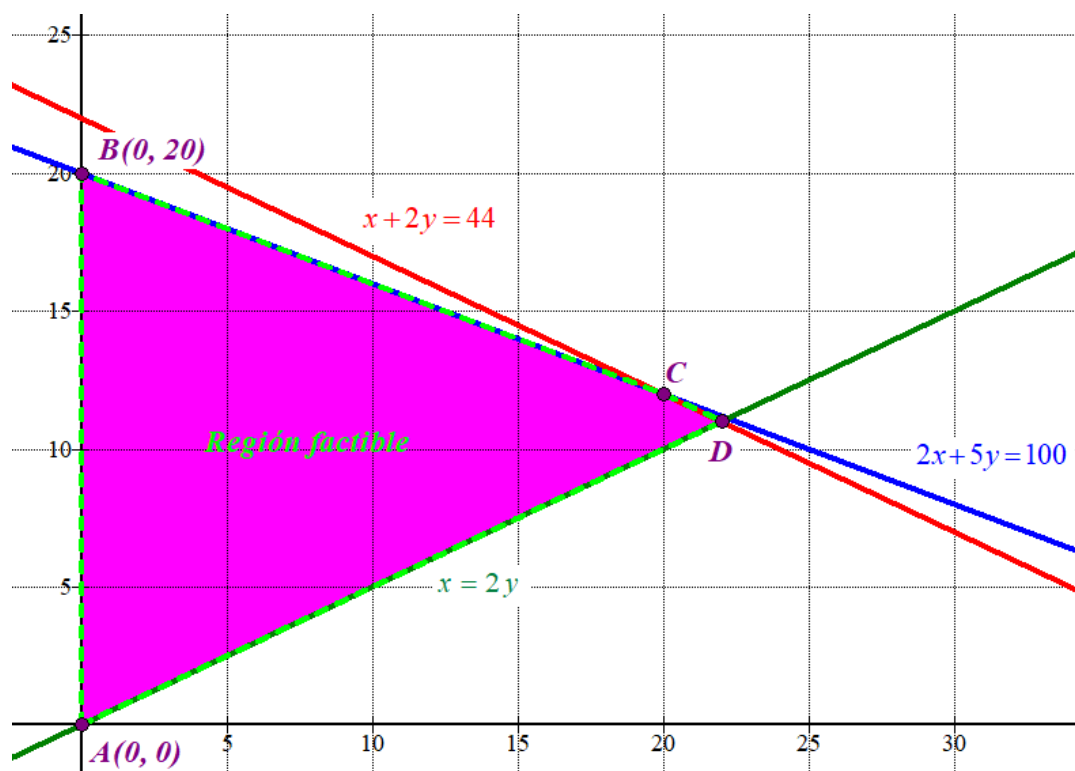
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 44 \\ 20 + 50 \leq 100 \\ 10 \leq 20 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ 2x + 5y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 44 - 2y \\ 2x + 5y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(44 - 2y) + 5y = 100 \Rightarrow$$

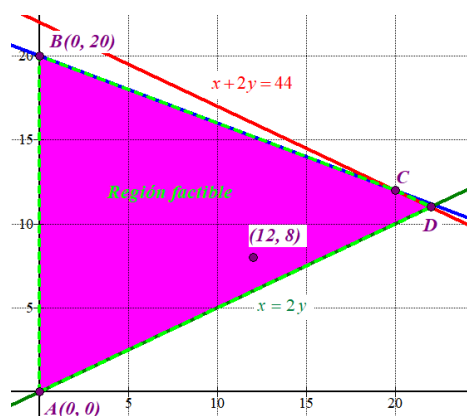
$$\Rightarrow 88 - 4y + 5y = 100 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = 44 - 24 = 20 \Rightarrow C(20, 12)$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2y = 44 \Rightarrow 4y = 44 \Rightarrow y = \frac{44}{4} = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 22 \Rightarrow D(22, 11)$$

¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

El punto (12, 8) pertenece a la región factible, por lo que si se pueden tejer 12 gorros y 8 bufandas.



b) Si vende cada gorro a 12 € y cada bufanda a 18 € los ingresos son $I(x, y) = 12x + 18y$. Deseamos maximizarlos.

Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

$$A(0,0) \rightarrow I(0,0) = 0$$

$$B(0,20) \rightarrow I(0,20) = 12 \cdot 0 + 18 \cdot 20 = 360$$

$$C(20,12) \rightarrow I(20,12) = 12 \cdot 20 + 18 \cdot 12 = 456$$

$$D(22,11) \rightarrow I(22,11) = 12 \cdot 22 + 18 \cdot 11 = 462 \text{ ¡Máximo!}$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 462 euros con la confección de 22 gorros y 11 bufandas.

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

- a) **[1.75 punto]** Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.
 b) **[0.75 puntos]** Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

- a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.

El dominio de la función es $[0, 5]$.

La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

- Existe $f(2) = -60 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 80$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -60x^2 + 160x = 80$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) = \frac{10}{3}(2^2 - 14 \cdot 2 + 48) = 80$.
- Los tres valores son iguales.

Se cumple todo y la función es continua en $x = 2$.

La función es continua en todo su dominio.

Hallamos los puntos críticos de cada trozo.

$$f'(x) = \begin{cases} -120x + 160 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{10}{3}(2x - 14) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -120x + 160 = 0 \rightarrow x = \frac{160}{120} = \frac{4}{3} \in [0, 2) \\ \frac{10}{3}(2x - 14) = 0 \rightarrow x = \frac{14}{2} = 7 \notin (2, 5] \end{cases}$$

$$f'(x) = 0$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $\left[0, \frac{4}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -120 \cdot 1 + 160 = 40 > 0$.

La función crece en $\left[0, \frac{4}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = -120 \cdot 1.5 + 160 = -20 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{4}{3}, 2\right).$$

- En el intervalo $(2, 5]$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(x) = \frac{10}{3}(2 \cdot 3 - 14) = \frac{-80}{3} < 0$.

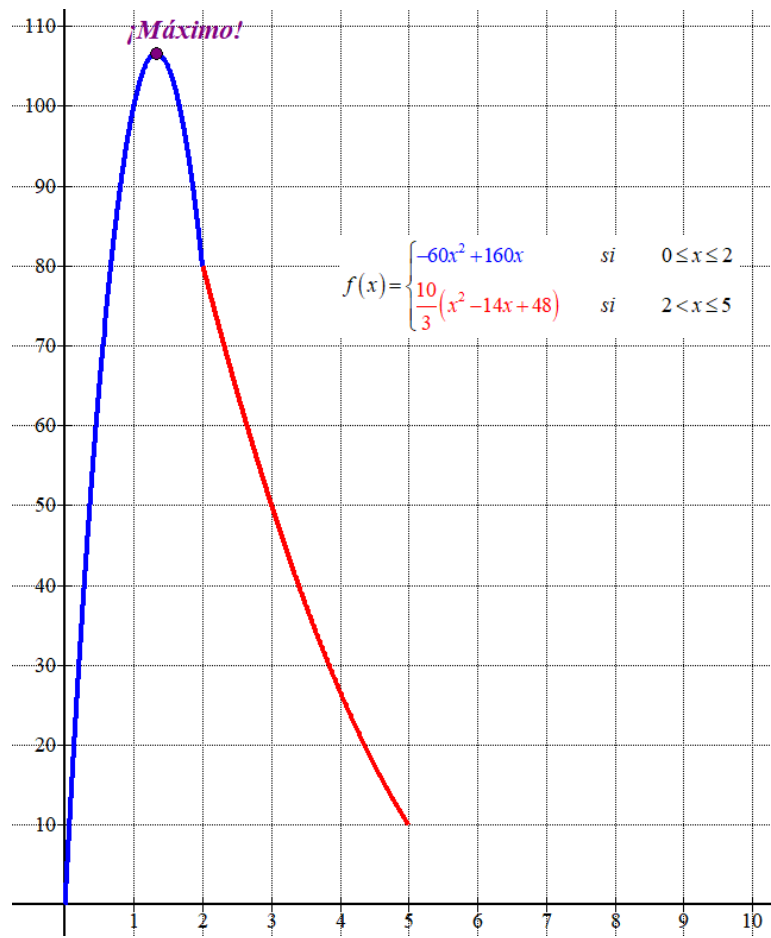
La función decrece en $(2, 5]$.

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{4}{3}$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = -60x^2 + 160x$
0	0
1	100
4/3	106.66
2	80

x	$y = \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48)$
3	50
5	10



b) A las 3 horas de la ingesta el nivel de alcohol en sangre es de 50 mg/dl. Por lo que no podría conducir.

A las 5 horas de la ingesta el nivel de alcohol en sangre es de 10 mg/dl. Por lo que si podría conducir.

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.
 b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 2x^2 - 3x dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K$$

Como debe ser $F(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K \\ F(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2^4}{4} - 2\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + K = 0 \Rightarrow 4 - \frac{16}{3} - 6 + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}$.

- b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua.
 Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\text{Eje } OX \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2+4}{2} = 3 = x \rightarrow B(3,0) \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \rightarrow C(-1,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-3)}}{2(3)} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{52}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \approx 1.87 \\ \frac{2 - \sqrt{13}}{3} \approx -0.53 \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) - 3 = 4 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$.

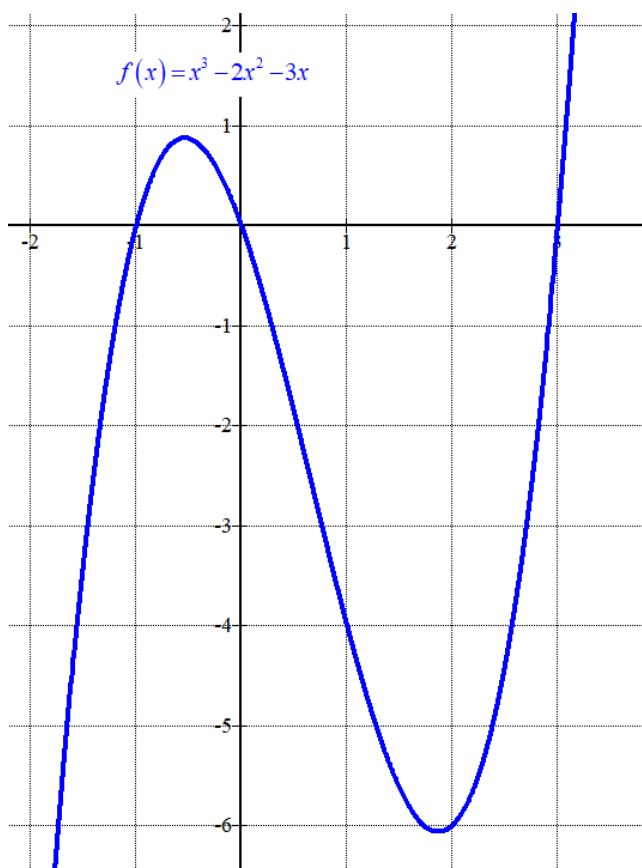
- En el intervalo $\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right).$$

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{2-\sqrt{13}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y = x^3 - 2x^2 - 3x$
-2	-10
-1	0
0	0
1	-4
3	0
4	20



Como la función corta el eje X en $x = -1$ y en $x = 0$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$ la dividimos en tres partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre -2 y -1 , otra entre -1 y 0 , y por último entre 0 y 1 .

$$\begin{aligned}
 \text{Área región 1} &= \left| \int_{-2}^{-1} x^3 - 2x^2 - 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} \right| = \\
 &= \left| \left[\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} - 3\frac{(-1)^2}{2} \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3} - 3\frac{(-2)^2}{2} \right] \right| = \\
 &= \left| \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 4 + \frac{16}{3} + 6 \right| = \boxed{\frac{47}{12} \approx 3.9u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área región 2} &= \left| \int_{-1}^0 x^3 - 2x^2 - 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| = \\
 &= \left| \left[\frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - 2\frac{(-1)^3}{3} - 3\frac{(-1)^2}{2} \right] \right| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right| = \boxed{\frac{7}{12} \approx 0.583u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área región 3} &= \left| \int_0^1 x^3 - 2x^2 - 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \\
 &= \left| \left[\frac{1^4}{4} - 2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} \right] \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| = \boxed{\frac{23}{12} \approx 1.92u^2}
 \end{aligned}$$

El área total es la suma de las tres áreas calculadas: $\frac{47}{12} + \frac{7}{12} + \frac{23}{12} = \boxed{\frac{77}{12} \approx 6.42u^2}$

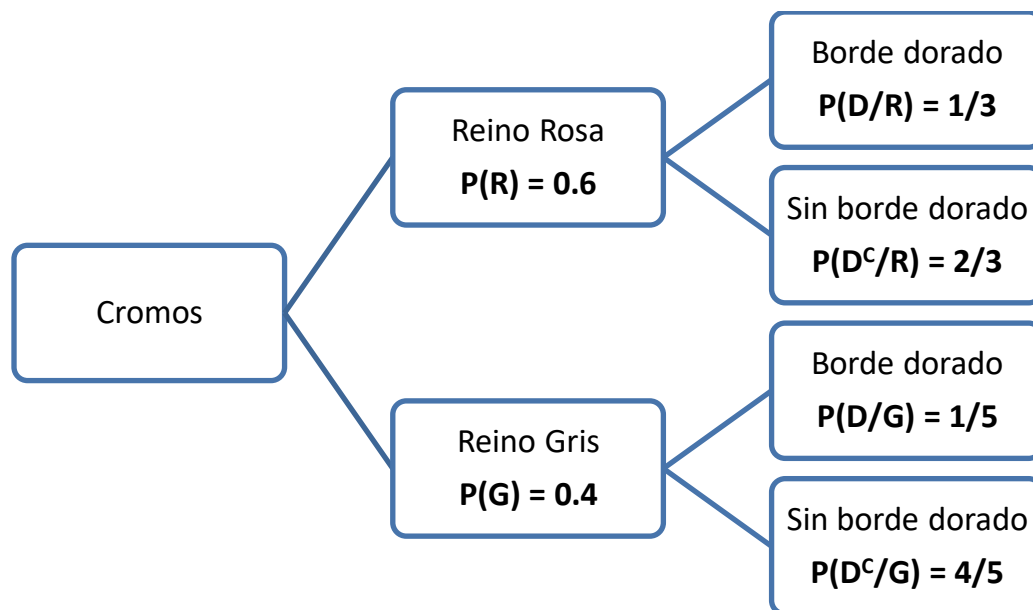


Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

- a) [1.25 puntos] Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?
 b) [1.25 puntos] Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Llamamos R al suceso “el cromo es de Reino Rosa”, G a “el cromo es del Reino Gris” y D a “el cromo tiene el borde dorado”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(R)P(D/R) + P(G)P(D/G) = 0.6 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{7}{25} = 0.28}$$

La probabilidad de que el cromo elegido tenga el borde dorado es de 0.28.

- b) Nos piden calcular $P(R/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/D^c) = \frac{P(R \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(R)P(D^c/R)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0.28} = \boxed{\frac{5}{9} \approx 0.556}$$

La probabilidad de que el cromo sin borde dorado elegido sea del <<Reino Rosa>> tiene un valor aproximado de 0.556

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 cromos. De ellos 60 son del Reino Rosa y 40 del Reino Gris. De los 60 del Reino Rosa tenemos que un tercio tienen borde

dorado, es decir, 20 cromos tienen borde dorado y son del Reino Rosa. De los 40 cromos del Reino Gris una quinta parte tienen borde dorado, es decir 8 cromos son del Reino Gris y tienen borde dorado.

a) Tenemos 20 cromos del Reino Rosa con borde dorado y 8 con borde dorado del Reino Gris. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(D) = \frac{20+8}{100} = 0.28$$

b) Tenemos 40 cromos del Reino Rosa sin borde dorado y 32 del Reino Gris sin borde dorado. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(R/D^c) = \frac{40}{40+32} = \frac{5}{9}$$

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

- a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Llamamos V = “el estudiante vive en residencia universitaria”, N = “el estudiante es del país (no extranjero)”.

Con los datos del ejercicio podemos decir que $P(V \cap N^c) = 0.10$, $P(N) = 0.80$, y

$$P(V^c / N) = 0.75.$$

- a) Nos piden calcular $P(N \cap V^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V^c / N) = \frac{P(V^c \cap N)}{P(N)} \Rightarrow 0.75 = \frac{P(V^c \cap N)}{0.8} \Rightarrow P(V^c \cap N) = 0.8 \cdot 0.75 = \boxed{0.6}$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso es de 0.6.

- b) Nos piden calcular $P(V^c / N^c)$.

$$P(V^c / N^c) = \frac{P(V^c \cap N^c)}{P(N^c)} = \frac{P(N^c) - P(V \cap N^c)}{1 - P(N)} = \frac{(1 - 0.8) - 0.1}{1 - 0.8} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

De 100 estudiantes 80 son nacionales y 20 extranjeros. De los 20 extranjeros los que viven en residencia son el 10 % del total, es decir, 10 estudiantes son extranjeros y viven en residencia. De los 80 nacionales el 75 % no viven en residencia, es decir, $0.75 \cdot 80 = 60$ estudiantes nacionales no viven en residencia y 20 estudiantes nacionales viven en residencia.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Viven en residencia	No viven en residencia	
Nacionales	20	60	80
Extranjeros	10	10	20
TOTALES	30	70	100

Aplicamos la regla de Laplace y tenemos las respuestas a lo que se pide.

$$a) P(N \cap V^c) = \frac{60}{100} = 0.6$$

$$b) P(V^c / N^c) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.*

- a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?
- b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

- a) No tenemos un valor para la proporción muestral de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio.

Al no conocer el valor de la proporción y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable: $p = 0.5$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y

$F(2,58) = 0,995$.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2} = 384.16 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 tabletas de chocolate.

- b) Tamaño de la muestra = $n = 300$. La proporción de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio es: $p = \frac{264}{300} = 0.88$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.88 \cdot 0.12}{300}} \approx 0.031$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.88 - 0.031, 0.88 + 0.031) = (0.849, 0.911)$$

Pregunta 8. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l.*

- a) **[1.5 puntos]** Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.
- b) **[0.5 puntos]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?
- c) **[0.5 puntos]** Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

a) $X =$ El nivel de cierta hormona en sangre. $X = N(\mu, 1.2)$.

Tamaño de la muestra = $n = 200$. Media muestral = $\bar{x} = 8.7$ UI/l.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.64 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{200}} \approx 0.1392 \text{ UI/l.}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (8.7 - 0.1392, 8.7 + 0.1392) = (8.5608, 8.8392)$$

Es decir, tenemos una confianza del 90% de que el nivel medio de cierta hormona en sangre está entre 8.5608 y 8.8392 UI/l.

b) El error en la estimación lo hemos calculado y tiene un valor de 0.1392 UI/l..

c) Si es un intervalo al 88% de confianza, debe ser un intervalo más estrecho que el obtenido en el apartado a), ya que aquel se había construido con un nivel de confianza mayor (90%).

La amplitud del intervalo de confianza del apartado a) es $2 \cdot Error = 2 \cdot 0.1392 = 0.2784$

La amplitud del intervalo de confianza (8.5681, 8.8319) es $8.8319 - 8.5681 = 0.2638$.

La amplitud del intervalo de confianza (8.5514, 8.8486) es $8.8486 - 8.5514 = 0.2972$.

El intervalo más estrecho que el del apartado a) es el intervalo de confianza (8.5681, 8.8319).

Este es el intervalo que se ha calculado con una confianza del 88 %.



Universidad de
Oviedo

EBAU Extraordinaria 2023
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indica en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderás**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino.

- a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

- a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?
- b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

- a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.
- b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Pregunta 5. El 80% de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25% de todos los empleados hablan alemán. Además, el 20% de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés, pero no alemán?
- b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Pregunta 6. El 30% de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80% tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40% tienen tarjeta de fidelidad.

- a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?
- b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

- a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?
- b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino.

- a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

- a) Llamamos “ x ” al número de copas de vino tinto que se bebieron e “ y ” al número de copas de vino blanco.

“Se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco” $\rightarrow x = my$

“Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino” $\rightarrow 0.15(x + y) = 3m$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.15(x + y) = 3m \\ x = my \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 15y = 300m \\ x - my = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + y = 20m \\ x - my = 0 \end{array}}$$

- b) Discutimos el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 20m \\ 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m - 1 \\ |A| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Analizamos dos casos distintos.

- Si $m \neq -1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).
- Si $m = -1$ el determinante de A es nulo y su rango no es 2. Como el sistema queda muy sencillo lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -20 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es **incompatible** (no tiene solución)

Respuestas: El sistema tiene solución única para cualquier valor de m distinto de -1 .

Si se consumieron 9 litros ($3m = 9 \Rightarrow m = 3$) el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 60 - y \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 - y - 3y = 0 \Rightarrow 4y = 60 \Rightarrow \boxed{y = \frac{60}{4} = 15} \Rightarrow \boxed{x = 60 - 15 = 45}$$

Si se consumieron 9 litros de vino se bebieron 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco.

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

a) Llamamos “x” al número de vehículos grandes e “y” al número de vehículos pequeños.

“Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos” $\rightarrow 30000x + 20000y \leq 500000$

“Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños” $\rightarrow x \leq 2y$

“El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento” $\rightarrow 600x + 300y \leq 9000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30000x + 20000y \leq 500000 \\ x \leq 2y \\ 600x + 300y \leq 9000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \leq 2y \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$3x + 2y = 50$$

$$2y = x$$

x	$y = \frac{50-3x}{2}$
0	25
10	10

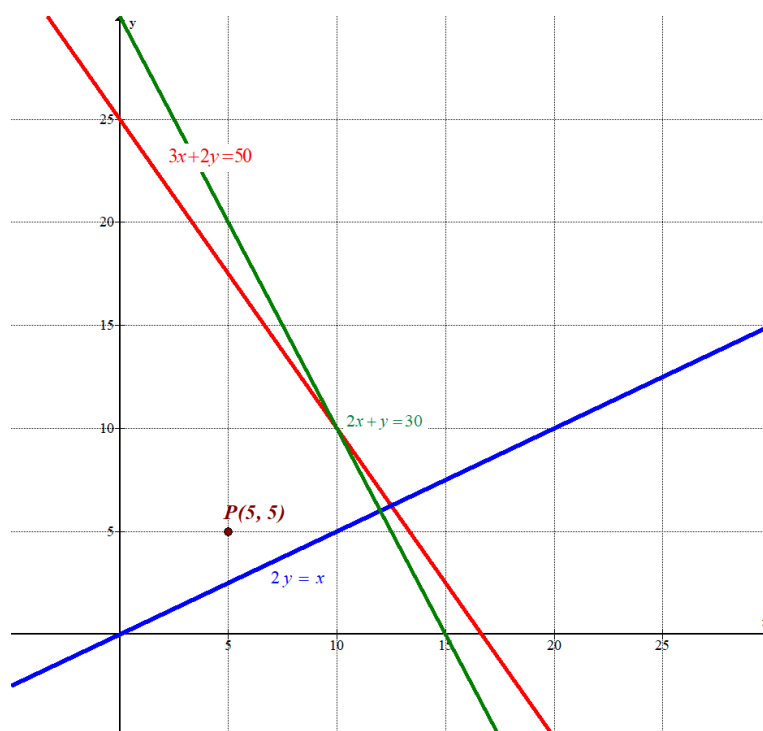
x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
20	10

$$2x + y = 30$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 30 - 2x$
0	30
10	10

Primer cuadrante

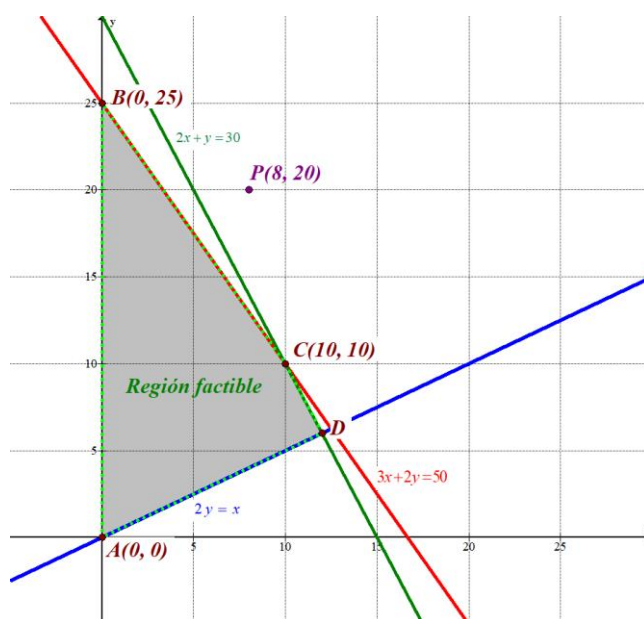


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 50 \\ x \leq 2y \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la azul. Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \leq 50 \\ 5 \leq 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 + 5 \leq 30 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} 2y = x \\ 2x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2y) + y = 30 \Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow \boxed{y = 6} \Rightarrow \boxed{x = 12} \Rightarrow \boxed{D(12, 6)}$$

¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

El punto $(8, 20)$ no pertenece a la región factible, por lo que no se pueden comprar 8 coches grandes y 20 pequeños ya que no cumplen algunas de las restricciones.

- b) El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros $\rightarrow$ La función Beneficio queda $B(x, y) = 10000x + 6000y$.

Deseamos maximizar el beneficio.

Para encontrar el beneficio máximo valoramos la función en cada uno de sus vértices:

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,25) \rightarrow B(0,25) = 0 + 6000 \cdot 25 = 150000 \text{ €}$$

$$C(10,10) \rightarrow B(10,10) = 100000 + 60000 = 160000 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$D(12,6) \rightarrow B(12,6) = 120000 + 36000 = 156000 \text{ €}$$

El máximo beneficio es de 160 000 euros y se obtiene en el vértice $C(10, 10)$ lo que significa comprar 10 coches de cada tipo.

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

- a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.
 b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

- a) Para que la función f sea continua en todo su dominio debe serlo en $x = 2$ y en $x = 4$.

Continua en $x = 2 \rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 3(2^2 - 6 \cdot 2 + 12) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} a(x+2) = 4a \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

¿Continua en $x = 4$? $\rightarrow$ ¿ $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$?

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 3(4^2 - 6 \cdot 4 + 12) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -x^2 + 11x - 16 = -4^2 + 11 \cdot 4 - 16 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12$$

Con $a = 3$ la función es continua en todo su dominio $[0, 8]$.

Con $a \neq 3$ la función es continua en $[0, 2) \cup (2, 8]$

- b) Con $a = 3$ la función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Su gráfica es un trozo de recta (entre 0 y 2), un trozo de parábola convexa ($\cup$) (entre 2 y 4) y otro trozo de parábola cóncava ($\cap$) (entre 4 y 8).

Hallamos los vértices de las parábolas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 6x + 12) \Rightarrow f'(x) = 3(2x - 6) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3(2x - 6) = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3} \in (2, 4)$$

$$f(x) = -x^2 + 11x - 16 \Rightarrow f'(x) = -2x + 11 \quad \left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 11 = 0 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{2} = 5.5 \in (4, 8)$$

Hacemos una tabla de valores para cada trozo de gráfica y la representamos.

$$0 \leq x \leq 2$$

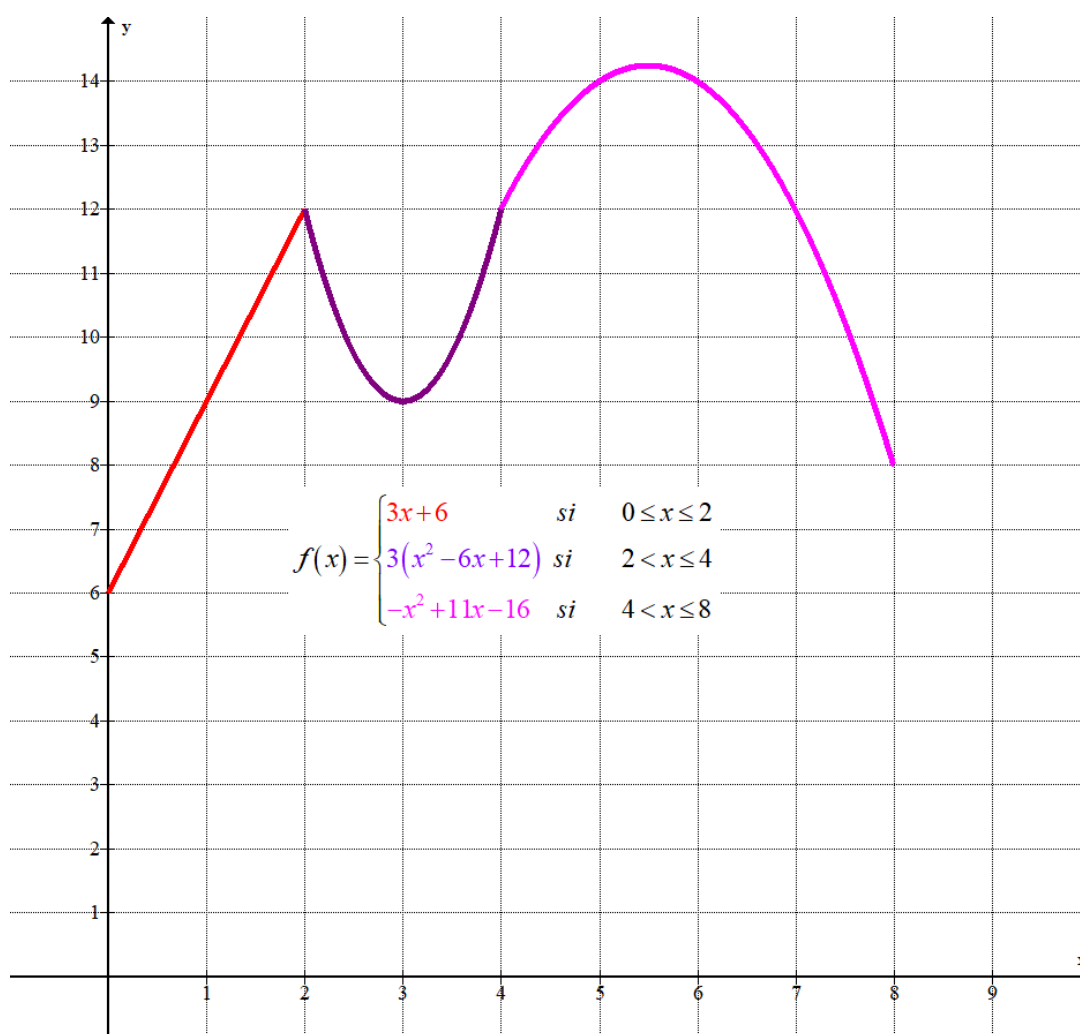
x	$y = 3x + 6$
0	6
2	12

$$2 < x \leq 4$$

x	$y = 3(x^2 - 6x + 12)$
2.5	9.75
3	9
4	12

$$4 < x \leq 8$$

x	$y = -x^2 + 11x - 16$
4.5	13.25
5	14
5.5	14.25
6	14
8	8



¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Observando la gráfica el consumo es máximo en $x = 5.5$, es decir, a las 11 horas y 30 minutos.
El consumo es mínimo en $x = 0$, es decir, a las 6 horas.

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.
 b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^x + 2 dx = e^x + 2x + K$$

Como debe ser $F(0) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = e^x + 2x + K \\ F(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -e^0 + 2 \cdot 0 + K = 3 \Rightarrow -1 + K = 3 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow \boxed{F(x) = e^x + 2x + 4}$$

- b) El dominio de la función son todos los números reales.
 Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = e^x$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre es creciente.

Cuando $x \rightarrow -\infty$ vemos a qué valor tiende la función.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = e^{-\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

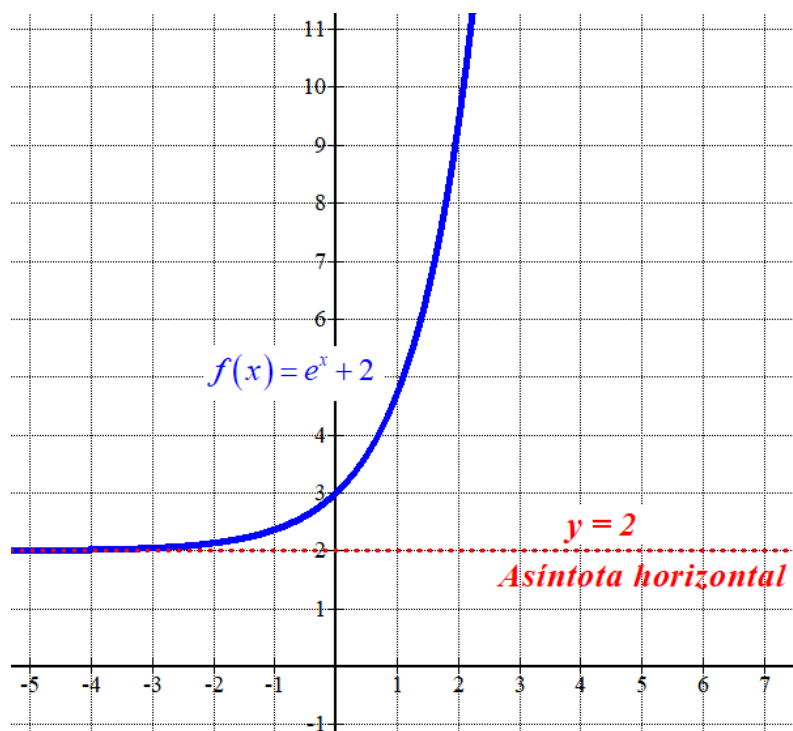
Cuando $x \rightarrow +\infty$ vemos a qué valor tiende la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = e^{+\infty} + 2 = +\infty + 2 = +\infty$$

La gráfica tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ con ecuación $y = 2$.

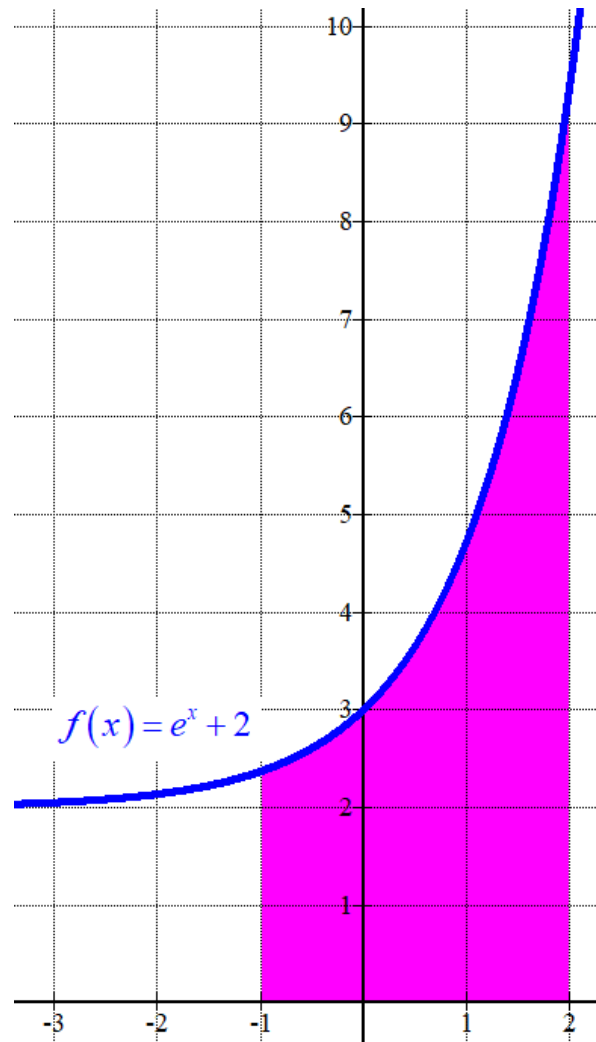
Hacemos una tabla de valores.

x	$y = e^x + 2$
-2	$2 + \frac{1}{e^2} \approx 2.1$
-1	$2 + \frac{1}{e} \approx 2.37$
0	3
1	$2 + e \approx 4.7$
2	$2 + e^2 \approx 9.4$



El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$ es el valor de la integral definida de la función entre -1 y 2 .

$$\text{Área región} = \int_{-1}^2 e^x + 2 dx = \left[e^x + 2x \right]_{-1}^2 = \left[e^2 + 4 \right] - \left[e^{-1} - 2 \right] = e^2 - \frac{1}{e} + 6 \approx 13.02 \text{ u}^2$$



Pregunta 5. El 80% de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25% de todos los empleados hablan alemán. Además, el 20% de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Llamamos I al suceso “Habla Inglés” y A al suceso “Habla Alemán”.

El 20% de los empleados que hablan inglés (80 %), también hablan alemán $\rightarrow 0.20 \cdot 80 = 16\%$ de los empleados hablan alemán e inglés.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Inglés	No Inglés	
Alemán	16		25
No alemán			
	80		100

Completamos la tabla.

	Inglés	No Inglés	
Alemán	16	9	25
No alemán	64	11	75
	80	20	100

Aplicando la regla de Laplace y con los datos que nos proporciona la tabla respondemos a las preguntas.

$$a) P(I \cap A^c) = \frac{64}{100} = \boxed{0.64}$$

$$b) P(I^c / A) = \frac{9}{25} = \boxed{0.36}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos I al suceso “Habla Inglés” y A al suceso “Habla Alemán”.

Sabemos que $P(I) = 0.8$, $P(A) = 0.25$ y $P(A/I) = 0.2$.

a)

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap I)}{0.8} \Rightarrow P(A \cap I) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$$

$$P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) \Rightarrow 0.8 = 0.16 + P(I \cap A^c) \Rightarrow P(I \cap A^c) = 0.8 - 0.16 = 0.64$$

b)

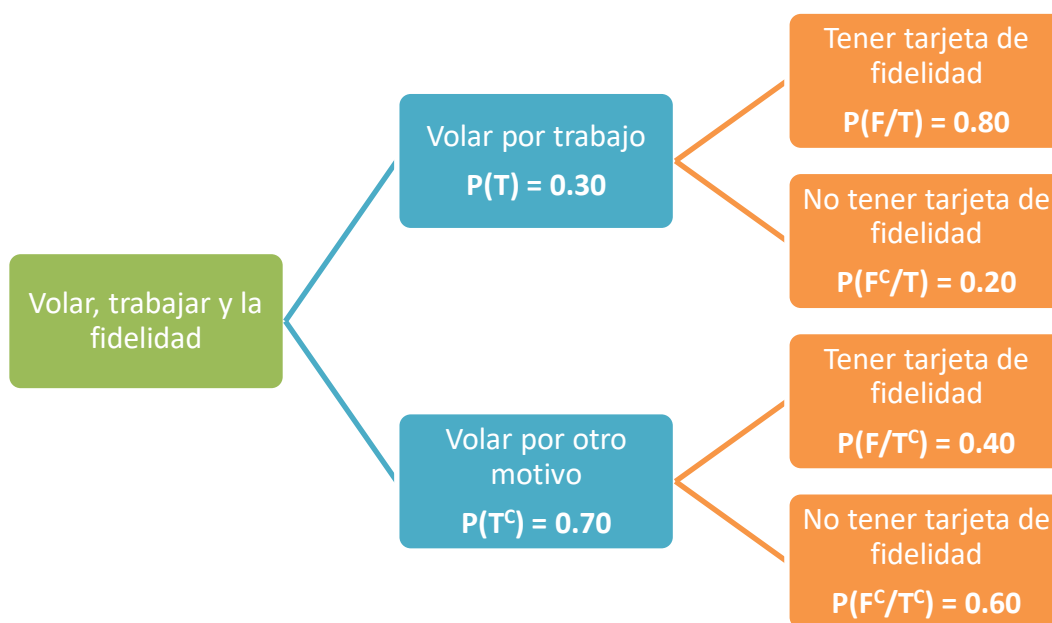
$$P(I^c / A) = \frac{P(I^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(I \cap A)}{0.25} = \frac{0.25 - 0.16}{0.25} = \frac{0.09}{0.25} = \boxed{0.36}$$

Pregunta 6. El 30% de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80% tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40% tienen tarjeta de fidelidad.

- a) [1.25 puntos] Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?
- b) [1.25 puntos] Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Llamamos T = “Volar por trabajo”, F = “Tener tarjeta de fidelidad”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(F)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(T)P(F/T) + P(T^c)P(F/T^c) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.4 = \boxed{0.52}$$

- b) Nos piden calcular $P(T/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{P(T)P(F/T)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = \boxed{\frac{6}{13} \approx 0.4615}$$

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Como no tenemos un valor de la proporción muestral tomaremos $p = 0.5$

Utilizamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.1 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.1}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.1}{1.96} \right)^2} = 96.04 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 97 jóvenes.

b) Tamaño de la muestra = $n = 140$. Proporción muestral = $p = \frac{120}{140} = \frac{6}{7} \approx 0.8571$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

Obtenemos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7}}{140}} \approx 0.0763$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.8571 - 0.0763, 0.8571 + 0.0763) = (0.7808, 0.9334)$$

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

- a) $X =$ Tiempo de entrega de un repartidor en minutos. $X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de la muestra = $n = 200$. Media muestral = $\bar{x} = 17.5$ minutos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{200}} \simeq 0.7297 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de tiempo de entrega de un pedido es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17.5 - 0.7297, 17.5 + 0.7297) = (16.7703, 18.2297)$$

Es decir, tenemos una confianza del 99% de que el tiempo medio de entrega de un pedido está entre 16.7703 y 18.2297 minutos.

- b) El error de estimación ha sido de 0.7297 minutos.

Si quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, es decir,

mayor que el anterior el valor de $z_{\alpha/2}$ sería mayor y el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ también sería mayor.



Universidad de
Oviedo

EBAU Ordinaria 2023
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indica en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderás**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -2$.

Pregunta 2. Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 €	300 €

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50% de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10% de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 €.

- a) [1.75 puntos] ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?
- b) [0.75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Pregunta 3. La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + a \cdot x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10 \cdot x + b \cdot x^2 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

- a) [0.75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.
- b) [1.75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[1, 10]$. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

- a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.
- b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.

Pregunta 5. Según cierto estudio, se sabe que el 80% de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40% tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además, se sabe que el 25% de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

- a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?
- b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Pregunta 6. En una determinada población, el 5% de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90% de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95% de las veces si no está infectado. Se pide:

- a) **[1.25 puntos]** Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?
- b) **[1.25 puntos]** Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Pregunta 7. Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.*

- a) **[1.5 puntos]** Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99%?

Pregunta 8. Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustará el producto, al 99% de confianza.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .

b) **[1.5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -2$.

a) Transformamos la ecuación matricial en un sistema de ecuaciones.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-1 & 3-1 \\ -3+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8m+2+8m & -8+8+2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}}$$

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A . Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = 1 - m^2 \\ |A| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m \neq \pm 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.
El sistema queda $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones iguales el sistema se reduce a una ecuación: $x + y = 1$. El sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $m = -1$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2.
El sistema queda $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$. Es tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + y \\ -x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - y + y = 1 \Rightarrow -1 = 1 \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema no tiene solución.

Respuestas: El sistema tiene solución cuando $m \neq -1$. La solución es única cuando $m \neq \pm 1$.

Resolvemos el sistema para $m = -2$. Sabemos que tiene solución única.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2y \\ -2x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(1 + 2y) + y = 1 \Rightarrow -2 - 4y + y = 1 \Rightarrow -3y = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{-3} = -1} \Rightarrow \boxed{x = 1 + 2(-1) = -1}$$

La solución es $x = -1$, $y = -1$.

Pregunta 2. Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 €	300 €

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50% de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10% de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 €.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) **[0.75 puntos]** Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

a) Llamamos “x” a los anuncios por televisión e “y” a los anuncios por radio.

“Los anuncios en radio deben ser al menos el 50% de los anuncios totales” $\rightarrow y \geq \frac{x+y}{2}$

“Los anuncios en televisión deben ser al menos el 10% de los anuncios totales” $\rightarrow x \geq 0.10(x+y)$

“El presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 €.” $\rightarrow 2100x + 300y \leq 24000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2100x + 300y \leq 24000 \\ y \geq \frac{x+y}{2} \\ x \geq 0.10(x+y) \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + y \leq 80 \\ 2y \geq x + y \\ 10x \geq x + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 80 - 7x \\ y \geq x \\ 9x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$y = 80 - 7x$$

x	y = 80 - 7x
0	80
10	10

$$y = x$$

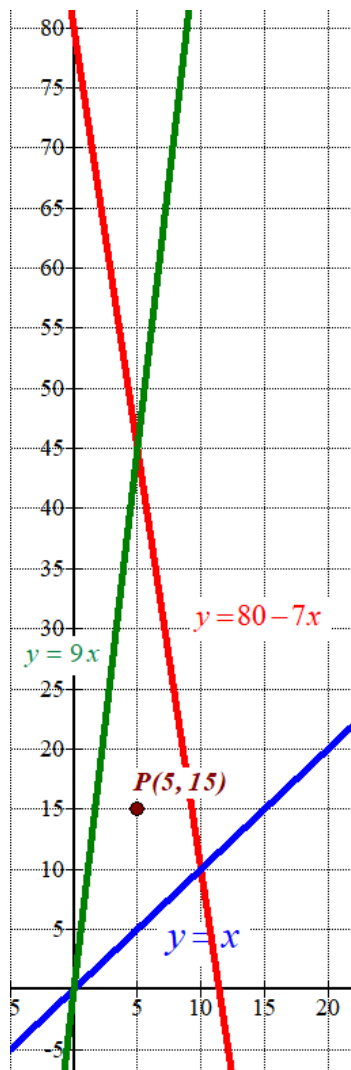
x	y = x
0	0
10	10

$$y = 9x$$

x	y = 9x
0	0
10	90

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



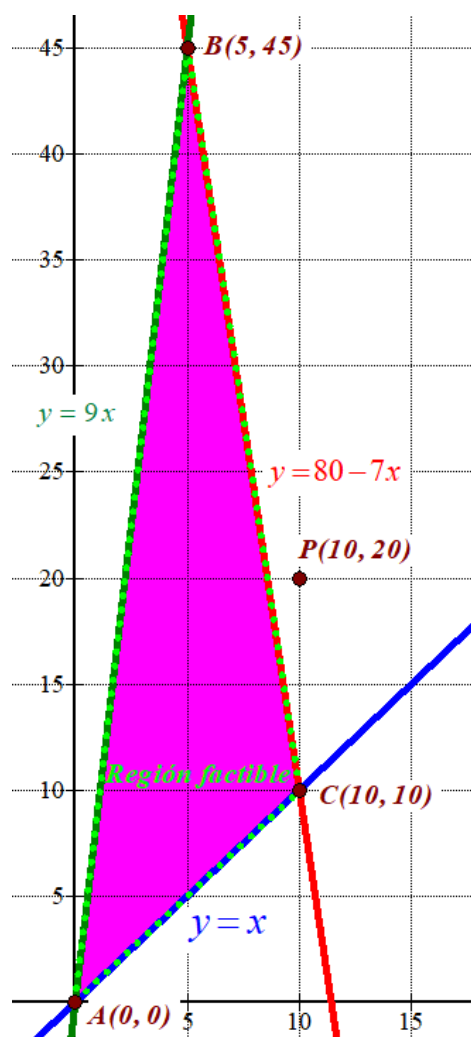
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \leq 80 - 7x \\ y \geq x \\ 9x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 15)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 15 \leq 80 - 7 \cdot 5 \\ 15 \geq 5 \\ 9 \cdot 5 \geq 15 \\ 5 \geq 0; 15 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

El punto $(10, 20)$ no pertenece a la región factible, por lo que no se pueden hacer 10 anuncios en televisión y 20 en radio ya que no cumplen algunas de las restricciones.

b) Deseamos maximizar la audiencia total que viene dada por la expresión:

$$f(x, y) = 100000x + 18000y$$

Para encontrar la audiencia máxima valoramos la función en cada uno de sus vértices:

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(5, 45) \rightarrow f(5, 45) = 100000 \cdot 5 + 18000 \cdot 45 = 1\,310\,000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(10, 10) \rightarrow f(10, 10) = 100000 \cdot 10 + 18000 \cdot 10 = 1\,180\,000$$

La máxima audiencia es de 1 310 000 personas y se obtiene en el vértice $B(5, 45)$ lo que significa hacer 5 anuncios de televisión y 45 de radio.

Pregunta 3. La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + a \cdot x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10 \cdot x + b \cdot x^2 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

- a) **[0.75 puntos]** Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.
- b) **[1.75 puntos]** Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[1, 10]$. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

- a) Si los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros $\rightarrow$

$$f(3) = 112.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 22 + a \cdot 3 \\ f(3) = 112 \end{array} \right\} \Rightarrow 22 + 3a = 112 \Rightarrow 3a = 90 \Rightarrow \boxed{a = \frac{90}{3} = 30}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10 \cdot x + b \cdot x^2 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$.

Si la función f es continua en todo su dominio debe ser continua en $x = 3 \rightarrow$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = 112 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 100 + 10 \cdot x + b \cdot x^2 = 100 + 30 + 9b = 130 + 9b \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 22 + 30x = 112 \\ f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow 112 = 130 + 9b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18 = 9b \Rightarrow \boxed{b = \frac{-18}{9} = -2}$$

Los valores buscados son $a = 30$ y $b = -2$.

- b) La función con los valores de las constantes obtenidas en el apartado anterior queda:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10x - 2x^2 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases}$$

Su gráfica es un trozo de recta (entre 1 y 3) y un trozo de parábola (entre 3 y 10). Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 100 + 10x - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 10 - 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{4} = 2.5 \notin (3, 10]$$

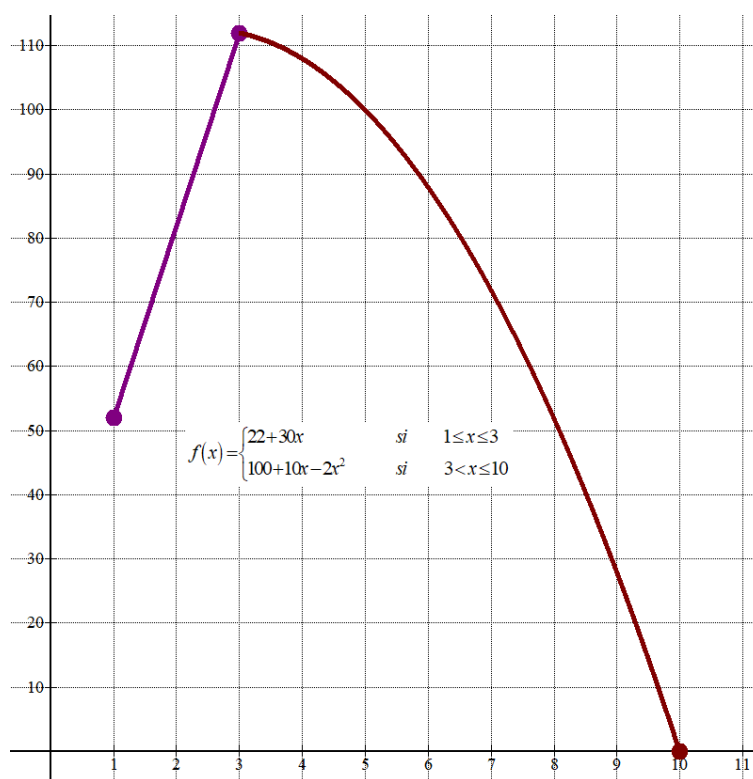
Hacemos una tabla de valores para cada trozo de gráfica y la representamos.

$$1 \leq x \leq 3 \rightarrow f(x) = 22 + 30x$$

$$3 < x \leq 10 \rightarrow f(x) = 100 + 10x - 2x^2$$

x	$y = 22 + 30x$
1	52
2	82
3	112

x	$y = 100 + 10x - 2x^2$
4	108
5	100
6	88
8	52
10	0



Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día?

Mirando la gráfica para $y = 100$ hay dos posibilidades: Entre 2 y 3 toneladas y otra posibilidad es 5 toneladas.

Las obtenemos con más precisión.

$$f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 100 + 10x - 2x^2 & \text{si } 3 < x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow y = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 22 + 30x = 100 \rightarrow 30x = 78 \Rightarrow x = \frac{78}{30} = 2.6 \\ 100 + 10x - 2x^2 = 100 \rightarrow 10x - 2x^2 = 0 \rightarrow 2x(5 - x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (3, 10] \\ x = 5 \end{cases} \end{cases}$$

Se pueden obtener un beneficio de 100 000 € con una producción de 5 toneladas y con una de 2.6 toneladas.

¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Observando la gráfica el beneficio máximo es de 112 000 € y el mínimo beneficio es de 0 €.

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

- a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.
 b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.

a) Determinamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -x^2 + 4x dx = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 + K$$

Como debe ser $F(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 + K \\ F(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + K = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{3}$$

$$F(x) = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 + \frac{1}{3}$$

b) La gráfica de la función es una parábola. Hallamos su vértice o mínimo relativo.

$$f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

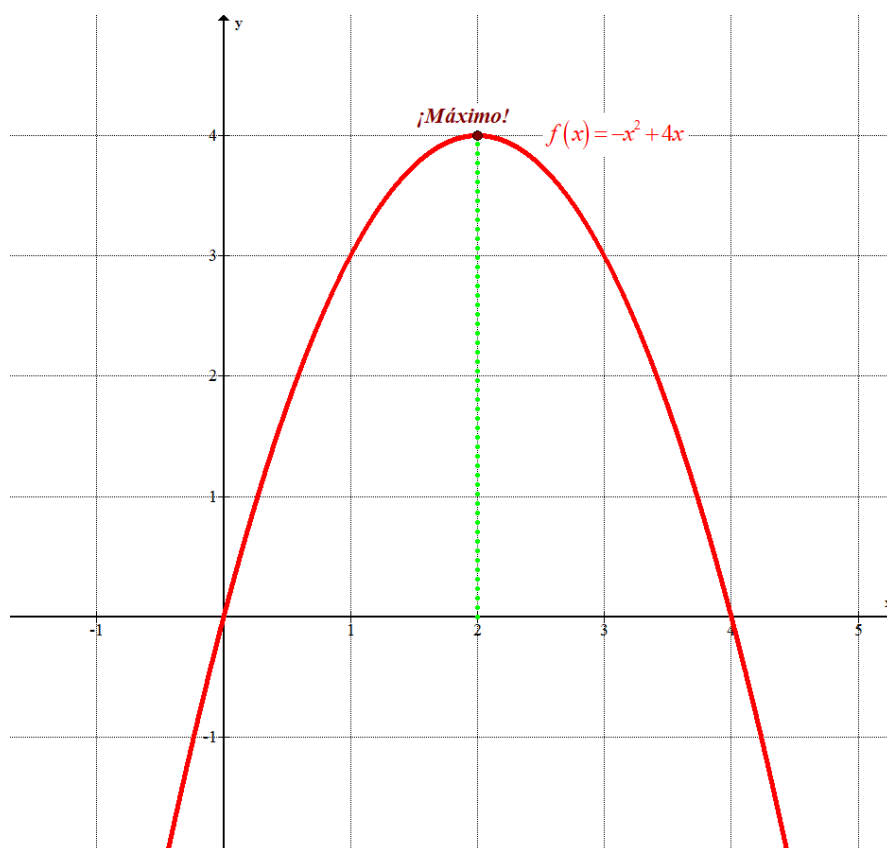
Estudiamos la monotonía de la función antes y después del punto crítico $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -6 + 4 = -2 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$. Como $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$ las coordenadas del máximo relativo son $(2, 4)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$y = -x^2 + 4x$
0	0
1	3
2	4 Vértice
3	3
4	0



Los puntos de corte con los ejes son $x = 0$, $x = 4$.

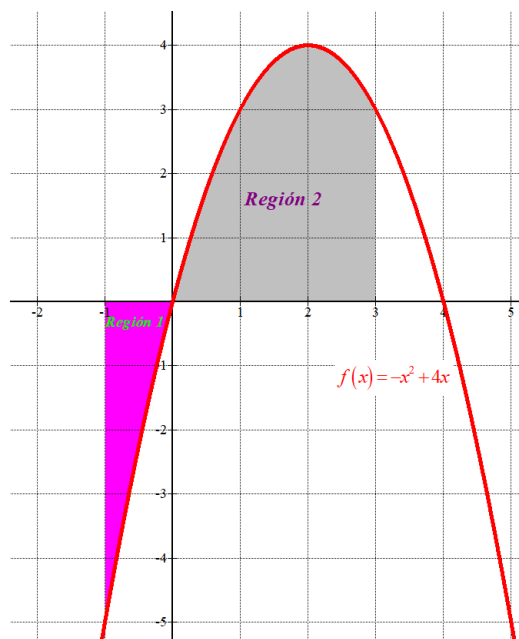
Como la función corta el eje X en $x = 0$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$ es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre -1 y 0 y la integral definida de la función entre 0 y 3 .

$$\text{Área 1} = \left| \int_{-1}^0 -x^2 + 4x dx \right| = \left| \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_{-1}^0 \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{-(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 \right] \right| = \boxed{\frac{7}{3} u^2}$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_0^3 -x^2 + 4x dx \right| = \left| \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^3 \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{-3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 \right] - \left[\frac{-0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] \right| = \boxed{9 u^2}$$



El área total es la suma de las dos áreas calculadas: $\frac{7}{3} + 9 = \boxed{\frac{34}{3} \approx 11.33 u^2}$

Pregunta 5. Según cierto estudio, se sabe que el 80% de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40% tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además, se sabe que el 25% de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

- a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?
 b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Llamamos I al suceso “Hogar con internet” y T a “Hogar con canal de televisión de pago”. Realizamos una tabla de contingencia-

	Internet	Sin internet	
Televisión de pago	25		40
Sin televisión de pago			
	80		100

Completamos la tabla.

	Internet	Sin internet	
Televisión de pago	25	15	40
Sin televisión de pago	55	5	60
	80	20	100

Aplicando la regla de Laplace y con los datos que nos proporciona la tabla respondemos a las preguntas.

$$a) P(T \cap I^c) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$$

$$b) P(T^c \cap I^c) = \frac{5}{100} = \boxed{0.05}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos I al suceso “Hogar con internet” y T a “Hogar con canal de televisión de pago”. Sabemos que $P(I) = 0.8$, $P(T) = 0.4$ y $P(I \cap T) = 0.25$.

$$a) P(T) = P(T \cap I) + P(T \cap I^c) \Rightarrow 0.4 = 0.25 + P(T \cap I^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(T \cap I^c) = 0.4 - 0.25 = 0.15}$$

$$b) P(\bar{T} \cap \bar{I}) = \{\text{Leyes de Morgan}\} = P(\overline{T \cup I}) = 1 - P(T \cup I) = 1 - [P(T) + P(I) - P(T \cap I)]$$

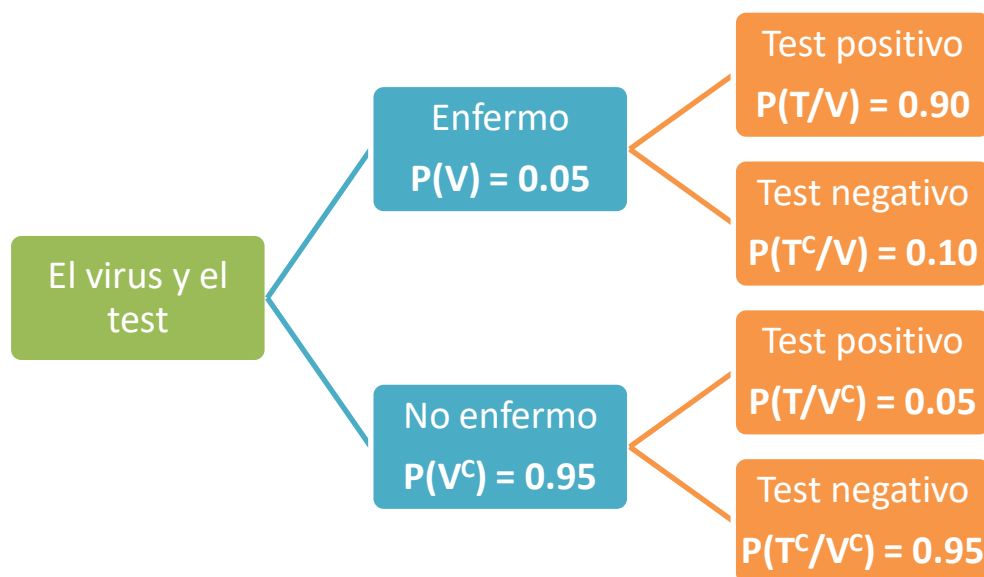
$$\boxed{P(\bar{T} \cap \bar{I}) = 1 - [0.4 + 0.8 - 0.25] = 1 - 0.95 = 0.05}$$

Pregunta 6. En una determinada población, el 5% de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90% de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95% de las veces si no está infectado. Se pide:

- a) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?
- b) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Llamamos V = “Ha contraído el virus”, T = “Prueba da positivo”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(V^c / T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V^c / T) = \frac{P(V^c \cap T)}{P(T)} = \frac{P(V^c)P(T / V^c)}{P(V)P(T / V) + P(V^c)P(T / V^c)} =$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.05}{0.05 \cdot 0.90 + 0.95 \cdot 0.05} = \boxed{\frac{19}{37} \approx 0.5135}$$

- b) Nos piden calcular $P(V / T^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V / T^c) = \frac{P(V \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(V)P(T^c / V)}{P(V)P(T^c / V) + P(V^c)P(T^c / V^c)} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.1}{0.05 \cdot 0.10 + 0.95 \cdot 0.95} = \boxed{\frac{2}{363} \approx 0.0055}$$

Pregunta 7. Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años. *

- a) **[1.5 puntos]** Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99%?

a) X = duración de un aparato electrónico, en años. $X = N(\mu, 0.5)$.

Tamaño de la muestra = $n = 150$. Media muestral = $\bar{x} = 1.8$ años.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0.90$; $F(1,64) = 0.95$; **$F(1,96) = 0.975$** ; $F(2,33) = 0.99$ y $F(2,58) = 0.995$.

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{150}} = 0.08 \text{ años}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1.8 - 0.08, 1.8 + 0.08) = (1.72, 1.88)$$

Es decir, tenemos una confianza del 95% de que la duración media está entre 1.72 y 1.88 años.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

El error debe ser menor de 0.2. Utilizamos la fórmula del error para despejar n :

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.2 = 2.58 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.2\sqrt{n} = 2.58 \cdot 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.58 \cdot 0.5}{0.2} \Rightarrow n = \left(\frac{2.58 \cdot 0.5}{0.2} \right)^2 = 41.6025$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 42 aparatos.

Pregunta 8. Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.*

- a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustará el producto, al 99% de confianza.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

- a) Tamaño de la muestra = $n = 200$. Proporción muestral de las personas a las que les ha gustado el producto es: $p = \frac{150}{200} = 0.75$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0.90$; $F(1,64) = 0.95$; $F(1,96) = 0.975$; $F(2,33) = 0.99$ y **$F(2,58) = 0.995$** .

Obtenemos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} \approx 0.079$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.079, 0.75 + 0.079) = (0.671, 0.829)$$

- b) En el Intervalo de confianza anterior el error de la estimación es 0.079.

La fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Si mantenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ y la proporción muestral (p) y disminuimos el tamaño muestral (n) tendremos un error mayor (disminuye $n \rightarrow$ aumenta $Error$).



Universidad de Oviedo

EBAU Extraordinaria 2022
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un $m\%$ con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900 + 20m$ euros.

- [0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.
- [2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20%?

1B. Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

- [1,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?
- [0,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

2A. Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el $x\%$ de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

- [1,75 puntos]** Obtener la expresión de la función f en función de x . Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 40]$.
- [0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

2B. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.
 - b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.
-

3A. Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70% son de leche entera, el 20% de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5% de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3% de las de leche semidesnatada y el 10% de las de leche desnatada.

- a) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?
 - b) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?
-

3B. En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40% de los votantes votan al candidato A y el 60% restante al B. De los votantes del candidato A, el 25% son mujeres, mientras que un 20% de los votantes del candidato B son hombres.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea mujer.
 - b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.
-

4A Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.*

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90% de confianza.
 - b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90%?
-

4B. En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.*

- a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.
 - b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?
-

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

1A. La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un $m\%$ con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900 + 20m$ euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20%?

a) Si representamos por x e y el coste, en euros, del café y la leche, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar las siguientes ecuaciones:

“ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros” $\rightarrow x + y = 2500$

“Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un $m\%$ con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900 + 20m$ euros” $\rightarrow$ Le restamos al importe total ($2900 + 20m$ €) los 2500 € del coste y eso debe ser el beneficio que se obtiene del 80 % del café y el m % de

la leche $\rightarrow \frac{80}{100}x + \frac{m}{100}y = 2900 + 20m - 2500 \rightarrow \frac{80}{100}x + \frac{m}{100}y = 400 + 20m$

Juntamos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ \frac{80}{100}x + \frac{m}{100}y = 400 + 20m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 80x + my = 40000 + 2000m \end{array} \right\}$$

b) Lo transformamos en otro equivalente más sencillo de resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 80x + my = 40000 + 2000m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 80 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 80x + my = 40000 + 2000m \\ -80x - 80y = -200000 \\ \hline (m-80)y = 2000m - 160000 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ (m-80)y = 2000m - 160000 \end{array} \right\}$$

Si $m \neq 80$ podemos resolver el sistema y tendríamos una única solución en función de m .

Si $m = 80$ el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = 2500 - y}$. El sistema tendría infinitas

soluciones, la única condición es que el coste del café y de la leche sean 2500 €.

Conclusión: El sistema tiene solución para cualquier valor de m . La solución es única cuando $m \neq 80$.

Para $m = 20$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ (20 - 80)y = 2000 \cdot 20 - 160000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ -60y = -120000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ \boxed{y = 2000} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2000 = 2500 \Rightarrow \boxed{x = 500}$$

Si el beneficio de venta de la leche es del 20% el café costó 500 €.

1B. Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?
- b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

- a) En el test de 80 preguntas hay respuestas correctas, incorrectas y no respondidas.

Llamamos x e y al número de respuestas correctas e incorrectas, respectivamente.

La puntuación obtenida en el examen es $x - 0.5y$.

Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test $\rightarrow x - 0.5y \geq 35$

El número de respuestas correctas e incorrectas debe ser positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La suma de respuestas de respuestas correctas e incorrectas debe ser menor o igual a 80 $\rightarrow x + y \leq 80$

Todas las inecuaciones juntas forman un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - 0.5y \geq 35 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y \geq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 2x - 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \end{array} \right\}$$

Representamos la región del plano que cumple el sistema de inecuaciones empezando por representar las rectas que delimitan la región.

$$y = 2x - 70$$

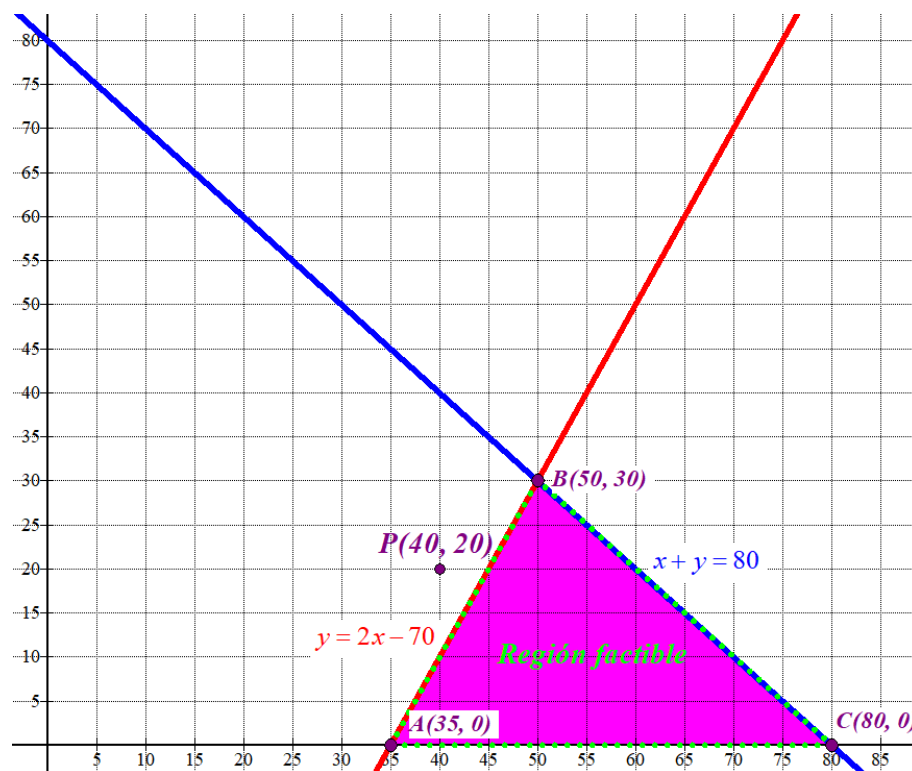
x	$y = 2x - 70$
35	0
50	30

$$x + y = 80$$

x	$y = 80 - x$
0	80
80	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como el punto $P(40, 20)$ queda fuera de la región del plano en la que se encuentran todas las soluciones del problema planteado dicho resultado no nos permite aprobar el examen.

- b) Queremos maximizar la función “preguntas sin contestar”, como $x + y =$ “preguntas respondidas correcta o incorrectamente” la función es $f(x, y) = 80 - (x + y)$.

Valoramos la función en cada uno de los vértices de la región en busca del valor máximo.

$$A(35, 0) \rightarrow f(35, 0) = 80 - (35 + 0) = 45 \text{ ;Máximo!}$$

$$B(50, 30) \rightarrow f(50, 30) = 80 - (50 + 30) = 0$$

$$C(80, 0) \rightarrow f(80, 0) = 80 - (80 + 0) = 0$$

El número máximo de preguntas sin responder para poder aprobar es de 45. En este caso, se deberían responder las 35 de forma correcta y ninguna mal. Los puntos que se obtendrían son 35.

2A. Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el $x\%$ de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos - costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

- a) **[1,75 puntos]** Obtener la expresión de la función f en función de x . Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 40]$.
- b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

- a) En un año cualquiera, si la producción es de x toneladas, los ingresos son $500x$ miles de euros. Por otro lado, los costes son:

- Costes de producción: $250x$ miles de euros.
- Impuestos: $\frac{x}{100} \cdot \text{Ingresos} = \frac{x}{100} \cdot 500x = 5x^2$ miles de euros.
- Costes fijos: 1125 miles de euros.

con lo que el coste total en ese año es $250x + 5x^2 + 1125$ y, por tanto, los beneficios son:

$$f(x) = 500x - (250x + 5x^2 + 1125) = -5x^2 + 250x - 1125$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[0, 40]$.

$$f(0) = -1125 \text{ y } f(40) = -5 \cdot 40^2 + 250 \cdot 40 - 1125 = 875$$

Averiguamos los puntos de corte con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -5x^2 + 250x - 1125 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -5x^2 + 250x - 1125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 225 = 0 \Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 900}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2} = \begin{cases} \frac{50+40}{2} = 45 \notin [0, 40] \\ \frac{50-40}{2} = 10 \in [0, 40] \end{cases}$$

La gráfica corta el eje X en el punto (10, 0).

Estudiamos la evolución de la función usando su función derivada.

$$f'(x) = -10x + 250$$

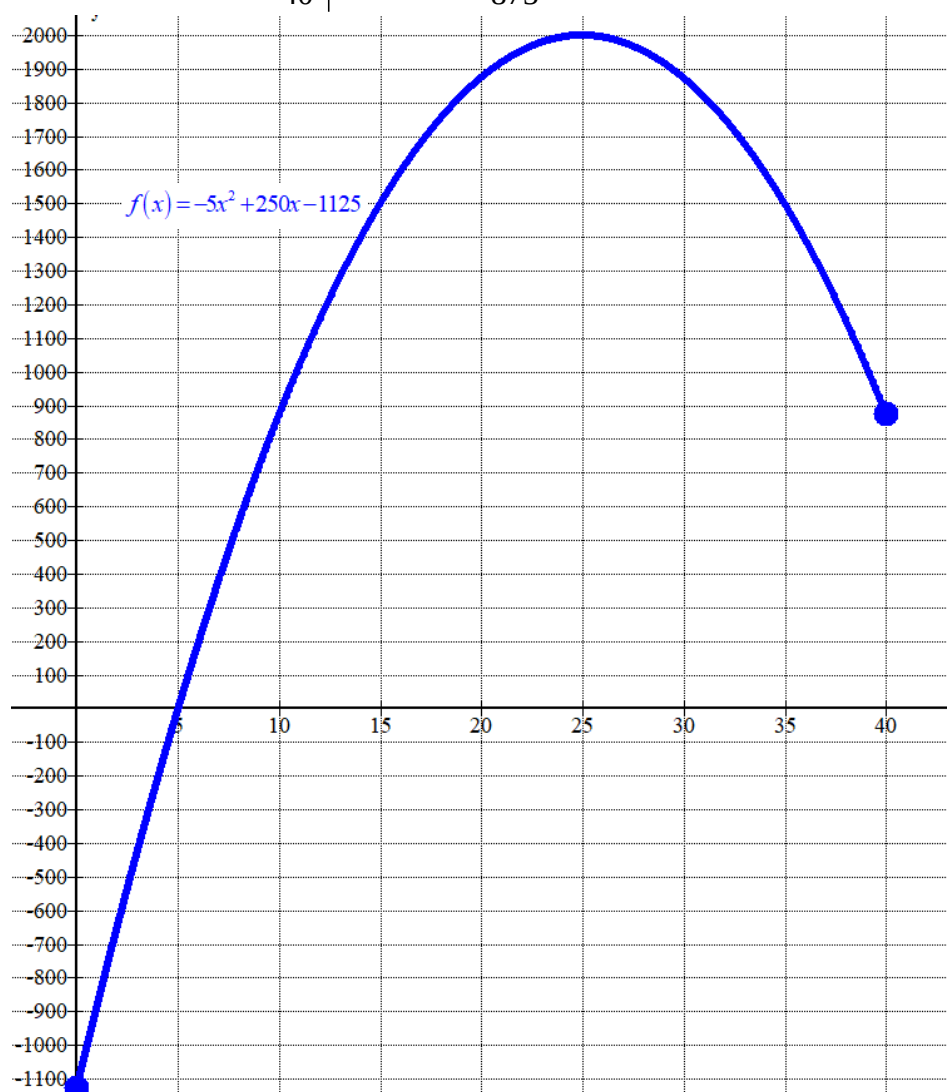
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 250 = 0 \Rightarrow x = \frac{250}{10} = 25$$

- En el intervalo $(0, 25)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = -100 + 250 = 150 > 0$. La función crece en $(0, 25)$.
- En el intervalo $(25, 40)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale $f'(30) = -300 + 250 = -50 < 0$. La función decrece en $(25, 40)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 25$.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = -5x^2 + 250x - 1125$
0	-1125
10	875
25	2000
30	1875
40	875



- b) El máximo de la función está en el punto $(25, 2000)$ que significa que hay que fabricar 25 toneladas para obtener un beneficio máximo de 2 000 000 €.

La función es positiva entre $x = 5$ y $x = 40$, lo que significa que para obtener beneficios hay que producir al menos 5 toneladas.

2B. Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

a) Calculamos la integral indefinida de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 4x^2 + 3x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + K$$

Calculamos K para que $F(1) = 1$.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + K \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + K = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + K = 1 \Rightarrow \\ F(1) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow K = 1 - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{7}{12} \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{12}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{12}$

b) La función es polinómica por lo que es continua y su dominio son todos los números reales.

Averiguamos los puntos de corte con los ejes.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \Rightarrow f(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A(0,0)$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \Rightarrow 0 = x^3 - 4x^2 + 3x \Rightarrow 0 = x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4+2}{2} = 3 = x \rightarrow B(3,0) \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \rightarrow C(1,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Estudiamos la evolución de la función a través de su derivada: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 36}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \approx 2.2 \\ \frac{8-2\sqrt{7}}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0.45 \end{array} \right.$$

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 3 = 3 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right).$$

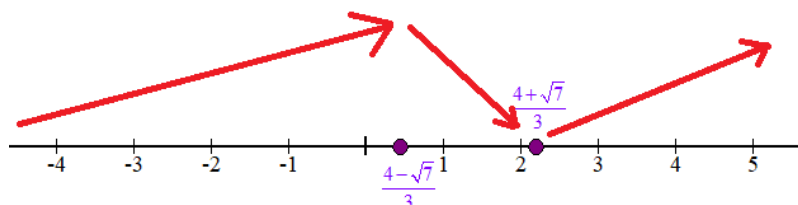
- En el intervalo $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = -2 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = 3 \cdot 10^2 - 80 + 3 = 223 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right).$$

La función sigue el esquema siguiente:

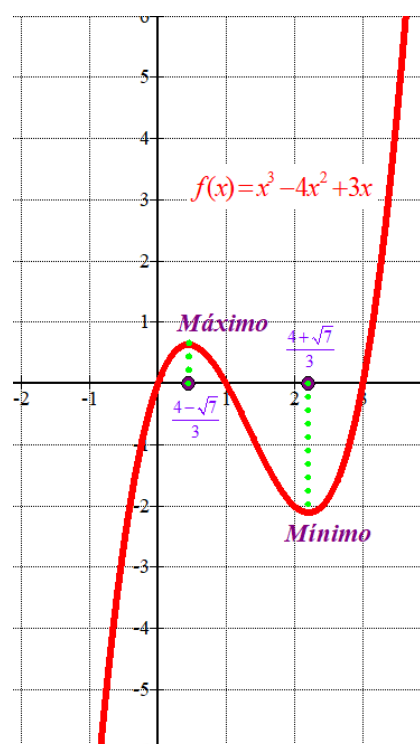


La función crece en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
0	0
$\frac{4-\sqrt{7}}{3}$	0.63
1	0
$\frac{4+\sqrt{7}}{3}$	-2.11
3	0
4	12



Nos piden hallar el área coloreada en rosa, verde y azul del dibujo.
Se obtiene como la suma de tres integrales definidas siguientes.

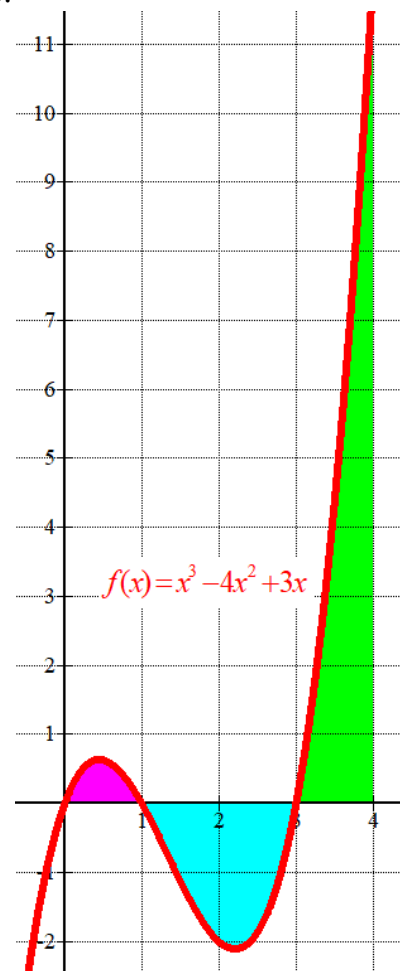
$$\begin{aligned} \text{Área rosa} &= \int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 0^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 \right] = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área azul} &= \left| \int_1^3 x^3 - 4x^2 + 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 \right] \right| = \boxed{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área verde} &= \int_3^{14} x^3 - 4x^2 + 3x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_3^{14} = \\ &= \left[\frac{14^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 14^3 + \frac{3}{2} \cdot 14^2 \right] - \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right] = \boxed{\frac{59}{12}} \end{aligned}$$

El área total es la suma del área de las tres regiones.

$$\boxed{\text{Área} = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} + \frac{59}{12} = 8 \text{ u}^2}$$

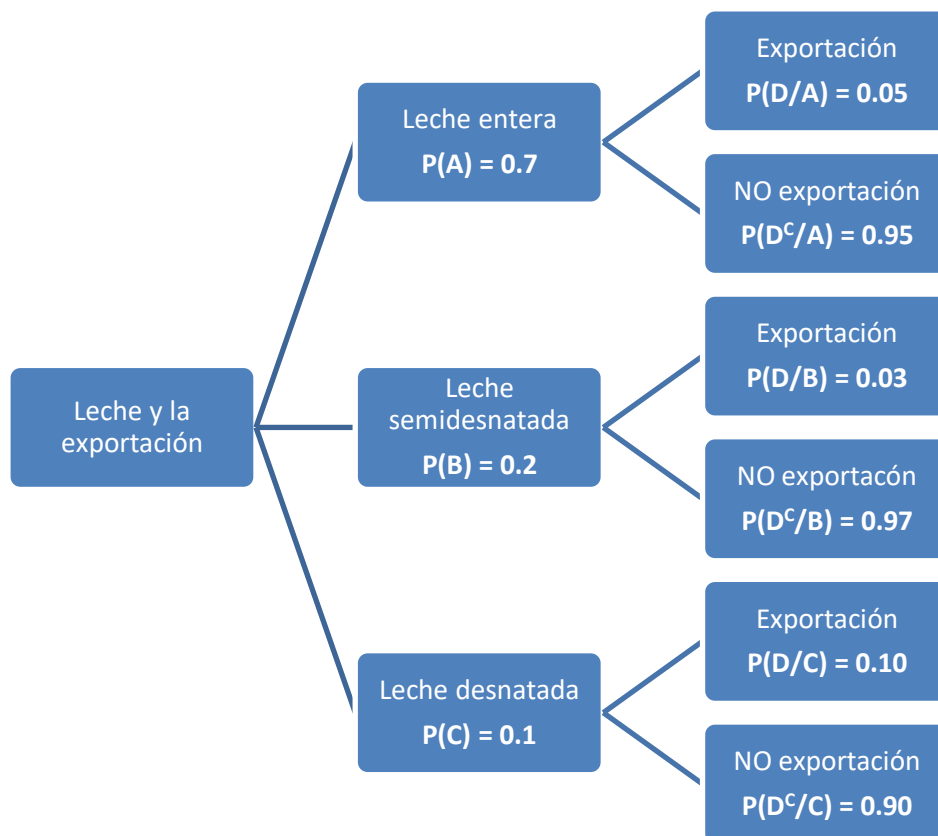


3A. Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70% son de leche entera, el 20% de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5% de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3% de las de leche semidesnatada y el 10% de las de leche desnatada.

- a) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?
 b) **[1,25 puntos]** Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

Llamamos A = “Leche entera”, B = “Leche semidesnatada”, C = “Leche desnatada” y D = “Ser exportada”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D^c) &= P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C) = \\
 &= 0.7 \cdot 0.95 + 0.2 \cdot 0.97 + 0.1 \cdot 0.90 = \boxed{0.949}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

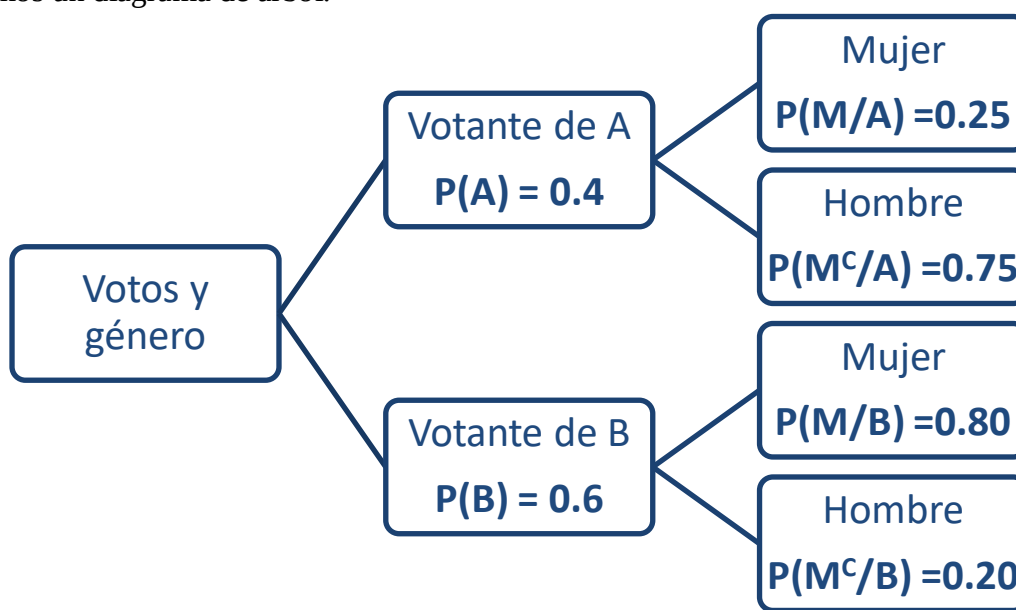
$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.2 \cdot 0.03}{1 - 0.949} = \boxed{\frac{2}{17} \approx 0.118}$$

3B. En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40% de los votantes votan al candidato A y el 60% restante al B. De los votantes del candidato A, el 25% son mujeres, mientras que un 20% de los votantes del candidato B son hombres.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea mujer.
 b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

Llamamos A = “Ser votante del partido A”, B = “Ser votante del partido B”, M = “Ser mujer” y M^C = “Ser hombre”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) = 0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.80 = \boxed{0.58}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/M^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M^C) = \frac{P(A \cap M^C)}{P(M^C)} = \frac{P(A)P(M^C/A)}{1 - P(M)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{1 - 0.58} = \boxed{\frac{5}{7} \approx 0.714}$$

4A Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.*

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90%?

Sea X = El tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad, en horas. $X = N(\mu, 10)$

- a) Media muestral = $\bar{x} = 40$ horas; Tamaño de la muestra = $n = 200$ clientes

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Calculamos el valor del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{200}} = 1.16$ horas

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (40 - 1.16, 40 + 1.16) = (38.84, 41.16)$$

Es decir, tenemos una confianza del 90% de que el tiempo que tarda la compañía en hacer una portabilidad está entre 38.84 y 41.16 horas.

- b) Si el intervalo de confianza debe tener una amplitud menor o igual a 2 horas el error debe ser menor o igual a 1.

Para un nivel de confianza del 90% hemos calculado en el apartado anterior que $z_{\alpha/2} = 1.64$.

Utilizamos la fórmula del error y despejamos el valor de n para un error de 1 hora.

$$\left. \begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \\ Error = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 16.4 \Rightarrow \boxed{n = 16.4^2 = 268.96}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que 268.96 tenemos que elegir una muestra de, al menos, 269 clientes.

4B. En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente. *

- a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan el plástico habitualmente en esa ciudad.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

- a) Obtenemos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

La proporción muestral es $p = \frac{240}{300} = 0.8$ y $1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{300}} \approx 0.045$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.8 - 0.045, 0.8 + 0.045) = (0.755, 0.845)$$

Así pues, tenemos una confianza del 95% de que el porcentaje de hogares que recicla el plástico está entre el 75.5% y el 84.5 %.

- b) El error de estimación es 0.045.

Si en la fórmula del error $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ mantenemos constante la proporción muestral y el nivel de confianza (y por tanto el $z_{\alpha/2}$) entonces al aumentar el tamaño muestral (n) disminuye el error, pues la variable “ n ” está en el denominador de la expresión. La amplitud del intervalo es el doble del error y por tanto también disminuye al aumentar el tamaño muestral.



Universidad de Oviedo

EBAU Ordinaria 2022

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un $m\%$ de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6% de beneficios.

- [0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.
- [2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4% ? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

1B. En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

- [1,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?
- [0,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

2A. El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -0.5x^2 + 4x + a & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- [0,75 puntos]** Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.
- [1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

2B. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.

3A. El 30% de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40% toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

3B. Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60% de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10% de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25% en el caso de Juan.

- a) **[1,25 puntos]** Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
- b) **[1,25 puntos]** Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

4A Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 90%?
- b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 2000 personas, se sabe que 600 han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.

4B. La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 horas.

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muestra de 100 pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de 55000 horas.
- b) **[1 punto]** Si el tamaño muestral siguiese siendo de 100 pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

1A. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un $m\%$ de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6% de beneficios.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.
- b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4%? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

a) Llamamos “ x ” a lo invertido en la primera empresa e “ y ” a lo invertido en la segunda.

“Los beneficios son de 1280 €, siendo un $m\%$ de beneficios en lo invertido en la primera empresa y un 6 % de beneficios en lo invertido en la segunda” $\rightarrow \frac{mx}{100} + \frac{6y}{100} = 1280$

“Ha invertido 22000 € en las dos empresas” $\rightarrow x + y = 22000$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{mx}{100} + \frac{6y}{100} = 1280 \\ x + y = 22000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} mx + 6y = 128000 \\ x + y = 22000 \end{array} \right\}$$

b) Transformamos el sistema en otro equivalente más sencillo.

$$\left. \begin{array}{l} mx + 6y = 128000 \\ x + y = 22000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 6 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rcl} mx & +6y & = 128000 \\ -6x & -6y & = -132000 \\ \hline (m-6)x & & = -4000 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} mx + 6y = 128000 \\ (m-6)x = -4000 \end{array} \right\}$$

El sistema es incompatible si $m = 6$, pues quedaría $\left. \begin{array}{l} 6x + 6y = 128000 \\ 0 = -4000 \end{array} \right\}$ ¡Igualdad imposible!

Si $m \neq 6$ podemos terminar de resolver el sistema y será compatible determinado.

Resolvemos el sistema que queda cuando $m = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 128000 \\ -2x = -4000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 128000 \\ x = \frac{-4000}{-2} = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow 8000 + 6y = 128000 \Rightarrow 6y = 120000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{120000}{6} = 20000$$

Se invierten 2000 € en la primera empresa y 20000 € en la segunda.

1B. En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?
- b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

a) Llamamos “x” al número de lavadoras. “y” al número de frigoríficos.

“El número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras” $\rightarrow y \geq x; y \leq 2x$

“Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras” $\rightarrow y \geq 20; x \leq 30$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$y = x$$

x	y = x
0	0
20	20

$$y = 2x$$

x	y = 2x
0	0
20	40

$$y = 20$$

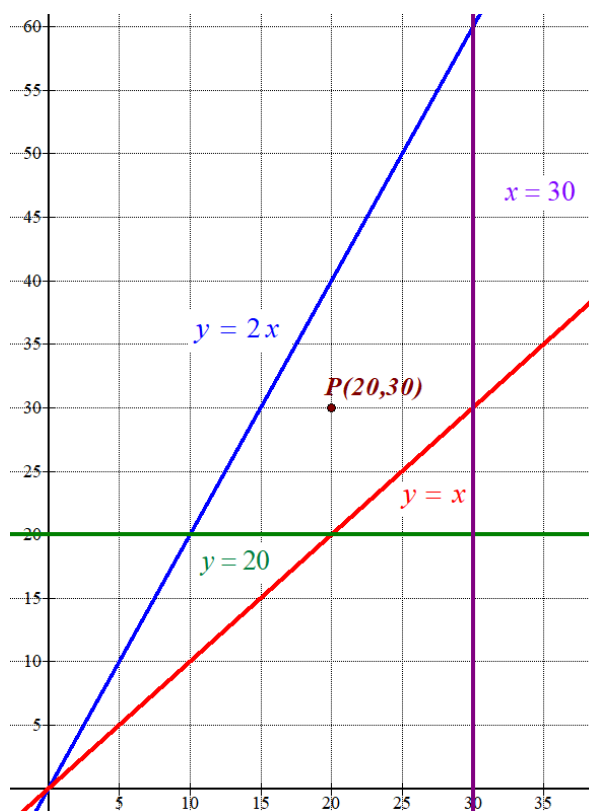
x	y = 20
0	20
20	20

$$x = 30$$

Recta
vertical

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



$y \geq x$
 $y \leq 2x$
 Como las restricciones son $y \geq 20$
 $x \leq 30$
 $x \geq 0; y \geq 0$

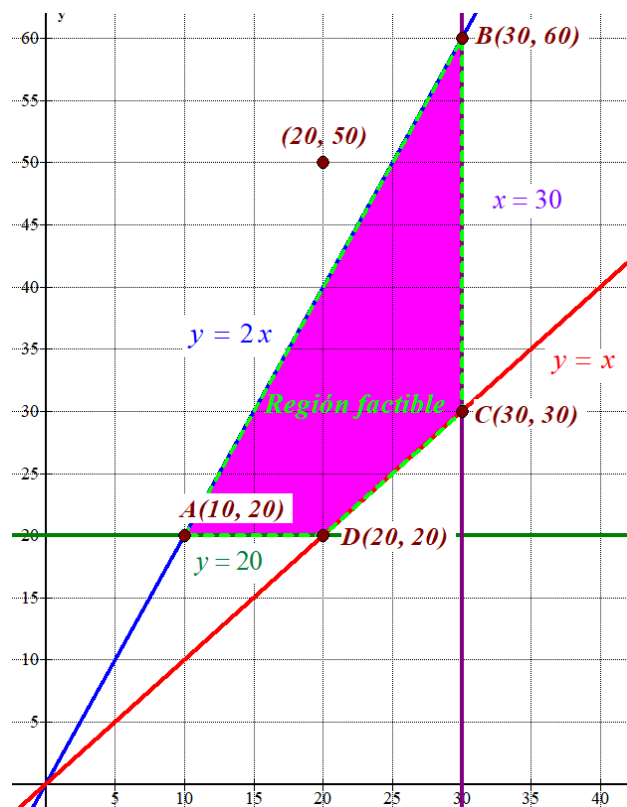
la región que contiene las soluciones del sistema es la

región del primer cuadrante situada por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja y de la recta horizontal verde y a la izquierda de la recta vertical violeta.

Comprobamos que el punto P(20, 30) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 30 \geq 20 \\ 30 \leq 2 \cdot 20 \\ 30 \geq 20 \\ 20 \leq 30 \\ 20 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



El punto (20, 50) no pertenece a la región factible, por lo que no se pueden tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos en el almacén.

b) Deseamos maximizar el beneficio que viene dado por la expresión: $B(x, y) = 200x + 250y$

Para encontrar el beneficio máximo valoramos la función en cada uno de sus vértices:

$$A(10, 20) \rightarrow B(10, 20) = 2000 + 5000 = 7000$$

$$B(30, 60) \rightarrow B(30, 60) = 6000 + 15000 = 21000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(30, 30) \rightarrow B(30, 30) = 6000 + 7500 = 13500$$

$$D(20, 20) \rightarrow B(20, 20) = 4000 + 5000 = 9000$$

El máximo beneficio es de 21000 € y se obtiene en el vértice B(30, 60) lo que significa tener 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si se desea minimizar el número de lavadoras la función objetivo sería $f(x, y) = x$.

Esta función alcanza su valor mínimo en el punto con primera coordenada más pequeña y ese punto es el A(10, 20). Es decir, teniendo en el almacén 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

2A. El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -0.5x^2 + 4x + a & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.
 b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

- a) La función es continua en cada intervalo de definición. Comprobamos si lo es en cada cambio de definición.

¿En $x = 1$ es continua?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 35 = 35 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 25 + 10x = 25 + 10 = 35 \\ f(1) = 25 + 10 = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 35$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

¿En $x = 2$ es continua?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 25 + 10x = 45 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -0.5x^2 + 4x + a = -0.5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + a = 6 + a \\ f(2) = 6 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + a = 45 \Rightarrow \boxed{a = 39}$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 2$ si $a = 39$.

Para que la función sea continua en todo su dominio debe ser $a = 39$.

- b) Para $a = 39$ la función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -0.5x^2 + 4x + 39 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

La primera rama (entre 0 y 1) es una recta horizontal.

La segunda rama (entre 1 y 2) es una recta con pendiente positiva ($y = 25 + 10x$).

La tercera rama (entre 2 y 5) es una parábola ($y = -0.5x^2 + 4x + 39$).

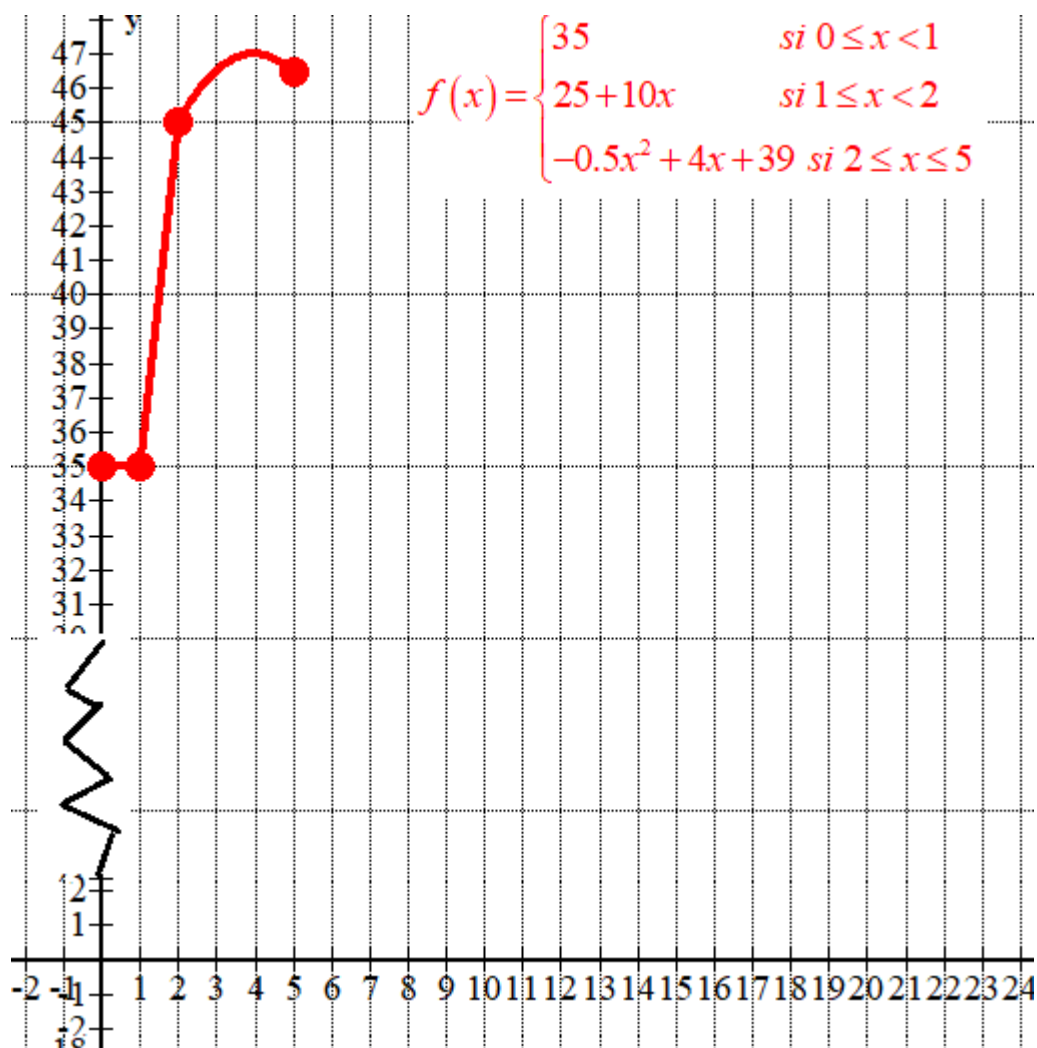
Averiguamos las coordenadas del vértice de la parábola.

$$y' = -x + 4$$

$$y' = 0 \Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4} \text{ Vértice}$$

Hacemos una tabla de valores en cada intervalo de definición.

$0 \leq x < 1$	$y = 35$	$1 \leq x < 2$	$y = 25 + 10x$	$2 \leq x \leq 5$	$y = -0.5x^2 + 4x + 39$
0	35	1	35	2	$-2 + 8 + 39 = 45$
0.5	35	1.5	40	3	$-4.5 + 12 + 39 = 46.5$
				4	$-8 + 16 + 39 = 47$ <i>Vértice</i>
				5	$-12.5 + 20 + 39 = 46.5$



El salario máximo se produce en el vértice de la parábola $x = 4$ (al cuarto año) y el mínimo en los años 0 y 1.

2B. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.
 b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.

a) Calculamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 - 2x - 3 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + K$$

Como debe ser $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + K \\ F(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0^3}{3} - 0^2 - 3 \cdot 0 + K = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

b) La gráfica de la función es una parábola. Hallamos su vértice o mínimo relativo.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

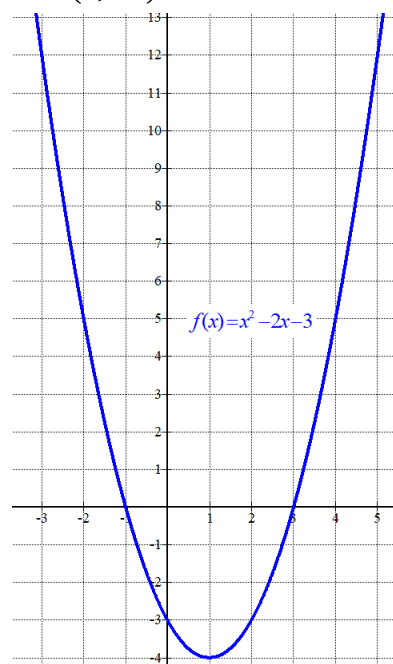
- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -2 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 4 - 2 = 2 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$.

Como $f(1) = 1^2 - 2 - 3 = -4$ las coordenadas del mínimo relativo son $(1, -4)$.

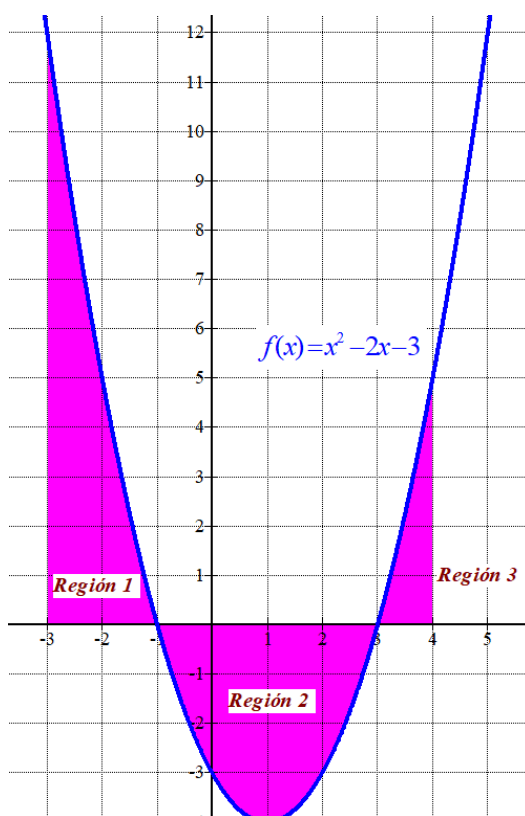
Hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^2 - 2x - 3$
-1	$(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$
0	-3
1	-4 Vértice
2	-3
3	0



Los puntos de corte con los ejes son $x = -1$, $x = 3$.

El área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es la suma del área de tres regiones que calculamos por separado.



$$\begin{aligned} \text{Área región 1} &= \left| \int_{-3}^{-1} x^2 - 2x - 3 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} \right| = \\ &= \left| \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) \right] - \left[\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 - 3(-3) \right] \right| = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 9 + 9 - 9 = \boxed{\frac{32}{3} u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área región 2} &= \left| \int_{-1}^3 x^2 - 2x - 3 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) \right] \right| = \left| 9 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \right| = \boxed{\frac{32}{3} u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área región 3} &= \left| \int_3^4 x^2 - 2x - 3 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_3^4 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{4^3}{3} - 4^2 - 3 \cdot 4 \right] - \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \right] \right| = \frac{64}{3} - 16 - 12 - 9 + 9 + 9 = \boxed{\frac{7}{3} u^2} \end{aligned}$$

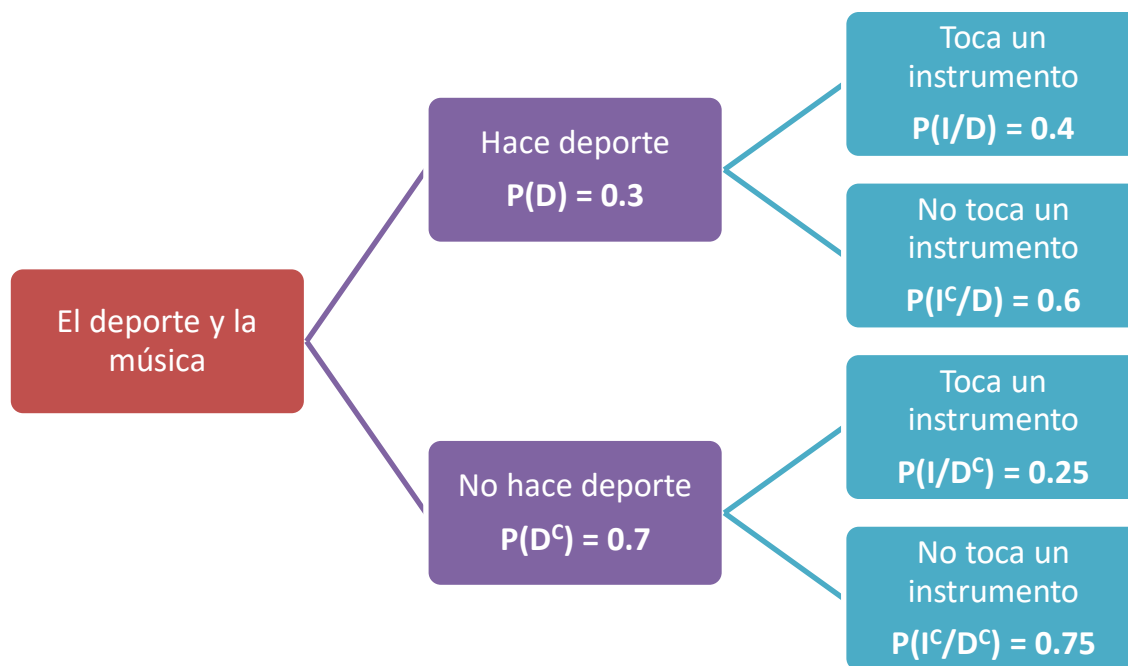
El área total es la suma de las tres áreas calculadas: $\frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{71}{3} \approx 23.67 u^2}$

3A. El 30% de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40% toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

- a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?
 b) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

Llamamos D = “Hace deporte”, I = “Toca un instrumento”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos pide calcular $P(D \cap I^c)$.

$$P(D \cap I^c) = P(D)P(I^c / D) = 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.18}$$

- b) Nos piden calcular $P(D \cup I)$.

$$P(D \cup I) = P(D) + P(D^c)P(I / D^c) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.25 = \boxed{0.475}$$

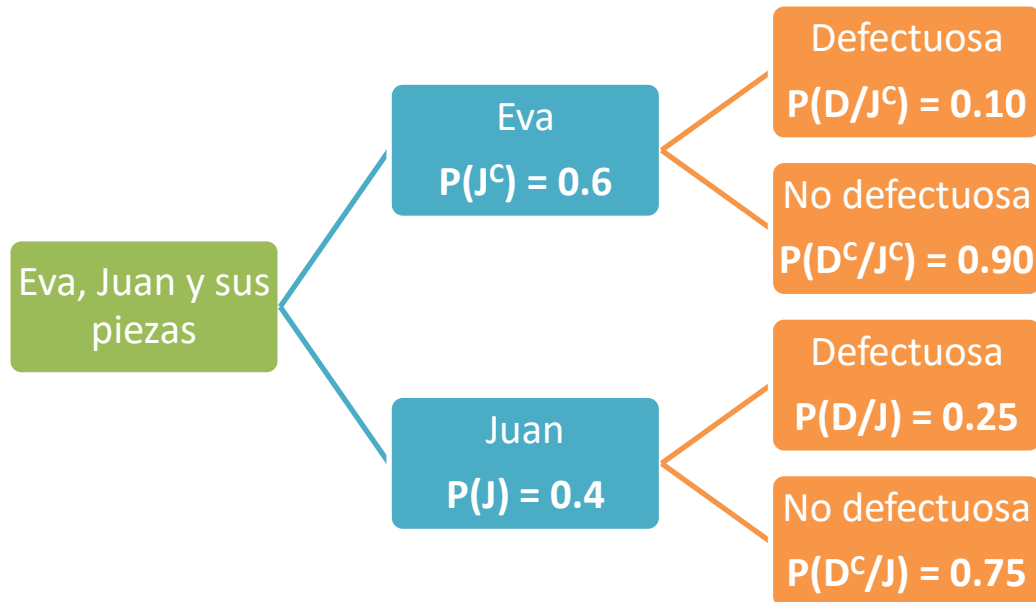
También se puede resolver el problema utilizando el suceso contrario a “haga deporte o toque un instrumento” que es “Ni hace deporte ni toca ningún instrumento”.

$$P(D \cup I) = 1 - P((D \cup I)^c) = 1 - P(D^c \cap I^c) = 1 - P(D^c)P(I^c / D^c) = 1 - 0.7 \cdot 0.75 = \boxed{0.475}$$

3B. Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60% de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10% de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25% en el caso de Juan.

- a) [1,25 puntos] Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
 b) [1,25 puntos] Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

Llamamos J = “Pieza hecha por Juan”, J^c = “Pieza hecha por Eva”. D = “Pieza defectuosa”
 Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(J^c)P(D/J^c) + P(J)P(D/J) = 0.6 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.25 = \boxed{0.16}$$

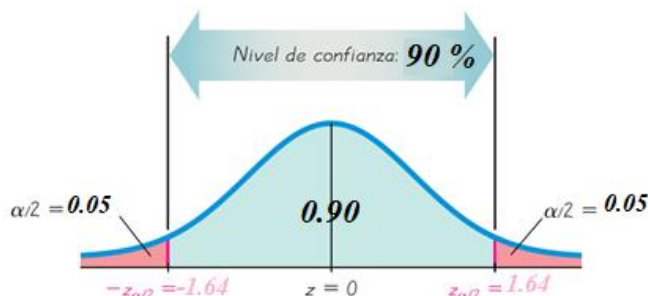
- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(J/D) = \frac{P(J \cap D)}{P(D)} = \frac{P(J)P(D/J)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.16} = \boxed{0.625}$$

4A Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 90%?
- b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 2000 personas, se sabe que 600 han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Como la proporción muestral no es conocida consideramos $p = 0,5$ y $1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0,05 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} = \frac{0.05}{1.64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.25}{n} = \left(\frac{0.05}{1.64} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.64} \right)^2} = 268.96$$

Debemos de tomar una muestra de un mínimo de 269 personas.

b) Ya hemos obtenido $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 90 %: $z_{\alpha/2} = 1.64$

La proporción muestral es $p = \frac{600}{2000} = 0.3$ y $1 - p = 1 - 0.3 = 0.7$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{2000}} \approx 0.0168$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.3 - 0.0168, 0.3 + 0.0168) = (0.2832, 0.3168)$$

Así pues, tenemos una confianza del 90% de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32% y el 31,68 %.

4B. La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 horas.

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muestra de 100 pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de 55000 horas.
- b) **[1 punto]** Si el tamaño muestral siguiese siendo de 100 pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

Sea X = La duración de un tipo de pila, en horas. $X = N(\mu, 80)$

- a) Media muestral $\bar{x} = \frac{55000}{100} = 550$ horas, Tamaño de la muestra $n = 100$.

El nivel de confianza del 99% significa que



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

Calculamos el valor del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2.58 \cdot \frac{80}{\sqrt{100}} = 20.64$ horas

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (550 - 20.64, 550 + 20.64) = (529.36, 570.64)$$

Es decir, tenemos una confianza del 99% de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

- b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que, si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo, considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión

del intervalo de confianza, vemos que la amplitud es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que, al dividir entre un

número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que, al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.



Universidad de Oviedo

EBAU Extraordinaria 2021

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

- [0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.
- [2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

1B. Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2 . Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

- [1,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2 ?
- [0,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

2A. Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{a}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.
- b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

2B. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

3A. Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20% del alumnado, los del turno B representan el 30% del alumnado y los del turno C representan el 50% restante. Además, se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95% en el turno A, 90% en el B y 92% en el C. Si se elige un alumno al azar,

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

3B. En el primer curso de un grado, el 60% de los estudiantes son mujeres y el 40% restante son hombres. Además, se sabe que el 80% de las mujeres y el 75% de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.*

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90%?
- b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 1000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

4B. Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.*

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

1A. Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

a) Llamamos “ x ” a los litros de cerveza comprados cada semana e “ y ” a los litros de vino.

“El proveedor A le vende la cerveza a 1 euro el litro y el vino a 2 euros el litro. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros” $\rightarrow x + 2y = 1000$

“El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A (1 €), pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor B paga $500m$ euros” $\rightarrow x + my = 500m$

Juntamos las ecuaciones en un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y = 1000 \\ x + my = 500m \end{cases}$$

b) Triangulamos el sistema.

$$\begin{cases} x + 2y = 1000 \\ x + my = 500m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x & +my & = 500m \\ -x & -2y & = -1000 \\ \hline (m-2)y & = 500m - 1000 \\ \text{Nueva ecuación 2}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & + & 2y = 1000 \\ & (m-2)y = 500m - 1000 \end{cases}$$

Nos planteamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 2$

En este caso podemos despejar “ y ” del sistema y hallar su valor y después el de “ x ”. El sistema tendría solución única.

CASO 2. $m = 2$

En este caso el sistema queda $\begin{cases} x + 2y = 1000 \\ x + 2y = 1000 \end{cases}$ donde las dos ecuaciones son la misma y por tanto el sistema tiene solución pero son infinitas.

El sistema tiene solución para cualquier valor de m , pero solo es única para m distinto de 2.

Si el proveedor B vende el vino a 2 € significa que $m = 2$, por lo que en ese caso el sistema tiene infinitas soluciones.

Si compra 400 litros de cerveza $\rightarrow x = 400 \rightarrow 400 + 2y = 1000 \Rightarrow 2y = 600 \Rightarrow y = 300$. Si compra 400 litros de cerveza compraría 300 de vino.

Si el precio del vino no son 2 € estaríamos en el caso de $m \neq 2$ entonces el sistema es compatible determinado y podemos hallar su solución.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1000 \\ x + my = 500m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 1000 \\ (m-2)y = 500m - 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 1000 \\ y = \frac{500m - 1000}{m - 2} = \frac{500(m - 2)}{m - 2} = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 \cdot 500 = 1000 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Compraría 500 litros de vino y ninguno de cerveza.

1B. Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2 . Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2 ?
- b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

- a) Llamamos “x” al número de latas diarias de M_1 e “y” al número de latas de M_2 .
Hacemos una tabla.

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
Nº latas de M_1 (x)	$3x$	$3x$	x	$22x$
Nº latas de M_2 (y)	y	$9y$	y	$24y$
TOTALES	$3x + y$	$3x + 9y$	$x + y$	$22x + 24y$

Obtenemos las inecuaciones que definen la región factible.

“Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas” $\rightarrow$
 $3x + y \geq 6$; $3x + 9y \geq 18$; $x + y \geq 4$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

La región factible es la solución del sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 6 \\ 3x + 9y \geq 18 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$$3x + y = 6$$

x		$y = 6 - 3x$
0		6
1		3

$$3x + 9y = 18$$

x		$y = \frac{18 - 3x}{9}$
3		1
6		0

$$x + y = 4$$

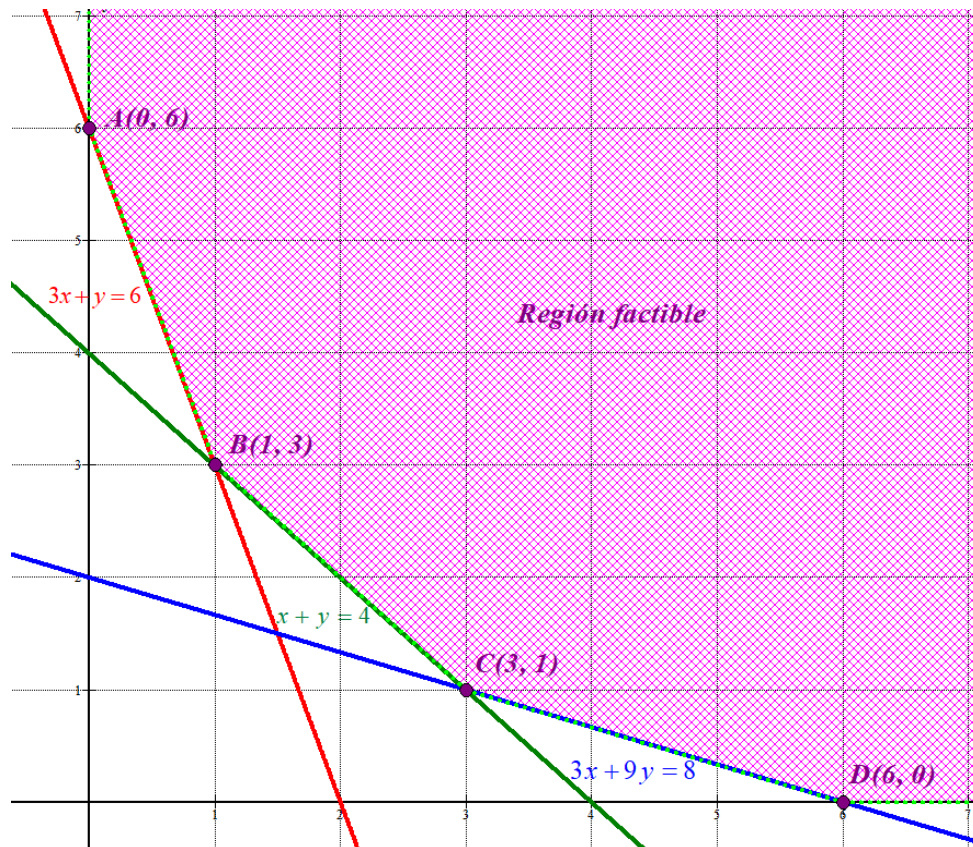
x		$y = 4 - x$
1		3
3		1



Como las restricciones son

$3x + y \geq 6 \rightarrow$ Por encima	} la región factible es la región del
$3x + 9y \geq 18 \rightarrow$ Por encima	
$x + y \geq 4 \rightarrow$ Por encima	
$x \geq 0; y \geq 0 \rightarrow$ Primer cuadrante	

primer cuadrante situada por encima de las rectas azul, roja y verde.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2 ?

Esta pregunta se traduce en plantearnos si el punto $(1, 2)$ está dentro de la región factible y se observa que no está en la región coloreada de rosa, por lo que no se le puede dar 1 lata de M_1 y dos latas de la marca M_2 .

- b) La función a minimizar es el coste que viene dado en función del número de latas por la expresión: $C(x, y) = 22x + 24y$.

Valoramos esta función en cada vértice para localizar el valor mínimo.

$$A(0, 6) \rightarrow C(0, 6) = 144$$

$$B(1, 3) \rightarrow C(1, 3) = 22 + 72 = 94$$

$$C(3, 1) \rightarrow C(3, 1) = 66 + 24 = 90$$

$$D(6, 0) \rightarrow C(6, 0) = 132$$

El coste mínimo son 90 € que se consigue en el vértice $C(3, 1)$, que significa darle 3 latas de M_1 y 1 lata de M_2 .

¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

El número de latas de M_1 es “ x ”. Si deseamos minimizar “ x ” la función objetivo es $f(x, y) = x$.

La valoramos en cada vértice y vemos el mínimo.

$$A(0, 6) \rightarrow f(0, 6) = 0$$

$$B(1, 3) \rightarrow f(1, 3) = 1$$

$$C(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = 3$$

$$D(6, 0) \rightarrow f(6, 0) = 6$$

El valor mínimo se alcanza en el vértice $A(0, 6)$, lo que significa una dieta con solo 6 latas de la marca M_2 .

2A. Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{a}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

- a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.
- b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

- a) La función f viene dada por un polinomio en el intervalo $[0,8]$ y por un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en el intervalo $(8,12]$, con lo que el único posible punto de discontinuidad es $x = 8$.

Hacemos que la función sea continua en $x = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(8) &= 80 - 8^2 = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} 10x - x^2 = 16 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{a}{x^2} = \frac{a}{8^2} = \frac{a}{64} \\ \lim_{x \rightarrow 8} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 16 = \frac{a}{64} \Rightarrow \boxed{a = 1024}$$

- b) Para $a = 1024$ la función es $f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{1024}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$.

Puntos de corte con los ejes.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$. Un punto de corte es $(0, 0)$.

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 = 0 \Rightarrow x(10 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 10, \text{ No es válido pues } 10 > 8 \end{cases} \\ \frac{1024}{x^2} = 0 \quad \text{¡¡No es posible!!} \end{cases}$$

Solo tiene un punto de corte con los ejes y es el punto $O(0, 0)$.

Crecimiento y decrecimiento.

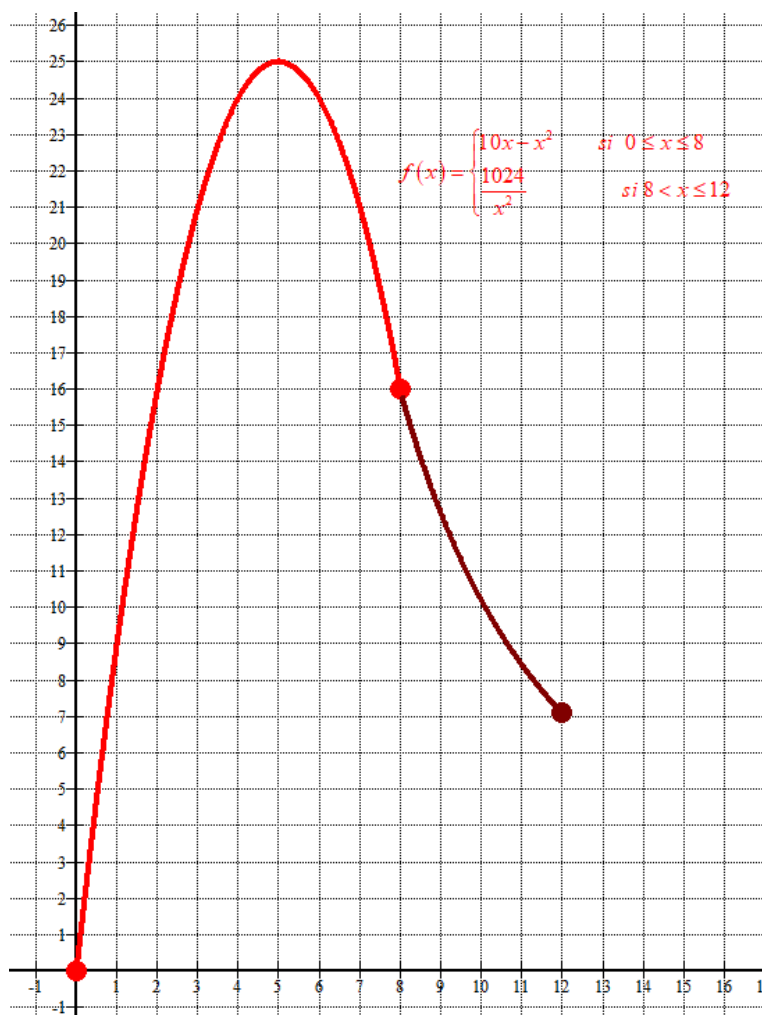
$$f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ -\frac{2048}{x^3} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10 - 2x = 0 \rightarrow x = 5 & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ -\frac{2048}{x^3} = 0 & \text{¡¡Imposible!! si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

- En el intervalo (0, 5) la derivada es positiva $\rightarrow f'(1) = 10 - 2 = 8 > 0$, por lo que la función crece.
- En el intervalo (5, 8) la derivada es negativa $\rightarrow f'(6) = 10 - 12 = -2 < 0$, por lo que la función decrece.
- En el intervalo (8, 12) la derivada es negativa $\rightarrow f'(10) = -\frac{2048}{10^3} < 0$, por lo que la función decrece.

Tabla de valores.

si $0 \leq x \leq 8$		si $8 < x \leq 12$	
x	$y = 10x - x^2$	x	$y = \frac{1024}{x^2}$
0	0	9	12.64
2	16	10	10.24
5	25	12	7.11
8	16		



Se observa en la gráfica que el máximo de energía se produce a las 5 horas produciendo 25 de energía.

2B. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.
- b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3,2$ y $x = -2$.

- a) Calculamos la primitiva de la función y le aplicamos la condición $F(2) = 10$.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 + 3x^2 dx = \frac{x^4}{4} + x^3 + K \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 10 = \frac{2^4}{4} + 2^3 + K \\ F(2) = 10 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 12 + K \Rightarrow K = -2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2$$

- b) **Dominio.**

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es una función polinómica.

Puntos de corte con los ejes.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$. El punto de corte es $O(0, 0)$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = -3 \end{cases}. \text{ El otro punto de corte es } (-3, 0)$$

Crecimiento y decrecimiento.

Derivamos y estudiamos el signo de la derivada.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = 3(-3)^2 - 18 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6 = -3 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3(3)^2 + 18 = 45 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

Extremos relativos.

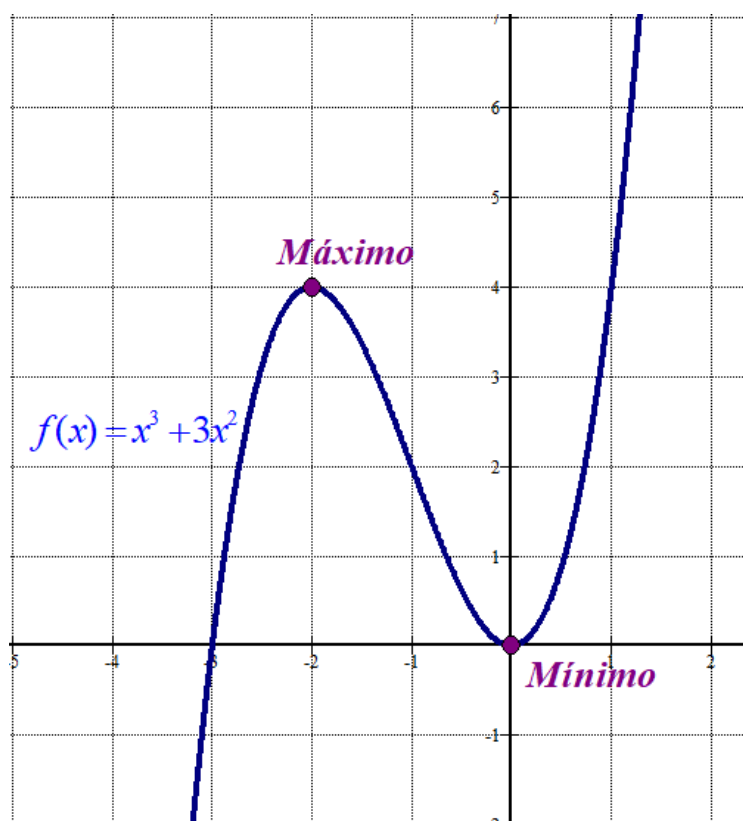
La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

Calculamos sus límites en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 = -\infty$$

Tabla de valores.

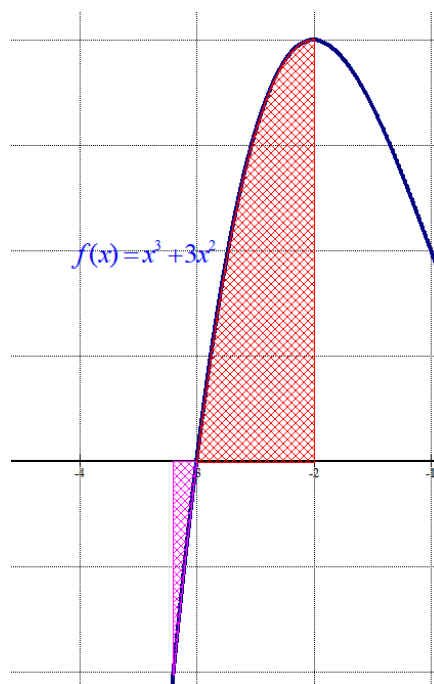
x	$y = x^3 + 3x^2$
-3	0
-2	4 máximo
-1	2
0	0 mínimo
1	4



La región de la cual nos piden calcular el área la dividimos en dos partes, pues en $x = -3$ la función corta el eje OX.

$$\begin{aligned}
 \int_{-3.2}^{-3} x^3 + 3x^2 dx &= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_{-3.2}^{-3} = \\
 &= \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3 \right] - \left[\frac{(-3.2)^4}{4} + (-3.2)^3 \right] = \\
 &= \frac{81}{4} - 27 - 26.2144 + 32.768 = \boxed{-0.1964}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^{-2} x^3 + 3x^2 dx &= \left[\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_{-3}^{-2} = \\
 &= \left[\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3 \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3 \right] = \\
 &= 4 - 8 - \frac{81}{4} + 27 = \boxed{2.75}
 \end{aligned}$$



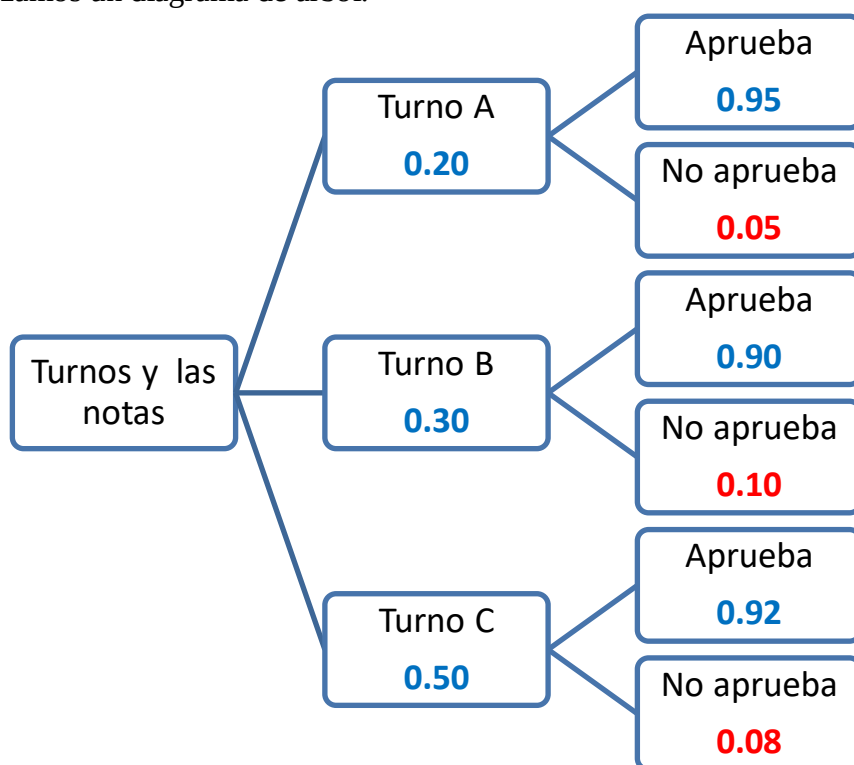
El área de la región pedida es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas: Área = 2.75 + 0.1964 = 2.9464 unidades cuadradas.

3A. Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20% del alumnado, los del turno B representan el 30% del alumnado y los del turno C representan el 50% restante. Además se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95% en el turno A, 90% en el B y 92% en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado A = “Ser del turno A”, B = “Ser del turno B”, C = “Ser del turno C” y D = “Aprobar el curso”

a) Si no es del grupo B debe ser del grupo A o C.

$$\begin{aligned}
 P(D \cap \bar{B}) &= P(A \cap D) + P(C \cap D) = P(A)P(D/A) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.20 \cdot 0.95 + 0.50 \cdot 0.92 = \boxed{\frac{13}{20} = 0.65}
 \end{aligned}$$

b) $P(D \cup B) = P(D) + P(B) - P(D \cap B) =$

$$\begin{aligned}
 &= [P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)] + P(B) - P(B)P(D/B) = \\
 &= [0.20 \cdot 0.95 + 0.30 \cdot 0.90 + 0.50 \cdot 0.92] + 0.3 - 0.3 \cdot 0.9 = \boxed{\frac{19}{20} = 0.95}
 \end{aligned}$$

3B. En el primer curso de un grado, el 60% de los estudiantes son mujeres y el 40% restante son hombres. Además, se sabe que el 80% de las mujeres y el 75% de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Pasamos los porcentajes a valores absolutos. Y así poder aplicar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.

Suponemos 100 estudiantes, de ellos 60 son mujeres y 40 hombres.

De las 60 mujeres el 80 % aprueban matemáticas. 80 % de 60 es $0.8 \cdot 60 = 48$. Hay 48 mujeres que aprueban matemáticas.

De los 40 hombres el 75 % aprueban matemáticas. 75 % de 40 es $0.75 \cdot 40 = 30$. Hay 30 hombres que aprueban matemáticas.

Ponemos estos datos en una tabla para hallar el resto de datos.

	Aprueba matemáticas	No aprueba matemáticas	
Mujer	48		60
Hombre	30		40
			100

Completamos la tabla.

	Aprueba matemáticas	No aprueba matemáticas	
Mujer	48	12	60
Hombre	30	10	40
	78	22	100

a) Hay 10 hombres que suspenden matemáticas de 100 estudiantes.

$$P(\text{Sea hombre y haya suspendido matemáticas}) = \frac{10}{100} = 0.1$$

b) Hay 78 aprobados en matemáticas de 100 estudiantes.

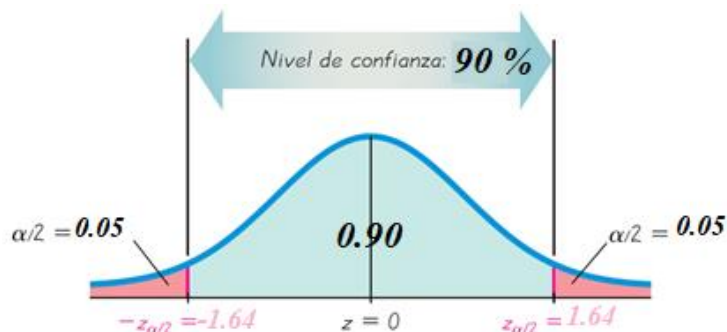
$$P(\text{haya aprobado matemáticas}) = \frac{78}{100} = 0.78$$

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90%?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 1000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,64$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Como la proporción muestral no es conocida consideramos $p = 0,5$ y $1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$

El error sigue la fórmula:

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,026 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = \frac{0,026}{1,64} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0,5 \cdot 0,5}{n} = \left(\frac{0,026}{1,64} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0,25}{\left(\frac{0,026}{1,64} \right)^2} = 994,67 \end{aligned}$$

Debemos de tomar una muestra de un mínimo de 995 declaraciones.

b) Ya hemos obtenido $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 90 %: $z_{\alpha/2} = 1,64$

La proporción muestral es $p = \frac{110}{1000} = 0,11$ y $1 - p = 1 - 0,11 = 0,89$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot 0,89}{1000}} \approx 0,0162$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,11 - 0,0162, 0,11 + 0,0162) = (0,0937, 0,1262)$$

4B. Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.*

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99%?

Sea X = Tiempo que tarda el producto en estropearse si no se envasa en días. $X = N(\mu, 4)$

- a) La media muestral vale $\bar{x} = 27$ días y el tamaño de la muestra es $n = 324$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,58 \cdot \frac{4}{\sqrt{324}} = 0,573 \text{ días}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (27 - 0,573, 27 + 0,573) = (26,427, 27,573)$$

El intervalo de confianza es (26,427, 27,573). es decir, tenemos una confianza del 99% de que el tiempo medio hasta que se estropea está entre 26,427 y 27,573 días.

- b) Con el mismo nivel de confianza del 99 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 2,58$.

El error es de 0.5 días, lo sustituimos en la fórmula y despejamos la "n".

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,5 = 2,58 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 2,58 \cdot \frac{4}{0,5} \Rightarrow n = \left(2,58 \cdot \frac{4}{0,5} \right)^2 \approx 426,01$$

A partir de 427 quesos se consigue un error menor de 0.5 días.



Universidad de Oviedo

EBAU Ordinaria 2021
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2m euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98m euros.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.
- b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

1B. Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller T1 y 4 horas de preparación en el taller T2. Cada palé tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller T1 y 3 horas de preparación en el taller T2. Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller T1 y de 60 horas de uso del taller T2. Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar 4 palés de cada tipo en una semana?
- b) **[0,75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2000 euros con la venta de cada palé tipo A y de 1000 euros con cada palé tipo B, ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2 + 1}$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) **[2 puntos]** Suponiendo el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

2B. Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, \quad x \geq 0$$

- a) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?
- b) **[0,5 puntos]** Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 2 minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para realizar la prueba en menos de 4 minutos?

3A. Cierta estudio de mercado revela que el 45% de los entrevistados consume el producto A y el 60% de los entrevistados consume el producto B. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20%. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados,

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A, pero no consuma el producto B?
- b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

3B. Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes, de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75% son mujeres.

- a) **[1,25 puntos]** Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- b) **[1,25 puntos]** Elegida una estudiante al azar entre las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

4A Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo. *

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarían SÍ a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,04 y un nivel de confianza del 99%?
- b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar SÍ. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarían SÍ en el referéndum.

4B. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.*

- a) **[1,5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1,8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,03 años y un nivel de confianza del 90%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

1A. Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2m euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98m euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

a) Llamamos “ x ” a los kilos de azúcar que compra el hotel e “ y ” a los kilos de sal.

“La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total” $\rightarrow x + y = 22,5$

“El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2m euros el kilogramo. La última compra ha pagado 98m euros” $\rightarrow 7mx + 2my = 98m$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 22,5 \\ 7mx + 2my = 98m \end{array} \right\}$$

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema en función del valor de “ m ”

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7m & 2m \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7m & 2m \end{vmatrix} = 2m - 7m = -5m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -5m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Existen dos posibilidades:

Si $m = 0$ el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y = 22,5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$ El sistema es compatible indeterminado, aunque es una situación absurda pues el precio del azúcar y la sal es 0 euros.

Si $m \neq 0$ el determinante de A es no nulo, su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Por lo que si el precio de la sal es 0,2 € por kg el valor de m será 0,1 y el sistema será compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 22,5 \\ 0,7x + 0,2y = 9,8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 22,5 - y \\ 7x + 2y = 98 \end{array} \right\} \Rightarrow 7(22,5 - y) + 2y = 98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 157,5 - 7y + 2y = 98 \Rightarrow 59,5 = 5y \Rightarrow y = \frac{59,5}{5} = 11,9 \Rightarrow x = 22,5 - 11,9 = 10,6$$

Compró 10,6 kg de azúcar.

1B. Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller T1 y 4 horas de preparación en el taller T2. Cada palé tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller T1 y 3 horas de preparación en el taller T2. Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller T1 y de 60 horas de uso del taller T2. Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar 4 palés de cada tipo en una semana?
- b) **[0,75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2000 euros con la venta de cada palé tipo A y de 1000 euros con cada palé tipo B, ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

- a) Llamamos “x” a los palés tipo A que se preparan por semana. “y” al número de palés tipo B. Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Horas en taller T1	Horas en taller T2	
Nº palés A (x)	3x	4x	
Nº palés B (y)	y	3y	
TOTALES	3x + y	4x + 3y	

A partir de las restricciones del problema establecemos las inecuaciones correspondientes.

“Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller T1” $\rightarrow 3x + y \leq 30$

“Cada semana, se dispone de un total de 60 horas de uso del taller T2” $\rightarrow 4x + 3y \leq 60$

“Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales” $\rightarrow x + 2y \geq 4$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$3x + y = 30$$

x	y = 30 - 3x
6	12
10	0

$$4x + 3y = 60$$

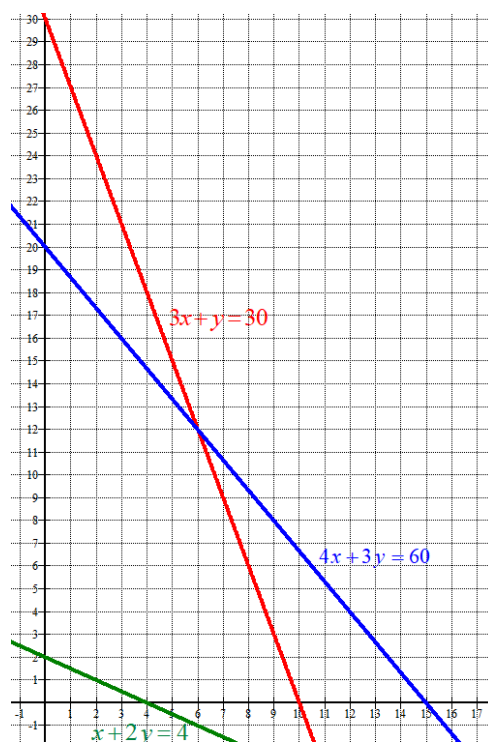
x	y = $\frac{60 - 4x}{3}$
6	12
15	0

$$x + 2y = 4$$

x	y = $\frac{4 - x}{2}$
0	2
4	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región que contiene las soluciones del sistema es la}$$

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.

4 palés de cada tipo es el punto (4, 4) que si está contenido en la región factible y si cumple las restricciones.

- b) Deseamos maximizar el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x, y) = 2000x + 1000y$$

Para encontrar el beneficio máximo valoramos la función en cada uno de sus vértices:

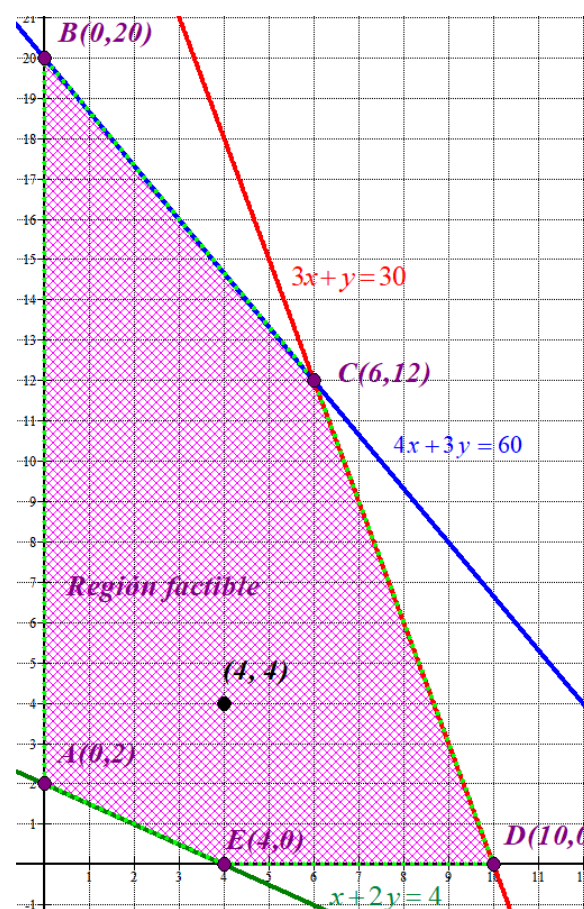
$$A(0, 2) \rightarrow B(0, 2) = 2000$$

$$B(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 20000$$

$$C(6, 12) \rightarrow B(6, 12) = 12000 + 12000 = 24000$$

$$D(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 20000$$

$$E(4, 0) \rightarrow B(4, 0) = 8000$$



El máximo beneficio es de 24000 € y se obtiene en el vértice C(6, 12) lo que significa preparar 6 palés tipo A y 12 palés tipo B.

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2 + 1}$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) **[2 puntos]** Suponiendo el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{a \cdot x}{3 \cdot x^2 + 1} dx = \frac{a}{6} \int \frac{6x}{3 \cdot x^2 + 1} dx = \frac{a}{6} \ln(3 \cdot x^2 + 1) + K$$

Determinamos el valor de K para que se cumpla que $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{a}{6} \ln(3 \cdot x^2 + 1) + K \\ F(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{a}{6} \ln(3 \cdot 0^2 + 1) + K \Rightarrow K = 0$$

Como también cumple que $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{a}{6} \ln(3 \cdot x^2 + 1) \\ F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \ln(4) = \frac{a}{6} \ln(3 \cdot 1^2 + 1) \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \ln(4) = \frac{a}{6} \ln(4) \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

El valor buscado es $a = 8$.

b) Para $a = 8$ la función queda $f(x) = \frac{8x}{3x^2 + 1}$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula ($3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Los puntos de corte con los ejes son:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{8 \cdot 0}{3 \cdot 0^2 + 1} = 0 \text{ El punto de corte es } (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{8x}{3x^2 + 1} \Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ El punto de corte es el obtenido anteriormente.}$$

La función es continua en todo su dominio, pues es cociente de dos polinomios y el polinomio del denominador no se anula.

No tiene asíntota vertical pues el dominio es $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{3x^2 + 1} = 0 \text{ Tiene asíntota horizontal con ecuación } y = 0.$$

Estudiamos su crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos o mínimos.

$$f(x) = \frac{8x}{3x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{8(3x^2+1) - 6x \cdot 8x}{(3x^2+1)^2} = \frac{24x^2+8-48x^2}{(3x^2+1)^2} = \frac{8-24x^2}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8-24x^2}{(3x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 8-24x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{24} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,58$$

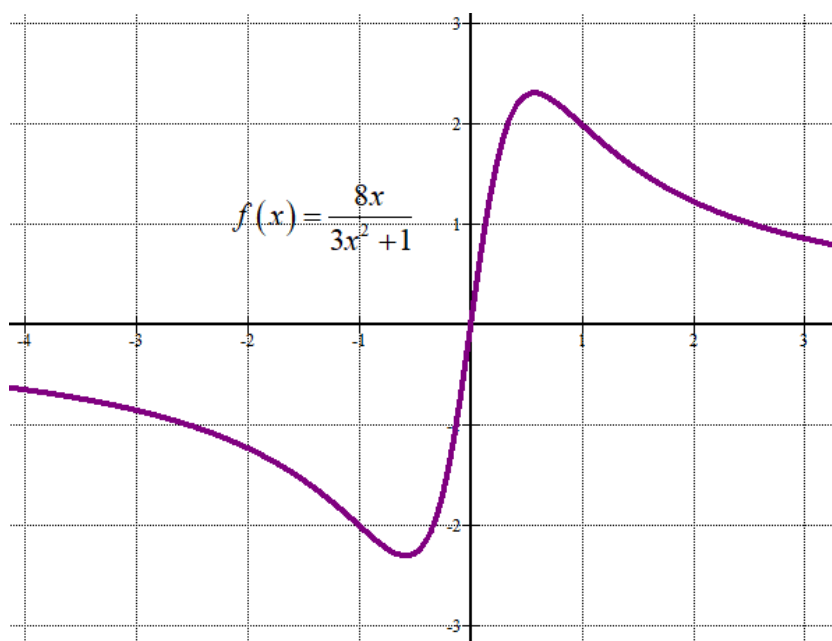
- En $(-\infty, -0,58)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{8-24}{(3+1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -0,58)$
- En $(-0,58, 0,58)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{8}{(1)^2} = 8 > 0$. La función crece en $(-0,58, 0,58)$
- En $(0,58, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{8-24}{(3+1)^2} = \frac{-16}{16} = -1 < 0$. La función decrece en $(0,58, +\infty)$

La función sigue el esquema:



La función tiene un mínimo en $x = -0,58$ y un máximo en $x = 0,58$.

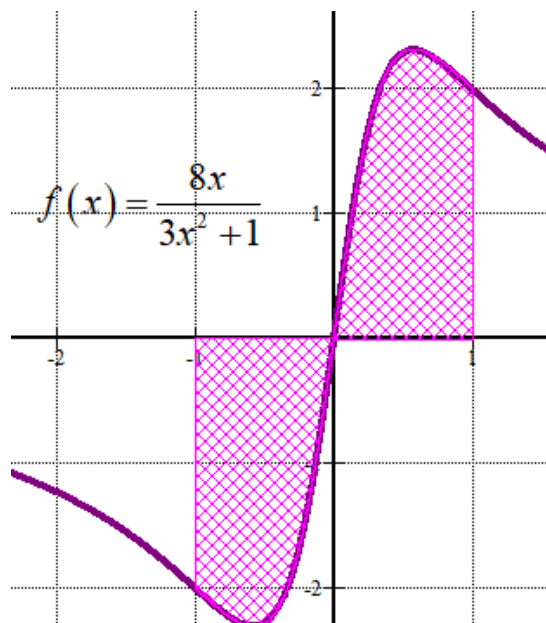
Su gráfica es



Como esta gráfica es simétrica respecto del origen el área de la región pedida es el doble del área de la región entre $x = 0$ y $x = 1$.

$$\int_0^1 \frac{8x}{3x^2+1} dx = \left[\frac{8}{6} \ln(3x^2+1) \right]_0^1 = \left[\frac{8}{6} \ln(3+1) \right] - \left[\frac{8}{6} \ln(0+1) \right] = \frac{4}{3} \ln 4$$

El área es $2 \cdot \frac{4}{3} \ln 4 = \frac{8}{3} \ln 4 \approx \boxed{3,687 \text{ u}^2}$



2B. Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, \quad x \geq 0$$

- a) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?
- b) **[0,5 puntos]** Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 2 minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para realizar la prueba en menos de 4 minutos?

a) La función es continua en $[0, +\infty)$ pues el denominador solo se anula en $x = -30$.

Puntos de corte:

$$x = 0 \rightarrow f(x) = 2 + \frac{300}{0+30} = 12 \text{ El punto de corte es } (0, 12)$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = 2 + \frac{300}{x+30} \Rightarrow \frac{300}{x+30} = -2 \Rightarrow 300 = -2x - 60 \Rightarrow 2x = -360 \Rightarrow x = -180 \notin [0, +\infty)$$

La función no corta el eje OX en el dominio de definición $[0, +\infty)$. La función siempre es positiva.

Estudiamos el signo de su derivada.

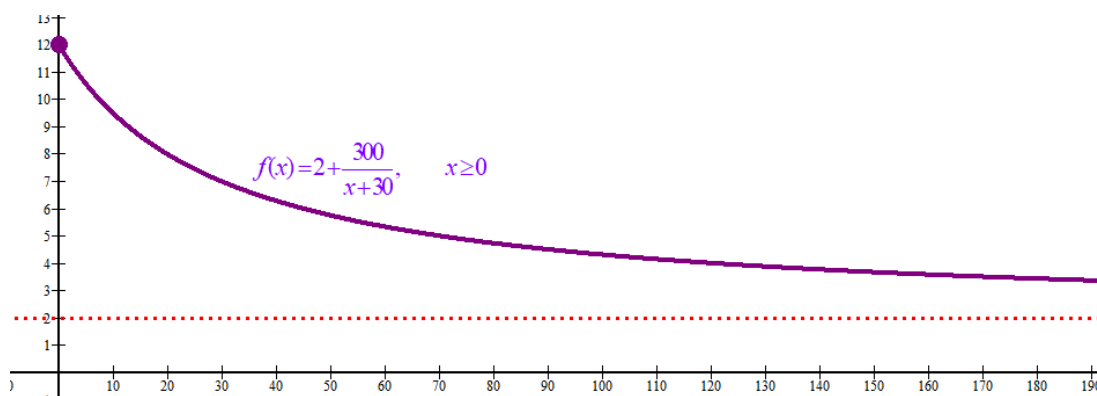
$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30} \Rightarrow f'(x) = \frac{-300}{(x+30)^2}$$

Esta expresión de la derivada nos indica que siempre es negativa, por lo que la función siempre decrece.

Averiguamos su asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{300}{x+30} = 2 + \frac{300}{+\infty+30} = 2 + 0 = 2$$

La función tiene una asíntota horizontal: $y = 2$.



En ningún momento aumenta el tiempo que se tarda en realizar la prueba, pues la función que nos da el tiempo es siempre decreciente.

- b) No es posible tardar menos de 2 minutos pues es la asíntota de la función, se puede acercar mucho pero nunca podrá conseguir tardar solo 2 minutos.

Para hacer la prueba en 4 minutos se debe cumplir que:

$$4 = 2 + \frac{300}{x+30} \Rightarrow 2 = \frac{300}{x+30} \Rightarrow 2x + 60 = 300 \Rightarrow 2x = 240 \Rightarrow \boxed{x = 120}$$

Para hacer la prueba en menos de 4 minutos necesita entrenar más de 120 días.

3A. Cierta estudio de mercado revela que el 45% de los entrevistados consume el producto A y el 60% de los entrevistados consume el producto B. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20%. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A, pero no consuma el producto B?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

Realizamos una tabla de contingencia. Ponemos en ella los datos proporcionados.

	Consume producto B	No consume producto B	
Consume producto A	20		45
No consume producto A			
	60		100

Completamos la tabla.

	Consume producto B	No consume producto B	
Consume producto A	20	25	45
No consume producto A	40	15	55
	60	40	100

a) Mirando la tabla hay 25 % de personas que consumen A y no consumen B.

$$P(\text{Consume A y no consume B}) = \frac{25}{100} = \boxed{0.25}$$

b) Lo podemos hacer contando los que no consumen ninguno de los 2 productos que son el 15 % (en la tabla), por lo que los que consumen algún producto son el $100 - 15 = 85$ %.

$$P(\text{Consumen algún producto}) = \frac{85}{100} = \boxed{0.85}$$

3B. Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes, de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75% son mujeres.

- a) **[1,25 puntos]** Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- b) **[1,25 puntos]** Elegida una estudiante al azar entre las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

La mitad de los que estudian inglés (460) son mujeres, es decir 230 son mujeres y estudian inglés.

El 75 % de los que estudian francés (40) son mujeres, es decir $0.75 \cdot 40 = 30$ son mujeres y estudian francés. Por lo que hay un total de $230 + 30 = 260$ mujeres en el instituto.

Como la probabilidad de elegir a cualquier estudiante es la misma, podemos responder a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

$$a) P(\text{Sea mujer}) = \frac{260}{500} = \boxed{\frac{13}{25} = 0.52}$$

$$b) P(\text{Estudie francés / Es mujer}) = \frac{\text{Número de mujeres que estudian francés}}{\text{Número de mujeres}} = \frac{30}{260} = \boxed{\frac{3}{26} \approx 0.115}$$

4A Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo. *

- a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarían SÍ a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,04 y un nivel de confianza del 99%?
- b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar SÍ. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarían SÍ en el referéndum.

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

Como la proporción muestral no es conocida consideramos $p = 0,5$ y $1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,04 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = \frac{0,04}{2,58} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0,5 \cdot 0,5}{n} = \left(\frac{0,04}{2,58} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0,25}{\left(\frac{0,04}{2,58} \right)^2} = 1040,0625$$

Debemos de tomar una muestra de un mínimo de 1041 individuos.

b) Ya hemos obtenido $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 99 %: $z_{\alpha/2} = 2,58$

La proporción muestral es $p = \frac{100}{500} = 0,20$ y $1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{500}} = 0,0461$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0,2 - 0,0461, 0,2 + 0,0461) = (0,1539, 0,2461)$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y **$F(2,58) = 0,995$** .

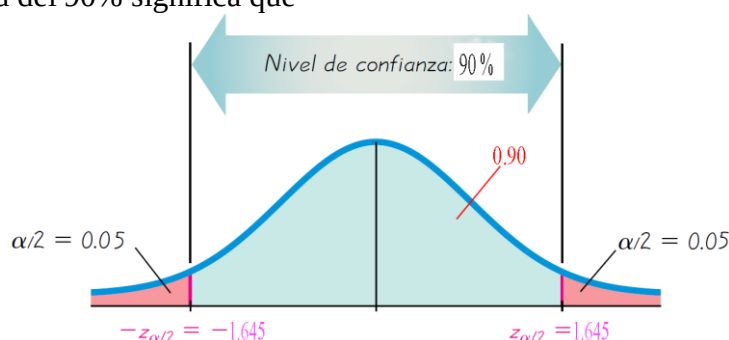
4B. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.*

- a) **[1,5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1,8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,03 años y un nivel de confianza del 90%?

Sea X = Tiempo de renovación de un móvil en años. $X = N(\mu, 0.4)$

- a) La media muestral vale $\bar{x} = 1.8$ años y el tamaño de la muestra es $n = 600$.

El nivel de confianza del 90% significa que



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{600}} = 0.027 \text{ años}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1.8 - 0.027, 1.8 + 0.027) = (1.773, 1.827)$$

El intervalo de confianza es $(1.773, 1.827)$

- b) Con el mismo nivel de confianza del 90 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.64$.

El nuevo error es del 0.03, lo sustituimos en la fórmula y despejamos “n”.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.64 \cdot \frac{0.4}{0.03} \Rightarrow n = \left(1.64 \cdot \frac{0.4}{0.03} \right)^2 \approx 478.15$$

A partir de 479 usuarios se consigue un error menor de 0.03.

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; **$F(1,64) = 0,95$** ; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

EBAU Extraordinaria 2020



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$

- [1 punto]** Si $(A+B) \cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- [1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B . En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B .

- [1,75 puntos]** ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B ?
- [0,75 puntos]** Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

2A. Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes es gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

- [0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x . ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?
- [1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

2B. Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.
 - b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.
-

3A. Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?
 - b) **[1,25 puntos]** Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?
-

3B. En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.
 - b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.
-

4A. Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.⁺

- a) **[1,5 puntos]** Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado **en total** 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.
 - b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?
-

4B. En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.⁺

- a) **[1,5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.
 - b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?
-

⁺ Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$

- a) **[1 punto]** Si $(A+B) \cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

a) $(A+B) \cdot C = B \cdot D$. Sustituimos el valor de cada matriz y operamos con ellas.

$$\left[\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2m+2m \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} mx-y=1 \\ -x+my=1-2m \end{array} \right\}$$

b) Discutimos el sistema.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$

Su determinante es $|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $m = -1$

En este caso el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} -x-y=1 \\ -x-y=3 \end{array} \right\}$$

Este sistema es **incompatible**, no puede dar dos resultados distintos la misma expresión.

CASO 3. $m = 1$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + y}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Es **compatible indeterminado**.

El sistema tiene solución para $m \neq -1$. La solución no siempre es única, para $m = 1$ las soluciones son infinitas.

Lo resolvemos para $m = 2$. En este caso tiene solución única. El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 1 = y \\ -x + 2y = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -x + 4x - 2 = -3 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}}$$

La solución es $\boxed{x = -\frac{1}{3}; \quad y = -\frac{5}{3}}$

1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo *A* y trabajadores de tipo *B* en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo *A* que de tipo *B* y que el número de trabajadores de tipo *A* no supere al doble del número de trabajadores de tipo *B*. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo *A* y de 40 de tipo *B*.

a) [1,75 puntos] ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo *A* y 15 de tipo *B*?

b) [0,75 puntos] Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo *A* es de 240 euros y por cada trabajador de tipo *B* es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

a) Si representamos por “*x*” e “*y*” el número de trabajadores de tipo *A* y de tipo *B*, respectivamente, que se contratan, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

“Es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo *A* que de tipo *B*” $\rightarrow x \geq y$

“El número de trabajadores de tipo *A* no supere al doble del número de trabajadores de tipo *B*” $\rightarrow x \leq 2y$

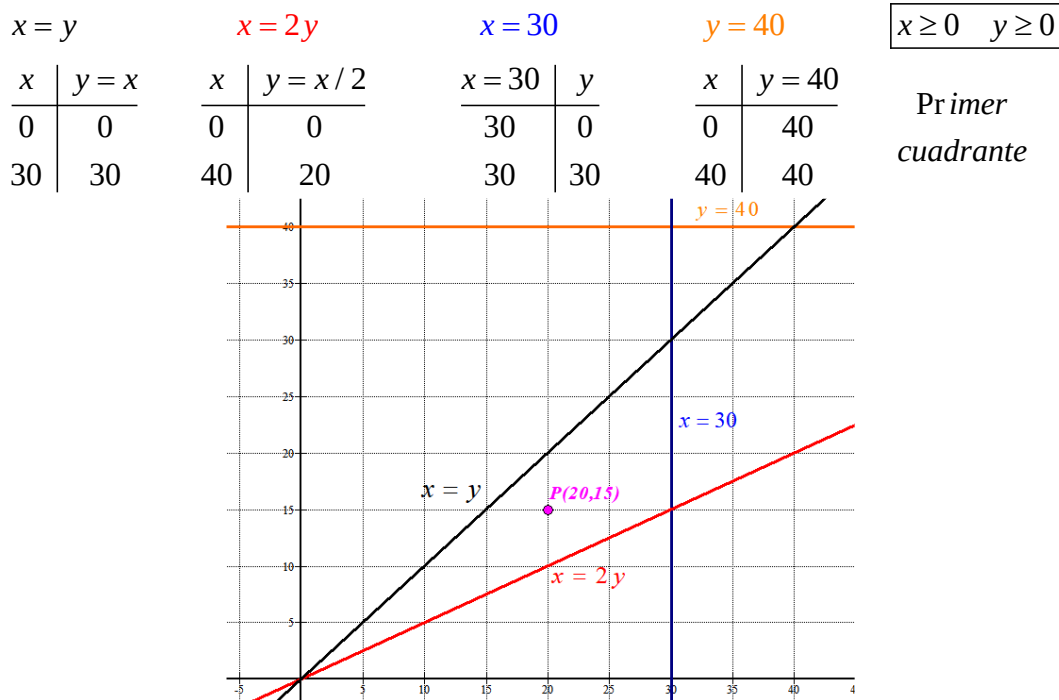
“La empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo *A* y de 40 de tipo *B*” $\rightarrow x \leq 30 \quad y \leq 40$

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.



Probamos si el punto P(20, 15) cumple todos los condicionantes.

$$20 \geq 15$$

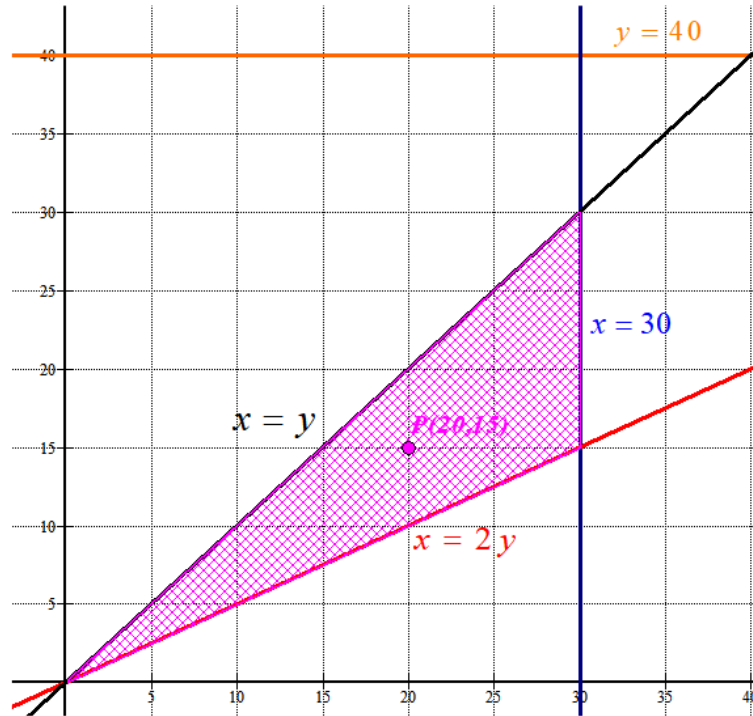
$$20 \leq 2 \cdot 15$$

$$20 \leq 30$$

$$15 \leq 40$$

$$20 \geq 0 \quad 15 \geq 0$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la zona rayada.



Hemos comprobado que el punto P(20, 15) cumple las restricciones, lo cual significa que es posible contratar a 20 trabajadores tipo A y 15 tipo B.

b) La función beneficio es $B(x, y) = 240x + 200y$.

Localizamos los vértices de la región factible y valoramos el beneficio en cada uno de ellos en busca de ese máximo beneficio.

Los vértices son A(0, 0), B(30, 15) y C(30, 30).

Por lógica el máximo beneficio se obtiene en el vértice C, pero lo comprobamos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(30, 15) \rightarrow B(30, 15) = 10200$$

$$C(30, 30) \rightarrow B(30, 30) = 13200$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 13200 € con la contratación de 30 trabajadores de cada tipo.

2A Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes es gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

- a) **[0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x . ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?
- b) **[1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

- a) Es una función definida a trozos, pues cambia el coste antes de 2 y después de 2.

$$f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 25 + 10(x - 2) & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 25 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 5 + 10x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Comprobamos la continuidad en el cambio de definición de la función, en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 25 = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 5 + 10x = 25 \end{array} \right\} \text{ Todos los valores existen y coinciden, por lo que la función es}$$

continua en $x = 2$ y por tanto es continua en todo su dominio.

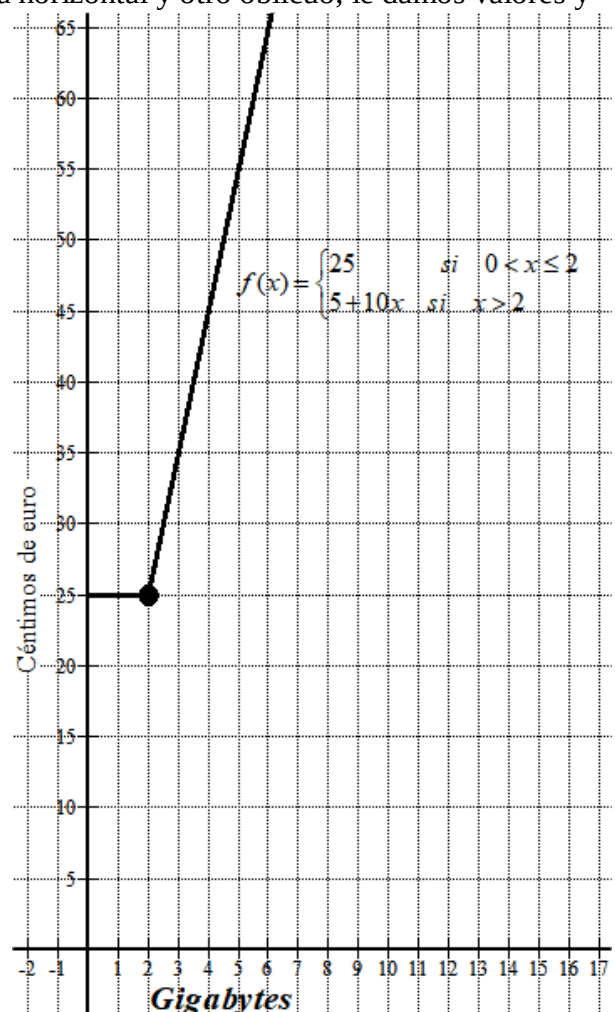
- b) La gráfica de la función es un trozo de línea recta horizontal y otro oblicuo, le damos valores y la representamos.

x	$y = 25$	x	$y = 5 + 10x$
0	25	3	35
2	25	4	45

Si $f(x) = 225$ céntimos entonces:

$$\begin{aligned} 25 + 10(x - 2) &= 225 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x + 5 &= 225 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x &= 220 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= 22 \text{ gigabytes} \end{aligned}$$

El coste mínimo es 25 céntimos y el coste máximo no existe.



2B. Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

a)

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{6}{x+1} - 2 dx = 6 \ln|x+1| - 2x + C$$

Como además $F(0) = 2$ entonces $6 \ln|0+1| - 2 \cdot 0 + C = 2 \Rightarrow C = 2$.

La primitiva buscada es $F(x) = 6 \ln|x+1| - 2x + 2$

b) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Puntos de corte con los ejes.

$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{6}{0+1} - 2 = 4$. Un punto de corte es $(0, 4)$

$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{6}{x+1} - 2 \Rightarrow \frac{6}{x+1} = 2 \Rightarrow 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$. Otro punto de corte es $(2, 0)$

Calculamos su derivada y vemos si presenta algún punto crítico.

$$f(x) = \frac{6}{x+1} - 2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{(x+1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa, por lo que la función decrece en todo su dominio, en particular en $[0, \infty)$.

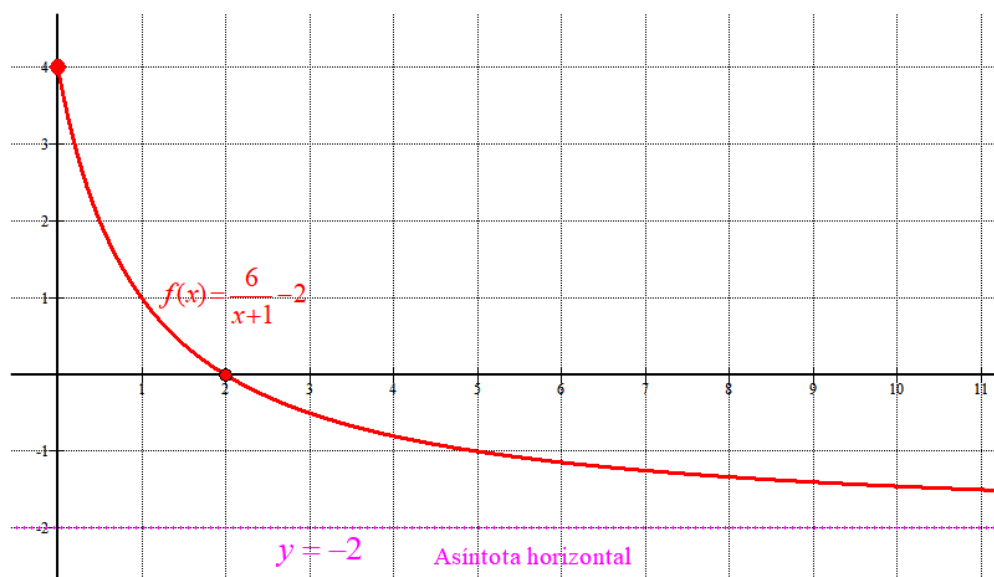
Vemos su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x+1} - 2 = \frac{6}{\infty} - 2 = 0 - 2 = -2$$

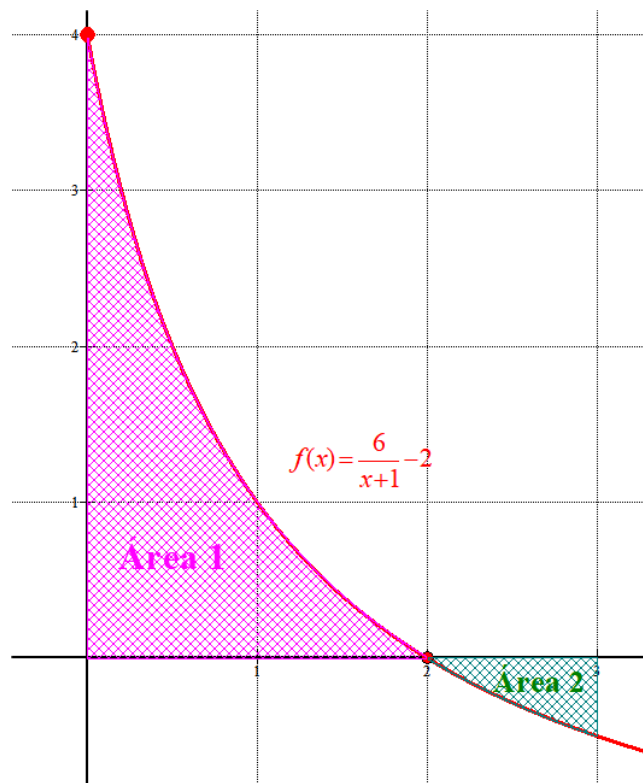
Tiene una asíntota horizontal $\rightarrow y = -2$

Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	$y = \frac{6}{x+1} - 2$
0	4
1	1
2	0
4	-1.88



El área pedida se divide en dos partes que calculamos por separado y luego sumamos.



$$\text{Área1} = \int_0^2 \frac{6}{x+1} - 2 dx = \left[6 \ln|x+1| - 2x \right]_0^2 = \left[6 \ln|2+1| - 4 \right] - \left[6 \ln|0+1| - 0 \right] =$$

$$= -4 + 6 \ln 3 = 2.59 \text{ u}^2$$

$$\text{Área2} = \left| \int_2^3 \frac{6}{x+1} - 2 dx \right| = \left| \left[6 \ln|x+1| - 2x \right]_2^3 \right| = \left| \left[6 \ln|3+1| - 6 \right] - \left[6 \ln|2+1| - 4 \right] \right| =$$

$$= \left| -6 + 6 \ln 4 - 6 \ln 3 + 4 \right| = \left| -0.27 \right| = 0.27 \text{ u}^2$$

$$\boxed{\text{Área total} = 2.59 + 0.27 = 2.86 \text{ u}^2}$$

3A. Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?
 b) **[1,25 puntos]** Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Construimos una tabla de contingencia.

	Mujeres	Hombres	
Con hijos		90	
Sin hijos			
	144		240

Si 168 son personas con hijos y 90 son hombres entonces $168 - 90 = 78$ son mujeres con hijos. Añadimos este dato a la tabla y terminamos de completarla.

	Mujeres	Hombres	
Con hijos	78	90	168
Sin hijos	66	6	72
	144	96	240

Con la información que nos proporciona esta tabla podemos responder a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

$$a) P(\text{le toque el viaje a un hombre sin hijos}) = \frac{6}{240} = \boxed{\frac{1}{40} = 0,025}$$

b) Esta es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

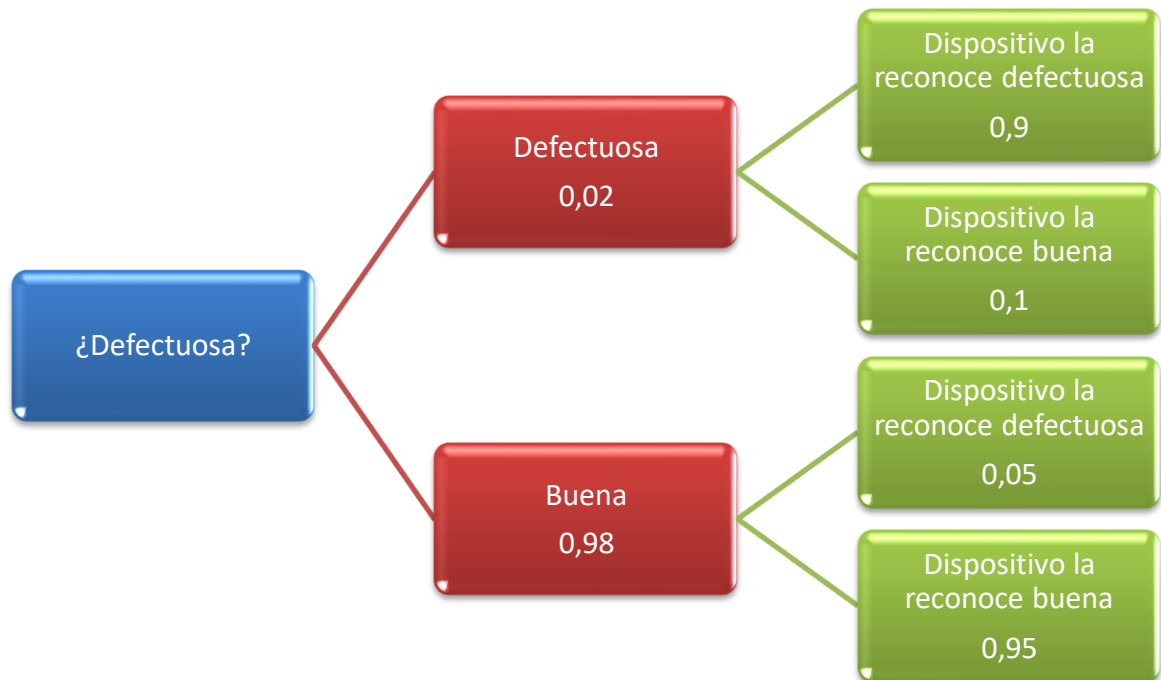
$$P(\text{Sea mujer/Es persona con hijos}) = \frac{78}{168} = \boxed{\frac{13}{28} = 0.464}$$

3B. En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

Construimos un diagrama de árbol.



a) $P(\text{Dispositivo la reconoce como defectuosa}) = 0,02 \cdot 0,9 + 0,98 \cdot 0,05 = \boxed{0,067}$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea buena / Ha sido calificada como defecuada por el dispositivo}) =$$

$$= \frac{P(\text{Sea buena} \cap \text{Ha sido calificada como defecuada por el dispositivo})}{P(\text{Ha sido calificada como defecuada por el dispositivo})} =$$

$$= \frac{0,98 \cdot 0,05}{0,067} = \boxed{\frac{49}{67} = 0,731}$$

4A. Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.⁺

- a) **[1,5 puntos]** Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado **en total** 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?

X = Precio de un determinado producto. $X = N(\mu, 5)$

a) $\bar{x} = \frac{10400}{100} = 104 \text{ €}; \quad n = 100$

El nivel de confianza del 95% significa que



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} = 0,98 \text{ €}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (104 - 0,98, 104 + 0,98)$$

El intervalo de confianza es (103.02, 104.98)

- b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1,96$.

El error del intervalo de confianza debe ser 0,5 euros por lo que:

$$\begin{aligned} Error = 0,5 &\Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,5 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = 0,5 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{5}{0,5} = \sqrt{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n = \left(1,96 \cdot \frac{5}{0,5} \right)^2 = 384,16 \end{aligned}$$

A partir de una muestra de 385 de estos productos el error del intervalo de confianza es menor de 0,5 €.

4B. En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.⁺

a) **[1,5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?

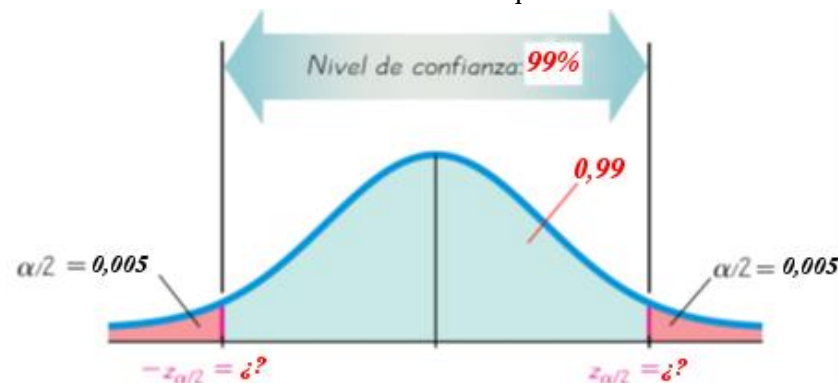
Sea X = Número de personas a favor de la gestión económica del ayuntamiento.

En la muestra de 1250 vecinos la proporción de vecinos a favor de la gestión del ayuntamiento es

$$p = \frac{525}{1250} = \frac{21}{50} = 0,42 \text{ y en contra } 1 - p = 1 - 0,42 = 0,58.$$

Y el tamaño de la muestra es $n = 1250$.

a) Para un nivel de confianza del 99% tenemos que



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

El error viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,42 \cdot 0,58}{1250}} = 0,036$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0,42 - 0,036, 0,42 + 0,036) = (0,384, 0,456).$$

b) En el intervalo anterior el error es de 0,036.

Si mantenemos todo igual y aumentamos el tamaño de la muestra el error disminuye, pues el tamaño de la muestra (n) aparece dividiendo en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

EBAU Ordinaria 2020
Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 . El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?
- b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1 - \frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f . Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$.

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

3A. El 20% de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80% restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6% fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12% fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60% de las veces la máquina A y el 40% restante la B. La máquina A produce un 5% de tornillos defectuosos y la B un 2,5%.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros.⁺

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90%?

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.⁺

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

⁺ Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

SOLUCIONES:

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

- a) Si m = precio de cada fotocopia en blanco y negro entonces $4m$ = precio de una fotocopia en color.

Llamemos “ x ” al número de fotocopias en blanco y negro e “ y ” al número de fotocopias en color.

“Se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias” $\rightarrow x + y = 550$

“El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros = 350 céntimos” $\rightarrow mx + 4my = 350$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{array} \right\}$$

- b) Para que el sistema tenga solución lo reducimos por Gauss a un sistema triangular.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - m \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ mx + 4my = 350 \\ -mx - my = -550m \\ \hline 3my = 350 - 550m \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ 3my = 350 - 550m \end{array} \right\}$$

El sistema tiene solución si $m \neq 0$ pues podemos obtener la solución de “ y ” $\rightarrow y = \frac{350 - 550m}{3m}$ y

después el valor de “ x ”.

La solución es única cuando $m \neq 0$.

Si la fotocopia en color es de 2 céntimos entonces $4m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{4} = 0,5$ céntimos.

Obtenemos el número de fotocopias de cada tipo resolviendo el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ 0,5x + 2y = 350 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 0,5 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 0,5x + 2y = 350 \\ -0,5x - 0,5y = -275 \\ \hline 1,5y = 75 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ 1,5y = 75 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ y = \frac{75}{1,5} = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 50 = 550 \Rightarrow \boxed{x = 500}$$

Se realizaron 500 fotocopias en blanco y negro y 50 en color.

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 . El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?
- b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

a) Es un problema de programación lineal.

Llamemos “x” al número de mesas altas e “y” al número de mesas bajas.

Las restricciones del problema son:

“Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 ” $\rightarrow 2x + 4y \leq 120$

“El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas” $\rightarrow y \geq 5$

“El propietario quiere que haya como mucho el doble de mesas altas que bajas” $\rightarrow y \leq 2x$

El número de mesas es positivo $\rightarrow x \geq 0$

Resumimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 120 \\ y \geq 5 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ y \geq 5 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos gráficamente el conjunto de soluciones dibujando primero las rectas asociadas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 60$

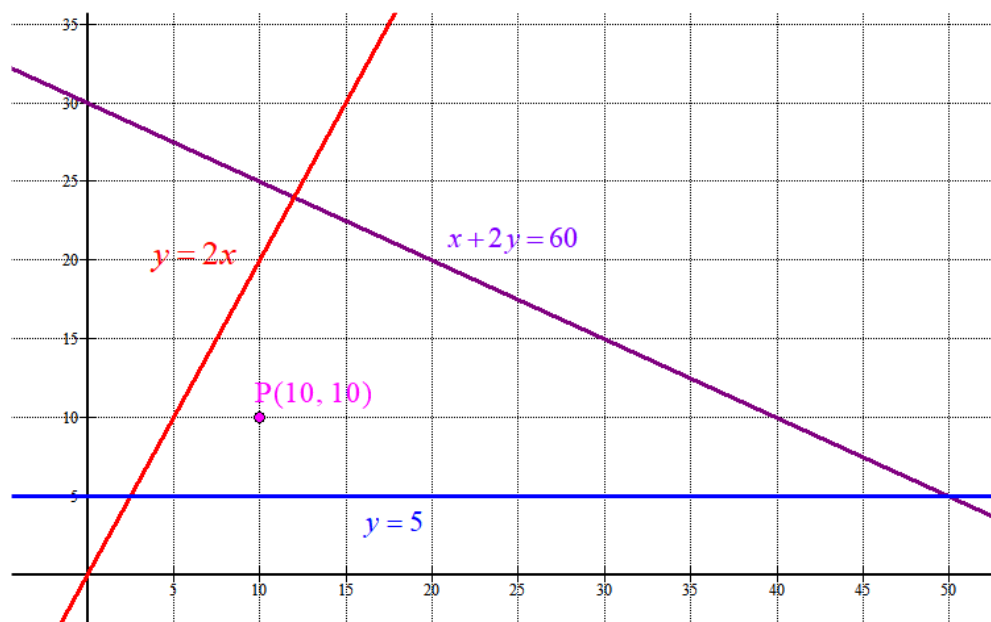
x	$y = \frac{60-x}{2}$
0	30
30	15
60	0

$y = 5$

x	$y = 5$
0	5
30	5

$y = 2x$

x	$y = 2x$
0	0
15	30



Comprobamos si el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

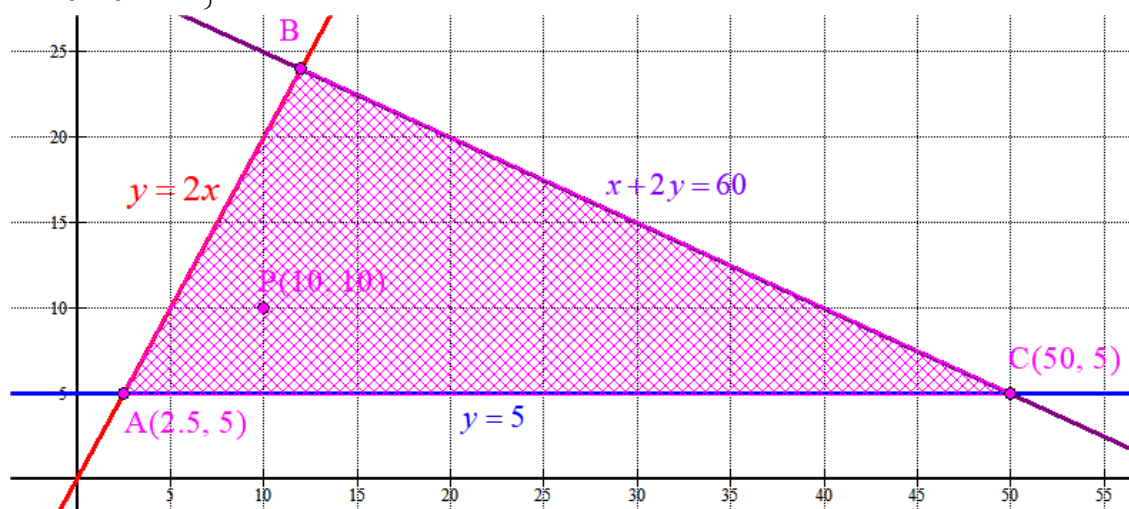
$$10 + 20 \leq 60$$

$$10 \geq 5$$

$$10 \leq 20$$

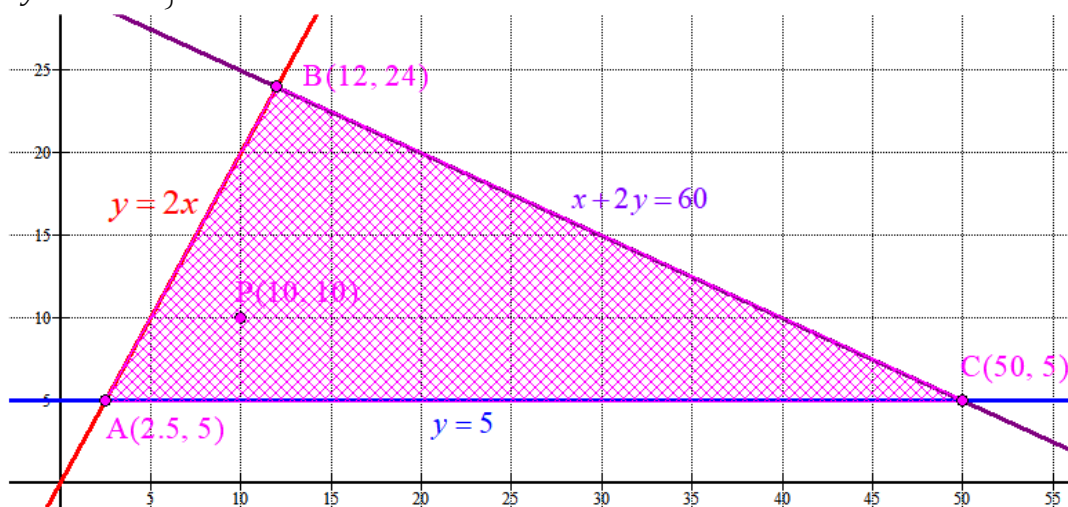
$$10 \geq 0$$

Se cumplen todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice B. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas respectivas.

$$\begin{cases} x + 2y = 60 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x + 4x = 60 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow \boxed{x=12} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 12 = 24}$$



¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo? El punto $(15, 15)$ pertenece a la región factible y puede darse esa posibilidad, pero no sería una solución óptima al ser interior y no estar en los límites de la región.

- b) Deseamos maximizar los beneficios que vienen expresados en función del número de mesas como $B(x, y) = 20x + 25y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región.

$$A(2.5, 5) \rightarrow B(2.5, 5) = 50 + 125 = 175$$

$$B(12, 24) \rightarrow B(12, 24) = 240 + 600 = 840$$

$$C(50, 5) \rightarrow B(50, 5) = 1000 + 125 = 1125$$

Se obtienen un máximo beneficio en $C(50, 5)$. Con 50 mesas altas y 5 bajas se obtiene un beneficio máximo, siendo este de 1125 €.

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$, donde F denota una primitiva de f .
- b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

a) Hallamos primero la primitiva de $f(x) = \frac{a}{x+1}$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{a}{x+1} dx = a \int \frac{1}{x+1} dx = a \ln|x+1| + C$$

Aplicamos que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot \ln(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = a \ln|x+1| + C \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 10 \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \ln|0+1| + C = 0 \\ a \ln|1+1| + C = 10 \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{C=0} \\ a \ln 2 + C = 10 \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \ln 2 = 10 \ln 2 \Rightarrow \boxed{a=10}$$

b) Siendo $a = 10$ la función queda $f(x) = \frac{10}{x+1}$.

Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Vemos sus asíntotas:

Asíntota vertical. $x = -1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x+1} = \frac{10}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

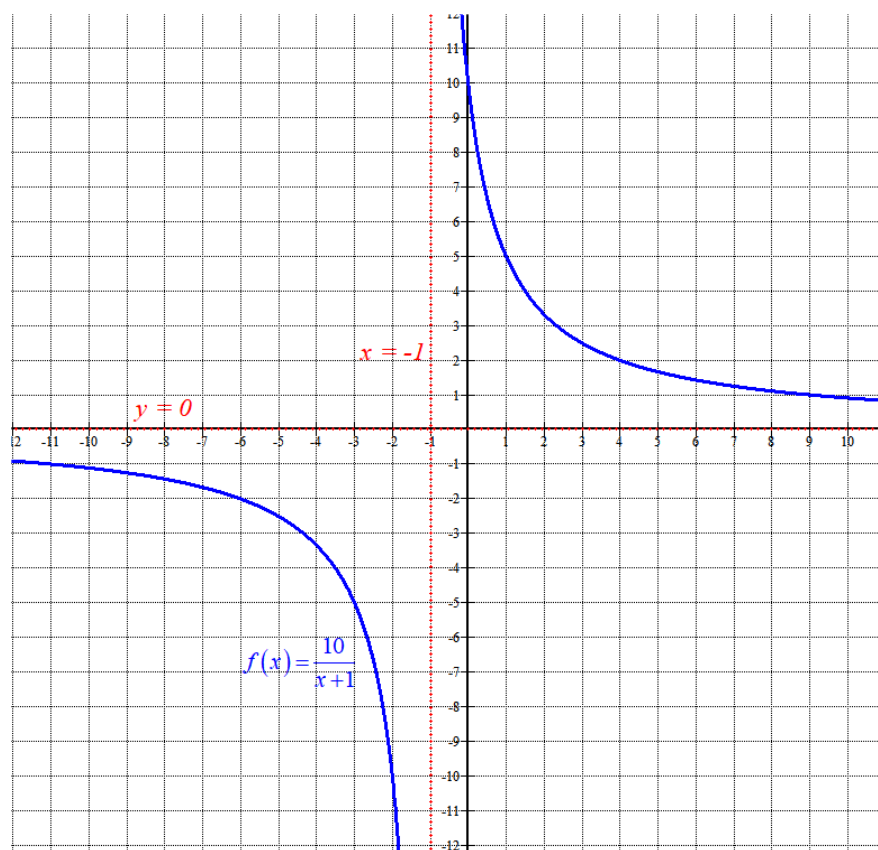
Asíntota oblicua. No tiene

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{0-10}{(x+1)^2} = \frac{-10}{(x+1)^2}$. Esta expresión siempre es negativa, por

lo que la función siempre decrece.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{10}{x+1}$
-5	-2.5
-3	-5
-2	-10
0	10
1	5
3	2.5

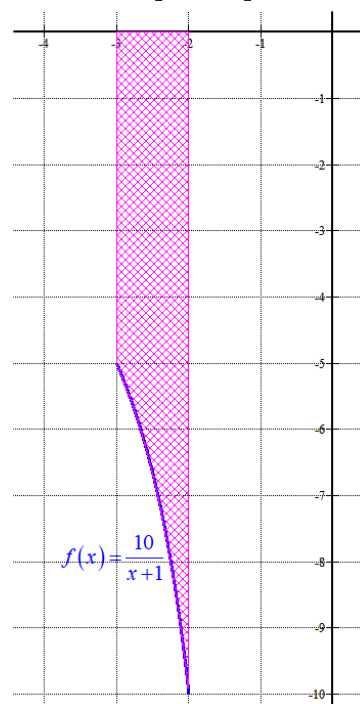


Dibujamos la región limitada por la función y el eje OX en el intervalo $[-3, -2]$.

$$f(x) = \frac{10}{x+1}$$

x	$y = \frac{10}{x+1}$
-3	$\frac{10}{-3+1} = -5$
-2.5	$\frac{10}{-2.5+1} = -6,66$
-2	$\frac{10}{-2+1} = -10$

Contando los cuadraditos de la zona rosada del dibujo de la gráfica el área vale entre 6 y 7 unidades cuadradas.



Hallamos su valor exacto haciendo uso de integrales.

$$\int_{-3}^{-2} \frac{10}{x+1} dx = \left[10 \ln(x+1) \right]_{-3}^{-2} = \left[10 \ln|-2+1| \right] - \left[10 \ln|-3+1| \right] = 10 \ln 1 - 10 \ln 2 = -10 \ln 2$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-3}^{-2} \frac{10}{x+1} dx \right| = \boxed{10 \ln 2 = 6,93 u^2}$$

- 2B.** A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1 - \frac{120}{x}$ millones de euros.
- a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f . Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$.
- b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

a) La función es una función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600) & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ 1 - \frac{120}{x} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

El primer trozo de función es un trozo de parábola, localizamos el vértice.

$$f(x) = \frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{900}(-2x + 100)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{900}(-2x + 100) = 0 \Rightarrow -2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50$$

Como la segunda derivada es $f''(x) = \frac{1}{900}(-2) = -\frac{1}{450} < 0$ entonces es un máximo y la parábola es convexa (U).

El segundo trozo es una curva con discontinuidad en $x = 0$, pero no está en el intervalo de definición.

Calculamos su derivada y estudiamos su comportamiento.

$$f(x) = 1 - \frac{120}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 + \frac{120}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{120}{x^2}$$

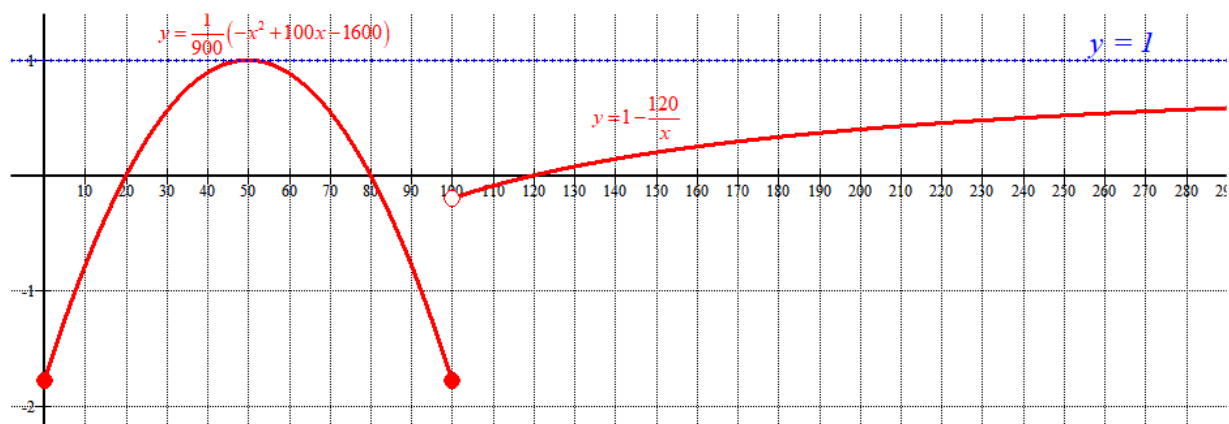
La derivada siempre es positiva, por lo que la función en este intervalo $[100, +\infty)$ crece.

Veamos el comportamiento de esta rama en el ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{120}{x}\right) = 1 - \frac{120}{\infty} = 1 \quad \text{Tiene una asíntota horizontal en } y = 1.$$

Hacemos una tabla de valores.

x	$y = \frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600)$	x	$y = 1 - \frac{120}{x}$
0	-1,777	100	-1,2 No se incluye
20	0	120	0
50	1	150	0,2
80	0	200	0,4
100	-1,77	1000	0,88



b) Observando la gráfica se puede responder a las preguntas planteadas.

Para maximizar el beneficio deben fabricarse 50 toneladas. Y ese beneficio máximo es 1 millón de euros.

Para que el beneficio sea positivo la gráfica debe estar por encima del eje de abscisas y eso ocurre entre 20 y 80 toneladas y de 120 en adelante.

Estos valores se obtienen igualando los dos trozos a cero y viendo cuando es positivo el beneficio.

$$\begin{aligned} \frac{1}{900}(-x^2 + 100x - 1600) &= 0 \Rightarrow -x^2 + 100x - 1600 = 0 \\ x &= \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4(-1)(-1600)}}{-2} = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 - 2400}}{-2} = \\ &= \frac{-100 \pm \sqrt{3600}}{-2} = \begin{cases} \frac{-100 + 60}{-2} = 20 = x \\ \frac{-100 - 60}{-2} = 80 = x \end{cases} \end{aligned}$$

En un valor entre 20 y 80, por ejemplo, $x = 50$ toma el valor $\frac{1}{900}(-50^2 + 100 \cdot 50 - 1600) = 1 > 0$.

La parábola (beneficio entre 0 y 100 toneladas) es positiva entre 20 y 80.

El beneficio a partir de 100 toneladas es 0 cuando $1 - \frac{120}{x} = 0 \Rightarrow \frac{120}{x} = 1 \Rightarrow x = 120$

Esta parte de la función es positiva a partir de 120 toneladas.

3A. El 20% de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80% restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6% fuma. Además, se sabe que del total de los trabajadores, el 12% fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Construyamos una tabla de contingencia.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores			20
No estudios superiores			80
			100

El 6% de los 20 trabajadores con estudios superiores fuma, esto es $0,06 \cdot 20 = 1,2$ de los 20.

Como este número es decimal modificamos la tabla poniendo 1000 trabajadores en lugar de 100.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores			200
No estudios superiores			800
			1000

Ahora el 6% de los 200 trabajadores con estudios superiores fuma, esto es $0,06 \cdot 200 = 12$ de los 200 fuma.

Y el 12% del total fuma, esto es $0,12 \cdot 1000 = 120$.

Añadimos estos datos a la tabla.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores	12		200
No estudios superiores			800
	120		1000

La completamos aplicando la regla de que cada línea debe sumar el resultado final de la misma.

	Fuma	No fuma	
Estudios superiores	12	188	200
No estudios superiores	108	692	800
	120	880	1000

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

a) Hay 120 trabajadores que fuman y de ellos 12 tienen estudios superiores.

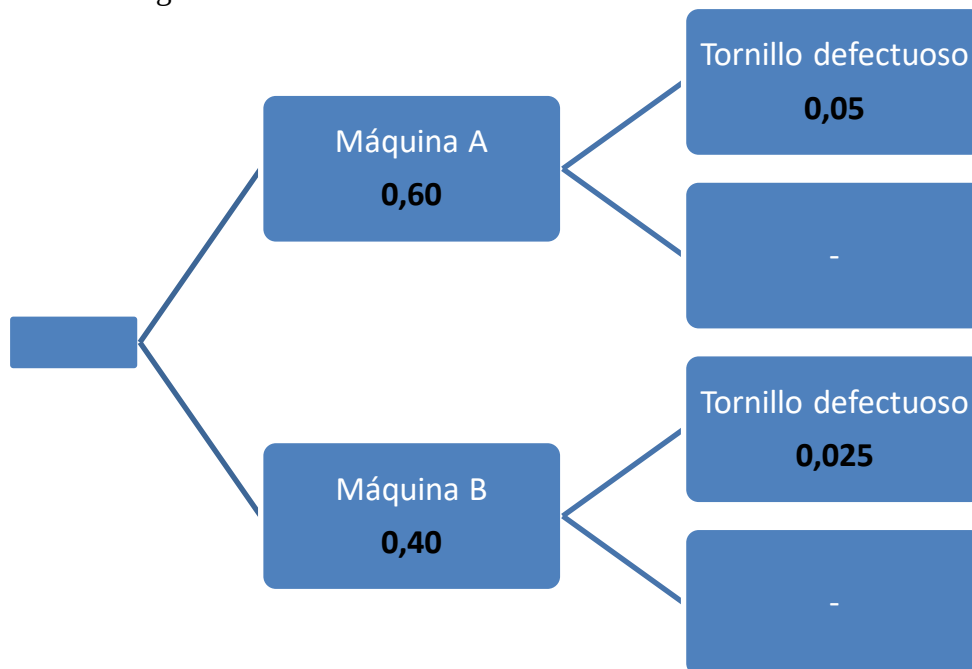
El porcentaje de trabajadores fumadores que tienen estudios superiores es $\frac{12}{120} = 0,1 = \boxed{10\%}$

b) Hay 800 trabajadores sin estudios superiores y de ellos fuman 108, el porcentaje de fumadores dentro de los trabajadores sin estudios superiores es $\frac{108}{800} = \frac{27}{200} = 0,135 = \boxed{13,5\%}$

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60% de las veces la máquina A y el 40% restante la B. La máquina A produce un 5% de tornillos defectuosos y la B un 2,5%.

- a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.
- b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Realicemos un diagrama de árbol.



- a) Este suceso ocurre de dos formas posibles cuya probabilidad aparece en dos de las ramas del diagrama de árbol.

$$P(\text{tornillo defectuoso}) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,025 = 0,030 + 0,0100 = \boxed{0,04}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de la máquina B} / \text{Es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea de la máquina B} \cap \text{Es defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,025}{0,04} = \frac{0,01}{0,04} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$$

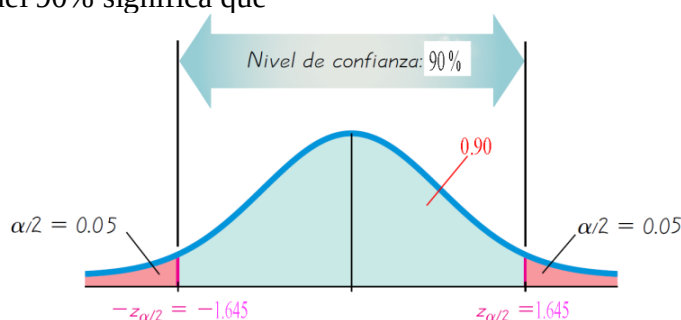
4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros. ⁺

- a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90% de confianza.
- b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90%?

Sea X = Precio medio de un producto. $X = N(\mu, 5.5)$

La media muestral es $\bar{x} = 36 \text{ €}$ y el tamaño de la muestra es $n = 40$.

- a) El nivel de confianza del 90% significa que



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

El error es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{5,5}{\sqrt{40}} = 1,43 \text{ €}$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (36 - 1,43, 36 + 1,43)$$

El intervalo de confianza es (34.57, 37.43)

- b) Con el mismo nivel de confianza del 90 % tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.645$.

El nuevo error es del 1.5, lo sustituimos en la fórmula y despejamos la “n”.

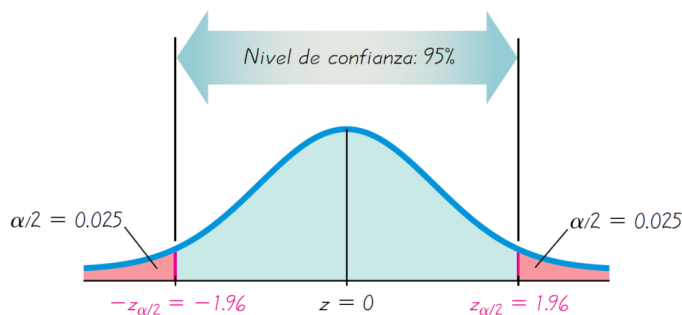
$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.645 \cdot \frac{5.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot \frac{5.5}{1.5} \Rightarrow n = \left(1.645 \cdot \frac{5.5}{1.5}\right)^2 = 36.38$$

A partir de 37 comercios se consigue que el error de estimación sea menor de 1.5 euros.

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.⁺

- a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.
- b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

Conocemos $n = 500$ $p = \frac{190}{500} = \frac{380}{1000} = \frac{38}{100} = 0'38$ $1 - p = 1 - 0'38 = 0'62$

El error sigue la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'38 \cdot 0'62}{500}} = 0'0425$

La fórmula del intervalo de confianza es $(p - Error, p + Error)$ y al 95 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$(0'38 - 0'0425, 0'38 + 0'0425) = (0'3375, 0'4225)$$

Con una probabilidad del 95% la proporción de individuos de la población que leen habitualmente el periódico está entre un 33,75 % y un 42,25 %.

b) Si mantenemos el nivel de confianza que nos da $z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$ y la proporción muestral es la misma

$p = 0'38$, a su vez tenemos el mismo valor de $1 - p = 0'62$ y en la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'38 \cdot 0'62}{n}}$$

disminuimos la muestra (n) entonces aumenta $\frac{0'38 \cdot 0'62}{n}$ y el Error también se hace más grande.

A menor tamaño muestral es mayor el Error de la estimación.

EBAU Julio 2019



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

- a) [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- b) [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- c) [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además, se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- a) [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- b) [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%?

- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias (Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además, las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

- a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?
- b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

3. En una agencia de viajes online se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60% compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
- b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.
- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

- a) Llamamos “ x ” al dinero invertido en A e “ y ” a lo invertido en B.

La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B $\rightarrow x = my$.

Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. Los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B $\rightarrow 0.10 \cdot x + 0.20 \cdot y = 4000$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ 0.10 \cdot x + 0.20 \cdot y = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = my \\ x + 2y = 40000 \end{array} \right\}$$

- b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ x + 2y = 40000 \end{array} \right\} \Rightarrow my + 2y = 40000 \Rightarrow (m + 2)y = 40000$$

Nos surgen dos situaciones distintas: $m + 2 = 0$ o $m + 2 \neq 0$.

Si $m + 2 = 0$ la ecuación queda como una igualdad imposible: $0 = 40000$.

La situación no tiene solución si $m + 2 = 0 \rightarrow m = -2$.

Si $m + 2 \neq 0$ podemos continuar la resolución del sistema, pues puedo despejar la incógnita “ y ”.

$$(m + 2)y = 40000 \Rightarrow y = \frac{40000}{m + 2} \Rightarrow x = m \frac{40000}{m + 2} = \frac{40000m}{m + 2}$$

La situación tiene solución única si $m \neq -2$.

Aunque realmente podemos afirmar que el problema tiene solución, que además es única para cualquier valor de m positivo. Un valor de m negativo no tiene sentido. Por ejemplo, si $m = -2$ no puede invertir 1000 € en la empresa B y -2000 en A, pues es una cantidad negativa.

¿Nos preguntan si es posible el valor $m = 2$?

Si es posible pues es un valor distinto de -2 . Sustituimos este valor en lo obtenido con anterioridad

y lo invertido en A es $x = \frac{40000m}{m + 2} = \frac{80000}{4} = 20000$ €.

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

- a) [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- b) [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- c) [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

a) Hallamos el momento donde coinciden ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 6x + 3 \\ g(x) = x + 9 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 6x + 3 = x + 9 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-5-1}{-2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

En $x = 2$ y en $x = 3$ la producción de ambas fuentes coincide.

En $x = 2$ la producción es $g(2) = 2 + 9 = 11$ y en $x = 3$ la producción es $g(3) = 3 + 9 = 12$.

La producción a las 2 horas de cualquiera de las dos empresas es de 11 unidades y a las 3 horas es de 12 unidades.

b) La producción de la fuente A es $f(x) = -x^2 + 6x + 3$. Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 6 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y comprobamos su signo.

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

La producción de electricidad es máxima para $x = 3$.

Por tanto, la producción de electricidad de la fuente A decrece a partir de la hora 3.

c) La producción conjunta es la suma de ambas. Obtenemos su expresión y determinamos sus puntos críticos.

$$P(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + 6x + 3 + x + 9 = -x^2 + 7x + 12$$

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) = -2x + 7 \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{2} = 3.5}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y obtenemos el signo.

$$P'(x) = -2x + 7 \Rightarrow P''(x) = -2 \Rightarrow P''(3.5) = -2 < 0$$

Como el signo es negativo la producción conjunta presenta un máximo a las 3 horas y media.

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además, se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- a) [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- b) [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

Si denotamos por A el suceso “el estudiante ha consumido alcohol” y por F el suceso “el estudiante ha fumado”, los datos del enunciado se traducen en:

De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos ha fumado $\rightarrow P(A) = \frac{3}{5} = 0.6$;

$$P(F) = \frac{1}{4} = 0.25.$$

El veinte por ciento de ellos ha consumido alcohol y fumado $\rightarrow P(A \cap F) = 0.20$.

- a) Nos piden calcular $P(A/F)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.25} = \boxed{0.8}$$

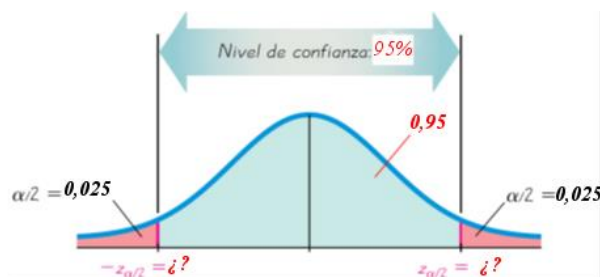
- b) Nos piden calcular $P(\overline{F} \cap \overline{A})$. Aplicamos una de las leyes de Morgan y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\begin{aligned} P(\overline{F} \cap \overline{A}) &= P(\overline{F \cup A}) = 1 - P(F \cup A) = \\ &= 1 - [P(F) + P(A) - P(A \cap F)] = 1 - [0.25 + 0.6 - 0.2] = \boxed{0.35} \end{aligned}$$

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%?
- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias
(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) Sea X = Número de de turistas asiáticos en Asturias.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Como no tenemos una proporción muestral consideramos dicha proporción con el valor más desfavorable: $p = 0.5$.

Iguamos el error a 0.05.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} = \boxed{384.16} \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 turistas.

b) Sea X = Número de de turistas asiáticos en Asturias.

En la muestra de 800 turistas la proporción de asiáticos es $p = \frac{80}{800} = 0.1$.

El tamaño de la muestra es $n = 800$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

El error viene dado por la fórmula:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{800}} \approx 0.0208$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.1 - 0.0208, 0.1 + 0.0208) = (0.0792, 0.1208)$$

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además, las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

a) Si denominamos por “x” e “y” el número de motocicletas eléctricas de tipo A y de tipo B, respectivamente, que se fabrican por jornada, las condiciones impuestas llevan a obtener las ecuaciones:

“Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B.” $\rightarrow 200x + 400y \leq 3600$

“El número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12” $\rightarrow x + y \leq 12$

“Cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B” $\rightarrow y \leq 8$

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 400y \leq 3600 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 18 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$x + 2y = 18$$

x	y = $\frac{18-x}{2}$
0	9
2	8
6	6

$$x + y = 12$$

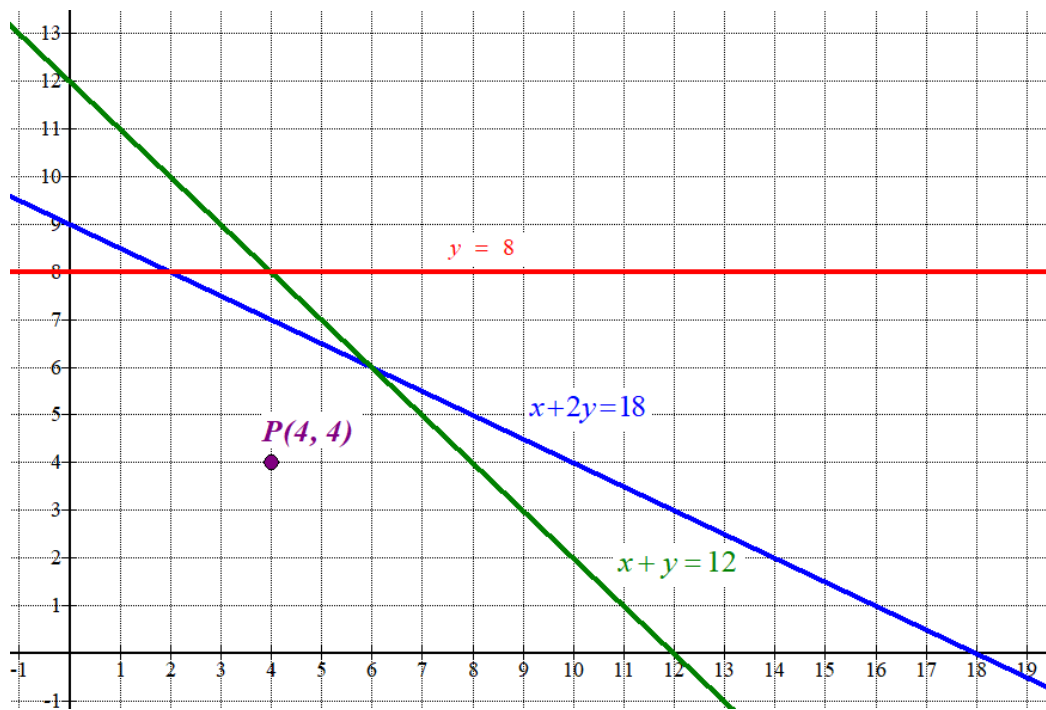
x	y = 12 - x
0	12
6	6
12	0

$$y = 8$$

x	y = 8
0	8
2	8

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

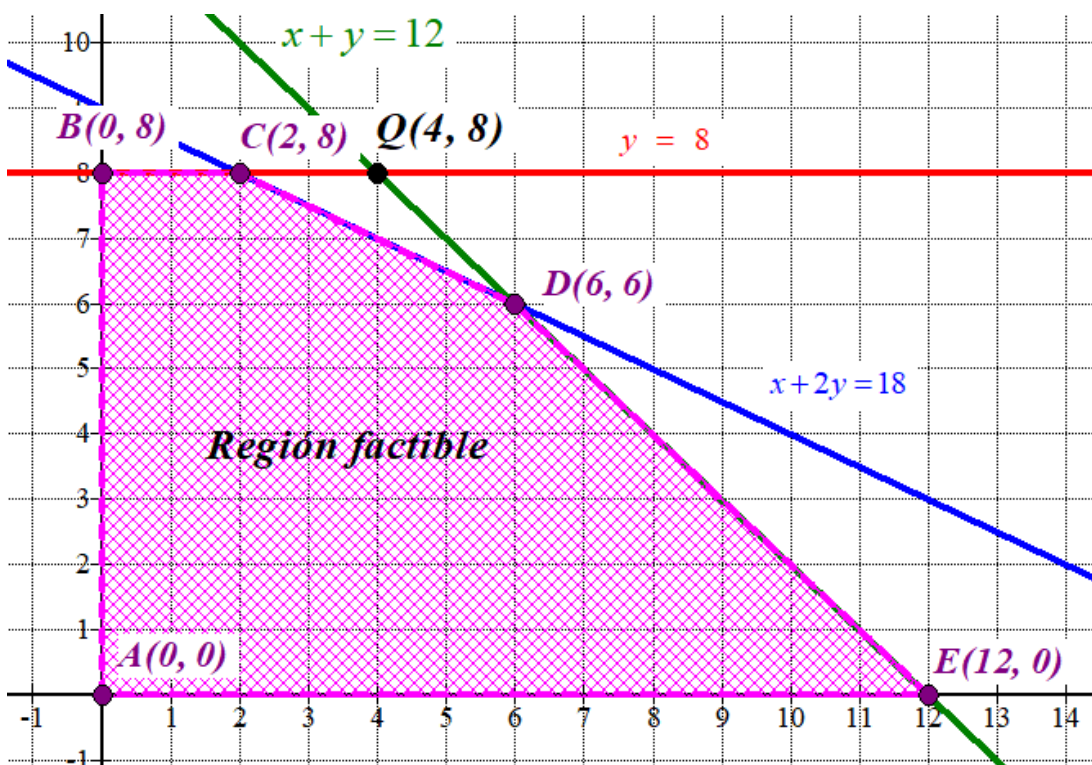
Primer cuadrante



Probamos si el punto $P(4, 4)$ cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 2 \cdot 4 \leq 18 \\ 4 + 4 \leq 12 \\ 4 \leq 8 \\ 4 \geq 0 \quad 4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la zona rayada.



Observamos que el punto $Q(4, 8)$ no pertenece a la región factible y fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B (8) no cumple con las restricciones del problema.

b) La función beneficio es $B(x, y) = 200x + 320y$.

Valoramos el beneficio en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo beneficio.

Los vértices son A(0, 0), B(0, 8), C(2, 8), D(6, 6) y E(12, 0).

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow B(0, 8) = 200 \cdot 0 + 320 \cdot 8 = 2560$$

$$C(2, 8) \rightarrow B(2, 8) = 200 \cdot 2 + 320 \cdot 8 = 2960$$

$$D(6, 6) \rightarrow B(6, 6) = 200 \cdot 6 + 320 \cdot 6 = 3120 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(12, 0) \rightarrow B(12, 0) = 200 \cdot 12 + 320 \cdot 0 = 2400$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 3120 € con la fabricación diaria de 6 motocicletas de cada tipo.

¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

En este caso queremos maximizar el valor de “x”.

Observando el dibujo el valor más alto de “x” se obtiene en el vértice C(12, 0) donde tenemos que $x = 12$.

El máximo número de motocicletas del tipo A fabricadas se consigue fabricando 12 motocicletas del tipo A y ninguna del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
 b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

a) Calculamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \right) dx = 9 \int \frac{1}{x} dx - 18 \int x^{-2} dx - \int dx =$$

$$= 9 \ln x - 18 \frac{x^{-1}}{-1} - x = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + C$$

Determinamos el valor de C sabiendo que $F(1) = 20$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + C \\ F(1) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \ln 1 + \frac{18}{1} - 1 + C = 20 \Rightarrow C = 20 - 18 + 1 = 3$$

La primitiva buscada es $F(x) = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + 3$.

- b) El dominio de la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

La función tiene una asíntota vertical: $x = 0$.

Tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \right) = \frac{9}{\infty} - \frac{18}{\infty} - 1 = -1$ la función tiene una asíntota horizontal: $y = -1$.

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Calculamos la derivada de la función y estudiamos su monotonía.

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = 9x^{-1} - 18x^{-2} - 1 \Rightarrow f'(x) = -9x^{-2} + 36x^{-3} = -\frac{9}{x^2} + \frac{36}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{9}{x^2} + \frac{36}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{9}{x^2} = \frac{36}{x^3} \Rightarrow 9x^3 = 36x^2 \Rightarrow 9x^3 - 36x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

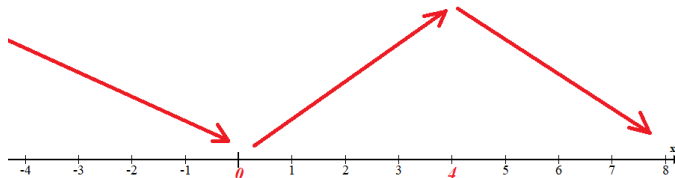
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x = 0$ y $x = 4$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = -\frac{9}{(-1)^2} + \frac{36}{(-1)^3} = -27 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 4)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = -\frac{9}{1^2} + \frac{36}{1^3} = 27 > 0$. La función crece en $(0, 4)$.
- En el intervalo $(4, +\infty)$ consideramos $x=5$ y la derivada vale $f'(5) = -\frac{9}{5^2} + \frac{36}{5^3} = -0.072 < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=4$.

Puntos de corte con el eje X.

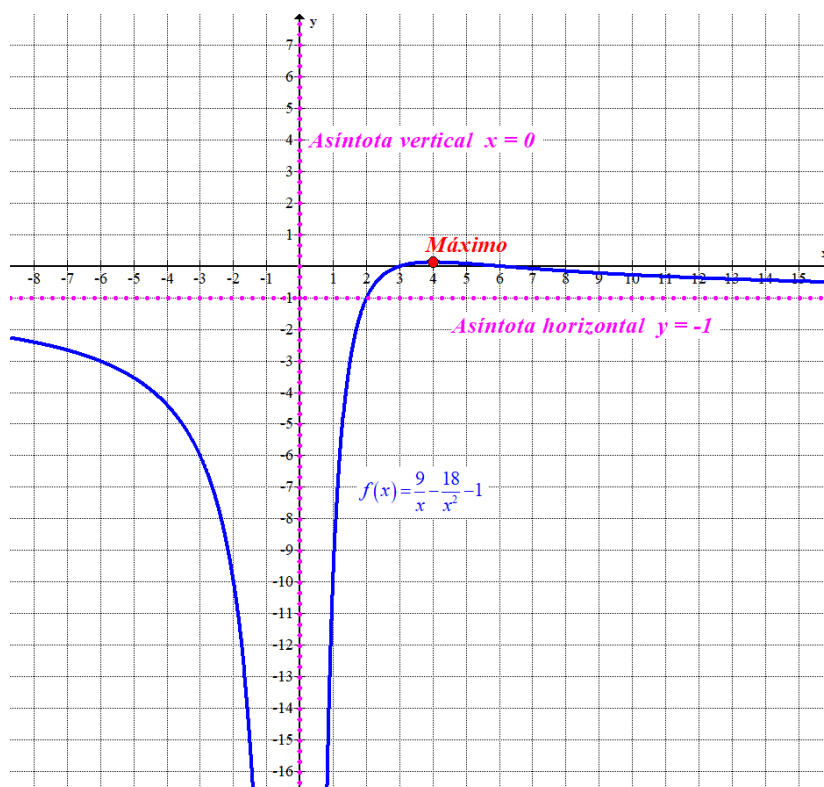
$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \quad \left. \begin{array}{l} y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{9x - 18 - x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow 9x - 18 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{9+3}{2} = \boxed{6=x} \\ \frac{9-3}{2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

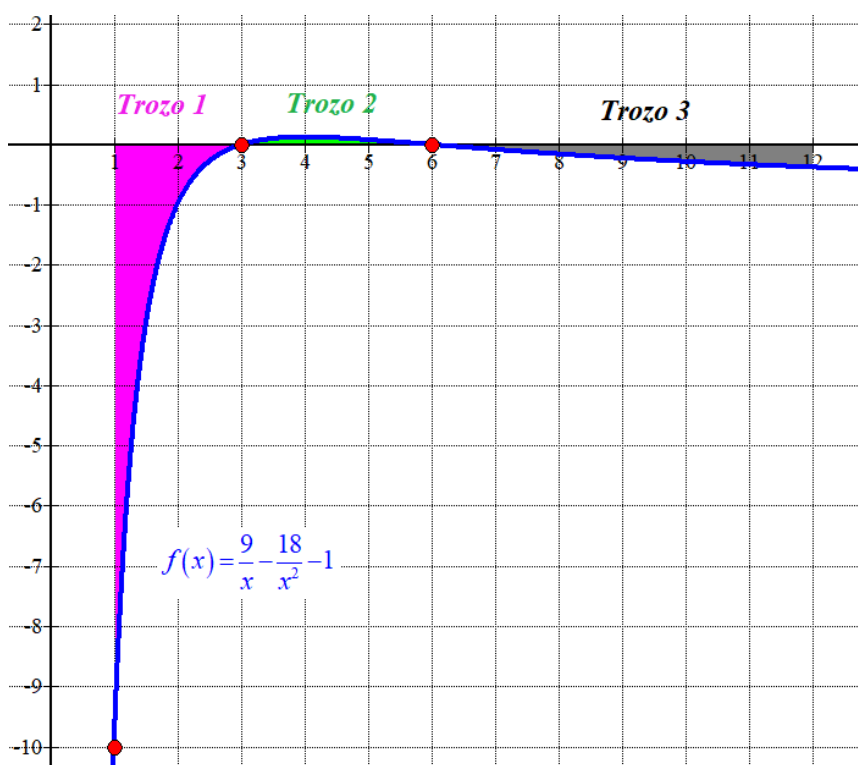
Los puntos de corte con el eje de abscisas son $(3, 0)$ y $(6, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$
-2	-10
-1	-28
1	-10
2	-1
4	0.125
5	0.08
10	-0.28



La región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$ la dividimos en tres partes: Una entre 1 y 3, otra entre 3 y 6, la tercera entre 6 y 12.



$$\text{Área 1} = \left| \int_1^3 \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx \right| = \left| \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left[9 \ln 3 + \frac{18}{3} - 3 \right] - \left[9 \ln 1 + \frac{18}{1} - 1 \right] \right| = |9 \ln 3 + 6 - 3 - 18 + 1| = \boxed{14 - 9 \ln 3 \approx 4.112 u^2}$$

$$\text{Área 2} = \int_3^6 \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx = \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_3^6 = \left[9 \ln 6 + \frac{18}{6} - 6 \right] - \left[9 \ln 3 + \frac{18}{3} - 3 \right]$$

$$= 9 \ln 6 - 9 \ln 3 - 6 = \boxed{9 \ln 2 - 6 \approx 0.238 u^2}$$

$$\text{Área 3} = \left| \int_6^{12} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx \right| = \left| \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_6^{12} \right| = \left| \left[9 \ln 12 + \frac{18}{12} - 12 \right] - \left[9 \ln 6 + \frac{18}{6} - 6 \right] \right| =$$

$$= |9 \ln 12 - 9 \ln 6 - 7.5| = \boxed{7.5 - 9 \ln 2 \approx 1.262 u^2}$$

El área de la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$ es la suma de las tres áreas obtenidas:

$$\text{Área} = 14 - 9 \ln 3 + 9 \ln 2 - 6 + 7.5 - 9 \ln 2 = \boxed{15.5 - 9 \ln 3 \approx 5.612 u^2}$$

- 3.** En una agencia de viajes online se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60% compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:
- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
- b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

Llamamos A al suceso “comprar billete de avión” y B a “comprar bono de hotel”.

Con los datos del ejercicio sabemos que $P(A) = 0.80$; $P(B) = 0.60$ y $P(A \cap B) = 0.5$.

- a) Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = \boxed{0.9}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.8} = \boxed{0.625}$$

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.

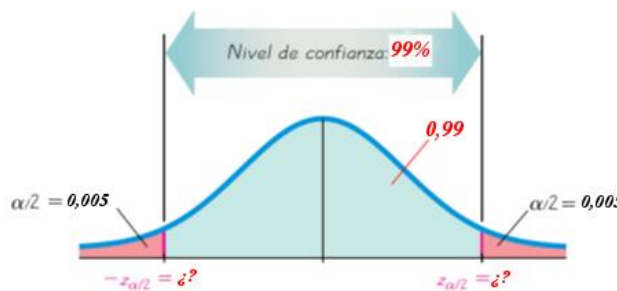
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = Ingresos anuales de un ejecutivo. $X = N(\mu, 3000)$

a) La media muestral es $\bar{x} = \frac{28800000}{576} = 50000$ € y el tamaño de la muestra es $n = 576$.

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,58 \cdot \frac{3000}{\sqrt{576}} = 322,5 \text{ €}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50000 - 322,5, 50000 + 322,5)$$

El intervalo de confianza es (49677.02, 50322.5)

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 2,58$

El error del intervalo de confianza debe ser 500 euros por lo que:

$$Error = 500 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 \Rightarrow 2,58 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} = 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,58 \cdot \frac{3000}{500} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,58 \cdot \frac{3000}{500} \right)^2 = 239,63$$

A partir de una muestra de 240 ejecutivos el error del intervalo de confianza es menor de 500 €.

EBAU Junio 2019



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

3. El abogado A se encargó del 30% de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70% en los tribunales. El abogado B se encargó del 60% de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90%. Por último, el abogado C se encargó del 10% restante de casos, ganando en los tribunales el 50% de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?
- b) [1 punto] Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

- a) [1 punto] Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) [2 puntos] ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) [1 punto] El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) [0,75 puntos] Determinar la función cotización F , si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además, se sabe que el 5% de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10% de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90% de confianza.

b) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90% de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación matricial $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 3 \\ -4+1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4x+3y \\ -3x-2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -2-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x+3y \\ -3x+(m-2)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=7 \\ -3x+(m-2)y=-4 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es
$$\begin{cases} 4x+3y=7 \\ -3x+(m-2)y=-4 \end{cases}.$$

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & m-2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & m-2 \end{vmatrix} &= 4m-8+9 = 4m+1 \\ \text{Determinante} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4m+1=0 \Rightarrow 4m=-1 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{4}}$$

Para cualquier valor de m distinto de $-\frac{1}{4}$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y por tanto su rango es 2, igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única para $m \neq -\frac{1}{4}$.

Resolvemos el sistema para $m = 1$.

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ -3x + (1-2)y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ -3x - y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ -9x - 3y = -12 \end{array} \right\} \\ \hline -5x = -5 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 4 + 3y = 7 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

Para $m=1$ la solución del sistema es $x=y=1$.

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

- a) La función que expresa el coste total de la llamada es una función a trozos, ya que se cobra de forma distinta los primeros 30 minutos con respecto a las llamadas de más de 30 minutos. Si la llamada supera los 30 minutos se paga el establecimiento de llamada, los 30 minutos a 1.2 euros por minuto y los restantes $(x - 30)$ a 0.8 euros el minuto.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 1 + 1.2 \cdot 30 + 0.8(x - 30) & \text{si } x > 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8x - 24 & \text{si } x > 30 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 13 + 0.8x & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 30$.

$$\left. \begin{aligned} f(30) &= 1 + 1.2 \cdot 30 = 37 \\ \lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 30^-} 1 + 1.2x = 1 + 1.2 \cdot 30 = 37 \\ \lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 30^+} 13 + 0.8x = 13 + 0.8 \cdot 30 = 37 \end{aligned} \right\}$$

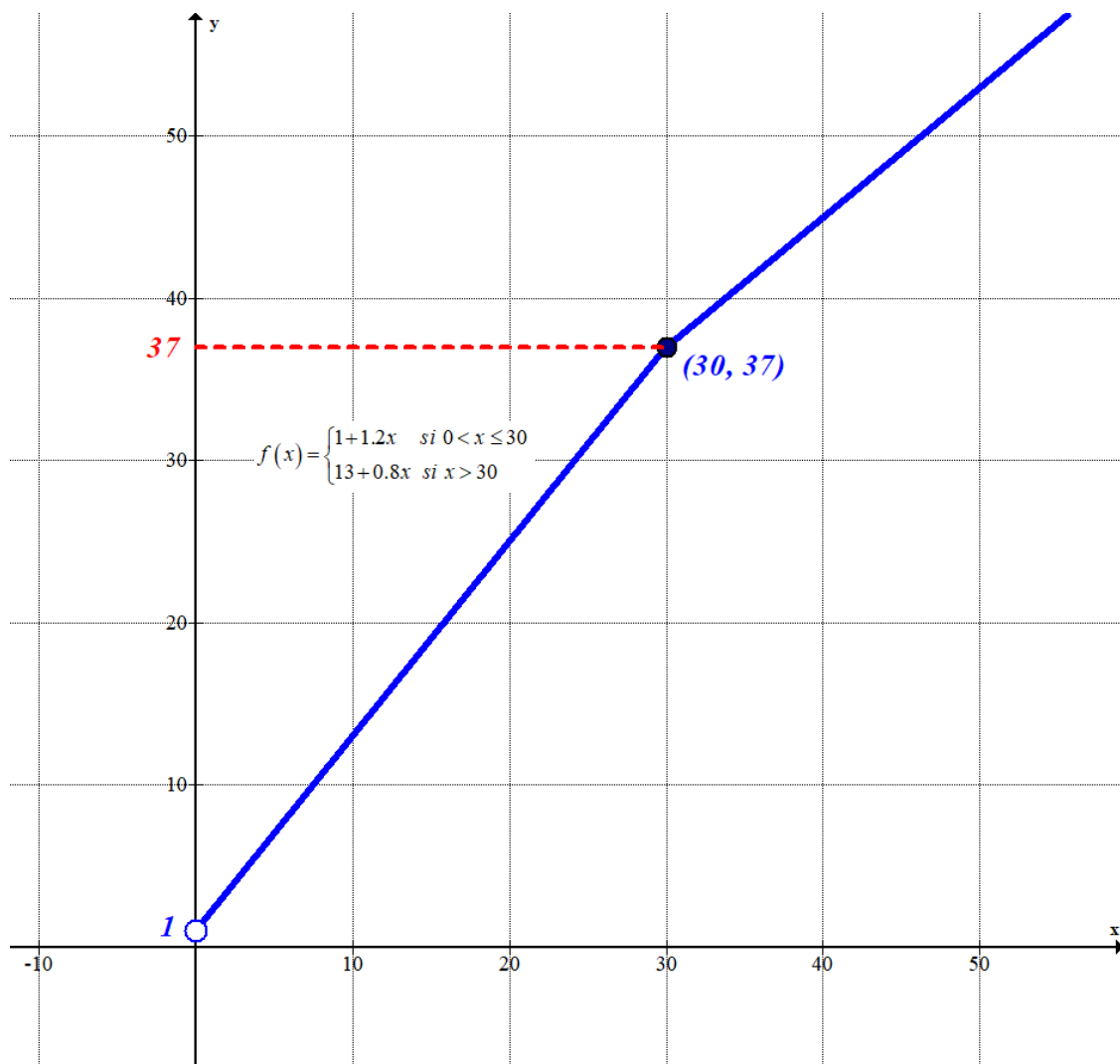
Como coinciden el valor de la función con los límites laterales, la función es continua en $x = 30$.

- b) Es una función a trozos continua donde en cada trozo la gráfica es una línea recta. El dominio de la función es $(0, \infty)$. Las dos ramas de la función son crecientes pues sus derivadas son una constante positiva.

$$f'(x) = \begin{cases} 1.2 > 0 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 0.8 > 0 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = 1 + 1.2x$	x	$f(x) = 13 + 0.8x$
10	13	40	45
30	37	50	53



Averiguamos el valor de x para el que $f(x) = 45$. Evidentemente la llamada ha durado más de 30 minutos, pues las llamadas de menos de 30 minutos su máximo coste es de 37 euros.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 13 + 0.8x & \text{si } x > 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 1.2x = 45 \rightarrow x = \frac{44}{1.2} = 36.66 \text{ ; Im posible!} \\ 13 + 0.8x = 45 \rightarrow 0.8x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{0.8} = 40 \end{cases}$$

La llamada con coste 45 euros ha durado 40 minutos. De hecho, este valor lo tenemos reflejado en la tabla de valores que hemos utilizado para dibujar la gráfica.

3. El abogado A se encargó del 30% de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70% en los tribunales. El abogado B se encargó del 60% de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90%. Por último, el abogado C se encargó del 10% restante de casos, ganando en los tribunales el 50% de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) [1 punto] Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

Pasemos estos datos relativos a valores absolutos.

Supongamos que fueron $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 100 = 12600$ casos los que llegaron al bufete.

El abogado A se encargó del 30 %, es decir, $0.3 \cdot 12600 = 3780$ casos. De estos ganó el 70 %, es decir, ganó $0.7 \cdot 3780 = 2646$ casos.

El abogado B se encargó del 60 %, es decir, $0.6 \cdot 12600 = 7560$ casos. De estos ganó el 90 %, es decir, ganó $0.9 \cdot 7560 = 6804$ casos.

El abogado C se encargó del 10 %, es decir, $0.1 \cdot 12600 = 1260$ casos. De estos ganó el 50 %, es decir, ganó $0.5 \cdot 1260 = 630$ casos.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Abogado A	Abogado B	Abogado C	
Ganados	2646	6804	630	
Perdidos				
	3780	7560	1260	12600

Completamos en la tabla el dato de casos totales ganados por el bufete.

	Abogado A	Abogado B	Abogado C	
Ganados	2646	6804	630	10080
Perdidos				
	3780	7560	1260	12600

Llamamos G al suceso “caso ganado” y A, B y C a “caso llevado por el abogado A, B o C”.

a) De los 12600 casos se han ganado 10080 en el bufete. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(G) = \frac{10080}{12600} = \frac{4}{5} = 0.8$$

b) De los 10080 casos que ganó el bufete 6804 ganó el abogado B. Aplicamos la regla de Laplace:

$$P(B/G) = \frac{6804}{10080} = \frac{27}{40} = 0.675$$

Nota: Se tomó 12600 como el número de casos para que los resultados de las operaciones sean enteras. Daría igual el número de casos total elegido. La probabilidad que se obtendría seguiría siendo la misma.

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) [1 punto] Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95% de confianza.

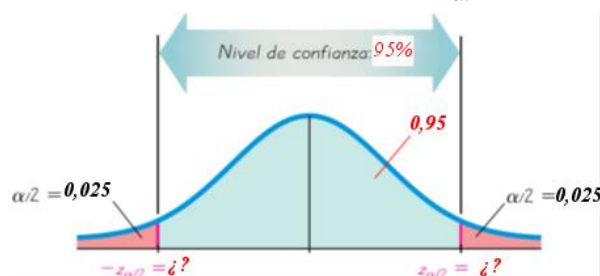
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = Tiempo en minutos de cada consulta en un determinado centro de salud. $X = N(\mu, 1.5)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 6$ minutos y el tamaño de la muestra es $n = 961$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{961}} \approx 0.095 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (6 - 0.095, 6 + 0.095) = (5.905, 6.095)$$

El intervalo de confianza es (5.905, 6.095)

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$

El error del intervalo de confianza debe ser 0,2 minutos por lo que:

$$Error = 0.2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.2 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.96 \cdot \frac{1.5}{0.2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1.96 \cdot \frac{1.5}{0.2}\right)^2 = 216.09$$

A partir de una muestra de 217 consultas el error del intervalo de confianza es menor de 0.2 minutos.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

- a) [2 puntos] ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?
- b) [1 punto] El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

- a) Denominamos por “x” e “y” al número de horas de trabajo semanales de la máquina A y de la máquina B, respectivamente.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada.

	Anillos	Pulseras	Collares
Nº horas máquina A (x)	x	4x	2x
Nº horas máquina B (y)	4y	2y	3y
	$x + 4y$	$4x + 2y$	$2x + 3y$

Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares” $\rightarrow x + 4y \geq 80$; $4x + 2y \geq 96$; $2x + 3y \geq 120$.

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0$ $y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \geq 80 \\ 4x + 2y \geq 96 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y \geq 80 \\ 2x + y \geq 48 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$x + 4y = 80$$

$$2x + y = 48$$

$$2x + 3y = 120$$

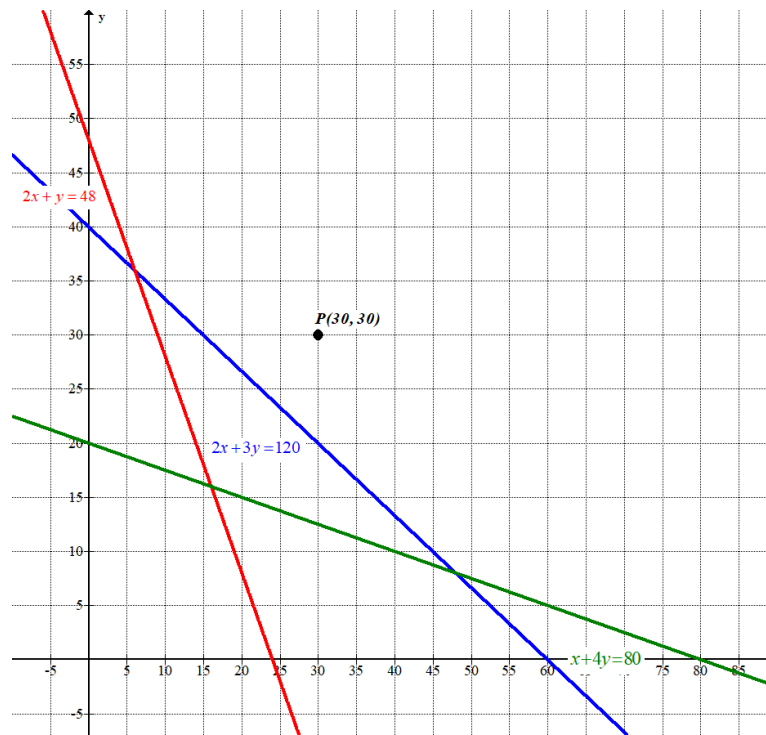
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

x	$y = \frac{80-x}{4}$
0	20
40	10
80	0

x	$y = 48 - 2x$
0	48
24	0

x	$y = \frac{120-2x}{3}$
0	40
60	0

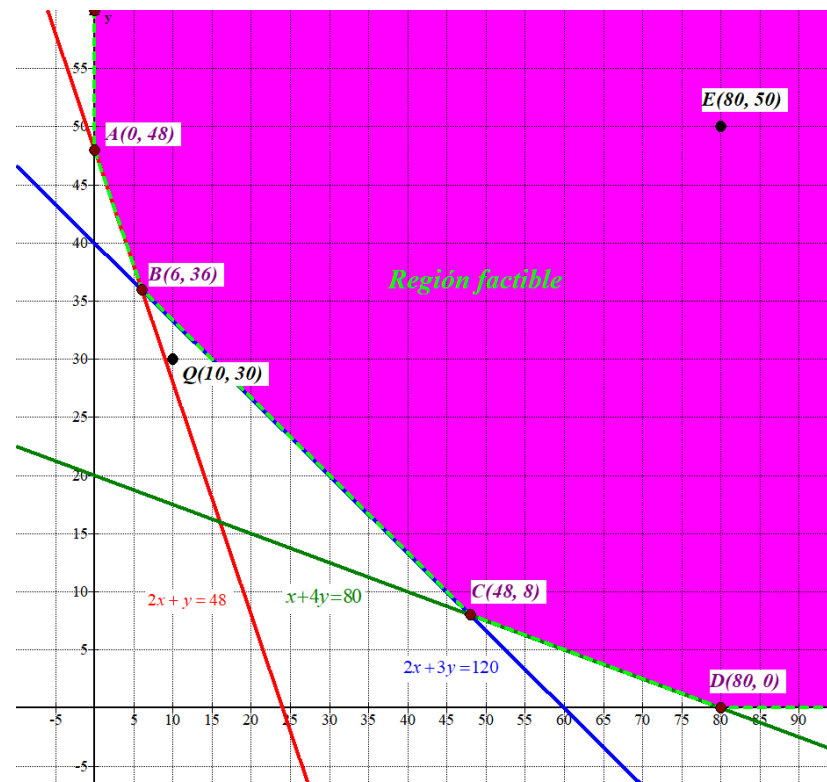
Primer
cuadrante



Probamos si el punto $P(30, 30)$ cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 4 \cdot 30 \geq 80 \\ 2 \cdot 30 + 30 \geq 48 \\ 2 \cdot 30 + 3 \cdot 30 \geq 120 \\ 30 \geq 0 \quad 30 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la región del plano a la que pertenece el punto P. Es la zona rayada del dibujo.



Debemos determinar las coordenadas de los puntos B y C resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$B \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 48 \\ (-) 2x + 3y = 120 \end{cases}$$

$$\hline -2y = -72 \Rightarrow y = \frac{72}{2} = 36 \Rightarrow 2x + 36 = 48 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

El punto B tiene coordenadas B(6, 36).

$$C \rightarrow \begin{cases} x + 4y = 80 \\ 2x + 3y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80 - 4y \\ 2x + 3y = 120 \end{cases} \Rightarrow 2(80 - 4y) + 3y = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 160 - 8y + 3y = 120 \Rightarrow -5y = -40 \Rightarrow y = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow x = 80 - 32 = 48$$

El punto C tiene coordenadas C(48, 8).

Observamos que el punto Q(10, 30) no pertenece a la región factible y 10 horas la máquina A y 30 horas la B no cumple con las restricciones del problema.

b) La función coste del funcionamiento de las 2 máquinas viene expresado como

$$C(x, y) = 2500x + 2000y.$$

Valoramos el coste en cada uno de los vértices de la región factible en busca del mínimo. Como es una región no acotada añadimos un punto lejano E(80, 50) para determinar si alejándose de los vértices se consigue un menor coste (aunque esto no sea muy lógico en este ejercicio)

$$A(0, 48) \rightarrow C(0, 48) = 2500 \cdot 0 + 2000 \cdot 48 = 96000$$

$$B(6, 36) \rightarrow C(6, 36) = 2500 \cdot 6 + 2000 \cdot 36 = 87000 \text{ ;Mínimo!}$$

$$C(48, 8) \rightarrow C(48, 8) = 2500 \cdot 48 + 2000 \cdot 8 = 136000$$

$$D(80, 0) \rightarrow C(80, 0) = 2500 \cdot 80 + 2000 \cdot 0 = 200000$$

$$E(80, 50) \rightarrow C(80, 50) = 2500 \cdot 80 + 2000 \cdot 50 = 300000$$

El mínimo coste que se puede conseguir es de 87000 € con 6 horas de funcionamiento de la máquina A y 36 de la máquina B.

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

- a) [0,75 puntos] Determinar la función cotización F , si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.
 b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

- a) Si la variación instantánea es $f(x) = 0,02x^2 + 1$ la función cotización F es la primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 0,02x^2 + 1 dx = 0,02 \frac{x^3}{3} + x + K$$

Determinamos el valor de K utilizando que en el momento inicial la cotización era de 5 por lo que se debe cumplir: $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 0,02 \frac{x^3}{3} + x + K \\ F(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 0,02 \frac{0^3}{3} + 0 + K = 5 \Rightarrow \boxed{K = 5}$$

La función cotización es $F(x) = \frac{0,02}{3}x^3 + x + 5$.

- b) Obtenemos la expresión de la función g .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = f(x) - 9 \\ f(x) = 0,02x^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x) = 0,02x^2 + 1 - 9 = 0,02x^2 - 8$$

Esta función es polinómica de segundo grado por lo que su dominio es todo $\mathbb{R}$. Además, es continua en todo su dominio.

Su gráfica es una parábola. No presenta asíntotas de ningún tipo.

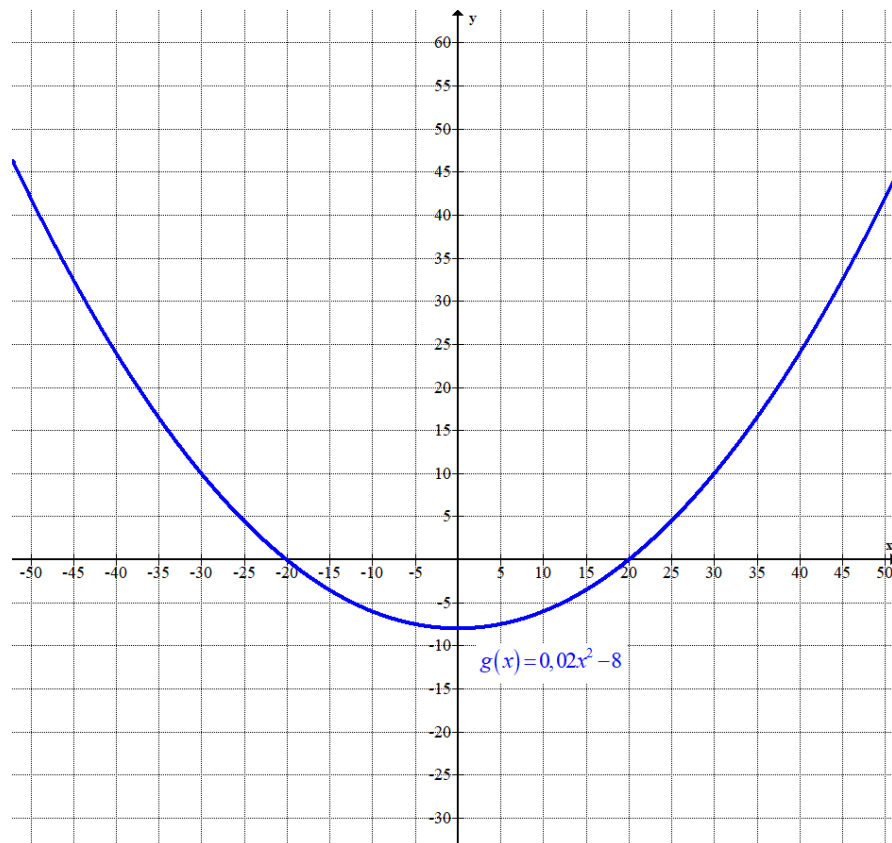
Hallamos su vértice o mínimo de la función.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 0,02x^2 - 8 \Rightarrow g'(x) = 0,04x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0,04x = 0 \Rightarrow x = 0$$

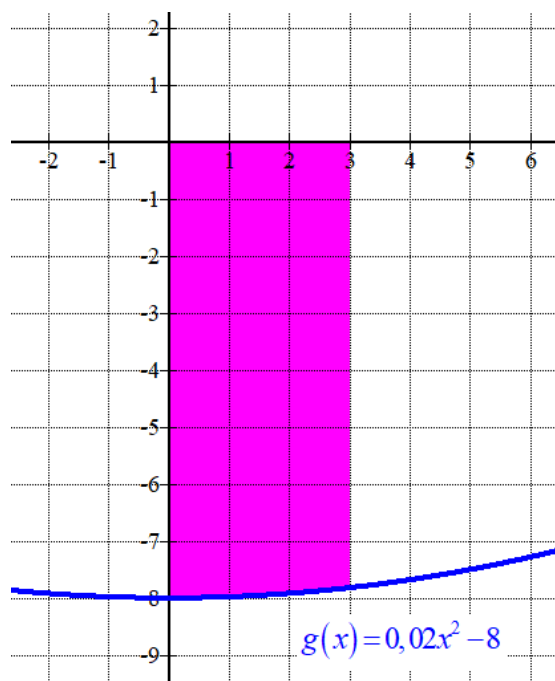
Como $g''(x) = 0,04 \Rightarrow g''(0) = 0,04 > 0$ la función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$g(x) = 0,02x^2 - 8$
-20	0
-10	-6
0	-8
10	-6
20	0



Nos piden hallar el área de la región coloreada del dibujo.



Calculamos la integral definida entre 0 y 3 de la función g .

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 0.02x^2 - 8 dx = \left[0.02 \frac{x^3}{3} - 8x \right]_0^3 = \left[0.02 \frac{3^3}{3} - 24 \right] - \left[0.02 \frac{0^3}{3} - 0 \right] = -23.82$$

El área de la región indicada tiene un valor de 23.82 unidades cuadradas.

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además, se sabe que el 5% de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10% de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

- a) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.
b) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

El 5% de los tetrabriks de la marca A (400) están caducados, por lo que $0.05 \cdot 400 = 20$ tetrabriks de la marca A están caducados. Hay $400 - 20 = 380$ tetrabriks de la marca A que no están caducados. El 10% de los tetrabriks de la marca B (100) están caducados, por lo que hay $0.10 \cdot 100 = 10$ tetrabriks de la marca B que están caducados. Hay $100 - 10 = 90$ tetrabriks de la marca B que no están caducados.

- a) De un total de $400 + 100 = 500$ tetrabriks hay 90 que son de la marca B y no están caducados. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir un tetrabrik sea de la marca B y no esté caducado tiene un valor de $\frac{90}{500} = 0.18$.
- b) De un total de 500 tetrabriks hay 100 de la marca B y otros 20 de la marca A que están caducados. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir un tetrabrik sea de la marca B o esté caducado tiene un valor de $\frac{100 + 20}{500} = 0.24$.

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Se supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90% de confianza.

b) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90% de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) Sea X = Número de horas semanales que un adolescente dedica a las nuevas tecnologías.

Sabemos que $X = N(\mu, 1.7)$

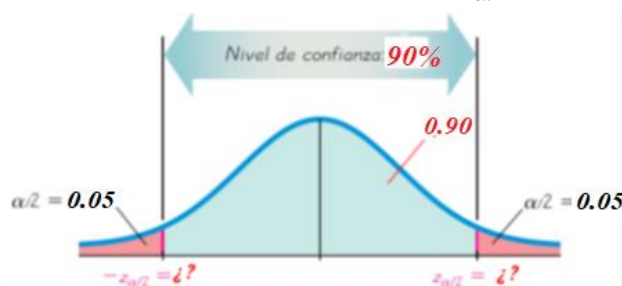
Determinamos la media muestral a partir de los resultados dados en el ejercicio. Para ello construimos una tabla.

Nº horas semanales	4	5	7	8	9	10	15	
Nº de adolescentes	10	15	20	20	15	10	10	$N = 100$
$x_i \cdot f_i$	40	75	140	160	135	100	150	800

La media muestral es la suma total de horas dividido entre el número total de adolescentes.

$$\bar{x} = \frac{800}{100} = 8 \text{ horas semanales}$$

Para un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.64 \cdot \frac{1.7}{\sqrt{100}} = 0.2788 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (8 - 0.2788, 8 + 0.2788) = (7.7212, 8.2788)$$

Por lo tanto, tenemos una confianza del 90% de que el uso medio semanal de las NT está entre 7.72 y 8.28 horas.

- b) De los 100 adolescentes de la muestra hay $20 + 20 + 15 + 10 + 10 = 75$ adolescentes que las usaron más de 6 horas. La proporción de adolescentes de la muestra que utilizaron las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana es $p = \frac{75}{100} = 0.75$.

El valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90% es $z_{\alpha/2} = 1.64$.

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{100}} \simeq 0.071 \text{ horas}$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.071, 0.75 + 0.071) = (0.679, 0.821)$$

Tenemos una confianza del 90% de que el porcentaje de adolescentes que dedican más de seis horas semanales a las NT está entre el 67.9% y el 82.1%.

EBAU Julio 2018



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

2. La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}, \text{ con } 0 \leq x \leq 30.$$

donde x representa el tiempo (en días)

- a) [1,5 puntos] Determina el periodo de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?
b) [1,5 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 30]$.

3. En un determinado banco, el 90% de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40% tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa a ser del 100%. Si se elige un cliente al azar:

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?
b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?

4. Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95% de confianza.
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

- a) [2 puntos] ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?
- b) [1 punto] El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

2. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1) = 0$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

3. En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40% de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además, se sabe que el 5% de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.

- a) [1 punto] ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?
- b) [1 punto] Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

4. Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen dicha enfermedad.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a) Obtenemos el sistema pedido.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x + my \\ (-m-1)x + 3my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + my = 4 \\ (-m-1)x + 3my = 12 \end{cases}$$

b) Intentamos resolver el sistema.

$$\begin{cases} -x + my = 4 \\ (-m-1)x + 3my = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} my - 4 = x \\ (-m-1)(my - 4) + 3my = 12 \end{cases} \Rightarrow (-m-1)(my - 4) + 3my = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m^2y + 4m - my + 4 + 3my = 12 \Rightarrow -m^2y - my + 3my = 8 - 4m \Rightarrow (-m^2 + 2m)y = 8 - 4m$$

Se puede seguir resolviendo el sistema si $-m^2 + 2m \neq 0$. Averiguamos cuando se anula.

$$-m^2 + 2m = 0 \Rightarrow -m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de 0 y de 2 podemos seguir resolviendo el sistema y la solución sería única.

Para $m = 0$ vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -x = 4 \\ (-1)x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 4 \\ -x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -12 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución para $m = 0$.

Para $m = 2$ vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ (-2-1)x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow -x + 2y = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2y - 4}$$

El sistema tiene infinitas soluciones para $m = 2$.

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema tiene solución, siendo única. Para $m = 2$ el sistema tiene solución, pero no es única. Para $m = 0$ el sistema no tiene solución.

2. La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}, \text{ con } 0 \leq x \leq 30.$$

donde x representa el tiempo (en días)

a) [1,5 puntos] Determina el periodo de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?

b) [1,5 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 30]$.

a) Utilizamos la derivada para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 90x + 243}{100}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 90x + 243}{100} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 243 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 324}}{2} = \frac{30 \pm 24}{2} = \begin{cases} \frac{30+24}{2} = 27 = x \\ \frac{30-24}{2} = 3 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

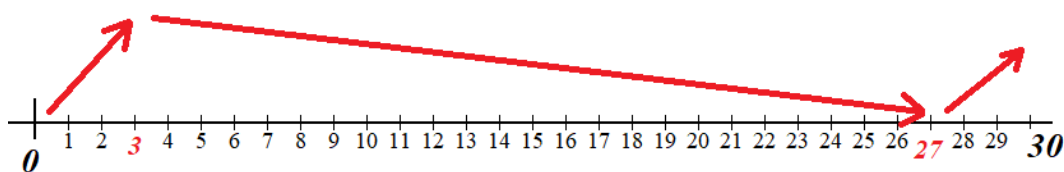
- En el intervalo $[0, 3)$ tomo $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 90 \cdot 1 + 243}{100} = 1.56 > 0$. La función crece en $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 27)$ tomo $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{3 \cdot 10^2 - 90 \cdot 10 + 243}{100} = -3.57 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 27).$$

- En el intervalo $(27, 30]$ tomo $x=30$ y la derivada vale

$$f'(30) = \frac{3 \cdot 30^2 - 90 \cdot 30 + 243}{100} = 2.43 > 0. \text{ La función crece en } (27, 30].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La cotización descendió desde el tercer al vigésimo séptimo día.

Valoramos la cotización en los puntos críticos y en los extremos del intervalo para poder decidir cuando se producen las cotizaciones máxima y mínima.

$$f(0) = \frac{0^3 - 45 \cdot 0^2 + 243 \cdot 0 + 30000}{100} = 300$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 45 \cdot 3^2 + 243 \cdot 3 + 30000}{100} = 303.51 \text{ ¡Máximo!}$$

$$f(27) = \frac{27^3 - 45 \cdot 27^2 + 243 \cdot 27 + 30000}{100} = 234.39 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$f(30) = \frac{30^3 - 45 \cdot 30^2 + 243 \cdot 30 + 30000}{100} = 237.9$$

La cotización fue máxima el tercer día. La cotización máxima fue de 303.51 €.

La cotización fue mínima el día 27. La cotización mínima fue de 234.39 €.

b) La función $f(x)$ es una función polinómica por lo que es continua en todo su dominio $[0, 30]$.

Hemos visto que la función crece en $[0, 3) \cup (27, 30]$ y decrece en $(3, 27)$.

La función tiene un máximo absoluto en $x = 3$ y un mínimo absoluto en $x = 27$.

Igualemos a cero la segunda derivada en busca de su punto de inflexión.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 90x + 243}{100} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x - 90}{100}$$

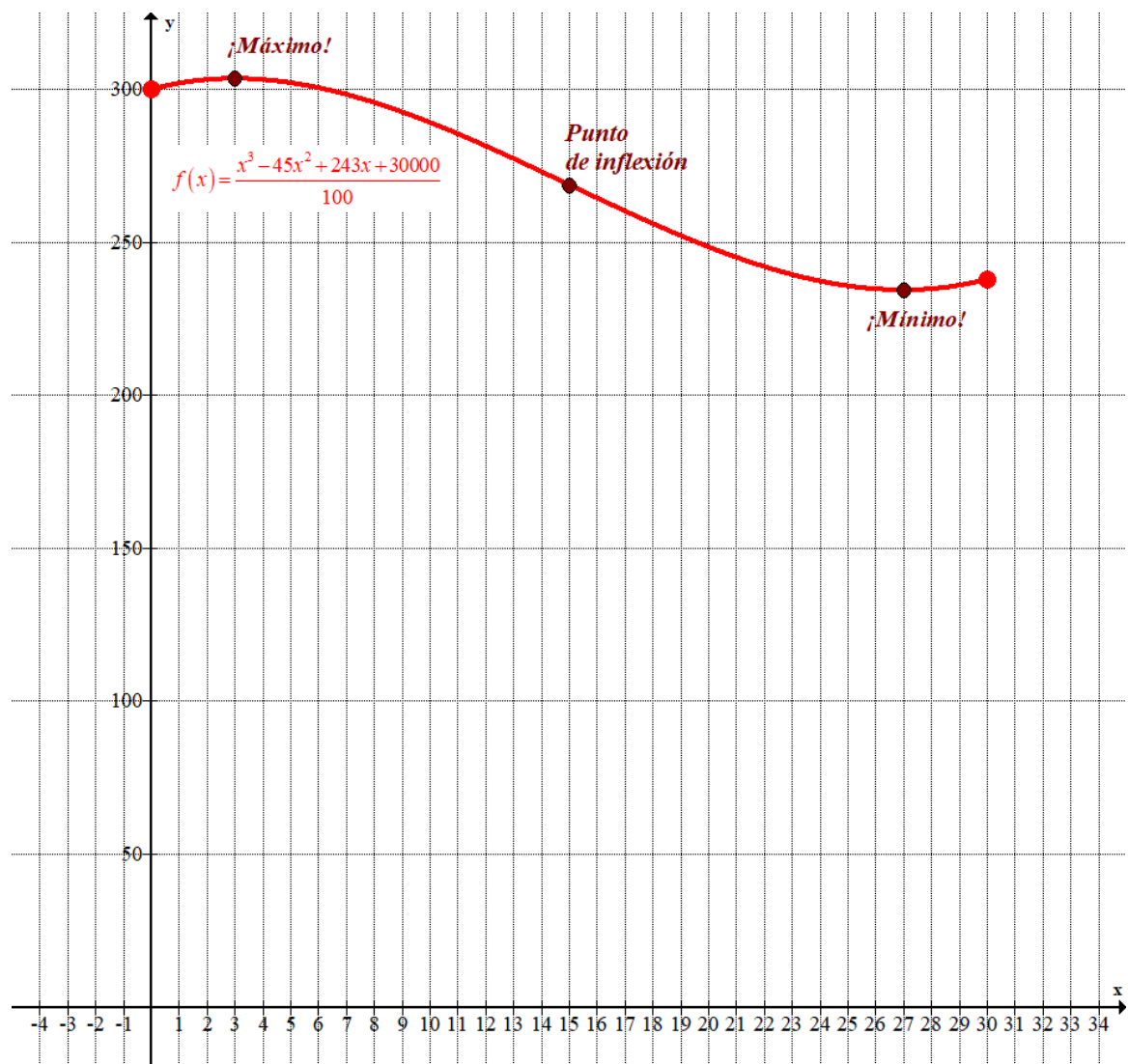
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x - 90}{100} = 0 \Rightarrow 6x - 90 = 0 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{6} = 15$$

$$f'''(x) = \frac{6}{100} \Rightarrow f'''(15) = \frac{6}{100} \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 15$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}$
0	300
3	303.51
15	268.95
27	234.39
30	237.9



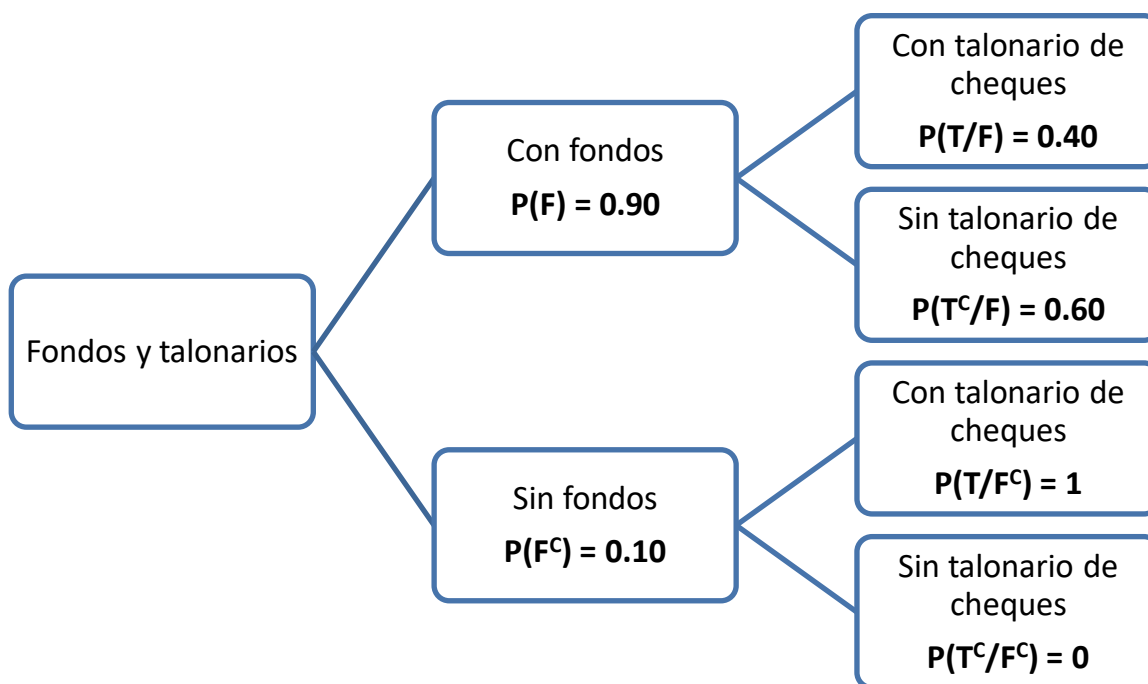
3. En un determinado banco, el 90% de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40% tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa a ser del 100%. Si se elige un cliente al azar:

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite organizar toda la información proporcionada y obtener la información que viene implícita en el enunciado.

Llamamos F a “el cliente tiene fondos” y T a “el cliente tiene talonario de cheques”.



a) Nos piden calcular $P(F \cap T)$.

$$P(F \cap T) = P(F)P(T/F) = 0.9 \cdot 0.4 = \boxed{0.36}$$

b) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(F)P(T/F) + P(F^c)P(T/F^c) = 0.9 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 1 = \boxed{0.46}$$

4. Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95% de confianza.

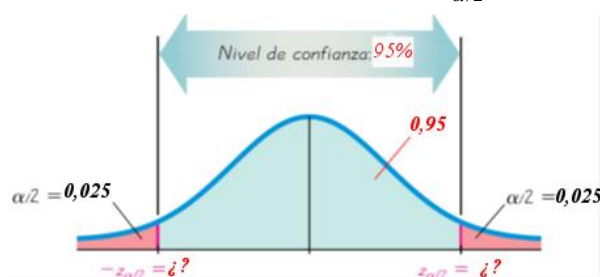
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = altura media de los hombres de un país en centímetros. $X = N(\mu, 4)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 180.3$ centímetros y el tamaño de la muestra es $n = 1600$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1600}} = 0.196 \text{ centímetros}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (180.3 - 0.196, 180.3 + 0.196) = (180.104, 180.496)$$

Tenemos una confianza del 95% de que la estatura media de los hombres de ese país está entre 180,104 y 180,496 cm.

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

El error del intervalo de confianza debe ser 1 cm por lo que:

$$Error = 1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 4 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 4)^2 = 61.4656$$

A partir de una muestra de 62 hombres el error del intervalo de confianza es menor de 1 cm.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

a) [2 puntos] ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?

b) [1 punto] El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

a) Denominamos por “x” e “y” al número de lápices del tipo A y del tipo B, respectivamente. Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“El número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A” $\rightarrow y \leq x + 500$.

“Entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades” $\rightarrow x + y \leq 2000$; $y \geq 500$.

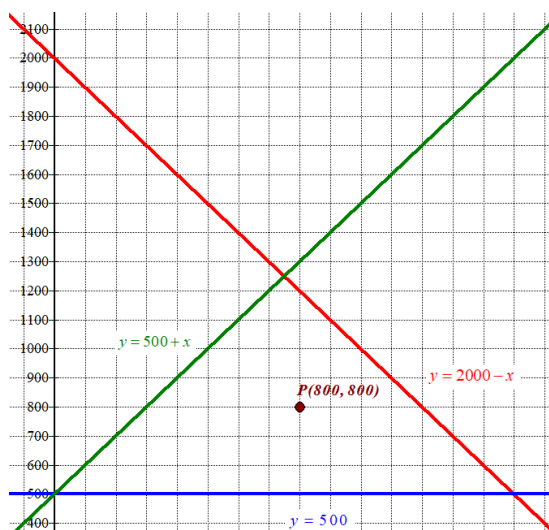
Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0$ $y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x + 500 \\ x + y \leq 2000 \\ y \geq 500 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq x + 500 \\ y \leq 2000 - x \\ y \geq 500 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

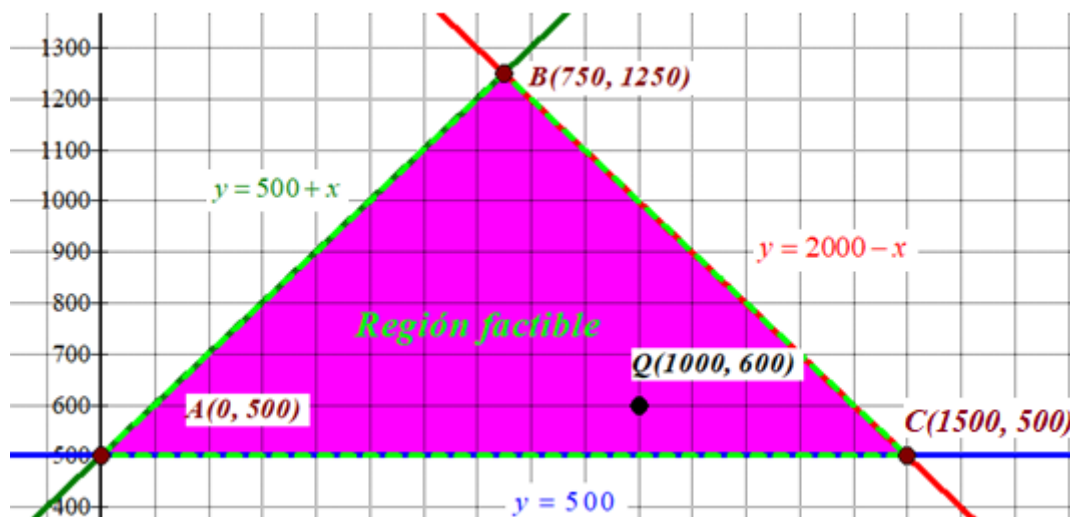
$y = 500 + x$		$y = 2000 - x$		$y = 500$		$x \geq 0 \quad y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 500 + x$	x	$y = 2000 - x$	x	$y = 500$	
0	500	0	2000	0	500	
100	600	2000	0	100	500	



Probamos si el punto P(800, 800) cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 800 \leq 800 + 500 \\ 800 \leq 2000 - 800 \\ 800 \geq 500 \\ 800 \geq 0 \quad 800 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la región del plano a la que pertenece el punto P. Es la zona rayada del dibujo.



Debemos determinar las coordenadas del punto B resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2000 - x \\ y = 500 + x \end{array} \right\} \Rightarrow 2000 - x = 500 + x \Rightarrow 1500 = 2x \Rightarrow x = \frac{1500}{2} = 750 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2000 - 750 = 1250 \Rightarrow \boxed{B(750, 1250)}$$

El punto B tiene coordenadas B(750, 1250).

Observamos que el punto Q(1000, 600) pertenece a la región factible y 1000 lápices del tipo A y 600 del tipo B cumple con las restricciones del problema.

- b) La función coste de fabricación de los lápices viene expresada como $C(x, y) = 0.25x + 0.2y$
 Valoramos el coste en cada uno de los vértices de la región factible en busca del mínimo.

$$A(0, 500) \rightarrow C(0, 500) = 0.25 \cdot 0 + 0.2 \cdot 500 = 100 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(750, 1250) \rightarrow C(750, 1250) = 0.25 \cdot 750 + 0.2 \cdot 1250 = 437.5$$

$$C(1500, 500) \rightarrow C(1500, 500) = 0.25 \cdot 1500 + 0.2 \cdot 500 = 475$$

El mínimo coste que se puede conseguir es de 100 € con la fabricación de ningún lápiz del tipo A y 500 lápices del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1) = 0$.
 b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 4x^3 - 36x dx = x^4 - 18x^2 + K$$

Obtenemos el valor de K sabiendo que $F(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = x^4 - 18x^2 + K \\ F(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^4 - 18 + K = 0 \Rightarrow K = 17$$

La primitiva F de f verificando $F(1) = 0$ tiene la expresión $F(x) = x^4 - 18x^2 + 17$.

b) La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio.

La función no tiene asíntotas.

Hallamos los puntos de corte con el eje OX .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4x^3 - 36x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{array} \right.$$

Los puntos de corte son $A(-3,0)$, $B(0,0)$ y $C(3,0)$.

Hallamos los puntos de corte con el eje OY .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4x^3 - 36x \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow B(0,0)$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

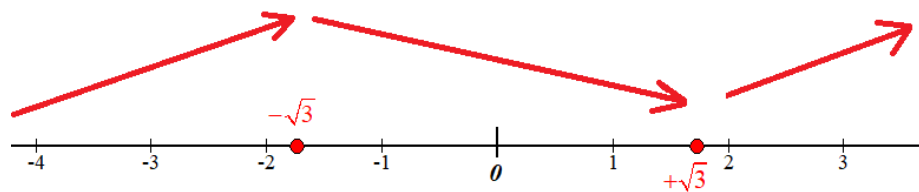
$$f(x) = 4x^3 - 36x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 36$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{12} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 12(-2)^2 - 36 = 12 > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$.
- En el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 12 \cdot 0^2 - 36 = -36 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.
- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12 \cdot 2^2 - 36 = 12 > 0$. La función crece en el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$. La función tiene un máximo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo relativo en $x = +\sqrt{3}$.

Obtenemos su punto de inflexión averiguando cuando se anula la segunda derivada.

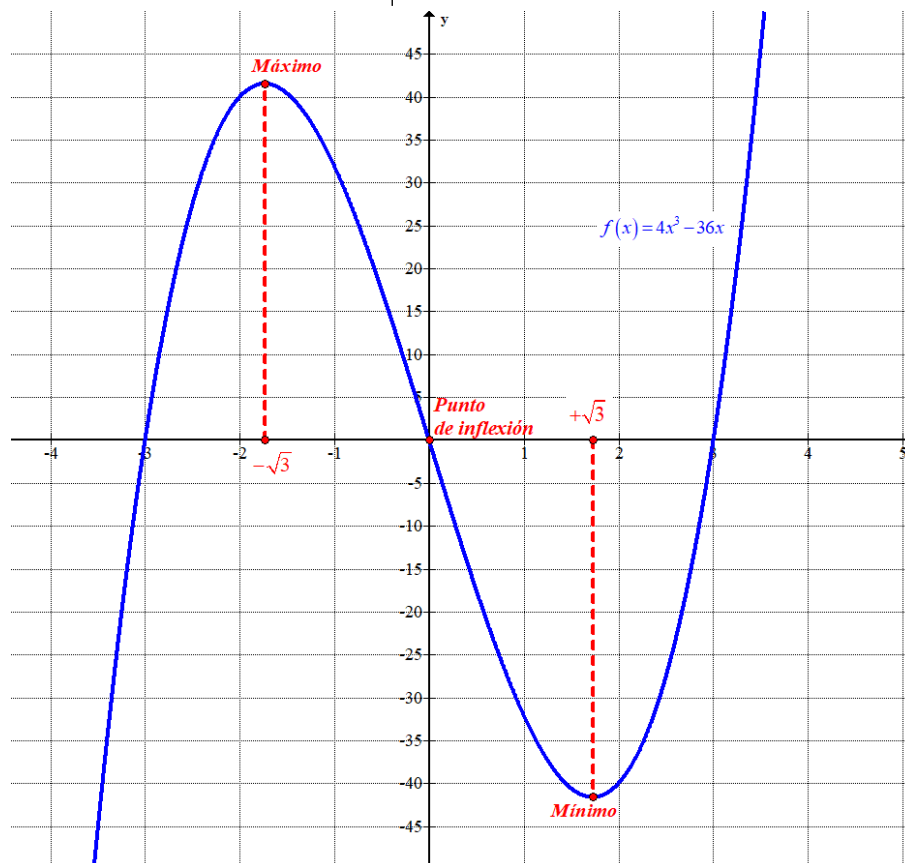
$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 36 \Rightarrow f''(x) = 24x \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$f'''(x) = 24 \Rightarrow f'''(0) = 24 \neq 0$$

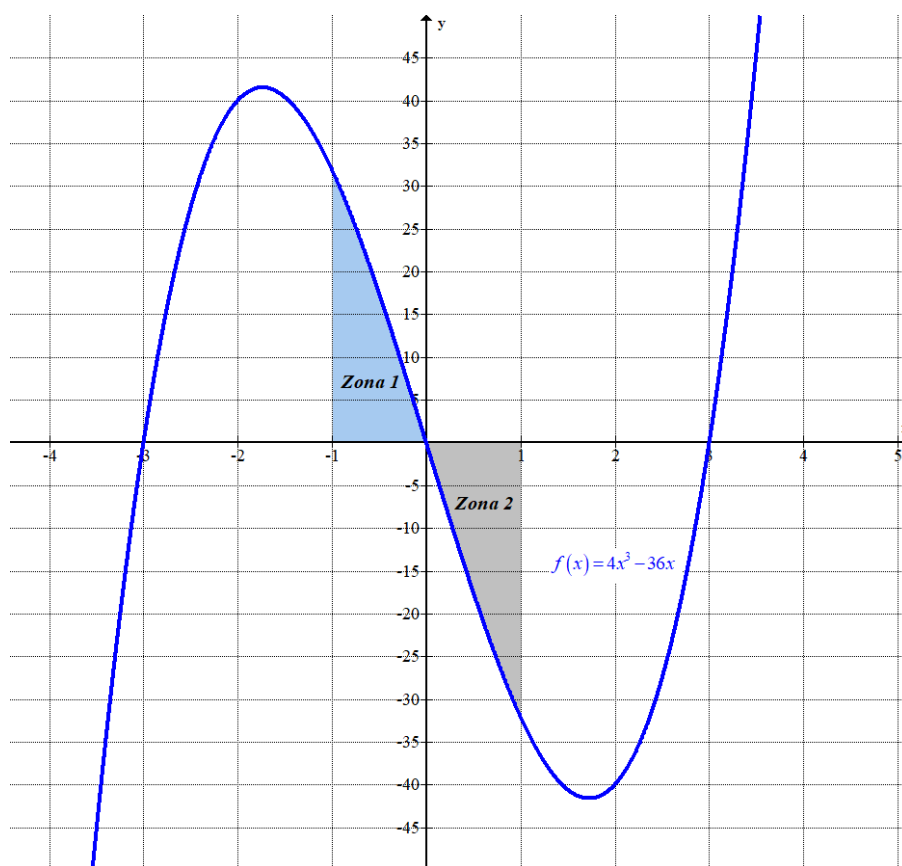
La función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = 4x^3 - 36x$
-2	40
$-\sqrt{3}$	41.57
0	0
$\sqrt{3}$	-41.57
2	-40



La región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ la coloreamos en el siguiente dibujo.



La región la dividimos en dos partes. Calculamos el área de cada trozo y el área total será la suma de las dos.

$$\text{Área 1} = \int_{-1}^0 4x^3 - 36x dx = \left[x^4 - 18x^2 \right]_{-1}^0 = \left[0^4 - 18 \cdot 0^2 \right] - \left[(-1)^4 - 18(-1)^2 \right] = \boxed{17u^2}$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_0^1 4x^3 - 36x dx \right| = \left| \left[x^4 - 18x^2 \right]_0^1 \right| = \left| \left[1^4 - 18 \cdot 1^2 \right] - \left[0^4 - 18 \cdot 0^2 \right] \right| = \boxed{17u^2}$$

Tienen el mismo valor pues la función es impar. El área de la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ tiene un valor de $17 + 17 = 34$ unidades cuadradas.

3. En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40% de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además, se sabe que el 5% de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.

- a) [1 punto] ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?
b) [1 punto] Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

Si el 40% de los chicos (10) tienen francés como asignatura optativa son $0.4 \cdot 10 = 4$ chicos los que tienen francés como optativa.

Si el 5% de la clase ($10 + 10 = 20$) son chicas que tienen francés como asignatura optativa entonces $0.05 \cdot 20 = 1$ chica tiene francés como optativa.

- a) En la clase hay 20 alumnos y 4 chicos más 1 chica tienen el francés como asignatura optativa, esto es un porcentaje de $\frac{4+1}{20} = 0.25 = 25\%$ de la clase.

- b) El grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa está compuesto por 5 personas. En ese grupo hay 1 chica y 4 chicos. Esto hace que el porcentaje de chicas sea $\frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$.

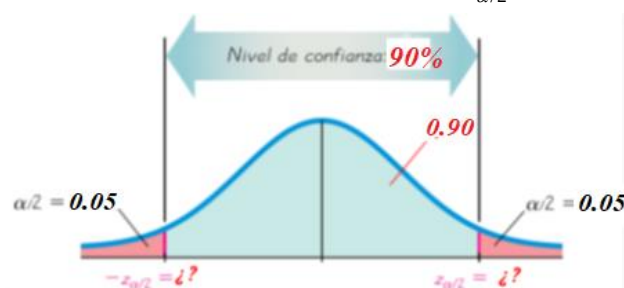
4. Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen dicha enfermedad.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

- a) El tamaño muestral es $n = 1000$ personas adultas y la proporción muestral es $p = \frac{100}{1000} = 0.1$.

Para un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{1000}} \approx 0.0156$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1 - 0.0156, 0.1 + 0.0156) = (0.0844, 0.1156)$$

Tenemos una confianza del 90% de que el porcentaje de personas con esa enfermedad está entre el 8.44% y el 11.56%.

- b) El error de estimación obtenido en el apartado anterior tiene un valor aproximado de 0.0156.

La fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. En esta fórmula el tamaño muestral aparece en el denominador de la fracción, por lo que si mantenemos el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral y **aumentamos** el tamaño muestral **disminuye** el error.

$$Error = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n}} \left\{ \begin{array}{l} n' > n \end{array} \right\} \Rightarrow Error' = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n'}} < 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n}} = Error$$

EBAU Junio 2018



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

2. El directivo de una empresa cobra cada mes un sueldo fijo de 4000 euros, más una comisión de 30 euros por cantidad de producto vendido, en toneladas. Además, si un mes las ventas superan las 200 toneladas, el directivo recibe un suplemento de 1000 euros.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el sueldo mensual del directivo en función de las toneladas vendidas x , obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 200$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa la función f para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$. Considera un mes en el que no se han superado las 200 toneladas de producto vendido, si el directivo ha cobrado el sueldo máximo posible, ¿cuántas ventas ha habido? ¿Y si el directivo ha cobrado el sueldo mínimo posible?

3. En una empresa trabajan 10 hombres y 20 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen titulación superior. Si se sabe que un día asisten al trabajo 29 personas, encuentra la probabilidad de que la persona que falta sea:

- a) [1 punto] Hombre y tenga titulación superior.
- b) [1 punto] Hombre o tenga titulación superior.

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,03 y un nivel de confianza del 95%?

- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 550 ministerios de distintos países realizada en enero de 2017 se obtuvo que solo 99 de los cargos ministeriales estaban ocupados por mujeres. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una pintura se comercializa en dos colores A y B que se obtienen a partir de los tres colores primarios: rojo, azul y amarillo. Para obtener un bote de color A se necesitan 3 unidades de rojo y 2 unidades de azul. Para obtener un bote de color B se necesitan 5 unidades de rojo y 1 unidad de amarillo. Un día concreto, la empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo.

- a) [2 puntos] ¿Cuántos botes de color A y cuántos de color B puede obtener ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían obtener 2 botes de cada color?
- b) [1 punto] Si el beneficio obtenido con cada bote de color A es de 100 euros y con cada bote de color B es de 200 euros y se supone que vende todo lo que fabrica, ¿cuántos botes de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de botes fabricados?

2. Dada la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(4) = 0$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$.

3. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 10% son economistas, no habiendo empleados con dos titulaciones. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 80% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y los no economistas solamente el 10% ocupa un puesto directivo.

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea directivo?
- b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar entre los directivos sea ingeniero?

4. Un grupo de psicólogos desea conocer el comportamiento de los cocientes intelectuales de un colectivo de individuos con cierta patología común. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 400 de ellos, obteniendo que la suma de los cocientes intelectuales de estas 400 personas es 36690. Se supone además que el cociente intelectual sigue una distribución normal con desviación típica 2,6.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de este colectivo, al 99% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero cociente intelectual medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,8 y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

a) Llamamos “ x ” e “ y ” al precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.

La mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros $\rightarrow 6x + 3y = 12$

La mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros $\rightarrow 6x + my = 13.6$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ 6x + my = 13.6 \end{array} \right\}$$

b) Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ 6x + my = 13.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 6x + my = 13.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 6 - 2x \\ 6x + my = 13.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x + m(6 - 2x) = 13.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 6m - 2mx = 13.6 \Rightarrow (6 - 2m)x = 13.6 - 6m \Rightarrow (3 - m)x = 6.8 - 3m$$

Para poder resolver el sistema debe ser $3 - m$ distinto de cero. Esto ocurre cuando m es distinto de 3.

Se nos plantean dos situaciones diferentes.

Si $3 - m \neq 0$ podemos resolver el sistema y tendrá solución única.

Si $3 - m = 0 \rightarrow m = 3$ entonces el sistema queda $\left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ 6x + 3y = 13.6 \end{array} \right\}$ que es un sistema sin solución

pues las dos ecuaciones tienen el primer miembro igual, pero el segundo es distinto.

El sistema tiene solución y es única para $m \neq 3$.

Si $m = 4$ el sistema tiene solución. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ \times(-1) \rightarrow 6x + 4y = 13.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ -6x - 4y = -13.6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -y = -1.6 \\ \hline y = 1.6 \end{array} \Rightarrow 6x + 3 \cdot 1.6 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 4.8 = 12 \Rightarrow 6x = 7.2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7.2}{6} = 1.2}$$

Si la mesa B ha pedido 4 tostadas el precio de un café es de 1.2 € y el de una tostada es 1.6 €.

2. El directivo de una empresa cobra cada mes un sueldo fijo de 4000 euros, más una comisión de 30 euros por cantidad de producto vendido, en toneladas. Además, si un mes las ventas superan las 200 toneladas, el directivo recibe un suplemento de 1000 euros.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el sueldo mensual del directivo en función de las toneladas vendidas x , obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 200$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa la función f para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$. Considera un mes en el que no se han superado las 200 toneladas de producto vendido, si el directivo ha cobrado el sueldo máximo posible, ¿cuántas ventas ha habido? ¿Y si el directivo ha cobrado el sueldo mínimo posible?

a) Obtenemos la expresión de la función $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 4000 + 30x & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ 4000 + 30x + 1000 & \text{si } x > 200 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4000 + 30x & \text{si } 0 \leq x \leq 200 \\ 5000 + 30x & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 200$.

$$\left. \begin{array}{l} f(200) = 4000 + 30 \cdot 200 = 10000 \\ \lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200^-} 4000 + 30x = 10000 \\ \lim_{x \rightarrow 200^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} 5000 + 30x = 11000 \end{array} \right\} \Rightarrow f(200) = \lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = 10000 \neq 11000 = \lim_{x \rightarrow 200^+} f(x)$$

Como los límites laterales no coinciden la función no es continua en $x = 200$.

b) El dominio de la función es $[0, +\infty)$.

La función es continua en $[0, 200) \cup (200, +\infty)$.

Es una función a trozos donde cada trozo es una recta.

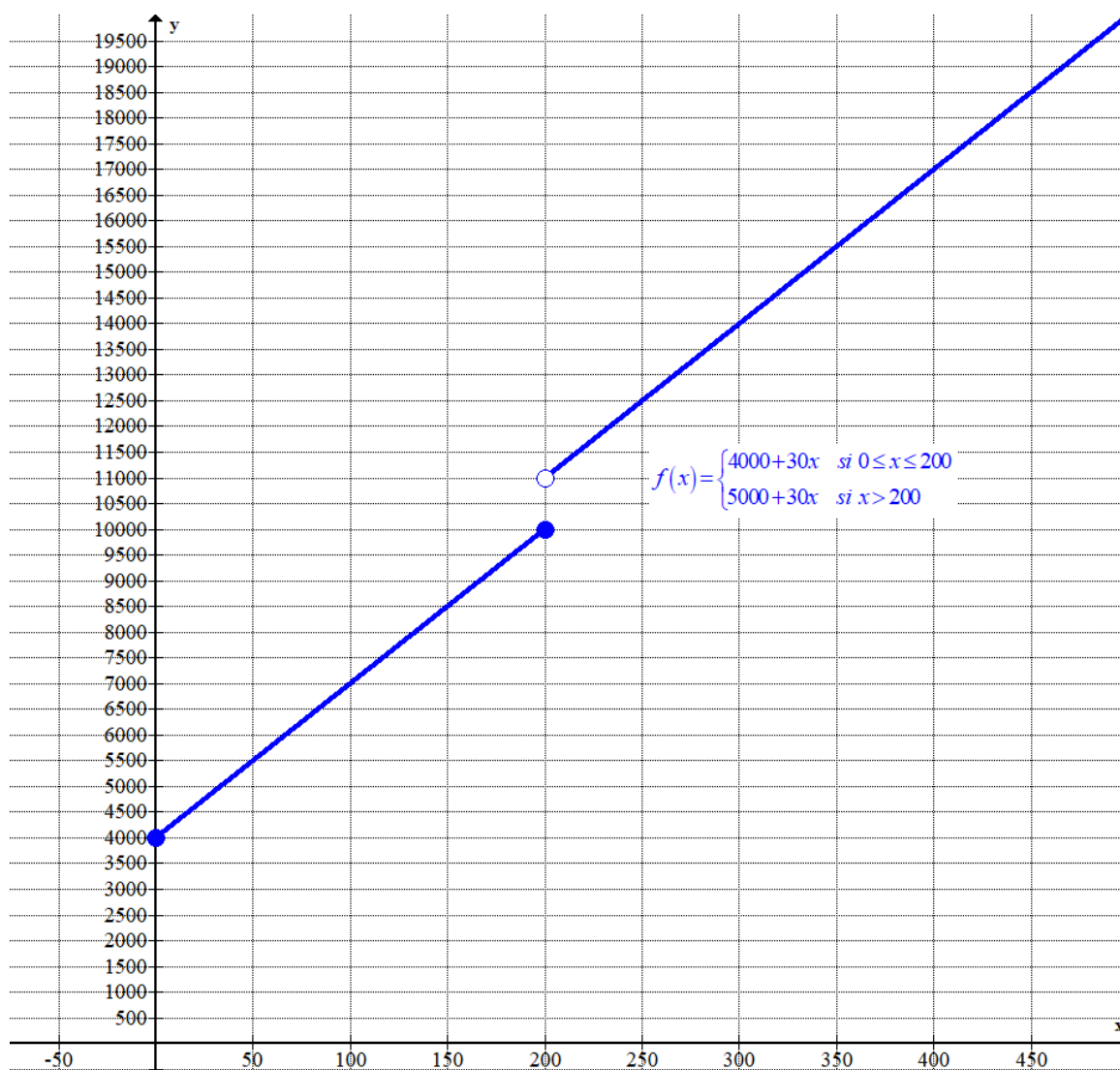
En el intervalo $[0, 200)$ la derivada de la función es $f'(x) = 30 > 0$ y por tanto es creciente y en

el intervalo $(200, +\infty)$ la derivada de la función es $f'(x) = 30 > 0$ y por tanto es creciente.

La función es creciente en todo su dominio.

Obtenemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$0 \leq x \leq 200$		$x > 200$	
x	$f(x) = 4000 + 30x$	x	$f(x) = 5000 + 30x$
0	4000	200	11000 <i>No incluido</i>
200	10000	300	14000



- 3.** En una empresa trabajan 10 hombres y 20 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen titulación superior. Si se sabe que un día asisten al trabajo 29 personas, encuentra la probabilidad de que la persona que falta sea:
- a) [**1 punto**] Hombre y tenga titulación superior.
- b) [**1 punto**] Hombre o tenga titulación superior.

En dicha empresa la mitad de los hombres (10) y la mitad de las mujeres (20) tienen titulación superior, por lo que hay 5 hombres y 10 mujeres con titulación superior.

- a) Hay 30 trabajadores y de ellos 5 son hombres con titulación superior. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que la persona que falta sea hombre con titulación superior es

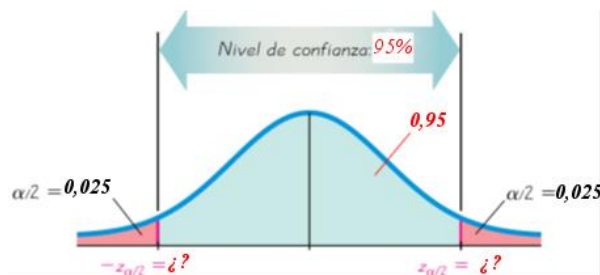
$$\frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0.1667.$$

- b) Hay 30 trabajadores y de ellos 10 son hombres y 10 son mujeres con titulación superior. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que la persona que falta sea hombre o trabajador con titulación superior es $\frac{10+10}{30} = \frac{2}{3} \approx 0.6667.$

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,03 y un nivel de confianza del 95%?
- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 550 ministerios de distintos países realizada en enero de 2017 se obtuvo que solo 99 de los cargos ministeriales estaban ocupados por mujeres. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo.
- (Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) El valor de la proporción muestral no es conocido. Se considera el valor que maximiza la desviación típica, es decir, $p = 0.5$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Igualemos el error a 0.03 y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.03}{1.96} \right)^2} \approx 1.067.11 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo muestral necesario para que se cumple lo pedido es de 1068 ministerios.

b) El tamaño muestral es $n = 550$. La proporción muestral es $p = \frac{99}{550} = 0.18$.

Para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$ es 1.96.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.18 \cdot 0.82}{550}} \approx 0.032$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.18 - 0.032, 0.18 + 0.032) = (0.148, 0.212)$$

Tenemos una confianza del 95% de que el porcentaje de mujeres que ocupan cargos ministeriales está entre el 14.8% y el 21.2%.

OPCIÓN B

1. Una pintura se comercializa en dos colores A y B que se obtienen a partir de los tres colores primarios: rojo, azul y amarillo. Para obtener un bote de color A se necesitan 3 unidades de rojo y 2 unidades de azul. Para obtener un bote de color B se necesitan 5 unidades de rojo y 1 unidad de amarillo. Un día concreto, la empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo.

a) [2 puntos] ¿Cuántos botes de color A y cuántos de color B puede obtener ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían obtener 2 botes de cada color?

b) [1 punto] Si el beneficio obtenido con cada bote de color A es de 100 euros y con cada bote de color B es de 200 euros y se supone que vende todo lo que fabrica, ¿cuántos botes de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de botes fabricados?

a) Denominamos por “ x ” e “ y ” al número de botes de pintura del tipo A y del tipo B que se fabrican cierto día, respectivamente. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Rojo	Azul	Amarillo
Nº botes A (x)	$3x$	$2x$	
Nº botes B (y)	$5y$		y
Totales	$3x + 5y$	$2x$	y

Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“La empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo”
 $\rightarrow 3x + 5y \leq 45; 2x \leq 20; y \leq 6$.

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 45 \\ 2x \leq 20 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 45 \\ x \leq 10 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$3x + 5y = 45$$

$$x = 10$$

$$y = 6$$

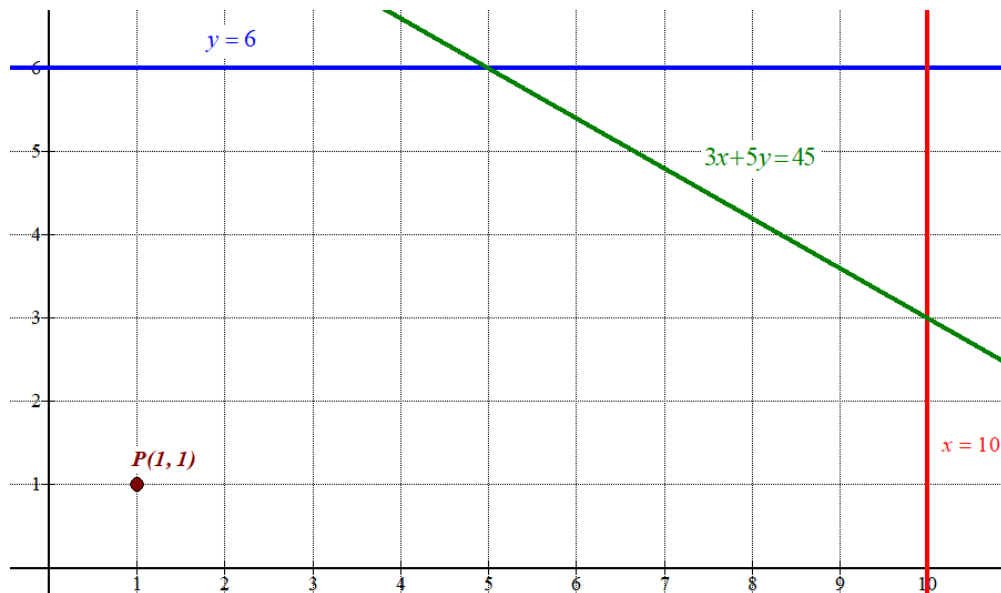
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

x	$y = \frac{45-3x}{5}$
5	6
10	3

$x = 10$	y
10	0
10	3

x	$y = 6$
0	6
5	6

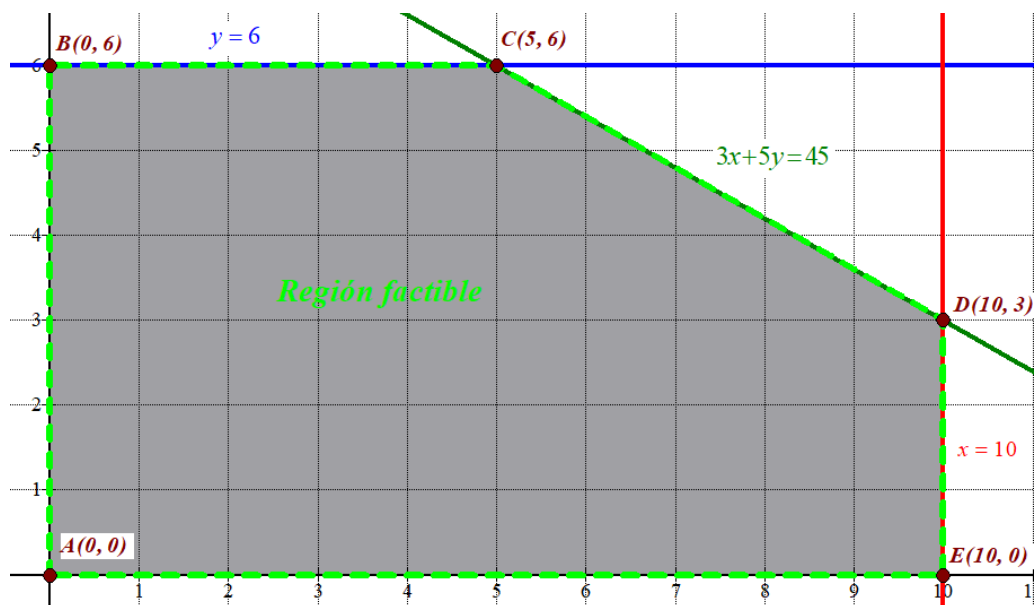
Primer
cuadrante



Probamos si el punto $P(1, 1)$ cumple todos los condicionantes:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \leq 45 \\ 1 \leq 10 \\ 1 \leq 6 \\ 1 \geq 0 \quad 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la región del plano a la que pertenece el punto P. Es la zona rayada del dibujo.



Sí podrían fabricarse 2 unidades de cada tipo, puesto que el punto $(2,2)$ pertenece a la región factible como se observa en el dibujo

b) La función beneficio viene expresada como $B(x, y) = 100x + 200y$

Valoramos el beneficio en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 6) \rightarrow B(0,6) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 6 = 1200$$

$$C(5, 6) \rightarrow B(5, 6) = 100 \cdot 5 + 200 \cdot 6 = 1700 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(10, 3) \rightarrow B(10, 3) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 3 = 1600$$

$$E(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 0 = 1000$$

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1700 € con la fabricación de 5 botes de pintura del tipo A y 6 botes del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(4) = 0$.

b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$.

a) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{10}{(x+1)^2} dx = 10 \int (x+1)^{-2} dx = 10 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-10}{x+1} + K$$

Determinamos el valor de K utilizando que $F(4) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-10}{x+1} + K \\ F(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{-10}{4+1} + K \Rightarrow \boxed{K=2}$$

La primitiva de f buscada es $F(x) = \frac{-10}{x+1} + 2$.

b) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$. Además, es continua en su dominio.

La función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$ toma siempre valores positivos.

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{(x+1)^2} = \frac{10}{\infty} = 0$, la función tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.

Utilizamos la derivada de la función para hallar sus puntos críticos y determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = \frac{10}{(x+1)^2} = 10(x+1)^{-2} \Rightarrow f'(x) = (-2) \cdot 10(x+1)^{-3} = \frac{-20}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-20}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -20 = 0 \text{ Imposible}$$

La función no tiene puntos críticos por lo que no tiene máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor excluido del dominio: $x = -1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$. La derivada vale $f'(-2) = \frac{-20}{(-2+1)^3} = 20 > 0$.

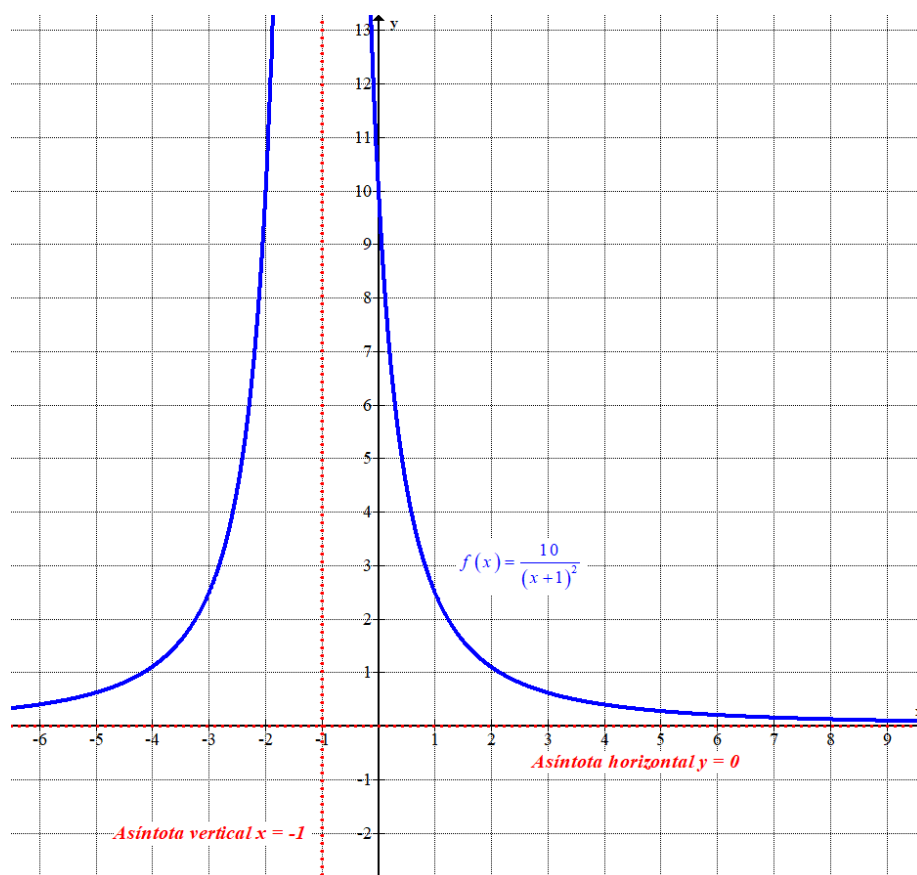
La función crece en $(-\infty, -1)$.

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$. La derivada vale $f'(0) = \frac{-20}{(0+1)^3} = -20 < 0$. La

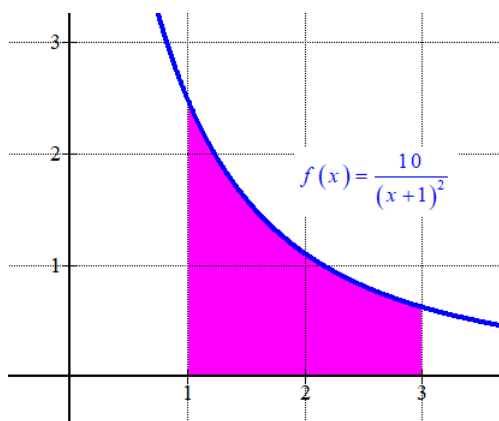
función decrece en $(-1, +\infty)$.

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$
-5	0.625
-2	10
0	10
3	0.625



Coloreamos la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno podemos afirmar que el valor del área está entre 2 y 3 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área} = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{10}{(x+1)^2} dx = \left[\frac{-10}{x+1} \right]_1^3 = \frac{-10}{3+1} - \frac{-10}{1+1} = -2.5 + 5 = \boxed{2.5u^2}$$

El área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$ tiene un valor de 2.5 unidades cuadradas.

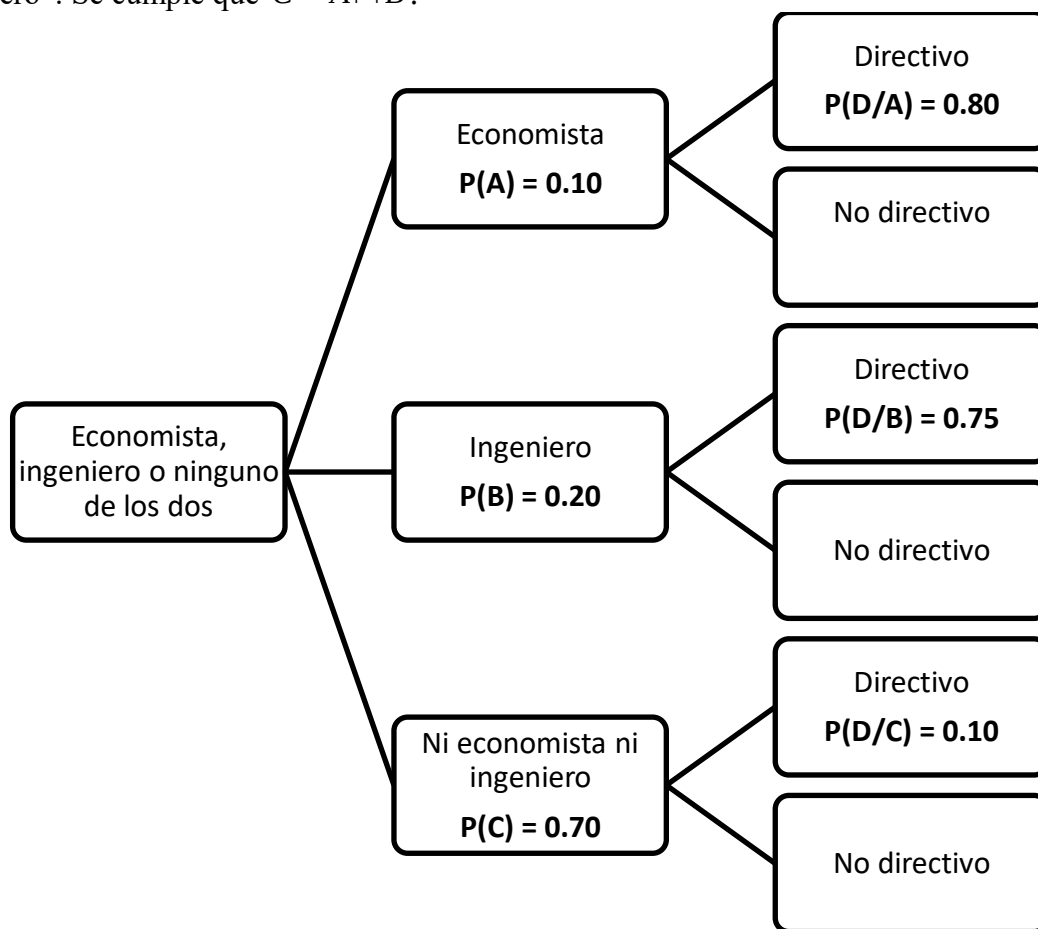
3. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 10% son economistas, no habiendo empleados con dos titulaciones. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 80% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y los no economistas solamente el 10% ocupa un puesto directivo.

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea directivo?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar entre los directivos sea ingeniero?

Si el 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 10% son economistas, no habiendo empleados con dos titulaciones el restante 70 % de los empleados de la empresa no son ni economistas ni ingenieros.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema. Llamamos A a “ser economista”, B a “ser ingeniero” y D a “ser directivo”. Por simplificar la escritura llamamos C a “no ser ni economista ni ingeniero”. Se cumple que $C = \bar{A} \cap \bar{B}$.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.1 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.75 + 0.7 \cdot 0.1 = \boxed{0.3}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden obtener $P(B/D)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.75}{0.3} = \boxed{0.5}$$

4. Un grupo de psicólogos desea conocer el comportamiento de los cocientes intelectuales de un colectivo de individuos con cierta patología común. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 400 de ellos, obteniendo que la suma de los cocientes intelectuales de estas 400 personas es 36690. Se supone además que el cociente intelectual sigue una distribución normal con desviación típica 2,6.

a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de este colectivo, al 99% de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero cociente intelectual medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,8 y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = cociente intelectual de un individuo de un colectivo. $X = N(\mu, 2.6)$

a) La media muestral es $\bar{x} = \frac{36690}{400} = 91.725$ y el tamaño de la muestra es $n = 400$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{2.6}{\sqrt{400}} = 0.3354$$

El intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de este colectivo es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (91.725 - 0.3354, 91.725 + 0.3354) = (91.3896, 92.0604)$$

Tenemos una confianza del 99% de que cociente intelectual medio de este colectivo está entre 91.3896 y 92.0604.

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

El error del intervalo de confianza debe ser 0.8 por lo que:

$$Error = 0.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.8 \Rightarrow 2.58 \cdot \frac{2.6}{\sqrt{n}} = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.58 \cdot 2.6}{0.8} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2.58 \cdot 2.6}{0.8} \right)^2 = 70.308225$$

A partir de una muestra de 71 individuos el error del intervalo de confianza es menor de 0.8.

EBAU Julio 2017



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Una persona compró acciones de dos compañías A y B a un precio de 1 y m euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros y el número total de acciones compradas fue de 47 acciones.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada compañía.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Qué cantidad de acciones de la compañía B habría comprado si cada una costase a 2 euros?

2. El salario de un trabajador durante los primeros tres años en determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 1500 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1300 + 200x & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ -x^2 + 5.5x + 1693 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- a) [0,75 puntos] ¿Es continua para $x = 2$?
- b) [2,25 puntos] Estudia y representa la función f , ¿En qué momento el trabajador cobra más? ¿y menos?

3. En una fábrica el 40% de la producción es realizada por la línea A y el 60% restante por la línea B. De las piezas fabricadas por la línea A, el 5% son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la línea B solo el 2% son defectuosas.

- a) [1 punto] ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas de las producidas en dicha fábrica?
- b) [1 punto] Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la línea A?

4. En una muestra aleatoria de 250 personas en edad laboral de una determinada zona se encuentra que 35 de ellas están en paro.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas en paro en esa zona.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si disminuye el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda,

a) [2 puntos] ¿Cuántas unidades se podrían enviar desde cada almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) [1 punto] Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros por unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

2. Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 5 + 6x + 24x^2$. Se pide:

a) [0,75 puntos] Encontrar la función del coste total F , si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(2) = 90$.

b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

3. En una empresa se sabe que el 80% de sus trabajadores son de nacionalidad española y el resto no. También se sabe que el 30% de sus trabajadores son mujeres de nacionalidad española. Se elige una persona al azar de dicha empresa.

a) [1 punto] Si es de nacionalidad española, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y de nacionalidad española?

4. Se considera una muestra aleatoria de 81 personas del mismo rango de edad de la ciudad A para las que el rendimiento medio de un test conductual ha sido de 16,8 puntos. Se supone además que el rendimiento sigue una distribución normal con una desviación típica de 4,2 puntos.

a) [1 punto] Construir un intervalo de confianza para el rendimiento medio de las personas de ese rango de edad en esa ciudad, al 99% de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero rendimiento medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 puntos y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Una persona compró acciones de dos compañías A y B a un precio de 1 y m euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros y el número total de acciones compradas fue de 47 acciones.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada compañía.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Qué cantidad de acciones de la compañía B habría comprado si cada una costase a 2 euros?

a) A partir de la información del problema obtenemos las ecuaciones.

Una persona compró acciones de dos compañías A y B a un precio de 1 y m euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros $\rightarrow x + my = 90$.

El número total de acciones compradas fue de 47 acciones $\rightarrow x + y = 47$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + my = 90 \\ x + y = 47 \end{array} \right\}$$

b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + my = 90 \\ x + y = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + my = 90 \\ x = 47 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 47 - y + my = 90 \Rightarrow (m-1)y = 43$$

Podemos seguir resolviendo el sistema y obtener su solución si $m-1 \neq 0$.

Nos surgen dos situaciones distintas que analizamos por separado.

Si $m-1 \neq 0$ podemos despejar y obtener el valor de y . Podemos resolver el sistema y obtener la solución del problema (solución única).

Si $m-1 = 0$ no podemos terminar de resolver el sistema. Vemos como queda el sistema para $m = 1$

: $\left. \begin{array}{l} x + y = 90 \\ x + y = 47 \end{array} \right\}$. Este sistema no tiene solución pues son dos ecuaciones con el primer miembro igual pero el segundo distinto.

El sistema tiene solución para cualquier valor de m distinto de 1. Dicha solución es única.

Si $m = 2$ hemos visto que el sistema tiene solución. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 90 \\ x + y = 47 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 90 \\ x = 47 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 47 - y + 2y = 90 \Rightarrow \boxed{y = 43} \Rightarrow \boxed{x = 47 - 43 = 4}$$

Si las acciones de la compañía B costasen a 2 € habría comprado 43 acciones de dicha compañía.

2. El salario de un trabajador durante los primeros tres años en determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 1500 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1300 + 200x & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ -x^2 + 5.5x + 1693 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

a) [0,75 puntos] ¿Es continua para $x = 2$?

b) [2,25 puntos] Estudia y representa la función f , ¿En qué momento el trabajador cobra más? ¿y menos?

a) Estudiamos la continuidad de la función en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= -2^2 + 5.5 \cdot 2 + 1693 = 1700 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 1300 + 200x = 1300 + 200 \cdot 2 = 1700 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + 5.5x + 1693 = 1700 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1700$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Averiguamos si la función es continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1300 + 200 = 1500 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1500 = 1500 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1300 + 200x = 1500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1500$$

La función es continua en $x = 1$, por lo que es continua en todo su dominio $[0, 3]$.

La función $f(x)$ es una función a trozos.

En el intervalo $[0, 1)$ es una función constante: $f(x) = 1500$.

En el intervalo $(1, 2)$ es una función lineal: $f(x) = 1300 + 200x$. Su gráfica es una línea recta creciente pues su derivada es $f'(x) = 200 > 0$.

En el intervalo $(2, 3)$ es un trozo de parábola: $f(x) = -x^2 + 5.5x + 1693$. Es continua.

Estudiamos su monotonía usando la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2x + 5.5 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2x + 5.5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5.5}{2} = 2.75$$

$$(2, 2.75) \Rightarrow f'(2.5) = -2 \cdot 2.5 + 5.5 = 0.5 > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

$$(2.75, 3) \Rightarrow f'(2.8) = -2 \cdot 2.8 + 5.5 = -0.1 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$

La función es constante en $[0, 1)$, creciente en $(1, 2.75)$ y decreciente en $(2.75, 3]$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 2.75$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

si $0 \leq x < 1$

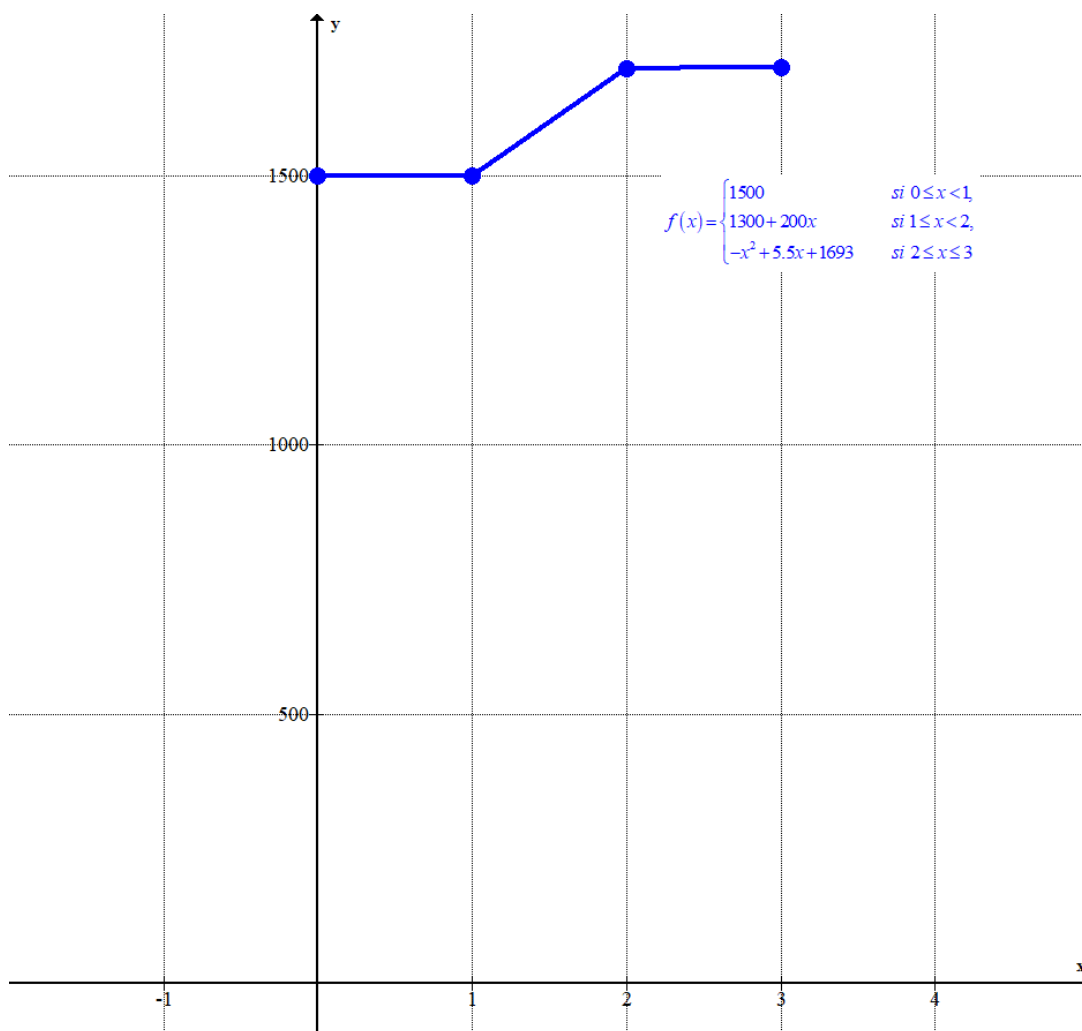
x	$f(x) = 1500$
0	1500
0.5	1500

si $1 \leq x < 2$

x	$f(x) = 1300 + 200x$
1	1500
1.5	1600

si $2 \leq x \leq 3$

x	$f(x) = -x^2 + 5.5x + 1693$
2	1700
2.75	1700.5625
3	1700.5



Es difícil de apreciar en la gráfica de la función, pero con el estudio previo y lo que observamos en la gráfica podemos decir que el trabajador cobra más a los 2.75 años. Y cobra menos durante el primer año.

El tercer trozo en la gráfica (entre 2 y 3) puede parecer una línea recta pero es una curva cóncava con máximo relativo y absoluto de la función en $x = 2.75$.

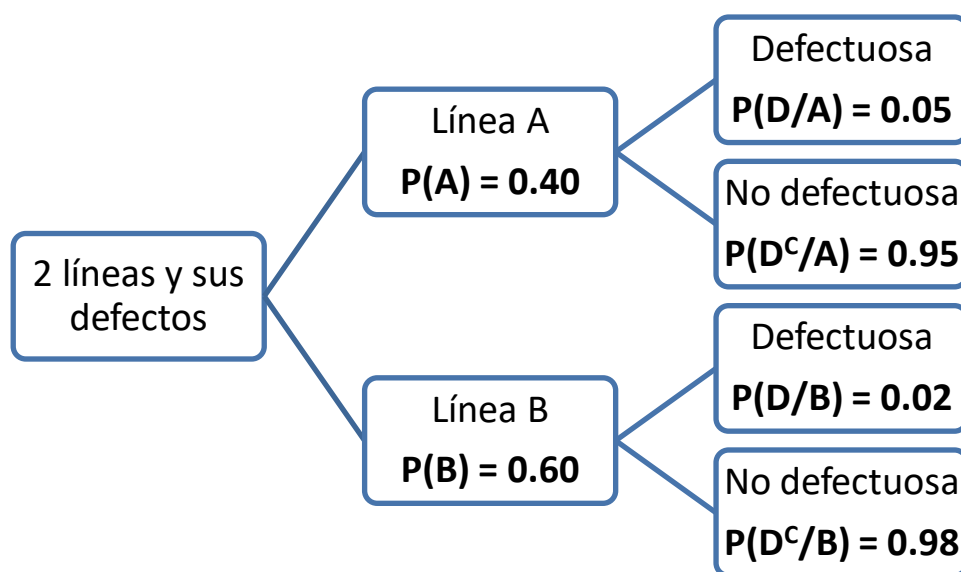
3. En una fábrica el 40% de la producción es realizada por la línea A y el 60% restante por la línea B. De las piezas fabricadas por la línea A, el 5% son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la línea B solo el 2% son defectuosas.

a) [1 punto] ¿Cuál es el porcentaje de piezas defectuosas de las producidas en dicha fábrica?

b) [1 punto] Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la línea A?

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite organizar toda la información proporcionada y obtener la información que viene implícita en el enunciado.

Llamamos A y B a “la pieza es producida por la línea A o B, respectivamente” y D a “la pieza es defectuosa”.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.4 \cdot 0.05 + 0.6 \cdot 0.02 = \boxed{0.032}$$

El porcentaje de piezas defectuosas de las producidas en dicha fábrica es del 3.2 %.

b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{0.032} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.032} = \boxed{0.625}$$

4. En una muestra aleatoria de 250 personas en edad laboral de una determinada zona se encuentra que 35 de ellas están en paro.

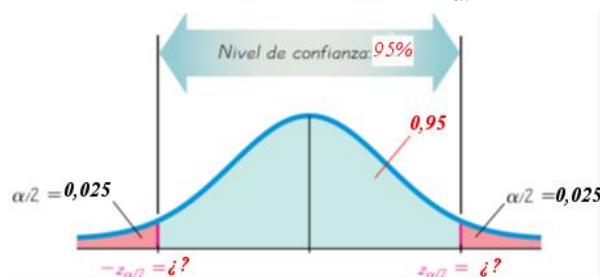
a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de personas en paro en esa zona.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si disminuye el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) El tamaño muestral es $n = 250$ personas y la proporción muestral es $p = \frac{35}{250} = 0.14$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{250}} \approx 0.043$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.14 - 0.043, 0.14 + 0.043) = (0.097, 0.183)$$

Tenemos una confianza del 95% de que el porcentaje de personas en paro está entre el 9.7% y el 18.3%.

b) El error de estimación obtenido en el apartado anterior tiene un valor aproximado de 0.043.

Si el nivel de confianza disminuyese, el valor de $z_{\alpha/2}$ también disminuiría y, por tanto, el error de estimación sería más pequeño.

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda,

a) [2 puntos] ¿Cuántas unidades se podrían enviar desde cada almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) [1 punto] Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros por unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

a) Denominamos por “x” e “y” al número de reproductores de DVD que llegan a tienda desde el almacén A o B, respectivamente.

Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B” $\rightarrow x \leq 750; y \leq 600$.

“Se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda” $\rightarrow x + y \geq 900$.

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$x = 750$

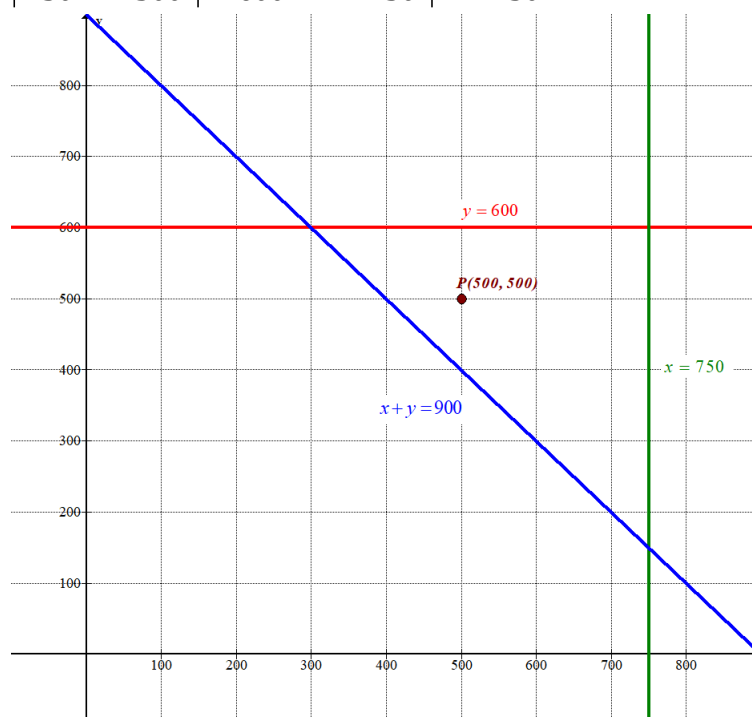
$y = 600$

$x + y = 900$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$x = 750$	y	x	$y = 600$	x	$y = 900 - x$
750	0	0	600	300	600
750	150	300	600	750	150

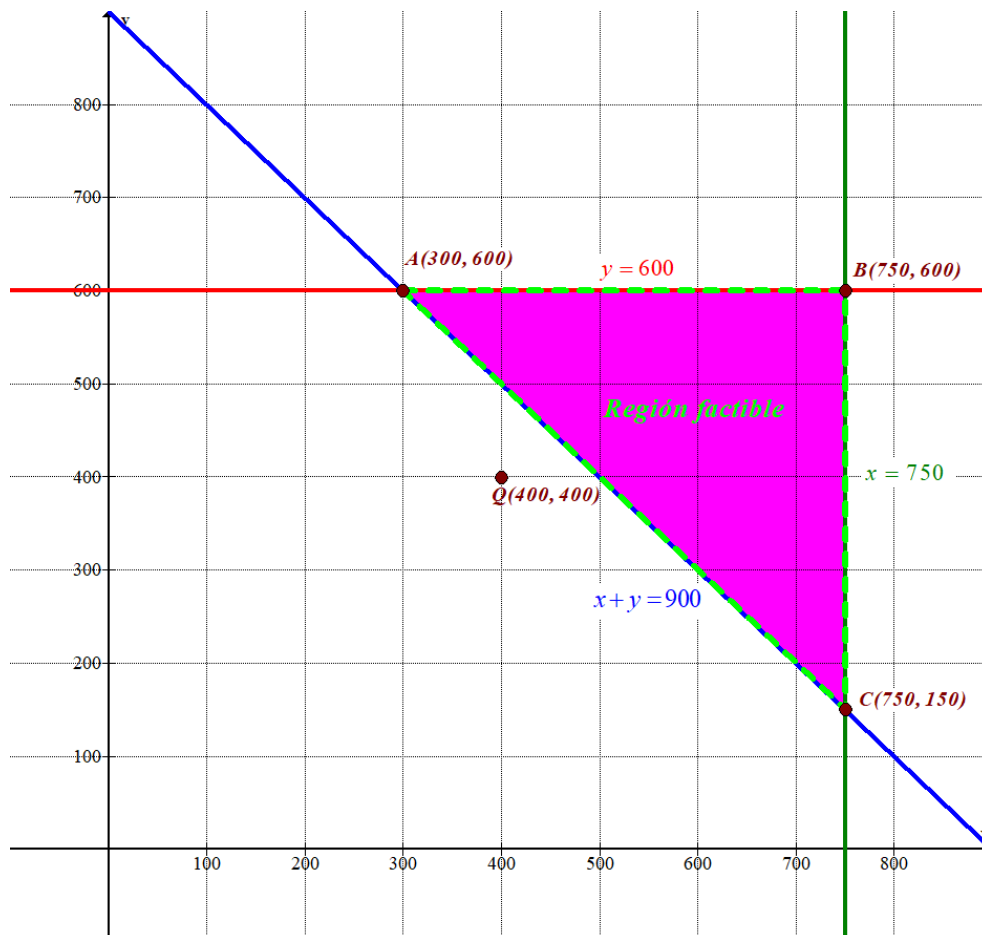
Primer
cuadrante



Comprobamos si el punto $P(500, 500)$ cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 500 \leq 750 \\ 500 \leq 600 \\ 500 + 500 \geq 900 \\ 500 \geq 0 \quad 500 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la región del plano a la que pertenece el punto P. Es la zona rayada del dibujo.



Observamos que el punto $Q(400, 400)$ no pertenece a la región factible.

Enviar 400 unidades desde cada almacén no cumple las restricciones. Evidentemente si mandas 400 unidades desde cada almacén no llegas a las 900 unidades que se deben tener en tienda como mínimo.

b) El coste de transporte de los reproductores viene expresado como $C(x, y) = 0.3x + 0.25y$.

Valoramos el coste en cada uno de los vértices de la región factible en busca del mínimo.

$$A(300, 600) \rightarrow C(300, 600) = 0.3 \cdot 300 + 0.25 \cdot 600 = 240 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(750, 600) \rightarrow C(750, 600) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 600 = 375$$

$$C(750, 150) \rightarrow C(750, 150) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 150 = 262.5$$

El mínimo coste que se puede conseguir es de 240 € con el transporte de 300 unidades desde el almacén A y 600 desde el almacén B..

2. Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 5 + 6x + 24x^2$. Se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la función del coste total F , si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(2) = 90$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 5 + 6x + 24x^2 dx = 5x + 3x^2 + 8x^3 + K$$

Obtenemos el valor de K sabiendo que $F(2) = 90$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 5x + 3x^2 + 8x^3 + K \\ F(2) = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^3 + K = 90 \Rightarrow 86 + K = 90 \Rightarrow K = 4$$

La primitiva F de f verificando $F(2) = 90$ tiene la expresión $F(x) = 5x + 3x^2 + 8x^3 + 4$.

b) La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio.

La función no tiene asíntotas.

Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 5 + 6x + 24x^2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 + 6x + 24x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 480}}{48} = \frac{-6 \pm \sqrt{-444}}{48}$$

La función no corta el eje OX.

Hallamos los puntos de corte con el eje OY.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 5 + 6x + 24x^2 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 5 \Rightarrow A(0, 5)$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(x) = 5 + 6x + 24x^2 \Rightarrow f'(x) = 6 + 48x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 + 48x = 0 \Rightarrow 48x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{48} = \frac{-1}{8}$$

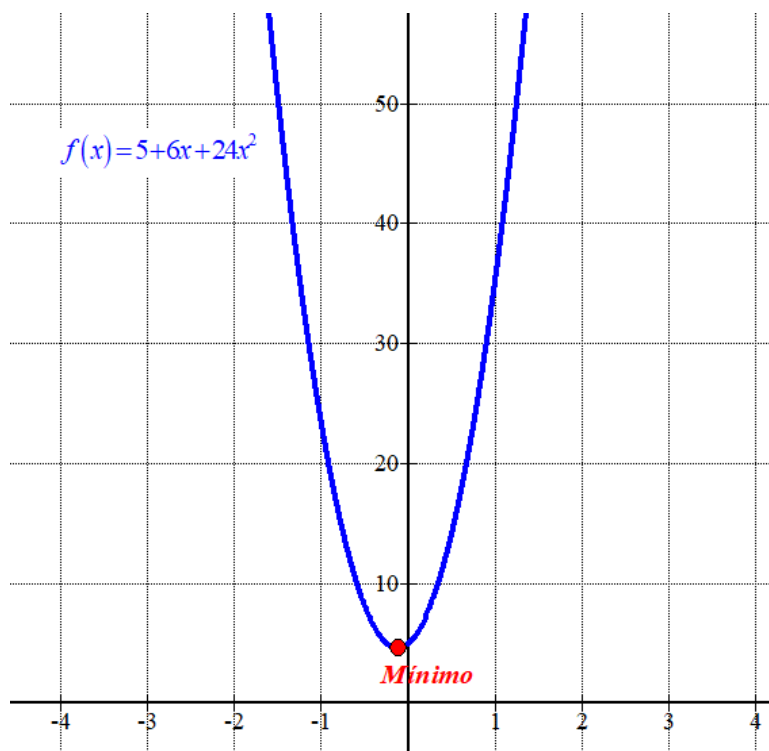
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto crítico.

- En el intervalo $(-\infty, -0.125)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 6 - 48 = -42 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-\infty, -0.125)$.
- En el intervalo $(-0.125, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 6 > 0$. La función crece en el intervalo $(-0.125, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -0.125)$ y crece en $(-0.125, +\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en $x = -0.125$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

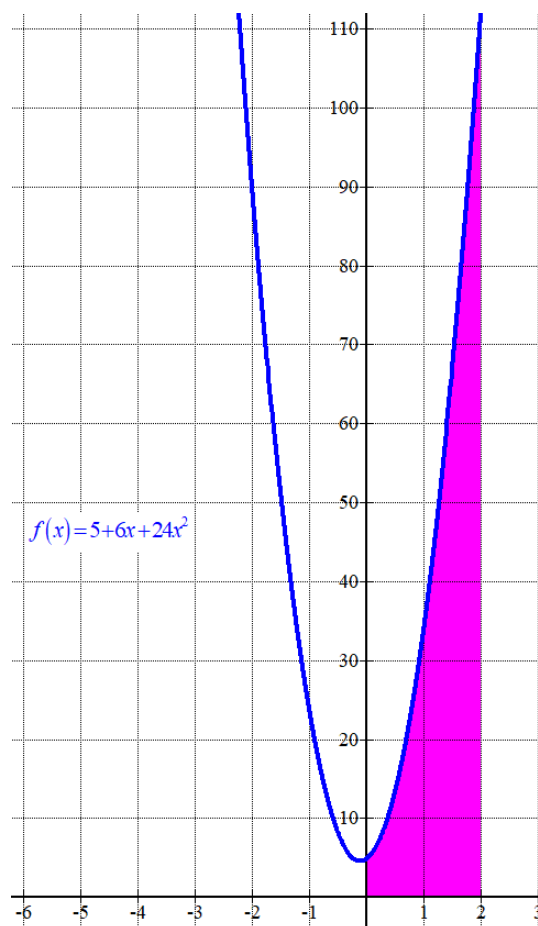
x	$f(x) = 5 + 6x + 24x^2$
-2	89
-1	23
-0.125	4.625
0	5
1	35



La región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=2$ la coloreamos en el siguiente dibujo. El valor de esta área lo obtenemos como la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 (5 + 6x + 24x^2) dx = \left[5x + 3x^2 + 8x^3 \right]_0^2 = \\ &= \left[5 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^3 \right] - \left[5 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0^3 \right] = \boxed{86u^2} \end{aligned}$$

El área de la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 86 unidades cuadradas.



3. En una empresa se sabe que el 80% de sus trabajadores son de nacionalidad española y el resto no. También se sabe que el 30% de sus trabajadores son mujeres de nacionalidad española. Se elige una persona al azar de dicha empresa.

a) [1 punto] Si es de nacionalidad española, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y de nacionalidad española?

Llamamos A al suceso “ser de nacionalidad española” y M a “ser mujer”.

Sabemos que $P(A) = 0.80$ y $P(A \cap M) = 0.3$.

a) Nos piden calcular $P(M / A)$. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(M / A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8} = \boxed{0.375}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{M} \cap A)$. Sabemos que $P(A) = P(M \cap A) + P(\overline{M} \cap A)$.

$$P(A) = P(M \cap A) + P(\overline{M} \cap A) \Rightarrow 0.8 = 0.3 + P(\overline{M} \cap A) \Rightarrow \boxed{P(\overline{M} \cap A) = 0.5}$$

4. Se considera una muestra aleatoria de 81 personas del mismo rango de edad de la ciudad A para las que el rendimiento medio de un test conductual ha sido de 16,8 puntos. Se supone además que el rendimiento sigue una distribución normal con una desviación típica de 4,2 puntos.

a) [1 punto] Construir un intervalo de confianza para el rendimiento medio de las personas de ese rango de edad en esa ciudad, al 99% de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero rendimiento medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 puntos y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = el rendimiento de un test conductual. $X = N(\mu, 4.2)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 16.8$ puntos y el tamaño de la muestra es $n = 81$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2.58 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{81}} = 1.204 \text{ puntos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16.8 - 1.204, 16.8 + 1.204) = (15.596, 18.004)$$

Tenemos una confianza del 99% de que el rendimiento medio de un test conductual está entre 15,6 y 18 puntos.

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

El error del intervalo de confianza debe ser 1.5 puntos por lo que:

$$Error = 1.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 2.58 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 2.58 \cdot 4.2 = 1.5\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.58 \cdot 4.2}{1.5} \right)^2 = 52.186$$

A partir de una muestra de 53 personas el error del intervalo de confianza es menor de 1.5 puntos.

EBAU Junio 2017



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3105 euros.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de libros de cada tipo vendidos.
- b) [2 puntos] Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente? Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar la función f . Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

3. El 30% de los estudiantes de un instituto practica fútbol. De entre los que practican fútbol, el 40% practica además baloncesto. De entre los que no practican fútbol, un cuarto practica baloncesto. Elegido un estudiante de ese instituto al azar,

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?
- b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que practique el baloncesto?

4. En una piscifactoría se desea estimar el porcentaje de peces pequeños. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se encuentra que exactamente 70 de ellos son pequeños.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces pequeños en la piscifactoría.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si aumentase el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos productos A y B con tres ingredientes distintos I1, I2 e I3. Para fabricar el producto A necesita 3 unidades del ingrediente I1 y 1 unidad del ingrediente I2. Para fabricar el producto B necesita 2 unidades del ingrediente I1 y otras 2 del ingrediente I3. Un día concreto, tiene en el almacén 18 unidades del ingrediente I1, 4 del I2 y 12 del I3. Se sabe además que el beneficio obtenido con cada producto A es de 30 euros y con cada producto B es de 50 euros.

a) [2 puntos] ¿Cuántos productos de tipo A y cuántos de tipo B puede fabricar ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 2 productos de cada tipo en ese día?

b) [1 punto] ¿Cuántos debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de productos fabricados?

2. La temperatura de un laboratorio se puede relacionar con el tiempo desde que comienza la jornada laboral mediante la siguiente expresión ($f(x)$ representa la temperatura, en grados centígrados, y x es el tiempo transcurrido, en minutos, desde que comienza la jornada laboral):

$$f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5}, \quad x \geq 0.$$

a) [2.5 puntos] ¿Disminuye en algún momento la temperatura? Estudia y representa gráficamente la función f .

b) [0.5 puntos] El sistema de aire acondicionado comenzará a funcionar si la temperatura sube de los 21 grados. ¿Se encenderá el sistema de aire acondicionado en algún instante de tiempo?

3. En una empresa, el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% pasa un determinado test, mientras que del grupo de los hombres, solo el 70% pasa dicho test.

a) [1 punto] Obtener el porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test.

b) [1 punto] Si una persona pasa el test, obtener la probabilidad de que sea mujer.

4. Un consumidor está convencido de que el peso escurrido medio de un producto es menor que el que indican las latas. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 latas en las que se ha observado un peso escurrido medio de 245 g. Se supone además que el peso escurrido por lata sigue una distribución normal con desviación típica 9 g.

a) [1 punto] Construir un intervalo de confianza para el peso medio escurrido de las latas de ese producto, al 90% de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio escurrido a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2 g y un nivel de confianza del 90%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3105 euros.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de libros de cada tipo vendidos.

b) [2 puntos] Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente? Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

a) Llamamos “ x ” al número de libros vendidos a $5m$ euros e “ y ” al número de libros vendidos a $4m$ euros. A partir de la información del problema obtenemos las ecuaciones.

Un librero vende 84 libros $\rightarrow x + y = 84$.

Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3105 euros $\rightarrow 5mx + 4my = 3105$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 84 \\ 5mx + 4my = 3105 \end{array} \right\}$$

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5m & 4m \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5m & 4m \end{vmatrix} = 4m - 5m = -m$.

Este determinante es nulo cuando $m = 0$.

Para cualquier valor de m distinto de 0 el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única) para $m \neq 0$.

Si el precio de los libros fuese 45 y 36 euros entonces $5m = 45 \Rightarrow m = 9$. Como este valor es distinto de cero el sistema tiene solución.

Resolvemos el sistema para $m = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 84 \\ 45x + 36y = 3105 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 84 \\ 5x + 4y = 345 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 84 - y \\ 5x + 4y = 345 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(84 - y) + 4y = 345 \Rightarrow 420 - 5y + 4y = 345 \Rightarrow -y = -75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 75} \Rightarrow \boxed{x = 84 - 75 = 9}$$

Para $m = 9$ el precio de los libros es de 45 y 36 euros. Se venden 9 libros de 45 € y 75 de 36 euros.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar la función f . Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Calculamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 3x^2 + 2x dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K$$

Determinamos el valor de K usando que debe cumplirse $F(2) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(2) = 1 \\ F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + K \Rightarrow \boxed{1 = K}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$.

- b) La función es una función polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$ y es continua en su dominio. La función no tiene asíntotas. Estudiamos su monotonía usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 24}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

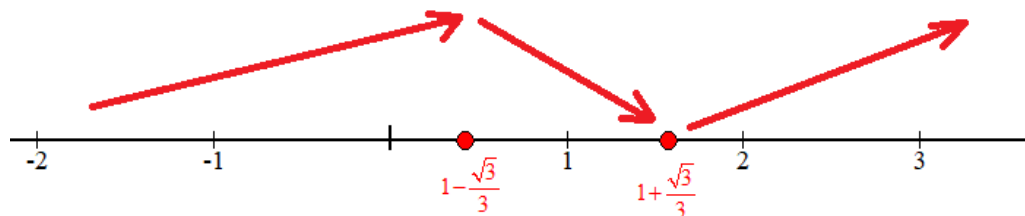
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).$$

La función es creciente en $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Buscamos el punto de inflexión de la función viendo cuando se anula la derivada segunda.

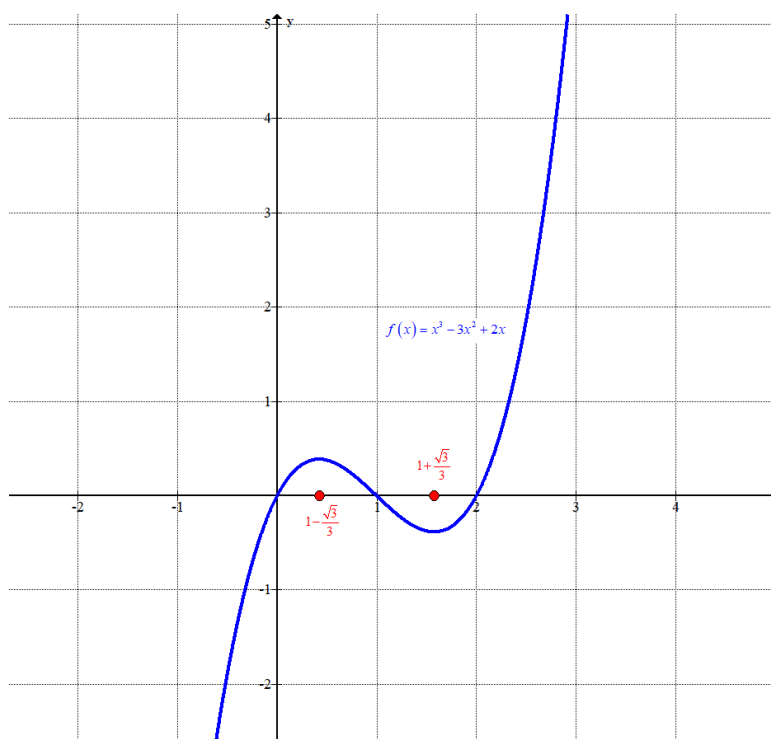
$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \rightarrow f''(x) = 6x - 6 \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

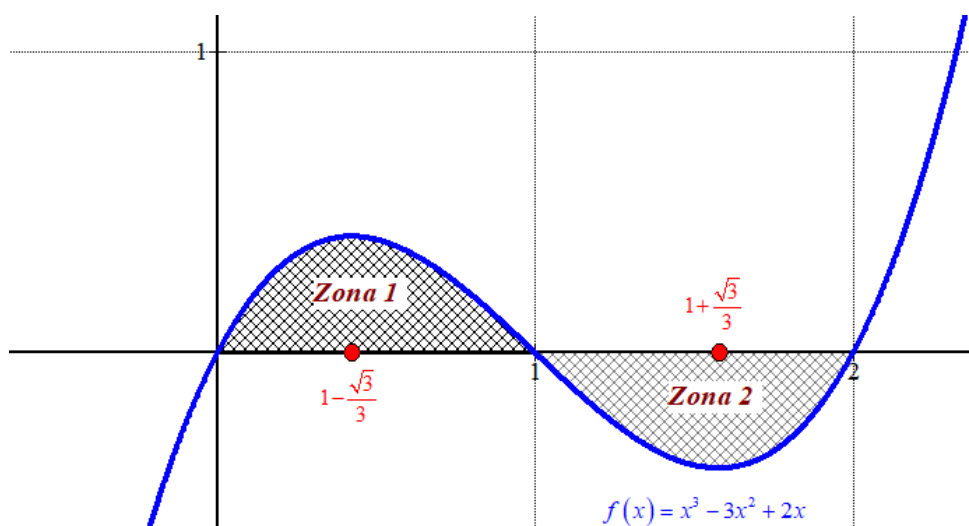
La función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
-1	-6
0	0
$1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$	0.385
1	0
$1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	-0.385
2	0
5	60



Dibujamos el recinto limitado por la gráfica de la función y el eje X entre 0 y 2.



Observamos que el valor del área va a ser menor de 1 unidad cuadrada.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=2$ es la suma del valor de la integral definida entre 0 y 1 de la función y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^1 f(x) dx + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx + \left| \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x dx \right| = \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| = \left(\left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 \right] \right) + \\
 &+ \left| \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] \right| = \frac{1}{4} + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} = \boxed{0.5 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 0.5 unidades cuadradas.

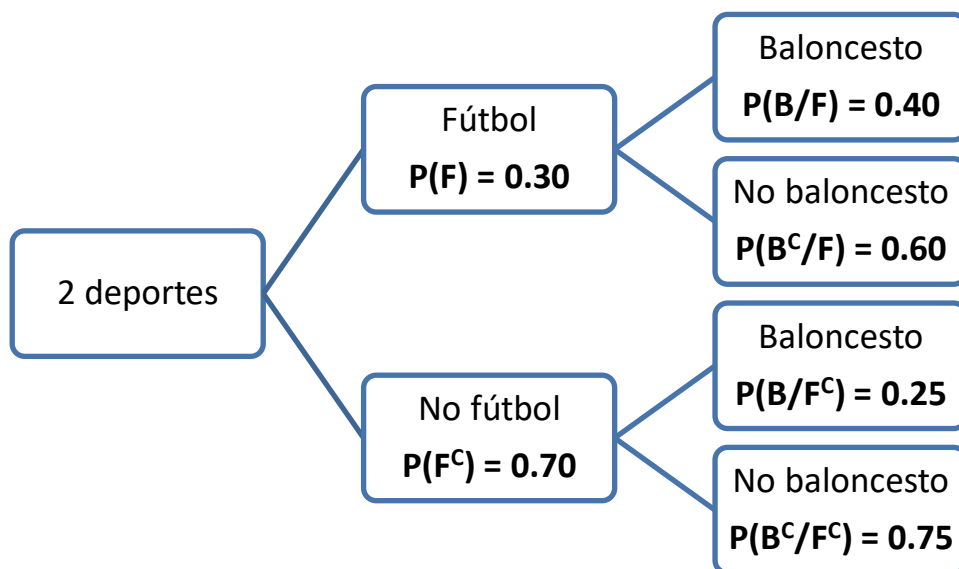
3. El 30% de los estudiantes de un instituto practica fútbol. De entre los que practican fútbol, el 40% practica además baloncesto. De entre los que no practican fútbol, un cuarto practica baloncesto. Elegido un estudiante de ese instituto al azar,

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que practique el baloncesto?

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite organizar toda la información proporcionada y obtener la información que viene implícita en el enunciado.

Llamamos F al suceso “el estudiante practica fútbol” y B a “el estudiante practica baloncesto”.



a) Nos piden calcular $P(F \cap B)$.

$$P(F \cap B) = P(F)P(B/F) = 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.12}$$

b) Nos piden calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(F)P(B/F) + P(F^c)P(B/F^c) = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.25 = \boxed{0.295}$$

4. En una piscifactoría se desea estimar el porcentaje de peces pequeños. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se encuentra que exactamente 70 de ellos son pequeños.

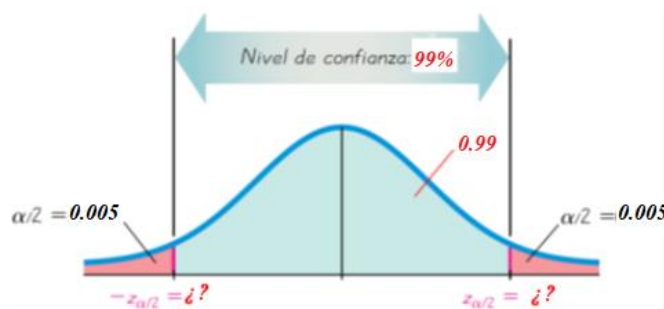
a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces pequeños en la piscifactoría.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Considerando dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si aumentase el nivel de confianza?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) El tamaño muestral es $n = 700$ personas y la proporción muestral es $p = \frac{70}{700} = 0.1$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

Determinamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{700}} \approx 0.0293$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.1 - 0.0293, 0.1 + 0.0293) = (0.0707, 0.1293)$$

Tenemos una confianza del 99% de que el porcentaje de peces pequeños está entre el 7.07% y el 12.93%.

b) El error de estimación obtenido en el apartado anterior tiene un valor aproximado de 0.0293.

Si el nivel de confianza aumenta, el valor de $z_{\alpha/2}$ también aumentaría y, por tanto, el error de estimación sería más grande.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos productos A y B con tres ingredientes distintos I1, I2 e I3. Para fabricar el producto A necesita 3 unidades del ingrediente I1 y 1 unidad del ingrediente I2. Para fabricar el producto B necesita 2 unidades del ingrediente I1 y otras 2 del ingrediente I3. Un día concreto, tiene en el almacén 18 unidades del ingrediente I1, 4 del I2 y 12 del I3. Se sabe además que el beneficio obtenido con cada producto A es de 30 euros y con cada producto B es de 50 euros.

a) [2 puntos] ¿Cuántos productos de tipo A y cuántos de tipo B puede fabricar ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 2 productos de cada tipo en ese día?

b) [1 punto] ¿Cuántos debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de productos fabricados?

a) Denominamos por “x” e “y” al número de productos tipo A o B que se fabrican, respectivamente. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Ingrediente I1	Ingrediente I2	Ingrediente I3
Nº productos A (x)	3x	x	
Nº productos B (y)	2y		2y
TOTAL	3x+2y	x	2y

Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“Tiene en el almacén 18 unidades del ingrediente I1, 4 del I2 y 12 del I3” →

$$3x + 2y \leq 18; x \leq 4; 2y \leq 12.$$

Además, estos valores son enteros y positivos → $x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 18 \\ x \leq 4 \\ 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 18 \\ x \leq 4 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar es el beneficio que tiene la expresión $B(x, y) = 30x + 50y$.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$3x + 2y = 18$$

$$x = 4$$

$$y = 6$$

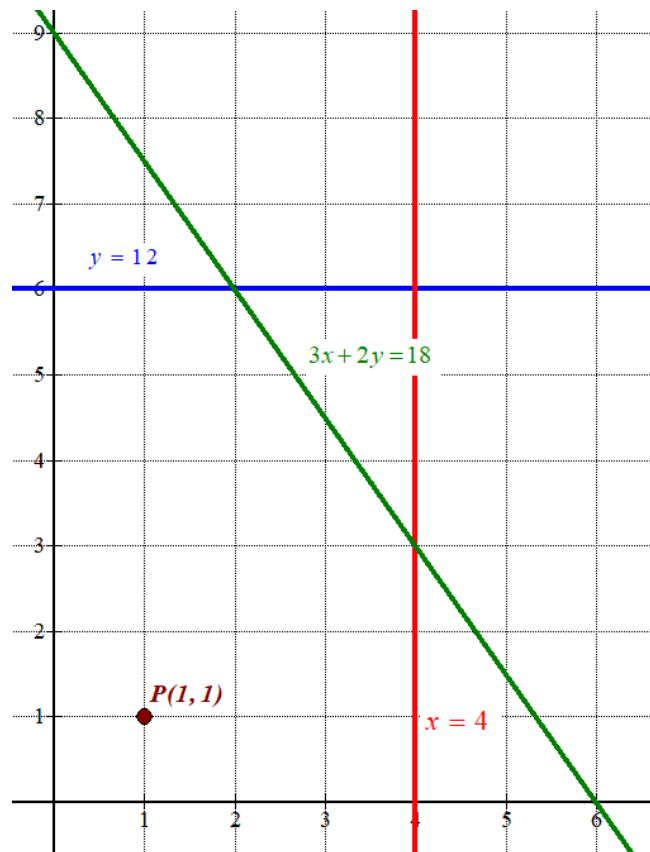
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

x	y = $\frac{18-3x}{2}$
0	9
6	0

x = 4	y
4	0
4	12

x	y = 6
0	6
4	6

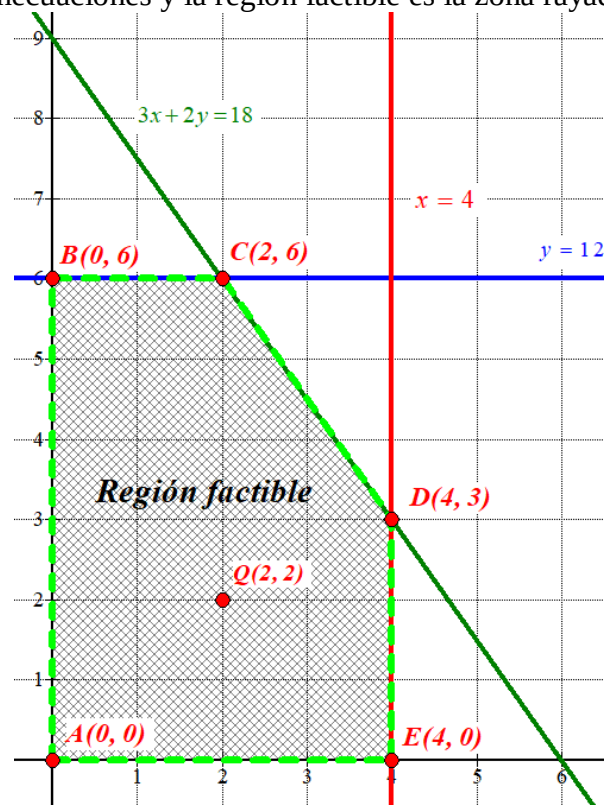
Primer
cuadrante



Comprobamos si el punto $P(1, 1)$ cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 2 \leq 18 \\ 1 \leq 4 \\ 1 \leq 6 \\ 1 \geq 0 \quad 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la zona rayada del dibujo.



Observamos que el punto $Q(2, 2)$ pertenece a la región factible, por lo que se podrían fabricar 2 productos de cada tipo en ese día.

b) Valoramos el coste en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 6) \rightarrow B(0,6) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 6 = 300$$

$$C(2, 6) \rightarrow B(2,6) = 30 \cdot 2 + 50 \cdot 6 = 360 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 3) \rightarrow B(4,3) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 270$$

$$E(4, 0) \rightarrow B(4,0) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 120$$

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 360 € con la fabricación de 2 productos de tipo A y 6 de tipo B.

2. La temperatura de un laboratorio se puede relacionar con el tiempo desde que comienza la jornada laboral mediante la siguiente expresión ($f(x)$ representa la temperatura, en grados centígrados, y x es el tiempo transcurrido, en minutos, desde que comienza la jornada laboral):

$$f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5}, \quad x \geq 0.$$

a) [2.5 puntos] ¿Disminuye en algún momento la temperatura? Estudia y representa gráficamente la función f .

b) [0.5 puntos] El sistema de aire acondicionado comenzará a funcionar si la temperatura sube de los 21 grados. ¿Se encenderá el sistema de aire acondicionado en algún instante de tiempo?

a) La función f está definida en todo el intervalo $[0, +\infty)$, puesto que $4x+5 > 0$ para todo $x \geq 0$. La función es continua en su dominio.

Si derivamos esta función se obtiene:

$$f(x) = 20 - 5(4x+5)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -5(-1)(4x+5)^{-2}(4) = \frac{20}{(4x+5)^2}$$

Esta expresión de la derivada nunca se anula y siempre es positiva para $x \geq 0$.

La función siempre crece. La temperatura nunca disminuye.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 20 - \frac{5}{4x+5} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 20 - \frac{5}{4x+5} = 0 \Rightarrow 20 = \frac{5}{4x+5} \Rightarrow 80x + 100 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80x = -95 \Rightarrow x = \frac{-95}{80} \notin [0, +\infty)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 20 - \frac{5}{4x+5} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = 20 - \frac{5}{4 \cdot 0 + 5} = 19 \Rightarrow A(0, 19)$$

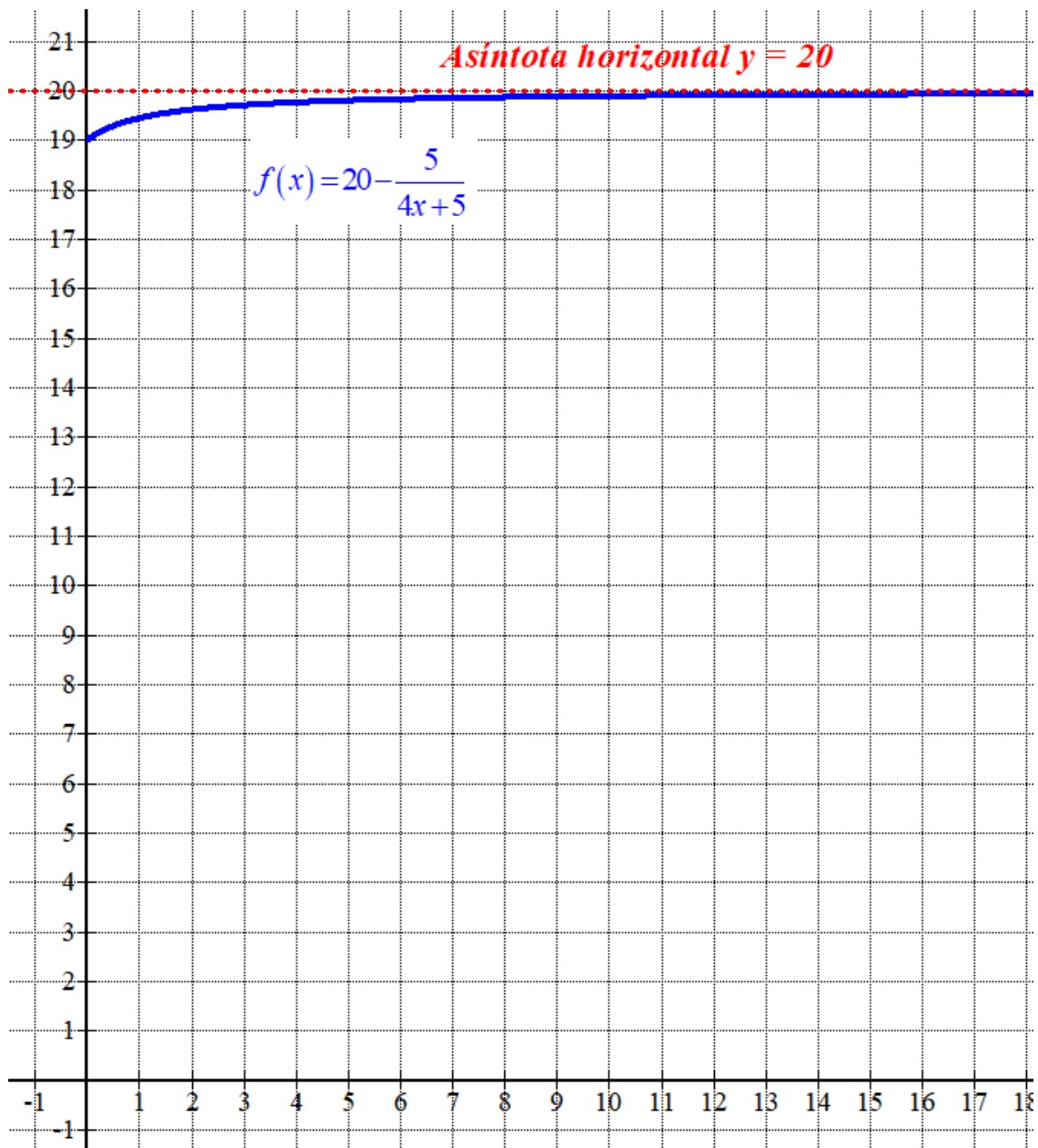
La función no corta el eje OX y corta el eje OY en el punto $A(0, 19)$.

La función no presenta asíntota vertical.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20 - \frac{5}{4x+5} = 20 - \frac{5}{\infty} = 20$ la función tiene a la recta $y = 20$ como asíntota horizontal.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = 20 - \frac{5}{4x+5}$
0	19
1	19.444
5	19.8



- b) Se observa en la gráfica que la temperatura nunca supera los 20 grados, por lo que nunca se superarán los 21 grados y el sistema de aire acondicionado nunca se encenderá.

3. En una empresa, el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% pasa un determinado test, mientras que del grupo de los hombres, solo el 70% pasa dicho test.

a) [1 punto] Obtener el porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test.

b) [1 punto] Si una persona pasa el test, obtener la probabilidad de que sea mujer.

Llamamos M al suceso “ser mujer” y T a “pasar el test”.

Los datos del problema nos permiten decir que $P(M) = 0.30$, $P(T / M) = 0.80$ y $P(T / \overline{M}) = 0.70$.

a) Calculamos $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(M)P(T / M) + P(\overline{M})P(T / \overline{M}) = 0.30 \cdot 0.80 + 0.70 \cdot 0.70 = \boxed{0.73}$$

El porcentaje de personas de dicha empresa que pasa el test es el 73%.

b) Nos piden calcular $P(M / T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M / T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M)P(T / M)}{P(T)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.73} = \boxed{\frac{24}{73} \approx 0.3288}$$

4. Un consumidor está convencido de que el peso escurrido medio de un producto es menor que el que indican las latas. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 latas en las que se ha observado un peso escurrido medio de 245 g. Se supone además que el peso escurrido por lata sigue una distribución normal con desviación típica 9 g.

a) [1 punto] Construir un intervalo de confianza para el peso medio escurrido de las latas de ese producto, al 90% de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio escurrido a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2 g y un nivel de confianza del 90%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = El peso escurrido de un producto. $X = N(\mu, 9)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 245$ gramos y el tamaño de la muestra es $n = 100$.

Para un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1.476 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (245 - 1.476, 245 + 1.476) = (243.524, 246.476)$$

Tenemos una confianza del 90% de que el peso medio de un producto está entre 243.524 y 246.476 gramos.

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.64$.

El error del intervalo de confianza debe ser 2 gramos por lo que:

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.64 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 1.64 \cdot 9 = 2\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.64 \cdot 9}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{1.64 \cdot 9}{2} \right)^2 = 54.4644$$

A partir de una muestra de 55 latas del producto el error del intervalo de confianza es menor de 2 gramos.