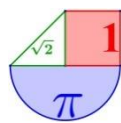
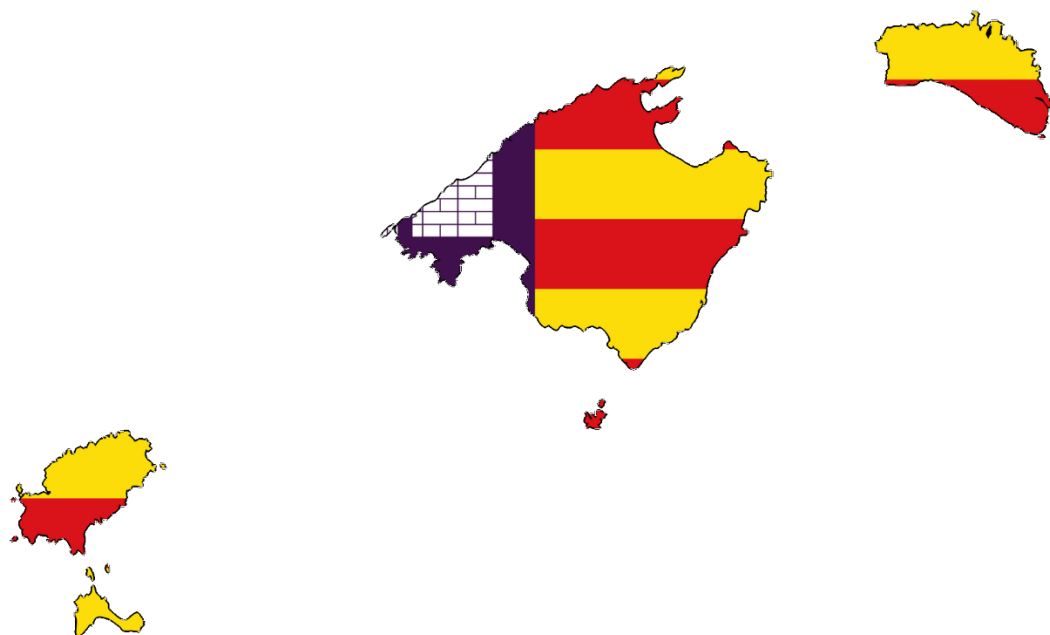


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU 2017 a 2025
Islas Baleares



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas PBAU de las Islas Baleares desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

Convocatoria extraordinaria de 2025.....	3
Convocatoria ordinaria de 2025	14
Convocatoria extraordinaria de 2024.....	26
Convocatoria ordinaria de 2024	41
Convocatoria extraordinaria de 2023.....	59
Convocatoria ordinaria de 2023	72
Convocatoria extraordinaria de 2022.....	84
Convocatoria ordinaria de 2022	97
Convocatoria extraordinaria de 2021.....	112
Convocatoria ordinaria de 2021	125
Convocatoria extraordinaria de 2020.....	142
Convocatoria ordinaria de 2020	155
Convocatoria extraordinaria de 2019.....	167
Convocatoria ordinaria de 2019	181
Convocatoria extraordinaria de 2018.....	200
Convocatoria ordinaria de 2018	213
Convocatoria extraordinaria de 2017.....	229
Convocatoria ordinaria de 2017	241

Convocatoria extraordinaria de 2025



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, sabemos que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, y que $P(A/B) = x$, donde $x \in [0,1]$. Se pide:

- a) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes? **(1 pt)**
- b) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima? **(1 pt)**

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

- a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero? **(1 pt)**
- b) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero? **(1 pt)**

Problema A3. — Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \sim N(15, 10)$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda 25 minutos o menos? **(1 pt)**
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos? **(1 pt)**

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema B1.** — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.– Cada vestido requiere 5 m² de tejido y 5 botones.– Cada camiseta requiere 4 m² de tejido y 3 botones.– Cada falda requiere 4 m² de tejido y ningún botón.a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m² de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**

b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

(1.5 pt)c) Si disponemos de 100 m² de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)****Problema B2.** — Considera las matrices cuadradas A, B, M y N de tamaño 3×3.a) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1 pt)b) Encuentre una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$. **(1 pt)**c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$? **(1 pt)****Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).****Problema C1.** — Restringidos al dominio $[0, 20]$, considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

a) ¿Para qué x se tiene que $f(x) = g(x)$? ¿Para qué x se tiene que $f'(x) = g'(x)$? **(1 pt)**b) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. **(1 pt)**c) ¿Es la función $h(x)$ derivable? ¿En qué intervalos es creciente? **(1 pt)****Problema C2.** — Considera la función $f(x) = 10^x + x^{10}$, para $x \in (0, +\infty)$.a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. **(1 pt)**b) Calcula $f'(x)$. **(1 pt)**c) Calcula justificadamente $\int_0^1 f'(x) dx$ **(1 pt)**



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

Problema A1 (obligatorio). — Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, sabemos que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, y que $P(A/B) = x$, donde $x \in [0,1]$. Se pide:

- a) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes? **(1 pt)**
 b) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima? **(1 pt)**

a) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Hallamos la probabilidad de la intersección.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow x = \frac{P(A \cap B)}{0.1} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1x$$

Obtenemos cuando es posible la igualdad.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow 0.1x = 0.5 \cdot 0.1 \Rightarrow \boxed{x = 0.5}$$

Para $x = 0.5$ los sucesos A y B son independientes.

b) Hemos visto que $P(A \cap B) = \frac{x}{10}$. Esta probabilidad es mayor cuanto mayor sea $x \in [0,1]$, por lo

que para $x=1$ la probabilidad toma el mayor valor posible: $P(A \cap B) = \frac{1}{10} = 0.1$. Esta probabilidad es la misma que $P(B)$ y menor que $P(A)$. El suceso B está contenido en el suceso A. La intersección de los sucesos es la máxima posible.

Problema A2. —El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Españoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

- a) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero? **(1 pt)**
 b) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero? **(1 pt)**

- a) Hay $3 + 3.3 + 20.6 + 21.2 = 48.1$ millones de habitantes en España y son $3 + 3.3 = 6.3$ millones los habitantes que son extranjeros.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un habitante al azar este sea extranjero vale $\frac{6.3}{48.1} = \frac{63}{481} \approx 0.131$.

- b) Es más fácil el cálculo de la probabilidad si consideramos el suceso contrario. Calculamos la probabilidad de que ninguno de los dos habitantes elegidos sea extranjero. Como las elecciones son independientes tenemos que la probabilidad pedida es el producto de la probabilidad de que el primero no sea extranjero por la probabilidad de que el segundo no sea extranjero.

$$(1 - 0.131)(1 - 0.131) = 1 + 0.131^2 - 2 \cdot 0.131$$

La probabilidad de que al menos uno sea extranjero vale:

$$1 - (1 + 0.131^2 - 2 \cdot 0.131) = 2 \cdot 0.131 - 0.131^2 = \boxed{0.244839}.$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con el cálculo directo si al menos uno debe ser extranjero esto puede ocurrir siendo el 1º extranjero y el 2º español, siendo el 1º español y el 2º extranjero o bien siendo los dos extranjeros. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos descritos.

$$\begin{aligned} &P(Ex1 \cap Es2) + P(Es1 \cap Ex2) + P(Ex1 \cap Ex2) = \\ &= P(Ex1) \cdot P(Es2) + P(Es1) \cdot P(Ex2) + P(Ex1) \cdot P(Ex2) = \\ &= 0.131 \cdot (1 - 0.131) + (1 - 0.131) \cdot 0.131 + 0.131 \cdot 0.131 = \\ &= 0.131 - 0.131^2 + 0.131 - 0.131^2 + 0.131^2 = 2 \cdot 0.131 - 0.131^2 = \boxed{0.244839} \end{aligned}$$

Problema A3. — Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \sim N(15, 10)$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda 25 minutos o menos?

(1 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos?

(1 pt)

a) Debemos calcular $P(X \leq 25)$.

$$P(X \leq 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{25-15}{10}\right) = P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8413}$$

		0	
0.0	0.5000	0.	
0.1	0.5398	0.	
0.2	0.5793	0.	
0.3	0.6179	0.	
0.4	0.6554	0.	
0.5	0.6915	0.	
0.6	0.7257	0.	
0.7	0.7580	0.	
0.8	0.7881	0.	
0.9	0.8150	0.	
1.0	0.8413	0.	

b) Debemos calcular $P(5 \leq X \leq 25)$.

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 25) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{5-15}{10} \leq Z \leq \frac{25-15}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

Problema B1. — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.

- Cada vestido requiere 5 m² de tejido y 5 botones.
- Cada camiseta requiere 4 m² de tejido y 3 botones.
- Cada falda requiere 4 m² de tejido y ningún botón.

a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m² de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**

b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

(1.5 pt)

c) Si disponemos de 100 m² de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)**

a) Lo calculamos usando el producto matricial.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50+60+80 \\ 50+45+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Hacen falta 190 m² de tejido y 95 botones.

b) Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+4y+4z=100 \\ 5x+3y=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+4y+4z=100 \\ 5x=120-3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120-3y+4y+4z=100 \Rightarrow y=-20-4z \Rightarrow 5x=120-3(-20-4z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=120+60+12z=60+12z \Rightarrow x=\frac{60}{5}+\frac{12}{5}z \Rightarrow \begin{cases} x=12+\frac{12}{5}\lambda \\ y=-20-4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=12+\frac{12}{5}\lambda \\ y=-20-4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} . \\ z=\lambda \end{cases}$

c) La pregunta hace referencia a las soluciones del sistema anterior.

No es posible gastar lo indicado, pues el valor de λ debe ser un número natural ($z = \lambda =$ número de faldas) y al ser positivo tenemos que la incógnita “y” tiene un valor negativo y esto no es posible pues “y” es el número de camisetas que debe ser un número natural.

Problema B2. — Considera las matrices cuadradas A, B, M y N de tamaño 3×3 .

a) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1 pt)

b) Encuentre una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$.

(1 pt)

c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$?

(1 pt)

a) Hallamos la expresión de la matriz A^2 .

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49+9x-24 & 7x+x^2+8 & 28+6x-12 \\ 63+9x-36 & 9x+x^2+12 & 36+6x-18 \\ -42+18+18 & -6x+2x-6 & -24+12+9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 25+9x & 7x+x^2+8 & 16+6x \\ 27+9x & 9x+x^2+12 & 18+6x \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Averiguamos cuando se cumple $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+9x & 7x+x^2+8 & 16+6x \\ 27+9x & 9x+x^2+12 & 18+6x \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25+9x=7 \\ x^2+7x+8=x \\ 16+6x=4 \\ 27+9x=9 \\ x^2+9x+12=x \\ 6x+18=6 \\ -4x-6=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x=-18 \\ x^2+6x+8=0 \\ 6x=-12 \\ 9x=-18 \\ x^2+8x+12=0 \\ 6x=-12 \\ -4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-2} \\ x^2+6x+8=0 \\ x=-2 \\ x=-2 \\ x^2+8x+12=0 \\ x=-2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Comprobamos que $x = -2$ es solución de las dos ecuaciones de segundo grado.

$$(-2)^2 + 6(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$$

$$(-2)^2 + 8(-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$$

Las dos igualdades se cumplen. Para $x = -2$ se cumple la igualdad $A^2 = A$,

b) Para $x = -2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Esta matriz la igualdad $A^2 = A$.

Comprobamos si esta matriz es invertible. Para ello vemos si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 42 + 72 + 72 - 48 - 54 - 84 = 0$$

Esta matriz A no es invertible.

Si consideramos la matriz identidad de orden 3 si cumple lo pedido $B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz I_3 es invertible y además $B^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3 = B$

c) Hallamos la expresión de C^2 en función de M y N.

$$C^2 = (N \cdot M \cdot N^{-1})(N \cdot M \cdot N^{-1}) = N \cdot M \cdot N^{-1} \cdot N \cdot M \cdot N^{-1} = N \cdot M \cdot I \cdot M \cdot N^{-1} =$$

$$= N \cdot M \cdot M \cdot N^{-1} = N \cdot M^2 \cdot N^{-1} = \{M^2 = M\} = N \cdot M \cdot N^{-1} = C$$

Es cierto que $C^2 = C$.

Problema C1. — Restringidos al dominio $[0, 20]$, considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué x se tiene que $f(x) = g(x)$? ¿Para qué x se tiene que $f'(x) = g'(x)$? **(1 pt)**
 b) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. **(1 pt)**
 c) ¿Es la función $h(x)$ derivable? ¿En qué intervalos es creciente? **(1 pt)**

a) Averiguamos cuando $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x(10 - x) = 125 - 20x \Rightarrow 10x - x^2 = 125 - 20x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 30x - 125 = 0 \Rightarrow x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(-1)(-125)}}{2(-1)} = \frac{-30 \pm 20}{-2} = \begin{cases} \frac{-30 + 20}{-2} = 5 \\ \frac{-30 - 20}{-2} = 25 \end{cases}$$

La igualdad $f(x) = g(x)$ se cumple para $x = 5$ y $x = 25$.

Obtenemos las derivadas de ambas funciones y averiguamos cuando son iguales.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x(10 - x) = 10x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 10 - 2x \\ g(x) &= 125 - 20x \Rightarrow g'(x) = -20 \\ f'(x) &= g'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10 - 2x = -20 \Rightarrow 30 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

La igualdad $f'(x) = g'(x)$ se cumple para $x = 15$.

- b) La función es continua en $[0, 15) \cup (15, 20]$ pues tiene expresiones polinómicas en cada uno de los intervalos. Hemos visto que $f(x) = g(x)$ solo para $x = 5$ y $x = 25$, por lo que para $x = 15$ no son iguales y la función no es continua en $x = 15$.

La función $h(x)$ es continua en $[0, 15) \cup (15, 20]$.

- c) La función es derivable en $[0, 15) \cup (15, 20]$ pues tiene expresiones polinómicas en cada uno de los intervalos. La función no es derivable en $x = 15$, pues no es continua en este valor.

$$\text{La función tiene la expresión } h(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ 125 - 20x & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}.$$

$$\text{Su derivada tiene la expresión } h'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \leq x < 15 \\ -20 & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}.$$

En el intervalo $(15, 20]$ la derivada es $h'(x) = -20 < 0$ y la función es decreciente en $(15, 20]$.

En el intervalo $[0, 15)$ la derivada es $h'(x) = 10 - 2x$. La derivada se anula para $x = 5$. Siendo la derivada positiva para $0 \leq x < 5$ y negativa para $5 < x < 15$.

La función $h(x)$ es creciente únicamente en el intervalo $[0, 5)$.

Problema C2. — Considera la función $f(x) = 10^x + x^{10}$, para $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1 pt)

b) Calcula $f'(x)$. (1 pt)

c) Calcula justificadamente $\int_0^1 f'(x) dx$ (1 pt)

a) Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 10^x + x^{10} = 10^0 + 0^{10} = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10^x + x^{10} = 10^{+\infty} + (+\infty)^{10} = +\infty + \infty = \boxed{+\infty}$$

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = 10^x + x^{10} \Rightarrow f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 + 10x^9$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f'(x) dx = f(x) + K$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 10^1 + 1^{10} - (10^0 + 0^{10}) = 10 + 1 - 1 = \boxed{10}$$

Convocatoria ordinaria de 2025

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — En la lotería de Navidad, el número ganador del Gordo es un único número de 5 cifras. Todos los números tienen la misma probabilidad de resultar ganadores. Considera los siguientes sucesos:

A: el número ganador la Navidad de 2025 será el 00000.

B: el número ganador la Navidad de 2025 será el 72480.

C: el número ganador la Navidad de 2026 será el 72480.

a) Expresa, con tus propias palabras, que quieren decir los dos términos siguientes: $P(C/B)$, y

$P(A \cap B)$. (1 pt)

b) Calcula $P(C/B)$ y $P(A \cap B)$. (1 pt)

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de los datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes totales y la cantidad de trabajadores por nacionalidad y sexo en España, que son los siguientes:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

Cantidad de habitantes total.

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	10.8 millones	1.9 millones
Mujeres	9.6 millones	1.7 millones

Cantidad de trabajadores.

a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje? (1 pt)

b) Escogiendo un individuo al azar, ¿los sucesos “ser mujer” y “trabajar” son independientes?

(1 pt)

Problema A3. — Después de una formación académica determinada, el tiempo que tardan los titulados en encontrar trabajo le podemos aproximar mediante una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional μ desconocida, y desviación típica $\sigma = 30$ días. Respecto de los 22 titulados de este año, el número medio de días que han tardado en encontrar trabajo ha sido de 86.

Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 80%.

(2 pt)



Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? (1 pt)
 b) Calcula x tal que $Ax = v$. (1 pt)
 c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2 y = x$. (1 pt)

Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

- Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
- Cada minibus tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste?

(3 pt)

Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, para $x \in [-1, \infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. (2 pt)
 b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

Problema C2. — En psicología, la siguiente función modela cómo las personas valoran recompensas en un instante de tiempo futuro, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

donde r es una constante positiva, y t se mide en días.

- a) Si $r = 0.01$, ¿qué vale la función $V(t)$ en $t = 50$? (1 pt)
 b) ¿Para qué valor de r , la función $V(t)$ vale 0.75 en $t = 50$? (1 pt)
 c) Si $r = 0.03$, ¿a qué valor tiende la valoración de una recompensa en un futuro muy lejano? (1 pt)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — En la lotería de Navidad, el número ganador del Gordo es un único número de 5 cifras. Todos los números tienen la misma probabilidad de resultar ganadores. Considera los siguientes sucesos:

A: el número ganador la Navidad de 2025 será el 00000.

B: el número ganador la Navidad de 2025 será el 72480.

C: el número ganador la Navidad de 2026 será el 72480.

- a) Expresa, con tus propias palabras, que quieren decir los dos términos siguientes: $P(C/B)$, y $P(A \cap B)$. (1 pt)
- b) Calcula $P(C/B)$ y $P(A \cap B)$. (1 pt)

- a) $P(C/B)$ es la probabilidad del suceso “el número ganador de la Navidad de 2026 será el 72480, sabiendo que el número ganador la Navidad de 2025 ha sido el 72480”.

$P(A \cap B)$ es la probabilidad de que en el sorteo de Navidad de 2025 salga ganador el 00000 y el 72480. Es la probabilidad de un suceso imposible pues el Gordo de Navidad solo le puede tocar a un número.

- b) Como los sorteos de Navidad de 2025 y el de 2026 son independientes entre si, entonces se cumple que $P(C/B) = P(C)$. En el sorteo entran todos los números desde 00000 al 99999, es decir, hay 100000 números en el sorteo que pueden ser premiados y solo a uno de ellos le tocará el Gordo. La probabilidad de que el número premiado en el sorteo de Navidad de 2026 sea el 72480 vale

$$P(C/B) = P(C) = \frac{1}{100000} = 0.00001.$$

Hemos visto que $A \cap B = \{\text{Salga premiado el 00000}\} \cap \{\text{Salga premiado el 72480}\} = \emptyset$. No puede ocurrir que salgan los 2 números premiados, por lo que es el suceso imposible con probabilidad 0.

$$P(A \cap B) = 0$$

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de los datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes totales y la cantidad de trabajadores por nacionalidad y sexo en España, que son los siguientes:

	Españoles	Extranjeros		Españoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones	Hombres	10.8 millones	1.9 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones	Mujeres	9.6 millones	1.7 millones
Cantidad de habitantes total.			Cantidad de trabajadores.		

- a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje? **(1 pt)**
 b) Escogiendo un individuo al azar, ¿los sucesos “ser mujer” y “trabajar” son independientes? **(1 pt)**

- a) Si sumamos todas las cifras de los habitantes españoles que son hombres: $20.6 + 3 = 23.6$ millones de habitantes de España son hombres en el año 2023.
 Obtenemos el número total de hombres trabajadores: $10.8 + 1.9 = 12.7$ millones.
 Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un hombre al azar este trabaje vale $\frac{12.7}{23.6} = \frac{127}{236} \approx 0.5381$.
- b) Hallamos el total de habitantes de España: $20.6 + 21.2 + 3 + 3.3 = 48.1$ millones.
 Obtenemos el número de mujeres: $21.2 + 3.3 = 24.5$ millones.
 Obtenemos el número de trabajadores: $10.8 + 9.6 + 1.9 + 1.7 = 24$ millones.
 Para que los sucesos “ser mujer” y “trabajar” sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(Mujer \cap Trabajador) = P(Mujer)P(Trabajador)$.
 Averiguamos si se cumple o no esta igualdad.

$$\left. \begin{aligned} P(Mujer \cap Trabajador) &= \frac{9.6+1.7}{48.1} \approx 0.235 \\ P(Mujer)P(Trabajador) &= \frac{24.5}{48.1} \cdot \frac{24}{48.1} \approx 0.2541 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Mujer \cap Trabajador) = 0.235 \neq 0.2541 = P(Mujer)P(Trabajador)$$

Los sucesos no son independientes.

Problema A3. — Después de una formación académica determinada, el tiempo que tardan los titulados en encontrar trabajo le podemos aproximar mediante una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional μ desconocida, y desviación típica $\sigma = 30$ días. Respecto de los 22 titulados de este año, el número medio de días que han tardado en encontrar trabajo ha sido de 86.

Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 80%.
(2 pt)

Sea X = el tiempo, en días, que tardan los titulados en encontrar trabajo. $X = N(\mu, 30)$

La muestra es de tamaño $n = 22$ titulados. La media muestral es $\bar{x} = 86$ días.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 80% el valor de $z_{\alpha/2}$.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

$$1 - \alpha = 0.80 \rightarrow \alpha = 0.20 \rightarrow \alpha/2 = 0.10 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.90 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$$

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.285 \cdot \frac{30}{\sqrt{22}} \approx 8.219$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (86 - 8.219, 86 + 8.219) = (77.781, 94.219)$$

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema B1.** — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? **(1 pt)**
 b) Calcula x tal que $Ax = v$. **(1 pt)**
 c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2y = x$. **(1 pt)**

a) Comprobamos si $AB = I$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5-5 & 4-3 & -4+4 \\ 5-5 & 3-3 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Como se cumple podemos decir que $A = B^{-1}$ y que $A = B^{-1}$.b) Como $B = A^{-1}$ podemos despejar x en la igualdad $Ax = v$.

$$Ax = v \Rightarrow x = A^{-1}v = Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-5 \\ -5+3+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos y de la igualdad. Utilizamos que $A = B^{-1}$.

$$B^2y = x \Rightarrow BBy = x \Rightarrow B^{-1}BB y = B^{-1}x \Rightarrow By = B^{-1}x = Ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}By = B^{-1}Ax = AAx \Rightarrow y = A^2x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5-24+18 \\ 5-18+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-4+5 \\ 5-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

- Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
- Cada minibús tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste? **(3 pt)**

Llamamos x = número de autocares que se contratan, y = número de minibuses que se contratan.

La función a minimizar es el coste de la contratación: $C(x, y) = 100x + 55y$.

Las restricciones son:

“Queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas” $\rightarrow 50x + 30y \geq 450$

“Podemos contratar hasta 8 minibuses” $\rightarrow y \leq 8$

“Tan solo podemos contratar 11 vehículos” $\rightarrow x + y \leq 11$.

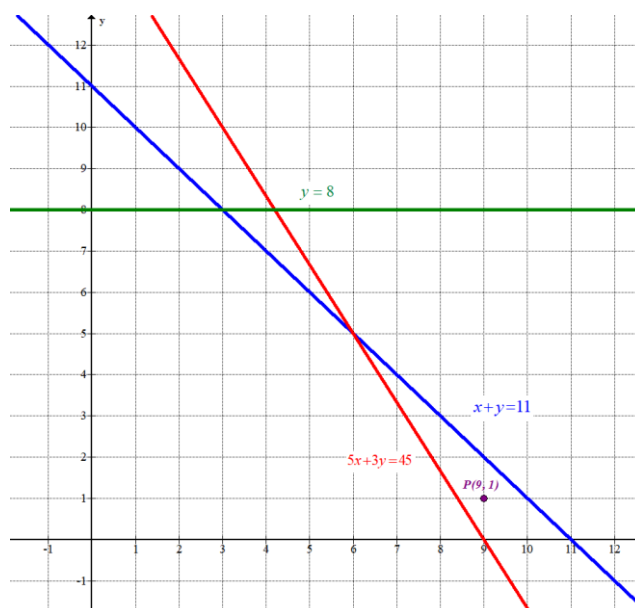
Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 30y \geq 450 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3y \geq 45 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$5x + 3y = 45$ $x \mid y = \frac{45-5x}{3}$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0</td><td>15</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>9</td><td>0</td></tr> </table>	0	15	6	5	9	0	$x + y = 11$ $x \mid y = 11 - x$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>0</td></tr> </table>	0	11	6	5	11	0	$y = 8$ $x \mid y = 8$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td></tr> </table>	0	8	3	8	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
0	15																		
6	5																		
9	0																		
0	11																		
6	5																		
11	0																		
0	8																		
3	8																		



La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones

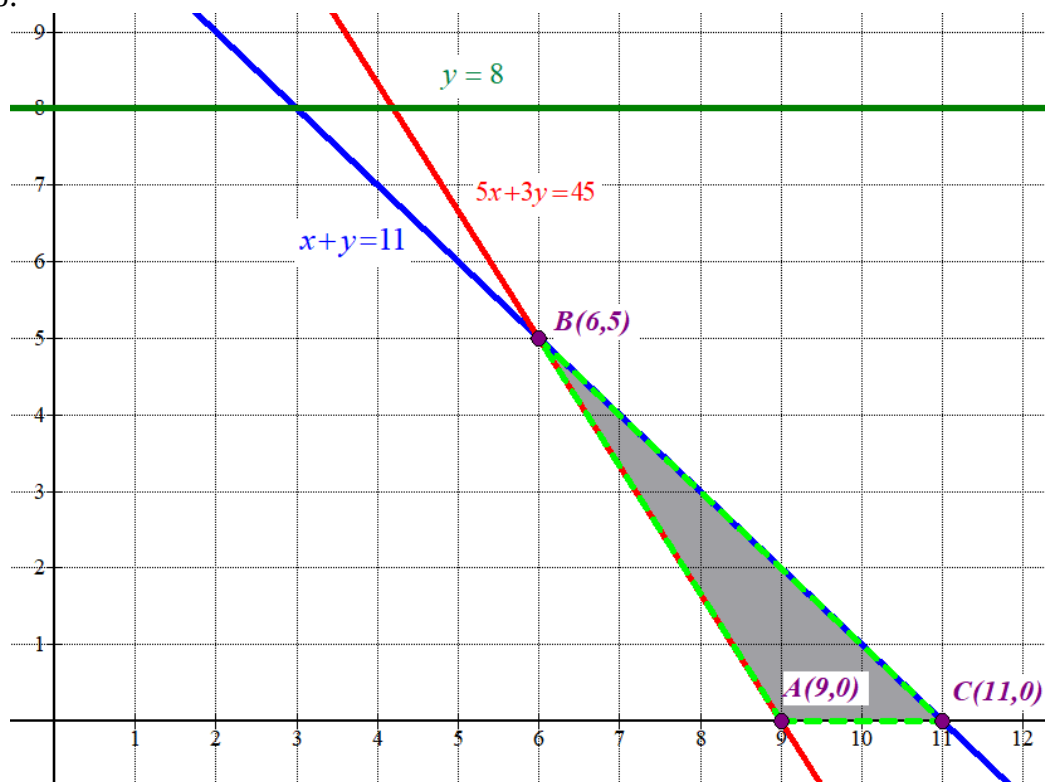
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y \geq 45 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\},$$

por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de la recta azul, por debajo de la recta horizontal verde y por encima de la recta roja.

Comprobamos que el punto P(9, 1) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \geq 45 \\ 9 + 1 \leq 11 \\ 1 \leq 8 \\ 9 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región es la indicada. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(9, 0), B(6, 5) y C(11, 0).

Valoramos la función coste $C(x, y) = 100x + 55y$ en cada uno de los vértices.

$$A(9, 0) \rightarrow C(9, 0) = 100 \cdot 9 + 55 \cdot 0 = 900$$

$$B(6, 5) \rightarrow C(6, 5) = 100 \cdot 6 + 55 \cdot 5 = 875 \text{ Mínimo}$$

$$C(11, 0) \rightarrow C(11, 0) = 100 \cdot 11 + 55 \cdot 0 = 1100$$

El coste mínimo se consigue con la contratación de 6 autocares y 5 minibuses siendo ese coste mínimo de un importe de 875 €.

Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema C1.** — Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, para $x \in [-1, \infty)$.a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. **(2 pt)**b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x=1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? **(1 pt)**

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

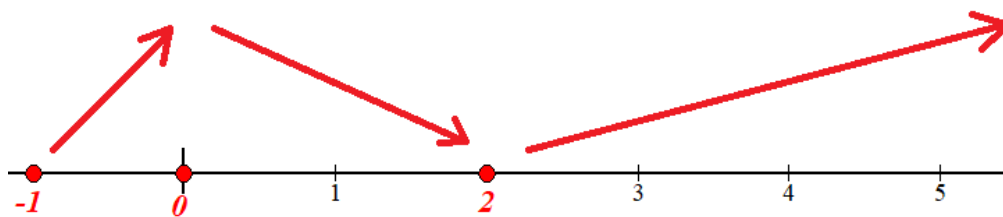
$$f'(-0.5) = 3(-0.5)^2 - 6(-0.5) = 3.75 > 0. \text{ La función crece en } [-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

La función sigue el esquema siguiente.

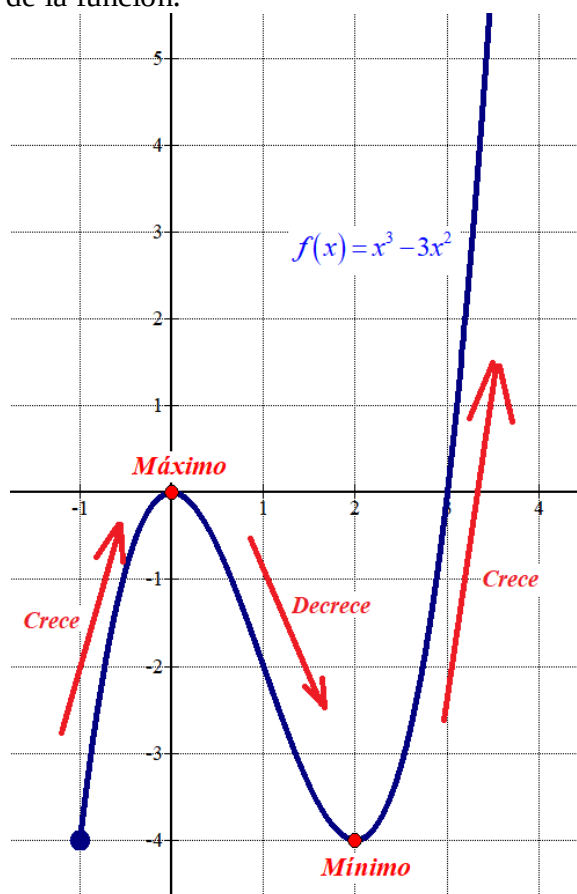
La función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ y $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$ las coordenadas del máximo relativo son $(0, 0)$ y las del mínimo relativo son $(2, -4)$.En $x = -1$ la función vale $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4$.Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 = +\infty$$

Como la función crece a partir de $x = 2$ tomando valores todo lo grandes que se quiera, podemos afirmar que no tiene máximo absoluto.

El mínimo absoluto de la función es -4 y se alcanza en $x = 0$ y en $x = -1$.

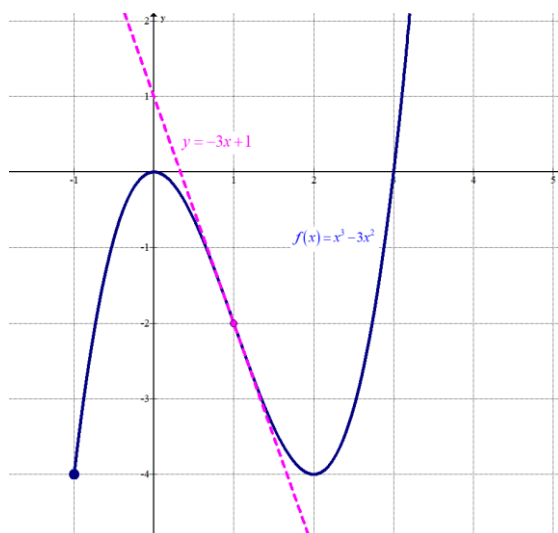
Representamos la gráfica de la función.



b) Hallamos la recta tangente a la función en el punto $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2 \\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = -3(x - 1) \Rightarrow y + 2 = -3x + 3 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 1}$$

La recta tangente a la función en el punto $x = 1$ tiene ecuación $y = -3x + 1$. Esta tangente tiene de pendiente $f'(1) = -3$.



Problema C2. — En psicología, la siguiente función modela cómo las personas valoran recompensas en un instante de tiempo futuro, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

donde r es una constante positiva, y t se mide en días.

- a) Si $r = 0.01$, ¿qué vale la función $V(t)$ en $t = 50$? (1 pt)
 b) ¿Para qué valor de r , la función $V(t)$ vale 0.75 en $t = 50$? (1 pt)
 c) Si $r = 0.03$, ¿a qué valor tiende la valoración de una recompensa en un futuro muy lejano? (1 pt)

a) Si $r = 0.01$ la función queda $V(t) = \frac{1}{(1+0.01)^t} = \frac{1}{1.01^t}, \quad t \in [0, +\infty).$

Obtenemos el valor de la función para $t = 50$.

$$V(50) = \frac{1}{1.01^{50}} = 0.608039$$

b) Hacemos $V(50) = 0.75$ y despejamos el valor de r .

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = \frac{1}{(1+r)^t} \\ V(50) = 0.75 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.75 = \frac{1}{(1+r)^{50}} \Rightarrow (1+r)^{50} = \frac{1}{0.75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} \Rightarrow r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} - 1 \approx 0.00577$$

El valor buscado es $r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} - 1 \approx 0.00577$.

c) Si $r = 0.03$ la función queda $V(t) = \frac{1}{(1+0.03)^t} = \frac{1}{1.03^t}, \quad t \in [0, +\infty).$

Calculamos el límite de la función cuanto t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1.03^t} = \frac{1}{1.03^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La valoración de la recompensa en un futuro muy lejano va a ser 0.

Convocatoria extraordinaria de 2024

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

- a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)
- b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €... pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A . ¿Cuál es este valor x ? (3 pt)
- b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I)$. (4 pt)
- c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A ? (3 pt)

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

- a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)
- b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

P4.- Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$, para $x \geq 0$.

- a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)
- b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)
- c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$. (3 pt)

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{para } p = 0, \\ 300 - 3p & \text{para } 0 < p < 100 \\ 0, & \text{para } p = 100 \end{cases}$$

- ¿Cuál es el dominio de $g(p)$? ¿Es esta función continua? (3 pt)
- Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)
- Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

- Si la probabilidad de “comprar A y no comprar B” es de un 6%, ¿son los sucesos “comprar A” y “comprar B” independientes? (5 pt)
- Si los sucesos “comprar A” y “comprar B” fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de “no comprar A”; o la probabilidad de “no comprar A, sabiendo que se ha comprado B”? (5 pt)

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

- ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)
- ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)
- Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)
- Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

- Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)
- Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

SOLUCIONES

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido?

(5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €... pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido.

(5 pt)

a) Llamamos p al número de pantalones vendidos y c al número de camisas vendidas.

Se han vendido un total de 100 unidades $\rightarrow p + c = 100$.

Hemos tenido unos ingresos totales de 5400 € $\rightarrow 60p + 40c = 5400$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} p + c = 100 \\ 60p + 40c = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p + c = 100 \\ 3p + 2c = 270 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 100 - c \\ 3p + 2c = 270 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(100 - c) + 2c = 270 \Rightarrow 300 - 3c + 2c = 270 \Rightarrow -c = -30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 30} \Rightarrow \boxed{p = 100 - 30 = 70}$$

Se han vendido 70 pantalones y 30 camisas.

b) Planteamos una nueva situación: 10 unidades más vendidas con unos ingresos de 1200 euros menos. Se deben haber vendido más camisas (más baratas) y menos pantalones. Planteamos el sistema con estos nuevos datos.

$$\left. \begin{array}{l} p + c = 110 \\ 60p + 40c = 4200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p + c = 110 \\ 3p + 2c = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 110 - c \\ 3p + 2c = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(110 - c) + 2c = 210 \Rightarrow 330 - 3c + 2c = 210 \Rightarrow -c = -120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 120} \Rightarrow \boxed{p = 110 - 120 = -10}$$

No es posible pues sale un número negativo de pantalones. Los datos son incorrectos.

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A . ¿Cuál es este valor x ? (3 pt)
 b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I)$. (4 pt)
 c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A ? (3 pt)

a) Si B es la inversa de A se cumple que $AB = I$.

Planteamos esta igualdad y hallamos, si es posible, x .

$$AB = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x-15 & -6+6 \\ 5x-40 & -15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x-15 & 0 \\ 5x-40 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15=1 \rightarrow 2x=16 \rightarrow x = \frac{16}{2} = 8 \\ 5x-40=0 \rightarrow 5x=40 \rightarrow x = \frac{40}{5} = 8 \end{cases}$$

El valor buscado es $x = 8$.

b) Para $x = 8$ la matriz B es la inversa de A .

$$(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I) = AB - AI + IB - I \cdot I + AB + AI - IB - I \cdot I =$$

$$= \begin{cases} B \text{ es la inversa de } A \\ AB = I \end{cases} = \cancel{I} - \cancel{A} + B - \cancel{I} + \cancel{I} + \cancel{A} - B - \cancel{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión queda igual a la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Hemos visto en el apartado a) que la matriz B es la inversa de A para $x = 8$.

La inversa de A es la matriz $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Si C es la inversa de A debe cumplirse que $C = B$ con $x = 8$.

$$C = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ z = -3 \\ -5 = 7 \\ 2 = -1 \end{cases}, \text{ ¡Impossible!}$$

No existen valores de y, z de manera que C sea la inversa de A .

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios?

(8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías.

(2 pt)

a) Llamamos x = número de aspiradoras que debe producir, y = número de baterías.

Hacemos una tabla.

	Horas de operarios	Kg de materias primas	Beneficio
Nº aspiradoras (x)	$5x$	$4x$	$100x$
Nº baterías (y)	y	y	$22y$
	$5x + y$	$4x + y$	$100x + 22y$

La función a maximizar son los beneficios $B(x, y) = 100x + 22y$.

Las restricciones son:

“Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas” $\rightarrow$

$$5x + y \leq 110; \quad 4x + y \leq 100$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y \leq 110 \\ 4x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$$5x + y = 110$$

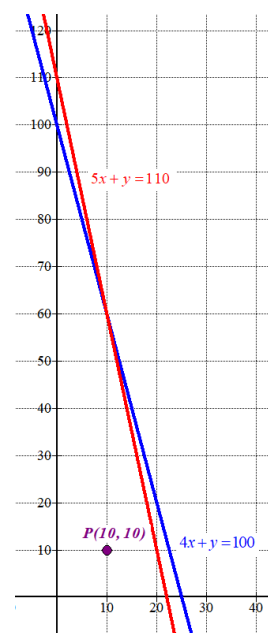
x	$y = 110 - 5x$
0	110
22	0

$$4x + y = 100$$

x	$y = 100 - 4x$
0	100
25	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

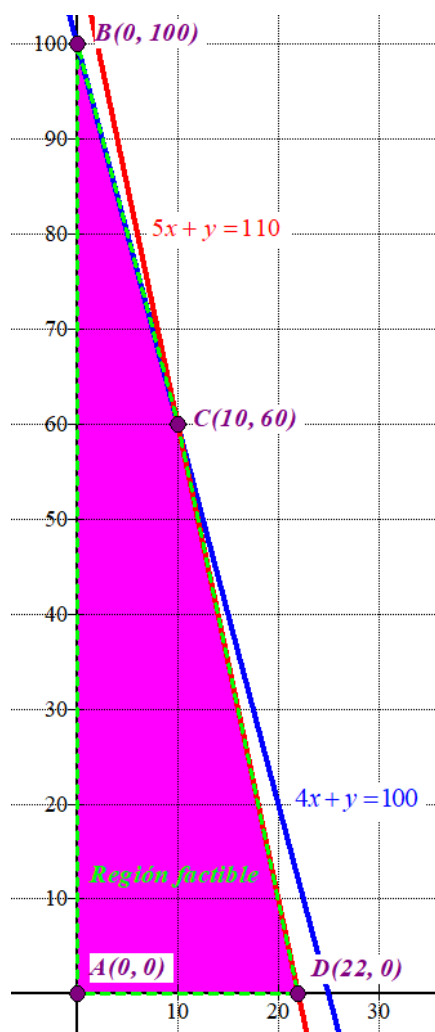


La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 5x + y \leq 110 \\ 4x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\},$$

por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul.
Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 10 \leq 110 \\ 40 + 10 \leq 100 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región es la indicada. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(0, 0), B(0, 100), C(10, 60) y D(22, 0).

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 100x + 22y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 100) \rightarrow B(0, 100) = 100 \cdot 0 + 22 \cdot 100 = 2200$$

$$C(10, 60) \rightarrow B(10, 60) = 100 \cdot 10 + 22 \cdot 60 = 2320$$

$$D(22, 0) \rightarrow B(22, 0) = 100 \cdot 22 + 22 \cdot 0 = 2200$$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo las restricciones es de 2320 € y se obtiene en el vértice $C(10, 60)$, lo que significa producir 10 aspiradoras y 60 baterías.

b) Si el precio de la aspiradora es p la función beneficio es $B(x, y) = px + 22y$

Con esta nueva función obtenemos el beneficio en cada vértice:

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 100) \rightarrow B(0, 100) = p \cdot 0 + 22 \cdot 100 = 2200$$

$$C(10, 60) \rightarrow B(10, 60) = p \cdot 10 + 22 \cdot 60 = 10p + 1320$$

$$D(22, 0) \rightarrow B(22, 0) = p \cdot 22 + 22 \cdot 0 = 22p$$

El valor máximo deseamos que se obtenga en el vértice $B(0, 100)$ por lo que debe ser:

$$10p + 1320 < 2200 \Rightarrow 10p < 880 \Rightarrow p < 88$$

Con un precio de la aspiradora inferior a 88 € el valor máximo del beneficio es 2200 € que se consigue en el vértice $B(0, 100)$ que supone producir solo 100 baterías.

En el vértice D se obtendría un beneficio inferior a $22 \cdot 88 = 1936$ €, menor de 2200 €.

P4.- Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$, para $x \geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$. (3 pt)

a) El dominio de la función es $[0, +\infty)$.

En $x = 0$ la función vale $f(0) = e^0 - e^{-0} = 0$.

En $+\infty$ calculamos el límite de la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{e^x} = e^{+\infty} - \frac{1}{e^{+\infty}} = +\infty - \frac{1}{\infty} = +\infty$$

b) Calculamos la expresión de la derivada primera y derivada segunda de la función.

$$f(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$$

c) Calculamos primero la integral indefinida de $f(x)$.

$$\int f(x) dx = \int e^x - e^{-x} dx = e^x + e^{-x} + C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x) dx = [e^x + e^{-x}]_0^1 = [e^1 + e^{-1}] - [e^0 + e^{-0}] = e + \frac{1}{e} - 2 = \boxed{\frac{e^2 - 2e + 1}{e} \simeq 1.086}$$

Hemos comprobado que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \simeq 1.086$.

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & \text{para } p = 0, \\ 300 - 3p & \text{para } 0 < p < 100 \\ 0, & \text{para } p = 100 \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es el dominio de $g(p)$? ¿Es esta función continua? (3 pt)
 b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)
 c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

a) El dominio de la función es $[0, 100]$.

La función es continua en $(0, 100)$, comprobamos si es continua en los extremos del intervalo.
 ¿En $p = 0$ es continua?

- Existe $g(0) = 500$.
- Existe $\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} 300 - 3p = 300 - 3 \cdot 0 = 300$
- ¿son iguales? $g(0) = 500 \neq 300 = \lim_{p \rightarrow 0^+} g(p)$

La función no es continua en $p = 0$.

¿En $p = 100$ es continua?

- Existe $g(100) = 0$.
- Existe $\lim_{p \rightarrow 100^-} g(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} 300 - 3p = 300 - 3 \cdot 100 = 0$
- ¿son iguales? $g(100) = 0 = \lim_{p \rightarrow 100^-} g(p)$

La función es continua en $p = 100$.

La función es continua en $(0, 100]$.

b) Averiguamos cuando la función vale 240.

$$g(p) = 240 \Rightarrow \begin{cases} 500 = 240 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 300 - 3p = 240 \rightarrow 60 = 3p \rightarrow p = 20 \in (0, 100) \\ 0 = 240 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Cuando asisten 240 personas el precio de la entrada es de 20 €,

c) Obtenemos la expresión de los ingresos.

$$I(p) = g(p) \cdot p = \begin{cases} 500p = 0, & \text{para } p = 0, \\ (300 - 3p)p = 300p - 3p^2 & \text{para } 0 < p < 100 \\ 0 \cdot p = 0, & \text{para } p = 100 \end{cases}$$

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$I(p) = 300p - 3p^2 \Rightarrow I'(p) = 300 - 6p$$

$$I'(p) = 0 \Rightarrow 300 - 6p = 0 \Rightarrow 300 = 6p \Rightarrow p = \frac{300}{6} = 50$$

Vemos el signo de la segunda derivada en el punto crítico $p = 50$.

$$I'(p) = 300 - 6p \Rightarrow I''(p) = -6 \Rightarrow I''(50) = -6 < 0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función ingresos tiene un máximo relativo que será máximo absoluto para un precio de la entrada de 50 €.

.

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

- a) Si la probabilidad de “comprar A y no comprar B” es de un 6%, ¿son los sucesos “comprar A” y “comprar B” independientes? (5 pt)
- b) Si los sucesos “comprar A” y “comprar B” fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de “no comprar A”; o la probabilidad de “no comprar A, sabiendo que se ha comprado B”? (5 pt)

a) Llamamos A al suceso “comprar A” y B a “comprar B”.

Sabemos que $P(A) = 0.07$, $P(B) = 0.10$ y $P(A \cap \bar{B}) = 0.06$.

Como $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ entonces tenemos que $0.07 = P(A \cap B) + 0.06$, por lo que $P(A \cap B) = 0.01$.

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.07 \\ P(B) = 0.10 \\ P(A \cap B) = 0.01 \end{array} \right\} \rightarrow P(A)P(B) = 0.07 \cdot 0.1 = 0.007 \left\{ \Rightarrow P(A \cap B) = 0.010 \neq 0.007 = P(A)P(B) \right.$$

Los sucesos no son independientes.

b) Nos piden comparar los valores de $P(\bar{A})$ y de $P(\bar{A} | B)$.

Si los sucesos A y B son independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.007$.

Calculamos las probabilidades de los dos sucesos planteados y comparamos sus valores.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.07 = 0.93$$

$$P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1 - 0.007}{0.1} = 0.93$$

Son igual de probables los dos sucesos.

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

- a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)
- b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)
- c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)
- d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

- a) El número total de hogares en las islas es:

$$118\,000 + 124\,000 + 93\,000 + 119\,000 = 454\,000.$$

Como hay 1 210 000 habitantes en la isla tenemos que en los hogares con 4 o más convivientes viven $1\,210\,000 - (1 \cdot 118\,000 + 2 \cdot 124\,000 + 3 \cdot 93\,000) = 565\,000$ personas.

El número medio de convivientes en hogares con 4 o más convivientes es $\frac{565}{119} \approx 4.748$.

La media de convivientes en los hogares de las islas será:

$$\frac{1 \cdot 118\,000 + 2 \cdot 124\,000 + 3 \cdot 93\,000 + \frac{565}{119} \cdot 119\,000}{454\,000} \approx 2.665$$

El número medio de convivientes por hogar es de 2.665 personas.

- b) Hemos visto en el apartado anterior que en hogares de 4 o más convivientes viven 565 000 personas. La media de convivientes en estos hogares es de $\frac{565}{119} \approx 4.748$.

- c) Hay 118 000 personas que viven en hogares unipersonales de un total de 1 210 000 habitantes de las islas. Aplicamos la regla de Laplace.

$$\text{Probabilidad} = \frac{118\,000}{1\,210\,000} = \frac{59}{605} \approx 0.0975$$

La probabilidad de que al elegir un habitante al azar viva en un hogar unipersonal es de 0.0975.

- d) El suceso contrario a “alguno de los dos vive en un hogar unipersonal” es el suceso “ninguno vive en un hogar unipersonal”. Calculamos la probabilidad usando el suceso contrario cuya probabilidad es más sencilla de calcular. La probabilidad de que una persona no viva en hogar unipersonal es de $1 - \frac{59}{605} = \frac{546}{605}$.

$$\begin{aligned} P(\text{Alguno de los dos viva en un hogar unipersonal}) &= \\ &= 1 - P(\text{Ninguno vive en hogar unipersonal}) = \{\text{Elecciones independientes}\} = \\ &= 1 - P(\text{No vive en hogar unipersonal}) P(\text{No vive en hogar unipersonal}) = \\ &= 1 - \frac{546}{605} \cdot \frac{546}{605} \approx 0.1855 \end{aligned}$$

La probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal es de 0.1855.

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

- a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)
- b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

X = La vida útil de un componente (en horas). $X = N(\mu, 150)$

- a) El tamaño de la muestra es $n = 50$. La media es $\bar{x} = 507$ horas.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 75 %

$$1 - \alpha = 0.75 \rightarrow \alpha = 0.25 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.125 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.875 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.15$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.15 \cdot \frac{150}{\sqrt{50}} \approx 24.4$$

El intervalo de confianza para la vida útil de los componentes es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (507 - 24.4, 507 + 24.4) = (482.6, 531.4)$$

- b) X = La vida útil de un componente (en horas). $X = N(500, 150)$

Tenemos que averiguar h tal que $P(X \leq h) = 0.10$.

$$P(X \leq h) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{h - 500}{150}\right) = 0.1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} < 0.5 \\ \frac{h - 500}{150} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq -\frac{h - 500}{150}\right) = 0.1 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{h - 500}{150}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{h - 500}{150} = 1.28 \Rightarrow -h + 500 = 192 \Rightarrow \boxed{h = 308}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Por debajo de 308 horas de vida útil están el 10 % de los componentes de menos vida útil.

Convocatoria ordinaria de 2024

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a las Ciencias Sociales II

Modelo 2

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
 - Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
 - Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).
- a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos?

(2 pt)

- b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos?

(4 pt)

- c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén?

(4 pt)

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

- a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)
- b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
- c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

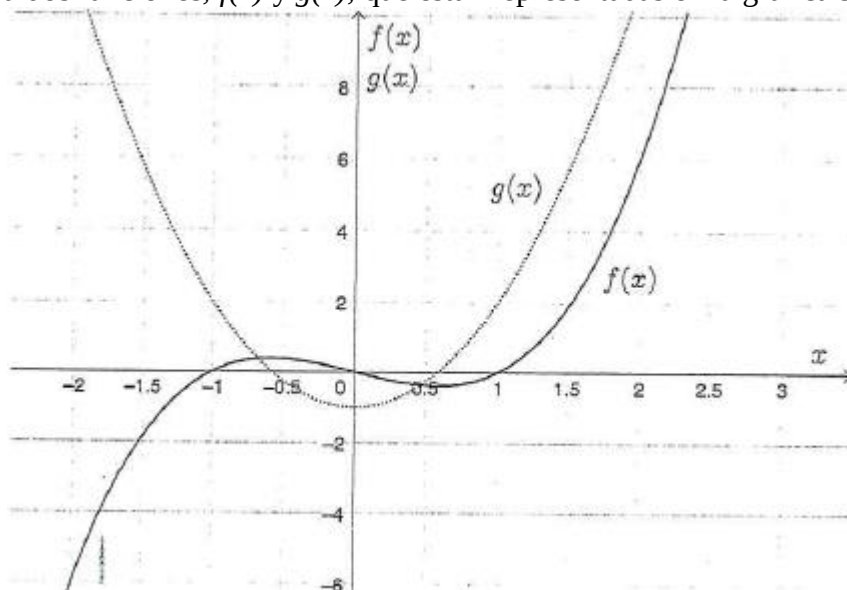
P3.- Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

- c) Haz un gráfico esquemático de la función $f(x)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

- b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

P4.- Considera dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que están representadas en la gráfica siguiente:



- Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es $f(x)$ y cuál es $g(x)$. Justifica la respuesta. (3 pt)
- Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x) = g'(x)$? ¿o bien es $g(x) = f'(x)$? (3 pt)
- Calcula el área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$. (4 pt)

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0.2t}}, \text{ para } t \geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1 + 3 \cdot e^{-0.2t})^2}, \quad \int p(t) dt = 20 \cdot \ln(e^{0.2t} + 3) + C, \text{ para cualquier constante } C \in \mathbb{R}.$$

- ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)
- ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)
- ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

- ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)
- ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)
- ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.

Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

- a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$ (5 pt)
- b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)
- b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

SOLUCIONES

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
 - Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
 - Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).
- a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos? (2 pt)
- b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)
- c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

a) Calculamos el material necesario.

El armario A $\rightarrow 10 \cdot 5 = 50$ kg de metal

El armario B $\rightarrow 10 \cdot 10 = 100$ kg de metal y $10 \cdot 10 = 100$ kg de madera

El armario C $\rightarrow 10 \cdot 15 = 150$ kg de metal.

Se necesitan 100 kg de madera y $50 + 100 + 150 = 300$ kg de metal.

b) Calculamos cuanto haría falta para fabricar “x” armarios del modelo A, “y” armarios B y “z” armarios C.

El armario A $\rightarrow 5x$ kilos de metal y $5x$ horas.

El armario B $\rightarrow 10y$ kg de metal, $10y$ kg de madera y $10y$ horas

El armario C $\rightarrow 15z$ kg de metal y $5z$ horas

Como disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios tendremos un sistema con las ecuaciones siguientes.

$$\left. \begin{array}{l} \text{metal} \rightarrow 5x + 10y + 15z = 1550 \\ \text{madera} \rightarrow 10y = 600 \\ \text{horas} \rightarrow 5x + 10y + 5z = 1050 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 10y + 15z = 1550 \\ 10y = 600 \rightarrow \boxed{y = \frac{600}{10} = 60} \\ 5x + 10y + 5z = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 600 + 15z = 1550 \\ 5x + 600 + 5z = 1050 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 15z = 950 \\ 5x + 5z = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 190 \\ x + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 190 \\ x = 90 - z \end{array} \right\} \Rightarrow 90 - z + 3z = 190 \Rightarrow 2z = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{100}{2} = 50} \Rightarrow \boxed{x = 90 - 50 = 40}$$

Tenemos que fabricar 40 armarios modelo A, 60 del modelo B y 50 del modelo C para utilizar completamente todos los recursos.

- c) El nuevo sistema de ecuaciones no tendría ecuación de la madera. Como solo podemos producir 125 unidades en total $\rightarrow x + y + z = 125$. Planteamos el nuevo sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{metal} \rightarrow 5x + 10y + 15z = 1550 \\ \text{horas} \rightarrow 5x + 10y + 5z = 1050 \\ \text{almacén} \rightarrow x + y + z = 125 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 310 \\ x + 2y + z = 210 \\ x + y + z = 125 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 310 \\ x = 210 - 2y - z \\ x + y + z = 125 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 210 - 2y - z + 2y + 3z = 310 \\ 210 - 2y - z + y + z = 125 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 100 \\ -y = -85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{z = \frac{100}{2} = 50} \\ \boxed{y = 85} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 210 - 2 \cdot 85 - 50 = -10}$$

Obtenemos una solución imposible pues el número de armarios del modelo A sale un resultado negativo. No es posible utilizar completamente el metal, las horas y el almacén.

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

- Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)
- Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
- ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

a) Llamamos x = miles de euros en acciones, y = miles de euros en bonos.

La función a maximizar es el interés anual:

$$I(x, y) = 0.06x + 0.02y \text{ con el resultado en miles de euros.}$$

$$I(x, y) = 60x + 20y \text{ con el resultado en euros.}$$

Las restricciones son:

“Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 €” $\rightarrow x + y \leq 10$.

“El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos” $\rightarrow x \geq y$.

“El cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones” $\rightarrow 4 \leq x \leq 6; 2 \leq y \leq 8$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

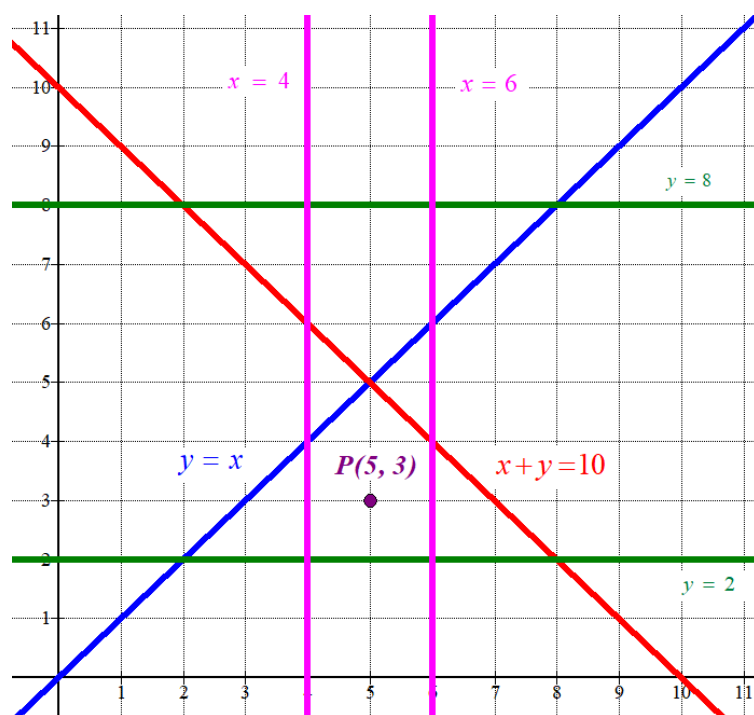
Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x \geq y \\ 4 \leq x \leq 6 \\ 2 \leq y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$$\begin{array}{c|c} \textcolor{red}{x + y = 10} & \textcolor{blue}{y = x} \\ \hline x & y = 10 - x \\ \hline 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y = x \\ \hline 0 & 0 \\ 10 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \textcolor{violet}{x = 4} & \\ \hline x = 4 & y \\ \hline 4 & 0 \\ 4 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \textcolor{violet}{x = 6} & \\ \hline x = 6 & y \\ \hline 6 & 0 \\ 6 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \textcolor{green}{y = 2} & \\ \hline x & y = 2 \\ \hline 0 & 2 \\ 10 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \textcolor{green}{y = 8} & \\ \hline x & y = 8 \\ \hline 0 & 8 \\ 10 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ \\ \text{Primer} \\ \text{cuadrante} \end{array}$$



La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones

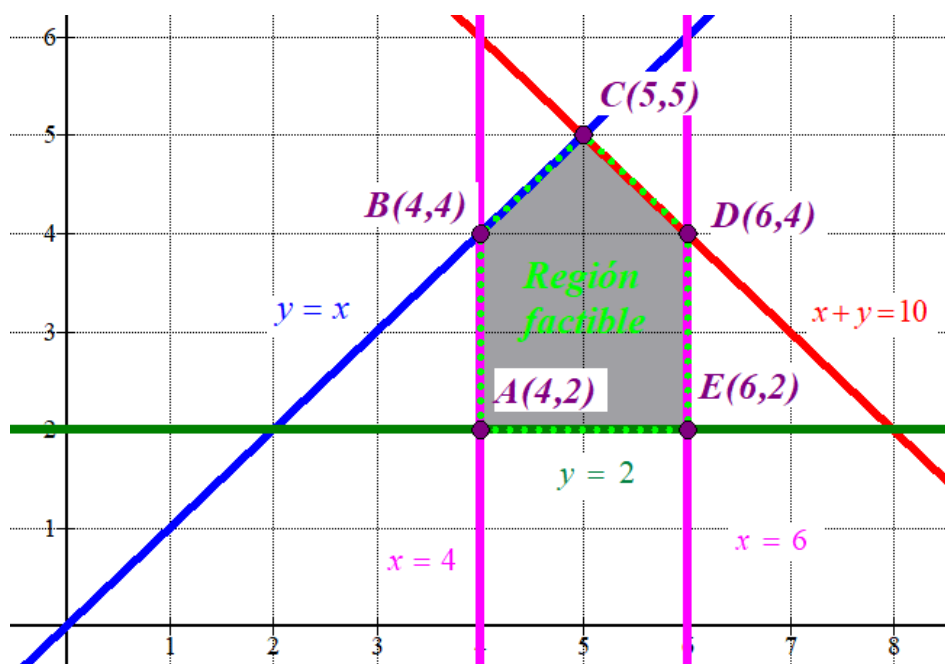
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x \geq y \\ 4 \leq x \leq 6 \\ 2 \leq y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\},$$

por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, entre las rectas horizontales verdes y entre las rectas verticales rosas.

Comprobamos que el punto $P(5, 3)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 3 \leq 10 \\ 5 \geq 3 \\ 4 \leq 5 \leq 6 \\ 2 \leq 3 \leq 8 \\ 5 \geq 0; 3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región es la indicada. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(4, 2), B(4, 4), C(5, 5), D(6, 4) y E(6, 2).

c) Valoramos la función interés anual $I(x, y) = 60x + 20y$ en cada uno de los vértices.

$$A(4, 2) \rightarrow I(4, 2) = 60 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 280$$

$$B(4, 4) \rightarrow I(4, 4) = 60 \cdot 4 + 20 \cdot 4 = 320$$

$$C(5, 5) \rightarrow I(5, 5) = 60 \cdot 5 + 20 \cdot 5 = 400$$

$$D(6, 4) \rightarrow I(6, 4) = 60 \cdot 6 + 20 \cdot 4 = 440 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(6, 2) \rightarrow I(6, 2) = 60 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 400$$

El interés anual máximo es de 440 € y se consigue en el vértice D(6, 4). Significa que hay que invertir 6000 € en acciones y 4000 € en bonos para conseguir ese interés anual máximo.

P3.- Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

- a) Haz un gráfico esquemático de la función $f(x)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.

Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

- b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

- a) La función existe para cualquier número real positivo o cero.

$$\text{Dominio} = [0, +\infty)$$

Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre crece y no tiene máximos ni mínimos locales.

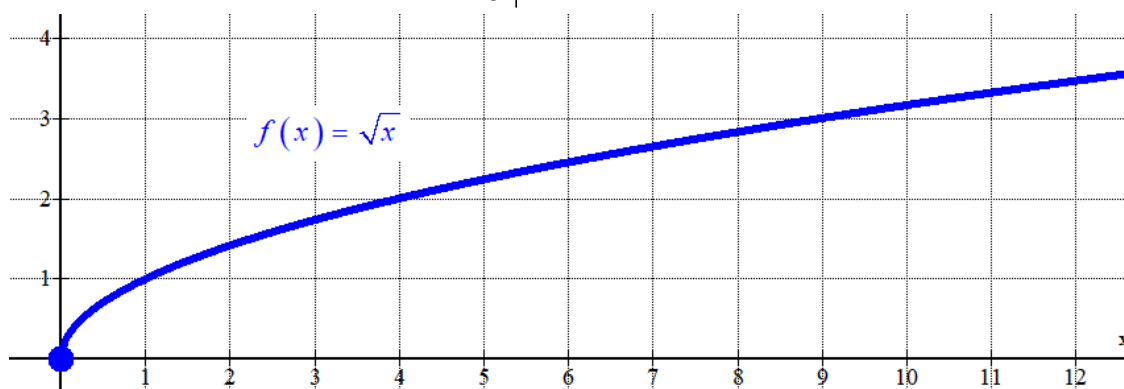
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición.

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Hacemos una tabla y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

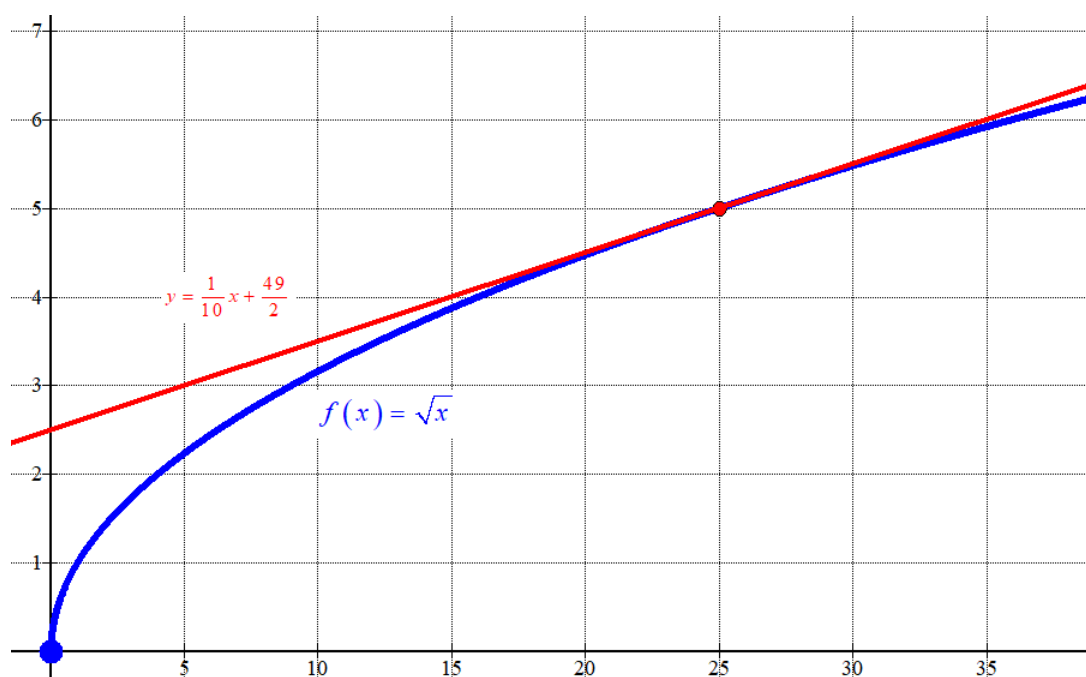


- b) La recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 25$ tiene ecuación $y - f(25) = f'(25)(x - 25)$.

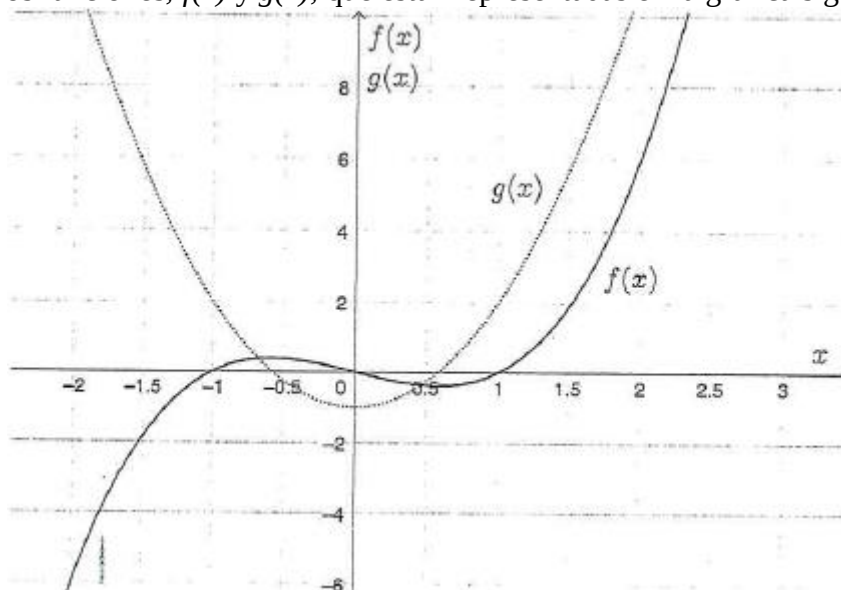
$$\left. \begin{aligned} f(25) &= \sqrt{25} = 5 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} \\ y - f(25) &= f'(25)(x - 25) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{10}(x - 25) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{10}x + 5 - 2.5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{10}x + 2.5}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = \frac{1}{10}x + 2.5$. Esta recta tiene pendiente = $1/10$.



P4.- Considera dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, que están representadas en la gráfica siguiente:



- a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es $f(x)$ y cuál es $g(x)$. Justifica la respuesta. (3 pt)
- b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f'(x) = g(x)$? ¿o bien es $g(x) = f'(x)$? (3 pt)
- c) Calcula el área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$. (4 pt)

- a) La gráfica de $f(x)$ pasa por los puntos $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. De las dos funciones la que pasa por esos puntos es $x(x-1)(x+1) \rightarrow f(x) = x(x-1)(x+1)$

La otra función es $g(x) \rightarrow g(x) = (x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$

- b) La función $f(x)$ es una función polinómica de grado 3 y la función $g(x)$ es otra función polinómica de grado 2, como al derivar una función polinómica su derivada disminuye un grado debe ser $g(x) = f'(x)$.

Derivamos $f(x)$ para comprobar que es cierta la igualdad.

$$f(x) = x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3g(x)$$

Se cumple que $f'(x) = 3g(x)$.

No es cierta la igualdad.

No se cumple ni $f(x) = g'(x)$, ni $g(x) = f'(x)$.

- c) Averiguamos cuando $g(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = (x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}$ de $g(x)$.

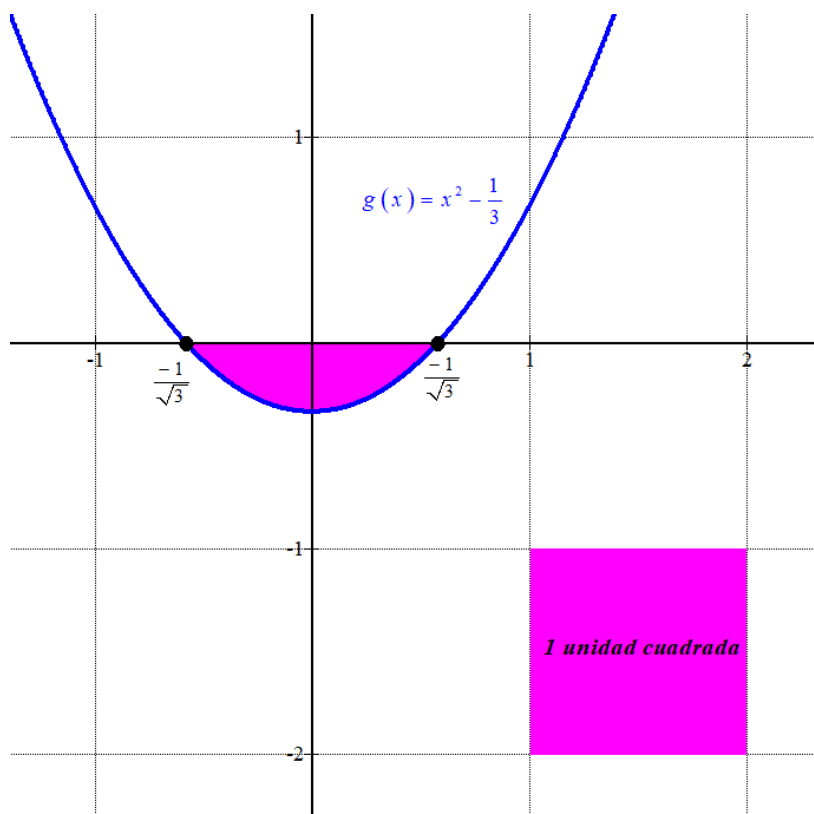
$$g(x) = (x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) = x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} g(x) dx = \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} x^2 - \frac{1}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \left[\frac{(1/\sqrt{3})^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} \right] - \left[\frac{(-1/\sqrt{3})^3}{3} - \frac{1}{3} \frac{-1}{\sqrt{3}} \right] =$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}}{27} \approx \boxed{-0.25}$$

El área entre la función $g(x)$ y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que $g(x) = 0$ tiene un valor aproximado de 0.25 unidades cuadradas.

Representamos la región para comprobar la bondad de la solución.



P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t) = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}}, \text{ para } t \geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0,2t}}{(1+3 \cdot e^{-0,2t})^2}, \int p(t) dt = 20 \cdot \ln(e^{0,2t} + 3) + C, \text{ para cualquier constante } C \in \mathbb{R}.$$

- a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)
- b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)
- c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

- a) Al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$) la población es $p(0)$.

$$p(0) = \frac{4}{1+3 \cdot e^0} = 1$$

La población al inicio del año 2000 es de 1 millón de habitantes.

¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes?

$$2 = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{1+3 \cdot e^{-0,2t}} \Rightarrow 1+3 \cdot e^{-0,2t} = 2 \Rightarrow 3 \cdot e^{-0,2t} = 1 \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{-0,2t} = \ln \frac{1}{3} \Rightarrow -0,2t = \ln 1 - \ln 3 \Rightarrow -0,2t = -\ln 3 \Rightarrow t = \frac{\ln 3}{0,2} \approx 5.49$$

Se tuvo 2 millones de habitantes durante el año 2005, pues se alcanzan los 2 millones durante el transcurso de ese año (entre $t = 5$ y $t = 6$).

- b) Utilizamos la derivada para averiguar cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0,2t}}{(1+3 \cdot e^{-0,2t})^2} \\ p'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2.4 \cdot e^{-0,2t}}{(1+3 \cdot e^{-0,2t})^2} = 0 \Rightarrow 2.4 \cdot e^{-0,2t} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La derivada no se anula y es siempre positiva.

$$\left. \begin{array}{l} 2.4 \cdot e^{-0,2t} > 0 \\ (1+3 \cdot e^{-0,2t})^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p'(t) = \frac{2.4 \cdot e^{-0,2t}}{(1+3 \cdot e^{-0,2t})^2} > 0$$

La función siempre crece. Y nunca disminuye.

- c) Calculamos el límite de la población $p(t)$ cuando los años tienden a crecer.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+3 \cdot e^{-0,2t}} = \frac{4}{1+3 \cdot e^{-\infty}} = \frac{4}{1+0} = 4$$

A largo plazo la población tiende a ser de 4 millones de habitantes.

Calculamos el límite de la derivada de la población $p'(t)$ cuando los años tienden a crecer.

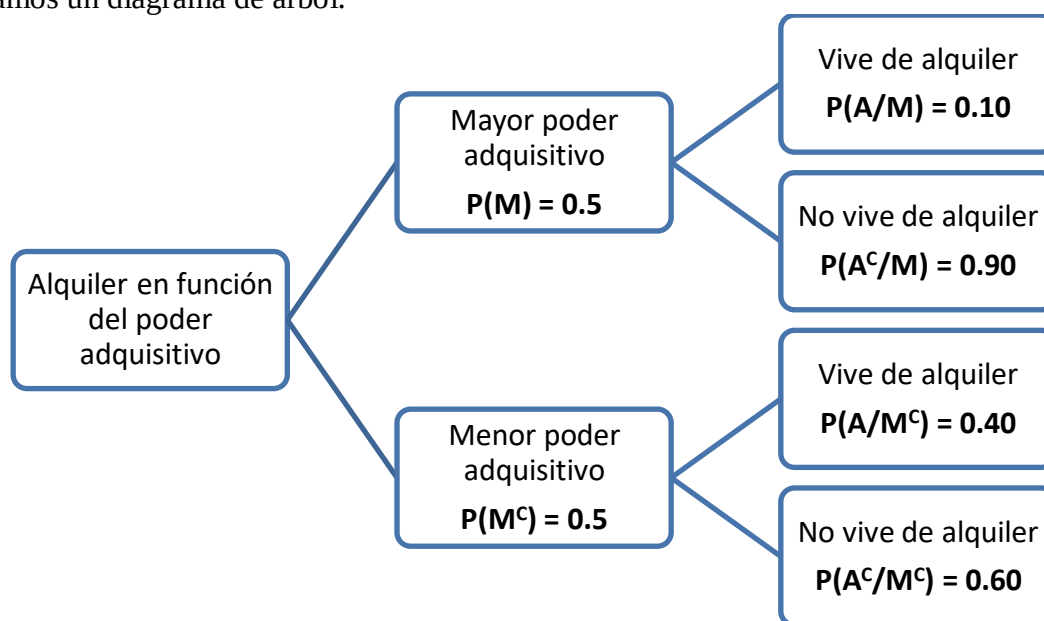
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2.4 \cdot e^{-0.2t}}{(1+3 \cdot e^{-0.2t})^2} = \frac{2.4 \cdot e^{-\infty}}{(1+3 \cdot e^{-\infty})^2} = \frac{4 \cdot 0}{(1+0)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

El ritmo de crecimiento de la población tiende a ser nulo. Tiende a mantenerse estable.

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
 - El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Llamamos M a “el habitante tiene mayor poder adquisitivo” y A a “vivir de alquiler”.
Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(M)P(A/M) + P(M^c)P(A/M^c) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler es de 0.25.

- b) Si se eligen de forma independiente la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades de que cada uno de ellos viva de alquiler.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.25 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = \boxed{\frac{1}{64} = 0.015625}$$

La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler es de $\frac{1}{64}$.

- c) La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler es el suceso contrario de que ninguno viva de alquiler. Como es más fácil el cálculo de la probabilidad del suceso contrario lo calculamos primero.

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = (1 - 0.25) \cdot (1 - 0.25) \cdot (1 - 0.25) = 0.75^3 = \boxed{\frac{27}{64}}$$

La probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler vale $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0.578125$.

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.

Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.

- B: Mañana lloverá.

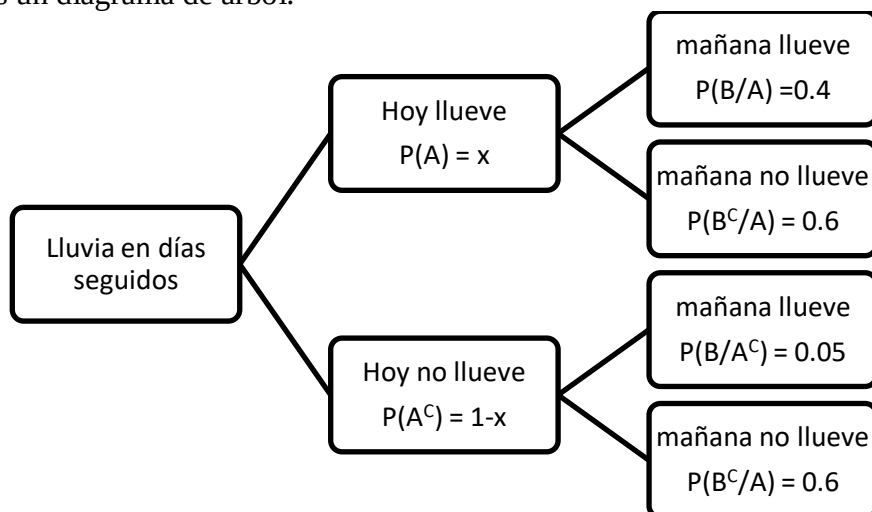
a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$

(5 pt)

b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá?

(5 pt)

a) La probabilidad de A y la de B es la misma por lo dicho al principio del ejercicio. Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de que mañana llueva según el diagrama de árbol vale:

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(A^c)P(B/A^c) =$$

$$= x \cdot 0.4 + (1-x) \cdot 0.05 = 0.4x + 0.05 - 0.05x = 0.05 + 0.35x$$

Como debe ser $P(A) = P(B)$ tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} P(B) = 0.05 + 0.35x \\ P(A) = x \\ P(A) = P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0.05 + 0.35x \Rightarrow 0.65x = 0.05 \Rightarrow x = \frac{0.05}{0.65} = \frac{1}{13} \approx 0.0769$$

Hemos visto que $P(A) = P(B) = \frac{1}{13}$.

b) La probabilidad de que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy nos la da el enunciado del ejercicio y vale $P(B/A) = 0.4$.

Calculamos $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \{P(A) = P(B)\} = P(B/A)$$

Los dos sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)
- b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

X = El número de años que vivirá una persona nacida en el 2020. $X = N(\mu, 10)$

- a) Reducimos la situación a los hombres. Sabemos la media es de 79.6 años. $X = N(79.6, 10)$
Nos piden calcular $P(X > 60)$.

$$P(X > 60) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{60 - 79.6}{10}\right) = P(Z > -1.96) =$$

$$= P(Z < 1.96) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.975}$$

	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846

La probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años es de 0.975.

También nos piden calcular $P(60 \leq X \leq 70)$.

$$P(60 \leq X \leq 70) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{60 - 79.6}{10} \leq Z \leq \frac{70 - 79.6}{10}\right) =$$

$$= P(-1.96 \leq Z \leq -0.96) = P(Z \leq -0.96) - P(Z \leq -1.96) =$$

$$= P(Z \geq 0.96) - P(Z \geq 1.96) = 1 - P(Z \leq 0.96) - (1 - P(Z \leq 1.96)) =$$

$$= P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq 0.96) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.975 - 0.8315 = \boxed{0.1435}$$

	0	1	2	3	4	5	6	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8
0.9	0.8185	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8341	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8

La probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva entre 60 y 70 años es de 0.1435.

b) Calculamos las dos probabilidades y las comparamos.

X = El número de años que vivirá un hombre nacido en el 2020. $X = N(79.6, 10)$

$$P(X > 89.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{89.6 - 79.6}{10}\right) = P(Z > 1)$$

Y = El número de años que vivirá una mujer nacida en el 2020. $Y = N(83.6, 10)$

$$P(Y > 93.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{93.6 - 83.6}{10}\right) = P(Z > 1)$$

Como observamos la probabilidad es la misma: $P(X > 89.6) = P(Y > 93.6) = P(Z > 1)$.

Que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años es igual de probable que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años.

Convocatoria extraordinaria de 2023



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.
- a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)
- b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

P2.- Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.
- a) Si queremos llenar el camino solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)
- b) Si queremos llenar el camino solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

P3.- En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
 - Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.
- Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.
- a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables. (3 pt)
 - b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
 - c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

P4.- La temperatura de un objeto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$

$$= 45 \cdot 0.923^s + 25, \text{ para } s \geq 0$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

- Haz una gráfica esquemática de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. (7 pt)
- ¿A qué se tenderá a la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? (3 pt)

P5.- Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y tal que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? (10 pt)

P6.- Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.

B: En el segundo dado ha salido un 1.

C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

- Calcula $P(A)$. (3 pt)
- Calcula $P(A \cup B)$. (3 pt)
- ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? (4 pt)

P7.- En una población:

– las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y

– las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y desviación típica 0.11 metros.

Se pide:

- Escogemos un hombre al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (3 pt)
- Escogemos una mujer al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (4 pt)
- Que es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros? (3 pt)

P8.- Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$.

- Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? (3 pt)
- Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? (4 pt)

Ahora, tiremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? (3 pt)

SOLUCIONES

P1.- Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

- a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)
 b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

- a) Llamamos “x”, “y”, “z” al consumo (en Kwh) del coche cuando circula, respectivamente, por autopista, por ciudad y por carretera de montaña.

Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad $\rightarrow 180x + 60y = 50$

Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña $\rightarrow 200y + 80z = 50$

Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña $\rightarrow 150x + 80z = 50$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 180x + 60y = 50 \\ 200y + 80z = 50 \\ 150x + 80z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x + 6y = 5 \\ 20y + 8z = 5 \\ 15x + 8z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x + 6y = 5 \\ 20y + 8z = 5 \\ 8z = 5 - 15x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x + 6y = 5 \\ 20y + 5 - 15x = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x + 6y = 5 \\ 20y - 15x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 18x + 6y = 5 \\ 20y = 15x \Rightarrow y = \frac{15}{20}x = \frac{3}{4}x \end{array} \right\} \Rightarrow 18x + 6 \cdot \frac{3}{4}x = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x + \frac{9}{2}x = 5 \Rightarrow 36x + 9x = 10 \Rightarrow 45x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} \approx 0.222 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{6} \approx 0.167 \\ 8z = 5 - 15 \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{3} \Rightarrow z = \frac{5}{24} \approx 0.208 \end{array} \right.$$

El consumo por autopista es de 0.222 Kwh por kilómetro, por ciudad es de 0.167 Kwh por kilómetro y por montaña es de 0.208 Kwh por kilómetro.

- b) Por ciudad el consumo es de 1/6 Kwh por kilómetro y la batería es de 50 Kwh.

$$\frac{50}{1/6} = 300 \text{ kilómetros}$$

Puede circular durante 300 kilómetros.

P2.- Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
 - Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
 - Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.
- a) Si queremos llenar el camino solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)
- b) Si queremos llenar el camino solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

Llamamos “x” a los metros cúbicos de arena, “y” a los metros cúbicos de gravilla y “z” a los metros cúbicos de ceniza.

- a) Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen $\rightarrow$
 $x + z = 12$.

Un camión necesita transportar una carga de exactamente 18 toneladas de peso $\rightarrow$

$$1.6x + 0.5z = 18.$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 12 \\ 1.6x + 0.5z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 12 - z \\ 16x + 5z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow 16(12 - z) + 5z = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192 - 16z + 5z = 180 \Rightarrow -11z = -12 \Rightarrow \boxed{z = \frac{12}{11} \approx 1.1} \Rightarrow \boxed{x = 12 - \frac{12}{11} = \frac{120}{11} \approx 10.91}$$

Debe transportar 120/11 metros cúbicos de arena y 12/11 metros cúbicos de ceniza.

- b) El sistema sería: $\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 1.6x + 1.8y = 18 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 1.6x + 1.8y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 12 - y \\ 16x + 18y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow 16(12 - y) + 18y = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192 - 16y + 18y = 180 \Rightarrow 2y = -12 \Rightarrow y = \frac{-12}{2} = -6 \text{ ¡STOP!}$$

La cantidad de metros cúbicos de gravilla no puede ser negativa. Por lo que esta situación no tiene solución real.

P3.- En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

– Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.

– Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

a) Llamamos “x” al número de ofertas A e “y” al número de ofertas B.

Realizamos una tabla.

	Ensaïmadas	Cocas de patata	Barras de chocolate	Beneficio
Número de ofertas A (x)	2x	2x	4x	4x
Número de ofertas B (y)	6y	3y	3y	8y
TOTAL	$2x + 6y$	$2x + 3y$	$4x + 3y$	$4x + 8y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 4x + 8y$.

Las restricciones son:

“Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate” $\rightarrow$

$$2x + 6y \leq 120; 2x + 3y \leq 60; 4x + 3y \leq 72$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y \leq 120 \\ 2x + 3y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 72 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 60 \\ 2x + 3y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 72 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 3y = 60$$

x	$y = \frac{60 - x}{3}$
0	20
30	10
60	0

$$2x + 3y = 60$$

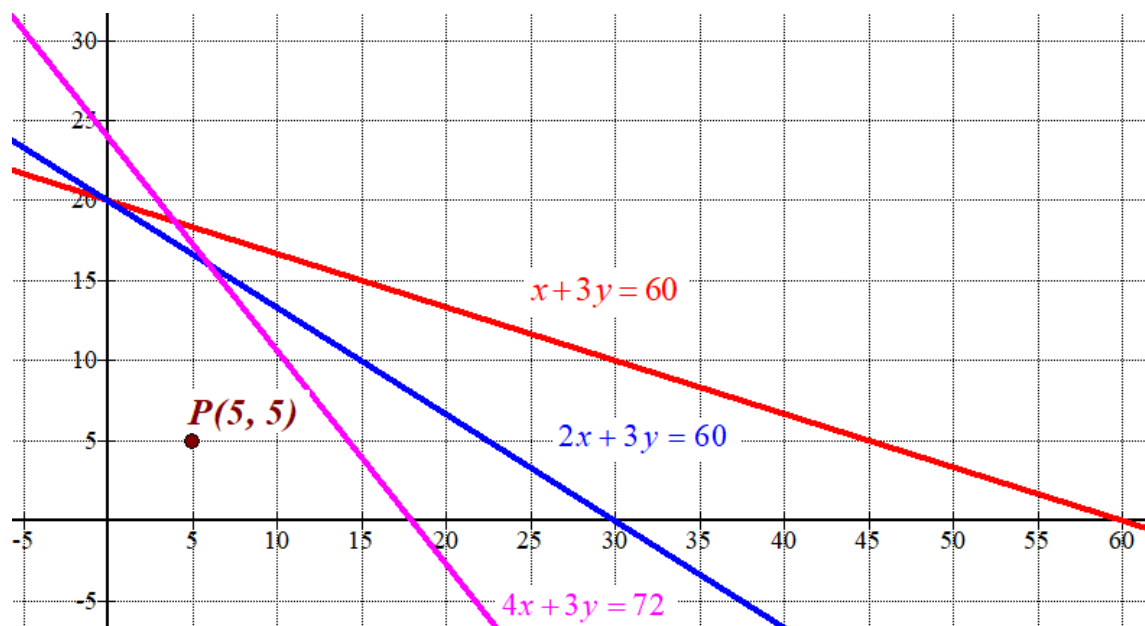
x	$\frac{60 - 2x}{3}$
0	20
6	16
30	0

$$4x + 3y = 72$$

x	$\frac{72 - 4x}{3}$
0	24
6	16
18	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

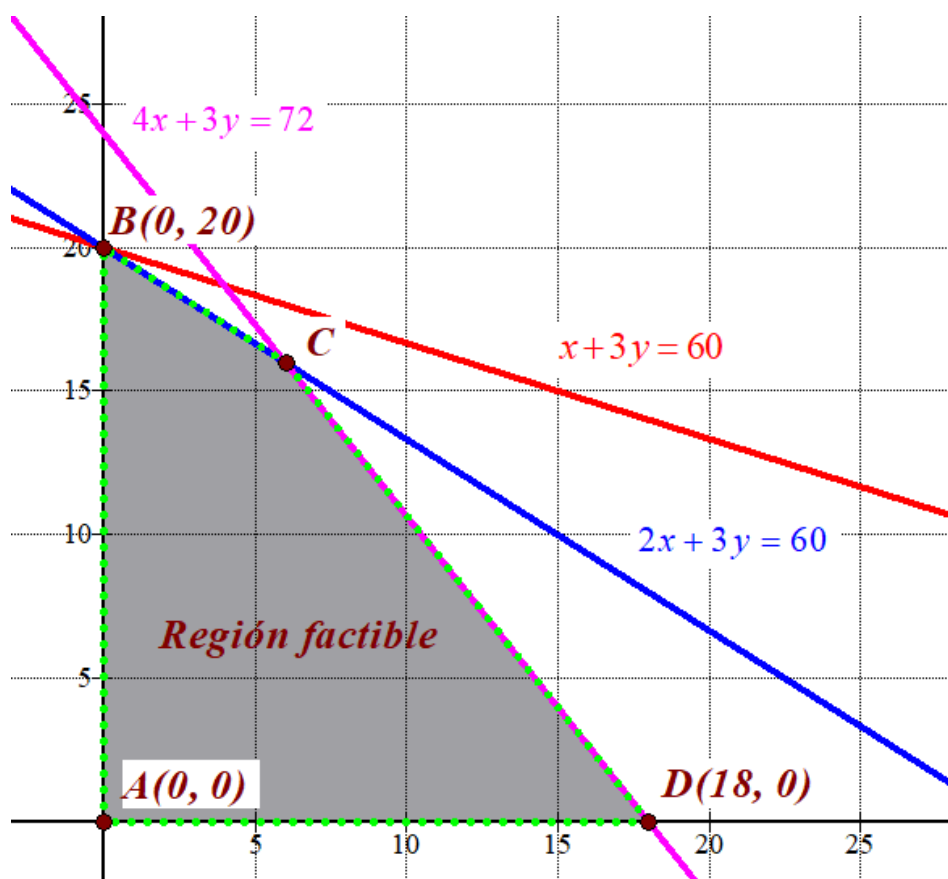
Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja, azul y rosa. Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 3 \cdot 5 \leq 60 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \leq 60 \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \leq 72 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 60 \\ 4x + 3y = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 60 - 2x \\ 4x + 3y = 72 \end{cases} \Rightarrow 4x + 60 - 2x = 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 6} \Rightarrow 3y = 60 - 12 \Rightarrow \boxed{y = \frac{48}{3} = 16} \Rightarrow \boxed{C(6, 16)}$$

Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B(0, 20)$, $C(6, 16)$ y $D(18, 0)$.

c) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 4x + 8y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 0 + 8 \cdot 20 = 160 \text{ € ;Máximo!}$$

$$C(6, 16) \rightarrow B(6, 16) = 4 \cdot 6 + 8 \cdot 16 = 152 \text{ €}$$

$$D(18, 0) \rightarrow B(18, 0) = 4 \cdot 18 + 0 = 72 \text{ €}$$

El valor máximo de los beneficios se obtiene en el vértice $B(0, 20)$.

Con 0 ofertas tipo A y 20 tipo B se satisfacen todas las restricciones y el beneficio es máximo, siendo este de 160 €.

P4.- La temperatura de un objeto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$

$$= 45 \cdot 0.923^s + 25, \text{ para } s \geq 0$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. (7 pt)
- b) ¿A qué se tenderá a la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? (3 pt)

- a) El dominio es $[0, +\infty)$, pues la función exponencial no presenta ninguna discontinuidad.

Calculamos la temperatura inicial, es decir, el valor de la función para $s = 0$.

$$t(0) = 45 \cdot e^{-0.08 \cdot 0} + 25 = 45 + 25 = 70$$

La función se inicia en el punto $(0, 70)$.

Calculamos el límite de la función cuando $s \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} t(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 = 45 \cdot e^{-\infty} + 25 = 45 \cdot 0 + 25 = 25$$

$t = 25$ es una asíntota horizontal de la función cuando $s \rightarrow +\infty$.

Cuando el tiempo tiende a valores grandes la temperatura tiende a ser de 25° .

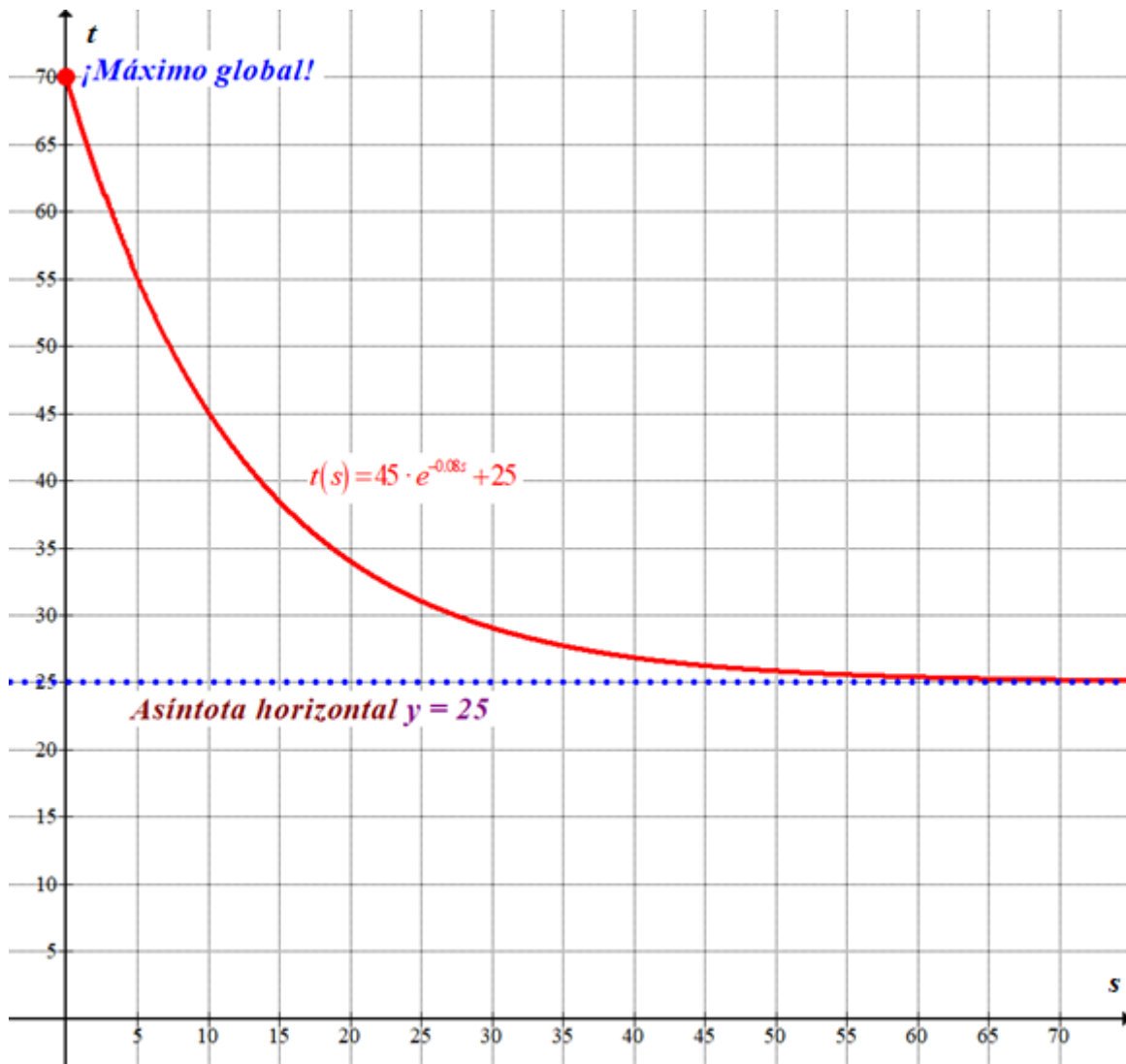
Calculamos los extremos locales.

$$\left. \begin{array}{l} t'(s) = 45 \cdot (-0.08)e^{-0.08s} = -3.6e^{-0.08s} \\ t'(s) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3.6e^{-0.08s} = 0 \Rightarrow \text{¡No existe!}$$

La función no presenta ni máximos ni mínimos locales y siempre es decreciente pues la derivada siempre es negativa $\rightarrow t'(s) = -3.6e^{-0.08s} < 0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

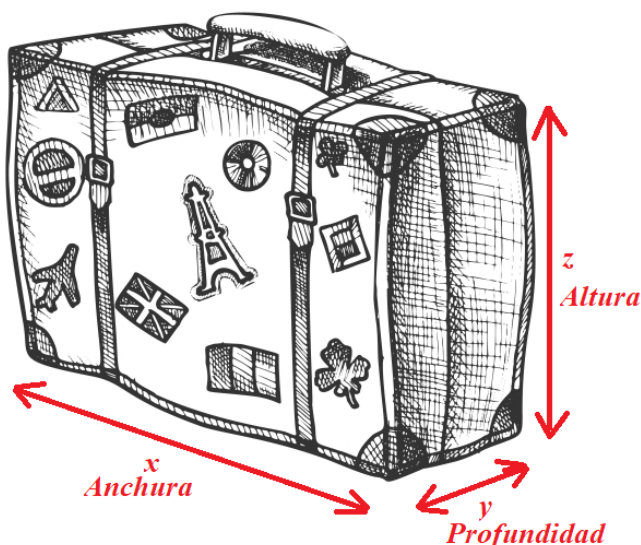
s	$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$
0	70
10	45.21
20	34.08
50	25.82



Observamos que la función tiene un máximo global en $s = 0$, dado que la función es siempre continua y decreciente. No tiene mínimo global.

- b) La temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo es el valor del límite de la función cuando $s \rightarrow +\infty$. Lo hemos calculado y la temperatura es de 25° . También se observa este comportamiento en la gráfica.

P5.- Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y tal que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? (10 pt)



$$\left. \begin{array}{l} y = 30 \\ x + 30 + z = 110 \rightarrow z = 80 - x \\ \text{Volumen} = xyz \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = V(x) = x \cdot 30 \cdot z = 30x(80 - x) = 2400x - 30x^2$$

El dominio de esta función es $0 \leq x \leq 80$, ya que la altura es $z = 80 - x$ y el valor de la altura no puede ser negativo (tampoco la anchura)

Derivamos la función volumen y buscamos cuando se anula la derivada para obtener sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} V(x) = 2400x - 30x^2 \Rightarrow V'(x) = 2400 - 60x \\ V'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2400 - 60x = 0 \Rightarrow x = \frac{2400}{60} = 40$$

Comprobamos que el punto crítico $x = 40$ es un máximo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$V''(x) = -60 \Rightarrow V''(40) = -60 < 0 \rightarrow x = 40 \text{ es máximo relativo}$$

Comparamos el valor del volumen en el máximo relativo y el valor en los extremos del intervalo de definición $[0, 80]$.

$$V(0) = 0 \text{ centímetros cúbicos.}$$

$$V(40) = 2400 \cdot 40 - 30 \cdot 40^2 = 48000 \text{ centímetros cúbicos.}$$

$$V(80) = 0 \text{ centímetros cúbicos.}$$

El volumen es máximo cuando la anchura de la maleta es de 40 centímetros. Siendo este volumen máximo de 48000 cm^3 .

P6.- Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.

B: En el segundo dado ha salido un 1.

C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

- | | |
|--|--------|
| a) Calcula $P(A)$. | (3 pt) |
| b) Calcula $P(A \cup B)$. | (3 pt) |
| c) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? | (4 pt) |

a) Aplicamos la regla de Laplace y $P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{1}{6}$.

Aplicamos la regla de Laplace y $P(B) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{1}{6}$.

b) Calculamos la probabilidad del suceso $A \cap B$.

$$P(A \cap B) = \{\text{Sucesos independientes}\} = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Calculamos la probabilidad pedida.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \boxed{\frac{11}{36}}$$

c) La suma de los dos dados es 3 cuando sale 1, 2 o 2, 1. Dos sucesos favorables de los 36 posibles resultados de lanzar dos dados.

$$P(C) = \boxed{\frac{2}{36}}$$

Los sucesos C y $A \cup B$ son independientes si se cumple: $P[C \cap (A \cup B)] = P(C)P(A \cup B)$.

El suceso $C \cap (A \cup B) = C$, pues $A \cup B$ es sacar 1 en el primer o en el segundo dado = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61} y C es el suceso “sacar 12 o 21 = {12, 21}”

$$\left. \begin{array}{l} P[C \cap (A \cup B)] = P(C) = \frac{2}{36} \\ P(C)P(A \cup B) = \frac{2}{36} \cdot \frac{11}{36} \end{array} \right\} \Rightarrow P[C \cap (A \cup B)] \neq P(C)P(A \cup B)$$

Los sucesos C y $A \cup B$ no son independientes.

P7.- En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y desviación típica 0.11 metros.

Se pide:

- Escogemos un hombre al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (3 pt)
- Escogemos una mujer al azar. Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? (4 pt)
- Que es más probable, que un hombre tenga una altura inferior a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura inferior a 1.76 metros? (3 pt)

X = Altura de un hombre. $X = N(1.76, 0.12)$

Y = Altura de una mujer. $Y = N(1.62, 0.11)$

- a) Nos piden calcular $P(X \geq 1.76)$.

$$P(X \geq 1.76) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 1.76}{0.12} \geq \frac{1.76 - 1.76}{0.12}\right) = P(Z \geq 0) = \boxed{0.5}$$

- b) Nos piden calcular $P(Y \geq 1.76)$.

$$P(Y \geq 1.76) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{Y - 1.62}{0.11} \geq \frac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) = P\left(Z \geq \frac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27) = 1 - 0.898 = \boxed{0.102}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292

- c) Calculamos las probabilidades de ambos sucesos y los comparamos.

$$\left. \begin{aligned} P(X < 1.76) &= 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.5 = 0.5 \\ P(Y < 1.76) &= 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(Y < 1.76) = 0.898 > 0.5 = P(X < 1.76)$$

Es más probable que la mujer tenga una altura inferior a 1.76.

P8.- Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$.

- a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? (3 pt)
- b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? (4 pt)
- Ahora, tiremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $N(\mu = 50, \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras no está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? (3 pt)

X = número de caras en 100 tiradas. $X = B(100, 0.5)$.

$Y = N(50, 5)$

Las probabilidades de la variable binomial X se aproximan por una normal Y .

- a) Nos piden calcular $P(X \geq 60)$.

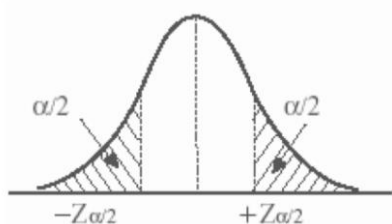
$$P(X \geq 60) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 59.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{Y - 50}{5} \geq \frac{59.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 1.9) = 1 - P(Z \leq 1.9) = 1 - 0.9713 = \boxed{0.0287}$$

- b) Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$$



	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9464	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678

El intervalo de confianza es:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma) = (50 - 1.645 \cdot 5, 50 + 1.645 \cdot 5) = (41.775, 58.225)$$

Como el valor 46 caras entra dentro del intervalo de confianza es razonable que la moneda no esté trucada (con el nivel de confianza del 90%)

- c) En el apartado anterior el intervalo de confianza contenía el 90% de valores más probables, así que la probabilidad de que esta nueva observación no esté contenida en el mismo intervalo es del 10%.

Convocatoria ordinaria de 2023



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

- a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

- b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)
- c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

P2.- Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

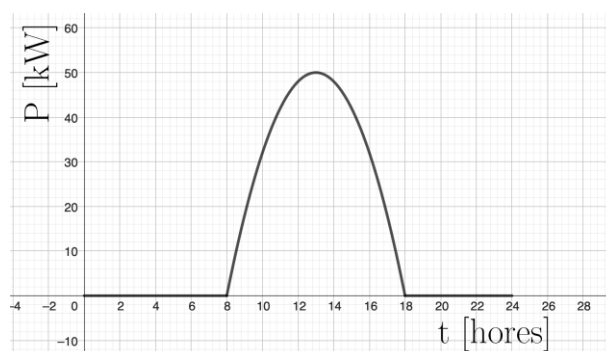
Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

- a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)
- b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)
- c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

P3.- La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{para } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{para } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



- a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c ? (3 pt)
 b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)
 c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

P4.- Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty)$$

- a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)
 b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

P5.- Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

- a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$. (4 pt)
 b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$? (3 pt)
 c) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

P6.- Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)
 b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

P7.- De un total de $n = 80$ alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50% ha aprobado el de física.

- a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)
 b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)
 c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

P8.- Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{x}$
55	62	69	70	72	77	94	103	75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de $\sigma = 20$ años.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (3 pt)
 Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75.25$.
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

SOLUCIONES**P1.-** Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

a) Calculamos el coste en cada empresa.

$$\text{La empresa A} \rightarrow 150 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 180 = 940 \text{ €}$$

$$\text{La empresa B} \rightarrow 300 + 10 \cdot 50 + 0 \cdot 180 = 800 \text{ €}$$

$$\text{La empresa C} \rightarrow 100 + 0 \cdot 50 + 5 \cdot 180 = 1000 \text{ €}$$

Hubiese costado menos cara la empresa B, solo 800 €.

b) La empresa A $\rightarrow 150 + 5 \cdot x + 3 \cdot y = 1050 \text{ €}$

$$\text{La empresa B} \rightarrow 300 + 10 \cdot x + 0 \cdot y = 900 \text{ €}$$

Planteamos un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 150 + 5x + 3y = 1050 \\ 300 + 10x = 900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 900 \\ 10x = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 900 \\ x = \frac{600}{10} = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 300 + 3y = 900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{3} = 200$$

La previsión es de 60 clientes y 200 facturas.

c) La empresa C $\rightarrow 100 + 0 \cdot x + 5 \cdot y = 100 + 5y \text{ €}$.

Si utilizamos los datos del apartado b) nos costaría $100 + 5 \cdot 200 = 1100 \text{ €}$

P2.- Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

- a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)
- b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)
- c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

a) Llamamos $x = m^3$ de arena, $y = m^3$ de gravilla, $12 - x - y = m^3$ de ceniza.

Realizamos una tabla.

	m^3 de material	Peso en toneladas	Facturación
Toneladas de arena (x)	x	1.6x	80x
Toneladas de gravilla (y)	y	1.8y	100y
Toneladas de ceniza	12-x-y	0.5(12-x-y)	25(12-x-y)
TOTAL	12	$1.6x + 1.8y + 0.5(12 - x - y)$	$80x + 100y + 25(12 - x - y)$

La función a maximizar es la facturación que viene dado por la expresión:

$$f(x, y) = 80x + 100y + 25(12 - x - y) = 80x + 100y + 300 - 25x - 25y = 55x + 75y + 300$$

Las restricciones son:

“El camión transporta como máximo un peso de 18 toneladas” $\rightarrow$

$$1.6x + 1.8y + 0.5(12 - x - y) \leq 18 \Rightarrow 1.6x + 1.8y + 6 - 0.5x - 0.5y \leq 18 \Rightarrow 1.1x + 1.3y \leq 12$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 1.1x + 1.3y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x + 13y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$$11x + 13y = 120$$

x	$y = \frac{120 - 11x}{13}$
0	$120/13$
1	$109/13$
5	5

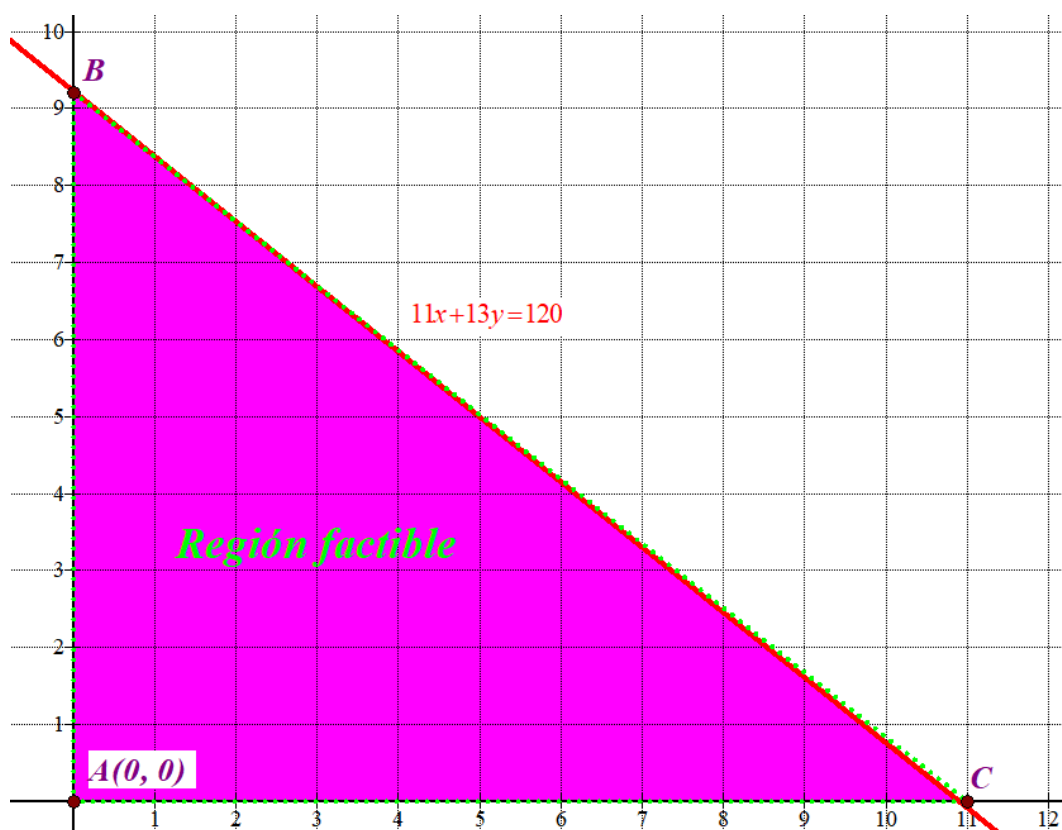
$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $11x + 13y \leq 120$ y $x \geq 0; y \geq 0$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de la recta roja.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x + 13y = 120 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 13y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{13} \Rightarrow B\left(0, \frac{120}{13}\right)$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x + 13y = 120 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 11x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{11} \Rightarrow C\left(\frac{120}{11}, 0\right)$$

Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B\left(0, \frac{120}{13}\right)$ y $C\left(\frac{120}{11}, 0\right)$

c) Valoramos la función $f(x, y) = 55x + 75y + 300$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B\left(0, \frac{120}{13}\right) \rightarrow f\left(0, \frac{120}{13}\right) = 0 + 75 \frac{120}{13} + 300 = \frac{12900}{13} \approx 992.31 \text{ €}$$

$$C\left(\frac{120}{11}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{120}{11}, 0\right) = 55 \frac{120}{11} + 0 + 300 = 900 \text{ €}$$

La máxima facturación se obtiene en el vértice $B\left(0, \frac{120}{13}\right)$. Significa que sin transportar arena,

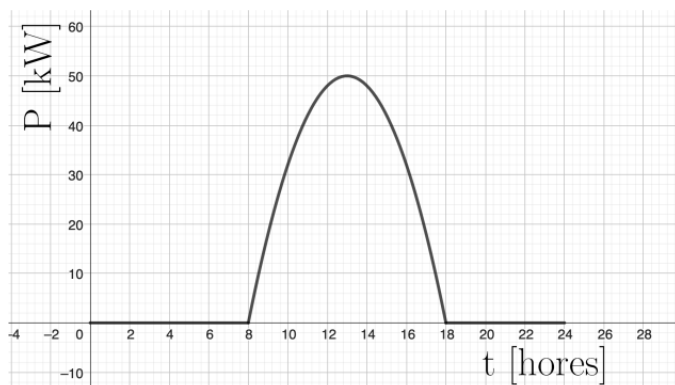
transportando $120/13 = 9.23 \text{ m}^3$ de gravilla y el resto de cenizas (2.77 m^3) se consigue una facturación máxima de 992.31 €.

Para maximizar la facturación debe transportar $9.23 \cdot 1.8 = 16.615$ toneladas de gravilla y $2.77 \cdot 0.5 = 1.385$ toneladas de ceniza.

P3.- La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 8, \\ -2t^2 + 52t + c & \text{para } 8 \leq t < 18, \\ 0 & \text{para } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



- a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c ? (3 pt)
 b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)
 c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

- a) Debe ser continua en $t = 8$ y en $t = 18$.

Continua en $t = 8$

$$\left. \begin{aligned} P(8) &= -2t^2 + 52t + c = -2 \cdot 8^2 + 52 \cdot 8 + c = 288 + c \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} P(t) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} -2t^2 + 52t + c = 288 + c \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} P(t) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} 0 = 0 \\ P(8) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} P(t) = \lim_{x \rightarrow 8^-} P(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 288 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -288}$$

Comprobamos que también es continua en $t = 18$.

$$\left. \begin{aligned} P(18) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 18^+} P(t) &= \lim_{x \rightarrow 18^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 18^-} P(t) &= \lim_{x \rightarrow 18^-} -2t^2 + 52t - 288 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(18) = \lim_{x \rightarrow 18^+} P(t) = \lim_{x \rightarrow 18^-} P(t) = 0$$

La función es continua en $t = 18$.

Con $c = -288$ la función $P(t)$ es continua.

- b) Nos piden calcular $P(13)$: $P(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 288 = \boxed{50 \text{ kW}}$

- c) Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(8, 18)$.

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= -4t + 52 \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4t + 52 = 0 \Rightarrow t = 13$$

En el intervalo $(8, 13)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $P'(10) = -40 + 52 = 12 > 0$. La función crece en $(8, 13)$.

En el intervalo $(13, 18)$ tomamos $t = 15$ y la derivada vale $P'(15) = -60 + 52 = -8 < 0$. La función decrece en $(13, 18)$.

La función es creciente en $(8, 13)$ y decreciente en $(13, 18)$. En $[0, 8) \cup (18, 24]$ la función es constante.

P4.- Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \quad m \in (0, +\infty)$$

- a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)
- b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

a) El dominio es $(0, +\infty)$ pues la función no presenta ninguna dificultad.

En los extremos tenemos que en $m = 0$:

$$\lim_{m \rightarrow 0} p(m) = \lim_{m \rightarrow 0} 0.1 \cdot m^{1.5} = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0.1$$

Y en m tendiendo a $+\infty$ tenemos que:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} p(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} 0.1 \cdot m^{1.5} = 0.1 \cdot (+\infty)^{1.5} = +\infty$$

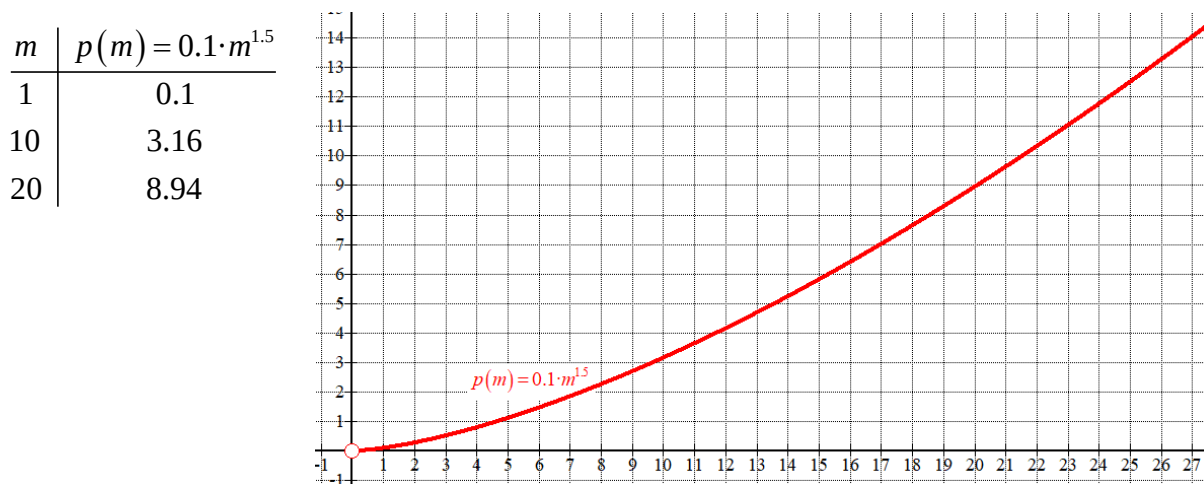
Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} p'(m) = 0.1 \cdot (1.5) m^{0.5} = 0.15 m^{0.5} \\ p'(m) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.15 m^{0.5} = 0 \Rightarrow m = 0 \notin (0, +\infty)$$

La derivada no cambia de signo en $(0, +\infty)$ y siempre es positiva. La función siempre es creciente.

No presenta máximos ni mínimos locales.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.



b) Despejamos m en la expresión de la función.

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5} \Rightarrow m^{1.5} = \frac{p}{0.1} = 10p \Rightarrow m^{3/2} = 10p \Rightarrow m = (10p)^{2/3} = \sqrt[3]{(10p)^2}$$

$$m(p) = \sqrt[3]{100p^2}, \quad p \in (0, +\infty)$$

P5.- Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3, \quad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$. (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$? (3 pt)

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

a)

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3(x+2)^2 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12 \\ g'(x) &= 3x^2 + 12x + 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) = g'(x)$$

b) Para que sean la misma función deben coincidir en todos sus puntos. Comprobamos si las funciones coinciden en un punto cualquiera, por ejemplo, $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= (0+2)^3 = 8 \\ g(0) &= 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = 8 \neq 0 = g(0) \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

No es cierto que sean iguales las funciones.

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^3}{x^3 + 6x^2 + 12x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+2)^3}{x^3}}{\frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)^3}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{6x^2}{x^3} + \frac{12x}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3}{1 + \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^3}{1 + \frac{6}{\infty} + \frac{12}{\infty}} = \frac{(1)^3}{1 + 0 + 0} = \boxed{1} \end{aligned}$$

P6.-Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)
 b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)
 Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

- a) Del 0 al 9 hay 10 cifras de las cuales son múltiplos de 3 cuatro de ellas: 0, 3, 6, 9.
 La probabilidad de elegir una cifra y que sea múltiplo de 3 es $4/10 = 0.4$.

Llamamos $M1$ y $M2$ a los sucesos “escoger múltiplo de 3 en 1ª y 2ª elección” respectivamente.

$$P(M1 \cap M2) = \{\text{Elecciones independientes}\} = P(M1)P(M2) = 0.4 \cdot 0.4 = \boxed{0.16}$$

- b) Utilizamos el suceso contrario “No sacar múltiplo de 3 en ninguna de las elecciones”.

$$P(\overline{M1} \cap \overline{M2}) = P(\overline{M1})P(\overline{M2}) = 0.6 \cdot 0.6 = \boxed{0.36}$$

La probabilidad pedida es $1 - 0.36 = 0.64$.

- c) Realizamos el mismo razonamiento del apartado anterior.

Utilizamos el suceso contrario “No sacar múltiplo de 3 ninguna de ellas”.

$$\begin{aligned} P(\overline{M1} \cap \overline{M2} \cap \overline{M3} \cap \overline{M4} \cap \overline{M5} \cap \overline{M6} \cap \overline{M7} \cap \overline{M8} \cap \overline{M9}) &= \\ &= P(\overline{M1})P(\overline{M2})P(\overline{M3})P(\overline{M4})P(\overline{M5})P(\overline{M6})P(\overline{M7})P(\overline{M8})P(\overline{M9}) = \\ &= 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.6^9 = \boxed{0.01} \end{aligned}$$

La probabilidad pedida es $1 - 0.01 = 0.99$.

P7.- De un total de $n = 80$ alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50% ha aprobado el de física.

- a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)
- b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)
- c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Obtenemos todos los datos posibles:

El 80% de los alumnos (80) han aprobado un examen de matemáticas $\rightarrow 0,8 \cdot 80 = 64$ han aprobado matemáticas.

El 75% han aprobado un examen de física $\rightarrow 0,75 \cdot 80 = 60$ han aprobado física.

De los que han suspendido el examen de matemáticas ($80 - 64 = 16$), solo un 50% ha aprobado el de física $\rightarrow 0,5 \cdot 16 = 8$ han suspendido matemáticas y aprobado física.

Ponemos los datos en una tabla de contingencia y completamos el resto de datos.

	Aprueban física	Suspenden física	
Aprueban matemáticas			64
Suspenden matemáticas	8		
	60		80

Completamos la tabla.

	Aprueban física	Suspenden física	
Aprueban matemáticas	52	12	64
Suspenden matemáticas	8	8	16
	60	20	80

- a) De los que han suspendido física (20) hay 12 que han aprobado matemáticas.
- b) Si sumamos los datos de la tabla tenemos que 52 aprueban las dos materias, 12 aprueban solo matemáticas y 8 solo aprueban física. En total $52 + 12 + 8 = 72$ aprueban alguno de los dos exámenes.
- c) Llamamos M al suceso “Aprobar matemáticas” y F al suceso “Aprobar física”. Para ser independientes debe cumplirse que $P(M \cap F) = P(M)P(F)$.

$$\left. \begin{aligned} P(M \cap F) &= \frac{52}{80} = 0,65 \\ P(M)P(F) &= \frac{64}{80} \cdot \frac{60}{80} = 0,60 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M \cap F) = 0,65 \neq 0,60 = P(M)P(F)$$

Al ser distintos sabemos que los sucesos no son independientes.

P8.- Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\bar{x}$
55	62	69	70	72	77	94	103	75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de $\sigma = 20$ años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75.25$.

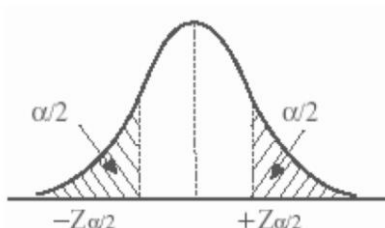
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

X = Edad de las tortugas marinas (en años). $X = N(\mu, 20)$

a) Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Obtenemos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}} \approx 11.632 \text{ años}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (75.25 - 11.632, 75.25 + 11.632) = (63.718, 86.982)$$

b) Nos piden calcular $P(X > 90)$.

$$P(X > 90) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{90 - 75.25}{20}\right) = P(Z > 0.24) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.24) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5948 = \boxed{0.4052}$$

c) Nos piden calcular $P(90 < X < 100)$.

$$P(90 < X < 100) = P(X < 100) - P(X < 90) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{100 - 75.25}{20}\right) - P\left(Z < \frac{90 - 75.25}{20}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.24) - P(Z \leq 0.24) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8925 - 0.5948 = \boxed{0.2977}$$

Convocatoria extraordinaria de 2022



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

**Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II**

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema siguiente:

$$3x + 2y + z = 1$$

$$-mx + 2y + z = 2$$

dependiente del parámetro m .

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.
(5 puntos)

b) Encuentre la solución para $m = 2$. (5 puntos)

2 Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)

c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisface

$$X^2 - 4X + nId = 0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1'5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

4 Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$

a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)

b) Encuentre una primitiva de $f(x)$. (3 puntos)

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 4$, $x = 7$ e $y = 0$.

(2 puntos)

5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

- a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
- b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
- c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

- a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)
- b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)
- c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (4 puntos)
- c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A) = 0.9 \quad p(A/B) = 0.2 \quad p(A) = 0.1$$

- a) Calcule $p(A \cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)
- b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)
- c) Calcule $p(A \cap \bar{B})$, donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

SOLUCIONES

1 Dado el sistema siguiente:

$$3x + 2y + z = 1$$

$$-mx + 2y + z = 2$$

dependiente del parámetro m .

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para $m = 2$. (5 puntos)

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ -mx + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z + 3x = 1 \\ 2y + z - mx = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z + 3x = 1 \\ -2y - z + mx = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(3+m)x = -1}{(3+m)x = -1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z + 3x = 1 \\ (3+m)x = -1 \end{array} \right\}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

- Si $3 + m = 0 \rightarrow m = -3$ entonces el sistema queda $\left. \begin{array}{l} 2y + z + 3x = 1 \\ 0 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$

Si $m = -3$ el sistema es incompatible (sin solución).

- Si $3 + m \neq 0 \rightarrow m \neq -3$ entonces el sistema se puede resolver, pues queda:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z + 3x = 1 \\ (3+m)x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \{3+m \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1}{3+m}} \Rightarrow 2y + z + 3 \frac{-1}{3+m} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + z = 1 + \frac{3}{3+m} \Rightarrow 2y + z = \frac{3+m+3}{3+m} \Rightarrow \boxed{z = \frac{6+m}{3+m} - 2y} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3+m} \\ y = t \\ z = \frac{6+m}{3+m} - 2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

a) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuando $m \neq -3$

b) Si $m = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones, Sustituimos en las soluciones obtenidas

$$\text{anteriormente para } m \neq -3: \begin{cases} x = \frac{-1}{3+2} = -\frac{1}{5} \\ y = t \\ z = \frac{6+2}{3+2} - 2t = \frac{8}{5} - 2t \end{cases}$$

Las infinitas soluciones son: $x = -\frac{1}{5}$; $y = t$; $z = \frac{8}{5} - 2t$; $t \in \mathbb{R}$.

2 Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)

c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisfice

$$X^2 - 4X + nId = 0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

a) La matriz Y es invertible si su determinante es no nulo.

$$\left. \begin{aligned} |Y| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = -k - 4 \\ |Y| &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -k - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -4}$$

La matriz Y es invertible si $k \neq -4$.

b) Si $k = 1$ la matriz Y es invertible.

$$|Y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0.$$

$$Y^{-1} = \frac{Adj(Y^T)}{|Y|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) Sustituimos en la ecuación matricial los valores de las matrices y resolvemos.

$$X^2 - 4X + nId = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - 4m + n & 0 \\ 0 & -3 + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + n = 0 \\ -3 + n = 0 \rightarrow \boxed{n = 3} \end{cases} \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3 = m} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1 = m} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m = n = 3$ o $m = 1$ y $n = 3$.

3 El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1'5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

- a) Llamamos x = número de paquetes del tipo A, y = número de paquetes del tipo B. Realizamos una tabla.

	Paquetes de pipas	chicles	Bombones	Beneficio
Nº paquetes tipo A (x)	x	$2x$	$2x$	$1.5x$
Nº paquetes tipo B (y)	y	$4y$	y	$2y$
TOTAL	$x + y$	$2x + 4y$	$2x + y$	$1.5x + 2y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x, y) = 1.5x + 2y$$

Las restricciones son:

“dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones” $\rightarrow$
 $x + y \leq 10$; $2x + 4y \leq 30$; $2x + y \leq 18$

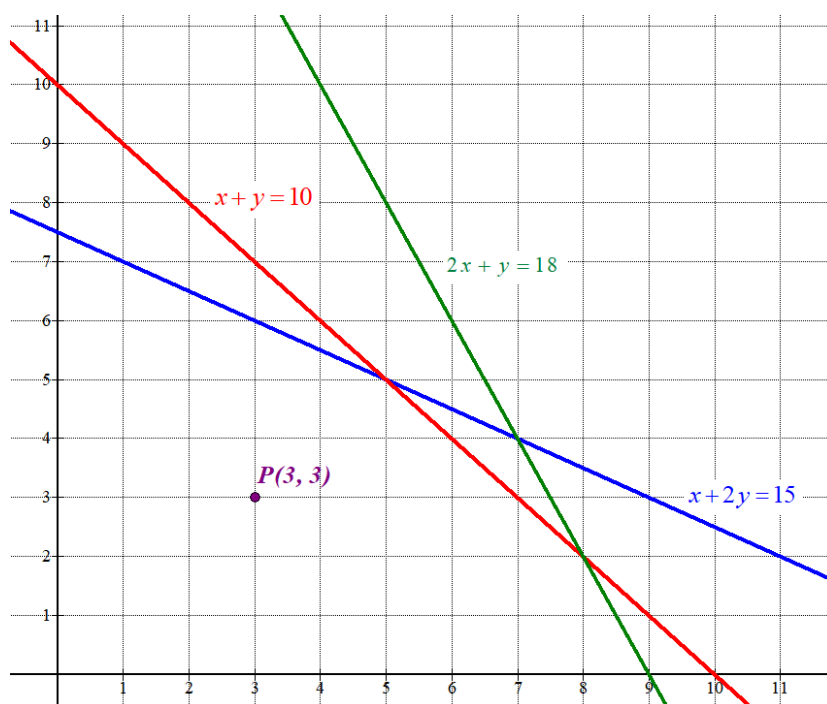
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 30 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 10$		$x + 2y = 15$		$2x + y = 18$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 10 - x$	x	$y = \frac{15 - x}{2}$	x	$y = 18 - 2x$	
0	10	0	7.5	0	18	
5	5	5	5	7	4	
8	2	15	0	8	2	



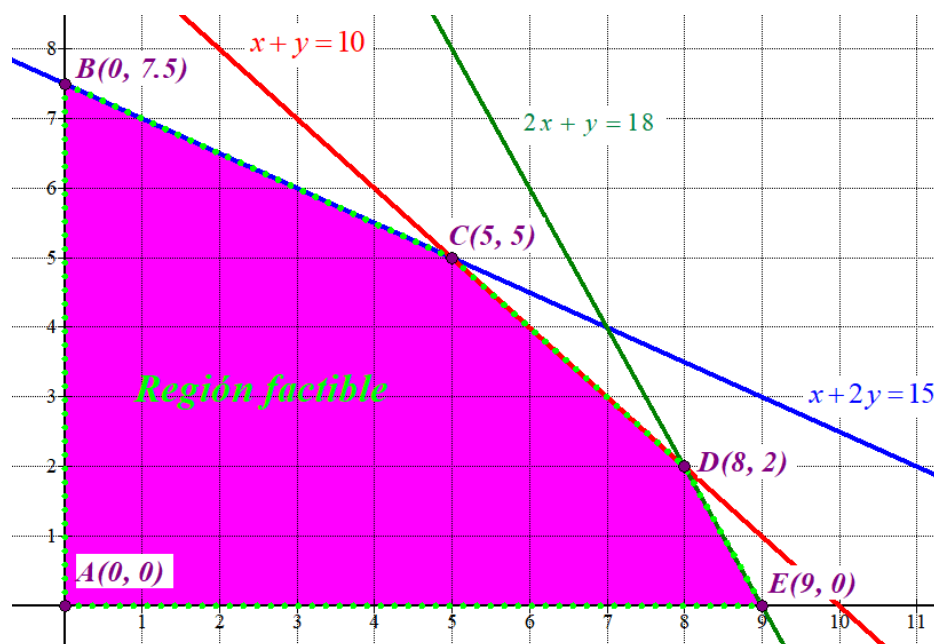
La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\},$$

por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul, verde y roja. Comprobamos que el punto $P(3, 3)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 3 \leq 10 \\ 3 + 6 \leq 15 \\ 6 + 3 \leq 18 \\ 3 \geq 0; 3 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x, y) = 1.5x + 2y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 7.5) \rightarrow B(0, 7.5) = 0 + 15 = 15$$

$$C(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 7.5 + 10 = 17.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(8, 2) \rightarrow B(8, 2) = 12 + 4 = 16$$

$$E(9, 0) \rightarrow B(9, 0) = 13.5 + 0 = 13.5$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(5, 5)$. Significa que confeccionando y vendiendo 5 paquetes de cada tipo se consiguen unos beneficios máximos de 17.5 €.

4 Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$

- a) Encuentre su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 puntos)
 b) Encuentre una primitiva de $f(x)$. (3 puntos)
 c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 4$, $x = 7$ e $y = 0$. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f'(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{-(x+3) + x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{-x-3+x-1}{x^2+3x-x-3} = \frac{-4}{x^2+2x-3}$$

$$f''(x) = \frac{0 - (-4)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x+8}{(x^2+2x-3)^2} = 0 \Rightarrow 8x+8 = 0 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Tenemos un punto crítico. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{8(-4)+8}{((-4)^2+2(-4)-3)^2} = \frac{-24}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{8(-2)+8}{((-2)^2+2(-2)-3)^2} = \frac{-8}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-3, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{8}{(-3)^2} = \frac{8}{9} > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{16+8}{(2^2+4-3)^2} = \frac{24}{25} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$ y crece en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Calculamos la integral pedida.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+3} dx = \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x+3| + K}$$

c) Vemos si la función corta el eje de abscisas.

$$f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3} \left. \vphantom{f(x)} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow -4 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

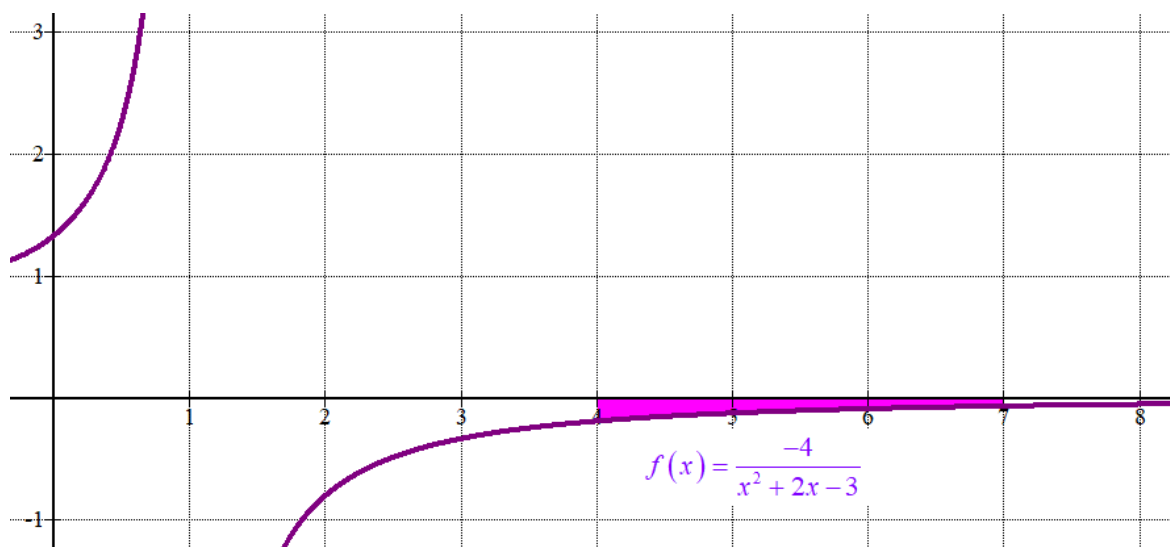
La función no corta el eje de abscisas.

El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 4$, $x = 7$ e $y = 0$ será el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 7 de la función.

$$\text{Área} = \left| \int_4^7 f(x) dx \right| = \left| \left[-\ln|x-1| + \ln|x+3| \right]_4^7 \right| =$$

$$= \left| \left[-\ln|7-1| + \ln|7+3| \right] - \left[-\ln|4-1| + \ln|4+3| \right] \right| = \left| -\ln 6 + \ln 10 + \ln 3 - \ln 7 \right| \approx \left| -0.336 \right|$$

$$\boxed{\text{Área} = \ln \frac{42}{30} \approx 0.336 u^2}$$



5 Una academia de inglés cobra una cuota de 50 euros mensuales y cuenta con 200 estudiantes. Un estudio de mercado afirma que por cada 2 euros que sube (o baja) la cuota se pierden (o se ganan) 10 estudiantes.

- a) Escriba el número de estudiantes de la academia en función del precio de la cuota. (3 puntos)
 b) ¿Para qué valor de la cuota la academia se quedaría sin estudiantes? (2 puntos)
 c) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un ingreso mensual máximo. ¿Cuál sería ese ingreso y cuántos estudiantes tendría la academia? (5 puntos)

a) Llamamos “x” a la cuota mensual y $N(x)$ al número de estudiantes.

$N(x)$ es una función lineal $\rightarrow N(x) = ax + b$.

Tenemos que $N(50) = 200$ y $N(52) = 200 - 10 = 190$.

$$\left. \begin{array}{l} N(x) = ax + b \\ N(50) = 200 = 50a + b \\ N(52) = 190 = 52a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 200 = 50a + b \\ 190 = 52a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 200 - 50a = b \\ 190 = 52a + b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 190 = 52a + 200 - 50a \Rightarrow -10 = 2a \Rightarrow \boxed{a = -5} \Rightarrow \boxed{b = 200 - 50(-5) = 450} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x) = -5x + 450}$$

La función es $N(x) = -5x + 450$, siendo x la cuota mensual y $N(x)$ el número de estudiantes.

b) Nos piden averiguar cuando $N(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} N(x) = -5x + 450 \\ N(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -5x + 450 = 0 \Rightarrow 5x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{5} = 90$$

Con una cuota de 90 euros la academia se queda sin estudiantes.

c) El ingreso mensual es el producto del número de estudiantes por la cuota que paga cada uno.

$$I(x) = x \cdot N(x) = x(-5x + 450) = -5x^2 + 450x$$

Derivamos esta función e igualamos la derivada a cero en busca de su unto crítico.

$$\left. \begin{array}{l} I(x) = -5x^2 + 450x \Rightarrow I'(x) = -10x + 450 \\ I'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -10x + 450 = 0 \Rightarrow 10x = 450 \Rightarrow \boxed{x = 45}$$

Calculamos la derivada segunda y vemos su signo para $x = 45$.

$$I'(x) = -10x + 450 \Rightarrow I''(x) = -10 \Rightarrow I''(45) = -10 < 0$$

La función ingresos mensuales alcanza un máximo para una cuota mensual de 45 €.

Como $N(45) = -5 \cdot 45 + 450 = 225$ el número de estudiantes es de 225.

Como $I(45) = -5 \cdot 45^2 + 450 \cdot 45 = 10125$ los ingresos máximos que se consiguen son 10125 €.

6 La evolución de la población de un Estado, en millones de habitantes, se puede aproximar mediante la función

$$P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40, \quad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años.

- a) Calcule la población actual (para $t = 0$) (2 puntos)
 b) Determine el límite de $P(t)$ cuando t tiende a infinito. (3 puntos)
 c) Determine al cabo de cuántos años la población será máxima y el número de habitantes que la función predice para este máximo. (5 puntos)

a) $P(0) = \frac{0}{4+0^2} + 40 = 40$. La población inicial es de 40 millones de habitantes.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{4+t^2} + 40 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{20t}{t^2}}{\frac{4}{t^2} + 1} + 40 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{20}{t}}{\frac{4}{t^2} + 1} + 40 = \frac{\frac{20}{\infty}}{\frac{4}{\infty} + 1} + 40 = \frac{0}{1} + 40 = 40$.

c) Derivamos la función e igualamos a cero la función derivada.

$$P'(t) = \frac{20(4+t^2) - 2t(20t)}{(4+t^2)^2} + 0 = \frac{80 + 20t^2 - 40t^2}{(4+t^2)^2} = \frac{80 - 20t^2}{(4+t^2)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{80 - 20t^2}{(4+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 80 - 20t^2 = 0 \Rightarrow 20t^2 = 80 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

Valoramos la derivada antes y después del segundo año para comprobar si es un máximo o un mínimo.

En $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{80 - 20 \cdot 1^2}{(4 + 1^2)^2} = \frac{60}{25} > 0$.

La función crece en $(0, 2)$.

En $(2, +\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $P'(3) = \frac{80 - 20 \cdot 3^2}{(4 + 3^2)^2} = \frac{-100}{169} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

Por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$.

Para $t = 2$ la función vale $P(2) = \frac{40}{4 + 2^2} + 40 = 45$.

Resumiendo: Al cabo de dos años se alcanza una población máxima de 45 millones de habitantes.

- 7 En una universidad se ha observado que la distribución de las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media $\mu = 5.1$ puntos y desviación típica $\sigma = 1.6$
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad que una muestra de 64 alumnos tenga una media superior a 5.9? (5 puntos)
- c) Si en un aula hay 50 alumnos, ¿cuántos alumnos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos? (3 puntos)

X = Las calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática. $X = N(5.1, 1.6)$

- a) Nos piden calcular $P(X < 4)$.

$$P(X < 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 5.1}{1.6} < \frac{4 - 5.1}{1.6}\right) = P(Z < -0.6875) =$$

$$= P(Z \geq 0.6875) = 1 - P(Z \leq 0.6875) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} =$$

$$= 1 - 0.7549 = \boxed{0.2451}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852

	0
0.0	0.5000 0.
0.1	0.5398 0.
0.2	0.5793 0.
0.3	0.6179 0.
0.4	0.6554 0.
0.5	0.6915 0.
0.6	0.7257 0.
0.7	0.7580 0.
0.8	0.7881 0.
0.9	0.8159 0.
1.0	0.8413 0.
1.1	0.8643 0.
1.2	0.8849 0.
1.3	0.9032 0.
1.4	0.9192 0.
1.5	0.9332 0.
1.6	0.9452 0.
1.7	0.9554 0.
1.8	0.9641 0.
1.9	0.9713 0.
2.0	0.9772 0.
2.1	0.9821 0.
2.2	0.9861 0.
2.3	0.9893 0.
2.4	0.9918 0.
2.5	0.9938 0.
2.6	0.9953 0.
2.7	0.9965 0.
2.8	0.9974 0.
2.9	0.9981 0.
3.0	0.9987 0.
3.1	0.9990 0.
3.2	0.9993 0.
3.3	0.9995 0.
3.4	0.9997 0.
3.5	0.9998 0.
3.6	0.9998 0.
3.7	0.9999 0.
3.8	0.9999 0.
3.9	1.0000 1.
4.0	1.0000 1.
4.1	1.0000 1.

- b) Si $X = N(5.1, 1.6)$ entonces $\overline{X}_{64} = N\left(5.1, \frac{1.6}{\sqrt{64}}\right) = N(5.1, 0.2)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} > 5.9)$.

$$P(\overline{X}_{64} > 5.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{5.9 - 5.1}{0.2}\right) =$$

$$= P(Z > 4) = 1 - P(Z < 4) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

- c) Calculamos $P(X > 4)$.

$$P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0.2451 = 0.7549$$

El número de alumnos de un grupo de 50 que se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos es de $0.7549 \cdot 50 = 37.745$. Aproximadamente se esperan unos 38 alumnos con dicha nota.

8 Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(B/A) = 0.9 \quad p(A/B) = 0.2 \quad p(A) = 0.1$$

- a) Calcule $p(A \cap B)$ y $p(B)$. (5 puntos)
- b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta. (2 puntos)
- c) Calcule $p(A \cap \bar{B})$, donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B. (3 puntos)

a) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} p(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ p(A) = 0.1 \\ p(B/A) = 0.9 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = \frac{P(A \cap B)}{0.1} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.09}$$

$$\left. \begin{array}{l} p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A \cap B) = 0.09 \\ p(A/B) = 0.2 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.2 = \frac{0.09}{p(B)} \Rightarrow 0.2 \cdot p(B) = 0.09 \Rightarrow \boxed{p(B) = \frac{0.09}{0.2} = 0.45}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse: $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap B) = 0.09 \\ p(A)p(B) = 0.1 \cdot 0.45 = 0.045 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

c) Aplicamos que $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.

$$\left. \begin{array}{l} p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) \\ p(A) = 0.1 \\ p(A \cap B) = 0.09 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.1 = 0.09 + p(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{p(A \cap \bar{B}) = 0.1 - 0.09 = 0.01}$$

Convocatoria ordinaria de 2022



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

- Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)
- Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

2 En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m² de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m² de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m² de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

- Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo.

3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

en función del parámetro a .

- Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)
- Encuentre la solución para $a = -2$. (4 puntos)

4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Calcule los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable. (5 puntos)
- Para $a = 4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

(5 puntos)

5 El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x) = \frac{100x}{b + x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

- a) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)
- b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)
- c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

- a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)
- b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)
- c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)
- d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

7 La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

- a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)
- b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol. (5 puntos)

8 En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

- a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)
- b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)
- c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

SOLUCIONES

1 Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

- a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)
 b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

- a) Llamamos a = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa A, b = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa B y c = Dinero (en miles de euros) invertido en la empresa C.

“Una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas” $\rightarrow a + b + c = 100$

“Las acciones de A valen ahora un 150 %, las de B un 110 % y las de C un 85 %. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros” $\rightarrow 1.50a + 1.10b + 0.85c = 102$

“Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas” $\rightarrow c = a + b$.

Juntamos las tres ecuaciones y nos queda un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 100 \\ 1.50a + 1.10b + 0.85c = 102 \\ c = a + b \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 100 \\ 1.50a + 1.10b + 0.85c = 102 \\ c = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + a + b = 100 \\ 1.50a + 1.10b + 0.85(a + b) = 102 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + 2b = 100 \\ 1.50a + 1.10b + 0.85a + 0.85b = 102 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 50 \\ 2.35a + 1.95b = 102 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 50 - a \\ 2.35a + 1.95b = 102 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.35a + 1.95(50 - a) = 102 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.35a + 97.5 - 1.95a = 102 \Rightarrow 0.4a = 4.5 \Rightarrow \boxed{a = 11.25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 50 - 11.25 = 38.75} \Rightarrow \boxed{c = 11.25 + 38.75 = 50}$$

Se han invertido 11250 € en acciones de A, 38750 € en acciones de B y 50000 € en acciones de C.

2 En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos x = número de bolsas del primer modelo, y = número de bolsas del segundo modelo.

Realizamos una tabla.

	m^2 de cuero	Horas de trabajo	Beneficio
Nº bolsas de primer modelo (x)	$0.9x$	$8x$	$30x$
Nº bolsas de segundo modelo (y)	$1.2y$	$4y$	$25y$
TOTAL	$0.9x + 1.2y$	$8x + 4y$	$30x + 25y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión:

$$B(x, y) = 30x + 25y$$

Las restricciones son:

“Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero” $\rightarrow$
 $0.9x + 1.2y \leq 60$

“Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo” $\rightarrow 8x + 4y \leq 400$

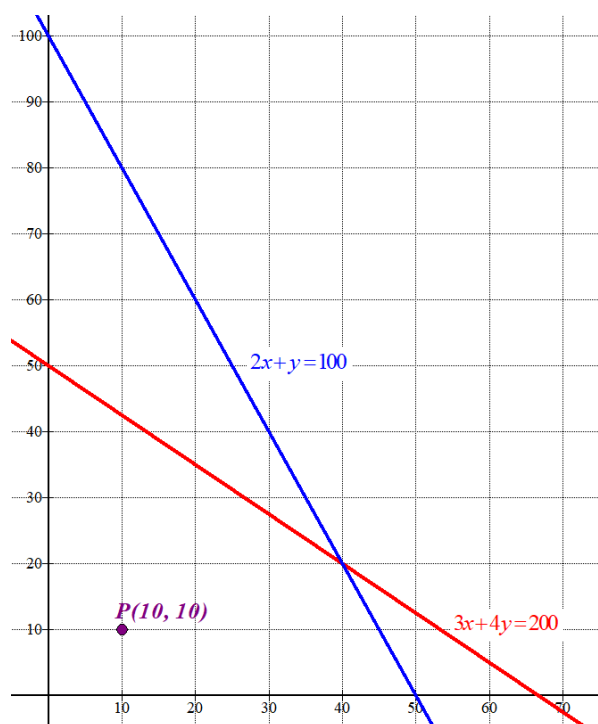
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.9x + 1.2y \leq 60 \\ 8x + 4y \leq 400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9x + 12y \leq 600 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$3x + 4y = 200$	$2x + y = 100$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{200-3x}{4} \\ \hline 0 & 120 \\ 40 & 20 \\ 60 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 100 - 2x \\ \hline 0 & 100 \\ 40 & 20 \\ 50 & 0 \end{array}$	Primer cuadrante

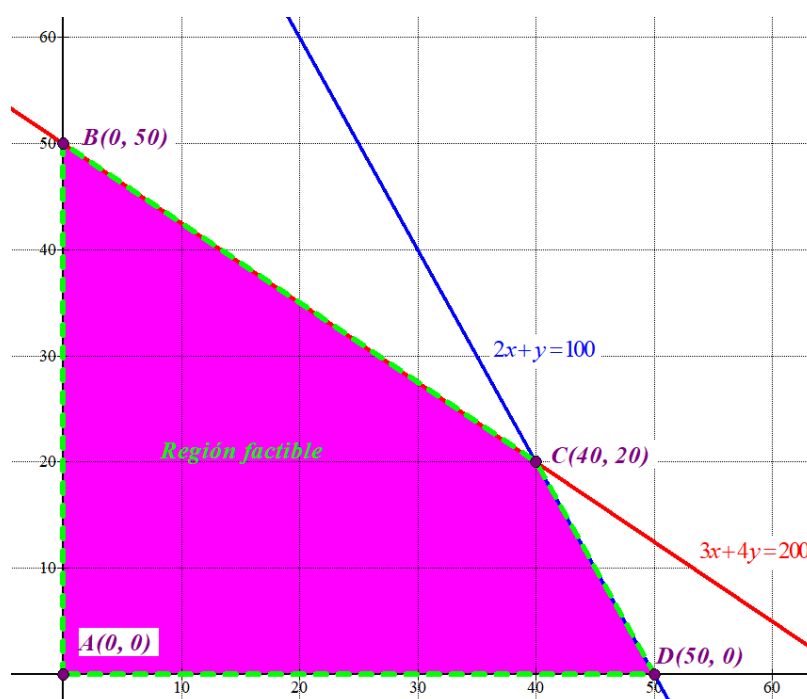


La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\},$$

por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja.
Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 40 \leq 200 \\ 20 + 10 \leq 100 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



- c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x, y) = 30x + 25y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 0 + 1250 = 1250$$

$$C(40, 20) \rightarrow B(40, 20) = 1200 + 500 = 1700 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 1500 + 0 = 1500$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(40, 20)$. Significa que fabricando 40 bolsas del primer tipo y 20 del segundo se consiguen unos beneficios máximos de 1700 €.

3 Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x - ay + 2z &= 0 \\ ax - 4y - 4z &= 0 \\ 4x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en función del parámetro a .

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para $a = -2$. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 16a + 6a + 32 - 2a^2 + 12 = -2a^2 + 22a + 52$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 22a + 52 = 0 \Rightarrow a^2 - 11a - 26 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(-26)}}{2} = \frac{11 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{11+15}{2} = 13 = a \\ \frac{11-15}{2} = -2 = a \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 13$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3).

El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = 13$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B .

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 13 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 13 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 13 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \\ -13 \quad +169 \quad -26 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 165 \quad -30 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ -4 \quad 52 \quad -8 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 55 \quad -10 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 55 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 165 \quad -30 \quad 0 \\ 0 \quad -165 \quad +30 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -13 & 2 & 0 \\ 0 & 165 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \\ +2 \quad +4 \quad +4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ -4 \quad -8 \quad -8 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -10 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Intercambiamos Fila } 2^a \text{ y Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B y es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones (CASO 3).

Resolvemos el sistema partiendo del sistema equivalente obtenido por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 0 \\ -5y - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 0 \\ y = -2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4z + 2z = 0 \Rightarrow x = 2z \Rightarrow \boxed{\text{Solución: } \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$$

4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable. (5 puntos)
 b) Para $a = 4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. (5 puntos)

a) Basta comprobar que es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 3x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 + ax + 2 = 2 \\ f(0) &= 0^3 + a \cdot 0 + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

La función es continua independientemente del valor de “a”.

La derivada en $\mathbb{R} - \{0\}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ debe cumplirse que las derivadas laterales coincidan.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 3 = -3 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 + a = a \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Para que la función sea continua y derivable debe ser $a = -3$.

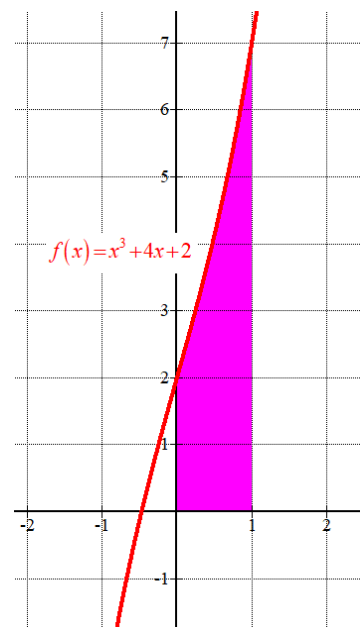
- b) Para $a = 4$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + 4x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Como el área está comprendida entre las rectas $x = 0$, $x = 1$ la función es $f(x) = x^3 + 4x + 2$.

$$\text{Área} = \int_0^1 x^3 + 4x + 2 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right] - \left[\frac{0^4}{4} + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \right]$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{4} + 2 + 2 = \frac{17}{4} = 4.25 u^2}$$



5 El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función:

$$f(x) = \frac{100x}{b+x^2},$$

en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

- a) Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2 mil euros. (3 puntos)
- b) Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto? (4 puntos)
- c) Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros? (3 puntos)

a) En $x = 2$ hay un máximo. La derivada se anula para $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{100(b+x^2) - (2x)100x}{(b+x^2)^2} = \frac{100b+100x^2-200x^2}{(b+x^2)^2} = \frac{100b-100x^2}{(b+x^2)^2}$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{100b-100 \cdot 2^2}{(b+2^2)^2} = 0 \Rightarrow 100b-400 = 0 \Rightarrow 100b = 400 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Comprobamos que para $b = 4$ la derivada es positiva antes de $x = 2$ y negativa después.

- En el intervalo $[0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{400-100 \cdot 1^2}{(4+1^2)^2} = 12 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{400-100 \cdot 3^2}{(4+3^2)^2} = -\frac{500}{169} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

En $x = 2$ hay un máximo de la función $f(x) = \frac{100x}{4+x^2}$

b) Para $b = 9$ la función queda $f(x) = \frac{100x}{9+x^2}$.

$$f'(x) = \frac{100(9+x^2) - (2x)100x}{(9+x^2)^2} = \frac{900+100x^2-200x^2}{(9+x^2)^2} = \frac{900-100x^2}{(9+x^2)^2}$$

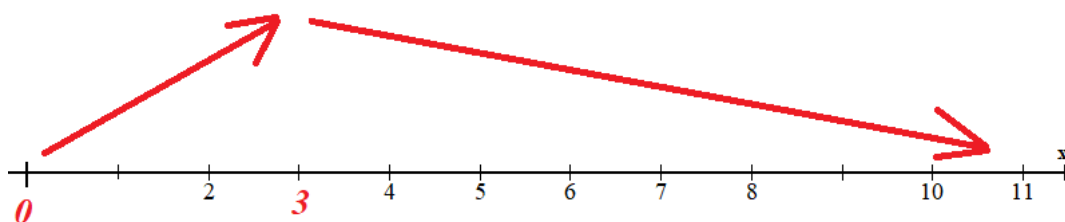
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{900-100x^2}{(9+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 900-100x^2 = 0 \Rightarrow 100x^2 = 900 \Rightarrow x^2 = \frac{900}{100} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Solo nos interesa el valor positivo ($x = 3$). Estudiamos el signo de la derivada entre 0 y 3, y después de 3.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{900 - 100 \cdot 1^2}{(9 + 1^2)^2} = 8 > 0$. La función crece en $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{900 - 100 \cdot 4^2}{(9 + 4^2)^2} = -\frac{28}{25} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



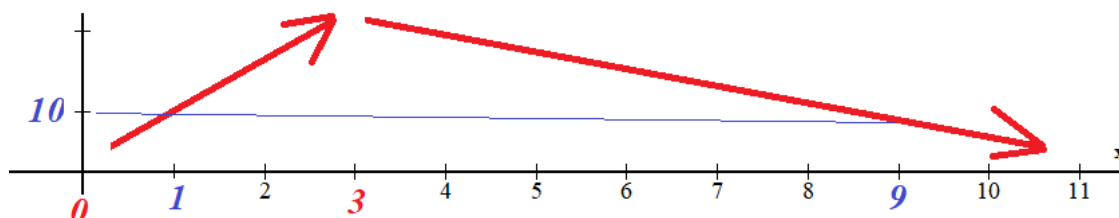
En $x = 3$ hay un máximo de la función $f(x) = \frac{100x}{9 + x^2}$.

Como $f(3) = \frac{300}{9 + 3^2} = \frac{50}{3} \approx 16.67$ tenemos que el gasto máximo es de 16.67 € y se produce con un salario de 3000 € mensuales.

c) Para $b = 9$ la función queda $f(x) = \frac{100x}{9 + x^2}$.

$$f(x) = 10 \Rightarrow \frac{100x}{9 + x^2} = 10 \Rightarrow \frac{10x}{9 + x^2} = 1 \Rightarrow 10x = 9 + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 = x \\ \frac{10-8}{2} = 1 = x \end{cases}$$



El gasto es de 10 € con un salario de 1000 o de 9000 €. Y entre 1000 y 9000 € el gasto es superior a 10 € como se aprecia en el esquema superior.

6 Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1.5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

- a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada. (3 puntos)
- b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada. (2 puntos)
- c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos. (3 puntos)
- d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos. (2 puntos)

a) Llamamos x al precio de la entrada y $f(x)$ al número de espectadores. El número de espectadores depende del precio de la entrada.

Sabemos que $f(8) = 500$ y que si cuesta 9.5 euros hay $500 - 30 = 470$ espectadores.

La función es lineal y su expresión es $f(x) = mx + n$.

$$\left. \begin{array}{l} f(8) = 500 = 8m + n \\ f(9.5) = 470 = 9.5m + n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 500 = 8m + n \\ -470 = -9.5m - n \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{30 = -1.5m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{30}{-1.5} = -20 \Rightarrow 500 = -160 + n \Rightarrow n = 660 \Rightarrow \boxed{f(x) = -20x + 660}$$

b) Los ingresos $I(x)$ es el producto del número de entradas ($f(x)$) y el precio de la entrada (x).

$$I(x) = x \cdot f(x) = x(-20x + 660)$$

$$\boxed{I(x) = -20x^2 + 660x}$$

c) Derivamos e igualamos a cero la función ingresos.

$$I'(x) = -40x + 660$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -40x + 660 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{660}{40} = 16.5}$$

Sustituimos $x = 16.5$ en la segunda derivada

$$I''(x) = -40 \Rightarrow I''(16.5) = -40 < 0$$

La función ingresos presenta un máximo en $x = 16.5$.

Los ingresos son máximos con un precio de la entrada de 16.5 €.

d) Para $x = 16.5$ tenemos ingresos máximos por valor de $I(16.5) = -20 \cdot 16.5^2 + 660 \cdot 16.5 = \boxed{5445 \text{ €}}$.

El número de espectadores para $x = 16.5$ es de $f(16.5) = -20 \cdot 16.5 + 660 = \boxed{330}$.

7 La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1.5 kg. (5 puntos)

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con producciones en kilogramos:

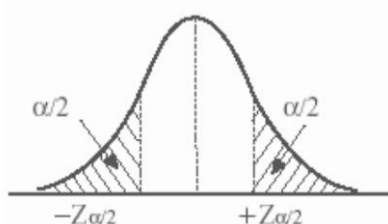
30 25 4 70 45 60 21 32 9 47

Calcule el intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol. (5 puntos)

X = Producción de naranjas por naranjo (en kilogramos). $X = N(\mu, 2)$

a) Con un nivel de confianza del 94 %

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha / 2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7853
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8829
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9439
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9544
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Igualemos el error a 1.5 kilogramos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.88 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5\sqrt{n} = 1.88 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.88 \cdot 2}{1.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88 \cdot 2}{1.5} \right)^2 = 6.2834$$

Como n debe ser entero y superior al " n " hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 7 naranjos.

b) Tamaño de muestra = $n = 10$. $\bar{x} = \frac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10} = 34.3 \text{ kg}$

Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.531
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.571
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.610
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.684
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.751
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.782
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.810
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.836
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.859
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.881
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.899
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.916
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.930
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.942
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.953
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.962
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.969
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.976
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.981
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.985

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 1.372 \text{ kg}$$

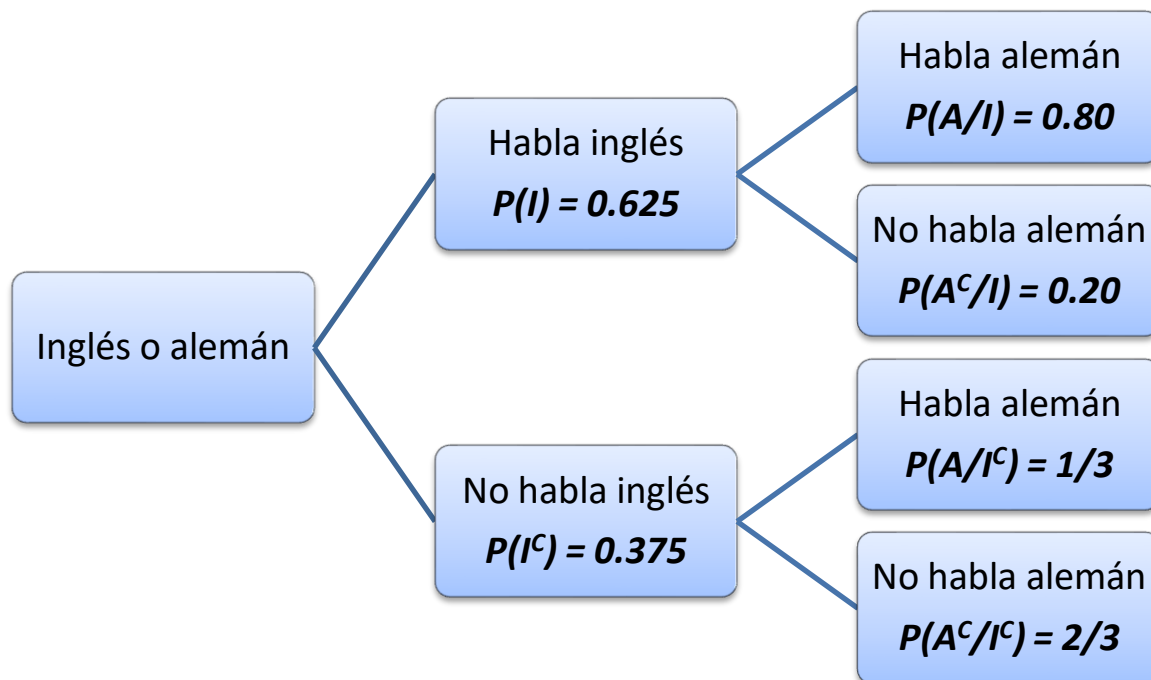
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (34.3 - 1.372, 34.3 + 1.372) = (32.928, 35.672)$$

8 En cierta empresa de exportación, el 62.5 % de los empleados hablan inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán

- a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas? (4 puntos)
 b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán? (3 puntos)
 c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad que hable inglés? (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Hemos llamado I = Hablar inglés, A = Hablar alemán.

a) $P(I \cap A) = P(I)P(A/I) = 0.625 \cdot 0.8 = \boxed{0.5}$

Hablan los dos idiomas el 50 % de los empleados.

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(I)P(A/I) + P(I^c)P(A/I^c) = 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{8} = 0.625$$

El 62.5 % de los empleados habla alemán.

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I/A^c) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(I)P(A^c/I)}{1 - P(A)} = \frac{0.625 \cdot 0.2}{1 - 0.625} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333}$$

La probabilidad de que hable inglés es 0.333

Convocatoria extraordinaria de 2021



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

**Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II**

Modelo I

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 El barco de Denia a Ibiza lleva automóviles y camiones en la bodega. Cada camión ocupa cuatro plazas de automóvil. La superficie total de la bodega permite ubicar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1000 kg y cada camión, 9000 kg. El peso total permitido para la carga es de 300.000 kg. La compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de coches y camiones a cargar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

2 Dadas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

- a) Calcule A^2 . (2 puntos)

- b) Encuentra a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 puntos)

3 En una tienda de fruta hemos comprado manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euro y piñas a 1.5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta de que llevamos 70 piezas de fruta, cuyo coste total es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra saldría 4 euros más barata.

- a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)
- b) Determine el número de piezas de cada fruta que hemos comprado. (5 puntos)

4 Considere la función definida a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de a para que $f(x)$ sea continua. (3 puntos)
- b) ¿Es $f(x)$ derivable para $a = 1$? (3 puntos)
- c) Para $a = 0$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

5 El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$$P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

donde $t \geq 0$ es el número de años transcurridos.

- a) ¿Cuál es la población inicial ($t = 0$) y la población después de 5 años? (2 puntos)
- b) ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos? (4 puntos)
- c) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población? (4 puntos)

6 Considere la función $f(x) = \frac{3}{x} + 8$

- a) Encuentra los puntos de la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 puntos)
- b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a los puntos encontrados en el apartado anterior. (2 puntos)
- c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$. (4 puntos)

7 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.

- a) Calcule un intervalo de confianza del 95% para estimar la edad media de la población. (5 puntos)
- b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que debe tomarse porque al estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92%, el error como sea inferior a 0.5 años. (5 puntos)

8 En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar a un residente de la población.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso? (3 puntos)
- c) Si la persona elegida opina que debería restringirse el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad? (4 puntos)

SOLUCIONES

1 El barco de Denia a Ibiza lleva automóviles y camiones en la bodega. Cada camión ocupa cuatro plazas de automóvil. La superficie total de la bodega permite ubicar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1000 kg y cada camión, 9000 kg. El peso total permitido para la carga es de 300.000 kg. La compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de coches y camiones a cargar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos “x” al número de automóviles e “y” al número de camiones.

La función objetivo es el ingreso que viene dada por $I(x, y) = 50x + 300y$.

Las restricciones son:

“Cada camión ocupa cuatro plazas de automóvil. La superficie total de la bodega permite ubicar hasta 200 automóviles” $\rightarrow 4y + x \leq 200$

“Cada automóvil pesa 1000 kg y cada camión, 9000 kg. El peso total permitido para la carga es de 300.000 kg” $\rightarrow 1000x + 9000y \leq 300000$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 4y + x \leq 200 \\ 1000x + 9000y \leq 300000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 200 \\ x + 9y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$$x + 4y = 200$$

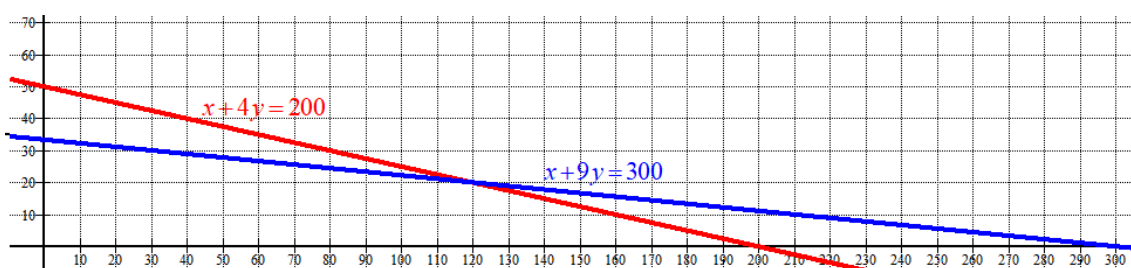
x	$y = \frac{200 - x}{4}$
120	20
200	0

$$x + 9y = 300$$

x	$y = \frac{300 - x}{9}$
0	300/9
120	20

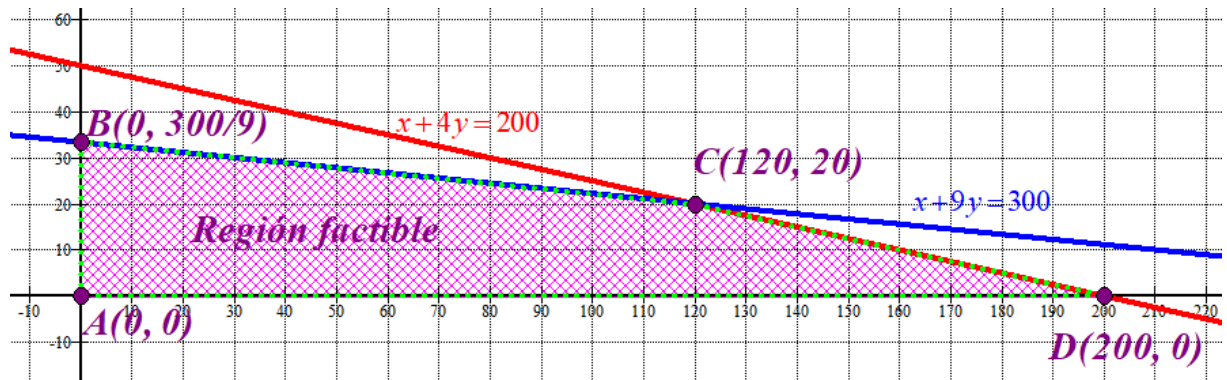
$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 200 \rightarrow \text{por debajo} \\ x + 9y \leq 300 \rightarrow \text{por debajo} \\ x \geq 0; y \geq 0 \rightarrow \text{primer cuadrante} \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa dicha región.



Las coordenadas de los vértices son $A(0, 0)$, $B(0, 300/9)$, $C(120, 20)$ y $D(200, 0)$.

- c) Valoramos la función beneficio $I(x, y) = 50x + 300y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 300/9) \rightarrow I\left(0, \frac{300}{9}\right) = 300 \frac{300}{9} = 10000$$

$$C(120, 20) \rightarrow I(120, 20) = 6000 + 6000 = 12000$$

$$D(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 10000$$

El beneficio máximo se obtiene con 120 coches y 20 camiones. Dicho beneficio máximo es de 12000 €.

2 Dadas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 . (2 puntos)

b) Encuentra a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 puntos)

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{1} = \pm 1 \\ b = \sqrt{1} = \pm 1 \\ c = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \end{cases} \\ o \\ b = -1 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª. $a = -1, b = 1$ y $c = -1$.

2ª. $a = 1, b = -1$ y $c = 1$.

3 En una tienda de fruta hemos comprado manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euro y piñas a 1.5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta de que llevamos 70 piezas de fruta, cuyo coste total es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra saldría 4 euros más barata.

a) Identifique las variables e interpreta el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

(5 puntos)

b) Determine el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

(5 puntos)

a) Llamamos “x” el número de manzanas, “y” al número de aguacates y “z” al número de piñas.

“Al llegar a la caja nos damos cuenta de que llevamos 70 piezas de fruta” $\rightarrow x + y + z = 70$

“Las manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euro y piñas a 1.5 euros la pieza. El coste total es de 68 euros” $\rightarrow 0.5x + y + 1.5z = 68$

“Si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra saldría 4 euros más barata” $\rightarrow 0.5y + x + 1.5z = 68 - 4$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ 0.5x + y + 1.5z = 68 \\ 0.5y + x + 1.5z = 68 - 4 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ 0.5x + y + 1.5z = 68 \\ 0.5y + x + 1.5z = 68 - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplico por 2} \\ \text{la 2ª y 3ª ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x + 2y + 3z = 136 \\ y + 2x + 3z = 128 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ \Rightarrow x + 2y + 3z = 136 \\ 2x + y + 3z = 128 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 3z = 136 \\ -x - y - z = -70 \\ \hline 0 \quad y + 2z = 66 \\ \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x + y + 3z = 128 \\ -2x - 2y - 2z = -140 \\ \hline 0 \quad -y + z = -12 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ \Rightarrow y + 2z = 66 \\ -y + z = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ -y + z = -12 \\ y + 2z = 66 \\ \hline 0 \quad 3z = 54 \\ \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ y + 2z = 66 \\ 3z = 54 \rightarrow z = \frac{54}{3} = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 18 = 70 \\ y + 36 = 66 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 70 - 18 \\ y = 66 - 36 = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 30 = 52 \Rightarrow \boxed{x = 22}$$

Se han comprado 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.

4 Considere la función definida a trozos siguiente

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Calcula los valores de a para qué $f(x)$ sea continua. (3 puntos)
 b) ¿Es $f(x)$ derivable para $a = 1$? (3 puntos)
 c) Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

a) Para que la función sea continua en $x = -2$ debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= -4(-2) + a = 8 + a \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} -4x + a = 8 + a \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 - 5 = (-2)^2 - 5 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 + a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -9}$$

Para que la función sea continua en $x = -2$ debe ser $a = -9$.

¿La función es continua en $x = 1$?

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= -7(1) + 3 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -7x + 3 = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = -4$$

La función es continua en $x = 1$.

b) Para $a = 1$ la función no es continua en $x = -2$, por lo que tampoco es derivable en $x = -2$.

Es derivable en cada tramo de definición pues son polinomios.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en $x = 1$. Sabemos que es continua, vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -7 = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = 2 \neq -7 = f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

c) Para $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Analizamos el crecimiento y decrecimiento por tramos.

- En $(-\infty, -2)$ la función es una recta $f(x) = -4x$ con derivada $f'(x) = -4 < 0$ por lo que siempre es decreciente en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 1)$ la función es una parábola $f(x) = x^2 - 5$, hallamos su derivada y la igualamos a cero para encontrar su punto crítico.

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Dividimos el intervalo $(-2, 1)$ en dos partes: antes de 0 y después de 0.

- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -2 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 1 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ la función es una recta $f(x) = -7x + 3$ con derivada $f'(x) = -7 < 0$ por lo que siempre es decreciente en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

Como en $x = -2$ la función se acerca por la izquierda decreciendo y alcanzando el valor 8 y en $x = -2$ la función vale $(-2)^2 - 5 = -1$ que es menor que 8, entonces también decrece en $x = -2$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

5 El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$$P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

donde $t \geq 0$ es el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es la población inicial ($t = 0$) y la población después de 5 años? (2 puntos)

b) ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos? (4 puntos)

c) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

(4 puntos)

a) $P(0) = \frac{2+0+0^2}{0^2+0+1} = 2.$

La población inicial es de dos millones de individuos.

$$P(5) = \frac{2+5+5^2}{5^2+10+1} = \frac{32}{36} \approx 0.888888.$$

A los 5 años la población es aproximadamente de 888.888 individuos.

b) $P(t) < 1 \Rightarrow \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} < 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t^2+2t+1 > 0 \\ \text{siendo } t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2+t+t^2 < t^2+2t+1 \Rightarrow 1 < t$

A partir del año 1.

Lo comprobamos $\rightarrow P(1) = \frac{2+1+1^2}{1^2+2+1} = 1$; $P(2) = \frac{2+2+2^2}{2^2+4+1} = \frac{8}{9} \approx 0.888888$

c) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{t^2} + \frac{t}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{2t}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} + 1}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

La población tiende a ser un millón de individuos con el paso de los años.

6 Considere la función $f(x) = \frac{3}{x} + 8$

- a) Encuentra los puntos de la gráfica en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 puntos)
- b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a los puntos encontrados en el apartado anterior. (2 puntos)
- c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$. (4 puntos)

a) Averiguamos la pendiente de la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$$3x + 4y + 5 = 0 \Rightarrow 4y = -3x - 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{3}{4}}$$

La recta tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Averiguamos cuando la recta tangente a la gráfica de la función tiene esa pendiente, es decir, cuando la derivada de la función vale $-\frac{3}{4}$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3}{x} + 8 \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^2} \\ f'(x) = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Como $f(-2) = \frac{3}{-2} + 8 = 6.5$ uno de los puntos tiene coordenadas $(-2, 6.5)$.

Como $f(2) = \frac{3}{2} + 8 = 9.5$ otro de los puntos tiene coordenadas $(2, 9.5)$.

b) La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \\ f(-2) = 6.5 \\ f'(-2) = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 6.5 = -\frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6.5 - \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 5}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x - 2) \\ f(2) = 9.5 \\ f'(2) = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 9.5 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 9.5 + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 11}$$

c) Comprobamos si la función corta a la recta $y = 0$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{3}{x} + 8 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{x} + 8 = 0 \Rightarrow \frac{3}{x} = -8 \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Este valor no está comprendido entre $x = 2$ y $x = 4$ por lo que el área de la región pedida es la integral definida entre $x = 2$ y $x = 4$ de la función $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$$\text{Área} = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{3}{x} + 8 dx = \left[3 \ln |x| + 8x \right]_2^4 =$$

$$= \left[3 \ln |4| + 32 \right] - \left[3 \ln |2| + 16 \right] = 3 \ln |4| - 3 \ln |2| + 16 \approx \boxed{18.08 \text{ u}^2}$$

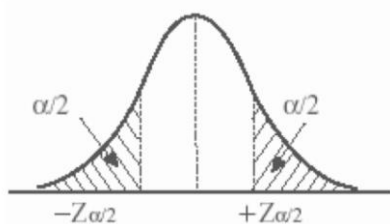
7 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.

- a) Calcula un intervalo de confianza del 95% para estimar la edad media de la población. (5 puntos)
 b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que debe tomarse porque al estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92%, el error como sea inferior a 0.5 años. (5 puntos)

a) $X = N(\mu, 2)$. La media muestral vale $\bar{x} = 17.4$ y el tamaño de la muestra es $n = 256$ individuos.

Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

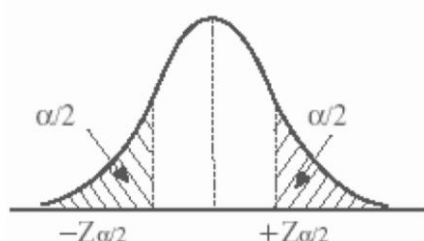
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245) = (17.155, 17.645)$$

b) Con un nivel de confianza del 92 %

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$



	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678

El error debe ser 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.5}{1.75} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \right)^2 = 49$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo es de 50 individuos.

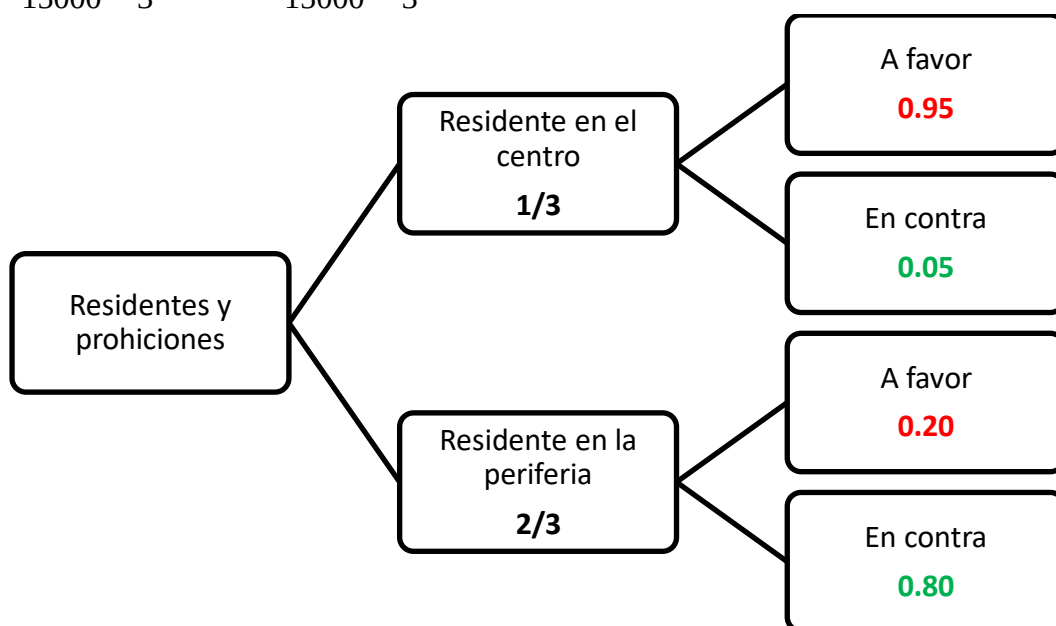
8 En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar a un residente de la población.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso? (3 puntos)
- c) Si la persona elegida opina que debería restringirse el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad? (4 puntos)

Llamamos A = Residente en el centro, B = Residente en la periferia.

C = Favorable a prohibir el acceso al centro con vehículo privado.

$$P(A) = \frac{5000}{15000} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{10000}{15000} = \frac{2}{3}$$



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = \frac{1}{3} \cdot 0.95 + \frac{2}{3} \cdot 0.20 = \frac{9}{20} = 0.45$$

b) $P(A \cap C) = P(A)P(C/A) = \frac{1}{3} \cdot 0.95 = \frac{19}{60} \approx 0.317$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}} = \frac{19}{27} \approx 0.704$$



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1 Dado el sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$x + y + z = 5$$

$$5x + ay - z = 11$$

$$3x - y + az = 2.$$

- a) Discute para qué valores de a el sistema tiene solución y cuantas tiene en cada caso. (6 puntos)
- b) Encuentra la solución del sistema para $a = 2$. (4 puntos)

2 Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas, de dos tipos, A y B. Por eso la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y el de tipo B de 300.000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20000 euros y por la venta de uno tipo B es de 40000 euros.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

3 Considera las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Razona si es posible calcular los productos $M \cdot N$ y M^2 . En el caso de que sea posible, calcúlalos. (2 puntos)
- b) Calcule para qué valores de k es $M \cdot N$ invertible. (3 puntos)
- c) Calcule la inversa de $M \cdot N$ para $k=1$. (2 puntos)
- d) Para $k=1$, encuentre la matriz X que cumple $(M \cdot N) \cdot X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

4 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico en el punto $x=1$ y su gráfica pasa por el punto $(3,0)$. (5 puntos)
- b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a=3$ y $b=3$. (5 puntos)

5 El beneficio $B(x)$, en euros, que obtiene una empresa por la venta de x unidades de un determinado producto se representa por la función:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \text{ para } x \geq 0.$$

- a) Calcula el beneficio de vender 110 unidades. (1 punto)
- b) Representa gráficamente la función. (3 puntos)
- c) ¿Cuántas unidades debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuánto vale ese beneficio máximo? (3 puntos)
- d) ¿Cuántas unidades ha de vender para tener un beneficio igual a 3900 euros? ¿y para tener un beneficio superior a 3900 euros? (3 puntos)

6 Considera la función a trozos siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Calcula los valores de a para los que f sea continua y derivable. (5 puntos)
- b) Para $a=4$ calcula el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1$; $x=2$ e $y=0$. (5 puntos)

7 El peso de las personas de un colegio mayor sigue una ley normal de media 70 kg y desviación típica 15 kg. Si escogemos al azar a una persona del colegio, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Su peso sea superior a 80 kg. (3 puntos)
- b) Su peso sea inferior a 50 kg. (3 puntos)
- c) Pese entre 60 y 120 kg. (4 puntos)

8 De dos sucesos de un mismo espacio muestral se sabe que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 \quad p(A/B) = 0.5$$

$\bar{A}$ y $\bar{B}$ denotan los sucesos complementarios de A y B respectivamente.

- a) Calcula $p(B)$ (3 puntos)
- b) Calcula $p(A \cup B)$ (3 puntos)
- c) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razona la respuesta (4 puntos)

SOLUCIONES

1 Dado el sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$x + y + z = 5$$

$$5x + ay - z = 11$$

$$3x - y + az = 2.$$

a) Discute para qué valores de a el sistema tiene solución y cuantas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentra la solución del sistema para $a = 2$. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & a & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 - 5 - 3a - 5a - 1 = a^2 - 8a - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 8a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-9)}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{8+10}{2} = 9 = a \\ \frac{8-10}{2} = -1 = a \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 9$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Se observa que la columna 2ª y 3ª son

iguales. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la fila 1ª y columna 3ª tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2 \neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobamos si tiene rango 3,

tomando el menor que resulta de quitar la columna 2ª (= columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 33 - 25 + 15 - 10 + 11 = 22 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

CASO 3. $a = 9$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de

quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4 \neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobamos si tiene rango 3,

tomando el menor que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & -1 & 11 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 11 + 405 - 5 - 18 - 99 = 270 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 9$ el sistema tiene una única solución, si $a = -1$ o $a = 9$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución.

Determinamos la solución usando el método de Cramer.

Para $a = 2$ la matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

con determinante $2^2 - 8 \cdot 2 - 9 = -21$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 2 - 11 - 4 - 22 - 5}{-21} = \frac{8}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{22 - 15 + 10 - 33 - 50 + 2}{-21} = \frac{64}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 33 - 25 - 30 - 10 + 11}{-21} = \frac{17}{21}$$

La solución es $x = \frac{8}{7}$, $y = \frac{64}{21}$, $z = \frac{17}{21}$.

2 Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas, de dos tipos, A y B. Por eso la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y el de tipo B de 300.000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20000 euros y por la venta de uno tipo B es de 40000 euros.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Calcule el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamamos x = número de viviendas tipo A, y = número de viviendas tipo B.

La función a maximizar es el beneficio que, dado que se obtiene un beneficio de 20000 € por cada vivienda tipo A y 40000 € por cada vivienda tipo B, su expresión será:

$$B(x, y) = 20000x + 40000y$$

Esta función está sometida a restricciones que establecemos como un sistema de inecuaciones.

“La urbanización a construir tendrá como máximo 120 viviendas” $\rightarrow x + y \leq 120$

“El coste de construir una vivienda tipo A es de 100 000 € y 300 000 € la de tipo B y la empresa solo dispone de 15 000 000 €” $\rightarrow 100000x + 300000y \leq 15000000 \rightarrow x + 3y \leq 150$.

El número de viviendas debe ser positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema cuya solución es una región del plano que llamamos región factible.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 120$$

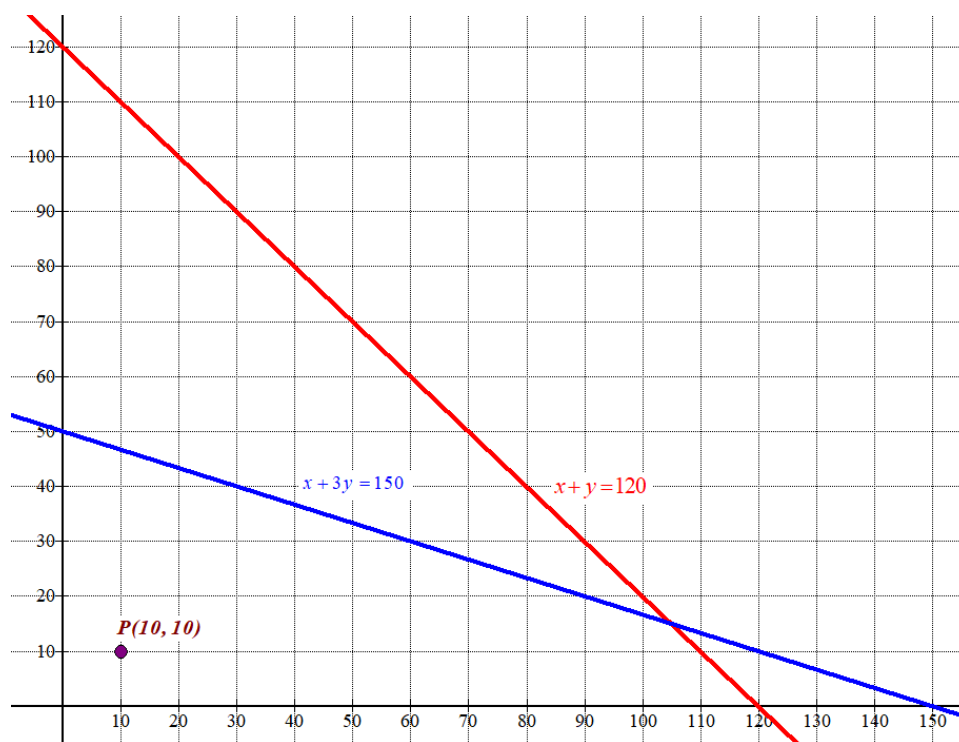
x	$y = 120 - x$
0	120
105	15
120	0

$$x + 3y = 150$$

x	$y = \frac{150 - x}{3}$
0	50
105	15
150	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

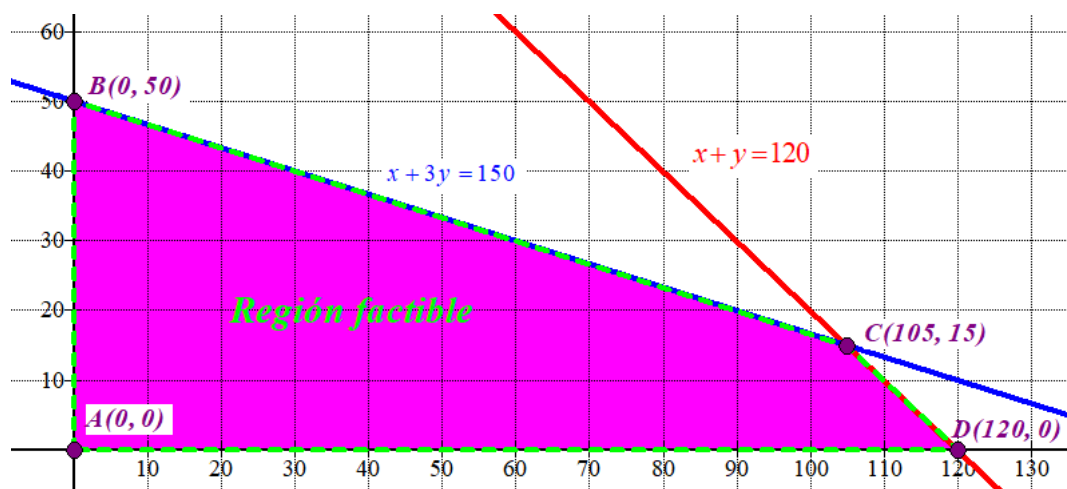


La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \end{array} \right\}$, por $x \geq 0; y \geq 0$

lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja. Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \leq 120 \\ 10 + 30 \leq 150 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ x + 3y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 120 - y \\ x = 150 - 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 120 - y = 150 - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow x = 120 - 15 = 105 \Rightarrow \boxed{C(105, 15)}$$

c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x, y) = 20000x + 40000y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 20000 \cdot 0 + 40000 \cdot 50 = 2\,000\,000$$

$$C(105, 15) \rightarrow B(105, 15) = 20000 \cdot 105 + 40000 \cdot 15 = 2\,700\,000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(120, 0) \rightarrow B(120, 0) = 20000 \cdot 120 + 0 = 2\,400\,000$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(105, 15)$. Significa que construyendo 105 viviendas del tipo A y 15 del tipo B se consiguen unos beneficios máximos de 2.700.000 €.

3 Considera las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Razona si es posible calcular los productos $M \cdot N$ y M^2 . En el caso de que sea posible, calcúlalos. (2 puntos)
- b) Calcula para qué valores de k es $M \cdot N$ invertible. (3 puntos)
- c) Calcula la inversa de $M \cdot N$ para $k=1$. (2 puntos)
- d) Para $k=1$, encuentra la matriz X que cumple $(M \cdot N) \cdot X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

a) Comparamos el número de filas y columnas de las matrices que intervienen en los productos.

$$M^2 = M \cdot M$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 2} \times 3$$

No es posible el producto M^2 pues la matriz M no es cuadrada y no coinciden su número de filas con el número de columnas.

$$M \cdot N = \text{Otra matriz}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Si es posible el cálculo de $M \cdot N$ pues el número de columnas de M es igual al número de filas de N y se obtiene una matriz cuadrada de orden 2.
Calculamos $M \cdot N$.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -k-6k & 4+1+9k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de $M \cdot N$.

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{vmatrix} = k(9k+5) + 7k(2k-1) = 9k^2 + 5k + 14k^2 - 7k = 23k^2 - 2k$$

Para que la matriz sea invertible su determinante no debe ser nulo.

$$|M \cdot N| = 0 \Rightarrow 23k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(23k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ 23k - 2 = 0 \rightarrow 23k = 2 \rightarrow \boxed{k = \frac{2}{23}} \end{cases}$$

La matriz $M \cdot N$ es invertible para cualquier valor de k distinto de 0 y de $\frac{2}{23}$.

c) Para $k=1$ la matriz $M \cdot N$ es invertible. Calculamos su inversa.

La matriz queda $M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$ con determinante $|M \cdot N| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} = 14 + 7 = 21 \neq 0$.

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{\text{Adj}((M \cdot N)^T)}{|M \cdot N|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}}{21} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}{21} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

d) Para $k=1$ la matriz $M \cdot N$ tiene inversa: $(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial $(M \cdot N) \cdot X = B$.

$$(M \cdot N) \cdot X = B \Rightarrow X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B$$

Realizamos los cálculos para obtener la matriz X.

$$X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

4 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico en el punto $x=1$ y su gráfica pasa por el punto $(3,0)$. (5 puntos)
- b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a=3$ y $b=3$. (5 puntos)

a) Si $f(x)$ tiene un punto crítico en el punto $x=1$ entonces la derivada se anula para dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{3a + 2b + 1 = 0}$$

Si la gráfica pasa por el punto $(3,0)$ entonces $f(3) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 0 \\ f(x) &= ax^3 + bx^2 + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 3 = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{9a + 3b + 1 = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 3a + 2b + 1 &= 0 \\ 9a + 3b + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\times(-3) \rightarrow -9a - 6b - 3 = 0 \\ &9a + 3b + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\hline -3b - 2 = 0 \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a + 2 \cdot \frac{-2}{3} + 1 = 0 \Rightarrow 3a - \frac{4}{3} + 1 = 0 \Rightarrow 3a = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{9}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{9}$ y $b = -\frac{2}{3}$.

b) Para $a = b = 3$ la función queda $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$.

Veamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$$

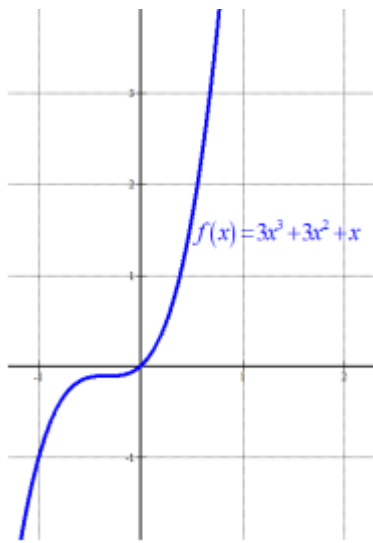
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(9)(1)}}{2(9)} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = -\frac{1}{3}$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-1}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 9(-1)^2 + 6(-1) + 1 = 4 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, \frac{-1}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-1}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 9 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{-1}{3}, +\infty\right)$.

La función es creciente en $\mathbb{R}$.

No pide dibujarla, pero lo hago para comprobar la bondad de la solución.



En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

5 El beneficio $B(x)$, en euros, que obtiene una empresa por la venta de x unidades de un determinado producto se representa por la función:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \text{ para } x \geq 0.$$

- a) Calcula el beneficio de vender 110 unidades. (1 punto)
 b) Representa gráficamente la función. (3 puntos)
 c) ¿Cuántas unidades debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuánto vale ese beneficio máximo? (3 puntos)
 d) ¿Cuántas unidades ha de vender para tener un beneficio igual a 3900 euros? ¿y para tener un beneficio superior a 3900 euros? (3 puntos)

a) Nos piden calcular $B(110)$.

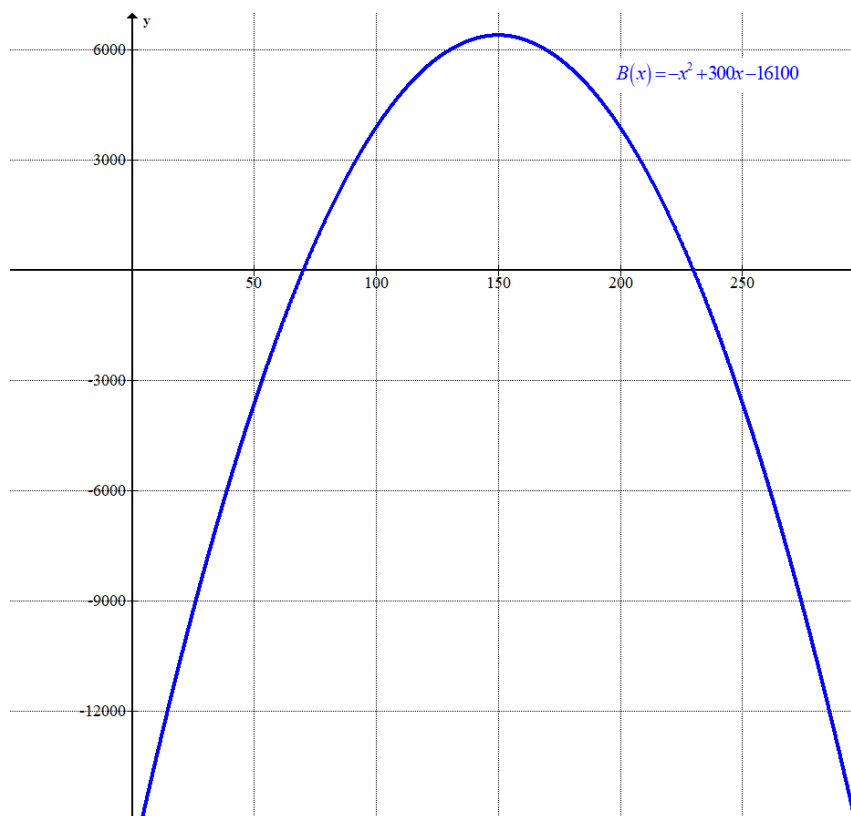
$$B(110) = -110^2 + 300 \cdot 110 - 16100 = 4800$$

El beneficio de vender 110 unidades es de 4800 euros.

b) Su gráfica es una parábola. Obtenemos su vértice, una tabla de valores y la dibujamos.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 300 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{2} = 150$$

x	$B(x) = -x^2 + 300x - 16100$
0	-16100
100	3900
150	6400
200	3900
300	-16100



- c) El beneficio máximo se aprecia en la gráfica de la función que se produce en el vértice de la parábola. Está situado en $x = 150$.

Con la venta de 150 unidades se obtiene un beneficio máximo de 6400 €.

$$B(150) = -150^2 + 300 \cdot 150 - 16100 = 6400$$

- d) Debemos hallar el valor de x para que $B(x) = 3900$.

Se observa en la tabla de valores que se produce en $x = 100$ y $x = 200$.

Se obtiene un beneficio de 3900 euros produciendo 100 o 200 unidades de producto.

De todas formas, hacemos los cálculos para obtener estos valores.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \\ B(x) = 3900 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 300x - 16100 = 3900 \Rightarrow -x^2 + 300x - 20000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4(-1)(20000)}}{2(-1)} = \frac{-300 \pm 100}{-2} = \begin{cases} \frac{-300 + 100}{-2} = \boxed{100 = x} \\ \frac{-300 - 100}{-2} = \boxed{200 = x} \end{cases}$$

Observando la gráfica podemos decir que para tener un beneficio superior a 3900 euros se deben producir entre 100 y 200 unidades de producto.

6 Considera la función a trozos siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a para los que f sea continua y derivable. (5 puntos)

b) Para $a = 4$ calcula el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$; $x = 2$ e $y = 0$. (5 puntos)

a) La función es continua en $(-\infty, 0)$ pues es una función polinómica. La función es continua en $(0, +\infty)$ pues es una función exponencial.

Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= e^0 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 3x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{ax} + 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

La función es continua en $x = 0$ y también en todo $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ ae^{ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - 3 = -3 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ae^{ax} = ae^0 = a \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

La función es continua y derivable para $a = -3$.

b) Para $a = 4$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{4x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como la región del plano de la que queremos hallar el área está comprendida entre $x = 1$ y $x = 2$ la función en ese intervalo tiene la expresión $f(x) = e^{4x} + 1$.

Buscamos los puntos de corte de $f(x) = e^{4x} + 1$ y la recta $y = 0$.

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ f(x) &= e^{4x} + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{4x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{4x} = -1 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

No se cortan las gráficas y el área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la función $f(x) = e^{4x} + 1$.

$$\text{Área} = \int_1^2 e^{4x} + 1 dx = \left[\frac{e^{4x}}{4} + x \right]_1^2 = \left[\frac{e^8}{4} + 2 \right] - \left[\frac{e^4}{4} + 1 \right] = \frac{e^8 - e^4}{4} + 1 \approx 732.58 u^2$$

7 El peso de las personas de un colegio mayor sigue una ley normal de media 70 kg y desviación típica 15 kg. Si escogemos al azar a una persona del colegio, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- | | |
|----------------------------------|------------|
| a) Su peso sea superior a 80 kg. | (3 puntos) |
| b) Su peso sea inferior a 50 kg. | (3 puntos) |
| c) Pese entre 60 y 120 kg. | (4 puntos) |

X = El peso de las personas de un colegio mayor (en kg). $X = N(70, 15)$

a) Nos piden calcular $P(X > 80)$.

$$\begin{aligned}
 P(X > 80) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{80-70}{15}\right) = P(Z > 0.67) = \\
 &= 1 - P(Z \leq 0.67) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7486 = \boxed{0.2514}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que su peso sea superior a 80 kg es de 0.2514.

b) Nos piden calcular $P(X < 50)$.

$$\begin{aligned}
 P(X < 50) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{50-70}{15}\right) = P(Z < -1.33) = P(Z > 1.33) \\
 &= 1 - P(Z \leq 1.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que su peso sea inferior a 50 kg es 0.0918.

c) Nos piden calcular $P(60 < X < 120)$.

$$\begin{aligned}
 P(60 < X < 120) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{60-70}{15} < Z < \frac{120-70}{15}\right) = P(-0.67 < Z < 3.33) \\
 &= P(Z < 3.33) - P(Z < -0.67) = P(Z < 3.33) - P(Z > 0.67) = \\
 &= P(Z < 3.33) - [1 - P(Z \leq 0.67)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9996 - [1 - 0.7486] = \boxed{0.7482}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que su peso esté entre 60 y 120 kg es de 0.7482.

8 De dos sucesos de un mismo espacio muestral se sabe que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 \quad p(A/B) = 0.5$$

$\bar{A}$ y $\bar{B}$ denotan los sucesos complementarios de A y B respectivamente.

- a) Calcula $p(B)$ (3 puntos)
- b) Calcula $p(A \cup B)$ (3 puntos)
- c) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razona la respuesta (4 puntos)

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow 0.5 = \frac{0.1}{p(B)} \Rightarrow \boxed{p(B) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2}$$

b) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 \Rightarrow p(\overline{A \cup B}) = 0.6 \Rightarrow 1 - p(A \cup B) = 0.6 \Rightarrow \boxed{p(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4}$$

c) Hallamos el valor de $p(A)$ utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow 0.4 = p(A) + 0.2 - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A) = 0.4 - 0.2 + 0.1 = 0.3$$

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap B) = 0.1 \\ p(A) \cdot p(B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cap B) = \mathbf{0.1 \neq 0.06} = p(A) \cdot p(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

Convocatoria extraordinaria de 2020



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

OPCIÓN A

1 Bernat quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 cervezas, 1 panecillo y 2 cafés con leche habían pagado 8,10 euros. En este bar todas las cervezas valen lo mismo y todos los panecillos tienen el mismo precio.

- Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales. (2 puntos)
- Hoy Bernat ha vuelto con otros amigos y han tomado 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Combine las ecuaciones del apartado a) para deducir cuánto han pagado en total. (3 puntos)
- Si 1 cerveza, 1 panecillo y 1 café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto valen la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente? (5 puntos)

2 De una función $y = f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = f(x)$. (5 puntos)
- Determina las abscisas de sus extremos relativos y clasifícalos. (5 puntos)

3 Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, y $P(A \cap B) = 0.3$.

- Calcula las probabilidades $p(B)$ i $p(A/B)$. (5 puntos)
- Calcula las probabilidades $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 puntos)
- ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta. (1 punto)

4 En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y la media ha sido 67.

- Calcula el intervalo de confianza al 93 %, para la media de la población. (5 puntos)
- ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que debe tomarse para estimar, con un nivel de confianza del 99%, el promedio de la población con un error no superior a 2? (5 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula A^2 , A^3 . (2 puntos)
- b) Obtenga una fórmula para A^n y utilícela para calcular A^{14} . (4 puntos)
- c) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} B^t \cdot B = 2A$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B. (4 puntos)

2 Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Sabiendo que se vendió toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo hay que producir para obtener el máximo beneficio e indica cuál es ese beneficio. (2 puntos)

3 Los beneficios semanales de una empresa expresados en euros, cuando fabrica y vende x objetos, se ajusta a la función

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200; \text{ en que } 20 \leq x \leq 80.$$

- a) Calcular el beneficio que obtiene al fabricar y vender 20 objetos. (2 puntos)
- b) Busque el número de objetos que debe fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, así como este beneficio máximo. (4 puntos)
- c) El beneficio medio para x objetos es $M(x) = B(x)/x$. Diga cuántos objetos debe fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es ese beneficio. (4 puntos)

4 En una población, el porcentaje de personas que miran un cierto programa de televisión es del 40%. Se sabe que el 60% de las personas que lo miran tienen estudios superiores y que el 30% de las personas que no lo miran carecen de estudios superiores.

- a) Interpreta los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores? (4 puntos)
- c) Busque la probabilidad de que una persona que tenga estudios superiores, mire el citado programa. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1 Bernat quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 cervezas, 1 panecillo y 2 cafés con leche habían pagado 8,10 euros. En este bar todas las cervezas valen lo mismo y todos los panecillos tienen el mismo precio.

- a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales. (2 puntos)
- b) Hoy Bernat ha vuelto con otros amigos y han tomado 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Combine las ecuaciones del apartado a) para deducir cuánto han pagado en total. (3 puntos)
- c) Si 1 cerveza, 1 panecillo y 1 café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto valen la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente? (5 puntos)

- a) Llamemos “x” al precio de una cerveza, “y” al precio de un panecillo y “z” al precio de un café con leche.

“4 cervezas, 3 panets i 5 cafés amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros” $\rightarrow$

$$4x + 3y + 5z = 19,5$$

“Per 2 cerveces, 1 panet i 2 cafés amb llet havien pagat 8,10 euros” $\rightarrow 2x + y + 2z = 8,1$

El sistema de ecuaciones quedaría:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \end{array} \right\}$$

- b) “Han pres 2 cerveces, 2 panets i 3 cafés amb llet y han pagado k euros” $\rightarrow 2x + 2y + 3z = k$

Comprobemos si es posible determinar el valor de k, resolviendo el nuevo sistema que se forma juntando esta ecuación con el sistema del apartado a).

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \\ 2x + 2y + 3z = k \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ 2x + 2y + 3z = k \\ \hline -2x - y - 2z = -8,1 \\ \hline y + z = k - 8,1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ \hline -4x - 2y - 4z = -16,2 \\ \hline y + z = 3,3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ y + z = 3,3 \\ y + z = k - 8,1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ y + z = k - 8,1 \\ \hline -y - z = -3,3 \\ \hline 0 = k - 11,4 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ y + z = 3,3 \\ 0 = k - 11,4 \end{array} \right\}$$

Al ser una situación real el problema debe tener solución y para que el sistema tenga solución la tercera ecuación debe ser cierta, por lo que $0 = k - 11,4 \Rightarrow \boxed{k = 11,4}$.

Debe pagar 11,4 euros por las 2 cervezas, los 2 panecillos y los 3 cafés con leche.

c) “Si 1 cerveza, 1 panet i 1 café amb llet costen 5,10 euros” $\rightarrow x + y + z = 5,1$

Añadimos esta ecuación al sistema del apartado a) y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5,1 \\ 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 4 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ -4x - 4y - 4z = -20,4 \\ \hline -y + z = -0,9 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x + y + 2z = 8,1 \\ -2x - 2y - 2z = -10,2 \\ \hline -y - z = -2,1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 5,1 \\ -y + z = -0,9 \\ -y - z = -2,1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 5,1 \\ -y + z = -0,9 \\ y = 2,1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2,1 + z = 5,1 \\ -2,1 + z = -0,9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ z = 1,2 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1,2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1,8}$$

Cada cerveza cuesta 1,8 euros, cada panecillo cuesta 2,1 y un café con leche 1,2 euros.

2 De una función $y = f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = f(x)$. (5 puntos)
 b) Determina las abscisas de sus extremos relativos y clasifícalos. (5 puntos)

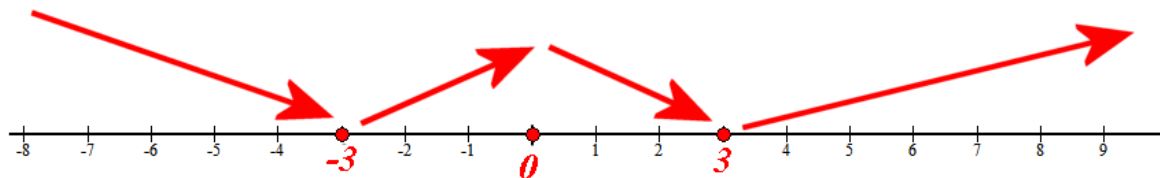
a) Igualamos a cero la derivada, en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos: $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de ellos.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = 2(-4)^3 - 18(-4) = -56 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1)^3 - 18(-1) = 16 > 0$. La función crece en $(-3, 0)$.
- En $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 - 18 = -16 < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 2(4)^3 - 18(4) = 56 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.



La función $f(x)$ decrece en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ y crece en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

- b) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior tenemos que la función $f(x)$ presenta tres extremos relativos.

Tiene dos mínimos relativos: en $x = -3$ y en $x = 3$. Y tiene un máximo relativo en $x = 0$.

3 Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, i $P(A \cap B) = 0.3$.

- a) Calcula las probabilidades $p(B)$ i $p(A/B)$. (5 puntos)
 b) Calcula las probabilidades $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 puntos)
 c) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta. (1 punto)

a) Hallamos la probabilidad de A. $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

Hallamos la probabilidad de B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.5 \\ P(A \cup B) = 0.8 \\ P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.8 = 0.5 + P(B) - 0.3 \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.6}$$

Utilizamos el teorema de Bayes para hallar el valor de $p(A/B)$.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.3}{0.6} = \boxed{0.5}$$

b) Utilizamos que $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.3 = \boxed{0.2}$$

Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.3 = \boxed{0.7}$$

c) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\} \text{ Son iguales y por tanto son sucesos independientes.}$$

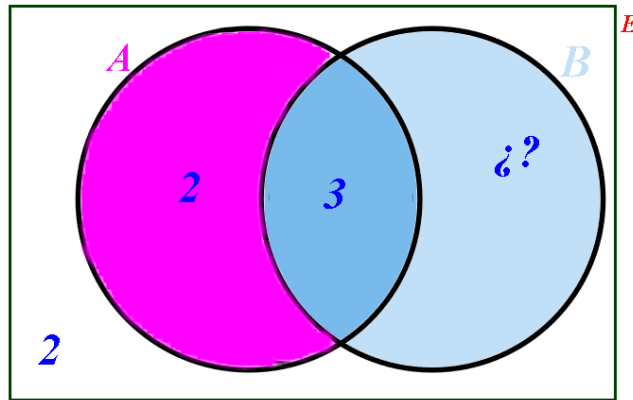
OTRA FORMA DE HACERLO

Establecemos que el suceso E son 10 sucesos elementales. Por lo que $A \cup B$ tendrá 8 elementos y fuera de la unión estarán los 2 restantes.

En $A \cap B$ habrán 3 elementos.

Como en A^c hay 5 elementos en el suceso A habrán otros 5. Repartidos 3 en la intersección con B y 2 fuera de ella.

Completamos el diagrama de Venn siguiente:



En la parte azul claro que no conocemos ($B \cap A^c$) tendremos los 3 elementos que faltan para sumar 10.

Si le damos lenguaje matemático a este diagrama, tendremos la respuesta a cada una de las preguntas del ejercicio.

a) $p(B) = \frac{3+3}{10} = 0.6$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

b) $P(A \cap B^c) = \frac{2}{10} = 0.2$

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = \frac{10-3}{10} = 0.7$$

c) $\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\} \text{ Si son independientes.}$

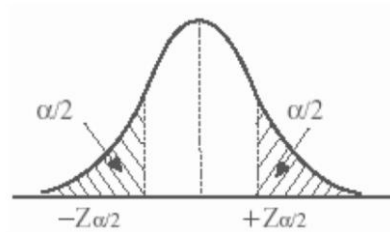
4 En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y la media ha sido 67.

- a) Calcula el intervalo de confianza al 93 %, para la media de la población. (5 puntos)
 b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que debe tomarse para estimar, con un nivel de confianza del 99%, el promedio de la población con un error no superior a 2? (5 puntos)

a) $X = N(\mu, 8)$
 $n = 100 \quad \bar{x} = 67$

Con un nivel de confianza del 93%

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,81 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}} = 1,448$$

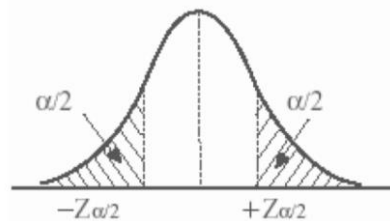
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (67 - 1,448, 67 + 1,448) = (65,552, 68,448)$$

b) $X = N(\mu, 8)$

Con un nivel de confianza del 99%

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 2.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow \frac{2,575 \cdot 8}{2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = (10,3)^2 = 106,09$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 107 elementos.

OPCIÓN B

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula A^2 , A^3 . (2 puntos)
 b) Obtenga una fórmula para A^n y utilícela para calcular A^{14} . (4 puntos)
 c) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} B^t \cdot B = 2A$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B . (4 puntos)

a) $A = A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 1+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot X + \frac{1}{5} B^t \cdot B = 2A$

$$A \cdot X = 2A - \frac{1}{5} B^t \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = 2A^{-1} \cdot A - \frac{1}{5} A^{-1} \cdot B^t \cdot B \Rightarrow X = 2I_2 - \frac{1}{5} A^{-1} \cdot B^t \cdot B$$

Hemos supuesto que la matriz A tiene inversa, lo comprobamos y la calculamos para terminar de obtener la matriz X .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ La matriz } A \text{ tiene inversa.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida anteriormente:

$$\begin{aligned} X &= 2I_2 - \frac{1}{5} A^{-1} \cdot B^t \cdot B \Rightarrow X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ -1+0 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1+4 & 0+2 \\ -1-2 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ -3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 3/5 & 11/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Sabiendo que se vendió toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo hay que producir para obtener el máximo beneficio e indica cuál es ese beneficio. (2 puntos)

Llamamos “x” al número de anillos modelo A e “y” al número de anillos modelo B. Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de plata	Horas de trabajo	Beneficio
Nº anillos modelo A (x)	6x	3x	35x
Nº anillos modelo B (y)	2y	6y	55y
TOTAL	6x + 2y	3x + 6y	35x + 55y

- a) La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 35x + 55y$, que deseamos maximizarlo.

Las restricciones son:

“Disponemos de 150 gramos de plata” $\rightarrow 6x + 2y \leq 150$

“Disponemos de 180 horas de trabajo” $\rightarrow 3x + 6y \leq 180$

El número de anillos debe ser positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y \leq 150 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 75 \\ x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$3x + y = 75$

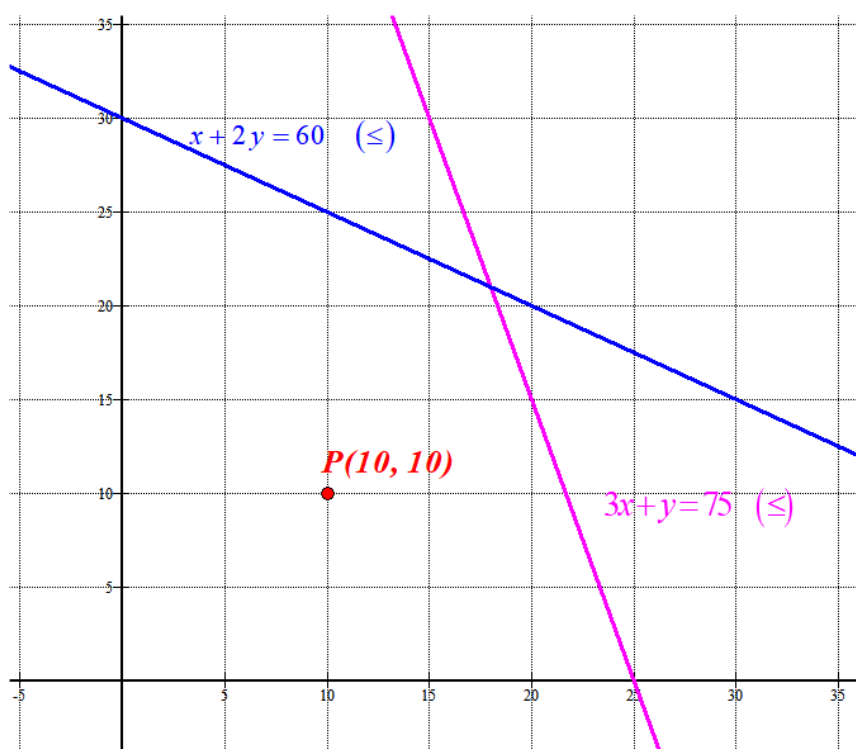
x	y = 75 - 3x
0	75
25	0

$x + 2y = 60$

x	y = $\frac{60 - x}{2}$
0	30
60	0

$x \geq 0; y \geq 0$

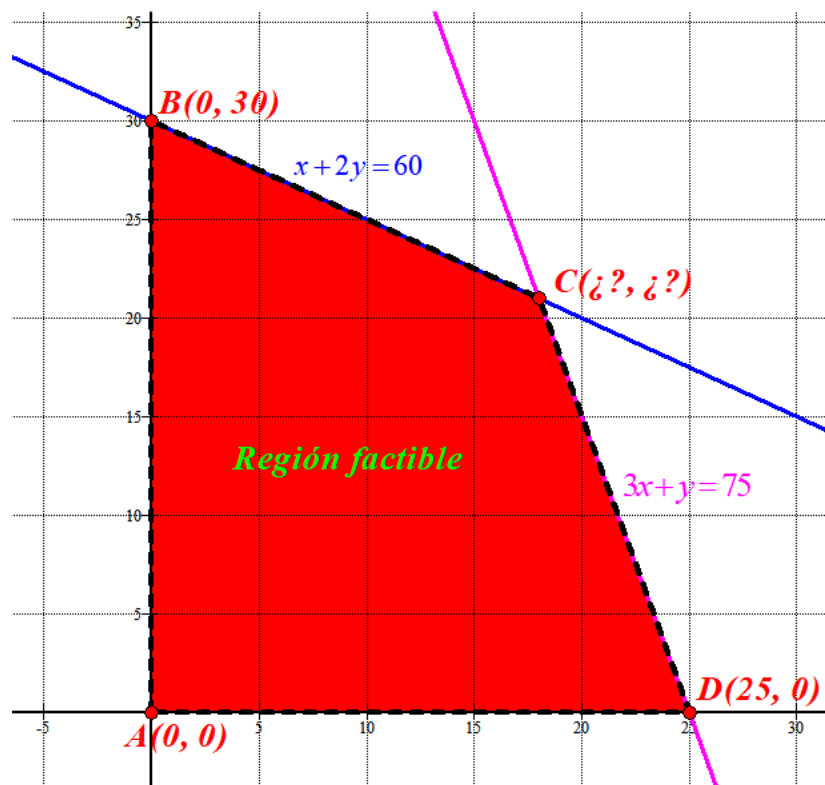
Primer cuadrante



Compruebo si el punto $P(10, 10)$ cumple las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 10 \leq 75 \\ 10 + 20 \leq 60 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto $P(10, 10)$ y delimitada por las rectas y que coloreamos de rojo en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C que podemos obtener resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 75 \\ x + 2y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y = 75 \\ x = 60 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 3(60 - 2y) + y = 75 \Rightarrow 180 - 6y + y = 75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -105 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-105}{-5} = 21} \Rightarrow \boxed{x = 60 - 42 = 18} \Rightarrow \boxed{C(18, 21)}$$

c) Valoramos la función $B(x, y) = 35x + 55y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 1650$$

$$C(18, 21) \rightarrow B(18, 21) = 1785 \text{ Máximo}$$

$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 875$$

El beneficio máximo se obtiene en el vértice $C(18, 21)$.

El beneficio máximo es de 1785 € y se obtiene fabricando 18 anillos modelo A y 21 anillos modelo B.

3 Los beneficios semanales de una empresa expresados en euros, cuando fabrica y vende x objetos, se ajusta a la función

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200; \text{ en que } 20 \leq x \leq 80.$$

- a) Calcular el beneficio que obtiene al fabricar y vender 20 objetos. (2 puntos)
 b) Busque el número de objetos que debe fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, así como este beneficio máximo. (4 puntos)
 c) El beneficio medio para x objetos es $M(x) = B(x)/x$. Diga cuántos objetos debe fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es ese beneficio. (4 puntos)

a) $B(20) = -0,75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1200 = 0$. El beneficio es de 0 €.

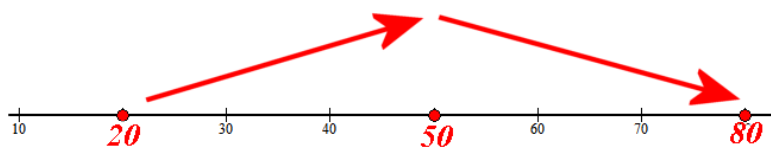
b) Utilizamos la derivada para obtener el número de objetos que da un beneficio máximo.

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200 \Rightarrow B'(x) = -1,5x + 75$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -1,5x + 75 = 0 \Rightarrow x = \frac{75}{1,5} = 50$$

El valor crítico es $x = 50$. Veamos cómo evoluciona la función antes y después de este valor.

- En $[20, 50)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale $B'(30) = 30 > 0$. La función crece en $[20, 50)$.
- En $[50, 80)$ tomamos $x = 60$ y la derivada vale $B'(60) = -15 < 0$. La función decrece en $[50, 80)$.



Con la fabricación y venta de 50 objetos se produce un máximo relativo de la función beneficio de $B(50) = -0,75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1200 = 675$ €.

c) $M(x) = B(x)/x = \frac{-0,75x^2 + 75x - 1200}{x} = -0,75x + 75 - \frac{1200}{x}$

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Rightarrow -0,75 + \frac{1200}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1200}{x^2} = 0,75 \Rightarrow x^2 = \frac{1200}{0,75} = 1600 \Rightarrow x = \sqrt{1600} = 40$$

En $x = 40$ hay un punto crítico, sustituimos en la derivada segunda y vemos si es un máximo o mínimo de la función $M(x)$.

$$M'(x) = -0,75 + \frac{1200}{x^2} = -0,75 + 1200x^{-2} \Rightarrow M''(x) = -2400x^{-3} = \frac{-2400}{x^3}$$

$$M''(40) = \frac{-2400}{40^3} < 0$$

La función $M(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 40$. Este valor máximo es de

$$M(40) = B(40)/40 = -0,75 \cdot 40 + 75 - \frac{1200}{40} = 15 \text{ €}$$

Fabricando y vendiendo 40 objetos se obtiene un beneficio medio máximo de 15 € / objeto.

4 En una población, el porcentaje de personas que miran un cierto programa de televisión es del 40%. Se sabe que el 60% de las personas que lo miran tienen estudios superiores y que el 30% de las personas que no lo miran carecen de estudios superiores.

- a) Interpreta los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores? (4 puntos)
- c) Busque la probabilidad de que una persona que tenga estudios superiores, mire el citado programa. (4 puntos)

a) Demos nombre a los sucesos que aparecen en este experimento aleatorio.

A = Una persona de cierta población mira cierto programa de televisión.

A^C = Una persona de cierta población NO mira cierto programa de televisión.

B = Una persona de cierta población tiene estudios superiores.

B^C = Una persona de cierta población NO tiene estudios superiores.

B / A = Una persona de las que miran el programa tiene estudios superiores.

B^C / A^C = Una persona de las que no miran no tiene estudios superiores.

Las probabilidades proporcionadas se expresan de la siguiente manera:

“El tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió és del 40%” $\rightarrow$

$$P(A) = 0.4.$$

“El 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors” $\rightarrow P(B / A) = 0.6.$

“El 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors” $\rightarrow P(B^C / A^C) = 0.3.$

b) Nos piden calcular $P(B)$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(A)P(B / A) + P(A^C)P(B / A^C) =$$

$$= P(A)P(B / A) + (1 - P(A))(1 - P(B^C / A^C)) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.6 + (1 - 0.4)(1 - 0.3) = 0.24 + 0.42 = \boxed{0.66}$$

c) Nos piden calcular $P(A / B)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B / A)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.66} = \boxed{\frac{4}{11} = 0.364}$$



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

**Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II**

Modelo 2

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

OPCIÓN A

1 Dado el sistema siguiente:

$$x + (a+1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

- a) Discute el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)
- b) Resuélvelo para $a = -2$. (4 puntos)

2 En una empresa pueden producirse hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación con el número q de mesas producidas es

$$C(q) = q^3 / 50 + 8q + 40$$

Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función

$$Q(q) = C(q) / q$$

- a) Calcula el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20? (3 puntos)
- b) Determina cuantas mesas hay que producir para que el coste medio sea mínimo. Justifica que se trata efectivamente de un mínimo y calcula este coste medio. (7 puntos)

3 Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ i $g(x) = x^2 - a$, donde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra todos los posibles valores de a para que $f(x)$ y $g(x)$ se corten. (3 puntos)
- b) Para $a = 3$, dibuja el recinto encerrado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, identificando los puntos de intersección. (3 puntos)
- c) Para $a = 3$, calcula el área de este recinto anterior. (4 puntos)

4 En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.

- a) Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población. (5 puntos)
- b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra a tomar porque al estimar la edad media con un nivel de confianza del 99%, el error cometido sea inferior a 0.5 años? (5 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1 Un trayecto de 600 km debe realizarse combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, y el del autobús, de 0.1 euros/km. El recorrido nos ha costado 150 euros, y se sabe que se han hecho el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determine las distancias que se han recorrido con cada medio de transporte.

(10 puntos)

2 Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para realizar una hornada de pasteles del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para realizar una hornada de pasteles del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Se sabe que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 euros y, de 30 euros al vender una hornada del tipo B.

- a) Plantee la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

3 Consideremos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

- a) Determina el valor de b para qué $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razona si se trata de un máximo o de un mínimo. (4 puntos)
- b) Suponiendo que $b = 1$, encuentra una primitiva de $f'(x)$, i.e., $\int f'(x)dx$. (3 puntos)
- c) Utiliza la primitiva anterior para encontrar $f(x)$ para $b = 1$ sabiendo que $f(2) = -1$. (3 puntos)

4 Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras, A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40% de las aceitunas proviene de la productora A, de éstas el 60% es de la variedad picual. De las que provienen de la productora B, el 30% es de la variedad arbequina. Se elige una caja de aceitunas al azar.

- a) Interprete los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual? (4 puntos)
- c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A? (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A****1** Dado el sistema siguiente:

$$x + (a+1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

a) Discute el sistema en función del parámetro a .

(6 puntos)

b) Resuélvelo para $a = -2$.

(4 puntos)

a) Despejamos en el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + (a+1)y = 1 \\ ax + 2y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - (a+1)y \\ ax + 2y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a(1 - (a+1)y) + 2y = -2 \Rightarrow a - a^2y - ay + 2y = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-a^2 - a + 2)y = -2 - a$$

Para poder despejar la “y” debe ser $-a^2 - a + 2 \neq 0$

$$\text{Veamos cuando es cero } \rightarrow -a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} \frac{1+3}{-2} = -2 = a \\ \frac{1-3}{-2} = 1 = a \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 1$ En este caso $-a^2 - a + 2 \neq 0$ y se puede despejar de la ecuación:

$$(-a^2 - a + 2)y = -2 - a \Rightarrow y = \frac{-2 - a}{-a^2 - a + 2}.$$

El sistema es **compatible determinado**.**CASO 2.** $a = 1$.En este caso $-a^2 - a + 2 = 0$ y la última ecuación queda:

$$\left. \begin{array}{l} (-a^2 - a + 2)y = -2 - a \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -3 \text{ Igualdad imposible.}$$

El sistema es **incompatible**.**CASO 3.** $a = -2$ En este caso $-a^2 - a + 2 = 0$ y la última ecuación queda

$$\left. \begin{array}{l} (-a^2 - a + 2)y = -2 - a \\ a = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0 \text{ Desaparece una ecuación.}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.b) Para $a = -2$ el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$$

Las soluciones son $\boxed{x = 1 + t; \quad y = t \quad t \in \mathbb{R}}$

2 En una empresa pueden producirse hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación con el número q de mesas producidas es

$$C(q) = q^3 / 50 + 8q + 40$$

Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función

$$Q(q) = C(q) / q$$

- a) Calcula el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20? (3 puntos)
 b) Determina cuantas mesas hay que producir para que el coste medio sea mínimo. Justifica que se trata efectivamente de un mínimo y calcula este coste medio. (7 puntos)

a) El coste medio de una mesa es:

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{q^3}{50} + 8q + 40}{q} = \frac{q^3}{50q} + \frac{8q}{q} + \frac{40}{q} = \frac{q^2}{50} + 8 + \frac{40}{q}$$

Si se producen 5 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(5) = \frac{5^2}{50} + 8 + \frac{40}{5} = 0.5 + 8 + 8 = 16.5$$

Si se producen 20 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(20) = \frac{20^2}{50} + 8 + \frac{40}{20} = 8 + 8 + 2 = 18$$

b) Para determinar el mínimo derivamos la función coste medio.

$$Q(q) = \frac{q^2}{50} + 8 + \frac{40}{q} = \frac{1}{50}q^2 + 8 + 40q^{-1} \Rightarrow Q'(q) = \frac{1}{50}2q + 0 - 40q^{-2} = \frac{q}{25} - \frac{40}{q^2}$$

Iguamos a cero, en busca de los puntos críticos.

$$Q'(q) = 0 \Rightarrow \frac{q}{25} - \frac{40}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{q}{25} = \frac{40}{q^2} \Rightarrow q^3 = 1000 \Rightarrow q = \sqrt[3]{1000} = 10$$

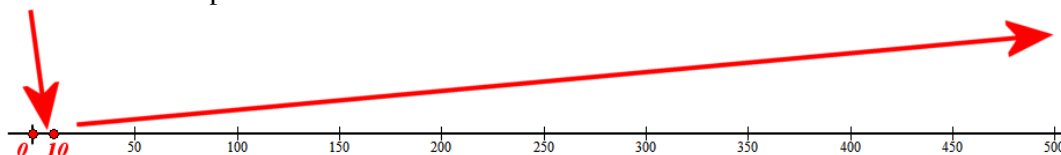
Como se pueden producir de 0 a 500 mesas al mes, el punto crítico $q = 10$ divide el dominio en dos intervalos, veamos si la función crece o decrece en cada intervalo.

- En $(0, 10)$ tomamos $q = 5$ y la derivada vale $Q'(5) = \frac{5}{25} - \frac{40}{5^2} = -\frac{7}{5} < 0$.

El coste medio decrece entre 0 y 10 mesas fabricadas.

- En $(10, 500)$ tomamos $q = 20$ y la derivada vale $Q'(20) = \frac{20}{25} - \frac{40}{20^2} = \frac{7}{10} > 0$.

El coste medio crece a partir de 10 mesas fabricadas.



Por lo que la función coste medio tiene un mínimo en $q = 10$.

$$\text{El coste medio mínimo es de } Q(10) = \frac{10^2}{50} + 8 + \frac{40}{10} = 2 + 8 + 4 = 14.$$

3 Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ i $g(x) = x^2 - a$, donde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra todos los posibles valores de a para qué $f(x)$ y $g(x)$ se corten. (3 puntos)
 b) Para $a = 3$, dibuja el recinto encerrado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, identificando los puntos de intersección. (3 puntos)
 c) Para $a = 3$, calcula el área de este recinto anterior. (4 puntos)

- a) Planteamos el sistema formado por las dos funciones en busca de sus puntos de intersección.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 5 \\ g(x) = x^2 - a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 5 = x^2 - a \Rightarrow 5 + a = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{5+a}{2}$$

Para que tengan punto de intersección debe de poder terminarse de despejarse en la igualdad anterior, pero eso solo es posible si $\frac{5+a}{2} \geq 0 \Rightarrow 5+a \geq 0 \Rightarrow a \geq -5$

Las funciones tienen punto o puntos de intersección cuando $a \geq -5$

- b) Si $a = 3$ las funciones son $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 5 = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Como $f(2) = -2^2 + 5 = 1$ y $f(-2) = -(-2)^2 + 5 = 1$

Se cortan en los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(2, 1)$.

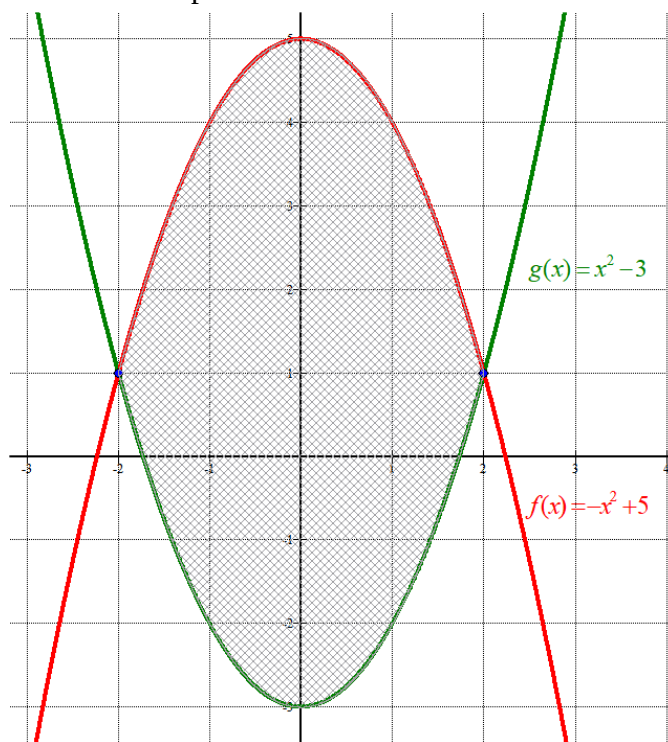
Dibujamos las dos parábolas y el recinto limitado por ellas utilizando una tabla de valores.

$$f(x) = -x^2 + 5$$

x	$y = -x^2 + 5$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1

$$g(x) = x^2 - 3$$

x	$y = x^2 - 3$
-2	1
-1	-2
0	-3
1	-2
2	1



- c) Mirando el dibujo el área del recinto tiene entre 21 y 22 u^2 . La calculamos con integrales.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 -x^2 + 5 - (x^2 - 3) dx &= \int_{-2}^2 -2x^2 + 8 dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \left[-2 \frac{2^3}{3} + 16 \right] - \left[-2 \frac{(-2)^3}{3} - 16 \right] = \\ &= -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = \boxed{\frac{64}{3} = 21.33 u^2} \end{aligned}$$

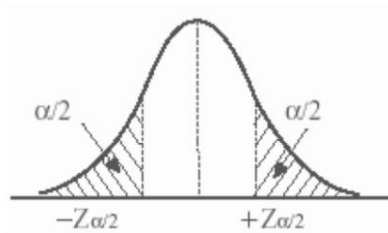
- 4** En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esta muestra es de 2 años.
- a) Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población. (5 puntos)
- b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra a tomar porque al estimar la edad media con un nivel de confianza del 99%, el error cometido sea inferior a 0.5 años? (5 puntos)

X = Edad de un individuo. $X = N(\mu, 2)$

La muestra es de tamaño $n = 256$ individuos. La media muestral es $\bar{x} = 17.4$ años.

- a) Con un nivel de confianza del 95% tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



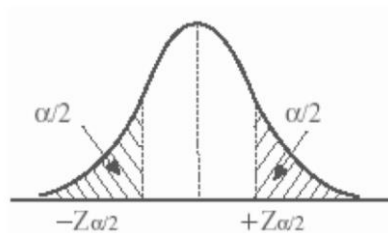
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245) = (17.155, 17.645)$$

- b) Con un nivel de confianza del 99% tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,575}$$



Si el error debe ser menor de 0.5 años.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 2.575 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 2}{0.5} \right)^2 = 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de la edad media sea inferior a 0.5 años con una confianza del 99% es de 107 individuos.

OPCIÓN B

1 Un trayecto de 600 km debe realizarse combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, y el del autobús, de 0.1 euros/km. El recorrido nos ha costado 150 euros, y se sabe que se han hecho el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determine las distancias que se han recorrido con cada medio de transporte.

(10 puntos)

Llamamos “x” a los kilómetros hechos en taxi, “y” a los kilómetros en ferrocarril y “z” a los kilómetros hechos en autobús.

“El trayecto es de 600 km” $\rightarrow x + y + z = 600$

“El trayecto ha costado 150 €, a razón de 0.5 €/km el taxi, 0.2 €/km el ferrocarril y 0.1 €/km el autobús” $\rightarrow 0.5x + 0.2y + 0.1z = 150$

“Ha hecho el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos” $\rightarrow y = 2(x + z)$

Juntamos estas tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 0.5x + 0.2y + 0.1z = 150 \\ y = 2(x + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 5x + 2y + z = 1500 \\ y = 2x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 5x + 2y + z = 1500 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 5 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 5x + 2y + z = 1500 \\ -5x - 5y - 5z = -3000 \\ \hline -3y - 4z = -1500 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -2x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 1200 \\ \hline 3y = 1200 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ -3y - 4z = -1500 \\ 3y = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ -3y - 4z = -1500 \\ \boxed{y = 400} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 400 + z = 600 \\ -1200 - 4z = -1500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 200 \\ -4z = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 200 \\ \boxed{z = 75} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 75 = 200 \Rightarrow \boxed{x = 125}$$

El trayecto lo ha dividido en 125 kilómetros en taxi, 400 en ferrocarril y 75 en autobús.

2 Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para realizar una hornada de pasteles del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para realizar una hornada de pasteles del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Se sabe que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 euros y, de 30 euros al vender una hornada del tipo B.

- a) Plantee la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

a) Llamemos “x” al número de hornadas de pasteles A, “y” al número de hornadas de pasteles B.

Nos ayudamos de una tabla para situar el problema.

	Kgs de harina	Kgs de azúcar	Kgs de manteca	Beneficio
Nº hornadas A (x)	3x	x	x	20x
Nº hornadas B (y)	6y	0.5y	y	30y
TOTALES	3x + 6y	x + 0.5y	x + y	20x + 30y

La función objetivo que deseamos maximizar es la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$.

Las restricciones son:

“El pastelero solo dispone de 150 kg de harina” $\rightarrow 3x + 6y \leq 150$

“El pastelero solo dispone de 22 kg de azúcar” $\rightarrow x + 0.5y \leq 22$

“El pastelero solo dispone de 26 kg de manteca” $\rightarrow x + y \leq 26$

Las cantidades de hornadas son positivas y enteras $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 150 \\ x + 0.5y \leq 22 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 44 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 50$$

$$2x + y = 44$$

$$x + y = 26$$

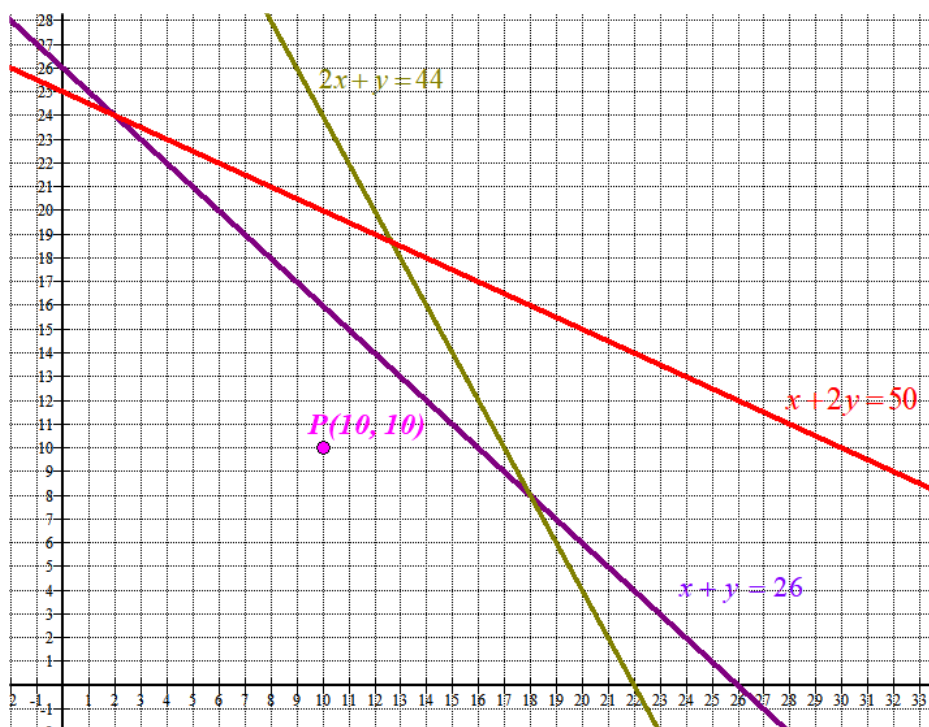
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{50-x}{2}$
0	25
50	0

x	$y = 44 - 2x$
0	44
22	0

x	$y = 26 - x$
0	26
26	0

Primer
cuadrante



Veamos si el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

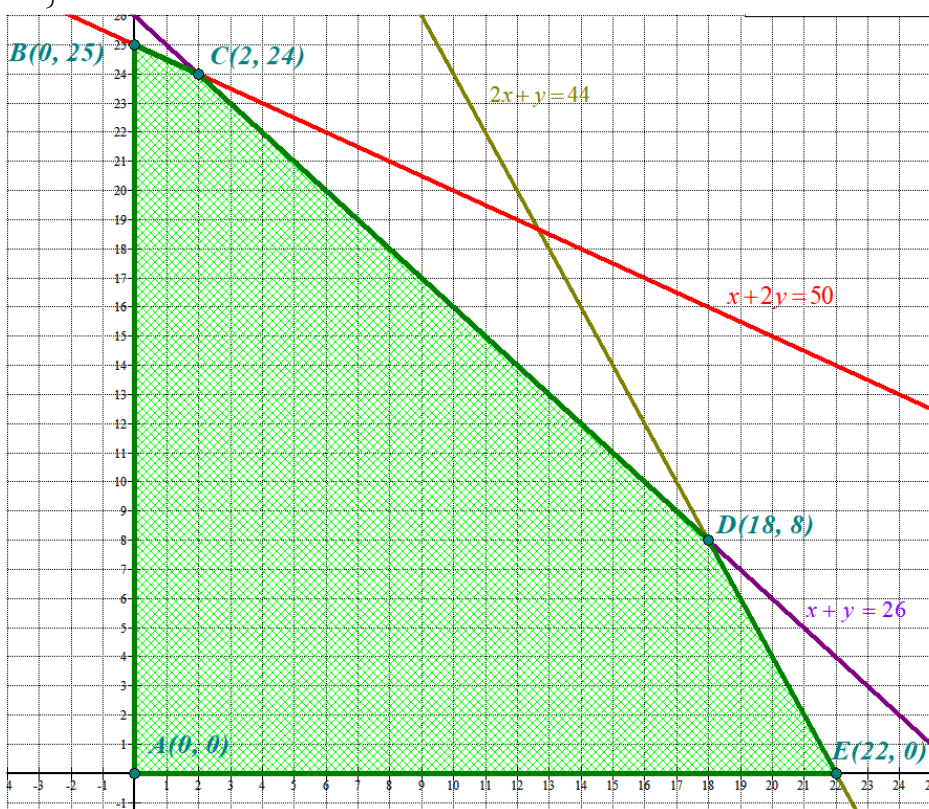
$$10 + 20 \leq 50$$

$$20 + 10 \leq 44$$

$$10 + 10 \leq 26$$

$$10 \geq 0; \quad 10 \geq 0$$

Se cumplen todas. La región factible es la zona rayada del dibujo.



c) Los vértices se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 50 \Rightarrow y = 25 \rightarrow \boxed{B(0, 25)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ x + y = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ -x - y = -26 \end{array} \right\}$$

$$y = 24 \Rightarrow x + 24 = 26 \Rightarrow x = 2 \rightarrow \boxed{C(2, 24)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 26 \\ 2x + y = 44 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y = -26 \\ 2x + y = 44 \end{array} \right\}$$

$$x = 18 \Rightarrow 18 + y = 26 \Rightarrow y = 8 \rightarrow \boxed{D(18, 8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 44 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 44 \Rightarrow x = 22 \rightarrow \boxed{E(22, 0)}$$

Valoramos la función beneficio en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 25) \rightarrow B(0, 25) = 0 + 750 = 750 \text{ €}$$

$$C(2, 24) \rightarrow B(2, 24) = 40 + 720 = 760 \text{ €}$$

$$D(18, 8) \rightarrow B(18, 8) = 360 + 240 = 600 \text{ €}$$

$$E(22, 0) \rightarrow B(22, 0) = 440 + 0 = 440 \text{ €}$$

El máximo beneficio está en el vértice C(2, 24).

Se obtiene un máximo beneficio de 760 € con 2 hornadas del pastel A y 24 del pastel B.

3 Consideremos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

- a) Determina el valor de b para qué $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razona si se trata de un máximo o de un mínimo. (4 puntos)
- b) Suponiendo que $b = 1$, encuentra una primitiva de $f'(x)$, i.e, $\int f'(x)dx$. (3 puntos)
- c) Utiliza la primitiva anterior para encontrar $f(x)$ para $b = 1$ sabiendo que $f(2) = -1$. (3 puntos)

a) Si la función presenta un extremo relativo en $x = -1$ la derivada se anula en dicho valor.

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + b(-1) + 4 = 0 \Rightarrow -b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Para $b = 3$ la derivada queda $f'(x) = x^3 + 3x + 4$.

Calculamos la derivada segunda y comprobamos el signo de la misma en $x = -1$.

$$f'(x) = x^3 + 3x + 4 \Rightarrow f''(x) = 3x^2 + 3$$

$$f''(-1) = 3(-1)^2 + 3 = 6 > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$

b) Si $b = 1$ la derivada queda $f'(x) = x^3 + x + 4$. Calculamos la función haciendo la integral de la derivada, quedando pendiente de un parámetro, por lo que la función no es única.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x^3 + x + 4dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

Una primitiva de $f'(x)$ se obtiene dándole a C el valor 0 $\rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x}$

c) Si le añadimos la condición de que $f(2) = -1$ podemos determinar el valor de C .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C \\ f(2) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = f(2) = \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 8 + C \Rightarrow -1 = 4 + 2 + 8 + C \Rightarrow \boxed{C = -15}$$

La función es $\boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x - 15}$

4 Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras, A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40% de las aceitunas proviene de la productora A, de éstas el 60% es de la variedad picual. De las que provienen de la productora B, el 30% es de la variedad arbequina. Se elige una caja de aceitunas al azar.

- a) Interprete los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual? (4 puntos)
- c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A? (4 puntos)

a) Llamemos A = la caja de olivas procede de la productora A

B = La caja de olivas procede de la productora B

C = La oliva es de la variedad picual

Q = La oliva es de la variedad arbequina

Las probabilidades que nos proporciona el enunciado son:

$$P(A) = 0.4; P(B) = 0.6$$

$$P(C/A) = 0.6; P(Q/A) = 0.4$$

$$P(Q/B) = 0.3; P(C/B) = 0.7$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.24 + 0.42 = \boxed{0.66}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.66} = \frac{24}{66} = \frac{4}{11} = \boxed{0.3636}$$

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que guardan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Dadas A , una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indica cómo es esta matriz. (1 punto)

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de x para los cuales se cumple que $A^2 = 2 \cdot A$ (5 puntos)

ii) Para $x = -1$, calcula A^{-1} . Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$. (4 puntos)

2. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba al mercado según la función:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \leq t \leq 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \leq 8 \end{cases}.$$

a) ¿Cuál es el precio de salida del producto? (1 punto)

b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Indica los conjuntos de continuidad y derivabilidad. (4 puntos)

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto. (3 puntos)

d) Averigüe en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios. (2 puntos)

3. En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.

a) Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas. (2 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas. (5 puntos)

c) Si probamos dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea? (3 puntos)

4. El 70% de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil? (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil? (5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil? (4 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de cocina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina. El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina. La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros.

- a) Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria? (7 puntos)
b) Determine las cantidades si para libros hay 2100 €. (3 puntos)

2. KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan en la siguiente tabla:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	4
De luxe	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

¿Cuántos pares de cada modelo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste beneficio? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

3. Dibuje el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 puntos). Calcule el área del recinto anterior (6 puntos).

4. Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica por pertenecer al comité y de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra.

- a) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: (6 puntos)
A = "Ambos son hombres":
B = "Sólo uno es mujer":
C = "Ambos son mujeres":
b) Razone si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso, y calcule su probabilidad. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Dadas A , una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indica cómo es esta matriz. (1 punto)

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de x para los cuales se cumple que (5 puntos)

$$A^2 = 2 \cdot A$$

ii) Para $x = -1$, calcula A^{-1} . Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$. (4 puntos)

a) Se debe obtener la matriz identidad. Si la matriz A es de orden 3 deberían ser los dos productos

$$\text{iguales a } Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.i) Comprobamos cuando se cumple la igualdad $A^2 = 2 \cdot A$.

$$\begin{aligned} A^2 = 2 \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2x+x(x+2) \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+x(x+2) = 2x \\ (x+2)^2 = 2x+4 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x^2 + 4x = 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2) = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Se cumple la igualdad para $x=0$ y $x=-2$.

b.ii) Para $x = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Al ser el determinante no nulo existe la inversa de A . La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A \cdot A^{-1} = Id_2$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

2. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba al mercado según la función:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \leq t \leq 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \leq 8 \end{cases}.$$

- a) ¿Cuál es el precio de salida del producto? (1 punto)
 b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Indica los conjuntos de continuidad y derivabilidad. (4 puntos)
 c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto. (3 puntos)
 d) Averigüe en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios. (2 puntos)

a) Calculamos el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 40 = 40$$

El precio de salida es de 40 000 euros.

b) La función en el intervalo $[0, 6)$ tiene la expresión $P(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40$, que es una función polinómica y continua. En el intervalo $(6, 8]$ la función es $P(t) = -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}$, que es una función polinómica y continua. Estudiamos la continuidad en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} P(6) &= \frac{1}{3} \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 40 = 256 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 = 256 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} = -\frac{113}{14} \cdot 6^2 + \frac{3826}{7} = 256 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} P(t) = 256$$

La función es continua en $t = 6$. La función es continua en $[0, 8]$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{6\}$, siendo su derivada $P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t, & 0 \leq t < 6, \\ -\frac{113}{7}t, & 6 < t \leq 8 \end{cases}$.

Estudiamos si es derivable en $t = 6$. Para ello deben ser iguales las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} P'(6^-) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} t^2 + 8t = 36 + 54 = 90 \\ P'(6^+) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} P'(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} -\frac{113}{7}t = -\frac{113}{7} \cdot 6 = -\frac{678}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(6^-) = 90 \neq \frac{-678}{7} = P'(6^+)$$

La función no es derivable en $t = 6$. La función es derivable en $[0, 6) \cup (6, 8]$

c) Igualamos a cero la derivada, en busca de sus puntos críticos.

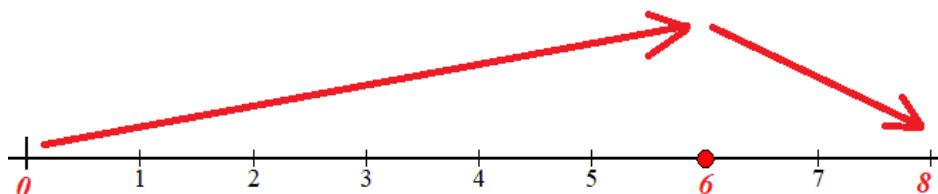
$$P'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8t = 0 \rightarrow t(t+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t + 8 = 0 \rightarrow t = -8 \notin [0, 6) \end{cases} \\ -\frac{113}{7}t = 0 \rightarrow t = 0 \notin (6, 8] \end{cases}$$

El único punto crítico de la función es $t = 0$ que está en el extremo del intervalo de definición de la función $[0, 8]$.

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $t = 6$.

- En $[0, 6)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = 1^2 + 8 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 6)$.
- En $(6, 8]$ tomamos $t = 7$ y la derivada vale $P'(7) = \frac{-113}{7} \cdot 7 = -113 < 0$. La función decrece en $(6, 8]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $P(t)$ crece en $[0, 6)$ y decrece en $(6, 8]$

d) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior y sabiendo que la función es continua tenemos que la función presenta un máximo relativo y absoluto en $t = 6$.

Como $P(6) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 40 = 256$ el precio máximo es de 256 000 euros.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para averiguar donde se alcanza el precio mínimo.

$$P(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 40 = 40$$

$$P(8) = \frac{-113}{14} \cdot 8^2 + \frac{3826}{7} = 30$$

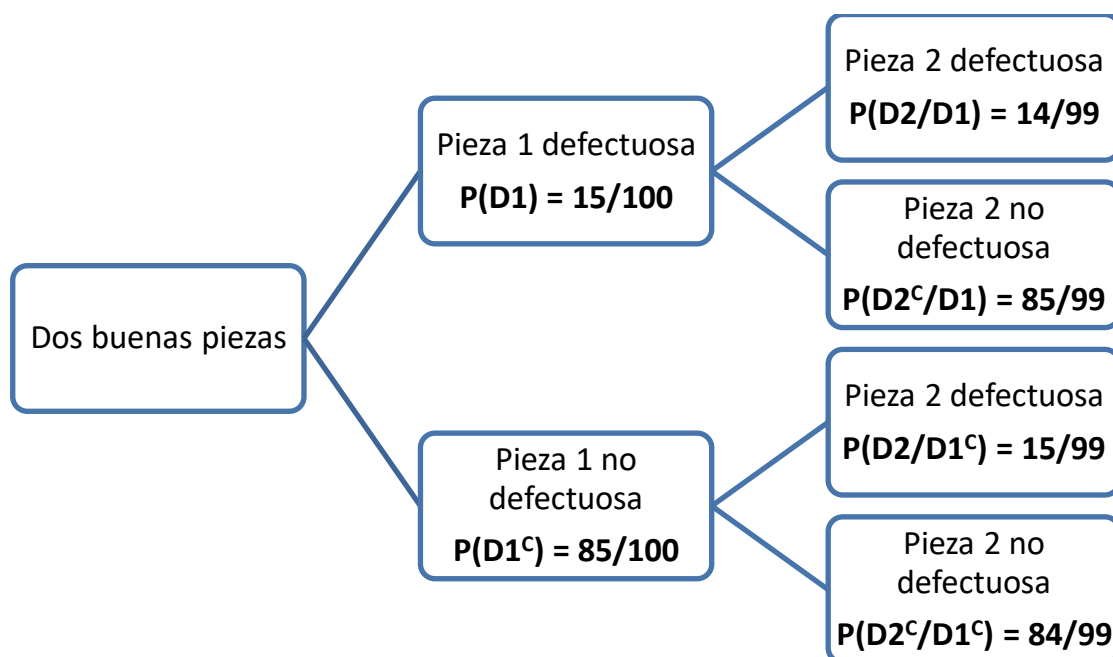
El precio mínimo es de 30 000 euros y se alcanza el octavo año.

3. En una máquina se han fabricado 100 piezas, de las cuales 15 han presentado algún defecto.
- Calcula la proporción de piezas que no son defectuosas. (2 puntos)
 - Calcula la probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas. (5 puntos)
 - Si probamos dos piezas al azar y la primera es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda no lo sea? (3 puntos)

a) Si de 100 piezas hay 15 defectuosas entonces habrán $100 - 15 = 85$ piezas no defectuosas.

La proporción de piezas no defectuosas es $\frac{85}{100} = 0.85$.

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Calculamos $P(D1 \cap D2)$.

$$P(D1 \cap D2) = P(D1)P(D2/D1) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \boxed{\frac{7}{330} \approx 0.0212}$$

La probabilidad de que, si examinamos dos piezas al azar, ambas resulten defectuosas tiene un valor de $\frac{7}{330} \approx 0.0212$

- c) Calculamos $P(D2^c/D1)$. Como se ha elegido la primera pieza quedan 99 para elegir la segunda, y de ellas hay 85 no defectuosas (la primera es defectuosa). Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(D2^c/D1) = \frac{85}{99}$.

4. El 70% de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

- a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil? (1 punto)
- b)Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil? (5 puntos)
- c)Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil? (4 puntos)

a) La proporción de alumnos con móvil es 0.70. Multiplicamos este valor por 1400 y obtenemos el número esperado de alumnos con móvil $\rightarrow 1400 \cdot 0.7 = 980$ alumnos con móvil.

b) Llamamos X = Número de alumnos con móvil de un grupo de 150.

X es una variable binomial con $n = 150$ y $p = 0.7$. $X = B(150, 0.7)$.

Nos piden calcular $P(X > 100)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial a una variable normal Y con media $\mu = np = 150 \cdot 0.7 = 105$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \frac{3\sqrt{14}}{2} \approx 5.61. Y = N(105, 5.61).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 105 > 5$ y $nq = 150 \cdot 0.3 = 45 > 5$.

$$P(X > 100) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 100.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{100.5 - 105}{5.61}\right) = P(Z \geq -0.8) = P(Z \leq 0.8) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7881}$$

La probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil es de 0.7881.

c) Llamamos X = Número de alumnos con móvil de un grupo de 150.

X es una variable binomial con $n = 200$ y $p = 0.7$. $X = B(200, 0.7)$.

Nos piden calcular $P(X \leq 140)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.7 = 140$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \sqrt{42} \approx 6.5. Y = N(140, 6.5).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 140 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0.3 = 60 > 5$.

$$P(X \leq 140) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 140.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{140.5 - 140}{6.5}\right) = P(Z \leq 0.08) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.5319}$$

La probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil es de 0.5319.

OPCIÓN B

1. Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de cocina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina. El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina. La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros.

a) Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria?

(7 puntos)

b) Determine las cantidades si para libros hay 2100 €.

(3 puntos)

a) Llamamos “x” al presupuesto para libros, “y” al presupuesto para material de cocina y “z” al presupuesto para muebles.

“El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina” $\rightarrow z = 5(x + y)$

“El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina” $\rightarrow x = 3y$

“La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros” $\rightarrow y + z = 7x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} z = 5(x + y) \\ x = 3y \\ y + z = 7x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 5(3y + y) \\ y + z = 7 \cdot 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20y \\ y + z = 21y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20y \\ z = 20y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = 20y}$$

No se puede resolver con precisión el sistema. Las soluciones son infinitas:

$x = 3\alpha$, $y = \alpha$, $z = 20\alpha$, para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

Falta alguna información más que no sea redundante con la que tenemos.

b) Si $x = 2100$ podemos determinar el resto de partidas presupuestarias.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3\alpha = 2100 \rightarrow \alpha = 700 \\ y = \alpha \\ z = 20\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{y = 700} \\ \boxed{z = 20 \cdot 700 = 14000} \end{array} \right\}$$

Se destinan 700 euros a material de cocina y 14 000 euros a muebles.

2. KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan en la siguiente tabla:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	4
De luxe	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

¿Cuántos pares de cada modelo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste beneficio? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

Llamamos “x” al número de guantes normales e “y” al número de guantes de lujo. Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal (x)	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{8}$	4x
De luxe (y)	$\frac{3y}{2}$	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{4}$	8y
TOTALES	$x + \frac{3y}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$	$\frac{x}{8} + \frac{y}{4}$	$4x + 8y$

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 4x + 8y$, que deseamos maximizarlo.

Las restricciones son:

“Disponemos de 900 horas de tiempo en el departamento de producción” $\rightarrow$

$$x + \frac{3y}{2} \leq 900 \rightarrow 2x + 3y \leq 1800$$

“Disponemos de 300 horas en el departamento de acabado” $\rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 300 \Rightarrow 3x + 2y \leq 1800$

“Disponemos de 100 horas en el departamento de empaquetado” $\rightarrow$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} \leq 100 \Rightarrow x + 2y \leq 800$$

El número de guantes debe ser positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 1800 \\ 3x + 2y \leq 1800 \\ x + 2y \leq 800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$$2x + 3y = 1800$$

x	$y = \frac{1800 - 2x}{3}$
0	600
900	0

$$3x + 2y = 1800$$

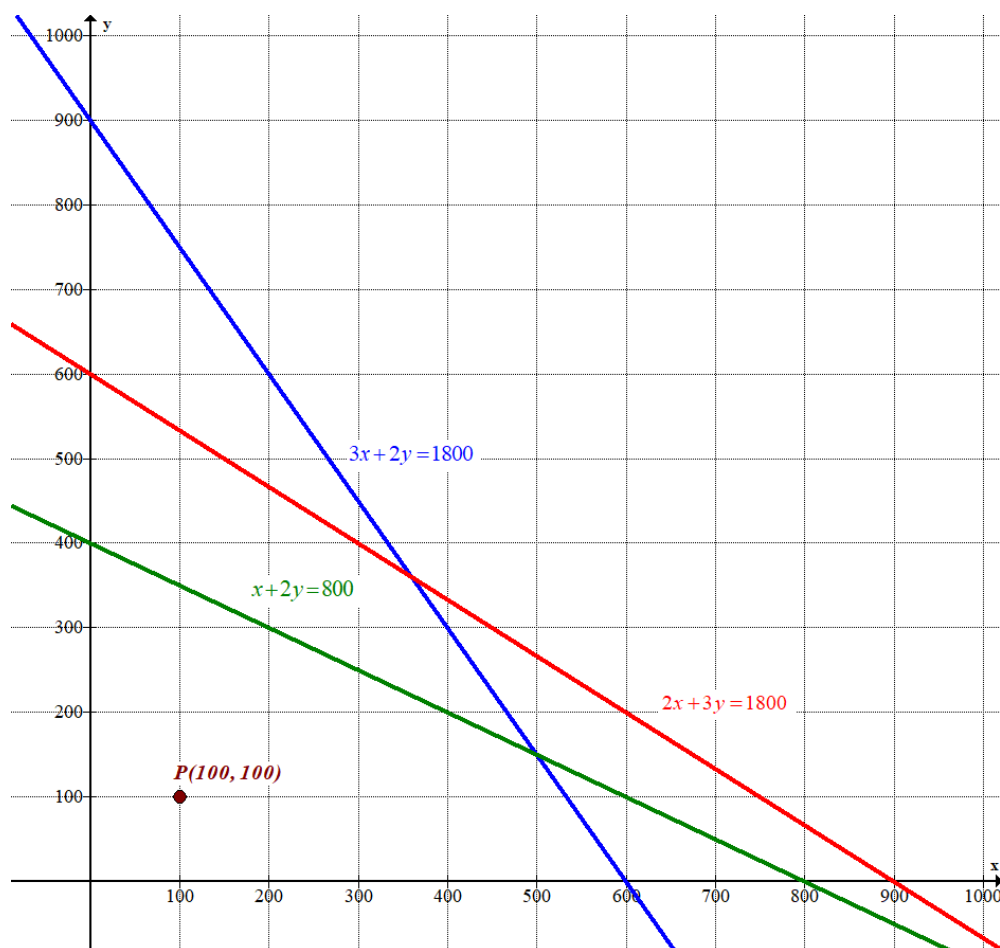
x	$y = \frac{1800 - 3x}{2}$
0	900
600	0

$$x + 2y = 800$$

x	$y = \frac{800 - x}{2}$
0	400
800	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

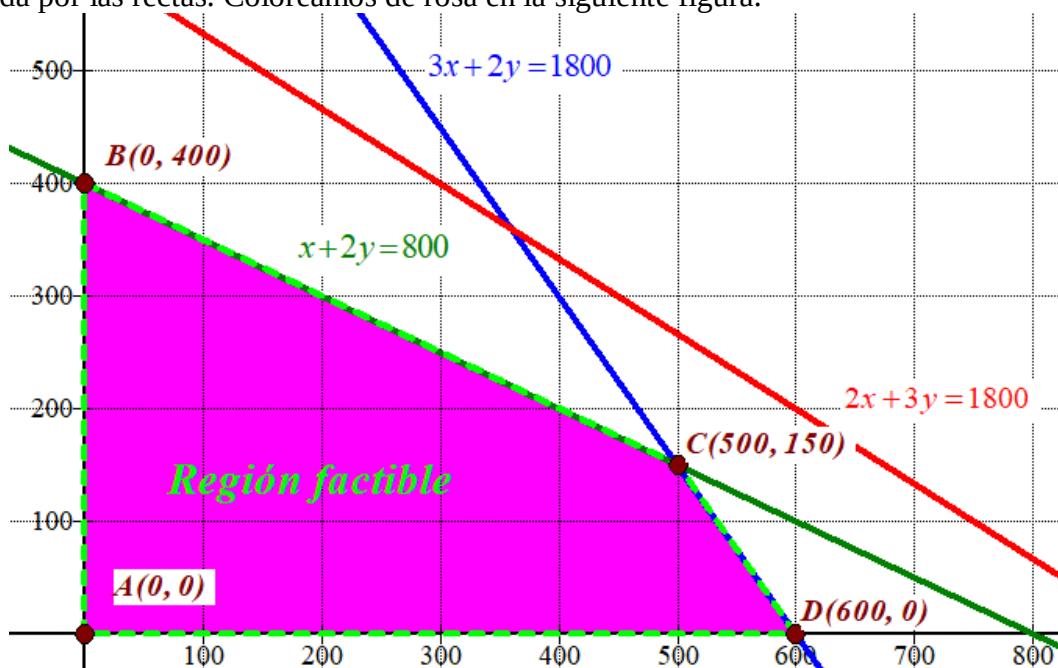
Primer
cuadrante



Compruebo si el punto $P(100, 100)$ cumple las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 300 \leq 1800 \\ 300 + 200 \leq 1800 \\ 100 + 200 \leq 800 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto $P(100, 100)$ y delimitada por las rectas. Coloreamos de rosa en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C que podemos obtener resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1800 \\ x + 2y = 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 1800 \\ 2y = 800 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 800 - x = 1800 \Rightarrow 2x = 1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1000}{2} = 500 \Rightarrow 2y = 800 - 500 = 300 \Rightarrow y = \frac{300}{2} = 150 \Rightarrow \boxed{C(500, 150)}$$

Valoramos la función $B(x, y) = 4x + 8y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 400) \rightarrow B(0, 400) = 4 \cdot 0 + 8 \cdot 400 = 3200 \text{ ;Máximo!}$$

$$C(500, 150) \rightarrow B(500, 150) = 4 \cdot 500 + 8 \cdot 150 = 3200 \text{ ;Máximo!}$$

$$D(600, 0) \rightarrow B(600, 0) = 4 \cdot 600 + 8 \cdot 0 = 2400$$

El beneficio máximo se obtiene en los vértices B y C. Por lo que en cualquier punto del segmento BC los beneficios son máximos.

El beneficio máximo es de 3200 € y se puede obtener de múltiples formas: fabricando sólo 400 guantes de lujo o fabricando 500 normales y 150 de lujo o fabricando 200 normales y 300 de lujo, etc.....

3. Dibuje el área encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 puntos). Calcule el área del recinto anterior (6 puntos).

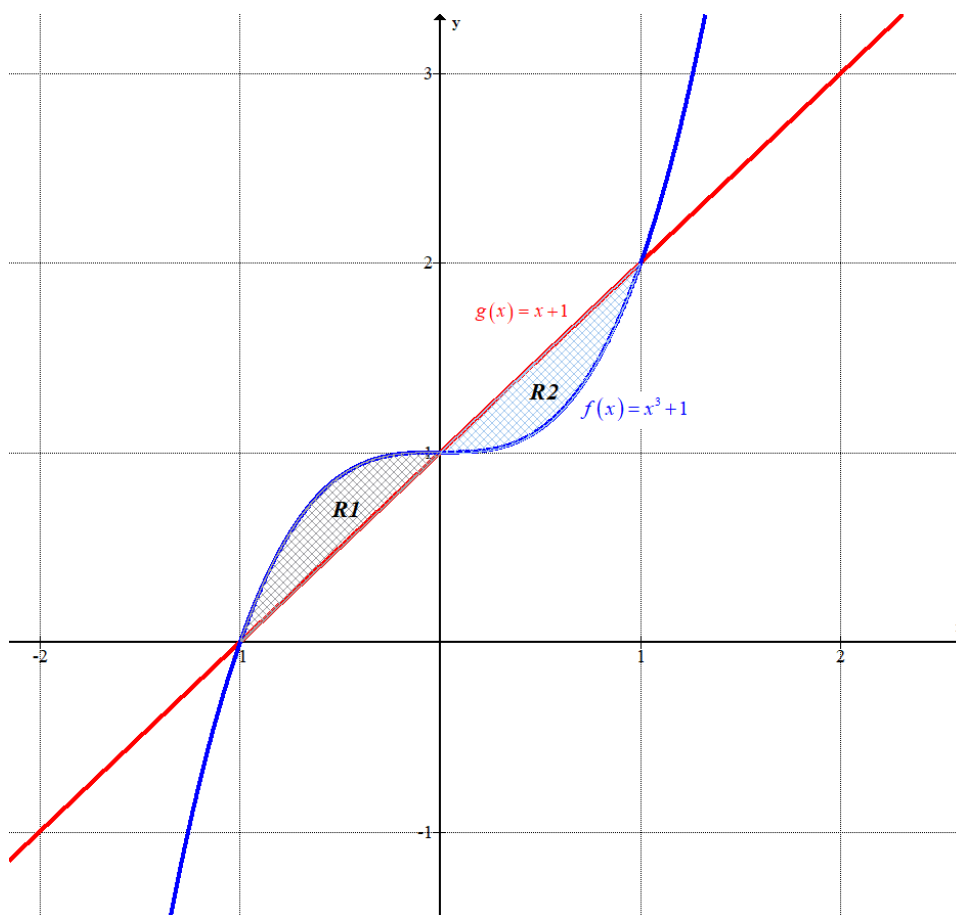
Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 1 \\ g(x) = x + 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{array} \right.$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas y el recinto limitado por ellas.

x	$f(x) = x^3 + 1$	x	$g(x) = x + 1$
-2	-7	-2	-1
-1	0	-1	0
0	1	0	1
1	2	1	2
2	9	2	3



Como se aprecia en el dibujo el área encerrada entre las gráficas de las funciones es pequeña y no llegará ni a 1 unidad cuadrada.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. Hallamos el área de la región 1 y de la región 2 y las sumamos para obtener el área total.

Región 1.

$$\text{Área R1} = \int_{-1}^0 x^3 + 1 - (x + 1) dx = \int_{-1}^0 x^3 + 1 - x - 1 dx = \int_{-1}^0 x^3 - x dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4} u^2}$$

Región 2.

$$\text{Área R2} = \int_0^1 x + 1 - (x^3 + 1) dx = \int_0^1 x + 1 - x^3 - 1 dx = \int_0^1 x - x^3 dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} u^2}$$

El área total vale $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 u^2$.

4. Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica por pertenecer al comité y de empresa. Supongamos que el hecho de pertenecer a una fábrica es independiente de pertenecer a la otra.

a) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: (6 puntos)

A = "Ambos son hombres":

B = "Sólo uno es mujer":

C = "Ambos son mujeres":

b) Razona si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A \cap B$, el $A \cup B$ o algún otro suceso, y calcule su probabilidad. (4 puntos)

Llamamos F1 al suceso "el trabajador pertenece a la primera fábrica", F2 a "el trabajador pertenece a la segunda fábrica", H a "el trabajador es hombre" y H^C a "el trabajador es mujer"

Los datos del ejercicio nos permiten establecer las siguientes probabilidades:

$$P(H^C / F1) = 0.60; P(H / F1) = 0.40; P(H / F2) = 0.55; P(H^C / F2) = 0.45$$

a) En el suceso A debe ser hombre el trabajador elegido en la primera fábrica y también el elegido en la segunda fábrica. Como son independientes las elecciones de cada fábrica tenemos:

$$P(A) = P(H / F1)P(H / F2) = 0.4 \cdot 0.55 = \boxed{0.22}$$

$$P(B) = P(H / F1)P(H^C / F2) + P(H^C / F1)P(H / F2) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.45 + 0.6 \cdot 0.55 = \boxed{0.51}$$

$$P(C) = P(H^C / F1)P(H^C / F2) = 0.6 \cdot 0.45 = \boxed{0.27}$$

b) El suceso contrario de C = "Ambos son mujeres" es el suceso en el cual hay algún hombre, es decir, o bien los dos son hombres (A) o bien solo uno es mujer (B), este suceso contrario es $A \cup B$.

Calculamos la probabilidad del suceso contrario de C.

$$P(C^C) = P(A \cup B) = 1 - P(C) = 1 - 0.27 = \boxed{0.73}$$

Convocatoria ordinaria de 2019



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2019

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que guardan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Resuelve la ecuación $|A| = 0$. ($|A|$ es el determinante de la matriz A) (3 puntos)
- Si $x = 0$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? (2 puntos)
- Si $x = 2$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad 3×3 . (5 puntos)

2. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

Donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

- ¿Es continua la función N(t)? (3 puntos)
- ¿Entre qué horas va a aumentar el número de vehículos que pasa por el peaje? ¿En qué horas disminuye? (5 puntos)
- ¿A qué hora va a pasar el mayor número de vehículos? ¿Cuál va a ser ese número? (2 puntos)

3. Tenemos un dado correcto y dos urnas con bolas descritas a continuación:

Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.

Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.

Tiramos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II.

Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

- Dibuja un diagrama de árbol que represente el experimento y todas las probabilidades. (3 puntos)
- Calcula las probabilidades siguientes: (4 puntos)
 - $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\text{ roja}\})$
 - $p(\{bola\text{ verde}\} / \{1\})$
 - $p(\{bola\text{ roja}\} / \{5\})$

iv) $p(\{2\} \text{ y } \{bola\ verde\})$

- c) Calcula la probabilidad de que la bola extraída haya sido roja y que haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto vale la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta. (3 puntos)

4. Resuelva los siguientes apartados:

- a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68.5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg? (5 puntos)
- b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación típica de la población, de 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. Interpreta el resultado en el entorno del problema. (5 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

- Representa los datos en forma de matriz. (2 puntos)
- ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado a)? En caso negativo, justifica la respuesta. En caso positivo, calcule su inversa. (4 puntos)
- Si D es la matriz construida en el apartado a), resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones: (4 puntos)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En ese momento están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices. (10 puntos)

3. El número de visitantes a un museo se obtiene mediante la función

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

donde t es la hora desde la apertura del museo. Supongamos que la hora de apertura del museo es a las 9:00 horas de la mañana.

- ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo? (4 puntos)
- ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es ese número? (2 puntos)
- ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de $V(t)$? (4 puntos)

4. Tengo dos urnas descritas a continuación:

Urna I: 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.

Urna II: 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.

El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna I, introducirla en la urna II, remover y extraer, finalmente, una bola al azar de la urna II.

- Da un diagrama en árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea (3 puntos)
 - roja. b.2) negra. b.3) verde.
- Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera roja siendo roja la segunda? (2 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$. ($|A|$ es el determinante de la matriz A) (3 puntos)
- b) Si $x = 0$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? (2 puntos)
- c) Si $x = 2$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad 3×3 . (5 puntos)

a) Obtenemos la ecuación a resolver y la resolvemos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3(x+2) - 3x^2 - 20 - 5(x+2) + 36 - x^2 =$$

$$= -3x - 6 - 3x^2 - 20 - 5x - 10 + 36 - x^2 = -4x^2 - 8x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow -4x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = -2$.

b) Por lo visto en el apartado anterior para $x = 0$ la matriz A tiene determinante igual a cero. Al tener determinante nulo la matriz A no tiene inversa.

c) Para $x = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ que tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 20 - 20 + 36 - 4 = -32 \neq 0. \text{ Al tener determinante no nulo la matriz}$$

A tiene inversa.

La matriz Z que cumple la igualdad $A \cdot Z = I$ es la matriz inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}}{-32} = \frac{-1}{32} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{32} \begin{pmatrix} -16 & 4 & 32 \\ 8 & -8 & -24 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

La matriz Z que cumple la igualdad $A \cdot Z = I$ es $Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

2. El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases}.$$

Donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

- a) ¿Es continua la función N(t)? (3 puntos)
 b) ¿Entre qué horas va a aumentar el número de vehículos que pasa por el peaje? ¿En qué horas disminuye? (5 puntos)
 c) ¿A qué hora va a pasar el mayor número de vehículos? ¿Cuál va a ser ese número? (2 puntos)

a) La función en los intervalos $[0, 9)$ y $(9, 24]$ tiene una expresión polinómica por lo que es continua en dichos intervalos. Estudiamos la continuidad en $t = 9$ (cambio de definición).

$$\left. \begin{aligned} N(9) &= \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t \rightarrow 9^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^-} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 = 6 \\ \lim_{t \rightarrow 9^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 = 10 - \left(\frac{9-15}{3}\right)^2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(9) = \lim_{t \rightarrow 9^-} N(t) = \lim_{t \rightarrow 9^+} N(t) = 6$$

La función es continua en $t = 9$. La función es continua en el intervalo $[0, 24]$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

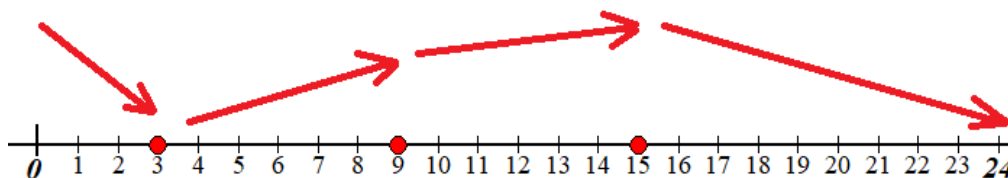
$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & 9 < t \leq 24 \end{cases} \Rightarrow N'(t) = \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right)\frac{1}{3}, & \text{si } 0 \leq t < 9, \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3}, & 9 < t \leq 24 \end{cases}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{t-3}{3}\right)\frac{1}{3} = 0 \rightarrow t-3=0 \rightarrow \boxed{t=3} \in [0, 9), \\ -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3} = 0 \rightarrow t-15=0 \rightarrow \boxed{t=15} \in (9, 24] \end{cases}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 3$ y $t = 15$.
 Añadimos el valor $t = 9$ punto donde la derivada cambia de expresión.

- En $[0,3)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $N'(1) = 2\left(\frac{1-3}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{-4}{9} < 0$. La función decrece en $[0,3)$.
- En $(3,9)$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $N'(4) = 2\left(\frac{4-3}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9} > 0$. La función crece en $(3,9)$.
- En $(9,15)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $N'(10) = -2\left(\frac{t-15}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece en $(9,15)$.
- En $(15,24]$ tomamos $t = 16$ y la derivada vale $N'(16) = -2\left(\frac{16-15}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{-2}{9} < 0$. La función decrece en $(15,24]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función $N(t)$ crece en $(3,15)$ y decrece en $[0,3) \cup (15,24]$.

Entre las 0 horas y las 3 horas el número de vehículos disminuye, entre las 3 y las 15 el número de vehículos que pasa por el peaje aumenta y entre las 15 y las 24 el número de vehículos disminuye.

- c) A partir del esquema de crecimiento y decrecimiento del apartado anterior y sabiendo que la función es continua tenemos que la función presenta un máximo relativo en $t = 15$. Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en $t = 15$ para averiguar donde se alcanza el máximo absoluto.

$$N(0) = \left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = 3$$

$$N(15) = 10 - \left(\frac{15-15}{3}\right)^2 = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$N(24) = 10 - \left(\frac{24-15}{3}\right)^2 = 1$$

El mayor número de vehículos que pasa por el peaje es de 10, y se produce a las 15 horas.

3. Tenemos un dado correcto y dos urnas con bolas descritas a continuación:

Urna I: 1 bola negra, 3 bolas rojas y 6 bolas verdes.

Urna II: 2 bolas negras, 6 bolas rojas y 2 bolas verdes.

Tiramos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II.

Extraemos al azar una bola de la urna correspondiente.

a) Dibuja un diagrama de árbol que represente el experimento y todas las probabilidades.

(3 puntos)

b) Calcula las probabilidades siguientes:

(4 puntos)

i) $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\ roja\})$

ii) $p(\{bola\ verde\} / \{1\})$

iii) $p(\{bola\ roja\} / \{5\})$

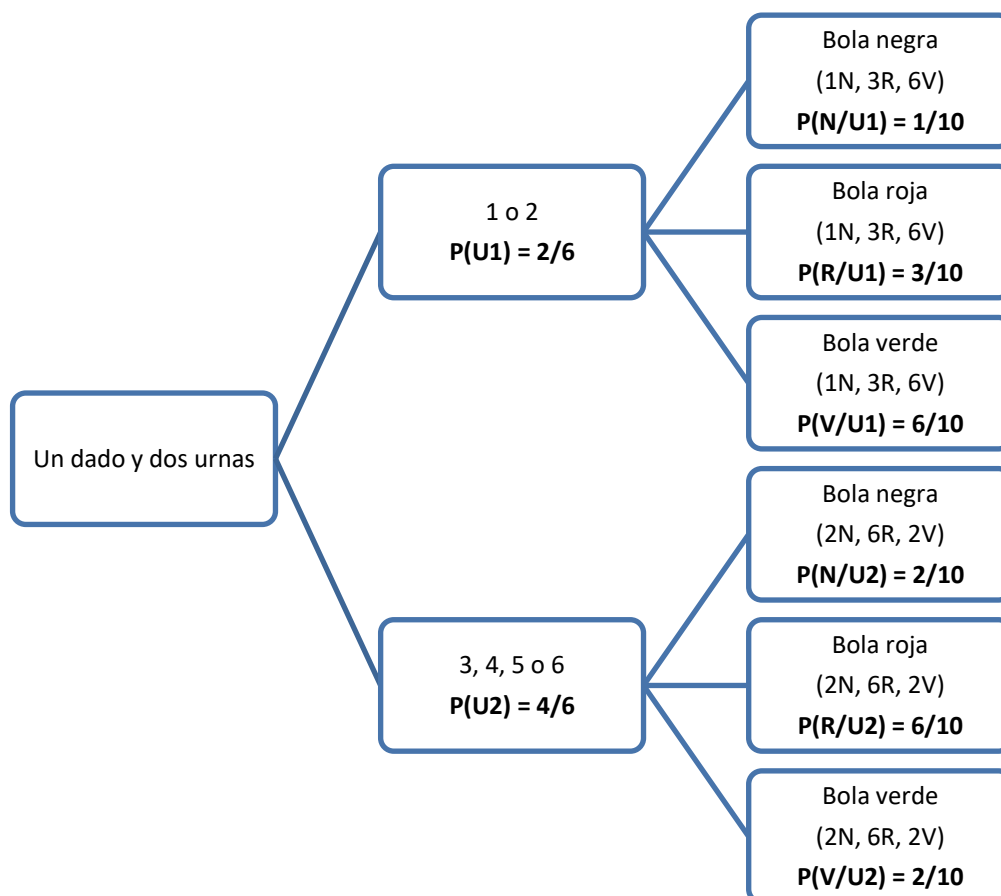
iv) $p(\{2\} \text{ y } \{bola\ verde\})$

c) Calcula la probabilidad de que la bola extraída haya sido roja y que haya sido negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída haya sido verde? ¿Cuánto vale la suma de las tres probabilidades? Justifica la respuesta.

(3 puntos)

a) Llamamos U1 al suceso “sacar 1 o 2 al lanzar el dado”, U2 a “sacar 3, 4, 5 o 6 al lanzar el dado”, N a “sacar bola negra”, R a “sacar bola roja” y V a “sacar bola verde”.

Realizamos un diagrama de árbol.



b.i) $p(\{3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{bola\ roja\}) = p(\{3, 4, 5, 6\}) \cdot p(\{bola\ roja\} / \{3, 4, 5, 6\}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{4}{10} = \boxed{0.4}$

b.ii) $p(\{\text{bola verde}\} / \{1\})$ es la probabilidad de sacar bola verde de la urna 1, pues al sacar 1 con el dado la bola se extrae de la urna 1. En la urna 1 hay 10 bolas y 6 son verdes, por lo que

$$p(\{\text{bola verde}\} / \{1\}) = \frac{6}{10} = 0.6.$$

b.iii) $p(\{2\} \text{ y } \{\text{bola verde}\}) = p(\{2\}) \cdot p(\{\text{bola verde}\} / \{2\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10} = \boxed{0.1}$

c) $P(R) = P(U1)P(R/U1) + P(U2)P(R/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{0.5}$

$$P(N) = P(U1)P(N/U1) + P(U2)P(N/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$P(V) = P(U1)P(V/U1) + P(U2)P(V/U2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Si sumamos las tres probabilidades obtenidas obtenemos $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$.

Obtenemos 1 por que la bola que obtenemos al realizar el experimento siempre será roja, negra o verde, por lo que la suma de las tres probabilidades debe ser 1, que es la probabilidad del suceso seguro.

4. Resuelva los siguientes apartados:

- a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68.5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg? (5 puntos)
- b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación típica de la población, de 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. Interpreta el resultado en el entorno del problema. (5 puntos)

a) X = El peso de los habitantes de una ciudad (en kg). $X = N(67, 5)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 100 sigue una distribución normal con la misma media (67 kg) y con desviación típica $\sigma = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$ kg. $\overline{X}_{100} = N(67, 0.5)$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} > 68.5)$

$$P(\overline{X}_{100} > 68.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{68.5 - 67}{0.5}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

También nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} < 68)$

$$P(\overline{X}_{100} < 68) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{68 - 67}{0.5}\right) = P(Z < 2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9772}$$

b) Llamamos X = la temperatura de un paciente.

El tamaño de la muestra es 64. La media muestral es 37.1 °C. La desviación típica es 1.04 °C. Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9935
2.5	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963

Calculamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \frac{1.04}{\sqrt{64}} = 0.33475$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (37.1 - 0.33475, 37.1 + 0.33475) = (36.76525, 37.43475)$$

La interpretación del intervalo de confianza obtenido es la siguiente: La media poblacional tiene una probabilidad de 0.99 de que esté contenida en el intervalo obtenido.

OPCIÓN B

1. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

a) Representa los datos en forma de matriz. (2 puntos)

b) ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado a)? En caso negativo, justifica la respuesta. En caso positivo, calcule su inversa. (4 puntos)

c) Si D es la matriz construida en el apartado a), resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones: (4 puntos)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

a) Hacemos una tabla con la información proporcionada.

	Línea A	Línea B	Línea C
Lunes	5	3	4
Martes	2	1	4
Miércoles	1	3	5

Ponemos estos datos en una matriz D donde las filas son los días y las columnas son las líneas. El cruce de fila y columna (la celda) contiene el número de autobuses que salen ese día en esa línea.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Para ver si la matriz D tiene inversa calculamos su determinante y vemos si es nulo o no.

$$|D| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 12 + 24 - 4 - 30 - 60 = -33 \neq 0$$

Como el determinante no es nulo existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{-33} = \frac{-1}{33} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{-1}{33} \begin{pmatrix} -7 & -3 & 8 \\ -6 & 21 & -12 \\ 5 & -12 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos D de la ecuación matricial del ejercicio.

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión el valor de la inversa de D y obtenemos la solución.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} (-33) \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 7+3-8 \\ 6-21+12 \\ -5+12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &\quad 3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1 \end{aligned}$$

La solución es $x = -2$, $y = 3$ y $z = -8$.

2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En ese momento están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?
Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices. (10 puntos)

Llamamos “x” al número de lotes A e “y” al número de lotes B.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Quesos	Vino	Transporte
Número de lotes A (x)	x	2x	0.9x
Número de lotes B (y)	3y	y	1.5y
TOTALES	$x + 3y$	$2x + y$	$0.9x + 1.5y$

La función objetivo es el coste del transporte $C(x, y) = 0.9x + 1.5y$, que deseamos minimizar.

Las restricciones son:

“La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino” $\rightarrow x + 3y \leq 200$; $2x + y \leq 100$

“Deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B” $\rightarrow x \geq 10$; $y \geq 25$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 10 \\ y \geq 25 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.

$$x + 3y = 200$$

$$2x + y = 100$$

$$x = 10$$

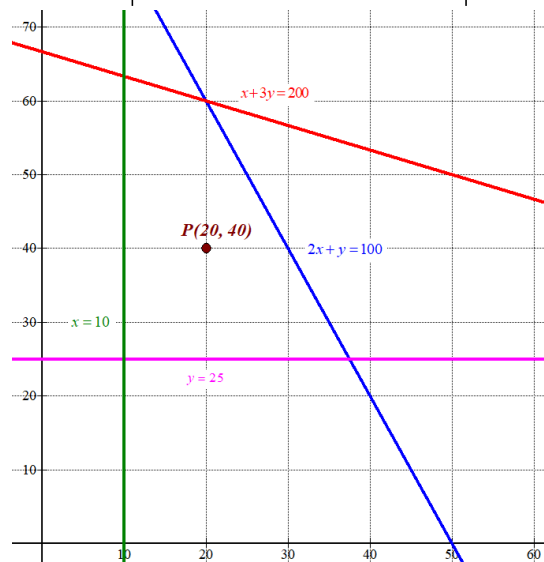
$$y = 25$$

x	$y = \frac{200-x}{3}$
20	60
50	50

x	$y = 100 - 2x$
20	60
50	0

x	y
10	0
10	25

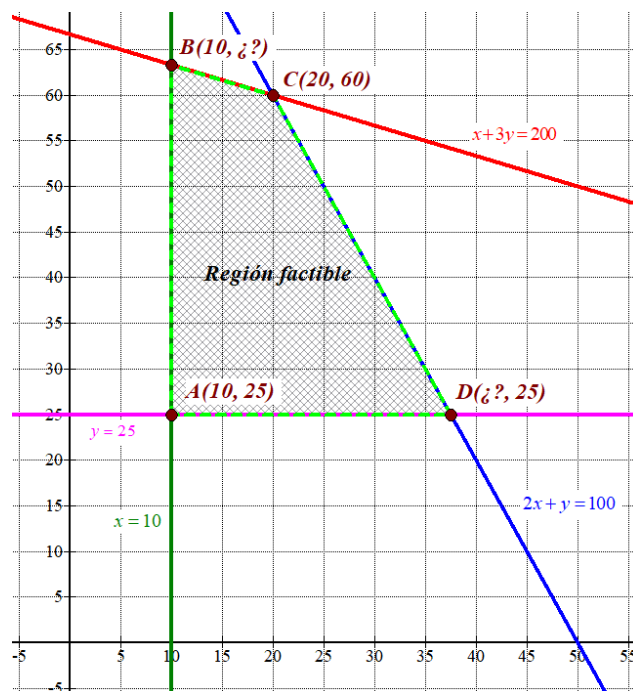
x	y = 25
0	25
10	25



Compruebo si el punto P(20, 40) cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 3 \cdot 40 \leq 200 \\ 2 \cdot 20 + 40 \leq 100 \\ 20 \geq 10 \\ 40 \geq 25 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas.}$$

La región factible es la región del primer cuadrante a la que pertenece el punto P(20, 40) y delimitada por las rectas. Es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta horizontal rosa, a la derecha de la recta vertical verde y por debajo de las rectas azul y roja. La coloreamos de gris en la siguiente figura.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y D, que podemos obtener resolviendo los sistemas correspondientes:

$$B \rightarrow \begin{cases} x + 3y = 200 \\ x = 10 \end{cases} \Rightarrow 10 + 3y = 200 \Rightarrow 3y = 190 \Rightarrow y = \frac{190}{3} \Rightarrow B\left(10, \frac{190}{3}\right)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 25 \\ 2x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow 2x + 25 = 100 \Rightarrow 2x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{2} \Rightarrow D\left(\frac{75}{2}, 25\right)$$

Valoramos la función coste del transporte $C(x, y) = 0.9x + 1.5y$ en cada uno de los vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(10, 25) \rightarrow C(10, 25) = 0.9 \cdot 10 + 1.5 \cdot 25 = 46.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B\left(10, \frac{190}{3}\right) \rightarrow C\left(10, \frac{190}{3}\right) = 0.9 \cdot 10 + 1.5 \cdot \frac{190}{3} = 104$$

$$C(20, 60) \rightarrow C(20, 60) = 0.9 \cdot 20 + 1.5 \cdot 60 = 108$$

$$D\left(\frac{75}{2}, 25\right) \rightarrow C\left(\frac{75}{2}, 25\right) = 0.9 \cdot \frac{75}{2} + 1.5 \cdot 25 = 71.25$$

El coste mínimo se obtiene en el vértice A(10, 25). Con 10 lotes A y 25 lotes B se consigue un coste mínimo del transporte con un valor de 46.5 euros.

3. El número de visitantes a un museo se obtiene mediante la función

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2}$$

donde t es la hora desde la apertura del museo. Supongamos que la hora de apertura del museo es a las 9:00 horas de la mañana.

- a) ¿Cuándo crece y decrece el número de visitantes del museo? (4 puntos)
 b) ¿Cuándo recibe el museo el mayor número de visitantes? ¿Cuál es ese número? (2 puntos)
 c) ¿En qué valor de t se produce un punto de inflexión de $V(t)$? (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$t^3 + 2 = 0 \Rightarrow t^3 = -2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{-2} < 0$$

No hay ningún valor excluido del dominio.

Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$V(t) = \frac{300t}{t^3 + 2} \Rightarrow V'(t) = \frac{300(t^3 + 2) - 3t^2(300t)}{(t^3 + 2)^2} = \frac{300t^3 + 600 - 900t^3}{(t^3 + 2)^2} = \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2}$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2} = 0 \Rightarrow 600 - 600t^3 = 0 \Rightarrow 1 - t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de la primera hora desde la apertura del museo.

Antes de las 10 h tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale $V'(0.5) = \frac{600 - 600 \cdot 0.5^3}{(0.5^3 + 2)^2} \approx 116.26 > 0$. La función crece de las 9 a las 10 horas.

Después de las 10 horas tomamos $t = 2$ y la derivada vale $V'(2) = \frac{600 - 600 \cdot 2^3}{(2^3 + 2)^2} = -42 < 0$. La función decrece de las 10 horas hasta el cierre.

El número de visitantes crece de las 9 a las 10 horas y de las 10 al cierre decrece.

b) Por la evolución del número de visitantes el mayor número de visitantes se produce a las 10 horas. Como $V(1) = \frac{300}{1^3 + 2} = 100$, el máximo número de visitantes es de 100.

c) Buscamos cuando se anula la segunda derivada.

$$V'(t) = \frac{600 - 600t^3}{(t^3 + 2)^2} \Rightarrow V''(t) = \frac{-1800t^2(t^3 + 2)^2 - (600 - 600t^3)2(t^3 + 2)3t^2}{(t^3 + 2)^{43}} =$$

$$= \frac{-1800t^2(t^3+2) - (600-600t^3)2 \cdot 3t^2}{(t^3+2)^3} = \frac{-1800t^5 - 3600t^2 - 3600t^2 + 3600t^5}{(t^3+2)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} V''(t) = \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3+2)^3} \\ V''(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1800t^5 - 7200t^2}{(t^3+2)^3} = 0 \Rightarrow 1800t^5 - 7200t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1800t^2(t^3-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^3 - 4 = 0 \rightarrow t^3 = 4 \rightarrow t = \sqrt[3]{4} \approx 1.58 \end{cases}$$

El número de visitantes tiene un punto de inflexión un poquito más tarde de las 10 y media.

4. Tengo dos urnas descritas a continuación:

Urna I: 2 bolas negras, 1 bola roja y 3 bolas verdes.

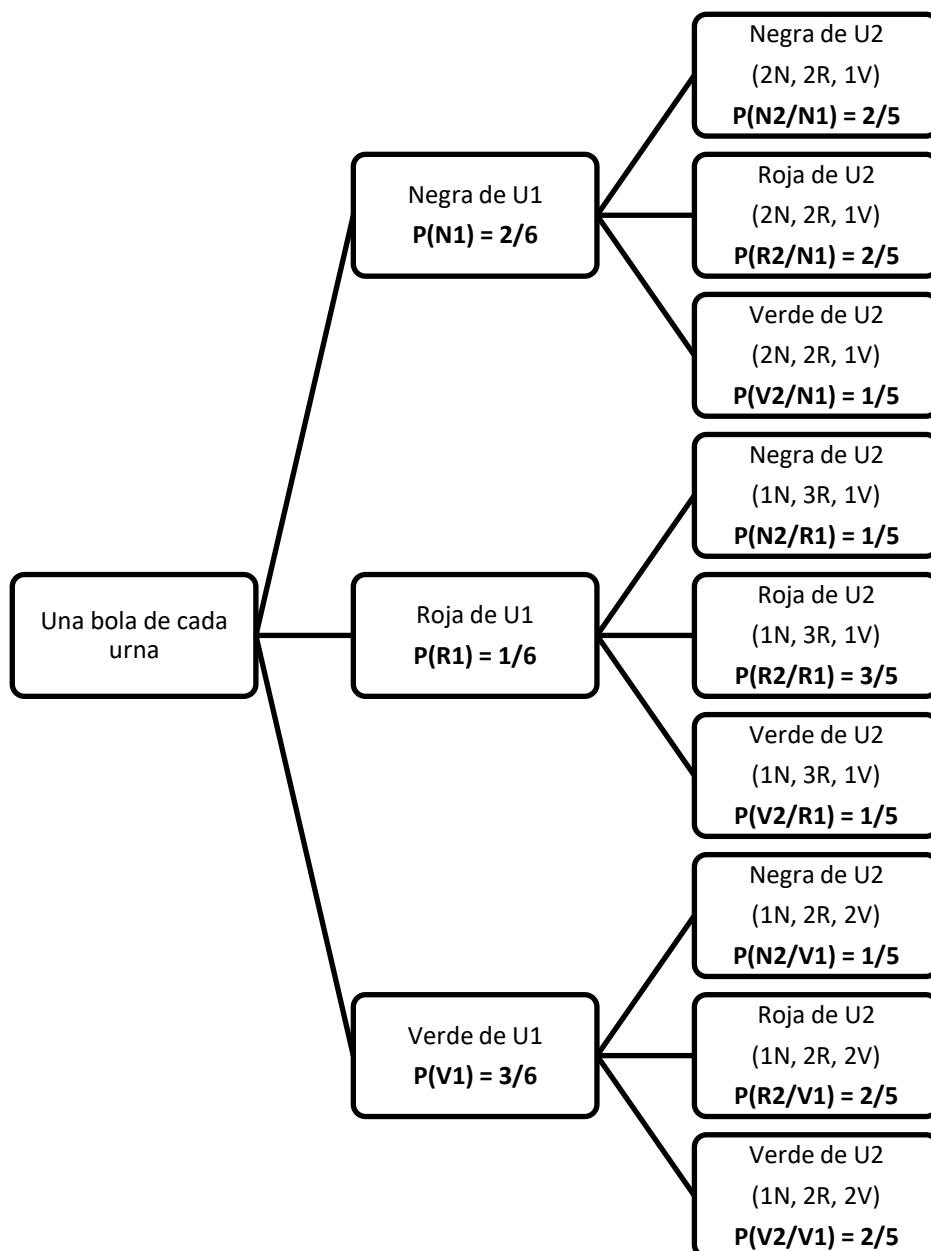
Urna II: 1 bola negra, 2 bolas rojas y 1 bola verde.

El experimento consiste en extraer una bola al azar de la urna I, introducirla en la urna II, remover y extraer, finalmente, una bola al azar de la urna II.

- Da un diagrama en árbol que represente el experimento con las probabilidades asociadas. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea
b.1) roja. b.2) negra. b.3) verde. (3 puntos)
- Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, cuál es la probabilidad de que la primera también
¿lo fuera? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera roja siendo roja la segunda? (2 puntos)

a) Llamamos N_1 , N_2 , R_1 , R_2 y V_1 , V_2 a los sucesos “extraer bola negra roja o verde de la urna I o II”.

Realizamos un diagrama de árbol.



b.1) Nos piden calcular $P(R2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(R2) &= P(N1)P(R2/N1) + P(R1)P(R2/R1) + P(V1)P(R2/V1) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{30} \approx 0.433} \end{aligned}$$

b.2) Nos piden calcular $P(N2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(N2) &= P(N1)P(N2/N1) + P(R1)P(N2/R1) + P(V1)P(N2/V1) = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{8}{30} \approx 0.2667} \end{aligned}$$

b.3) Nos piden calcular $P(V2)$. Esta probabilidad es 1 menos la suma de las dos probabilidades obtenidas anteriormente.

$$P(V2) = 1 - (P(R2) + P(N2)) = 1 - \left(\frac{13}{30} + \frac{8}{30} \right) = \boxed{\frac{9}{30} = 0.3}$$

c) Nos piden calcular $P(N1/N2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{P(N2)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{8}{30}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

d) Nos piden calcular $P(R1/R2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{30}} = \boxed{\frac{3}{13} \approx 0.231}$$



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2018

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- Calcula $A \cdot B$, y determina en función de los valores reales de k si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. (4 puntos)
- Estudia lo mismo que en el apartado a) pero ahora para la matriz $B \cdot A$. (4 puntos)
- Para $k = -2$ calcula la matriz inversa de $B \cdot A$. (2 puntos)

2. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x - 3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

- ¿Es continua la función $B(x)$? (3 puntos)
- ¿Es derivable? Da el conjunto donde es derivable la función. (2 puntos)
- Realiza un dibujo de la función en su dominio. (3 puntos)
- Determine su beneficio máximo y el beneficio mínimo. (1 punto)
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios. (1 punto)

3. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $1/2$ y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p . Se lanza este dado, calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- Se obtiene un dos. (4 puntos)
- No se obtiene un tres. (2 puntos)
- Se obtiene un número par. (2 puntos)
- Se obtiene un número impar. (2 puntos)

4. En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pila es de 80 horas.

- Si $\alpha = 0.2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de estas pilas la duración media es de 500 horas, determine el intervalo de confianza para la duración media poblacional. (5 puntos)
- Si la duración de este tipo de pila sigue una normal de media 500 horas y desviación típica de 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuera mayor que 520 horas? (5 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 € por persona. Los niños pagan el 50% de ese precio, y los jubilados pagan el 60% de ese precio. Determine el número de personas que no son ni niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25% del número de niños y recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos. (10 puntos)

2. Considera la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunto de puntos del plano definido por:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto? (5 puntos)

b) Indica si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto: (5 puntos)

$$B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

3. Considera la función

$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calcula una primitiva de esta función. (4 puntos)

b) Calcula la siguiente integral definida: (6 puntos)

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$$

y comprueba que su valor es $\frac{1}{3}$.

4. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, terminan la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30%, ciencias y el 50%, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería. (6 puntos)

b) Nos dice que ha terminado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- a) Calcula $A \cdot B$, y determina en función de los valores reales de k si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. (4 puntos)
- b) Estudia lo mismo que en el apartado a) pero ahora para la matriz $B \cdot A$. (4 puntos)
- c) Para $k = -2$ calcula la matriz inversa de $B \cdot A$. (2 puntos)

a) Obtenemos la expresión de $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0 & 0 & -1+0 \\ 2k+k & 0+k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k + k - k(2k-2) = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$$

El determinante de la matriz $A \cdot B$ es siempre nulo por lo que no tiene inversa para ningún valor de k .

b) Calculamos la expresión de $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0-0 & 0+0-1 \\ 1+2+0 & 0+k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$$

$$|B \cdot A| = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{No existe}$$

El determinante nunca se anula. La matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier valor de k .

c) Para $k = -2$ la matriz queda $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B \cdot A)^T)}{|B \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{0+3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

2. Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

- a) ¿Es continua la función $B(x)$? (3 puntos)
 b) ¿Es derivable? Da el conjunto donde es derivable la función. (2 puntos)
 c) Realiza un dibujo de la función en su dominio. (3 puntos)
 d) Determine su beneficio máximo y el beneficio mínimo. (1 punto)
 e) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios. (1 punto)

a) La función es continua en cada trozo pues son funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición.

En $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} B(3) &= 5 \cdot 3 + 15 = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 5x + 15 = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -(x-3)^2 + 30 = 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} B(x) = B(3) = 30$$

La función es continua en $x = 3$. La función es continua en $[0, 8]$.

b) La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 8]$ siendo su derivada $B'(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ -2(x-3), & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de la función en $x = 3$. Vemos si coinciden los valores de las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} B'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 5 = 5 \\ B'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} B'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -2(x-3) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'(3^-) = 5 \neq 0 = B'(3^+)$$

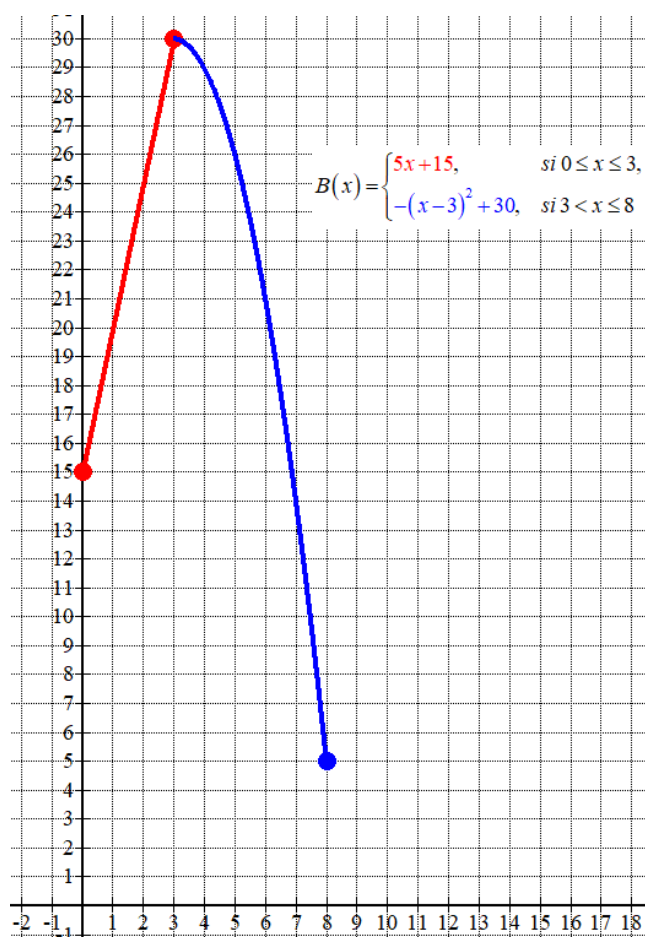
La función no es derivable en $x = 3$. La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 8]$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica. Sabemos que es un trozo de recta y un trozo de parábola.

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -(x-3)^2 + 30, & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

x	$B(x) = 5x + 15$
0	15
1	20
3	30

x	$B(x) = -(x-3)^2 + 30$
4	29
5	26
8	5



- d) Observando la gráfica sabemos que el beneficio máximo se consigue en $x = 3$ y es de 30 mil euros y el mínimo ese obtiene en $x = 8$ y es de 5 mil euros.
- e) Observando la gráfica sabemos que los beneficios crecen con una inversión de 0 a 3000 euros y decrecen con una inversión de 3000 a 8000 euros

3. Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $1/2$ y las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p . Se lanza este dado, calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

- | | |
|--------------------------------|------------|
| a) Se obtiene un dos. | (4 puntos) |
| b) No se obtiene un tres. | (2 puntos) |
| c) Se obtiene un número par. | (2 puntos) |
| d) Se obtiene un número impar. | (2 puntos) |

La probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4 o 5 es p . La probabilidad de sacar 6 es $1/2$.

La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1.

$$5p + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 5p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{10}$$

La probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4 o 5 es $\frac{1}{10} = 0.1$.

- a) La probabilidad de sacar 2 la hemos obtenido y vale $\frac{1}{10} = 0.1$.
- b) La probabilidad de sacar 3 es $\frac{1}{10} = 0.1 \rightarrow$ la probabilidad de no sacar 3 es $1 - 0.1 = 0.9$.
- c) Para sacar número par debe salir 2, 4 o 6. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales.

$$\begin{aligned} P(\text{Sacar par}) &= P(\text{sacar 2}) + P(\text{sacar 4}) + P(\text{sacar 6}) = \\ &= 0.1 + 0.1 + 0.5 = \boxed{0.7} \end{aligned}$$

- d) El suceso “sacar número impar” es el complementario del suceso “sacar par” por lo que su probabilidad es $1 - 0.7 = 0.3$.

4. En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pila es de 80 horas.

- a) Si $\alpha = 0.2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de estas pilas la duración media es de 500 horas, determine el intervalo de confianza para la duración media poblacional. (5 puntos)
- b) Si la duración de este tipo de pila sigue una normal de media 500 horas y desviación típica de 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuera mayor que 520 horas? (5 puntos)

a) X = duración de un determinado tipo de pila en horas. $X = N(\mu, 80)$.

El tamaño de la muestra es $n = 50$. La media muestral es $\bar{x} = 500$ horas.

Para un nivel de significación de 0.2 tenemos que $\frac{\alpha}{2} = 0.1 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.1 = 0.9$.

Mirando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

Determinamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.285 \frac{80}{\sqrt{50}} \approx 14.54$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es.

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (500 - 14.54, 500 + 14.54) = (485.46, 514.54)$$

b) X = duración de un determinado tipo de pila en horas. $X = N(500, 80)$.

Tomamos una muestra de 9 pilas. Las medias muestrales siguen una ley normal de media la misma que la distribución de X y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{80}{\sqrt{9}} = \frac{80}{3}$. $\bar{X}_9 = N\left(500, \frac{80}{3}\right)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_9 > 520)$.

$$P(\bar{X}_9 > 520) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\bar{X}_9 - \mu}{\sigma} > \frac{520 - 500}{80/3}\right) =$$

$$= P(Z > 0.75) = 1 - P(Z \leq 0.75) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023

OPCIÓN B

1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 € por persona. Los niños pagan el 50% de ese precio, y los jubilados pagan el 60% de ese precio. Determine el número de personas que no son ni niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25% del número de niños y recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos. (10 puntos)

Llamamos “x” el número de niños, “y” al número de jubilados y “z” al número de personas que no son ni niños ni jubilados.

- En el hotel había 200 personas $\rightarrow x + y + z = 200$
- El número de jubilados era igual al 25% del número de niños $\rightarrow y = 0.25 \cdot x$
- Se recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos (50 € tarifa normal, los niños pagan el 50%, es decir, 25 € y un jubilado paga el 60%, es decir, $0.6 \cdot 50 = 30$ €) $\rightarrow 25x + 30y + 50z = 5680$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = 0.25 \cdot x \\ 25x + 30y + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = 0.25 \cdot x \\ 25x + 30y + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 0.25x + z = 200 \\ 25x + 30 \cdot 0.25x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.25x + z = 200 \\ 32.5x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 200 - 1.25x \\ 32.5x + 50z = 5680 \end{array} \right\} \Rightarrow 32.5x + 50(200 - 1.25x) = 5680 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32.5x + 10000 - 62.5x = 5680 \Rightarrow -30x = -4320 \Rightarrow x = \frac{4320}{30} = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 200 - 1.25 \cdot 144 = 20 \\ y = 0.25 \cdot 144 = 36 \end{array} \right.$$

En el hotel había 144 niños, 36 jubilados y 20 personas que no eran ni jubilados ni niños.

2. Considera la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunto de puntos del plano definido por:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto? (5 puntos)

b) Indica si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto: (5 puntos)

$$B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

a) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región.

$$3x + y = 15$$

$$y - x = -5$$

$$2x + 3y = 60$$

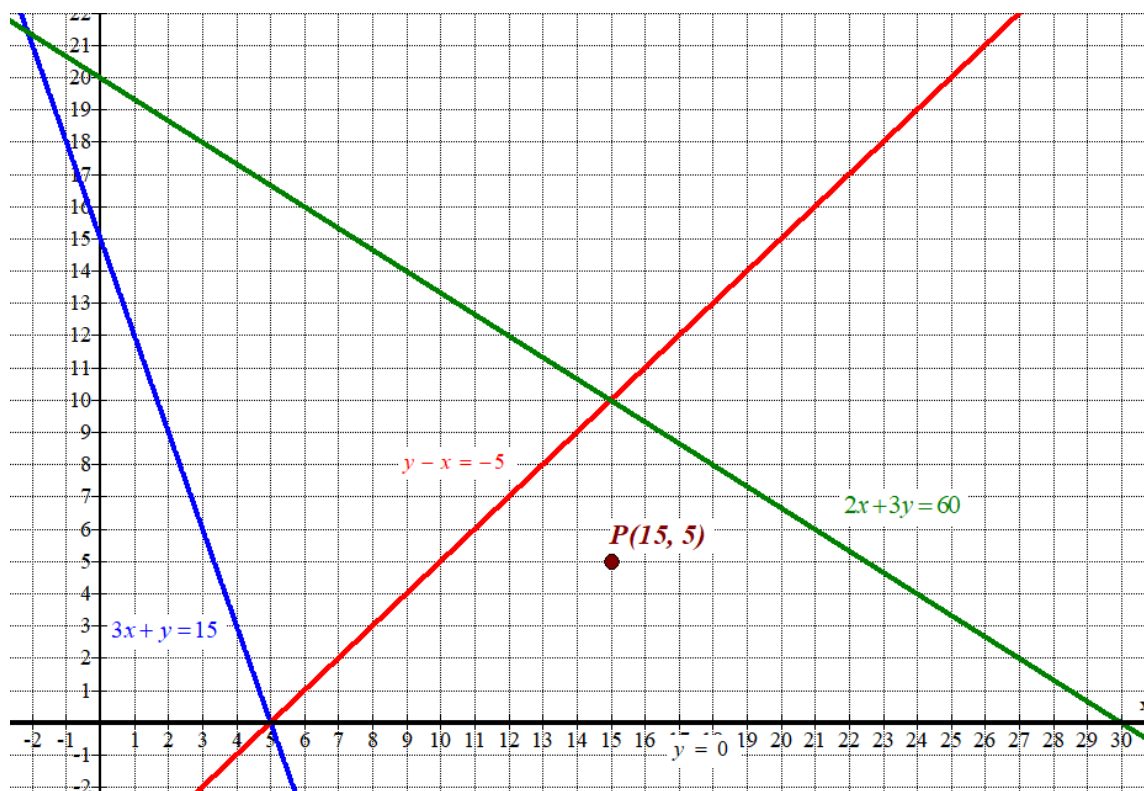
$$y = 0$$

x	y = 15 - 3x
0	15
3	6
5	0

x	y = x - 5
0	-5
5	0
15	10

x	y = $\frac{60 - 2x}{3}$
0	20
15	10
30	0

Eje OX



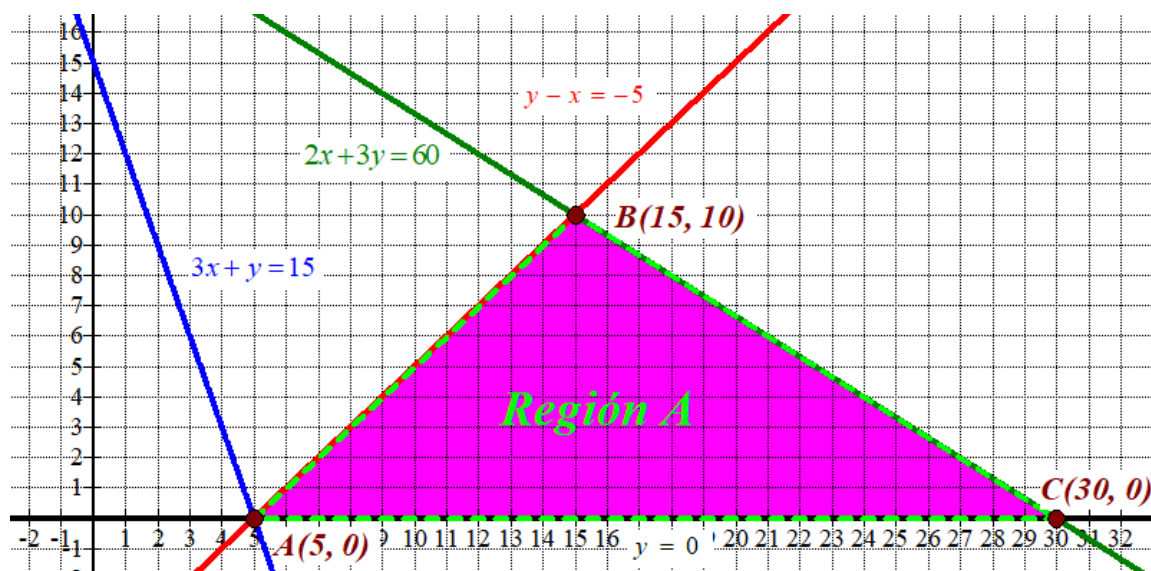
Como las restricciones son:

$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

La región factible está situada por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul y el eje OX. Comprobamos que el punto $P(15, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$3 \cdot 15 + 5 \geq 15, 5 - 15 \leq -5, 2 \cdot 15 + 3 \cdot 5 \leq 60, 5 \geq 0$$

Se cumplen todas. Coloreo de rosa la región A en la siguiente imagen.



Valoro la función $f(x, y) = x - y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

$$B(15, 10) \rightarrow f(15, 10) = 15 - 10 = 5$$

$$C(30, 0) \rightarrow f(30, 0) = 30 - 0 = 30$$

El valor máximo de la función en la región A es 30 y se alcanza en el punto C(30, 0).

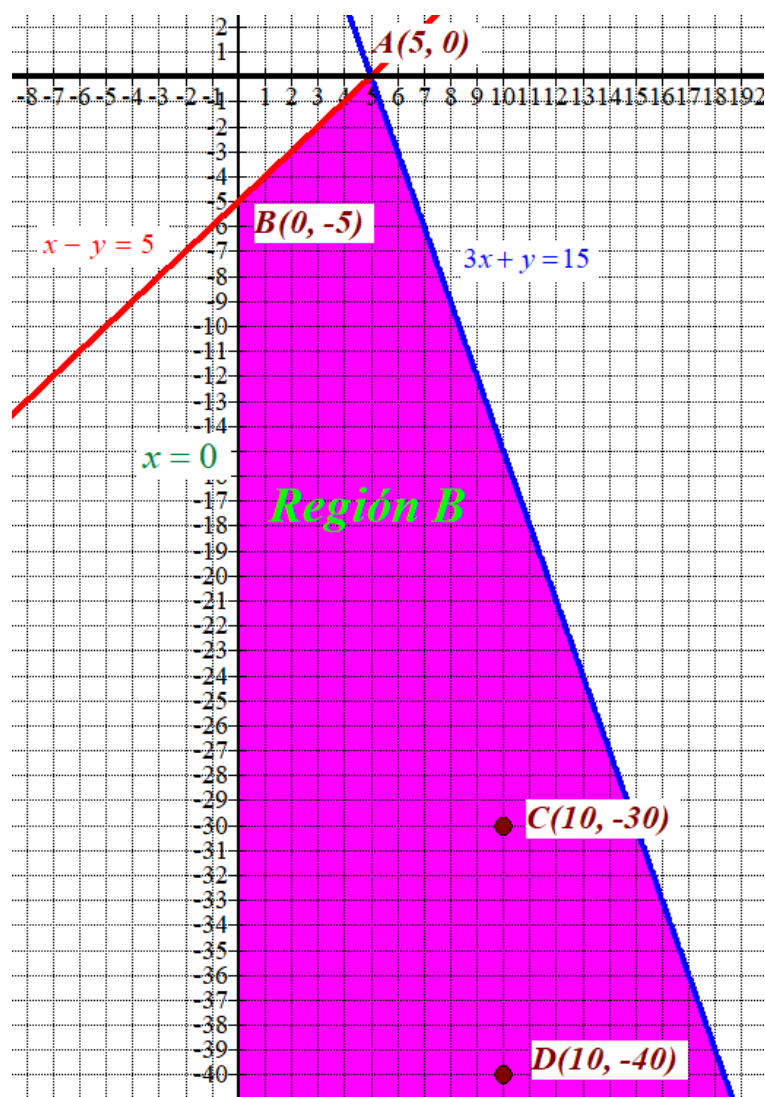
¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto?

Para la definición de la región A no influye nada la recta azul que se corresponde con la inecuación $3x + y \geq 15$. Se podría eliminar esta inecuación y la región seguiría siendo la misma.

b) Dibujamos la región $B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$.

$3x + y = 15$		$x - y = 5$	$x = 0$
x	$y = 15 - 3x$	x	$y = x - 5$
0	15	0	-5
3	6	5	0
5	0	15	10

Eje OY



La región B no es acotada. Valoramos la función $f(x, y) = x - y$ en los vértices de la región y en dos puntos alejados de ellos para averiguar si esta función tiene un máximo en dicha región.

$$A(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

$$B(0, -5) \rightarrow f(0, -5) = 0 + 5 = 5$$

$$C(10, -30) \rightarrow f(10, -30) = 10 + 30 = 40$$

$$D(10, -40) \rightarrow f(10, -40) = 10 + 40 = 50$$

El valor máximo de la función en la región B no existe ya que al ser una región no acotada si tomo el punto $E(10, -50)$ perteneciente a la región el valor de la función $f(x, y) = x - y$ es mayor que el valor obtenido en C y en D.

3. Considera la función

$$h(x) = x^2 e^{x^3}.$$

a) Calcula una primitiva de esta función.

(4 puntos)

b) Calcula la siguiente integral definida:

(6 puntos)

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx$$

y comprueba que su valor es $\frac{1}{3}$.

a) Calculamos la integral de la función usando un cambio de variable.

$$\int h(x) dx = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{x^3} = t \\ 3x^2 e^{x^3} dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int dt = \frac{1}{3} t = \boxed{\frac{1}{3} e^{x^3} + K}$$

Donde $K \in \mathbb{R}$

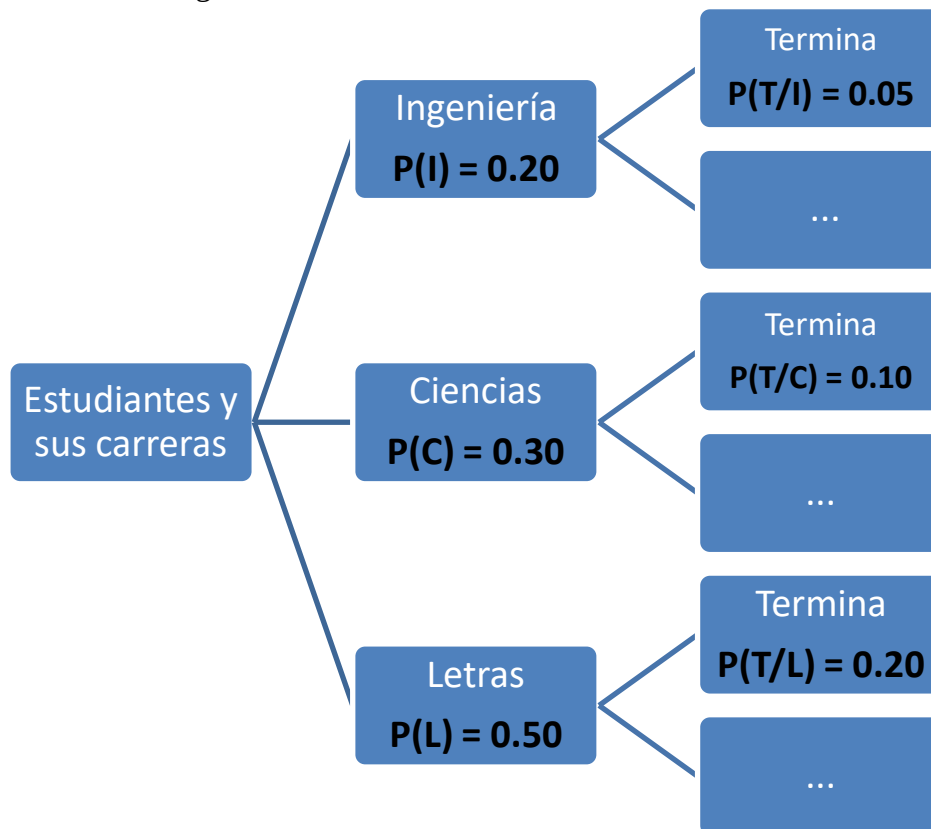
b) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior.

$$\int_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3} e^{x^3} \right]_{\sqrt[3]{\ln 2}}^{\sqrt[3]{\ln 3}} = \frac{1}{3} e^{(\sqrt[3]{\ln 3})^3} - \frac{1}{3} e^{(\sqrt[3]{\ln 2})^3} = \frac{1}{3} e^{\ln 3} - \frac{1}{3} e^{\ln 2} = \frac{1}{3} 3 - \frac{1}{3} 2 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

4. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, terminan la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30%, ciencias y el 50%, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

- a) Probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería. (6 puntos)
 b) Nos dice que ha terminado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería. (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(T \cap I)$.

$$P(T \cap I) = P(I)P(T/I) = 0.2 \cdot 0.05 = \boxed{0.01}$$

La probabilidad de que haya terminado la carrera y sea de ingeniería es de 0.01.

- b) Nos piden calcular $P(I/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(I/T) &= \frac{P(I \cap T)}{P(T)} = \frac{P(I \cap T)}{P(I)P(T/I) + P(C)P(T/C) + P(L)P(T/L)} = \\ &= \frac{0.01}{0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2} = \boxed{\frac{1}{14} \approx 0.0714} \end{aligned}$$

La probabilidad de que sea de ingeniería sabiendo que ha terminado la carrera es $\frac{1}{14} \approx 0.0714$.

Convocatoria ordinaria de 2018



Universitat
de les Illes Balears
Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

Modelo 3

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Calcula una matriz X que cumpla: (6 puntos)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la matriz inversa de X . (4 puntos)

2. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dada por la función:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 80, & \text{si } 4 \leq t < 6, \\ 170 - 15t, & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas.

- a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo? (6 puntos)
- b) En que instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa a la mitad de la escala? (4 puntos)

3. Una urna contiene 6 bolas rojas y 2 negras. Se dispone, además, de una baraja española¹ de 48 cartas y de una baraja de póquer (o baraja francesa)² de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es roja, se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

- a) Calcula la probabilidad de que la carta extraída sea figura. (6 puntos)
- b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja? (4 puntos)

¹la baraja española tiene 48 naipes, repartidos entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y el 12 (rey)

²la baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles), y numeradas del 1 (o as) al 10, seguidas por las figuras, que llevan la J (de la voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).

4. A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la Universidad (PAU) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSII sigue una ley normal de media 5.3 puntos y desviación típica 0.8.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5.7? (5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSII, entendiéndose por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos? (5 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1. El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber qué cobra por hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello, sabe que:

- En el 4º B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3º A, pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En el 1º A, mi casa, estuvo 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil, y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional? (10 puntos)

2. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2 , de la misma empresa pueden llevar a cabo un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Tienen que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G1 y en 4.000 € para el grupo G2.

¿Cuántas semanas tendrá que trabajar cada grupo para terminar el proyecto con el coste mínimo? (10 puntos)

Debe plantearse el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

3. Considera la función

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Calcula una primitiva de esta función.

(4 puntos)

b) Calcula la siguiente integral definida:

(6 puntos)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

y comprueba que su valor es $\frac{3}{4}$.

4. Un restaurante tiene contratados a dos camareros, Juan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar los cubiertos el 5% de los días que pone el servicio. Juan, por el contrario, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado? (6 puntos)

b) Por desgracia, el encargado encontró unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Juan. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A****1. Determinar una matriz X que verifique:****(6 puntos)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X.

(4 puntos)

Vemos si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Entonces tiene inversa.

Despejamos la matriz X.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión inicial tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$|X| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{vmatrix} = 21 + 22/3 - 15 - 28/3 = 4 \neq 0$$

$$X^{-1} = \frac{Adj(X^t)}{|X|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 11/3 \\ 1 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11/3 \\ 0 & 7/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 11/3 \\ 1 & 7/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11/3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 11/3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -14/3 & 2 & 2 \\ -23/3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 80, & \text{si } 4 \leq t < 6, \\ 170 - 15t, & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas.

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo? (6 puntos)
- b) ¿En qué instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala? (4 puntos)

a) La función es continua en cada trozo pues son funciones polinómicas y en los cambios de definición también es continua.

En $t = 4$ y en $t = 6$ se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} r(4) = -160 + 240 = 80 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} -10t^2 + 60t = 80 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} r(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 80 = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} r(x) = r(4) = 80$$

$$\left. \begin{array}{l} r(6) = 170 - 90 = 80 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} 80 = 80 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} r(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} 170 - 15t = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} r(x) = r(6) = 80$$

La función es continua y es un trozo de parábola, un trozo de recta horizontal y otro trozo de recta oblicua.

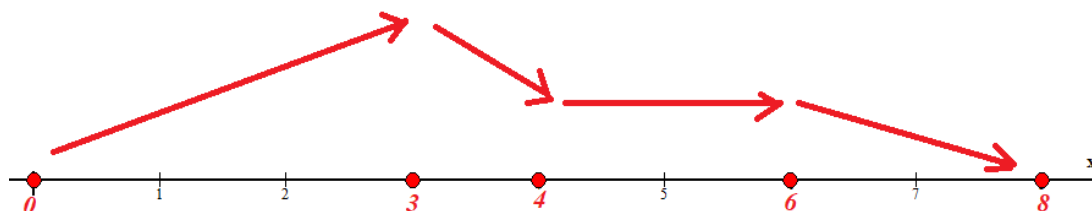
Utilizamos la derivada de la función para ver su crecimiento y decrecimiento.

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 80, & \text{si } 4 \leq t < 6, \\ 170 - 15t, & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \Rightarrow r'(t) = \begin{cases} -20t + 60, & \text{si } 0 < t < 4, \\ 0, & \text{si } 4 < t < 6, \\ -15, & \text{si } 6 < t < 8 \end{cases}$$

En el intervalo $(0, 4)$ la derivada se anula cuando $-20t + 60 = 0 \rightarrow t = 3$. Vemos como evoluciona el signo de la derivada antes y después de $t = 3$.

- En $(0, 3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale $-40 + 60 = 20 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En $(3, 4)$ tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale $-70 + 60 = -10 < 0$. La función decrece en $(3, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6)$ la derivada es siempre cero. La función es constante en $(4, 6)$.
- En el intervalo $(6, 8)$ la derivada no se anula y la derivada siempre es negativa. La función es decreciente en $(6, 8)$.

La función es continua en el intervalo $(0, 8)$ y sigue el esquema siguiente.



La función crece en el intervalo $(0, 3)$, decrece en el intervalo $(3, 4) \cup (6, 8)$ y es constante en el intervalo $(4, 6)$.

El rendimiento máximo se alcanza en $t = 3$.

Como $r(3) = -90 + 180 = 90$. El rendimiento máximo es de 90.

b) ¿En qué momento $r(t) = 50$? ¿Para qué valor de t se cumple $r(t) = 50$?

Como en el intervalo de 4 a 6 siempre vale 80 ahí no se produce esa igualdad. Igualamos a 50 la función en los dos intervalos donde el rendimiento varía.

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & \text{si } 0 \leq t \leq 4, \\ 80, & \text{si } 4 \leq t < 6, \\ 170 - 15t, & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases} \quad r(t) = 50 \Rightarrow \begin{cases} -10t^2 + 60t = 50 \Rightarrow -10t^2 + 60t - 50 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 20}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \notin [0, 4] \\ \frac{6-4}{2} = 1 \in [0, 4] \Rightarrow \boxed{t=1} \end{cases} \\ \text{o} \\ 170 - 15t = 50 \Rightarrow -15t = -120 \Rightarrow \boxed{t = \frac{120}{15} = 8} \end{cases}$$

El rendimiento es 50 para $t = 1$ y para $t = 8$.

3. Una urna contiene 6 bolas rojas y 2 negras. Se dispone además de una baraja española¹ de 48 cartas y de una baraja de póquer (o baraja francesa)² de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es roja, se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

a) Calcular la probabilidad que la carta extraída sea figura. (6 puntos)

b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja? (4 puntos)

¹la baraja española tiene 48 cartas, repartidas entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y el 12 (rey)

²la baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles), y numeradas del 1 (o as) al 10, seguidas por las figuras, que llevan la J (de la voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).

Al extraer una carta de una baraja española la probabilidad de sacar figura es:

$$P(\text{Sacar figura/Baraja española}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} =$$

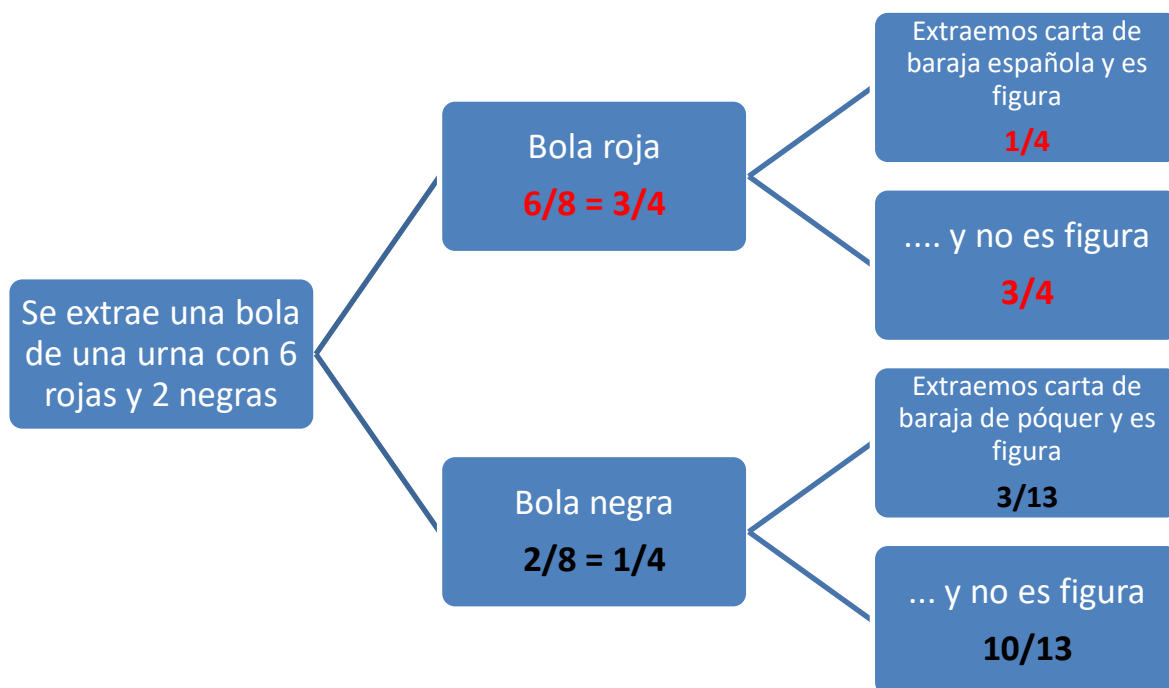
$$= \frac{\text{Nº de jotas, caballos y reyes}}{\text{Nº total de cartas}} = \frac{4 + 4 + 4}{48} = \frac{1}{4}$$

Al extraer una carta de una baraja de póquer la probabilidad de sacar figura es:

$$P(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} =$$

$$= \frac{\text{Nº de J, Q y K}}{\text{Nº total de cartas}} = \frac{4 + 4 + 4}{52} = \frac{3}{13}$$

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Sacar figura}) = P(\text{Sacar bola roja y carta con figura}) + \\ + P(\text{Sacar bola negra y carta con figura}) =$$

$$= P(\text{Sacar bola roja}) P(\text{Sacar figura/Baraja española}) + \\ + P(\text{Sacar bola negra}) P(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \boxed{\frac{51}{208} = 0.245}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Roja} / \text{Ha salido figura}) = \frac{P(\text{Roja} \cap \text{Ha salido figura})}{P(\text{Sacar figura})} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{51/208} = \frac{3/16}{51/208} = \boxed{\frac{13}{17} = 0.765}$$

4. A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la Universidad (PAUs) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSII sigue una ley normal de media 5.3 puntos y desviación típica 0.8.

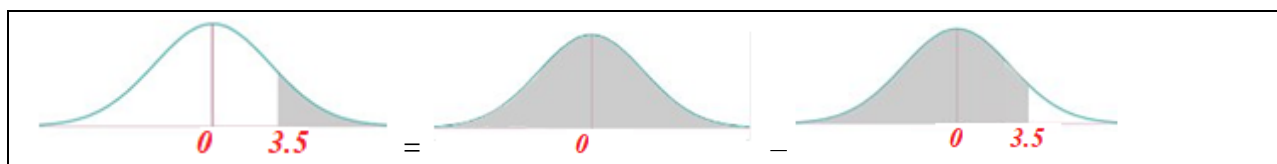
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5.7? (5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSII, entendiendo por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos? (5 puntos)

Si X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU. $X = N(5.3, 0.8)$

Tomamos una muestra de 49 alumnos. Las medias muestrales siguen una ley normal de media la misma que la distribución de las notas y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{49}} = \frac{4}{35}$.

$$\overline{X}_{49} = N\left(5.3, \frac{4}{35}\right)$$

$$a) P(\overline{X}_{49} > 5.7) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{49} - \mu}{\sigma} > \frac{5.7 - 5.3}{4/35}\right) = P(Z > 3.5) = \dots$$



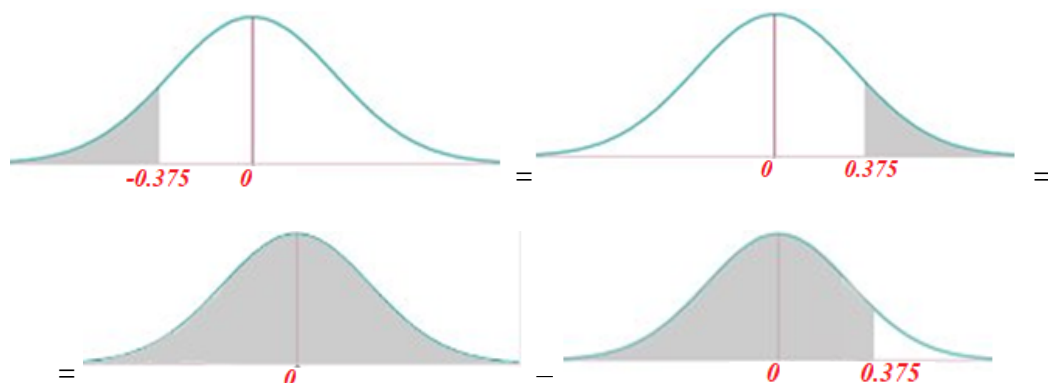
$$\dots = 1 - P(Z \leq 3.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

	0	
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0
0.5	0.6915	0
0.6	0.7257	0
0.7	0.7580	0
0.8	0.7881	0
0.9	0.8159	0
1.0	0.8413	0
1.1	0.8643	0
1.2	0.8849	0
1.3	0.9032	0
1.4	0.9192	0
1.5	0.9332	0
1.6	0.9452	0
1.7	0.9554	0
1.8	0.9641	0
1.9	0.9713	0
2.0	0.9772	0
2.1	0.9811	0
2.2	0.9841	0
2.3	0.9861	0
2.4	0.9879	0
2.5	0.9896	0
2.6	0.9911	0
2.7	0.9924	0
2.8	0.9936	0
2.9	0.9946	0
3.0	0.9955	0
3.1	0.9963	0
3.2	0.9970	0
3.3	0.9977	0
3.4	0.9983	0
3.5	0.9998	0

- b) Como volvemos a plantearnos la probabilidad de que un alumno.... Entonces ya no hablamos de distribución de medias sino de la variable X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU que sigue una distribución normal $X = N(5.3, 0.8)$.

Nos piden calcular $P(\text{Suspender}) = P(X < 5)$.

$$P(\text{Suspender}) = P(X < 5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5 - 5.3}{0.8}\right) = \\ = P(Z < -0.375) = \dots$$



$$\dots = P(Z > 0.375) = 1 - P(Z < 0.375) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la tabla de la } N(0, 1) \\ \text{redondeando a 0.38} \end{array} \right\} =$$

$$= 1 - 0.6480 = \boxed{0.3520}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

OPCIÓN B

1. El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber que cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello, sabe que:

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra.
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil.
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional? (10 puntos)

Llamo “e” al dinero que cobra un electricista por hora, “f” a lo que gana un fontanero por hora y “a” a lo que cobra un albañil por hora de trabajo.

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra. $\rightarrow e + 2a = 78$
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil. $\rightarrow 2f + a = 85$
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €. $\rightarrow f + e + 3a = 133$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} e + 2a = 78 \\ 2f + a = 85 \\ f + e + 3a = 133 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} e = 78 - 2a \\ 2f + a = 85 \\ f + e + 3a = 133 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2f + a = 85 \\ f + 78 - 2a + 3a = 133 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2f + a = 85 \\ a + f = 55 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2f + a = 85 \\ a = 55 - f \end{array} \right\} \Rightarrow 2f + 55 - f = 85 \Rightarrow \boxed{f = 30} \Rightarrow \boxed{a = 55 - 30 = 25} \Rightarrow \boxed{e = 78 - 50 = 28}$$

El electricista gana 28 € por hora de trabajo, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

2. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2 , de la misma empresa pueden realizar un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G_1 y en 4.000 € para el grupo G_2 . ¿Cuántas semanas habrán de trabajar cada grupo para acabar el proyecto con un coste mínimo?

(10 puntos)

Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Llamo “ x ” = número de semanas que debe trabajar el grupo 1 e “ y ” = número de semanas que debe trabajar el grupo 2.

El número de unidades que se ajardinan en esas semanas aparecen en la tabla siguiente.

	Zona A	Zona B	Zona C	Coste
Semanas G_1 (x)	$4x$	$10x$	$7x$	$3300x$
Semanas G_2 (y)	$10y$	$5y$	$7y$	$4000y$
TOTALES	$4x + 10y$	$10x + 5y$	$7x + 7y$	$3300x + 4000y$

Expresamos las restricciones en inecuaciones.

“Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C” $\rightarrow 4x + 10y \geq 40$; $10x + 5y \geq 50$; $7x + 7y \geq 49$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 10y \geq 40 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 7x + 7y \geq 49 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 5y \geq 20 \\ 2x + y \geq 10 \\ x + y \geq 7 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el coste: $C(x, y) = 3300x + 4000y$ y deseamos minimizarlo.

Para dibujar la región factible dibujo primero las rectas que la delimitan.

$$2x + 5y = 20$$

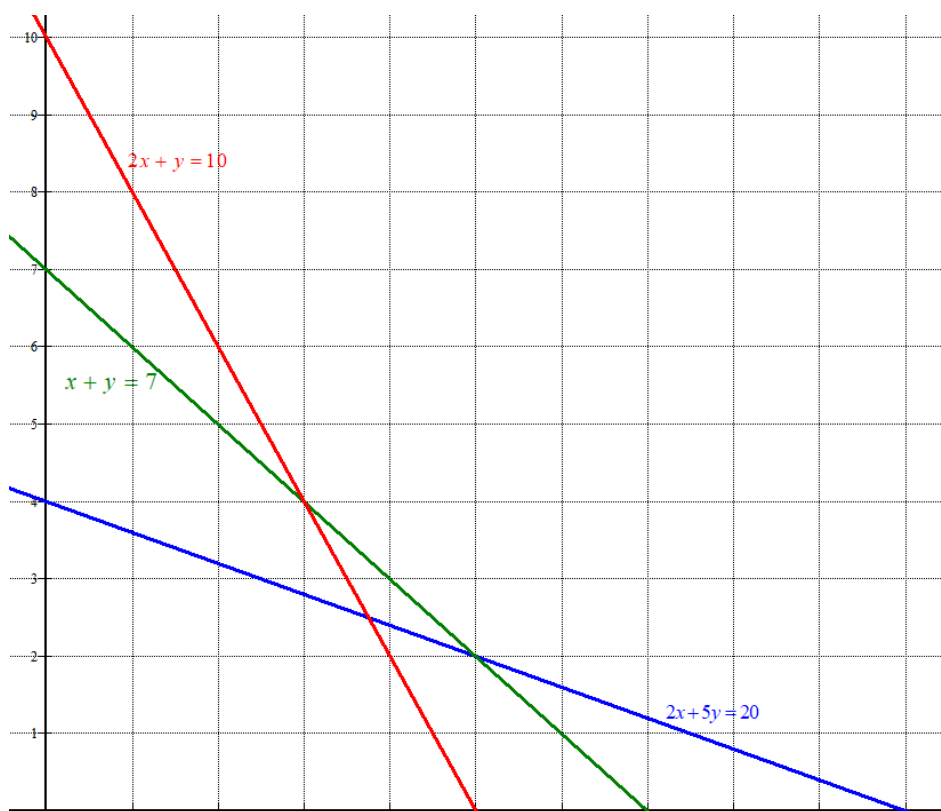
x	$y = \frac{20-2x}{5}$
0	4
5	2
10	0

$$2x + y = 10$$

x	$y = 10 - 2x$
3	4
5	0
0	10

$$x + y = 7$$

x	$y = 7 - x$
0	7
3	4
5	2
7	0



$x \geq 0$; $y \geq 0$ Primer cuadrante

Como las restricciones son una región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones:

$$4x + 10y \geq 40; \quad 10x + 5y \geq 50; \quad 7x + 7y \geq 49$$

La región factible está situada por encima de las rectas roja, verde y azul y dentro del primer cuadrante. La coloreo de rosa en la siguiente imagen.



Para determinar el coste mínimo y como se consigue valoro la función coste $C(x, y) = 3300x + 4000y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

$$A(0, 10) \rightarrow C(0, 10) = 0 + 40000 = 40000$$

$$B(3, 4) \rightarrow C(3, 4) = 9900 + 16000 = 25900$$

$$C(5, 2) \rightarrow C(5, 2) = 16500 + 8000 = 24500$$

$$D(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 33000$$

El mínimo coste es de 24500 € y se produce en el punto $C(5, 2)$ que significa que deben trabajar 5 semanas el grupo G_1 y 2 semanas el grupo G_2 .

3. Considerar la función

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Calcular una primitiva de esta función.

(4 puntos)

b) Calcular la siguiente integral definida:

(6 puntos)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

y comprobar que su valor es $\frac{3}{4}$.

a)

$$\int h(x) dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int e^x + e^{-x} dx \right) = \frac{1}{2} \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \boxed{\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} + K}$$

Donde $K \in \mathbb{R}$

b)

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} \right]_0^{\ln 2} = \left[\frac{1}{2} e^{\ln 2} - \frac{1}{2} e^{-\ln 2} \right] - \left[\frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-0} \right] =$$

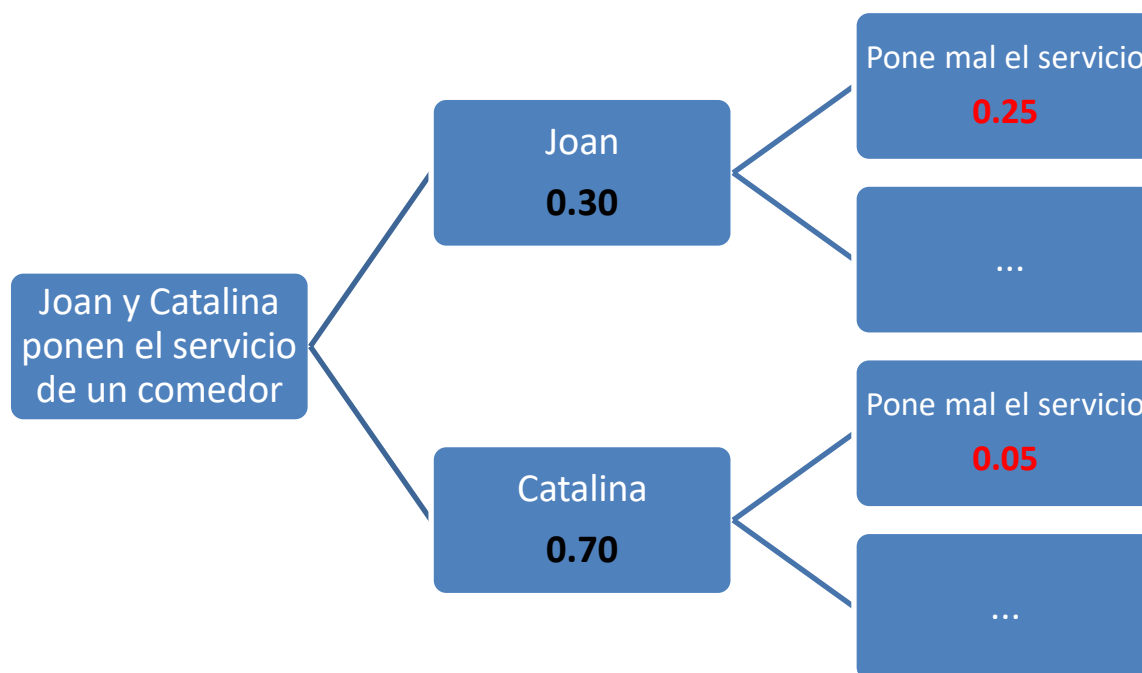
$$= \frac{1}{2} 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

4. Un restaurante tiene contratados dos camareros, Joan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar los cubiertos el 5% de los días que pone el servicio. Joan, por contra, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado? (6 puntos)

b) Por desgracia, el encargado encuentra unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Joan. (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Pone mal el servicio}) = P(\text{Joan pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio} / \text{Joan}) + P(\text{Catalina pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio} / \text{Catalina}) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.05 = 0.075 + 0.035 = \boxed{0.110}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Joan} / \text{Mal puesto el servicio}) = \frac{P(\text{Joan} \cap \text{Mal puesto el servicio})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} =$$

$$= \frac{P(\text{Joan})P(\text{Mal puesto el servicio} / \text{Joan})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.110} = \frac{75}{110} = \boxed{\frac{15}{22} = 0.682}$$

Convocatoria extraordinaria de 2017



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències
Socials II

2017

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcula $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la matriz traspuesta de la matriz C. (5 puntos)
- b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$. (5 puntos)

2. Un estudio sobre la presencia de CO₂ en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$$

(t = años transcurridos desde el año 2000). Se pide:

- a) ¿En qué año se conseguirá un máximo en el nivel de contaminación? (4 puntos)
- b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero? (2 puntos)
- c) ¿Cuándo $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente? (4 puntos)

3. Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0.4 y 0.6 respectivamente. Se sabe que, dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0.3. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez? (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos? (3 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos? (5 puntos)

4. En cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10% es para consumo. Se sabe, además, que de los créditos concedidos en vivienda, el 15% resulta impagado; de los créditos concedidos a empresas, son impagados el 20%; y de los créditos concedidos al consumo, resultan impagados el 15%.

- a) Calcule la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado. (6 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado? (4 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de final de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcule el número de participaciones que han vendido de cada importe. (10 puntos)

2. Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B, por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1.1 € y el de cada lote de tipo B es de 1.5 €. ¿Cuántos lotes de tipos A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

3. En cierta población el consumo de agua (en m³) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \leq t < 9 \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \leq t < 20 \\ 168 - 7t & \text{si } 20 \leq t < 24 \end{cases} .$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0, 20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua, determina α y β . (10 puntos)

4. Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, y se obtienen los siguientes resultados:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

- Calcula un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores. (6 puntos)
- De qué tamaño debe ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1.2 kg? (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcula $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la matriz traspuesta de la matriz C. (5 puntos)
 b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$. (5 puntos)

a) Obtenemos la expresión de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 & -10+15 \\ 2-3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de $B \cdot C^t$.

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -3-5 \\ 0+2 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de $A^2 - B \cdot C^t$.

$$A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado que $A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X + B = C \Rightarrow A \cdot X = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+5 & 9-20 \\ -2+2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Un estudio sobre la presencia de CO₂ en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$$

(t = años transcurridos desde el año 2000). Se pide:

- a) ¿En qué año se conseguirá un máximo en el nivel de contaminación? (4 puntos)
 b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero? (2 puntos)
 c) ¿Cuándo $t = 17$ el nivel de contaminación será creciente o decreciente? (4 puntos)

a) Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} C'(t) = -0.4t + 4 \\ C'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.4t + 4 = 0 \Rightarrow 0.4t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{0.4} = 10$$

Sustituimos $t = 10$ en la segunda derivada.

$$C''(t) = -0.4 \Rightarrow C''(10) = -0.4 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función tiene un máximo relativo en $t = 10$.

Se alcanzó un máximo en el nivel de contaminación el año $2000 + 10 = 2010$.

b) Buscamos cuando $C(t) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25 \\ C(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.2t^2 + 4t + 25 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-0.2)(25)}}{2(-0.2)} = \frac{-4 \pm 6}{-0.4} = \begin{cases} \frac{-4+6}{-0.4} = -5 \notin [0, 25] \\ \frac{-4-6}{-0.4} = 25 = t \end{cases}$$

El nivel de contaminación cero se alcanzará en el año $2000 + 25 = 2025$.

c) Comprobamos el signo de la derivada para $t = 17$.

$$C'(17) = -0.4 \cdot 17 + 4 = -2.8 < 0$$

Como la derivada es negativa el año 2017 la contaminación será decreciente.

3. Sean A y B dos sucesos que tienen probabilidades 0.4 y 0.6 respectivamente. Se sabe que, dado B, la probabilidad de que ocurra A es 0.3. Se pide:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez? (2 puntos)
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos? (3 puntos)
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos? (5 puntos)

Tenemos que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ y $P(A/B) = 0.3$.

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.3 = \frac{P(A \cap B)}{0.6} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18}$$

La probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez es de 0.18

- b) Nos piden calcular $P(A \cup B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.18 = \boxed{0.82}$$

La probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos sucesos es de 0.82

- c) Nos piden calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

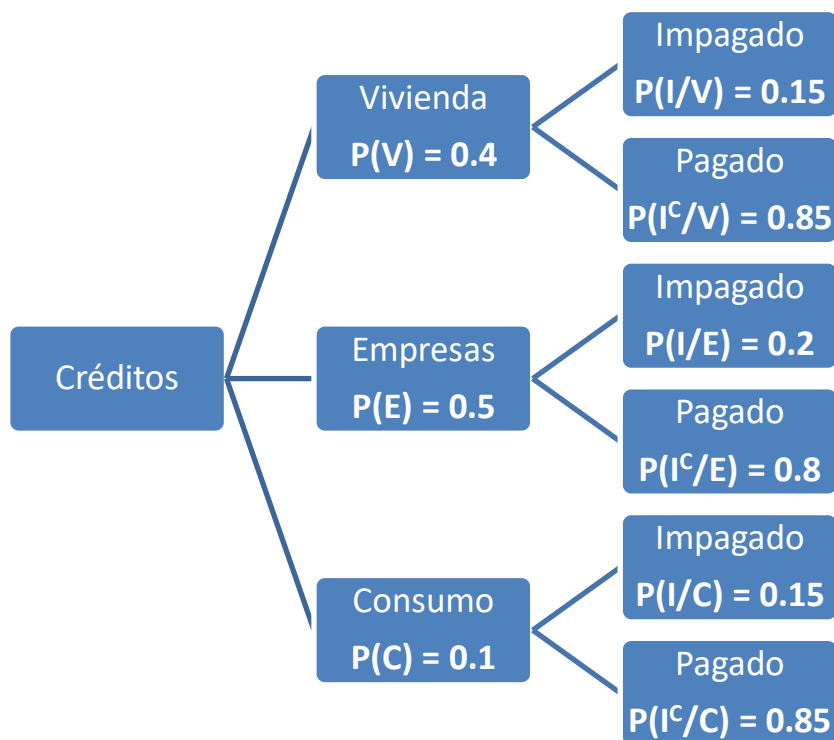
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.82 = \boxed{0.18}$$

La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos es de 0.18

4. En cierta entidad bancaria, el 40 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas, y el 10% es para consumo. Se sabe, además, que de los créditos concedidos en vivienda, el 15% resulta impagado; de los créditos concedidos a empresas, son impagados el 20%; y de los créditos concedidos al consumo, resultan impagados el 15%.

- a) Calcule la probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado. (6 puntos)
 b) Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado? (4 puntos)

Llamamos V al suceso “el crédito es para vivienda”, E al suceso “el crédito es para empresas”, C a “el crédito es para consumo” e I al suceso “el crédito es impagado”.
 Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(I^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(I^c) &= P(V)P(I^c/V) + P(E)P(I^c/E) + P(C)P(I^c/C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.85 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.85 = \boxed{0.825}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un cierto crédito elegido al azar sea pagado es de 0.825

- b) Nos piden calcular $P(C/I^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I^c) = \frac{P(C \cap I^c)}{P(I^c)} = \frac{P(C)P(I^c/C)}{P(I^c)} = \frac{0.1 \cdot 0.85}{0.825} = \boxed{\frac{17}{165} \approx 0.103}$$

La probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado es de $\frac{17}{165} \approx 0.103$

OPCIÓN B

1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de final de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcule el número de participaciones que han vendido de cada importe. (10 puntos)

Llamamos “x” el número de participaciones de 1 €, “y” al número de participaciones de 2 € y “z” al número de participaciones de 5 €.

- Han recaudado un total de 620 € $\rightarrow x + 2y + 5z = 620$
- Han vendido un total de 280 participaciones $\rightarrow x + y + z = 280$
- Han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. $\rightarrow x = 2z$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 280 \\ x + 2y + 5z = 620 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 280 \\ 2z + 2y + 5z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 280 \\ 2y + 7z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 280 - 3z \\ 2y + 7z = 620 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(280 - 3z) + 7z = 620 \Rightarrow 560 - 6z + 7z = 620 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 60} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 280 - 3 \cdot 60 = 100} \\ \boxed{x = 2 \cdot 60 = 120} \end{array} \right.$$

Se vendieron 120 participaciones de 1 €, 100 de 2 € y 60 de 5 €.

2. Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B, por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1.1 € y el de cada lote de tipo B es de 1.5 €. ¿Cuántos lotes de tipos A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? (10 puntos)
Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Papel reciclado	Papel normal	Ingresos
Número de lotes A (x)	x	3x	1.1x
Número de lotes B (y)	2y	2y	1.5y
TOTALES	$x + 2y$	$3x + 2y$	$1.1x + 1.5y$

Deseamos maximizar los ingresos que tienen la expresión $I(x, y) = 1.1x + 1.5y$.

Las restricciones son:

“Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal.” $\rightarrow x + 2y \leq 88; 3x + 2y \leq 148$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 88$$

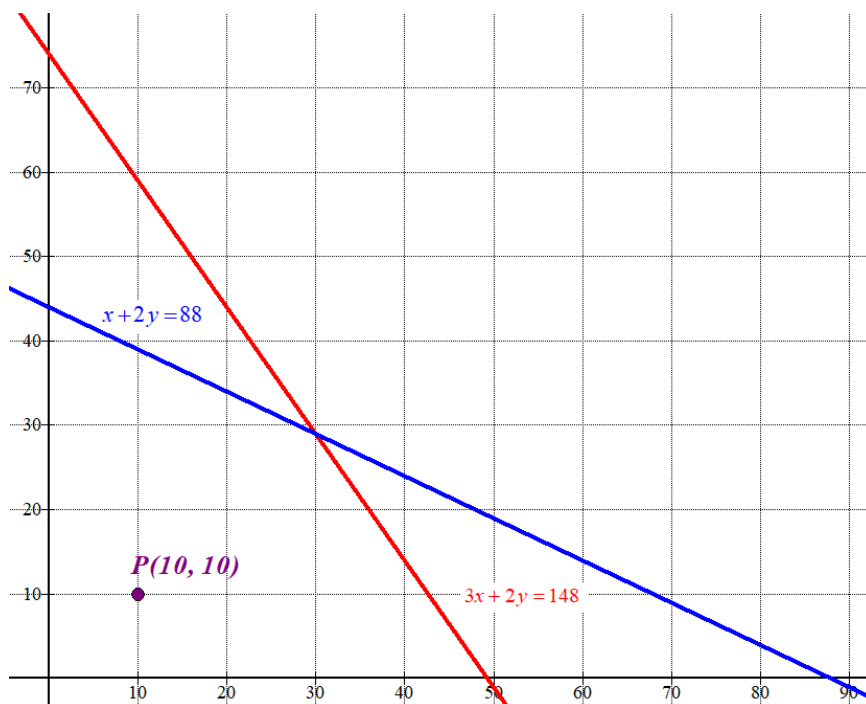
x	$y = \frac{88 - x}{2}$
0	44
30	29
88	0

$$3x + 2y = 148$$

x	$y = \frac{148 - 3x}{2}$
0	74
30	29
148/3	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



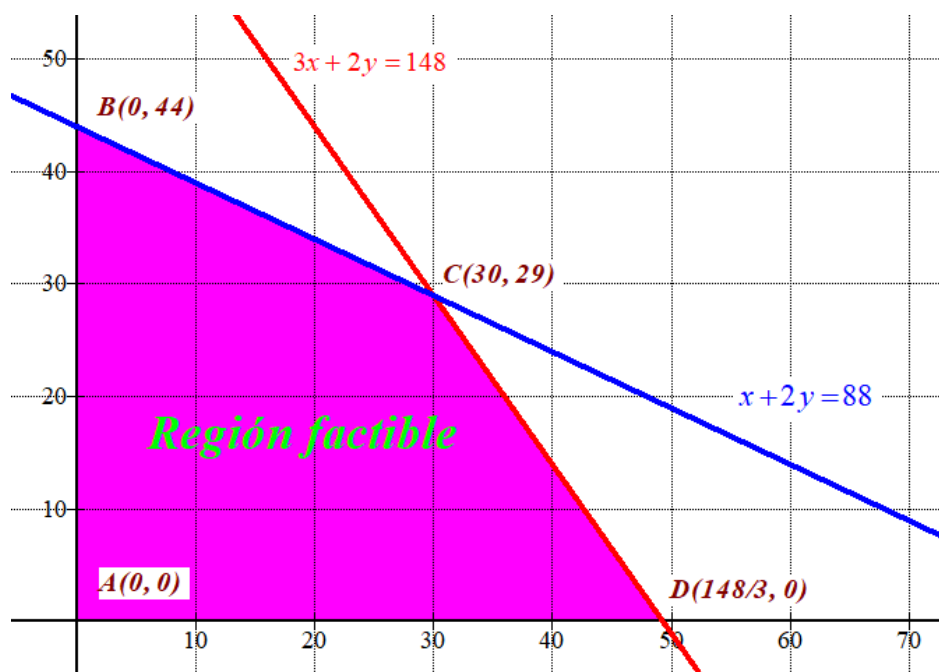
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 88 \\ 30 + 20 \leq 148 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas. Coloreo de rosa la región factible en la siguiente imagen.



Hallamos las coordenadas de los vértices B, C y D.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 88 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 88 \Rightarrow y = \frac{88}{2} = 44 \Rightarrow B(0, 44)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 88 \\ 3x + 2y = 148 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 88 - 2y \\ 3x + 2y = 148 \end{array} \Rightarrow 3(88 - 2y) + 2y = 148 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 264 - 6y + 2y = 148 \Rightarrow -4y = -116 \Rightarrow y = \frac{116}{4} = 29 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 88 - 58 = 30 \Rightarrow C(30, 29)$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} y=0 \\ 3x+2y=148 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x=148 \Rightarrow x=\frac{148}{3} \Rightarrow D\left(\frac{148}{3}, 0\right)$$

Valoro la función $I(x, y) = 1.1x + 1.5y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 44) \rightarrow I(0, 44) = 1.1 \cdot 0 + 1.5 \cdot 44 = 66$$

$$C(30, 29) \rightarrow I(30, 29) = 1.1 \cdot 30 + 1.5 \cdot 29 = 76.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(148/3, 0) \rightarrow I(148/3, 0) = 1.1 \cdot \frac{148}{3} + 1.5 \cdot 0 \approx 54.26$$

El valor máximo de la función es 76.5 y se alcanza en el punto C(30, 29).

Los ingresos máximos son 76.5 € y se consiguen con 30 lotes A y 29 lotes B.

3. En cierta población el consumo de agua (en m^3) en función de las horas del día, viene dado por

$$C(t) = \begin{cases} \frac{17}{9}t, & \text{si } 0 \leq t < 9 \\ \alpha t^2 + \beta t - 172, & \text{si } 9 \leq t < 20 \\ 168 - 7t & \text{si } 20 \leq t < 24 \end{cases}.$$

Sabiendo que la función es continua en el intervalo $(0, 20)$, y que a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua, determina α y β . (10 puntos)

La función es continua en $t = 9$ por lo que los límites laterales deben coincidir.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 9^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^-} \frac{17}{9}t = 17 \\ \lim_{t \rightarrow 9^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} \alpha t^2 + \beta t - 172 = 81\alpha + 9\beta - 172 \\ \lim_{t \rightarrow 9^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 9^+} C(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 81\alpha + 9\beta - 172 = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81\alpha + 9\beta = 189 \Rightarrow \boxed{9\alpha + \beta = 21}$$

Si a las 15 horas se alcanza el máximo consumo de agua la derivada de la función debe anularse y la segunda derivada debe ser negativa.

En las proximidades de $t = 15$ la función es $C(t) = \alpha t^2 + \beta t - 172$.

$$\left. \begin{aligned} C(t) &= \alpha t^2 + \beta t - 172 \Rightarrow C'(t) = 2\alpha t + \beta \\ C'(15) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{30\alpha + \beta = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 30\alpha + \beta &= 0 \\ 9\alpha + \beta &= 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= -30\alpha \\ 9\alpha + \beta &= 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9\alpha - 30\alpha = 21 \Rightarrow -21\alpha = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{21}{-21} = -1} \Rightarrow \beta = -30(-1) = 30$$

Los valores buscados son $\alpha = -1$ y $\beta = 30$.

4. Se sabe que el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional se distribuye según una normal de desviación típica de 6 kg. Para estudiar el peso medio de los jugadores, se extrae una muestra de tamaño 8, y se obtienen los siguientes resultados:

63.7; 48; 43.5; 65; 82; 70.3; 56.5; 50.

a) Calcula un intervalo de confianza a un nivel de significación del 10 % para el peso medio de los jugadores. (6 puntos)

b) De qué tamaño debe ser la muestra para que con el mismo nivel de significación el error cometido en la estimación no exceda de 1.2 kg? (4 puntos)

a) X = el peso de los jugadores de la liga de fútbol profesional. $X = N(\mu, 6)$.

El tamaño de la muestra es $n = 8$.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{63.7 + 48 + 43.5 + 65 + 82 + 70.3 + 56.5 + 50}{8} = 59.875$ kg.

Para un nivel de significación del 10% $\rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.05 = 0.95$.

Mirando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$.

	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Determinamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \frac{6}{\sqrt{8}} \approx 3.49$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es.

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (59.875 - 3.49, 59.875 + 3.49) = (56.385, 63.365)$$

b) Para un nivel de significación del 10% tenemos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

Utilizamos la fórmula del error igualándolo a 1.2 kg y despejando n .

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.2 = 1.645 \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.2 = \frac{9.87}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{9.87}{1.2} = 8.225 \Rightarrow n = 8.225^2 \approx 67.65$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 68 futbolistas.

Convocatoria ordinaria de 2017



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2017

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos.

Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza al uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcule cuántos relojes vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 89.000 €.

(10 puntos)

2. Una empresa de compra/venta de automóviles ha comprobado que los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \leq t \leq 10$$

en miles de euros. Se pide:

- a) ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de esta función? (5 puntos)
- b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
- c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa en el último año del estudio? (2 puntos)

3. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, y $p(A \cap B) = 0.2$. Calcula las probabilidades siguientes:

$p(B)$ (3 puntos), $p(A/B)$ (2 puntos), $p(A \cap B^c)$ (3 puntos) y $p(A^c \cup B^c)$ (2 puntos)

4. A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza (0.17, 0.25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación?

(10 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Determina los valores de k para los que el sistema es compatible determinado. (6 puntos)
- b) Resuelve el sistema cuando $k = 2$. (4 puntos)

2. Calcula el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ (6 puntos).
Dibuje el recinto limitado por ambas curvas (4 puntos).

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x=1$? (6 puntos)
 - b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x=0$ y $x=3$. ¿Cómo es el crecimiento y decrecimiento de la función en estos puntos? (4 puntos)
4. Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.
- a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo? (2 puntos)
 - b) Si extraemos dos al azar, sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de color azul? (4 puntos)
 - c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazo, calcula la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcule cuántos relojes vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 89.000 €. (10 puntos)

Llamamos “x” al número de relojes A que vende, “y” al número de relojes B y “z” al número de relojes C.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a la información proporcionada en el ejercicio.

“En un mes determinado vendió 200 relojes en total” $\rightarrow x + y + z = 200$

“La cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente” $\rightarrow y = x + z$.

“La recaudación de ese mes fue de 89.000 € (los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €)” $\rightarrow 300x + 600y + 200z = 89000$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 300x + 600y + 200z = 89000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y = x + z \\ 3x + 6y + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + x + z + z = 200 \\ 3x + 6(x + z) + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 200 \\ 3x + 6x + 6z + 2z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 100 \\ 9x + 8z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 100 - z \\ 9x + 8z = 890 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(100 - z) + 8z = 890 \Rightarrow 900 - 9z + 8z = 890 \Rightarrow -z = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 10} \Rightarrow \boxed{x = 100 - 10 = 90} \Rightarrow \boxed{y = 90 + 10 = 100}$$

Se vendieron 90 relojes A, 100 relojes B y 10 relojes C.

2. Una empresa de compra/venta de automóviles ha comprobado que los últimos 10 años sus beneficios/pérdidas se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \leq t \leq 10$$

en miles de euros. Se pide:

- a) ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de esta función? (5 puntos)
 b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
 c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos? ¿Qué resultado obtuvo la empresa en el último año del estudio? (2 puntos)

a) Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} F'(t) = 3t^2 - 36t + 81 \\ F'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(27)}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = \boxed{9=t} \\ \frac{12-6}{2} = \boxed{3=t} \end{cases}$$

Sustituimos $t = 3$ y $t = 9$ en la segunda derivada.

$$F''(t) = 6t - 36 \Rightarrow \begin{cases} F''(3) = 18 - 36 = -18 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ F''(9) = 54 - 36 = 18 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda negativa la función tiene un máximo relativo en $t = 3$.

Al ser la primera derivada nula y la segunda positiva la función tiene un mínimo relativo en $t = 9$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en los puntos críticos para establecer los valores máximos y mínimos absolutos.

$$F(0) = 0^3 - 18 \cdot 0^2 + 81 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$F(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 3 = 105 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$F(9) = 9^3 - 18 \cdot 9^2 + 81 \cdot 9 - 3 = -3 \rightarrow \text{Mínimo}$$

$$F(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 7$$

La función alcanza su mínimo valor en el año 0 y en el año 9. Su valor máximo lo alcanza el año 3.

b) Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos: $t = 3$ y $t = 9$

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$F'(1) = 3 \cdot 1^2 - 36 \cdot 1 + 81 = 48 > 0. \text{ La función crece en } [0, 3).$$

- En el intervalo $(3, 9)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$F'(4) = 3 \cdot 4^2 - 36 \cdot 4 + 81 = -15 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 9).$$

- En el intervalo $(9,10]$ tomamos $x=9.5$ y la derivada vale
 $F'(9.5) = 3 \cdot 9.5^2 - 36 \cdot 9.5 + 81 = 9.75 > 0$. La función crece en $(9,10]$.

La función crece en $[0,3) \cup (9,10]$ y decrece en $(3,9)$.

- c) Los beneficios máximos los hemos calculado en el apartado a) y hemos visto que se obtienen en el noveno año desde el inicio del estudio y son 105 000 euros.
En el mismo apartado hemos visto que $F(10) = 7$, lo que significa que en el último año se obtienen unos beneficios de 7000 euros.

3. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, donde A^c denota el suceso complementario del suceso A, y $p(A \cap B) = 0.2$. Calcula las probabilidades siguientes:
 $p(B)$ (3 puntos), $p(A/B)$ (2 puntos), $p(A \cap B^c)$ (3 puntos) y $p(A^c \cup B^c)$ (2 puntos)

Como $P(A^c) = 0.4$ entonces $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A) = 0.6 \\ P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.6 + P(B) - 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.9 - 0.6 + 0.2 = \boxed{0.5}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = \boxed{0.4}$$

Sabemos que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \Rightarrow 0.6 = 0.2 + P(A \cap B^c) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B^c) = 0.4}$$

Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = \boxed{0.8}$$

Hemos obtenido que $p(B) = 0.5$, $p(A/B) = 0.4$, $p(A \cap B^c) = 0.4$ y $p(A^c \cup B^c) = 0.8$.

4. A partir de una muestra de 100 individuos, se ha realizado una estimación de la proporción mediante el intervalo de confianza (0.17, 0.25). ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha realizado la estimación? (10 puntos)

El tamaño de la muestra es $n = 100$.

La proporción muestral es $\frac{0.17 + 0.25}{2} = 0.21$.

El error del intervalo de confianza es $\frac{0.25 - 0.17}{2} = 0.04$.

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.04 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{100}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.04}{\sqrt{\frac{0.21 \cdot 0.79}{100}}} \approx 0.98206$$

Buscamos la probabilidad en la tabla de la $N(0, 1)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8150	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599

Tenemos que $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.8365 \Rightarrow 1 - 0.8365 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.1635 = 0.327 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.673$

El nivel de confianza es del 67.3%.

OPCIÓN B

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Determina los valores de k para los que el sistema es compatible determinado. (6 puntos)
 b) Resuelve el sistema cuando $k = 2$. (4 puntos)

a) Para que el sistema sea compatible determinado el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, por lo que su determinante no debe ser nulo.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguamos para que valores se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k + 2 + 1 + 2k - 1 + 2 = 4k + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4k + 4 = 0 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

El sistema es compatible determinado para cualquier valor de k distinto de -1 .

b) Resolvemos el sistema para $k = 2$.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y - 2x \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - y + 2x = 0 \\ 2x + y - y + 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \rightarrow x - y = 0 \rightarrow y = x \\ 4x = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{-1}{4}}$$

La solución del sistema es $x = y = \frac{1}{4}$; $z = \frac{-1}{4}$.

2. Calcula el área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ (6 puntos).
Dibuje el recinto limitado por ambas curvas (4 puntos).

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = x^2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

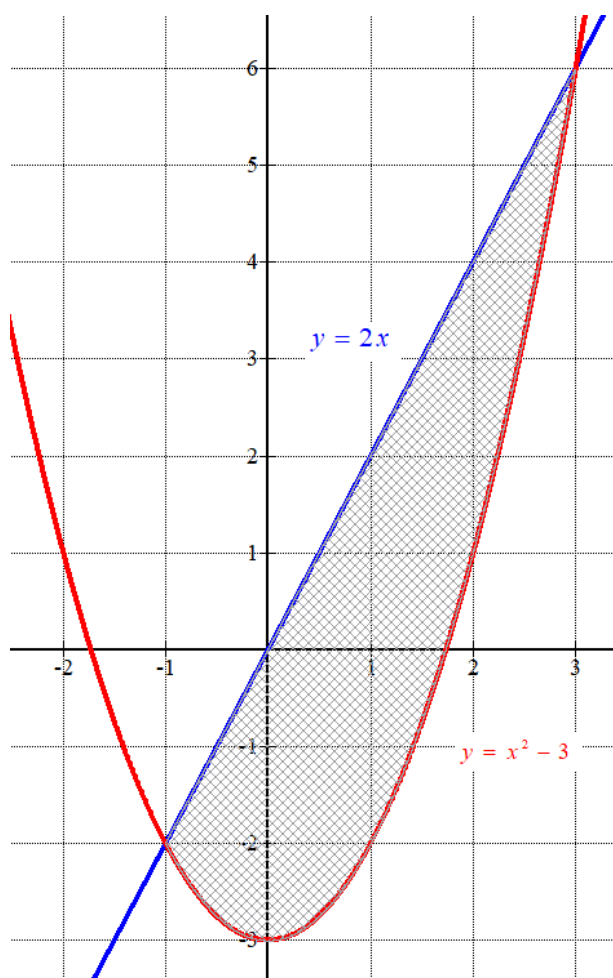
Hacemos una tabla de valores para cada función y dibujamos el recinto limitado por recta y parábola.

$$y = 2x$$

x	$y = 2x$
-1	-2
0	0
3	6

$$y = x^2 - 3$$

x	$y = x^2 - 3$
-1	-2
0	-3
3	6



Calculamos el área del recinto como la integral definida entre -1 y 3 de la diferencia entre la recta y la parábola.

$$\text{Área} = \int_{-1}^3 2x - (x^2 - 3) dx = \int_{-1}^3 2x - x^2 + 3 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^3 =$$

$$= \left[3^2 - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) \right] = 9 - 9 + 9 - 1 - \frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.667 \text{ u}^2}$$

El área de la figura plana limitada por la recta $y = 2x$ y la curva $y = x^2 - 3$ tiene un valor aproximado de 10.667 unidades cuadradas.

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Se pide:

- a) ¿Para qué valores de a la función es continua en $x=1$? (6 puntos)
 b) Para el valor de a que hace continua la función f en todo su dominio, calcule las derivadas de f en los puntos $x=0$ y $x=3$. ¿Cómo es el crecimiento y decrecimiento de la función en estos puntos? (4 puntos)

- a) La función es continua en $x=1$ cuando los límites laterales coinciden con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = (1+a)^2 \Rightarrow \begin{cases} 1+a=1 \rightarrow \boxed{a=0} \\ 1+a=-1 \rightarrow \boxed{a=-2} \end{cases}$$

La función es continua en $x=1$ para $a=-2$ o $a=0$.

- b) La función en un entorno de $x=0$ es $f(x)=e^{x-1}$, por lo que su derivada es $f'(x)=e^{x-1}$ y la derivada en $x=0$ valdrá $f'(0)=e^{0-1}=\frac{1}{e}$.

La función en un entorno de $x=3$ es $f(x)=(x+a)^2$, por lo que su derivada es $f'(x)=2(x+a)$ y la derivada en $x=3$ valdrá $f'(3)=2(3+a)=6+2a$. Para $a=-2$ la derivada vale $f'(3)=6-4=2$ y para $a=0$ la derivada vale $f'(3)=6-0=6$.

En $x=0$ la derivada vale $f'(0)=\frac{1}{e}>0$. La función crece en este punto.

En $x=3$ la derivada vale $f'(3)=2>0$ o $f'(3)=6>0$. La función crece en ese punto en ambos casos.

4. Un estuche contiene 17 lápices de color rojo y 13 de color azul.

- a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo? (2 puntos)
 b) Si extraemos dos al azar, sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de color azul? (4 puntos)
 c) Si elegimos dos al azar, sin reemplazo, calcula la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo. (4 puntos)

a) Llamamos A al suceso “elegir lápiz azul”, R al suceso “elegir lápiz rojo”.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de elegir lápiz rojo vale $\frac{17}{30}$.

b) En la primera extracción la probabilidad de sacar lápiz azul es $\frac{13}{30}$.

Si en la primera extracción hemos sacado un lápiz azul quedan en el estuche 29 lápices, siendo 12 azules y 17 rojos, por lo que la probabilidad de que el segundo lápiz sea azul es $\frac{12}{29}$.

La probabilidad de que al sacar dos lápices sin reemplazo ambos sean de color azul es el producto de las probabilidades anteriores: $\frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} = \frac{26}{145} \approx 0.1793$.

c) En la primera extracción la probabilidad de sacar lápiz azul es $\frac{13}{30}$.

Si en la primera extracción hemos sacado un lápiz azul quedan en el estuche 29 lápices, siendo 12 azules y 17 rojos, por lo que la probabilidad de que el segundo lápiz sea rojo es $\frac{17}{29}$.

La probabilidad de que al sacar dos lápices sin reemplazo el primero sea azul y el segundo sea rojo es el producto de las probabilidades anteriores: $\frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870} \approx 0.254$.