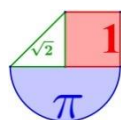
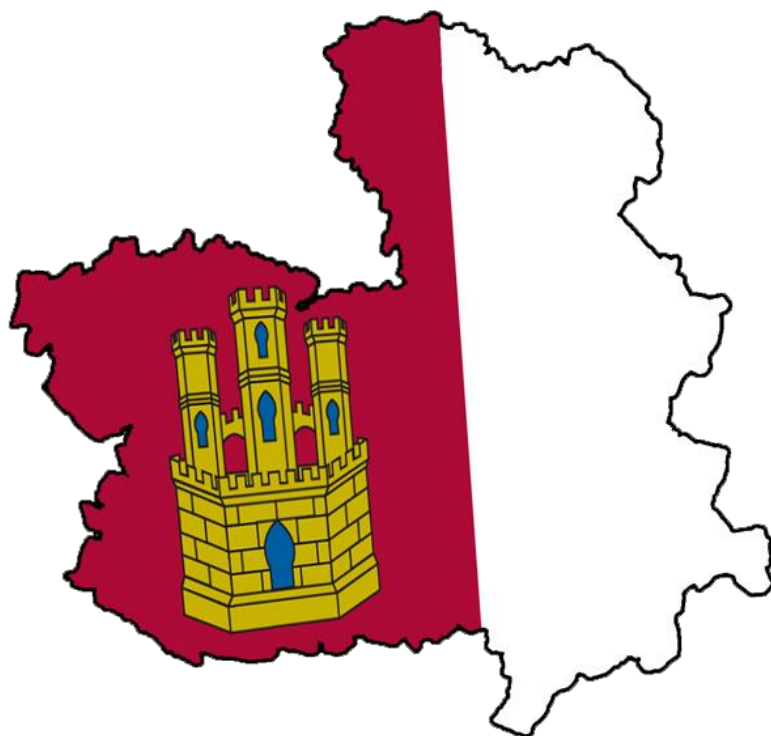


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU 2017 a 2025
Castilla la Mancha



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EvAU de Castilla la Mancha desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	15
EvAU Extraordinaria 2024	28
EvAU Ordinaria 2024	48
EvAU Extraordinaria 2023	67
EvAU Ordinaria 2023	86
EvAU Extraordinaria 2022	104
EvAU Ordinaria 2022	122
EvAU Extraordinaria 2021	139
EvAU Ordinaria 2021	155
EvAU Extraordinaria 2020	172
EvAU Ordinaria 2020	188
EvAU Extraordinaria 2019	204
EvAU Ordinaria 2019	222
EvAU Extraordinaria 2018	237
EvAU Ordinaria 2018	253
EvAU Septiembre 2017	272
EvAU Junio 2017	288

PAU Extraordinaria 2025



Universidad de
Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma = 0.05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

- Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**
- Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & \text{si } x \leq k \\ -2x^2 + 8x & \text{si } x > k \end{cases}$

- ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**
- En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0.75 puntos)**

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la

ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$ ”

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? Razona tu respuesta. **(1.25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3,0)? Razona tu respuesta. **(0.75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? (0.5 puntos) **(0.5 puntos)**

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0.75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0.5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde t = tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma = 0.05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

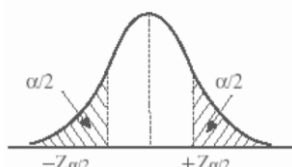
Consideramos X = La cantidad de litros de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella. $X = N(\mu, 0.05)$.

Tamaño de la muestra $n = 16$. La media muestral es $\bar{x} = 0.97$ litros.

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{16}} = 0.027125 \text{ litros}$$

El intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (0.97 - 0.027125, 0.97 + 0.027125) = (0.942875, 0.997125)$$

- b) Si deseamos disminuir la amplitud del intervalo debemos disminuir el error que viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si mantenemos constante el nivel de confianza se mantiene constante el valor de $z_{\alpha/2}$ y para disminuir el error solo podemos aumentar “n”, es decir, debemos aumentar el tamaño de la muestra.
- c) Un nivel de confianza del 95 % es menor que el nivel de confianza del apartado a) que era del 97%, por lo que tendremos un valor de $z_{\alpha/2}$ menor y la amplitud del intervalo será menor que el obtenido en el apartado a). Pero $1 \notin (0.997125, 0.942875)$ y por tanto no pertenecerá al intervalo de confianza que obtendríamos con un nivel de confianza del 95% que tendría menos amplitud. La afirmación no es aceptable.

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**
 b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

- a) Llamamos “x”, “y”, “z” al número de huéspedes alojados en el Parador procedentes de Italia, Portugal y Japón, respectivamente. Obtenemos las ecuaciones asociadas a cada una de las informaciones proporcionadas.

“Se alojaron ayer 25 huéspedes” $\rightarrow x + y + z = 25$

“El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés” $\rightarrow 140x + 130y + 160z = 3610$

“El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países” $\rightarrow y = \frac{x + z}{4}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ 140x + 130y + 160z = 3610 \\ y = \frac{x + z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ 14x + 13y + 16z = 361 \\ 4y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ 14x + 13y + 16z = 361 \\ 4y - x = z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 4y - x = 25 \\ 14x + 13y + 16(4y - x) = 361 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 25 \\ 14x + 13y + 64y - 16x = 361 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 5 \\ 77y - 2x = 361 \end{array} \right\} \Rightarrow 77 \cdot 5 - 2x = 361 \Rightarrow -2x = -24 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow z = 4 \cdot 5 - 12 = 8$$

En el Parador se alojaron ayer 12 italianos, 5 portugueses y 8 japoneses.

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & \text{si } x \leq k \\ -2x^2 + 8x & \text{si } x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0.75 puntos)**

a.1) Buscamos cuando la función es continua en $x = k$.

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= 2k^2 + 4 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} 2x^2 + 4 = 2k^2 + 4 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} -2x^2 + 8x = -2k^2 + 8k \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2k^2 + 4 = -2k^2 + 8k \Rightarrow 4k^2 - 8k + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

La función es continua en $x = k$ para $k = 1$.

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \in (-\infty, 1) \\ -4x + 8 = 0 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

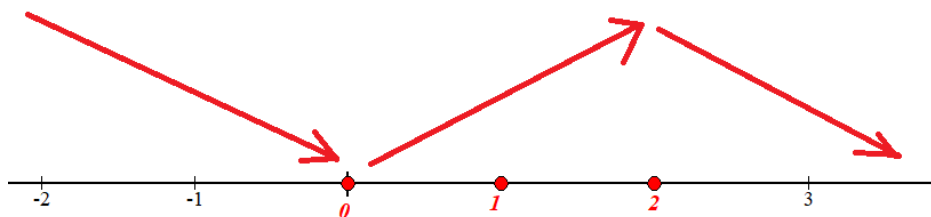
$$f'(x) = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 4(-2) = -8 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 4 \cdot 0.5 = 2 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = -4 \cdot 1.5 + 8 = 2 > 0$. La función crece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -4 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(0, 2)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo para $x=0$ y un máximo relativo para $x=2$.

a.3) Buscamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 1 \\ -4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La segunda derivada nunca se anula. La segunda derivada es positiva en el intervalo $(-\infty, 1)$ y la segunda derivada es negativa en el intervalo $(1, +\infty)$.

A partir de los signos de la segunda derivada podemos decir que la función es convexa (U) en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava (∩) en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función tiene un punto de inflexión en $x=1$.



Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

b.1) Si la función tiene un punto de inflexión en $x=1$ entonces la derivada segunda se anula para este valor $\rightarrow f''(1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 0 = 6a + 2b \Rightarrow b + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

La función queda $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + cx - 3$. La función tiene un mínimo relativo en $x = -1$, por lo que la derivada primera se anula para este valor $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 6ax + c \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a(-1)^2 - 6a(-1) + c \Rightarrow 9a + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -9a}$$

La función queda $f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 9ax - 3$.

Para que sea mínimo debe ser la derivada segunda positiva para $x = -1$. Lo comprobamos.

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 9ax - 3 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 6ax - 9a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6ax - 6a \Rightarrow f''(-1) = 6a(-1) - 6a = -12a > 0 \Rightarrow \boxed{a < 0}$$

Sabemos que la función pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(1, -14) \rightarrow f(-1) = 2$ y $f(1) = -14$.

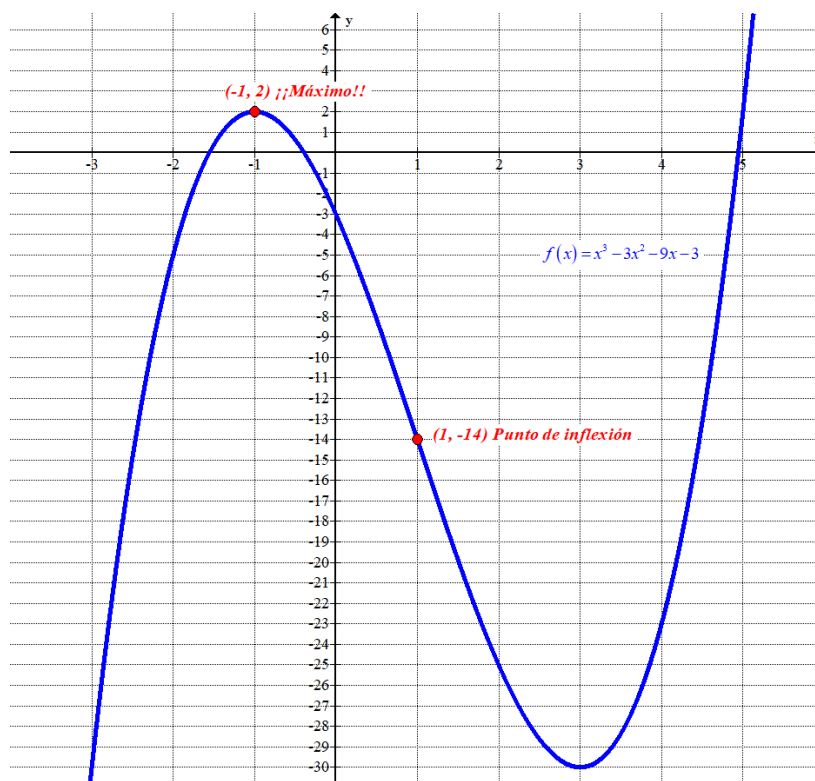
$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ f(1) = -14 \\ f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 9ax - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = a(-1)^3 - 3a(-1)^2 - 9a(-1) - 3 \\ -14 = a \cdot 1^3 - 3a \cdot 1^2 - 9a \cdot 1 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 = -a - 3a + 9a \\ -11 = a - 3a - 9a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 = 5a \\ -11 = -11a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para $a = 1$ tenemos que $b = -3 \cdot 1 = -3$ y $c = -9 \cdot 1 = -9$.

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -3$ y $c = -9$. La función queda $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$.

Hemos visto que a debe ser negativo y nos ha salido positivo. Hay un pequeño error en el enunciado y el punto $(-1, 2)$ es un máximo relativo y no es un mínimo relativo.



b.2) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$C \cdot X = A \cdot B + X \Rightarrow C \cdot X - X = A \cdot B \Rightarrow (C - I)X = A \cdot B \Rightarrow X = (C - I)^{-1} A \cdot B$$

Hallamos la expresión de la matriz $C - I$, comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$C - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C - I| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa.}$$

$$(C - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((C - I)^T)}{|C - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X solución de la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$.

$$X = (C - I)^{-1} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+0+4 & 2+0-2 \\ 2+0+0 & 4-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5-2 & 0-1 \\ 0+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$ ”

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? Razona tu respuesta. **(1.25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3,0)? Razona tu respuesta. **(0.75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0.5 puntos) (0.5 puntos)**

Resolvemos el problema de programación lineal planteado.

Las restricciones son $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$.

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$2x + y = 6$$

$$2x + 5y = 30$$

$$2x - y = 6$$

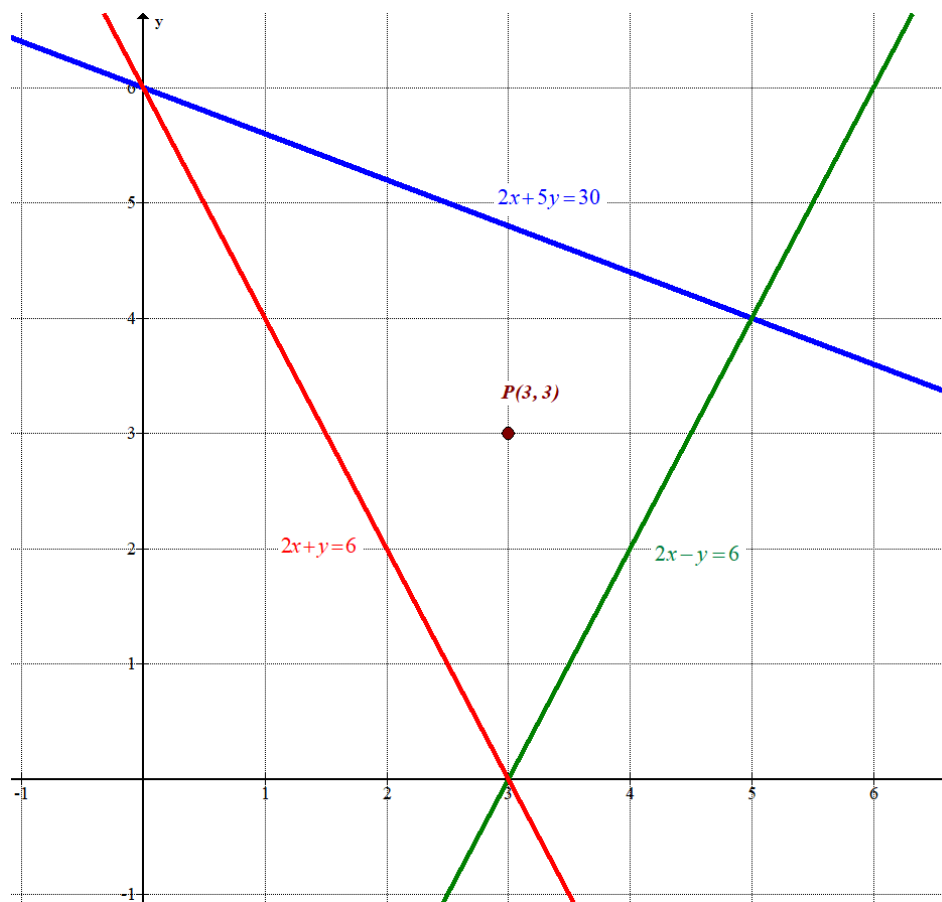
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 6 - 2x
0	6
2	2
3	0

x	y = $\frac{30-2x}{5}$
0	6
5	4
15	0

x	y = 2x - 6
0	-6
3	0
5	4

Primer
cuadrante

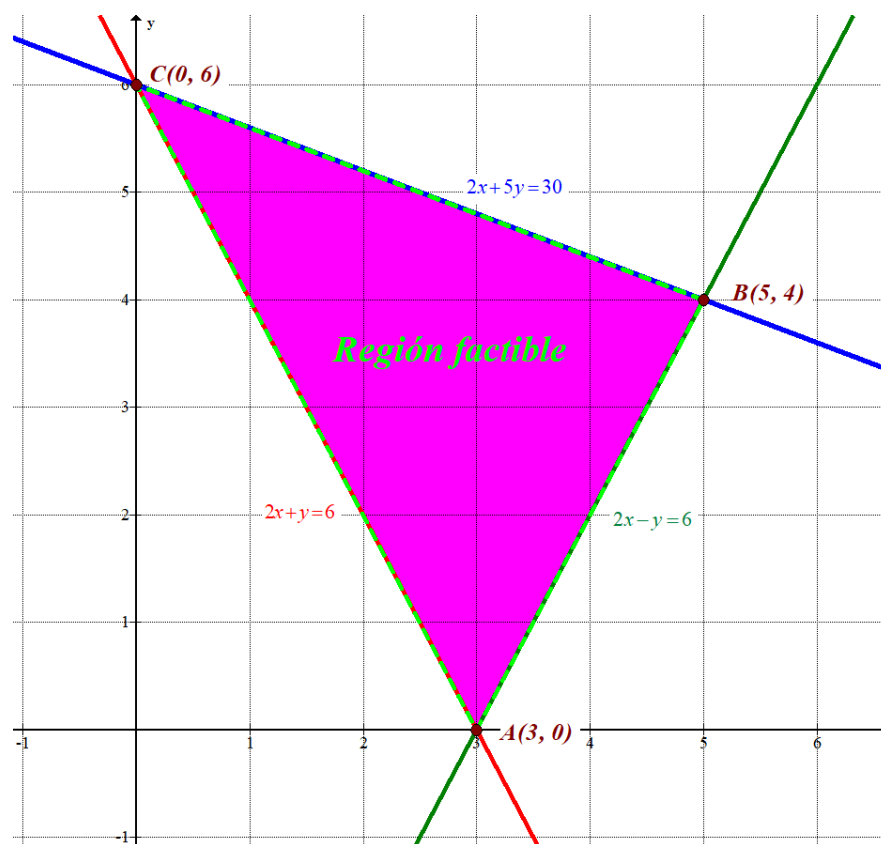


Como las restricciones son $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$ la región factible es la zona situada por debajo de la recta azul y por encima de las rectas roja y verde.

Comprobamos si el punto $P(3, 3)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + 3 \geq 6 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \leq 30 \\ 2 \cdot 3 - 6 \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6 + 3 \geq 6 \\ 6 + 15 \leq 30 \\ 6 - 6 \leq 3 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



Valoramos la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(3, 0) \rightarrow F(3, 0) = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 = 16 \text{ Mínimo}$$

$$B(5, 4) \rightarrow F(5, 4) = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 = 40$$

$$C(0, 6) \rightarrow F(0, 6) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 6 - 2 = 16 \text{ Mínimo}$$

El mínimo es 16 y se alcanza en los vértices A y C.

El valor mínimo es 16 y se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AC}$.

a.1) La respuesta de Laura no es correcta pues el punto (1, 2) no cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 6 \\ (1, 2) \text{ no la cumple} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡¡} 2 \cdot 1 + 2 < 6 \text{!!!}$$

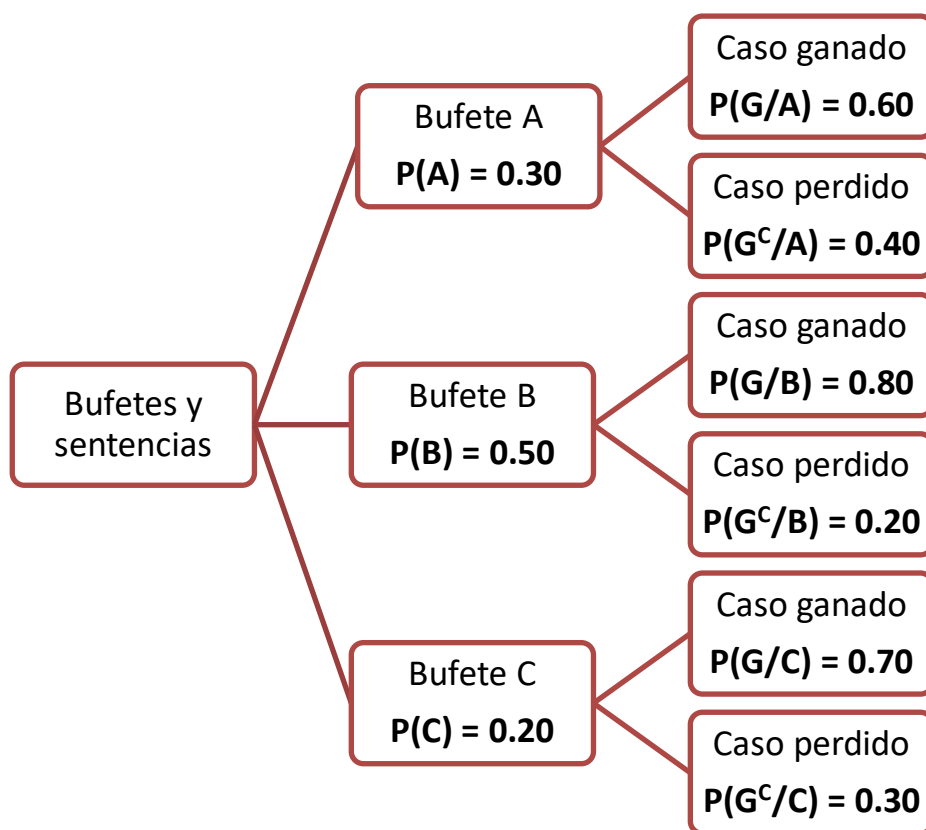
a.2) Si es cierto que el valor mínimo se alcanza en el punto (3, 0), aunque no es el único punto de la región que cumple las restricciones donde $F(x, y) = 6x + 3y - 2$ alcanza el valor mínimo.

a.3) El valor mínimo es 16.

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

- b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0.75 puntos)**
 b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0.5 puntos)**
 b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde t = tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

Realizamos un diagrama de árbol y damos nombre a cada uno de los sucesos.



b.1) Nos piden calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = \boxed{0.72}
 \end{aligned}$$

b.2) Debemos calcular $P(A/G^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G^c) = \frac{P(A \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{P(A)P(G^c/A)}{1-P(G)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{1-0.72} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

b.3) Si se alcanza un máximo para $t=3$ entonces la derivada de la función se anula para este valor
 $\rightarrow A'(3) = 0$.

Si en ese instante se alcanza un valor de 54 € por acción entonces se cumple que $A(3) = 54$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3) = 54 \\ A(t) = at^3 - 12t^2 + bt \end{array} \right\} \Rightarrow 54 = a \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 3b \Rightarrow 54 = 27a - 108 + 3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 162 = 27a + 3b \Rightarrow \boxed{54 = 9a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} A'(3) = 0 \\ A'(t) = 3at^2 - 24t + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + b \Rightarrow \boxed{72 = 27a + b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 72 = 27a + b \\ 54 = 9a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 72 - 27a = b \\ 54 - 9a = b \end{array} \right\} \Rightarrow 72 - 27a = 54 - 9a \Rightarrow 18 = 18a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 54 - 9 \cdot 1 = 45}$$

Los valores necesarios para que se cumpla lo pedido son $a=1$ y $b=45$.



PAU Ordinaria 2025

Universidad de Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 3 y 4 deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

- ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**
- En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

- Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la

ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

- a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**
- a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %.

Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

- b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**
- b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**
- b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**
- b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

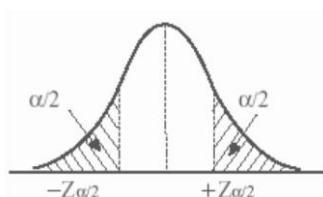
Sea X = el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe un centro de atención telefónica. $X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de la muestra $n = 36$. La media muestral es $\bar{x} = 15$ minutos.

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} \approx 1.4467 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media del tiempo de atención a las llamadas recibidas es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (15 - 1.4467, 15 + 1.4467) = (13.5533, 16.4467)$$

- b) Un nivel de confianza del 95 % es menor que el nivel de confianza del apartado a) que era del 97%, por lo que tendremos un valor de $z_{\alpha/2}$ menor y la amplitud del intervalo será menor que el obtenido en el apartado a). Pero $17 \notin (13.5533, 16.4467)$ y por tanto no pertenece al Intervalo de confianza que obtendríamos con un nivel de confianza del 95% que tendría menos amplitud. La afirmación no es aceptable.

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? (2.5 puntos)

Llamamos “x”, “y”, “z” a las puntuaciones obtenidas en la primera, segunda y tercera preguntas del examen de Historia, respectivamente. Obtenemos las ecuaciones asociadas a cada una de las informaciones proporcionadas.

“Ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos” $\rightarrow x + y + z = 7.2$

“La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda”
 $\rightarrow x = y + 0.40y$

“La puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta” $\rightarrow z = 2(x + y)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ x = y + 0.40y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ x = 1.4y \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.4y + y + z = 7.2 \\ z = 2 \cdot 1.4y + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.4y + z = 7.2 \\ z = 4.8y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4y + 4.8y = 7.2 \Rightarrow 7.2y = 7.2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1.4 \cdot 1 = 1.4} \\ \boxed{z = 4.8 \cdot 1 = 4.8} \end{cases}$$

En el examen de Historia Lucía ha obtenido 1.4 puntos en la primera pregunta, 1 punto en la segunda y 4.8 en la tercera.

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

a.1) Buscamos cuando la función es continua en $x = k$.

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= -k^2 - 3k + 10 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} -x^2 - 3x + 10 = -k^2 - 3k + 10 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} x^2 - 4x + 9 = k^2 - 4k + 9 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow k^2 - 4k + 9 = -k^2 - 3k + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 = k \\ \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2} = k \end{cases}$$

La función es continua en $x = k$ para $k = 1$ y $k = \frac{-1}{2}$.

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2} = -1.5 \in (-\infty, 1) \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1.5$, $x = 1$ y $x = 2$.

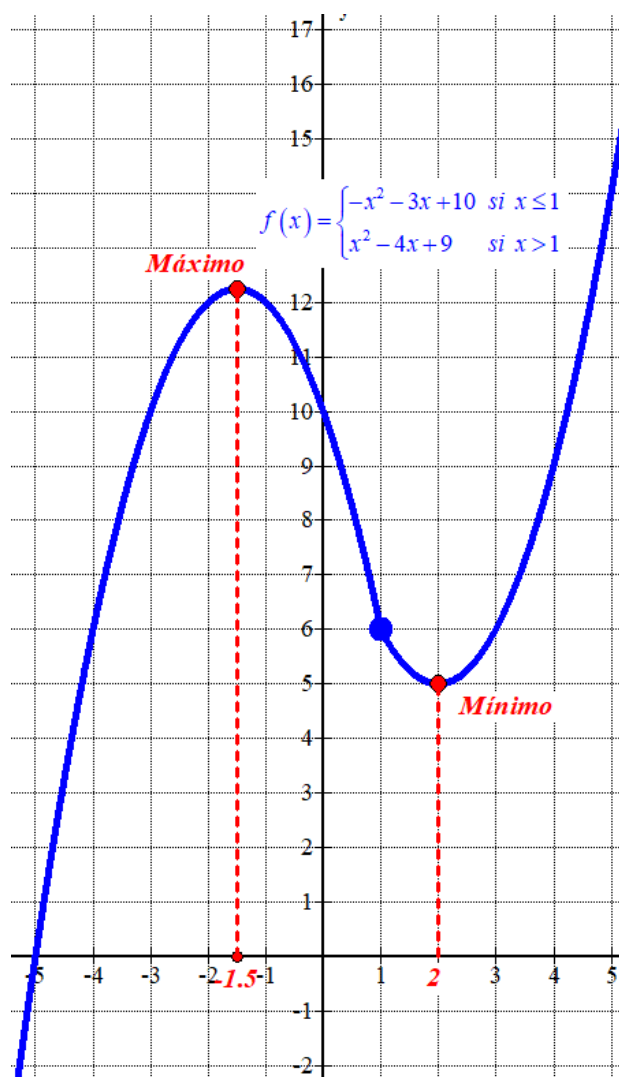
- En el intervalo $(-\infty, -1.5)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = -2(-2) - 3 = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1.5)$.
- En el intervalo $(-1.5, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1.5, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = 2 \cdot 1.5 - 4 = -1 < 0$. La función decrece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, 2)$.

Como la función crece antes de -1.5 y decrece después, la función tiene un máximo relativo en $x = -1.5$. Tenemos que $f(-1.5) = -(-1.5)^2 - 3(-1.5) + 10 = 12.25$. El máximo relativo tiene coordenadas $(-1.5, 12.25)$.

Como la función decrece antes de 2 y crece después, la función tiene un mínimo relativo en $x = 2$. Tenemos que $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 9 = 5$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(2, 5)$.

a.3) La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, 2)$.



Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la

ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

b.1) Si la función tiene un punto de inflexión en $x=1$ entonces la derivada segunda se anula para este valor $\rightarrow f''(1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 0 = 6a + 2b \Rightarrow b + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

La función queda $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + c$. La función tiene un mínimo relativo en $x=2$, por lo que la derivada primera se anula para este valor $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 6ax \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 2^2 - 6a \cdot 2 \Rightarrow 12a - 12a = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

De esta condición no obtenemos ninguna información. Nos dan 4 datos para obtener el valor de a , b y c (3 variables) por lo que o alguna información es redundante o es imposible encontrar los valores pedidos. En nuestro caso hay una información redundante.

Sabemos que la función pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(1, -1) \rightarrow f(2) = -3$ y $f(1) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f(1) = -1 \\ f(x) = ax^3 - 3ax^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = a \cdot 2^3 - 3a \cdot 2^2 + c \\ -1 = a \cdot 1^3 - 3a \cdot 1^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = 8a - 12a + c \\ -1 = a - 3a + c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = -4a + c \\ -1 = -2a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a - 3 = c \\ -1 = -2a + c \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = -2a + 4a - 3 \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{c = 4 - 3 = 1}$$

Para $a=1$ tenemos que $b = -3 \cdot 1 = -3$.

Los valores buscados son $a = c = 1$ y $b = -3$.

b.2) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I \Rightarrow A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I \Rightarrow (AB - C)X = I \Rightarrow X = (AB - C)^{-1}$$

Hallamos la expresión de la matriz $AB - C$, comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$AB - C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 & -1+4 \\ 4 & 2+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB - C| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa.}$$

$$(AB - C)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((AB - C)^T\right)}{|AB - C|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = (AB - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

a.1) Llamamos “x” al número de paquetes A, “y” al número de paquetes B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Minutos de trabajo manual	Minutos de trabajo en máquinas	Beneficio
Nº paquetes A (x)	30x	45x	20x
Nº paquetes B (y)	60y	20y	17y
TOTALES	30x + 60y	45x + 20y	20x + 17y

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 20x + 17y$. Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

“Disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas” $\rightarrow$

$$30x + 60y \leq 85 \cdot 60; \quad 45x + 20y \leq 75 \cdot 60.$$

“Deben enviar, al menos, 100 paquetes” $\rightarrow x + y \geq 100$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30x + 60y \leq 85 \cdot 60 \\ 45x + 20y \leq 75 \cdot 60 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$x + 2y = 170$$

x	$y = \frac{170 - x}{2}$
0	85
80	45
170	0

$$9x + 4y = 900$$

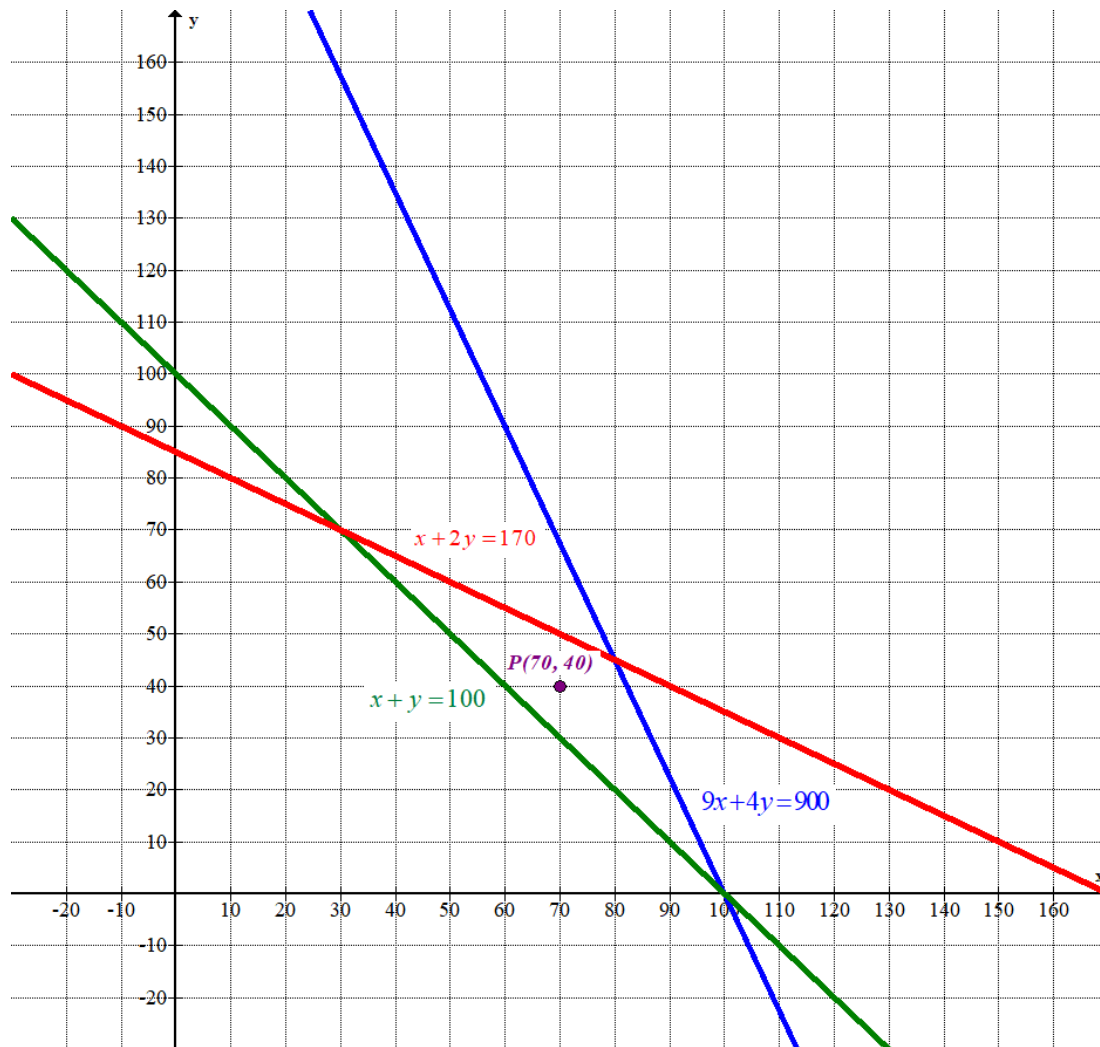
x	$y = \frac{900 - 9x}{4}$
0	225
80	45
100	0

$$x + y = 100$$

x	$y = 100 - x$
0	100
10	90
100	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



Como las restricciones son

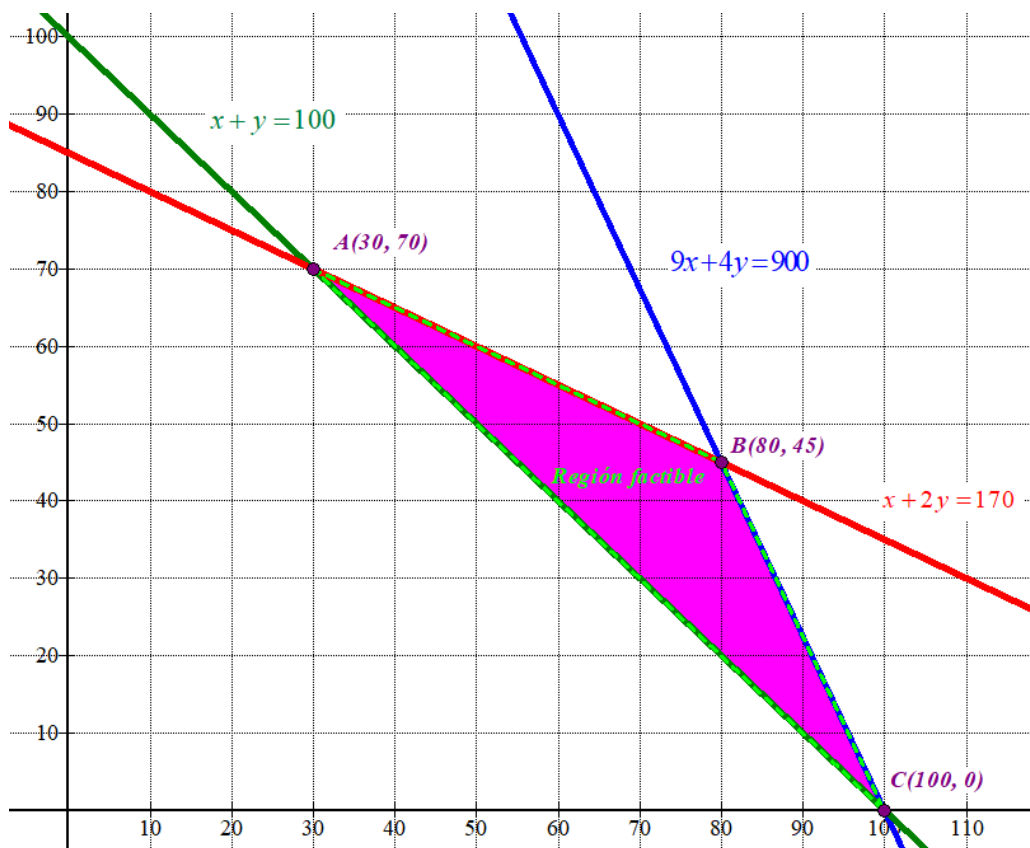
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta verde.

Comprobamos si el punto $P(70, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 70 + 2 \cdot 40 \leq 170 \\ 9 \cdot 70 + 4 \cdot 40 \leq 900 \\ 70 + 40 \geq 100 \\ 70 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 70 + 80 \leq 170 \\ 630 + 160 \leq 900 \\ 70 + 40 \geq 100 \\ 70 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



a.2) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 17y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(30, 70) \rightarrow B(30, 70) = 20 \cdot 30 + 17 \cdot 70 = 1790$$

$$B(80, 45) \rightarrow B(80, 45) = 20 \cdot 80 + 17 \cdot 45 = 2365 \text{ Máximo}$$

$$C(100, 0) \rightarrow B(100, 0) = 20 \cdot 100 + 17 \cdot 0 = 2000$$

El máximo se alcanza en el vértice $B(80, 45)$ con un valor de 2365.

Se deben elaborar 80 paquetes tipo A y 45 paquetes tipo B para obtener un beneficio máximo de 2365 €.

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %.

Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

b.1) Para que un candidato pase la selección debe pasar las 3 pruebas, como cada una es independiente de las demás la probabilidad de pasar las 3 pruebas es el producto de las probabilidades de pasar cada una de ellas.

Llamamos S a “pasar la selección” y A , B y C a “pasar la prueba A, B y C, respectivamente”.

$$P(S) = P(A)P(B)P(C) = 0.10 \cdot 0.40 \cdot 0.20 = \boxed{0.008}$$

8 de cada 1000 candidatos pasan la selección.

b.2) Llamamos F al suceso “fallar solo una prueba”. Si el candidato ha fallado una sola prueba entonces puede haber pasado una de los tres sucesos siguientes:

$$\bar{A} \cap B \cap C \text{ o } A \cap \bar{B} \cap C \text{ o } A \cap B \cap \bar{C}.$$

$$\text{Tenemos que } F = (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}).$$

$$P(F) = P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) =$$

$$= (1 - 0.1) \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.2) = \boxed{0.116}$$

b.3) Nos piden calcular $P((A \cap \bar{B} \cap C) / F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cap \bar{B} \cap C) / F) = \frac{P((A \cap \bar{B} \cap C) \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap C)}{P(F)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.2}{0.116} = \boxed{\frac{3}{29} \approx 0.1034}$$

b.4) Por los datos proporcionados sabemos que $V(1) = 150$, $V'(1) = 0$, $V''(1) < 0$.

$$V(t) = at^3 + bt^2 + t \Rightarrow V'(t) = 3at^2 + 2bt + 1 \Rightarrow V''(t) = 6at + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} V(1) = 150 \\ V'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 \\ 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 149 = a + b \\ -1 = 3a + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 149 - b = a \\ -1 = 3a + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = 3(149 - b) + 2b \Rightarrow -1 = 447 - 3b + 2b \Rightarrow \boxed{b = 448} \Rightarrow \boxed{a = 149 - 448 = -299}$$

Los valores buscados son $a = -299$ y $b = 448$.

Para estos valores también se cumple que $V''(1) < 0$. Lo comprobamos.

$$V''(t) = 6(-299)t + 2 \cdot 448 = -1794t + 896 \Rightarrow V''(1) = -1794 + 896 = -898 < 0$$

EvAU Extraordinaria 2024



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

- Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3 . El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

- Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

- ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)
- Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)
- Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un taller el 10% de las reparaciones se realizan a motos, el 70% a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20% de las reparaciones a motos, un 60% de las reparaciones a coches y un 85% de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

- a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

4. Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas². Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido 6.5, 8.4, 9.6, 7.4, 7.1, 6.8, 8.8, 8.3, 8.0, 7.1, 7.8 y 9.0 horas.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95.96%. (1 punto)
- b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96.52 %? (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
- b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 70% de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el 20% ve documentales y el 12% ve series y documentales.

- a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)
- b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

6. En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$

llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
- ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, $R(x)$ (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, x (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (5+t)x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ -(x+t)^2 + (14+t)x - 30 & \text{si } 5 < x \leq 11 \end{cases}$$

- ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x = 5$? (0.75 puntos)
- Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$. (0.75 puntos)

6. El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t) = 432t - t^3$ donde t es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde

($8 \leq t \leq 20$) y $P(t)$ indica el número de visitantes.

- ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)
- ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

SOLUCIONESSección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

- a) Llamamos “x” a los kilos de plancha de acero, “y” a los kilos de plancha de aluminio. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Horas de trabajo	Gasto de material	Beneficio
Nº kilos de acero (x)	4x	60x	45x
Nº kilos de aluminio (y)	7y	48y	30y
TOTALES	$4x + 7y$	$60x + 48y$	$45x + 30y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 45x + 30y$. Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

“La industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material” $\rightarrow 4x + 7y \leq 200$;
 $60x + 48y \leq 2088$.

“Está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio” $\rightarrow x \geq 15$; $y \geq 10$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 7y \leq 200 \\ 60x + 48y \leq 2088 \\ x \geq 15; y \geq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 7y \leq 200 \\ 5x + 4y \leq 174 \\ x \geq 15; y \geq 10 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$4x + 7y = 200$$

x	$y = \frac{200 - 4x}{7}$
0	$200 / 7$
15	20
50	0

$$5x + 4y = 174$$

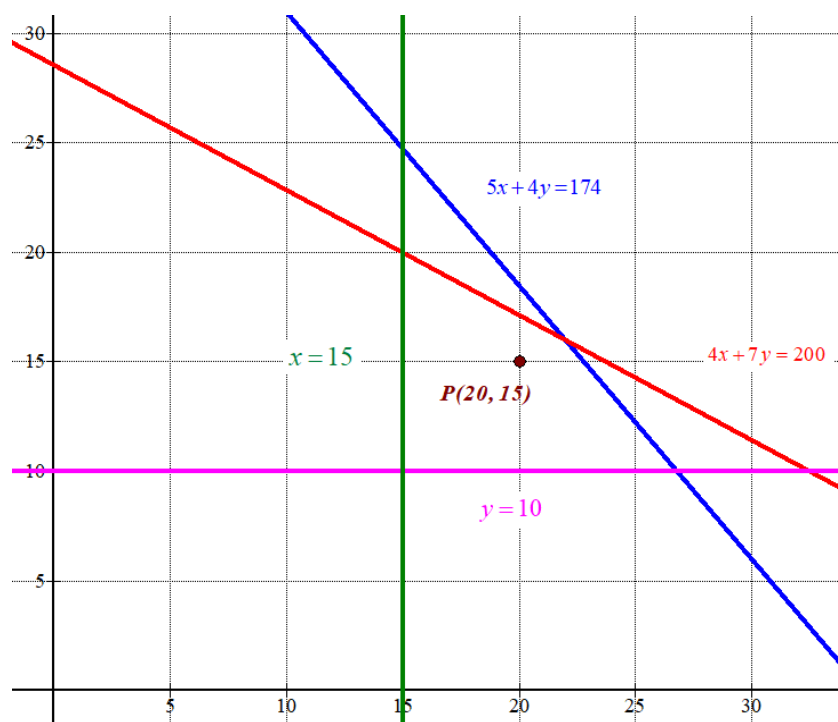
x	$y = \frac{174 - 5x}{4}$
0	$174 / 4$
30	6
34	1

$$x = 15$$

x = 15	y
15	10
15	20
15	50

$$y = 10$$

x	y = 10
0	10
15	10
50	10



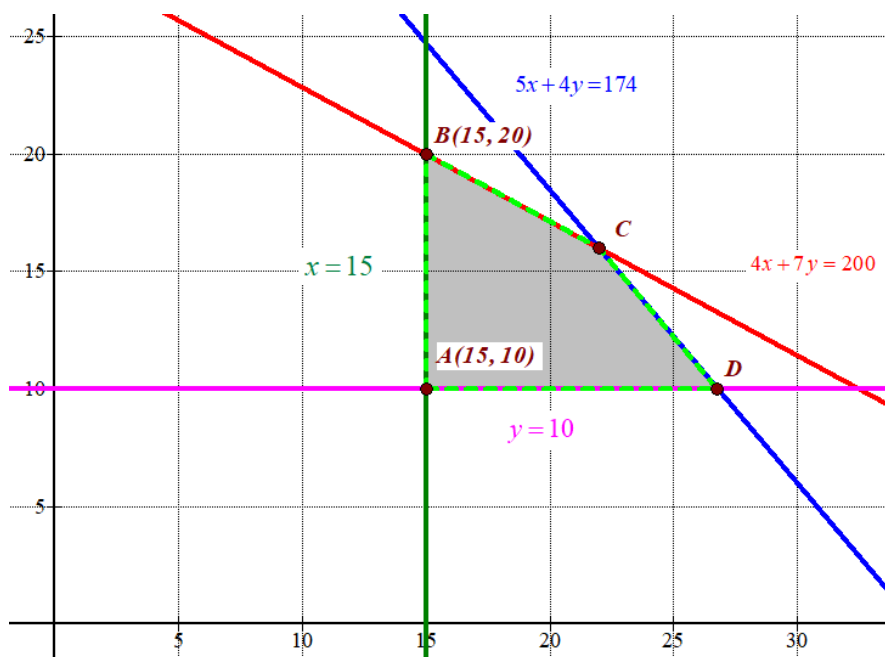
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 4x + 7y \leq 200 \\ 5x + 4y \leq 174 \\ x \geq 15; y \geq 10 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del plano situada por

debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos si el punto $P(20, 15)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 20 + 7 \cdot 15 \leq 200 \\ 5 \cdot 20 + 4 \cdot 15 \leq 174 \\ 20 \geq 15; 15 \geq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 80 + 105 \leq 200 \\ 100 + 60 \leq 174 \\ 20 \geq 15; 15 \geq 10 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color gris del dibujo inferior.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 200 \\ 5x + 4y = 174 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20x - 35y = -1000 \\ 20x + 16y = 696 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\frac{-19y = -304}{-19} \Rightarrow y = \frac{304}{19} = 16 \Rightarrow 4x + 112 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 88 \Rightarrow x = \frac{88}{4} = 22 \Rightarrow C(22, 16)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ 5x + 4y = 174 \end{cases} \Rightarrow 5x + 40 = 174 \Rightarrow 5x = 134 \Rightarrow x = \frac{134}{5} = 26.8 \Rightarrow D(26.8, 10)$$

b) Valoramos la función beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(15, 10) \rightarrow B(15, 10) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 10 = 975$$

$$B(15, 20) \rightarrow B(15, 20) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 20 = 1275$$

$$C(22, 16) \rightarrow B(22, 16) = 45 \cdot 22 + 30 \cdot 16 = 1470$$

$$D(26.8, 10) \rightarrow B(26.8, 10) = 45 \cdot 26.8 + 30 \cdot 10 = 1506 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo se alcanza en el vértice D(26.8, 10) con un valor de 1506.

Se deben fabricar 26.8 kilos de plancha de acero y 10 kilos de plancha de aluminio para obtener un beneficio máximo de 1508 €.

2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3 . El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al agua embalsada en el embalse de Torre de Abraham, “y” al agua embalsada en el embalse de Gasset y “z” al agua embalsada en el Azután.

“La cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3 ” $\rightarrow x + y + z = 156$

“El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset” $\rightarrow z = 2(x - y)$

“El embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután” $\rightarrow y = \frac{z}{3}$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 156 \\ z = 2(x - y) \\ y = \frac{z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 156 \\ z = 2x - 2y \\ 3y = z \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 156 \\ z = 2x - 2y \\ 3y = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3y = 156 \\ 3y = 2x - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 156 \\ 5y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 156 - 4y \\ 5y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 5y = 2(156 - 4y) \Rightarrow 5y = 312 - 8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y = 312 \Rightarrow \boxed{y = \frac{312}{13} = 24} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 156 - 4 \cdot 24 = 60 \\ z = 3 \cdot 24 = 72 \end{array}}$$

En el embalse de Torre de Abraham hay 60 hm^3 , en el de Gasset hay 24 hm^3 y en el de Azután hay 72 hm^3 .

Bloque 2

1. El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)
 b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)
 c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

- a) Para que sea continua en $x = c$ deben coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x = c$.

$$\left. \begin{aligned} P(c) &= 18c^2 - 100c + 162 \\ \lim_{x \rightarrow c^-} P(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} 18x^2 - 100x + 162 = 18c^2 - 100c + 162 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} P(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \\ P(c) &= \lim_{x \rightarrow c^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} P(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{18c^2} - 100c + \cancel{162} = -c^3 + \cancel{18c^2} - 96c + \cancel{162} \Rightarrow c^3 - 4c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(c^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c^2 - 4 = 0 \rightarrow c^2 = 4 \rightarrow c = \sqrt{4} = 2 \in [0, 10] \end{cases}$$

La función es continua para $c = 0$ y para $c = 2$.

- b) Para $c = 2$ la función queda $P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } 2 < x < 10 \end{cases}$.

La función a partir del segundo día tiene la expresión $P(x) = -x^3 + 18x^2 - 96x + 162$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{aligned} P'(x) &= -3x^2 + 36x - 96 \\ P'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 36x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(32)}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{12+4}{2} = 8 = x \\ \frac{12-4}{2} = 4 = x \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para averiguar si son máximo o mínimo.

$$P''(x) = -6x + 36 \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = -24 + 36 = 12 > 0 \rightarrow x = 4 \text{ es mínimo} \\ P''(8) = -48 + 36 = -12 < 0 \rightarrow x = 8 \text{ es máximo} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $(2,10)$ y en estos dos puntos críticos.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} P(x) = -2^3 + 18 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 + 162 = 34$$

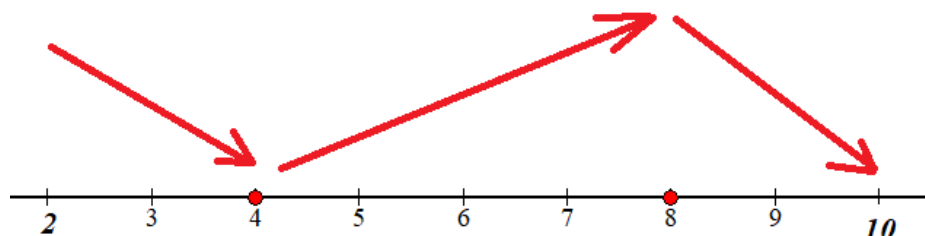
$$P(4) = -4^3 + 18 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 162 = 2$$

$$P(8) = -8^3 + 18 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 + 162 = 34$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} P(x) = -10^3 + 18 \cdot 10^2 - 96 \cdot 10 + 162 = 2$$

El precio mínimo se tiene al cuarto día y el máximo al octavo día.

- c) Para $c = 2$ a partir del segundo día la función es continua y tiene un mínimo en $x = 4$ y un máximo en $x = 8$. La función sigue el esquema siguiente.



El precio decrece del segundo día al cuarto, crece del cuarto al octavo y decrece del octavo al décimo.

2. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$. (1.5 puntos)

Si la función pasa por el punto $(0, 3)$ entonces $f(0) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ f(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

La función queda $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3$.

Si la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$ se cumple que

$f(1) = 8$ y que la pendiente de la recta tangente (2) es el valor de la derivada en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f'(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 2 \Rightarrow \boxed{3a + 2b = 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + 3 \\ f(1) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 3 \Rightarrow \boxed{a + b = 5}$$

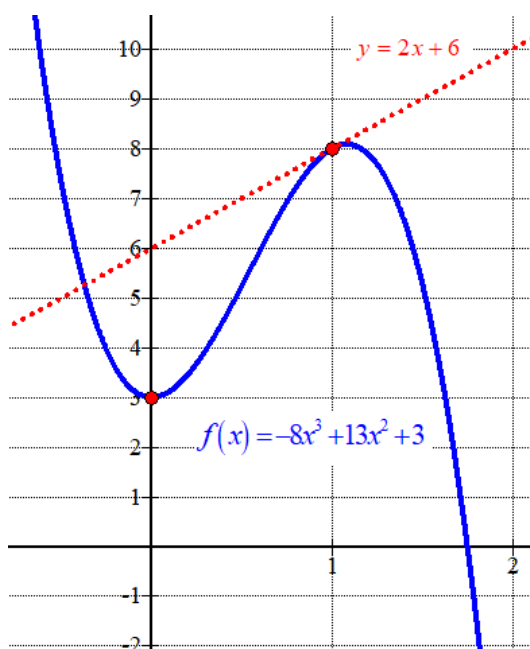
Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 2b = 2 \\ a + b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a + 2b = 2 \\ b = 5 - a \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 2(5 - a) = 2 \Rightarrow 3a + 10 - 2a = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -8} \Rightarrow \boxed{b = 5 - (-8) = 13}$$

Los valores buscados son $a = -8$, $b = 13$ y $c = 3$.

Lo comprobamos dibujando la gráfica de la función $f(x) = -8x^3 + 13x^2 + 3$.

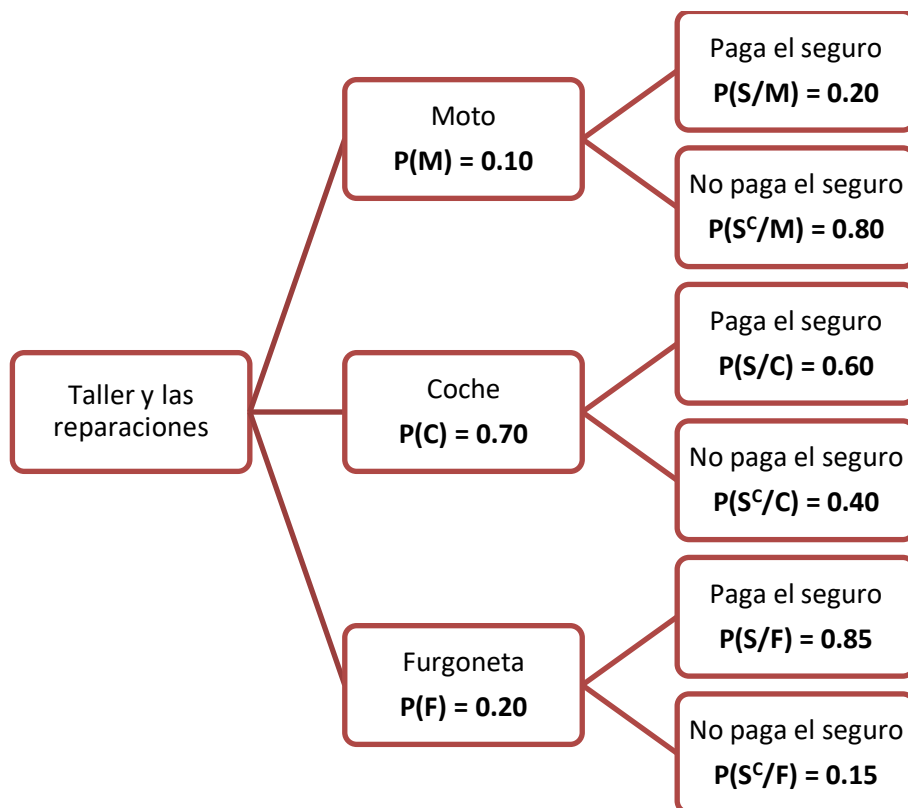


Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un taller el 10% de las reparaciones se realizan a motos, el 70% a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20% de las reparaciones a motos, un 60% de las reparaciones a coches y un 85% de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

- a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(S^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(S^c) &= P(M)P(S^c/M) + P(C)P(S^c/C) + P(F)P(S^c/F) = \\
 &= 0.1 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.15 = \boxed{0.39}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la reparación de un vehículo elegido al azar no la pague el seguro es de 0.39.

- b) Nos piden calcular $P(M/S)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M)P(S/M)}{1 - P(S^c)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{1 - 0.39} = \boxed{\frac{2}{61} \approx 0.0328}$$

La probabilidad de que una reparación que paga el seguro sea de una moto es de 2/61.

4. Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas². Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido 6.5, 8.4, 9.6, 7.4, 7.1, 6.8, 8.8, 8.3, 8.0, 7.1, 7.8 y 9.0 horas.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95.96%. (1 punto)
- b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96.52 %? (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = Las horas de sueño de la población adolescente española.

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{4} = 2$ horas. $X = N(\mu, 2)$

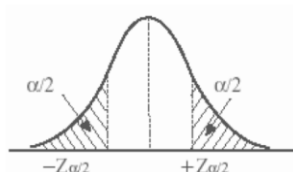
El tamaño de la muestra es $n = 12$ adolescentes.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{6.5+8.4+9.6+7.4+7.1+6.8+8.8+8.3+8.0+7.1+7.8+9.0}{12} = 7.9$

horas.

- a) Con un nivel de confianza del 95.96% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9596 \rightarrow \alpha = 0.0404 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0202 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9798 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.05$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842

Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}} \approx 1.1836 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (7.9 - 1.1836, 7.9 + 1.1836) = (6.7164, 9.0836)$$

- b) Con un nivel de confianza del 96.52% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9652 \rightarrow \alpha = 0.0348 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0174 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9826 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.11$$

z	0.00	0.01	0.02
2.0	0.9772	0.9778	0.9783
2.1	0.9821	0.9826	0.9830

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.5275$$

El error máximo que se cometería es de 0.5275 horas.

Bloque 2

3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de bebés inscritos con el nombre de Alba, “y” al número de bebés con nombre Pablo y “z” al número de bebés inscritos con el nombre David.

“72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David” $\rightarrow x + y + z = 72$

“El número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba” $\rightarrow z = y - x$

“Se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo” $\rightarrow x = z + \frac{y}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 72 \\ z = y - x \\ x = z + \frac{y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 72 \\ x + z = y \\ 3x = 3z + y \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 72 \\ x + z = y \\ 3x = 3z + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + x + z + z = 72 \\ 3x = 3z + x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 72 \\ 2x = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 36 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z + z = 36 \Rightarrow 3z = 36 \Rightarrow \boxed{z = \frac{36}{3} = 12} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 12 = 24} \Rightarrow \boxed{y = 12 + 24 = 36}$$

Se han inscrito 24 bebés con el nombre de Alba, 36 con el nombre de Pablo y 12 con el nombre de David.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

a) Calculamos la expresión de ambos miembros de la igualdad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-1 & -8 & 4 \\ 4 & -2-1 & 2 \\ -8 & 8 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Como se observa en lo obtenido tenemos que $A^2 = 2A - I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

b) Expresamos A^4 como $A^2 \cdot A^2$.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4A^2 - 4A + I = 4 \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36-20+1 & -32+16 & 16-8 \\ 16-8 & -12+4+1 & 8-4 \\ -32+16 & 32-16 & -12+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 70% de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el 20% ve documentales y el 12% ve series y documentales.
- a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)
- b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

Llamamos S a “ver series” y D a “ver documentales”.

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Ve series (S)	No ve series (S^c)	
Ve documentales (D)	12		20
No ve documentales (D^c)			
TOTALES	70		100

Completamos la tabla.

	Ve series (S)	No ve series (S^c)	
Ve documentales (D)	12	8	20
No ve documentales (D^c)	58	22	80
TOTALES	70	30	100

- a) Nos piden calcular $P(\bar{S} \cap \bar{D})$. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\bar{S} \cap \bar{D}) = \frac{22}{100} = \boxed{0.22}$$

El 22 % de los usuarios de una plataforma de streaming ni ve series ni documentales.

- b) Si suponemos 100 usuarios tenemos que 70 ven series y de estos hay 12 que ven documentales. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(D/S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{12}{70} = \boxed{\frac{6}{35} \approx 0.1714}$$

La probabilidad de que un usuario elegido al azar vea documentales, sabiendo que ve series tiene un valor aproximado de 0.1714.

6. En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$ llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
- ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

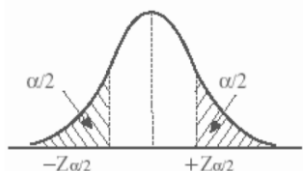
X = el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones.

Desviación típica = $\sigma = 280$ llamadas. $X = N(\mu, 280)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$ días. La media muestral es $\bar{x} = 486$ llamadas.

- Con un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}} = 54.88 \text{ llamadas}$$

El intervalo de confianza para el número de llamadas diarias es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (486 - 54.88, 486 + 54.88) = (431.12, 540.88)$$

- Si mantenemos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ es el mismo. La desviación típica también es la misma.

El error lo obtenemos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ por lo que si aumenta n disminuye el Error y esto implica que disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

- Con un nivel de confianza del 99 % hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} > 2$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 2 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}} = 56.$$

El error es mayor de 56 llamadas.

El intervalo de confianza tendrá más amplitud que

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (486 - 56, 486 + 56) = (430, 542)$$

La media de 500 llamadas pertenece a este intervalo de confianza y al que corresponde al nivel de confianza del 99% que será más amplio.

Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del 99 %.

Bloque 2

5. En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, $R(x)$ (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, x (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (5+t)x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ -(x+t)^2 + (14+t)x - 30 & \text{si } 5 < x \leq 11 \end{cases}$$

- a) ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x = 5$? (0.75 puntos)
 b) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$. (0.75 puntos)

- a) Para que la función $R(x)$ sea continua en $x = 5$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = 5$.

$$\left. \begin{aligned} R(5) &= (5+t)5 - 1 = 25 + 5t - 1 = 24 + 5t \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} (5+t)x - 1 = 24 + 5t \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} -(x+t)^2 + (14+t)x - 30 = \\ &= -(5+t)^2 + (14+t)5 - 30 = -25 - t^2 - 10t + 70 + 5t - 30 = \\ &= -t^2 - 5t + 15 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} R(x) = R(5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 - 5t + 15 = 24 + 5t \Rightarrow -t^2 - 10t - 9 = 0 \Rightarrow t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-10+8}{2} = \boxed{-1=t} \\ \frac{-10-8}{2} = \boxed{-9=t} \end{cases}$$

Para $t = -1$ y $t = -9$ la función $R(x)$ es continua en $x = 5$.

- b) Para el valor $t = 0$ la función no es continua en $x = 5$.

La función queda:

$$R(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 5x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ -x^2 + 14x - 30 & \text{si } 5 < x \leq 11 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de recta creciente (entre 0 y 2), otro trozo de recta creciente (entre 2 y 5) y un trozo de parábola cóncava (entre 5 y 11). Hallamos el vértice de la parábola.

$$5 < x \leq 11 \rightarrow \left. \begin{aligned} R'(x) &= -2x + 14 \\ A'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2x + 14 = 0 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7 \in (5, 11]$$

$$0 \leq x \leq 2$$

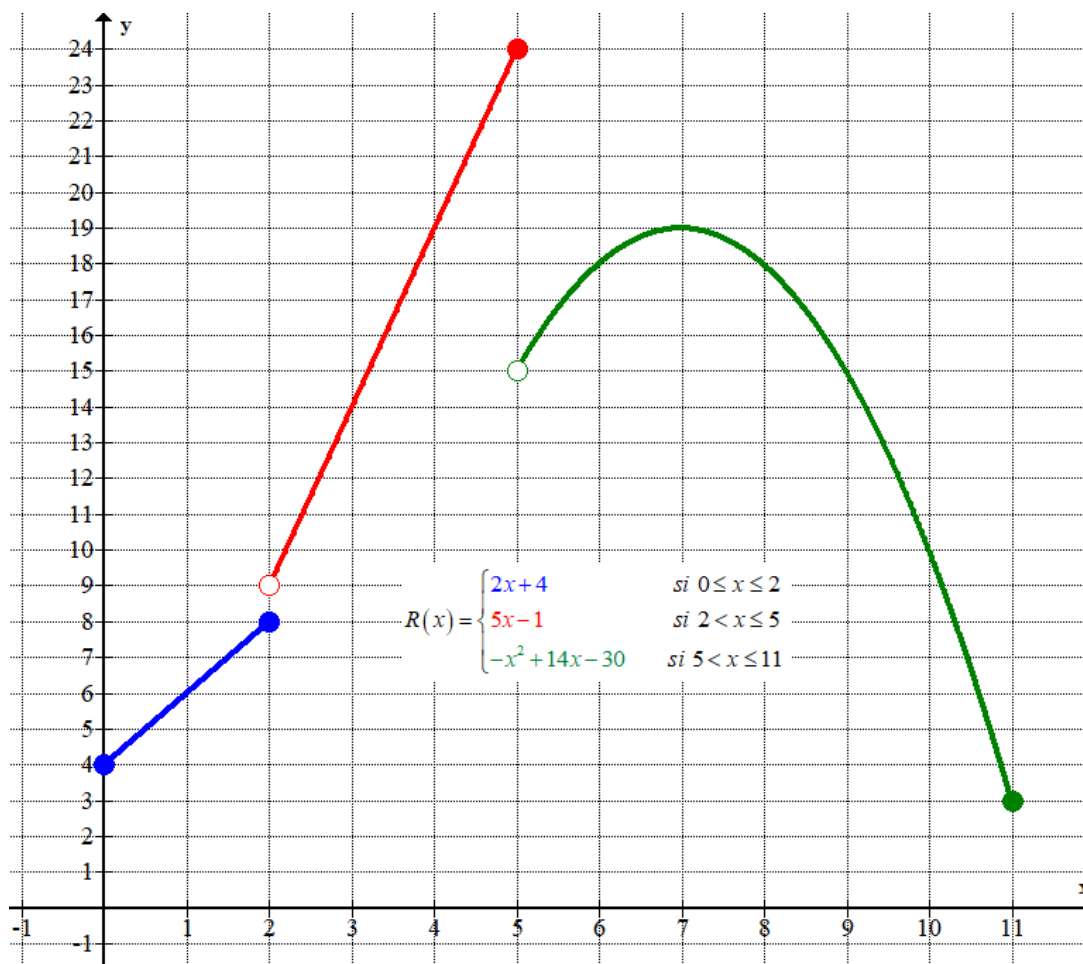
x	$y = 2x + 4$
0	4
1	6
2	8

$$2 < x \leq 5$$

x	$y = 2x + 4$
2	8 No incluido
4	12
5	14

$$5 < x \leq 11$$

x	$y = -x^2 + 14x - 30$
5	15 No incluido
7	19
9	15
11	3



6. El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t) = 432t - t^3$ donde t es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde

($8 \leq t \leq 20$) y $P(t)$ indica el número de visitantes.

- a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)
 b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= 432t - t^3 \Rightarrow P'(t) = 432 - 3t^2 \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 432 - 3t^2 = 0 \Rightarrow 144 - t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 144 \Rightarrow t = \sqrt{144} = 12$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en $t = 12$.

$$P'(t) = 432 - 3t^2 \Rightarrow P''(t) = -6t \Rightarrow P''(12) = -6 \cdot 12 = -72 < 0 \rightarrow t = 12 \text{ es máximo}$$

Se alcanza la máxima afluencia de turistas a las 12 horas.

Como $P(12) = 432 \cdot 12 - 12^3 = 3456$ el número máximo de turistas es de 3456.

- b) La función es continua y sólo tiene un máximo relativo en $t = 12$. La función crece entre las 8 y las 12 horas y decrece entre las 12 y las 20 horas.

EvAU Ordinaria 2024



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m² de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m² de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m² de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad.

- Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

- Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene

definida por la función
$$R(x) = \begin{cases} -(x + (t-3))^2 + (t+27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$; es una función continua en $x = 3$? (0.5 puntos)
- Para $t = -2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)
- Para $t = -2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30% de los analistas y el 50% de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

- a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)
 b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94.64%. (1 punto)
 b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.12%, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

- a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$ (0.75 puntos)
 b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$? (1.25 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72% aprueban Inglés y el 78% aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)
 b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justifica la respuesta. (0.75 puntos)

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años². Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95.44 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura, $A(x)$; que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (x en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

- Halla los valores de t para que la función de la altura de las olas sea continua en $x = 2$. (0.75 puntos)
- Representa gráficamente la función de la altura de las olas, $A(x)$; para el valor $t = -1$. (0.75 puntos)

6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 ($t = 0$); hasta su desaparición en 2018 ($t = 53$) viene dada por la expresión $S(t) = -0.5 \cdot (2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60)$ donde t se expresa en años.

- ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)
- ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

SOLUCIONESSección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m² de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m² de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m² de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de carpetas folio, “y” al número de carpetas cuartilla.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	m ² de cartón	Cinta de goma	Beneficio
Nº carpetas folio (x)	0.20x	0.30x	2.10x
Nº carpetas cuartilla (y)	0.15y	0.27y	1.5y
TOTALES	0.2x + 0.15y	0.3x + 0.27y	2.1x + 1.5y

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 2.1x + 1.5y$. Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

“Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m² de cartón y de 432 m de cinta de goma” $\rightarrow 0.2x + 0.15y \leq 270$; $0.3x + 0.27y \leq 432$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.2x + 0.15y \leq 270 \\ 0.3x + 0.27y \leq 432 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y \leq 27000 \\ 30x + 27y \leq 43200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 5400 \\ 10x + 9y \leq 14400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$4x + 3y = 5400$$

$$x \quad y = \frac{5400 - 4x}{3}$$

0	1800
900	600
1350	0

$$10x + 9y = 14400$$

$$x \quad y = \frac{14400 - 10x}{9}$$

0	1600
900	600
1440	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

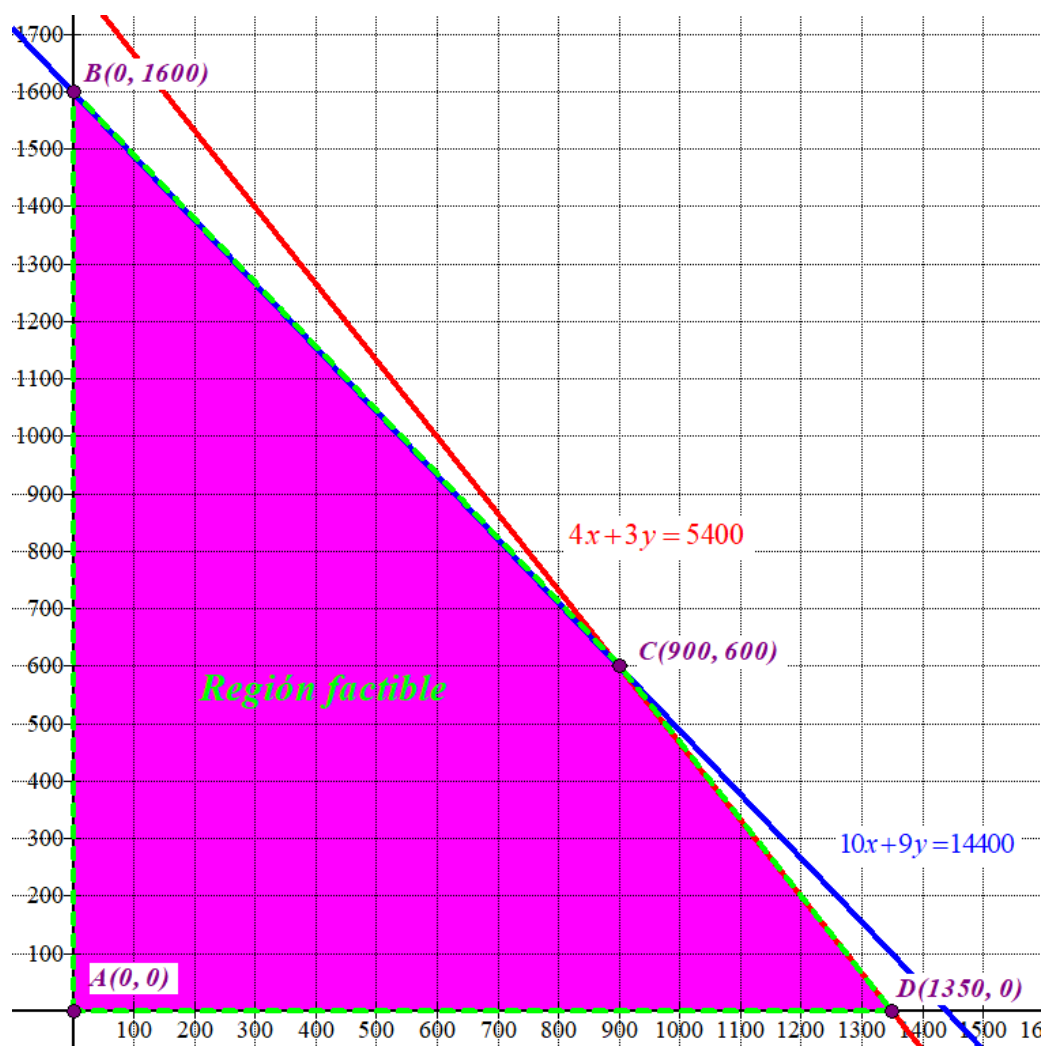


$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 5400 \\ 10x + 9y \leq 14400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$
 situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos si el punto $P(100, 100)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 400 + 300 \leq 5400 \\ 1000 + 900 \leq 14400 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos la función beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 1600) \rightarrow B(0, 1600) = 2.1 \cdot 0 + 1.5 \cdot 1600 = 2400$$

$$C(900, 600) \rightarrow B(900, 600) = 2.1 \cdot 900 + 1.5 \cdot 600 = 2790$$

$$D(1350, 0) \rightarrow B(1350, 0) = 2.1 \cdot 1350 + 1.5 \cdot 0 = 2835 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo se alcanza en el vértice $D(1350, 0)$ con un valor de 2835.

Se deben fabricar 1350 carpetas tamaño folio y 0 carpetas tamaño cuartilla para obtener un beneficio máximo de 2835 €.

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos “x” al número de medallas de oro, “y” al número de medallas de plata y “z” al número de medallas de bronce.

“En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas” $\rightarrow x + y + z = 36$

“El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro” $\rightarrow z = 3x$

“Si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata” $\rightarrow z + 2 = 2(y - 2)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z + 2 = 2(y - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z + 2 = 2y - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z = 2y - 6 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z = 2y - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3x = 36 \\ 3x = 2y - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y = 36 \\ 3x = 2y - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 36 - 4x \\ 3x = 2y - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 2(36 - 4x) - 6 \Rightarrow 3x = 72 - 8x - 6 \Rightarrow 11x = 66 \Rightarrow x = \frac{66}{11} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 36 - 4 \cdot 6 = 12 \\ z = 3 \cdot 6 = 18 \end{array} \right.$$

Se repartieron 6 medallas de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

Bloque 2

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene

$$\text{definida por la función } R(x) = \begin{cases} -(x+(t-3))^2 + (t+27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$; es una función continua en $x = 3$? (0.5 puntos)
 b) Para $t = -2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)
 c) Para $t = -2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

a) Para que sea continua en $x = 3$ deben coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} R(3) &= -(3+(t-3))^2 + (t+27) = -t^2 + t + 27 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} -(x+(t-3))^2 + (t+27) = -t^2 + t + 27 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 = -\frac{1}{3}3^3 - t \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 3 = 3 - 9t \\ R(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} R(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} R(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + t + 27 = 3 - 9t \Rightarrow t^2 - 10t - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-24)}}{2} = \frac{10 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{10+14}{2} = \boxed{12=t} \\ \frac{10-14}{2} = \boxed{-2=t} \end{cases}$$

La función es continua para $t = 12$ y para $t = -2$.

b) Para $t = -2$ la función queda $R(x) = \begin{cases} -(x-5)^2 + 25 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

La función a partir del tercer año tiene la expresión $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{aligned} R'(x) &= -x^2 + 4x + 5 \\ R'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(5)}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-4 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-4+6}{-2} = -1 \notin (3, +\infty) \\ \frac{-4-6}{-2} = \boxed{5 = x} \end{cases}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$R''(x) = -2x + 4 \Rightarrow R''(5) = -10 + 4 = -6 < 0 \rightarrow x = 5 \text{ es máximo}$$

La rentabilidad es máxima en el año 5.

- c) Para $t = -2$ la función tiene un máximo en $x = 5$. La función crece en $(3, 5)$ y decrece en $(5, +\infty)$.

La rentabilidad del fondo crece del año 3 al 5 y decrece a partir del año 5.

2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ encuentra el valor de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$. (1.5 puntos)

Si la función tiene un extremo relativo en $(-1, 0)$ significa dos cosas: $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{1 - a + b - c = 0}$$

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-1)^3 + 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \Rightarrow \boxed{-4 + 3a - 2b + c = 0}$$

Si la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$, entonces la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es 1 $\Rightarrow f'(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a + b - c = 0 \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ \boxed{c = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - a + b - 1 = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -a + b = 0 \rightarrow b = a \\ 3a - 2b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a - 2a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = 3$, $b = 3$ y $c = 1$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30% de los analistas y el 50% de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

- a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)
 b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

En la empresa hay $6 + 4 = 10$ analistas y $6 + 6 = 12$ desarrolladores.

El 30 % de los analistas usan MacBooks, por lo que son $0.30 \cdot 10 = 3$ analistas los que usan MacBooks. El 50 % de los desarrolladores usan MacBooks, por lo que $0.5 \cdot 12 = 6$ desarrolladores usan MacBooks. Ponemos los datos en una tabla.

	Usan MacBooks (M)	No usan MacBooks ($\overline{M}$)	
Analista	3	7	10
Desarrollador	6	6	12
TOTALES	9	13	22

- a) Hay 22 trabajadores, de los cuales 13 no usan MacBooks. Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\overline{M}) = \frac{13}{22} \approx 0.591$$

La probabilidad de que el trabajador elegido al azar no use MacBook es de 13/22.

- b) Hay 9 trabajadores que usan MacBooks y de ellos hay 6 que son desarrolladores. Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(D/M) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

La probabilidad de que el trabajador usuario de MacBooks sea desarrollador es 2/3.

4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94.64%. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.12%, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

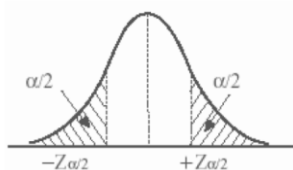
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = el tiempo de ejecución de los chips en milisegundos. Desviación típica = $\sigma = 42$ milisegundos
 $X \sim N(\mu, 42)$.

El tamaño de la muestra es $n = 144$ chips. La media muestral es $\bar{x} = 142$ milisegundos.

a) Con un nivel de confianza del 94.64% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9464 \rightarrow \alpha = 0.0536 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0268 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.93$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738

Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}} = 6.755 \text{ milisegundos}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (142 - 6.755, 142 + 6.755) = (135.245, 148.755)$$

b) Con un nivel de confianza del 94.12% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9412 \rightarrow \alpha = 0.0588 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0294 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9706 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.89$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Sustituimos 8 milisegundos en la fórmula del error y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 8 = 1.89 \cdot \frac{42}{\sqrt{n}} \Rightarrow 8\sqrt{n} = 1.89 \cdot 42 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.89 \cdot 42}{8} \Rightarrow n = \left(\frac{1.89 \cdot 42}{8} \right)^2 \approx 98.46$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido $\rightarrow 99$ chips.

Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de votos para Inés, “y” al número de votos para Nerea y “z” al número de votos nulos.

“Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto” $\rightarrow 4y - 3x = z + 1$

“Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$)” $\rightarrow x = 1 \cdot y + 7$

“El 5% del total de votos emitidos es nulo” $\rightarrow z = 0.05(x + y + z)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ z = 0.05(x + y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ 100z = 5(x + y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ 20z = x + y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ -x - y + 19z = 0 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ -x - y + 19z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 3(y + 7) = z + 1 \\ -y - 7 - y + 19z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 3y - 21 = z + 1 \\ -2y + 19z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = z + 22 \\ -2y + 19z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(z + 22) + 19z = 7 \Rightarrow -2z - 44 + 19z = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17z = 51 \Rightarrow \boxed{z = \frac{51}{17} = 3} \Rightarrow \boxed{y = 3 + 22 = 25} \Rightarrow \boxed{x = 25 + 7 = 32}$$

Inés recibió 32 votos, Nerea recibió 25 y 3 votos fueron nulos.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$ (0.75 puntos)

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$? (1.25 puntos)

a) Comprobamos que son posibles las operaciones indicadas.

$$\begin{array}{cc} A \cdot B & C + A \cdot B \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2 & 2 \times 2 + 2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{array}$$

Es posible. Calculamos la expresión de la matriz 2×2 resultado de las operaciones indicadas.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-3 & 0+4+3 \\ -2+2-1 & 0+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos las inversas.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C + A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow (C + A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((C + A \cdot B)^T)}{|C + A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si se cumple la igualdad $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = (C + A \cdot B)^{-1}$.

$$\left. \begin{array}{l} C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 \\ -6/7 & 1 \end{pmatrix} \\ (C + A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \neq (C + A \cdot B)^{-1}$$

No se cumple la igualdad.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72% aprueban Inglés y el 78% aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)
 b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justifica la respuesta. (0.75 puntos)

Llamamos M a “Aprobar matemáticas” e I a “aprobar inglés”.

Tenemos que $P(M) = 0.64$, $P(I) = 0.72$ y $P(M \cup I) = 0.78$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(M) = 0.64 \\ P(I) = 0.72 \\ P(M \cup I) = 0.78 \\ P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.78 = 0.64 + 0.72 - P(M \cap I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M \cap I) = 0.64 + 0.72 - 0.78 = 0.58$$

- a) Nos piden calcular $P(\overline{M} \cup \overline{I})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{M} \cup \overline{I}) = P(\overline{M \cap I}) = 1 - P(M \cap I) = 1 - 0.58 = \boxed{0.42}$$

- b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(M \cap I) = P(M)P(I)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(M \cap I) = 0.58 \\ P(M)P(I) = 0.64 \cdot 0.72 = 0.4608 \end{array} \right\} \Rightarrow P(M \cap I) = 0.58 \neq 0.4608 = P(M)P(I)$$

Los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés no son independientes.

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años². Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
- b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95.44 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

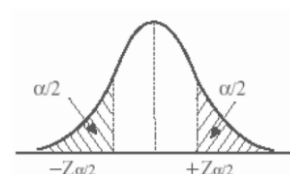
X = La edad de los usuarios de un juego online. Desviación típica = $\sigma = \sqrt{4} = 2$ años. $X = N(\mu, 2)$.
Tamaño de la muestra = $n = 10$ usuarios.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{16+19+21+15+14+18+20+15+14+18}{10} = 17$ años.

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 1.3724 \text{ años}$$

El intervalo de confianza para la edad de los usuarios de un juego online es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17 - 1.3724, 17 + 1.3724) = (15.6276, 18.3724)$$

- b) Si mantenemos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ es el mismo. La desviación típica también es la misma. Si deseamos que la amplitud del intervalo de confianza sea menor el error debe ser menor. Como el error lo obtenemos con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ lo hacemos menor si aumentamos el tamaño de la muestra (n).

- c) Con un nivel de confianza del 95.44 % hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.9544 \rightarrow \alpha = 0.0456 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0228 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9772 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = \frac{4}{9} \approx 0.4444.$$

z	0.00	0.01
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826

El error máximo es de 0.4444 años.

Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura, $A(x)$; que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (x en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

a) Halla los valores de t para que la función de la altura de las olas sea continua en $x = 2$.

(0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función de la altura de las olas, $A(x)$; para el valor $t = -1$.

(0.75 puntos)

a) Para que la función $A(x)$ sea continua en $x = 2$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -(2x+t)^2 + (11+t) = -(4+t)^2 + (11+t) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 8x + 19 + t = t + 7 \\ f(2) &= 2^2 - 8 \cdot 2 + 19 + t = t + 7 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(4+t)^2 + 11+t = t+7 \Rightarrow -t^2 - 8t - 16 + 11 + t = t + 7 \Rightarrow -t^2 - 8t - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-8+4}{2} = \boxed{-2=t} \\ \frac{-8-4}{2} = \boxed{-6=t} \end{cases}$$

Para $t = -2$ y $t = -6$ la función $A(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Para el valor $t = -1$ la función no es continua en $x = 2$.

La función queda:

$$A(x) = \begin{cases} -(2x-1)^2 + 10 = -4x^2 + 4x - 1 + 10 = -4x^2 + 4x + 9 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 - 1 = x^2 - 8x + 18 & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de parábola cóncava (antes de 2) y otro trozo de parábola convexa (a partir de 2).

Hallamos los vértices de cada parábola.

$$0 \leq x < 2 \rightarrow \begin{cases} A'(x) = -8x + 4 \\ A'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow -8x + 4 = 0 \Rightarrow 8x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}}$$

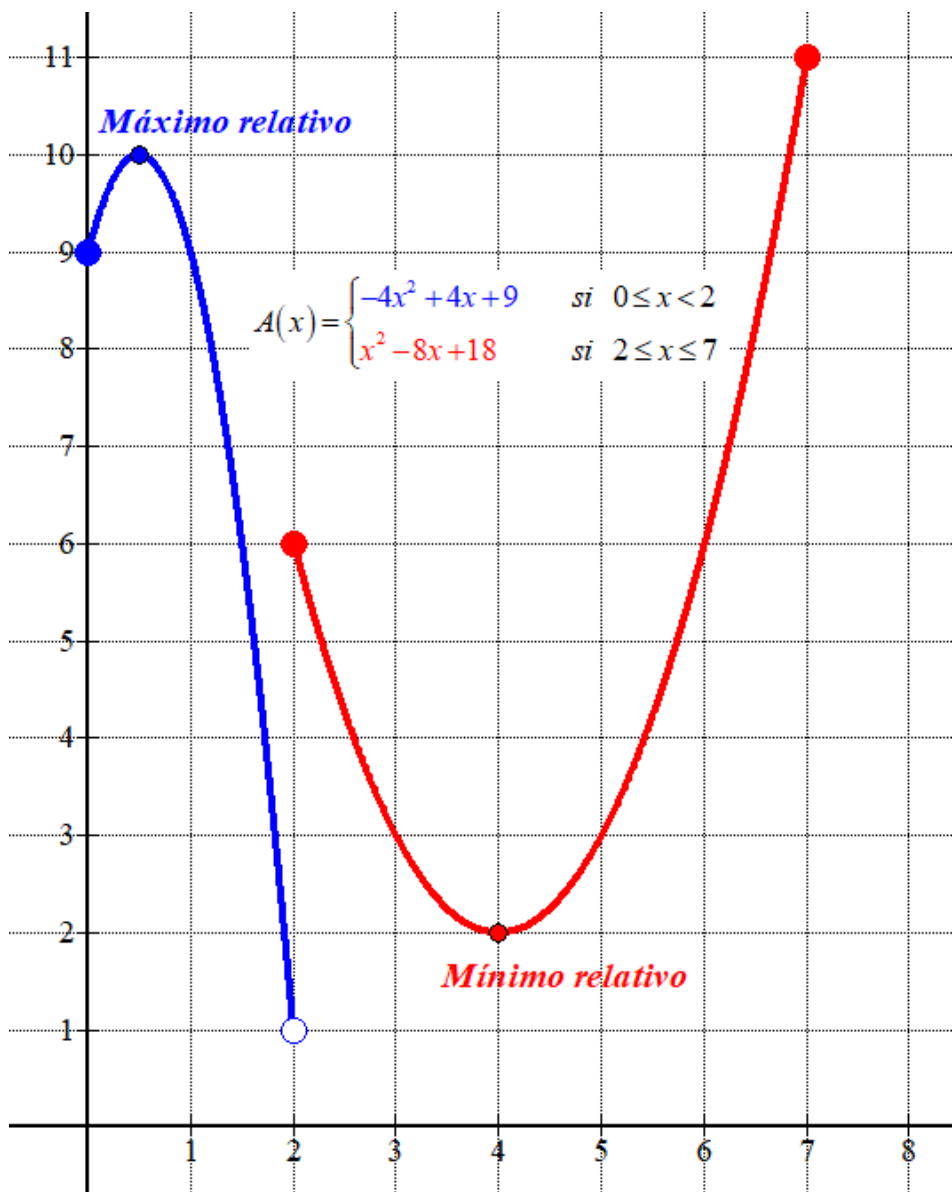
$$2 \leq x \leq 7 \rightarrow \begin{cases} A'(x) = 2x - 8 \\ A'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$0 \leq x < 2$$

x	$y = -4x^2 + 4x + 9$
0	9
0.5	10 Máximo
1	9

$$2 \leq x \leq 7$$

x	$y = x^2 - 8x + 18$
2	6
3	3
4	2 Mínimo
5	3
6	6
7	11



6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 ($t = 0$); hasta su desaparición en 2018 ($t = 53$) viene dada por la expresión $S(t) = -0.5 \cdot (2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60)$ donde t se expresa en años.

- a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)
 b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios?
 ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

a) El año 1982 = 1965 + 17. Nos piden hallar $S(17)$.

$$S(17) = -0.5 \cdot (2 \cdot 17^3 - 34 \cdot 17^2 - 3968 \cdot 17 - 60) = 33758$$

En el año 1982 el club de fútbol tenía 33758 socios.

b) Derivamos e igualamos a cero.

$$S(t) = -0.5 \cdot (2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60) \Rightarrow S'(t) = -0.5(6t^2 - 68t - 3968)$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -0.5(6t^2 - 68t - 3968) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 68t - 3968 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 34t - 1984 = 0 \Rightarrow t = \frac{34 \pm \sqrt{(-34)^2 - 4(3)(-1984)}}{2(3)} = \frac{34 \pm 158}{6} = \begin{cases} \frac{34+158}{6} = \boxed{32=t} \\ \frac{34-158}{6} = \frac{-62}{3} < 0 \end{cases}$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en $t = 32$.

$$S'(t) = -0.5(6t^2 - 68t - 3968) \Rightarrow S''(t) = -0.5(12t - 68) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(32) = -0.5(12 \cdot 32 - 68) = \frac{-536}{3} < 0 \rightarrow t = 32 \text{ es máximo}$$

Se alcanza el máximo número de socios en el año 32, es decir en 1965 + 32 = 1997.

Como $S(32) = -0.5 \cdot (2 \cdot 32^3 - 34 \cdot 32^2 - 3968 \cdot 32 - 60) = 48158$ el número máximo de socios es de 48158 socios.

La función crece de 0 a 32 y decrece a partir de 32, por lo que el número mínimo de socios está situado en uno de los extremos del intervalo de definición de la función. Valoramos la función en $t = 0$ y en $t = 53$.

$$S(0) = -0.5 \cdot (2 \cdot 0^3 - 34 \cdot 0^2 - 3968 \cdot 0 - 60) = 30$$

$$S(53) = -0.5 \cdot (2 \cdot 53^3 - 34 \cdot 53^2 - 3968 \cdot 53 - 60) = 4058$$

El número mínimo de socios lo tuvo el club el año de su fundación 1965, siendo 30 los socios en ese año.

EvAU Extraordinaria 2023



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

- Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
- Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

- Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30% de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60% le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

- Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
- Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
 - Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64%, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quintuplo del número de botellas vino tinto.
- Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)
 - Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)
4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)
- b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)
- c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.
- Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)
 - Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)
6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros². Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
 - Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
 - ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c para la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
 b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm^3 , de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0 \leq x \leq 6$.

- a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
 b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

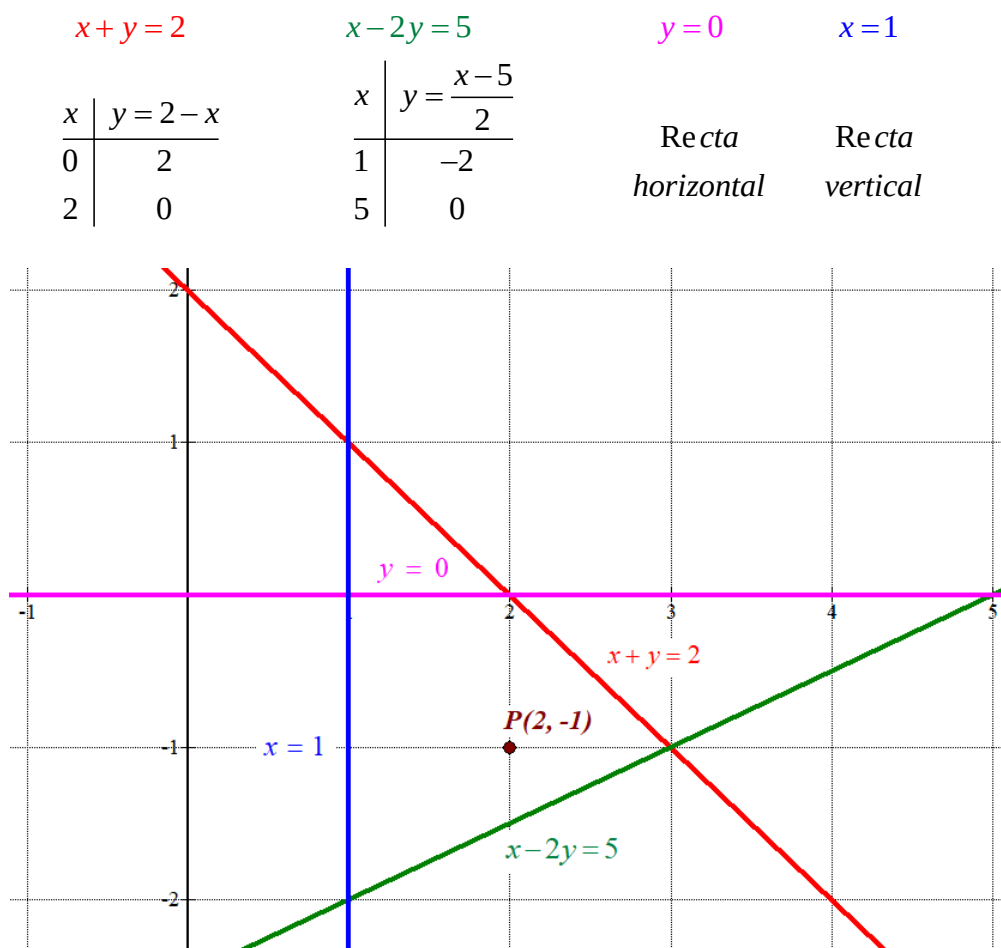
1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

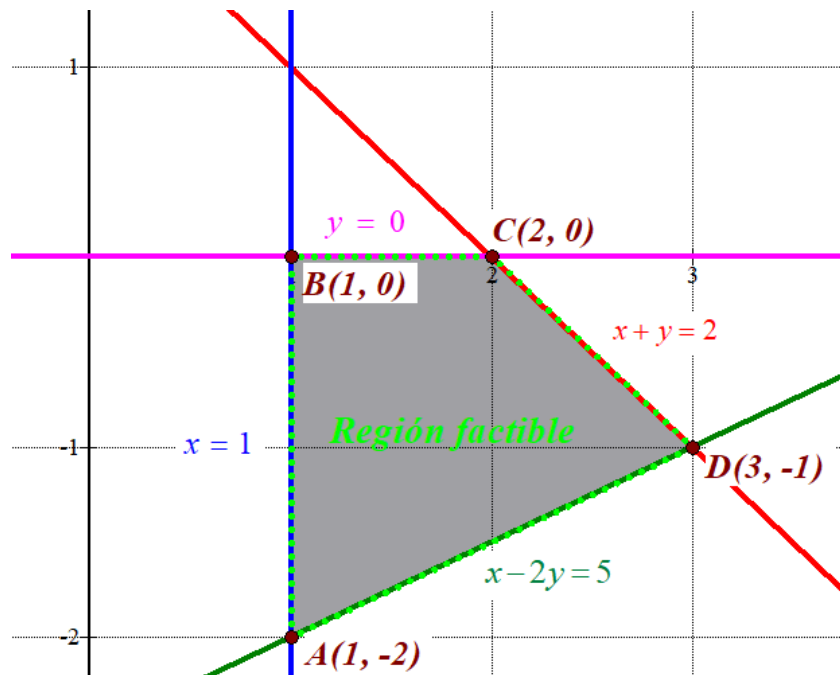


Como las restricciones son $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \leq 2y + 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$ la región factible es la zona del plano situada por debajo de las rectas roja y rosa, por encima de la recta verde y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto $P(2, -1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 2-1 \leq 2 \\ 2-2(-1) \leq 5 \\ -1 \leq 0 \\ 2 \geq 1 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color gris del dibujo inferior.



b) Valoramos la función en cada vértice de la región factible.

$$A(1, -2) \rightarrow f(1, -2) = 4 - 10 - 3 = -9 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(1, 0) \rightarrow f(1, 0) = 4 + 0 - 3 = 1$$

$$C(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 8 + 0 - 3 = 5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(3, -1) \rightarrow f(3, -1) = 12 - 5 - 3 = 4$$

El máximo se alcanza en el vértice $C(2, 0)$ con un valor de 5.

El mínimo se alcanza en el vértice $A(1, -2)$ con un valor de -9.

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos “x” al número de cuadros de arte urbano, “y” al número de cuadros de arte abstracto y “z” al número de cuadros de grafiti.

“El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28” $\rightarrow$

$$0.40(x + y) = 28$$

“El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti” $\rightarrow 2y = 3z$

“En total, en la galería disponen de 110 cuadros” $\rightarrow x + y + z = 110$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 0.40(x + y) = 28 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ 4x + 4y = 280 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ x + y = 70 \\ 2y = 3z \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ x + y = 70 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 110 \\ x = 70 - y \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 70 - y + y + z = 110 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 40 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow x = 70 - 60 = 10$$

Hay expuestos 10 cuadros de arte urbano, 60 cuadros de arte abstracto y 40 cuadros de grafiti.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)
- b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)
- c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

- a) Para que sea continua en $x = 0$ deben de coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} |x+1| + t = 1+t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 = -0^3 + 2 \cdot 0^2 + (t+2)0 + 3 = 3 \\ f(0) &= 1+t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1+t = 3 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

La función es continua en $x = 0$ para $t = 2$.

- b) Para $t = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} |x+1| + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 4x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

En el intervalo $(0, \infty)$ la función es $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 4x + 4 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-3)(4)}}{2(-3)} = \frac{-4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{-4+8}{-6} = \frac{-1}{3} \notin (0, \infty) \\ \frac{-4-8}{-6} = \boxed{2=x} \end{cases}$$

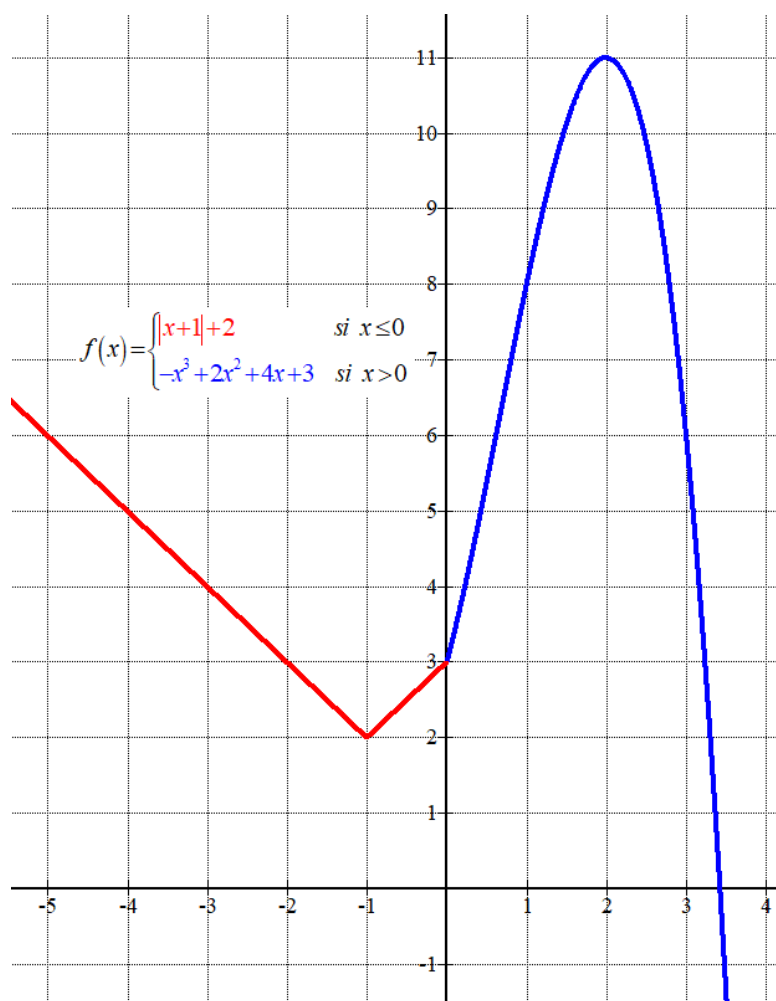
Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f''(x) = -6x + 4 \Rightarrow f''(2) = -12 + 4 = -8 < 0 \rightarrow x = 2 \text{ es máximo}$$

Como $f(2) = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3 = 11$ la función tiene un máximo relativo en el punto de coordenadas $(2, 11)$.

- c) Para $t = 2$ en el intervalo $(0, \infty)$ la función es $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3$.

Como esta función es continua y presenta un máximo relativo en $x = 2$ la función crece en el intervalo $(0, 2)$ y decrece en el intervalo $(2, \infty)$.



2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$. (1.5 puntos)

Si la función tiene un máximo en $(6, 16)$ significa dos cosas: $f(6) = 16$ y que $f'(6) = 0$.

$$f(6) = 16 \Rightarrow a \cdot 6^2 + b \cdot 6 - 20 = 16 \Rightarrow 36a + 6b = 36 \Rightarrow \boxed{6a + b = 6}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx - 20 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(6) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -12a}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 6a + b = 6 \\ b = -12a \end{array} \right\} \Rightarrow 6a - 12a = 6 \Rightarrow -6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 12$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30% de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60% le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

- a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

Llamamos A = “Le gusta las anchoas en la pizza” y B = “Le gusta la piña en la pizza”.

Si a un 60% de los que le gusta la piña (30%) le gustan las anchoas $\rightarrow 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$, al 18 % le gusta la piña y las anchoas en la pizza.

Si de los que no les gusta la piña (70%), el 75% afirman que no les gustan las anchoas en la pizza $\rightarrow 0.7 \cdot 0.75 = 0.525$, al 52.5% no le gustan las anchoas ni la piña en la pizza.

Construimos una tabla de contingencia para ordenar todos los datos proporcionados.

	Le gusta la anchoa (A)	No le gusta la anchoa	
Le gusta la piña (B)	18		30
No le gusta la piña		52.5	
			100

Completamos la tabla.

	Le gusta la anchoa (A)	No le gusta la anchoa	
Le gusta la piña (B)	18	12	30
No le gusta la piña	17.5	52.5	70
	35.5	64.5	100

Con los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas.

- a) Nos piden $P(A)$.

$$P(A) = \frac{35.5}{100} = \boxed{0.355}$$

- b) Nos piden $P(B/\bar{A})$.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{12}{64.5} = \boxed{\frac{8}{43} \approx 0.186}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos A = “Le gusta las anchoas en la pizza” y B = “Le gusta la piña en la pizza.”

Sabemos que $P(B) = 0.30$, $P(A/B) = 0.6$ y $P(\bar{A}/\bar{B}) = 0.75$

- a) Nos piden $P(A)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.3} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$$

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(B)} \Rightarrow 0.75 = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - 0.3} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.75 \cdot 0.7 = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Leyes de Morgan}\} \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.525 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.525 = 0.475$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.475 = P(A) + 0.3 - 0.18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) = 0.475 - 0.3 + 0.18 = 0.355}$$

b) Nos piden $P(B/\bar{A})$.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.3 - 0.18}{1 - 0.355} = \boxed{\frac{8}{43} \approx 0.186}$$

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
 - Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64%, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

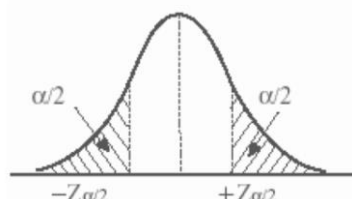
X = el contenido calórico de unos dulces. Desviación típica = $\sigma = 51$ calorías. $X = N(\mu, 51)$

Media muestral = $\bar{x} = 223$ calorías. Tamaño de la muestra = $n = 36$

- a) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



Calculamos el error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}} = 16.66 \text{ calorías}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (223 - 16.66, 223 + 16.66) = (206.34, 239.66)$$

- b) Con un nivel de confianza del 94.64 %

$$1 - \alpha = 0,9464 \rightarrow \alpha = 0,0536 \rightarrow \alpha/2 = 0,0268 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.93$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Usamos la fórmula del error de la estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 1.93 \cdot \frac{51}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10\sqrt{n} = 1.93 \cdot 51 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.93 \cdot 51}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{1.93 \cdot 51}{10} \right)^2 \approx 96.88$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido $\rightarrow 97$ bizcochos.

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quintuplo del número de botellas vino tinto.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de botellas de vino blanco, “y” al número de botellas de vino rosado y “z” al número de botellas de vino tinto.

“Ha recibido un pedido de 50 botellas” $\rightarrow x + y + z = 50$

“El doble de botellas de vino blanco excede en una unidad al de botellas de vino rosado” $\rightarrow 2x = y + 1$

“El doble de botellas de vino blanco coincide con el quintuplo del número de botellas vino tinto” $\rightarrow 2x = 5z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = 5z \\ 2x = y + 1 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = 5z \\ 2x = y + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = 5z \\ 2x - 1 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2x - 1 + z = 50 \\ 2x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + z = 51 \\ 2x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 51 - 3x \\ 2x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 5(51 - 3x) \Rightarrow 2x = 255 - 15x \Rightarrow 17x = 255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{255}{17} = 15} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 2 \cdot 15 - 1 = 29} \\ \boxed{z = 51 - 3 \cdot 15 = 6} \end{array} \right.$$

El pedido lleva 15 botellas de vino blanco, 29 de vino rosado y 6 de vino tinto.

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)
- b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)
- c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

- a) Hay que demostrar que $M \cdot N = N \cdot M$.

$$\left. \begin{aligned} M \cdot N &= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 & 36-36 \\ -2+2 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ N \cdot M &= \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 & -18+18 \\ 4-4 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M \cdot N = N \cdot M$$

Las matrices M y N conmutan.

- b) Comprobamos si la matriz $M \cdot P$ es invertible. Para ello vemos si su determinante es no nulo.

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-27 & -12+9 \\ 6-6 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M \cdot P| = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

La matriz $M \cdot P$ es invertible. Hallamos su inversa.

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M \cdot P)^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(M \cdot P)^{-1} = \frac{\text{Adj}(M \cdot P)^T}{|M \cdot P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$M \cdot P \cdot X = N^T - M \Rightarrow X = (M \cdot P)^{-1} (N^T - M)$$

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$N^T - M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = (M \cdot P)^{-1} (N^T - M) = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 & 8/3-6 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}}$$

c) Hallamos la matriz B que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula.

$$B + (N + I)^2 = 0 \Rightarrow B = -(N + I)^2$$

$$N + I = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(N + I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & -9-27 \\ -1-3 & 9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = -\begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

Llamamos R al suceso “El paquete llega con retraso”, D al suceso “el paquete llega defectuoso”. Sabemos que $P(R) = 0.09$, $P(D) = 0.14$, $P(D \cup R) = 0.19$.

a) Nos piden $P(D \cap R)$.

$$P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(D \cap R) \Rightarrow 0.19 = 0.14 + 0.09 - P(D \cap R) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap R) = 0.14 + 0.09 - 0.19 = \boxed{0.04}$$

b) Nos piden calcular $P(D / R)$.

$$P(D / R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0.04}{0.09} = \boxed{\frac{4}{9} \approx 0.444}$$

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros². Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
 - Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
 - ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

X = La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina. Desviación típica = $\sigma = \sqrt{81} = 9$ metros. $X = N(\mu, 9)$

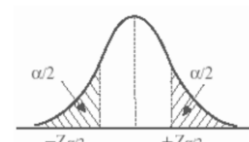
$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{16+21+15+17+16+19+14+14+19}{9} = \frac{151}{9} \approx 16.778 \text{ metros.}$$

Tamaño de la muestra = $n = 9$

- a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}} = 6.51 \text{ metros}$$

El intervalo de confianza para la distancia media de los lanzamientos es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (16.778 - 6.51, 16.778 + 6.51) = (10.268, 23.288)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza es el error de la estimación que viene dado por la

$$\text{fórmula: } \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Para aumentar la amplitud del intervalo (el error) manteniendo el nivel de confianza ($z_{\alpha/2}$) y el valor de la desviación típica (σ), la única opción es disminuir el tamaño de muestra (n).

- c) Con un nivel de confianza del 95.96 %

$$1 - \alpha = 0,9596 \rightarrow \alpha = 0,0404 \rightarrow \alpha/2 = 0,0202 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9798 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.05$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = \frac{369}{140} \approx 2.636 \text{ metros.}$$

El error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 % es de 2.636 metros.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c para la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
 b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

- a) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = c$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = c$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} (x+2)^2 = (c+2)^2 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} 6x+3 = 6c+3 \\ f(c) &= (c+2)^2 \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6c+3 = (c+2)^2 \Rightarrow 6c+3 = c^2+4+4c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1=c}$$

La función $f(x)$ es continua en $x = c$ cuando $c = 1$.

- b) Para $c = 0$ la función no es continua.

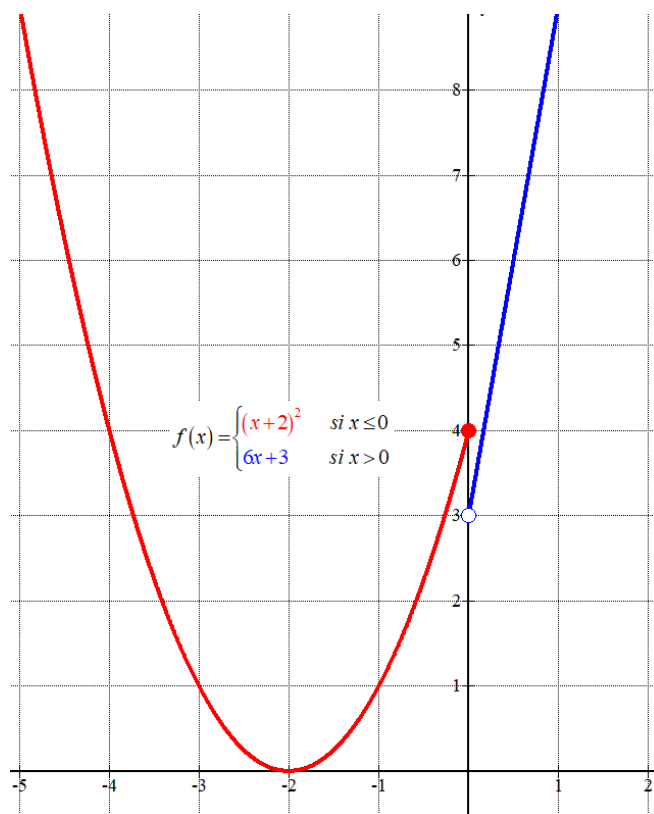
La función queda $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 6x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La gráfica de la función es un trozo de parábola convexa (antes de 0) y un trozo de recta (a partir de 0). Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 2(x+2) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Hacemos una tabla de valores.

$x \leq 0$		$x > 0$	
x	$y = (x+2)^2$	x	$y = 6x+3$
-4	4	0	3 No incluido
-3	1	1	9
-2	0 Mínimo	2	15
-1	1		
0	4		



6. El consumo de agua, en dm^3 , de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo $x =$ el tiempo medido en horas y $0 \leq x \leq 6$.

- a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
 b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x \Rightarrow C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C'(x) = 0 \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = \boxed{5=x} \\ \frac{8-2}{2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos como es su signo y decidimos si es máximo o mínimo.

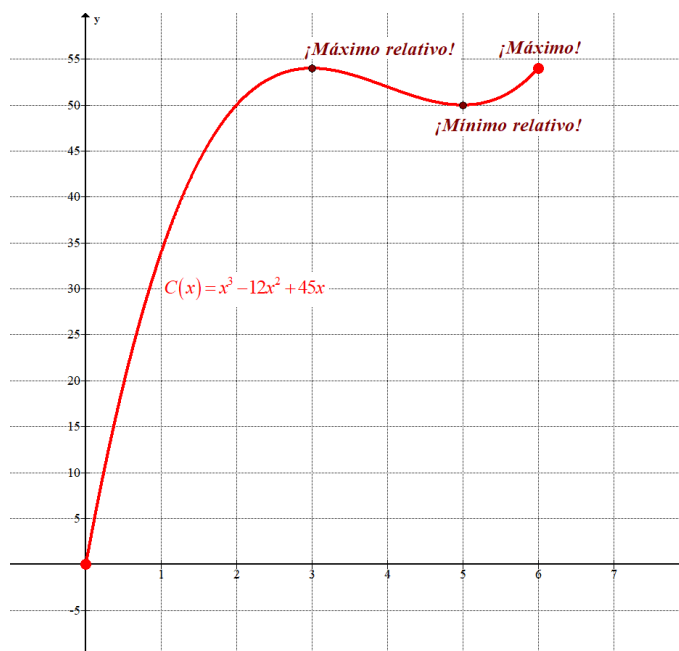
$$C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \Rightarrow C''(x) = 6x - 24 \Rightarrow \begin{cases} C''(3) = 18 - 24 = -6 < 0 \rightarrow x = 3 \text{ es máximo} \\ C''(5) = 30 - 24 = 6 > 0 \rightarrow x = 5 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

Valoramos la función consumo en los extremos del intervalo y en los puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 45 \cdot 0 = 0 \text{ dm}^3 \\ C(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 = 54 \text{ dm}^3 \\ C(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 = 50 \text{ dm}^3 \\ C(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 45 \cdot 6 = 54 \text{ dm}^3 \end{array} \right\}$$

El máximo consumo en el intervalo $[0, 6]$ es de 54 dm^3 y se produce en dos momentos: a las 3 y a las 6 horas.

- b) La función es continua. En $x = 3$ hay un máximo relativo de la función y en $x = 5$ un mínimo relativo, por lo que la función crece en $(0, 3)$, decrece en $(3, 5)$ y crece en $(5, 6)$.
 El consumo disminuye entre la tercera y la quinta hora.



EvAU Ordinaria 2023



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)
c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12 . Calcula razonadamente los valores de los parámetros a , b , y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50% de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30% de estos no publica habitualmente nada. El 35% prefiere Instagram, pero solo el 30% de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60% de estos no publica habitualmente.
a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

- b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)
4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros²,
- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados.
- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

- a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)
- b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)
- c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:
- a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)
- b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)
- c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)
6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,
- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
- b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

- c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t - 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)
- b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)
6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x =$ tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$
- a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
- b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

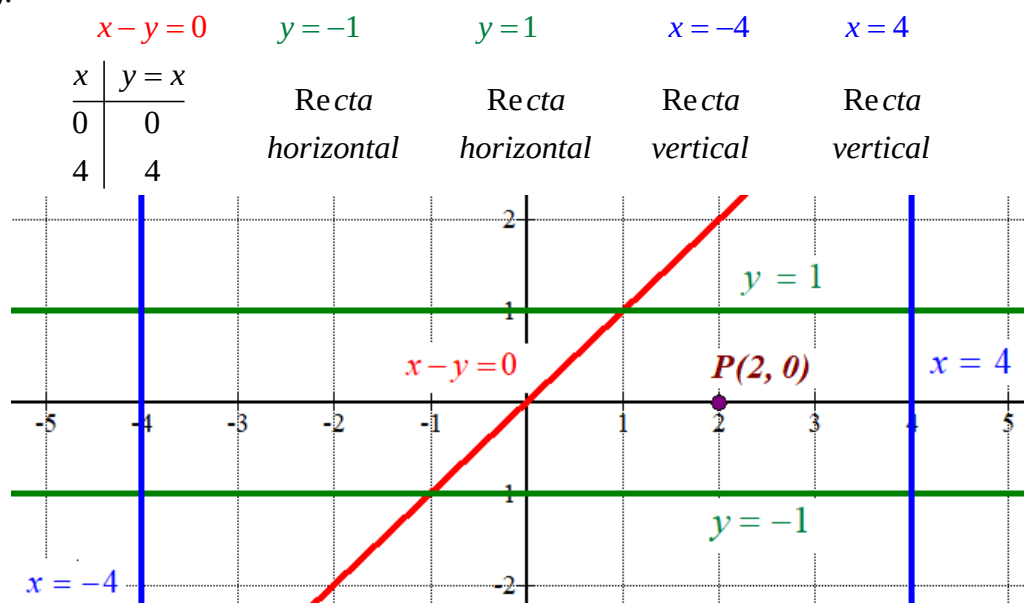
1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).



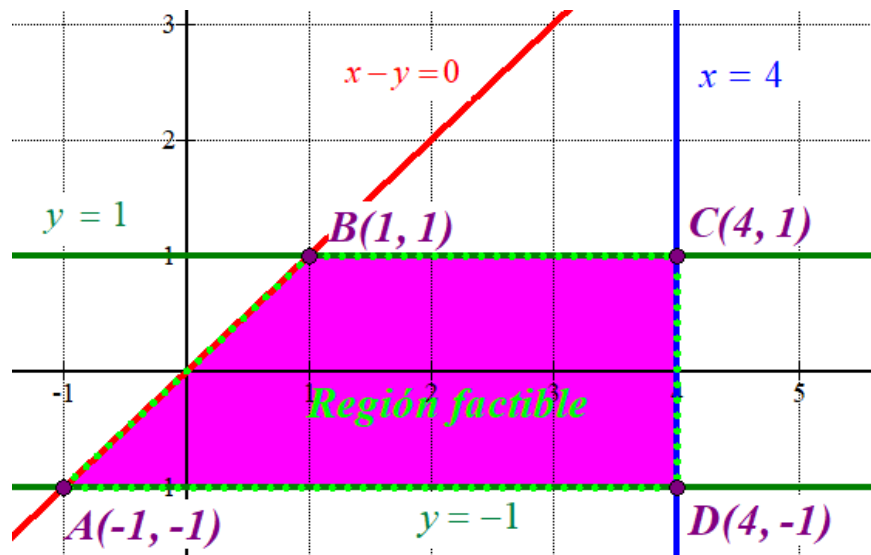
Como las restricciones son $\begin{cases} x \geq y \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ la región factible es la zona del plano situada entre las

rectas horizontales verdes, entre las rectas verticales azules y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto $P(2, 0)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 2 \geq 0 \\ -4 \leq 2 \leq 4 \\ -1 \leq 0 \leq 1 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos la función en cada vértice de la región factible.

$$A(-1, -1) \rightarrow f(-1, -1) = 1 + 5 + 10 = 16 \text{ ¡Máximo!}$$

$$B(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = -1 - 5 + 10 = 4$$

$$C(4, 1) \rightarrow f(4, 1) = -4 - 5 + 10 = 1 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(4, -1) \rightarrow f(4, -1) = -4 + 5 + 10 = 11$$

El máximo se alcanza en el vértice A(-1, -1) con un valor de 16.

El mínimo se alcanza en el vértice C(4, 1) con un valor de 1.

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de discos vendidos del tipo I, “y” al de discos tipo II y “z” al número de discos vendidos del tipo III.

“Las ventas totales ascienden a 70000 unidades” $\rightarrow x + y + z = 70000$

“Del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos” $\rightarrow z = x + y$

“La diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I” $\rightarrow z - y = 3(y - x)$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70000 \\ z = x + y \\ z - y = 3(y - x) \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70000 \\ z = x + y \\ z - y = 3(y - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + x + y = 70000 \\ x + y - y = 3(y - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 70000 \\ x = 3y - 3x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 35000 \\ 4x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 35000 - y \\ 4x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 4(35000 - y) = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140000 - 4y = 3y \Rightarrow 7y = 140000 \Rightarrow y = \frac{140000}{7} = 20000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 35000 - 20000 = 15000} \Rightarrow \boxed{z = 20000 + 15000 = 35000}$$

Se vendieron 15.000 discos del tipo I, 20.000 del tipo II y 35.000 del tipo III.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
 b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)
 c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

- a) Para que sea continua en $x = 1$ deben de coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \cdot 1^2 + t \cdot 1 - 1 = 1 + t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + t = 1 + t \\ f(1) &= 1 + t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 + t$$

La función es continua para cualquier valor de t .

- b) Para $t = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 4x + 2 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \in (-\infty, 1)$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f''(x) = 4x + 2 \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 4 > 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ es mínimo}$$

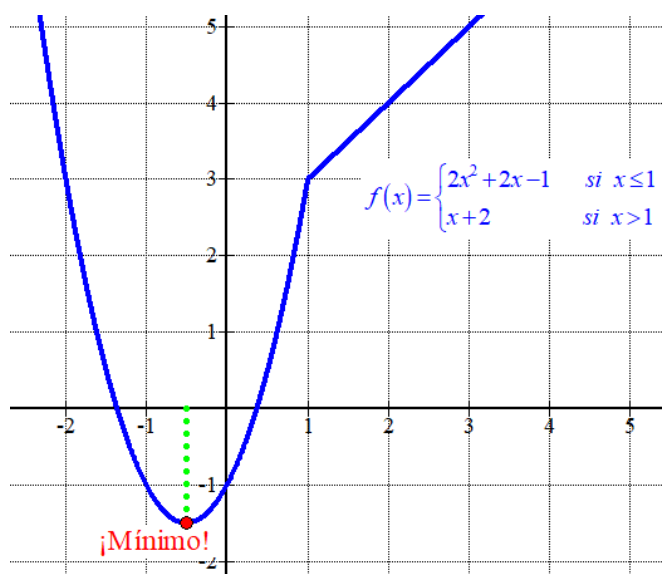
Como $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 - 1 = \frac{-3}{2}$ la función tiene un mínimo en el punto de coordenadas $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$.

- c) Para $t = 2$ la función en $(-\infty, 1)$ es $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$.

Hemos encontrado su mínimo en $x = \frac{-1}{2}$,

la gráfica de la función es una parábola, por lo que la función decrece en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ y

crece en $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$



2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12 . Calcula razonadamente los valores de los parámetros a , b , y c . (1.5 puntos)

Si la función tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ significa dos cosas: $f(2) = -5$ y que $f''(2) = 0$.

$$f(2) = -5 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -5 \Rightarrow \boxed{8a + 4b + c = -5}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6a}$$

Si la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es $-12 \rightarrow f'(2) = -12$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f'(2) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 = 12a + 4b \Rightarrow \boxed{-3 = 3a + b}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 8a + 4b + c = -5 \\ b = -6a \\ -3 = 3a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8a + 4(-6a) + c = -5 \rightarrow 8a - 24a + c = -5 \rightarrow -16a + c = -5 \\ -3 = 3a - 6a \rightarrow -3 = -3a \rightarrow \boxed{a = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b = -6 \cdot 1 = -6} \\ -16 + c = -5 \rightarrow \boxed{c = 11} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -6$ y $c = 11$.

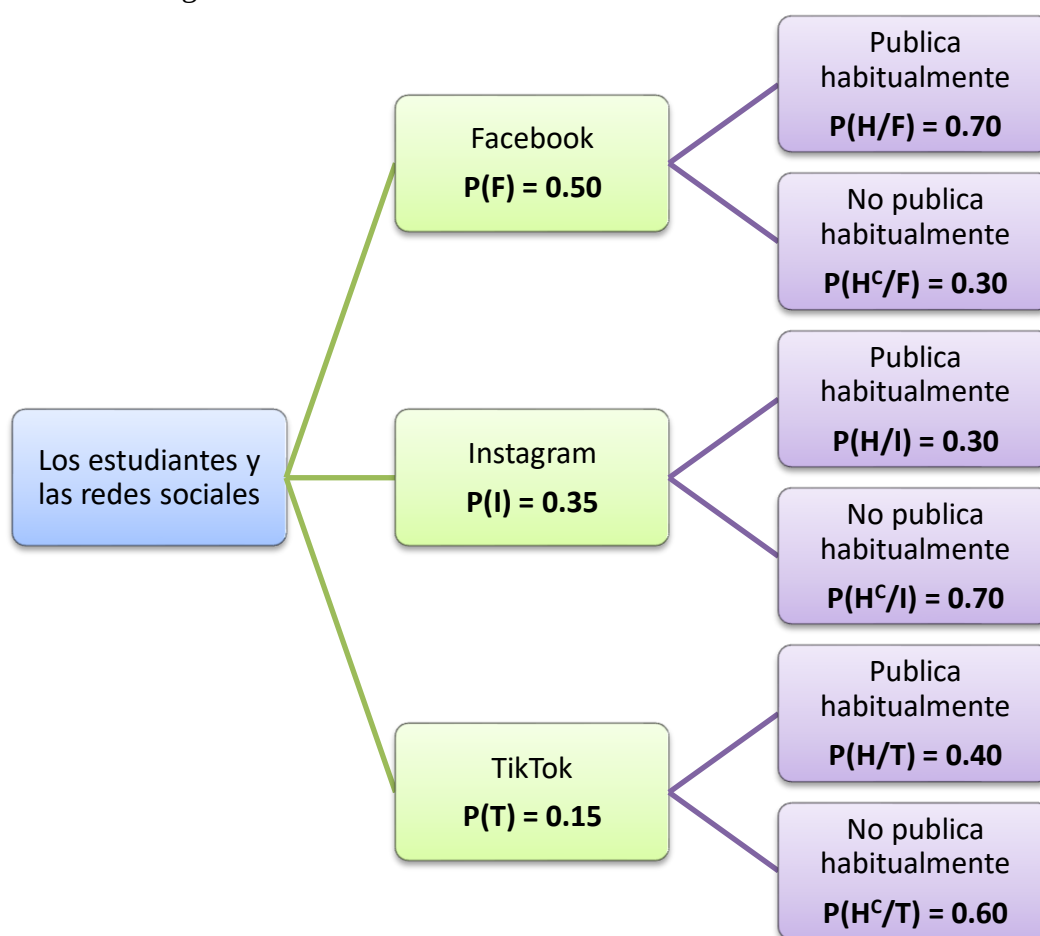
Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50% de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30% de estos no publica habitualmente nada. El 35% prefiere Instagram, pero solo el 30% de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60% de estos no publica habitualmente.

- a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

Llamamos F = “Ser usuario de Facebook”, I = “Ser usuario de Instagram”, T = “Ser usuario de TikTok” y H = “Publicar habitualmente”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(H^c) &= P(F)P(H^c/F) + P(I)P(H^c/I) + P(T)P(H^c/T) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.7 + 0.15 \cdot 0.6 = \boxed{0.485}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I/H) = \frac{P(I \cap H)}{P(H)} = \frac{P(I)P(H/I)}{1 - P(H^c)} = \frac{0.35 \cdot 0.3}{1 - 0.485} = \frac{21}{103} \approx 0.2039$$

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros²,

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
- Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = Dinero donado. Desviación típica = $\sigma = \sqrt{100} = 10$ euros. $X = N(\mu, 10)$

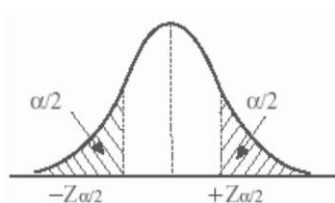
$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{60 + 40 + 55 + 35 + 20 + 25 + 50 + 45 + 30}{9} = 40 \text{ €}.$$

Tamaño de la muestra = $n = 9$

- Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error de la estimación.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}} = 7.233$$

El intervalo de confianza para la media de las donaciones es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (40 - 7.233, 40 + 7.233) = (32.767, 47.233)$$

- Tenemos que $\text{Media muestral} = \bar{x} = 40$ €, $z_{\alpha/2} = 2.17$ y $\text{Error} < 2$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 \approx 117.72$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero mayor que el obtenido $\rightarrow 118$ personas.

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos “x” al número de entradas para jubilados, “y” al número de entradas para adultos y “z” al número de entradas para niños.

“Un teatro ha vendido las 660 entradas” $\rightarrow x + y + z = 660$

“El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos” $\rightarrow x = \frac{y}{4}$

“Las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados” $\rightarrow z = 0.10(x + y)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 660 \\ x = \frac{y}{4} \\ z = 0.10(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ 10z = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ x + y - 10z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ x + y - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4x + z = 660 \\ x + 4x - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + z = 660 \\ 5x - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 660 - 5x \\ x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2(660 - 5x) = 0 \Rightarrow x - 1320 + 10x = 0 \Rightarrow 11x = 1320 \Rightarrow x = \frac{1320}{11} = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 660 - 5 \cdot 120 = 60 \\ y = 4 \cdot 120 = 480 \end{array} \right.$$

Se han vendido 120 entradas a jubilados, 480 a adultos y 60 a niños.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = (0 \ 2 \ 2)$,

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

a) $C = (0 \ 2 \ 2) \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+3 & 0-2+3 & 1-2+0 \\ 0+0+2 & 0-1+2 & 0-1+0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-2 \\ 0+2-2 \\ 0+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+1 & -1+0+0 \\ 0+0-1 & 0+1-1 & 0+1+0 \\ -1+0+0 & 0-1+0 & 1-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}B^2 - I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3-1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0-1 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B^2 - I = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) La matriz $A - B$ es posible obtenerla pues ambas matrices son de la misma dimensión 3×3 y su resultado es una matriz 3×3 . Pero no es posible la siguiente operación pues $A - B$ es de dimensión 3×3 y la matriz C es de dimensión 1×3 .

$(A - B) - C$ no es posible calcularlo.

La matriz $B \cdot C$ no es posible calcularla pues la matriz B es de dimensiones 3×3 y la matriz C es de dimensiones 1×3 . Para que sea posible el producto planteado deben coincidir el número de columnas de B (3) y el número de filas de C (1). Al no ser así el producto no se puede realizar.

$$B \cdot C$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot 1} \times 3$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

- a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)
 b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)
 c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

Llamamos M_1 , M_2 y M_3 a los sucesos “Elegir una mujer en 1ª, 2ª o 3ª elección”. La probabilidad de cada suceso depende de lo ocurrido anteriormente.

- a) Elegir a tres mujeres es el suceso $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

$$P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1)P(M_2/M_1)P(M_3/(M_1 \cap M_2)) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \frac{245}{1027} \approx 0.2386$$

- b) Esto ocurre eligiendo tres mujeres o tres hombres.

Es el suceso $(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup (M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c)$.

$$P[(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup (M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c)] =$$

$$= P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c) = \frac{245}{1027} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \frac{91}{316} \approx 0.288$$

- c) Al menos dos de los seleccionados son hombres implica que uno es mujer y los otros dos hombres o los tres son hombres.

Este suceso es:

$$(M_1 \cap M_2^c \cap M_3^c) \cup (M_1^c \cap M_2 \cap M_3^c) \cup (M_1^c \cap M_2^c \cap M_3) \cup (M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c)$$

Su probabilidad es la suma de las probabilidades de cada uno de los cuatro sucesos.

$$\left. \begin{aligned} P(M_1 \cap M_2^c \cap M_3^c) &= \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} \\ P(M_1^c \cap M_2 \cap M_3^c) &= \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} \cdot \frac{29}{78} \\ P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3) &= \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{50}{78} \\ P(M_1^c \cap M_2^c \cap M_3^c) &= \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Probabilidad} = 3 \cdot \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \frac{2581}{8216} \approx 0.314$$

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)
- El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

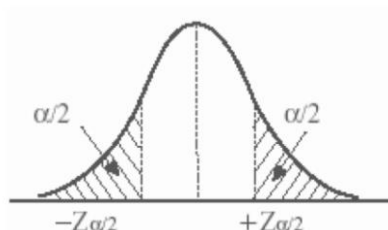
X = el peso de los motores. Desviación típica = $\sigma = 30$ kg. $X = N(\mu, 30)$

Media muestral = $\bar{x} = 153$ kg. Tamaño de la muestra = $n = 81$

- a) Con un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}} \approx 6.533 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza para el peso medio de los motores es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (153 - 6.533, 153 + 6.533) = (146.467, 159.533)$$

- b) Con un nivel de confianza del 93.12 %

$$1 - \alpha = 0,9312 \rightarrow \alpha = 0,0688 \rightarrow \alpha/2 = 0,0344 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9656 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.82$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 5.46$$

El error máximo es de 5.46 kg.

- c) El valor de 145 kg no está en el intervalo calculado al 95%: Como al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 145 kg tampoco estará en el intervalo de confianza al 92% y por tanto no se puede aceptar la afirmación. Lo podemos comprobar. Con un nivel de confianza del 92 %

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} < 1.8$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

No aparece en los datos proporcionados, pero es menor de 1.8.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.8 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}} = 6.$$

El intervalo de confianza para el peso medio de los motores es más estrecho que:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (153 - 6, 153 + 6) = (147, 159)$$

El peso medio de 145 kg no pertenece a este intervalo y la afirmación no es correcta.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t-2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

- a) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -2$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x+t)^2 + 2 = -(-2+t)^2 + 2 = -(t^2 + 4 - 4t) + 2 = -t^2 + 4t - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} t - 2 = t - 2 \\ f(-2) &= -t^2 + 4t - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + 4t - 2 = t - 2 \Rightarrow -t^2 + 3t = 0 \Rightarrow -t(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} t - 2 = t - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - (t+3)x + 9 = 2^2 - (t+3)2 + 9 = -2t + 7 \\ f(2) &= t - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2t + 7 = t - 2 \Rightarrow -3t = -9 \Rightarrow t = 3$$

Para $t = 3$ la función es continua en $x = -2$ y en $x = 2$

- b) Para $t = 3$ la función es continua.

La función queda $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Hacemos una tabla de valores y representamos la función que es un trozo de parábola convexa (antes de -2), un trozo de recta (entre -2 y 2) y otro trozo de parábola cóncava (a partir de 2). Hallamos los vértices de cada parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2(x+3) \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x - 6 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$x \leq -2$$

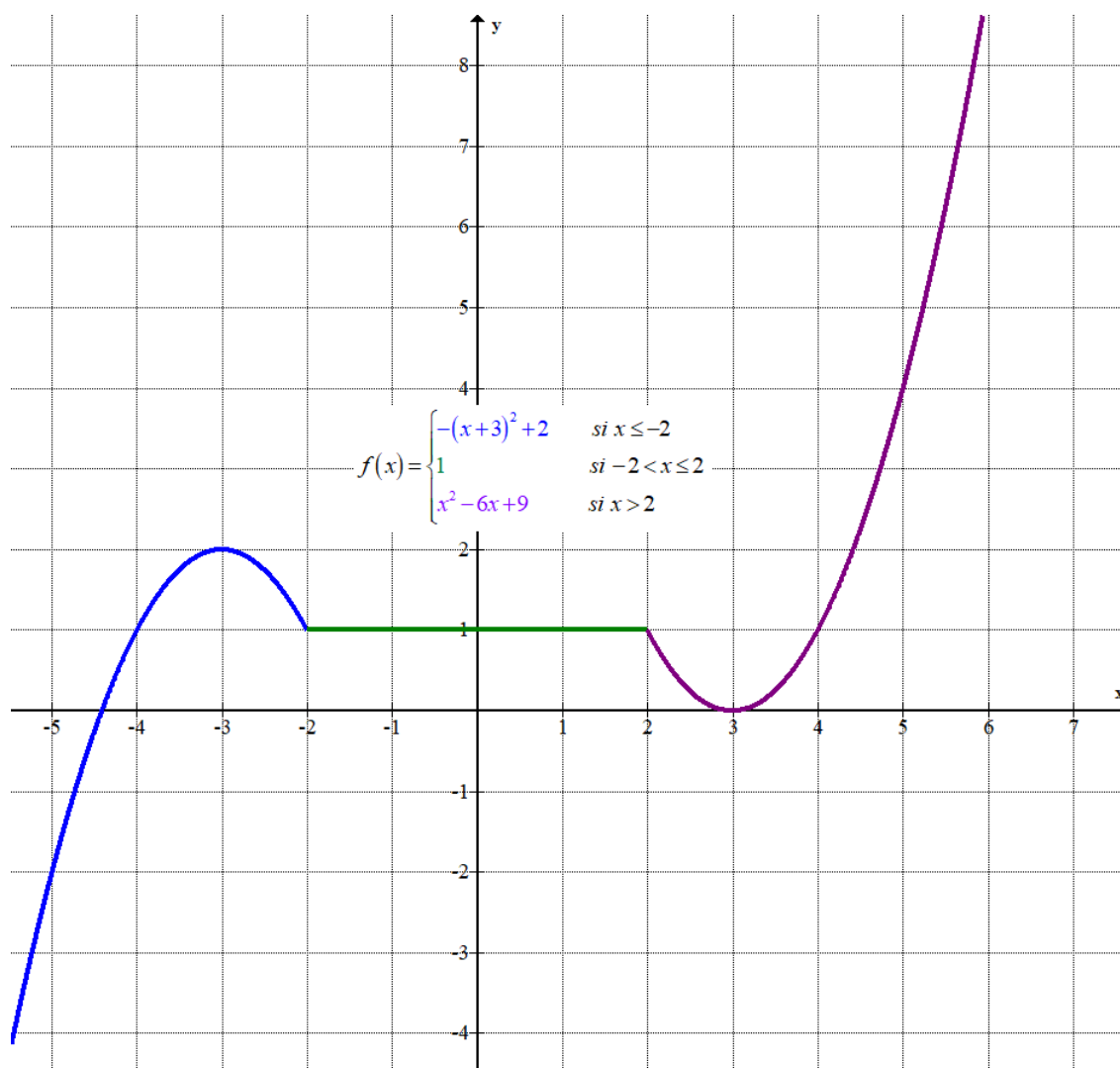
x	$y = -(x+3)^2 + 2$
-6	-7
-5	-2
-4	1
-3	2 Máximo
-2	1

$$-2 < x \leq 2$$

x	$y = 1$
-1	1
0	1
1	1
2	1

$$x > 2$$

x	$y = x^2 - 6x + 9$
2.5	0.25
3	0 Mínimo
3.5	0.25
4	1
5	4



6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$.

- a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
 b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
 c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

a) Nos piden hallar $H(3)$.

$$H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 60 - 18 = 42$$

Alcanza una altura de 42 metros.

b) Nos piden hallar x tal que $H(x) = 32$.

$$\left. \begin{array}{l} H(x) = 20x - 2x^2 \\ H(x) = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow 20x - 2x^2 = 32 \Rightarrow -2x^2 + 20x - 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(16)}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 = x \\ \frac{10-6}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Se alcanza una altura de 32 metros en el primer segundo y a los 8 segundos.

c) Derivamos e igualamos a cero.

$$H(x) = 20x - 2x^2 \Rightarrow H'(x) = 20 - 4x$$

$$H'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

Vemos como es el signo de la segunda derivada en $x = 5$.

$$H'(x) = 20 - 4x \Rightarrow H''(x) = -4 \Rightarrow H''(5) = -4 < 0 \rightarrow x = 5 \text{ es máximo}$$

Se alcanza la altura máxima a los 5 segundos.

Como $H(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 100 - 50 = 50$ la altura máxima que se alcanza es de 50 metros.

EvAU Extraordinaria 2022



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
- Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2t & \text{si } x < -1 \\ t + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)
- Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$. (0.5 puntos)
- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, \infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto $(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12 . Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40% de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50% de estos. El 25% eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45% de los participantes. La prueba C la superan el 60% de los participantes que la escogen.

- Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A? (0.75 puntos)

4. El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6.4$ minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 y 10 minutos.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$. (1.5 puntos)
- b) Calcula $-\frac{1}{2}A - 2B^T + C$. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,

- a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen? (0.75 puntos)
- b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos? (0.75 puntos)

6. Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2.3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0.81$ bares².

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
- b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
- c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)
 b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 0$. (0.75 puntos)

6. El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$ con $x = \text{días}$ y $1 \leq x \leq 7$.

- a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día? (0.5 puntos)
 b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo? (0.75 puntos)
 c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos? (0.75 puntos)

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

a) Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$-2x + 4 = y$$

$$x + 2y = 2$$

$$y = 3$$

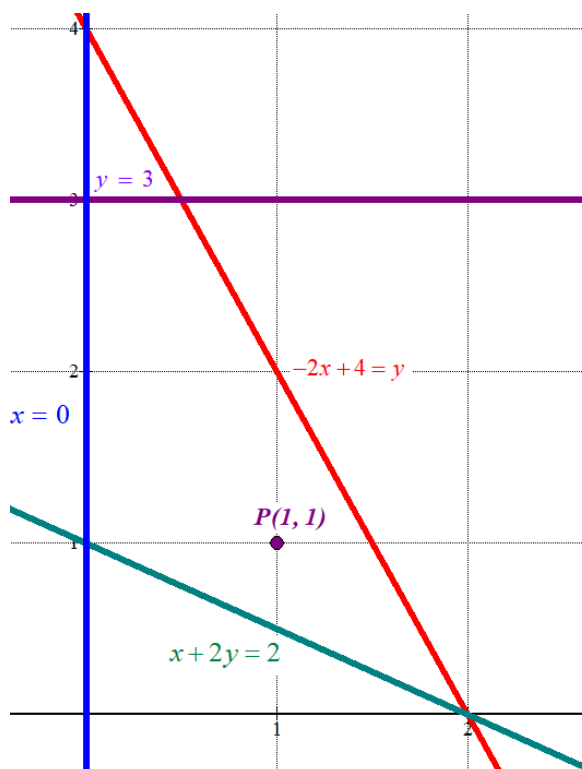
$$x = 0$$

x	y = -2x + 4
0	4
2	0

x	y = $\frac{2-x}{2}$
0	1
2	0

Recta
horizontal

Recta
vertical



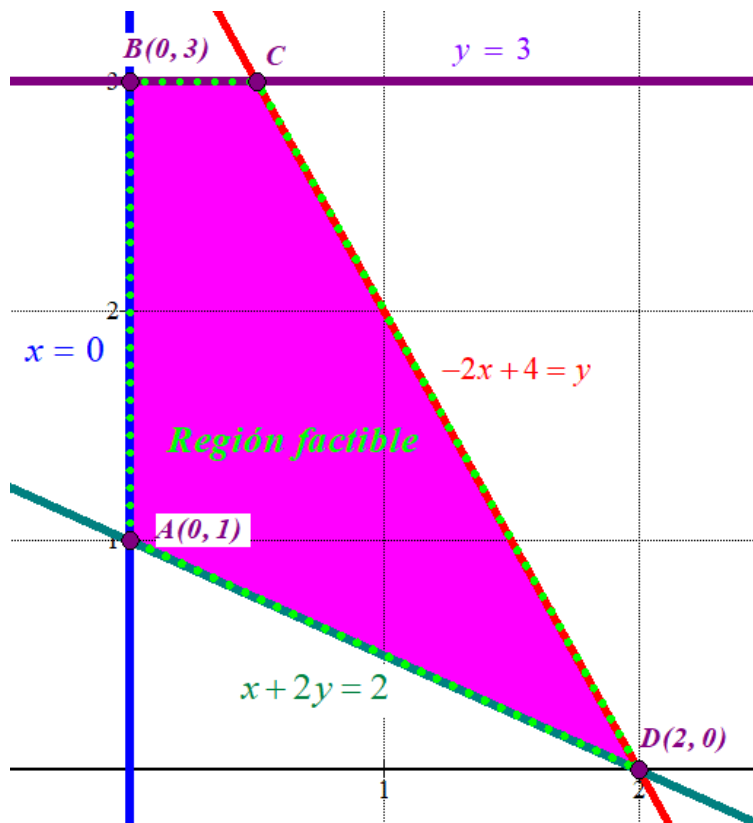
Como las restricciones son $\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$ la región factible es la zona situada por debajo de la

recta roja, por encima de la verde, a la derecha de la recta vertical azul y por debajo de la recta horizontal violeta.

Comprobamos si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} -2 + 4 \geq 1 \\ 1 + 2 \geq 2 \\ 1 \leq 3 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} -2x + 4 = y \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow -2x + 4 = 3 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Los vértices de la región factible son $A(0, 1)$, $B(0, 3)$, $C\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y $D(2, 0)$.

b) Valoramos la función $f(x, y) = 8x + 3y$ en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 1) \rightarrow f(0, 1) = 0 + 3 = 3 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(0, 3) \rightarrow f(0, 3) = 0 + 9 = 9$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 3\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 13$$

$$D(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 16 + 0 = 16 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo se produce en el vértice $D(2, 0)$ y alcanza un valor de 16.

El mínimo se produce en el vértice $A(0, 1)$ y alcanza un valor de 3.

2. El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos x = número de premios Goya de Isabel; y = número de premios Goya de Carmen; z = número de premios Goya de Enma.

“El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas” $\rightarrow x + y + z = 15$

“Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma” $\rightarrow x + 1 = 3z$

“los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen” $\rightarrow z = \frac{3}{4}y$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x + 1 = 3z \\ z = \frac{3}{4}y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x - 3z = -1 \\ z = \frac{3}{4}y \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ x - 3z = -1 \\ z = \frac{3}{4}y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + \frac{3}{4}y = 15 \\ x - 3\frac{3}{4}y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + \frac{3y}{4} = 15 \\ x - \frac{9y}{4} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 4y + 3y = 60 \\ 4x - 9y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 7y = 60 \\ 4x - 9y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\times(-1)} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 7y = 60 \\ -4x + 9y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{16y = 64} \Rightarrow \boxed{y = 64/16 = 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3} \Rightarrow x + 4 + 3 = 15 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Isabel ha recibido 8 premios Goya, Carmen 4 y Enma ha recibido 3 premios Goya.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x+2t & \text{si } x < -1 \\ t+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3+4x^2+3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$. (0.5 puntos)
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, \infty)$. (0.5 puntos)

a) Para que la función sea continua en $x = -1$ se debe cumplir $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x+2t = -2+2t \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} t+1 = t+1 \\ f(-1) &= t+1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2+2t = t+1 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

El valor de t debe ser 3.

b) En el intervalo $(1, \infty)$ la función es $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los posibles puntos críticos.

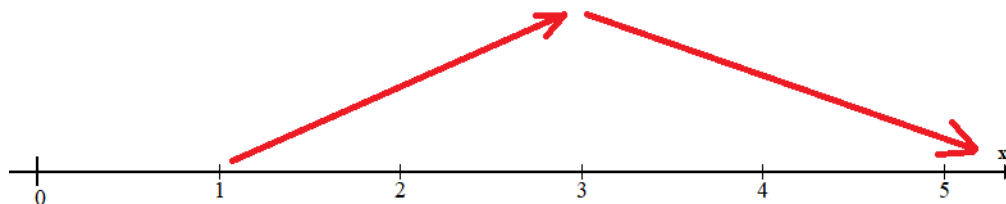
$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 36}}{-6} = \frac{-8 \pm 10}{-6} = \begin{cases} \frac{-8+10}{-6} = \frac{-1}{3} \notin (1, \infty) \\ \frac{-8-10}{-6} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor obtenido.

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 3 = 7 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, \infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = -300 + 80 + 3 = -217 < 0$. La función decrece en $(3, \infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo en $x = 3$. Como $f(3) = -3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = -27 + 36 + 9 - 1 = 17$, el punto máximo tiene coordenadas $(3, 17)$.

c) Como se ha estudiado en el apartado anterior la función crece en $(1, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$.

2. La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto (2, 1) y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12 . Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Si la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto (2, 1) significa que $f(2) = 1$ y que $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx + c \\ f(2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 2^3 + 2b + c \Rightarrow \boxed{8a + 2b + c = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 2^2 + b \Rightarrow \boxed{12a + b = 0}$$

Como la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12 tenemos que $f'(0) = -12$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + b \\ f'(0) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 = 3a \cdot 0^2 + b \Rightarrow \boxed{b = -12}$$

Sustituimos el valor de b por -12 y resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones iniciales.

$$\left. \begin{array}{l} 8a + 2b + c = 1 \\ 12a + b = 0 \\ \boxed{b = -12} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8a + 2(-12) + c = 1 \\ 12a - 12 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8a - 24 + c = 1 \\ 12a = 12 \rightarrow \boxed{a = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow 8 - 24 + c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 17}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -12$ y $c = 17$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

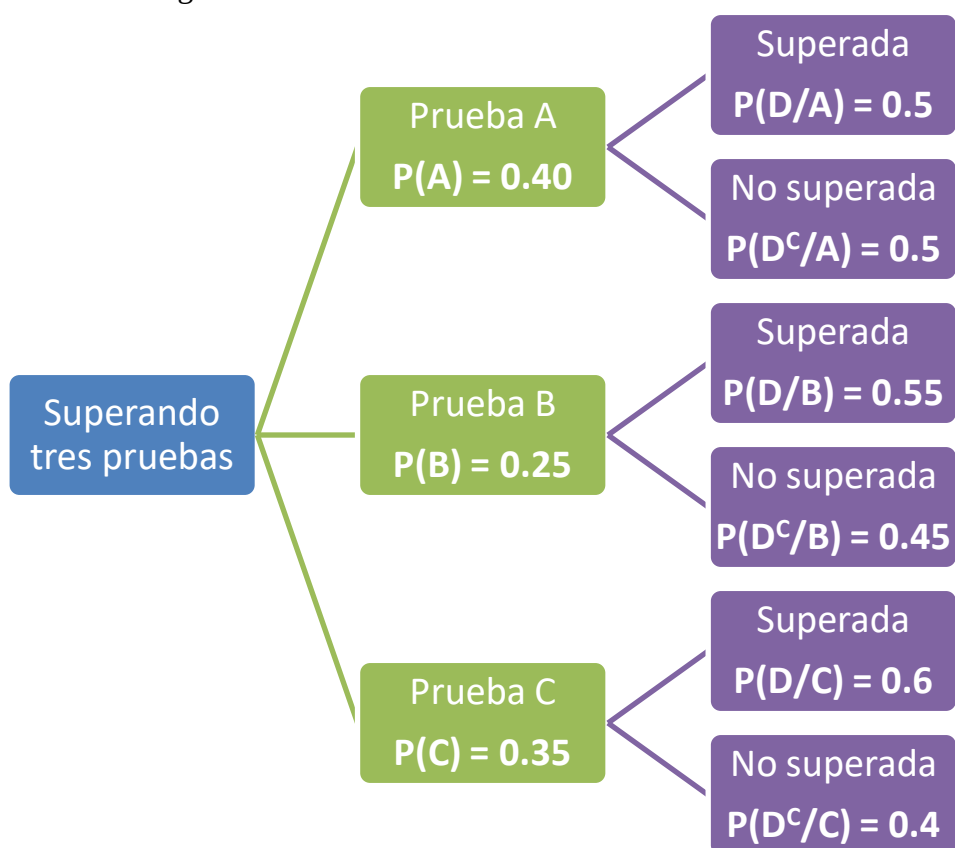
3. En un concurso se les proponen a los participantes 3 pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40% de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50% de estos. El 25% eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45% de los participantes. La prueba C la superan el 60% de los participantes que la escogen.

- a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba? (0.75 puntos)
 b) Si se sabe que un participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A? (0.75 puntos)

Llamamos A = “Elegir la prueba A”, B = “Elegir la prueba B”, C = “Elegir la prueba C” y D = “superar la prueba”.

La prueba C la eligen $100 - 40 - 25 = 35\%$ de los participantes.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.55 + 0.35 \cdot 0.6 = \boxed{0.5475}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{1 - 0.5475} = \frac{80}{181} \approx 0.442$$

4. El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6.4$ minutos. Se ha tomado una muestra de 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido 12, 11, 10, 9, 7, 12, 11, 8 y 10 minutos.
- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

X = El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística.

Desviación típica = $\sigma = 6.4$ minutos

$X \sim N(\mu, 6.4)$

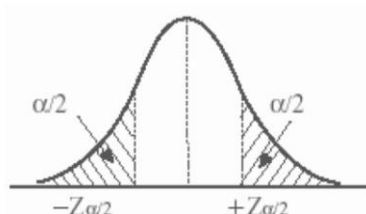
$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{12+11+10+9+7+12+11+8+10}{9} = 10 \text{ minutos}$$

Tamaño de la muestra = $n = 9$

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{9}} = 4.629 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (10 - 4.629, 10 + 4.629) = (5.371, 14.629)$$

- b) Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 = 2.17 \cdot \frac{6.4}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3\sqrt{n} = 2.17 \cdot 6.4 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 6.4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 6.4}{3} \right)^2 \approx \boxed{21.43}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que 21.43 debemos tomar un mínimo de 22 personas para tener un error menor de 3 minutos.

Bloque 2

- 3.** Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.
- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos x = precio del deportivo; y = precio del familiar; z = precio del monovolumen.

“El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros” $\rightarrow 10x + 6y + 3z = 851000$

“El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar” $\rightarrow x = y + 2000$

“Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes”
 $\rightarrow 5x = 6z + 13000$

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 3z = 851000 \\ x = y + 2000 \\ 5x = 6z + 13000 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 3z = 851000 \\ x = y + 2000 \\ 5x = 6z + 13000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10(y + 2000) + 6y + 3z = 851000 \\ 5(y + 2000) = 6z + 13000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10y + 20000 + 6y + 3z = 851000 \\ 5y + 10000 = 6z + 13000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y + 3z = 831000 \\ 5y - 6z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{\times 2} \rightarrow 32y + 6z = 1662000 \\ 5y - 6z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{37y}{37} = \frac{1665000}{37} \Rightarrow \boxed{y = 1665000 / 37 = 45000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 45000 + 2000 = 47000} \Rightarrow 470000 + 270000 + 3z = 851000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z = 111000 \Rightarrow \boxed{z = \frac{111000}{3} = 37000}$$

Un coche deportivo cuesta 47000 €, uno familiar 45000 y un monovolumen 37000 €.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$. (1.5 puntos)

b) Calcula $-\frac{1}{2}A - 2B^T + C$. (0.5 puntos)

a) Despejamos X en la ecuación.

$$X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B \Rightarrow X \left(I + \frac{1}{2}A \right) = A \cdot B \Rightarrow X = A \cdot B \left(I + \frac{1}{2}A \right)^{-1}$$

Comprobamos que la matriz $I + \frac{1}{2}A$ es invertible y determinamos su inversa.

$$I + \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left| I + \frac{1}{2}A \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0. \text{ Existe la inversa.}$$

$$\left(I + \frac{1}{2}A \right)^{-1} = \frac{\text{Adj} \left(\left(I + \frac{1}{2}A \right)^T \right)}{\left| I + \frac{1}{2}A \right|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos este resultado a terminar de resolver la ecuación matricial.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -2-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B \left(I - \frac{1}{2}A \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20-8 & 10+8 \\ -60-26 & 30+26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix} = X$$

b)

$$-\frac{1}{2}A - 2B^T + C = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}A - 2B^T + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

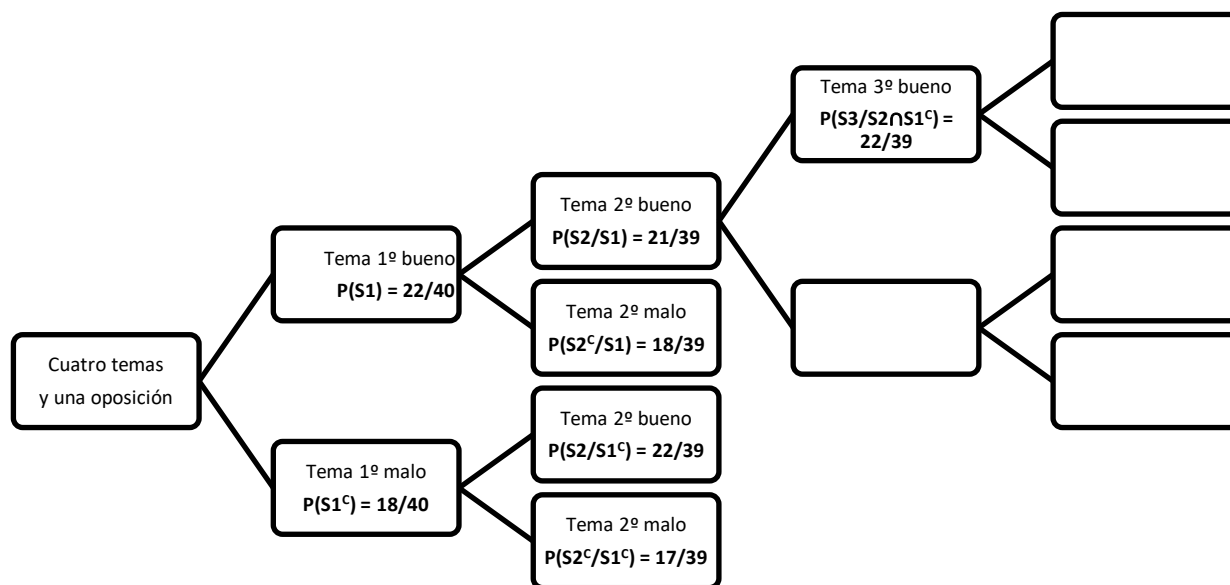
5. En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas,

- a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen? (0.75 puntos)
 b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas elegidos? (0.75 puntos)

El opositor se sabe 22 de los 40 temas y no se sabe los 18 restantes.

Llamamos $S1$ = “Sale un primer tema que sabe” y $S1^C$ = “Sale un primer tema que no sabe” y así sucesivamente $S2$, $S3$ y $S4$.

Realizamos un diagrama de árbol.



Es muy laborioso construir el diagrama. Pero nos permite analizar la situación y tener claro cómo funciona el experimento compuesto que nos plantean.

Debemos de tener en cuenta en que cada elección de un tema influye en las siguientes habiendo un tema menos para elegir: 40, 39, 38 y 37.

- a) Calculamos la probabilidad de que no le salga ningún tema de los que sabe (es más sencillo con el suceso contrario).

$$P(S1^C \cap S2^C \cap S3^C \cap S4^C) =$$

$$= P(S1^C) P(S2^C / S1^C) P(S3^C / (S1^C \cap S2^C)) P(S4^C / (S1^C \cap S2^C \cap S3^C)) =$$

$$= \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{15}{37} = \frac{306}{9139} \approx 0.033$$

Como la probabilidad de que no salga ningún tema de los que se sabe es $\frac{306}{9139}$ entonces la

probabilidad de que salga alguno de los que sabe es $1 - \frac{306}{9139} = \frac{8833}{9139} \approx 0.967$.

- b) Si debe de saberse solo uno de los cuatro temas que se eligen, este puede ser el primero, el segundo, el tercero o el cuarto, no sabiéndose los otros tres.

$$P(\text{Saberse solo uno de los 4 temas}) = P(S1 \cap S2^c \cap S3^c \cap S4^c) + P(S1^c \cap S2 \cap S3^c \cap S4^c) +$$

$$+ P(S1^c \cap S2^c \cap S3 \cap S4^c) + P(S1^c \cap S2^c \cap S3^c \cap S4) =$$

$$= \frac{22}{40} \cdot \frac{18}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37} + \frac{18}{40} \cdot \frac{22}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37} + \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{22}{38} \cdot \frac{16}{37} + \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{22}{37} =$$

$$= 4 \frac{22}{40} \cdot \frac{18}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37} = \boxed{\frac{8976}{45695} \approx 0.196}$$

6. Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2.3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0.81$ bares².

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
- Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
- La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

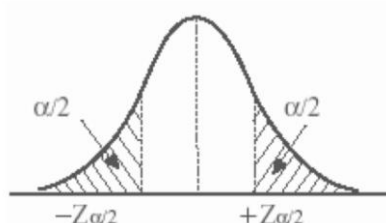
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = La presión de inflado de ruedas. Desviación típica = $\sigma = \sqrt{0.81} = 0.9$ bares. $X = N(\mu, 0.9)$
 Media muestral = $\bar{x} = 2.3$ bares. Tamaño de la muestra = $n = 100$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}} = 0.1764$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (2.3 - 0.1764, 2.3 + 0.1764) = (2.1236, 2.4764)$$

- b) Si disminuimos el tamaño de la muestra (n) el error o amplitud del intervalo de confianza será

mayor, pues $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- c) El valor de 2 bares no está en el intervalo $(2.1236, 2.4764)$ calculado al 95 %, como al disminuir el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 2 bares tampoco estará en el Intervalo de confianza al 90% y por lo tanto no se puede aceptar la afirmación.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -1$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 0$. (0.75 puntos)

a) Para que la función sea continua en $x = -1$ se debe cumplir $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+2)^2 + t = (-1+2)^2 + t = 1+t \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 3 = 3 \\ f(-1) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = t+1 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

Para que la función sea continua en $x = 2$ se debe cumplir $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

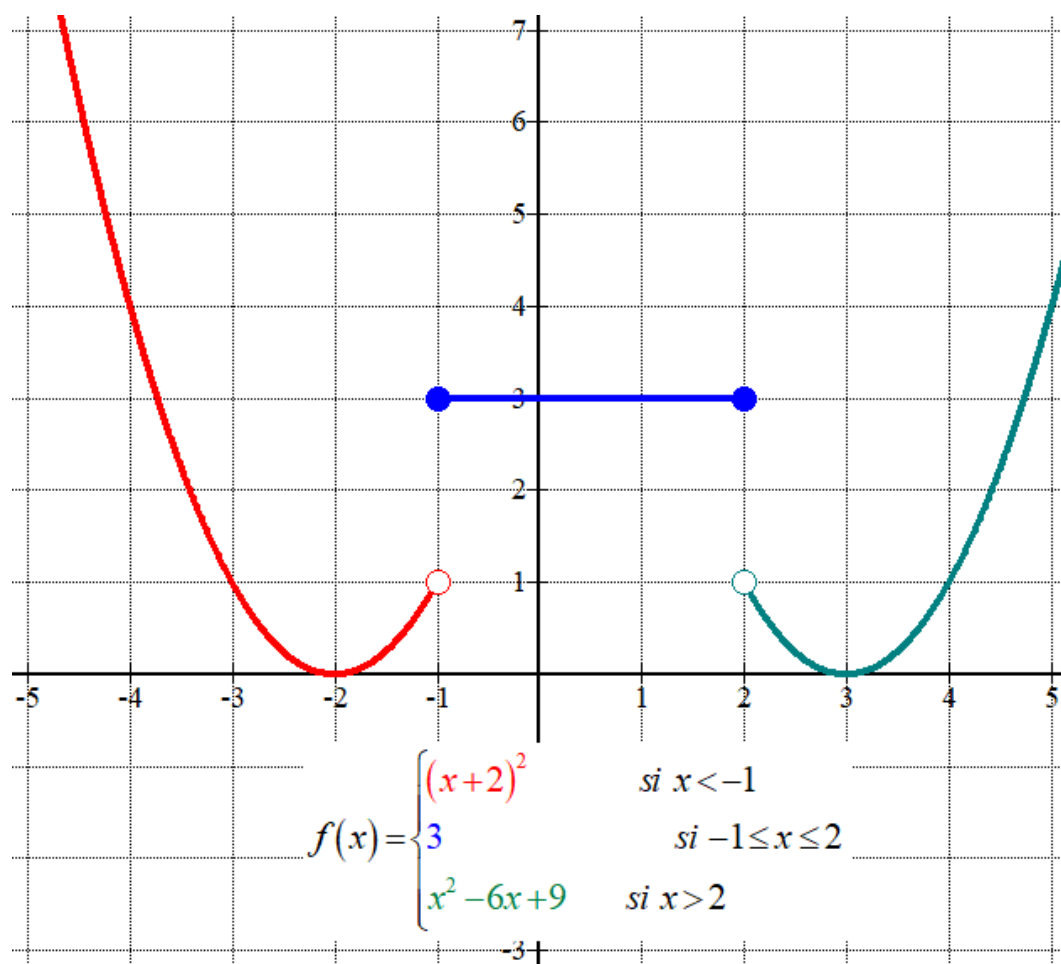
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 6x + 9 + t = 4 - 12 + 9 + t = 1+t \\ f(2) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = t+1 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

El valor de t debe ser 2.

b) Para $t = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, siendo un trozo de parábola antes de -1 , un trozo de recta horizontal entre -1 y 2 , y otro trozo de parábola después de 2 . Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

<i>si</i> $x < -1$	<i>si</i> $-1 \leq x \leq 2$	<i>si</i> $x > 2$																								
<table><tr><th>x</th><th>$y = (x+2)^2$</th></tr><tr><td>-3</td><td>1</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>1 Punto vacío</td></tr></table>	x	$y = (x+2)^2$	-3	1	-2	0	-1	1 Punto vacío	<table><tr><th>x</th><th>$y = 3$</th></tr><tr><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	x	$y = 3$	-1	3	0	3	2	3	<table><tr><th>x</th><th>$y = x^2 - 6x + 9$</th></tr><tr><td>2</td><td>1 Punto vacío</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr></table>	x	$y = x^2 - 6x + 9$	2	1 Punto vacío	3	0	4	1
x	$y = (x+2)^2$																									
-3	1																									
-2	0																									
-1	1 Punto vacío																									
x	$y = 3$																									
-1	3																									
0	3																									
2	3																									
x	$y = x^2 - 6x + 9$																									
2	1 Punto vacío																									
3	0																									
4	1																									



6. El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisora de radio a lo largo de la semana viene dado por la siguiente función $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$ con $x = \text{días}$ y $1 \leq x \leq 7$.

- a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día? (0.5 puntos)
 b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo? (0.75 puntos)
 c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos? (0.75 puntos)

a) Nos piden calcular $S(3)$.

$$S(3) = 3^3 - \frac{21}{2} \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 36 = 58.5.$$

El miércoles se emiten 58.5 minutos.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36 \Rightarrow S'(x) = 3x^2 - 21x + 30$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 21x + 30 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = x \\ \frac{7-3}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos estos valores para decidir si son máximos o mínimos.

$$S'(x) = 3x^2 - 21x + 30 \Rightarrow S''(x) = 6x - 21 \Rightarrow \begin{cases} S''(2) = -9 < 0 \rightarrow \text{Máximo relativo} \\ S''(5) = 9 > 0 \rightarrow \text{Mínimo relativo} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[1, 7]$ y en los puntos que son máximo y mínimo relativo: $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$ y $x = 7$ para decidir donde se alcanza el máximo y mínimo absoluto de emisión de publicidad.

$$S(1) = 1^3 - \frac{21}{2}1^2 + 30 + 36 = 56.5$$

$$S(2) = 2^3 - \frac{21}{2}2^2 + 60 + 36 = 62$$

$$S(5) = 5^3 - \frac{21}{2}5^2 + 150 + 36 = 48.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$S(7) = 7^3 - \frac{21}{2}7^2 + 210 + 36 = 74.5 \text{ ¡Máximo!}$$

Se emite más publicidad el séptimo día. Se emiten 74.5 minutos.

- c) Observando lo estudiado en el apartado anterior tenemos que el día que se emitió menos publicidad fue el quinto día. Se emitieron 48.5 minutos.

EvAU Ordinaria 2022



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.

- Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \leq c \\ -(x - 3)^2 + 2 & \text{si } x > c \end{cases}$

- ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
- Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$. (0.75 puntos)

2. La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El 70% de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60% de los que se alojan en el centro y el 40% de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

- Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas? (0.75 puntos)
- Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro? (0.75 puntos)

4. El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
- Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
- ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación

$$X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} E^T \quad (1 \text{ punto})$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 40% de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30% para solicitar recetas y un 10% para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas.

- Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos? (0.75 puntos)
- Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas? (0.75 puntos)

6. El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros²: Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
- Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

- c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)
 b) Para $t = 0$; calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)
 c) Para $t = 0$; calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)

6. El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ con $x = \text{años}$ y $1 \leq x \leq 5$.

- a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 puntos)
 b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? (0.75 puntos)
 c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay? (0.75 puntos)

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

1. Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.
- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

a) Llamemos “x” al número de zapatillas de mujer e “y” al número de zapatillas de hombre.

La función objetivo es el beneficio que queremos maximizar: $B(x, y) = 28x + 30y$

Las restricciones son:

“Tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre” $\rightarrow 100 \leq y \leq 600$

“Tiene que fabricar un mínimo de 400 pares de mujer” $\rightarrow x \geq 400$

“Solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas” $\rightarrow x + y \leq 1200$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x + y \leq 1200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x + y \leq 1200 \end{array} \right\}$$

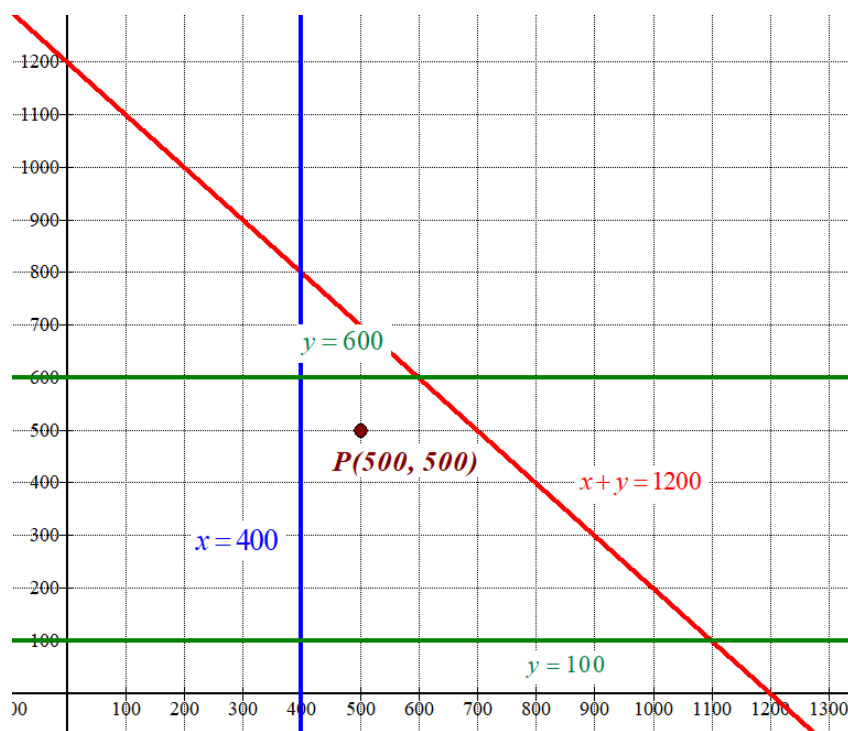
Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$\begin{array}{c|c} x + y = 1200 & y = 1200 - x \\ \hline x & y \\ \hline 0 & 1200 \\ 1200 & 0 \end{array}$$

$y = 100$
Recta
horizontal

$y = 600$
Recta
horizontal

$x = 400$
Recta
vertical



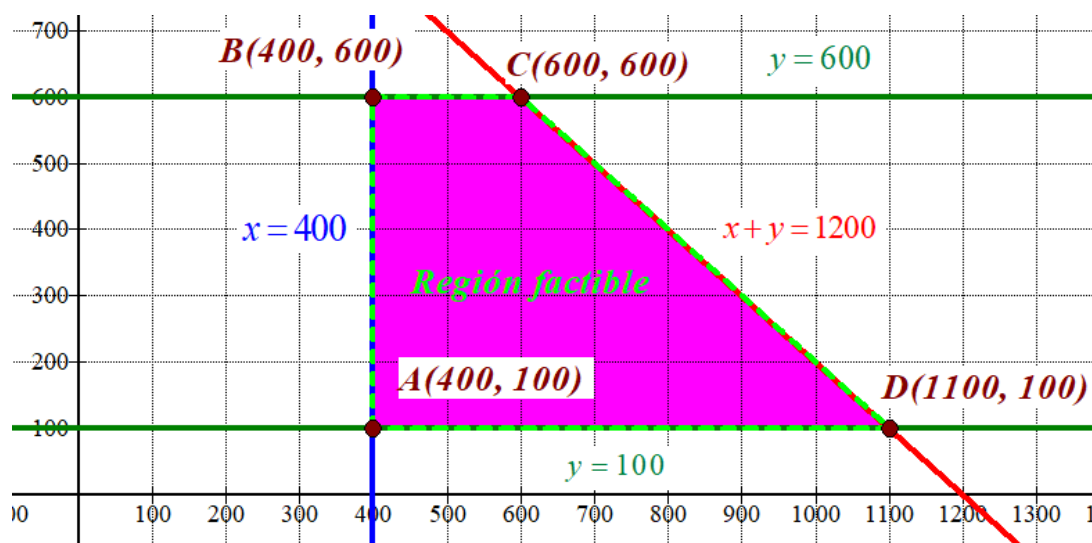
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x + y \leq 1200 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante

situada entre las rectas horizontales verdes, a la derecha de la recta vertical azul y por debajo de la recta roja.

Comprobamos si el punto $P(500, 500)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq 500 \leq 600 \\ 500 \geq 400 \\ 500 + 500 \leq 1200 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



b) Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

$$A(400, 100) \rightarrow B(400, 100) = 28 \cdot 400 + 3000 = 14200$$

$$B(400, 600) \rightarrow B(400, 600) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 600 = 29200$$

$$C(600, 600) \rightarrow B(600, 600) = 28 \cdot 600 + 30 \cdot 600 = 34800 \text{ ; } \textcolor{red}{\text{Máximo!}}$$

$$D(1100, 100) \rightarrow B(1100, 100) = 28 \cdot 1100 + 30 \cdot 100 = 33800$$

El beneficio máximo se produce en el vértice C(600, 600).

Vendiendo 600 zapatillas de hombre y otras 600 de mujer se obtiene un beneficio máximo de 34800 €.

2. La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.
- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

- a) Llamamos “x” al precio de un bombón de chocolate negro, “y” al precio de un bombón de chocolate con leche y “z” al precio de un bombón de chocolate blanco.

“La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco” $\rightarrow 12x + 6y + 6z = 51$

“Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche” $\rightarrow x = y + 1$

“Cada bombón de chocolate con leche cuesta 50 céntimos menos que los de chocolate blanco” $\rightarrow y = z - 0.5$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 6z = 51 \\ x = y + 1 \\ y = z - 0.5 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 6z = 51 \\ x = y + 1 \\ y = z - 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6(z - 0.5) + 6z = 51 \\ x = z - 0.5 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6z - 3 + 6z = 51 \\ x = z + 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 12z = 54 \\ x = z + 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 9 \\ x = z + 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(z + 0.5) + 2z = 9 \Rightarrow 2z + 1 + 2z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z = 8 \Rightarrow \boxed{z = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 + 0.5 = 2.5} \\ \boxed{y = 2 - 0.5 = 1.5} \end{array} \right.$$

Cada bombón de chocolate negro cuesta 2.5 €, cada uno de chocolate con leche cuesta 1.5 € y cada uno de chocolate blanco cuesta 2 €.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \leq c \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } x > c \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
 b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$. (0.75 puntos)

a) Para que sea continua en c deben de coincidir los límites laterales y el valor de la función en c .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} 2x - 4 = 2c - 4 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} -(x-3)^2 + 2 = -(c-3)^2 + 2 = -(c^2 + 9 - 6c) + 2 \\ f(c) &= 2c - 4 \\ f(x) &\text{continua en } x = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2c - 4 = -(c^2 + 9 - 6c) + 2 \Rightarrow 2c - 4 = -c^2 - 9 + 6c + 2 \Rightarrow c^2 - 4c + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = c \\ \frac{4-2}{2} = 1 = c \end{cases}$$

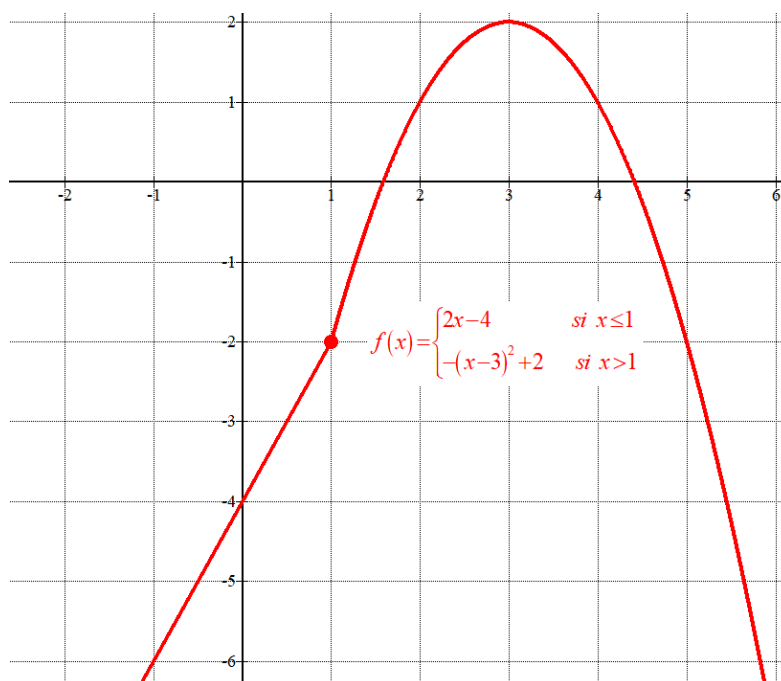
Para $c = 3$ y $c = 1$ la función es continua en $x = c$.

b) Hacemos una tabla de valores para cada rama de la función y la representamos. La gráfica es un trozo de recta y un trozo de parábola.

Para $c = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \leq 1 \\ -(x-3)^2 + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$x \leq 1$	$y = 2x - 4$
0	-4
1	-2

$x > 1$	$y = -(x-3)^2 + 2$
1	-2 No se incluye
2	1
3	2
4	1
5	-2



2. La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Si la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 0)$ significa dos cosas: $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{a + b + c = 0}$$

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 4a(-1)^3 + 2b(-1) = 0 \Rightarrow -4a - 2b = 0 \Rightarrow \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

Además, la función corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Por lo que se cumple que $f(0) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(x) = ax^4 + bx^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ \boxed{c = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + 1 = 0 \\ 2a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -1 - a \\ 2a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -1 - 1 = -2}$$

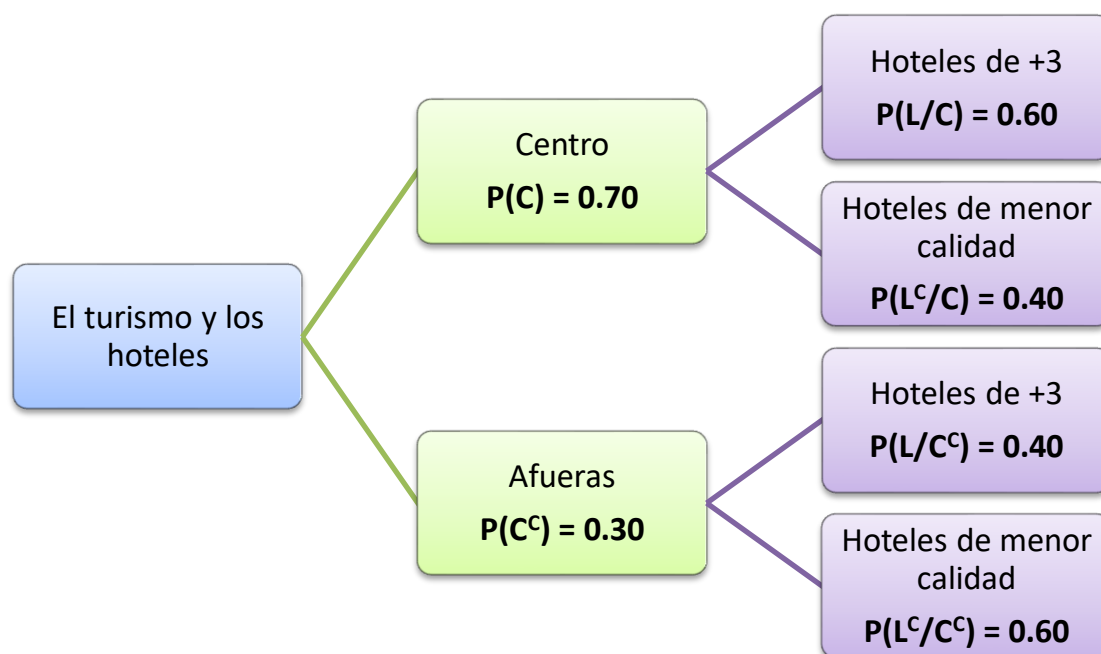
Los valores buscados son $a = 1$; $b = -2$ y $c = 1$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El 70% de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60% de los que se alojan en el centro y el 40% de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.
- a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro? (0.75 puntos)

Llamamos C = “Alojarse en el centro”, L = “Alojarse en hoteles de 3 estrellas o más”.
 C^C = “Alojarse en las afueras” y L^C = “Alojarse en hoteles de menor calidad”

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(L) = P(C)P(L/C) + P(C^C)P(L/C^C) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = \boxed{0.54}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/L^C) = \frac{P(C \cap L^C)}{P(L^C)} = \frac{P(C)P(L^C/C)}{1 - P(L)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{1 - 0.54} = \boxed{\frac{14}{23} \approx 0.609}$$

4. El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95%: (1 punto)
 - Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)
 - ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = Número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana.

Desviación típica = $\sigma = 50$ pacientes

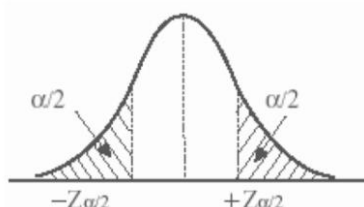
$X \sim N(\mu, 50)$

Media muestral = $\bar{x} = 322$. Tamaño de la muestra = $n = 25$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{50}{\sqrt{25}} = 19.6$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (322 - 19.6, 322 + 19.6) = (302.4, 341.6)$$

- b) Si aumentamos el tamaño de la muestra (n) el error o amplitud del intervalo de confianza será menor, pues $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- c) Con un nivel de confianza del 99 % mayor del 95 % obtendremos un $z_{\alpha/2}$ mayor y el

$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ será mayor (amplitud del intervalo de confianza mayor).

Como 330 está en el intervalo de confianza con un 95 % de nivel de confianza también lo estará en el del 99 %.

Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %.

Bloque 2

3. En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

a) Llamamos “x” a los minutos que dura la sección de humor, “y” a lo que dura la sección de magia y “z” a la duración de la sección de noticias.

“La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia” $\rightarrow x = y + 5$

“El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias”

$$\rightarrow x + y = \frac{z}{4}$$

“La duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos = 115 minutos” $\rightarrow x + y + z = 115$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 115 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 5 + y = \frac{z}{4} \\ y + 5 + y + z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 5 = \frac{z}{4} \\ 2y + z = 110 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 5 = \frac{z}{4} \\ 2y = 110 - z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 110 - z + 5 = \frac{z}{4} \Rightarrow 115 = z + \frac{z}{4} \Rightarrow 115 = \frac{5z}{4} \Rightarrow 460 = 5z \Rightarrow \boxed{z = \frac{460}{5} = 92} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 110 - 92 = 18 \Rightarrow \boxed{y = \frac{18}{2} = 9} \Rightarrow \boxed{x = 9 + 5 = 14}$$

La sección de humor dura 14 minutos, la de magia 9 y la de noticias 92 minutos.

4. a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)
- b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).
- c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación
- $$X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} E^T \quad (1 \text{ punto})$$

a) En general no se cumple pues no es lo mismo $A \cdot X$ que $X \cdot A$. El producto de matrices no es conmutativo, se puede cumplir en casos particulares.

b)

$$M \cdot N \cdot P$$

$$\underline{3 \times \boxed{m \cdot 2} \times \boxed{5 \cdot p} \times p} \rightarrow 3 \times p$$

Para poder realizarse el producto $M \cdot N$ debe ser $m = 2$ obteniendo una matriz de orden 3×5 . Y para poderse realizar el producto de la matriz resultante por la matriz P debe ser $5 = p$. Si se pueden realizar los dos productos la matriz resultante tiene dimensión 3×5 .

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} E^T \Rightarrow X \cdot C = D^2 + \frac{1}{3} E^T \Rightarrow X = \left(D^2 + \frac{1}{3} E^T \right) C^{-1}$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz C y la calculamos.

$$|C| = \begin{vmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 11 = 1 \neq 0 \quad \text{Existe la inversa}$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y terminamos de resolver.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^2 + \frac{1}{3} E^T = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(D^2 + \frac{1}{3} E^T \right) C^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El 40% de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30% para solicitar recetas y un 10% para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas? (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para obtener los porcentajes restantes.

	Recetas	No recetas	
Diagnosticar enfermedad	10		40
No diagnosticar enfermedad			
	30		100

Completamos la tabla.

	Recetas	No recetas	
Diagnosticar enfermedad	10	30	40
No diagnosticar enfermedad	20	40	60
	30	70	100

Con estos datos obtenidos respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

$$a) P(A \text{ por recetas o a diagnosticar enfermedad o ambas}) = \frac{10 + 20 + 30}{100} = \boxed{0.60}$$

También se puede resolver utilizando el suceso contrario.

$$P(A \text{ por recetas o a diagnosticar enfermedad o ambas}) = \\ = 1 - P(\text{Ni a por recetas ni a diagnosticar enfermedad}) = 1 - \frac{40}{100} = \boxed{0.60}$$

b) Son 40 las personas que acuden a diagnosticar enfermedad (casos posibles).
De esos 40 solo 10 acuden también a por recetas (casos favorables).

$$P(\text{Solicite recetas/ Acude a diagnosticar enfermedad}) = \frac{10}{40} = \boxed{0.25}$$

6. El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros²: Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.
- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
 - Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
 - ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

X = El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año. Desviación típica = $\sigma = \sqrt{6}$ libros. $X = N(\mu, \sqrt{6})$

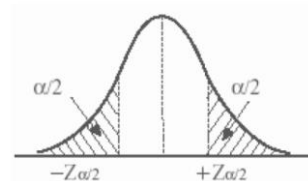
$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{4+8+2+9+3+7+5+6+7+4}{10} = 5.5 \text{ libros}$$

Tamaño de la muestra = $n = 10$

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} \approx 1.6809$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (5.5 - 1.6809, 5.5 + 1.6809) = (3.8191, 7.1809)$$

- b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es disminuir el tamaño de muestra.

- c) Con un nivel de confianza del 95.96 %

$$1 - \alpha = 0.9596 \rightarrow \alpha = 0.0404 \rightarrow \alpha/2 = 0.0202 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9798 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.05$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} = \boxed{0.628}$$

El error máximo es de aproximadamente 0.628 libros.

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$; calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$; calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)

a) La función es continua si coinciden los límites laterales con el valor de la función en $x = -1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+t+1)^2 = (-1+t+1)^2 = t^2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} -x^2 + (t+2)x + 5 = -(-1)^2 + (t+2)(-1) + 5 = -1 - t - 2 + 5 = 2 - t \\ f(-1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 2 - t = 1 \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1 \\ 2 - t = 1 \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

b) En el intervalo $(-1, \infty)$ la función es $f(x) = -x^2 + (t+2)x + 5$.

Para $t = 0$ la función queda $f(x) = -x^2 + 2x + 5$.

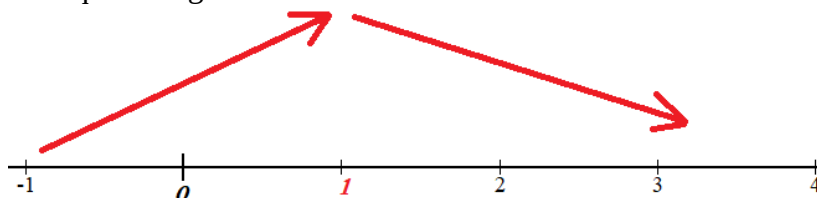
Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor obtenido.

- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -6 + 2 = -4 < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

Como $f(1) = -1^2 + 2 + 5 = 6$ las coordenadas del máximo relativo son $(1, 6)$

c) Por lo visto en el apartado anterior la función crece en $(-1, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

6. El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ con $x = \text{años}$ y $1 \leq x \leq 5$.

- a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 puntos)
 b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? (0.75 puntos)
 c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay? (0.75 puntos)

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4 \Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow$$

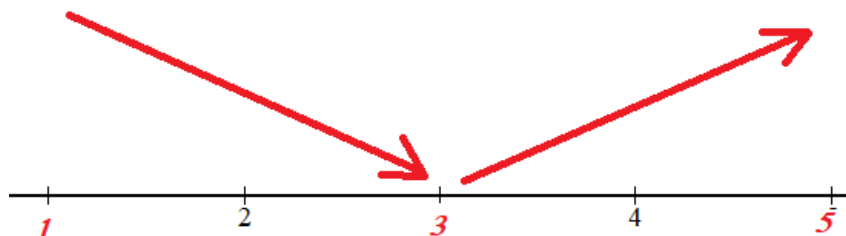
$$\Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Vemos como es el signo de la derivada en (1, 3) y en (3, 5).

- En (1, 3) tomamos $x = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en (1, 3).
- En (3, 5) tomamos $x = 4$ y la derivada vale $P'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en (3, 5).

La función sigue el esquema siguiente:



El número de socios aumenta entre los 3 y los 5 años. Disminuye entre el año 1 y año 3.

b) El valor máximo estará situado en los extremos del intervalo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo para averiguar en cual de esos valores es mayor.

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 8 \\ P(5) &= 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 24 \end{aligned} \right\}$$

El mayor número de socios es 24 y se produce en el año 5.

c) Mirando el esquema del apartado a) el menor número de socios se produce en el año 3.

Como $P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 4$ el número mínimo de socios es 4 en el año 3.

EvAU Extraordinaria 2021

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2021

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.



Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

2. En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:

- Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)
- Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4. De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.

- Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)
- Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)
- Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ t & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

4. En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función: $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, con $t = \text{semanas}$ y $(1 \leq t \leq 4)$.

- ¿Cuántas porciones han vendido durante las dos primeras semanas? (0.5 puntos)
- ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)
- ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

- Calcula $A \cdot C + D^T$. (0.5 puntos)
- Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D \cdot C$ y $D^T \cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)

6. En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2

5. Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8% de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además, una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.

- a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)
- b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

6. Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15$ cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.

- a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
- b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)
- c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONESSección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos “x” al precio de la mesa de gama baja, “y” al precio de la mesa de gama media y “z” al precio de la mesa de gama superior.

“El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas” $\rightarrow z = x + y$

“Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior” $\rightarrow 50y = 30z$

“Por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros” $\rightarrow 5x + 5y + 10z = 7500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 3(x + y) \\ x + y + 2(x + y) = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 3x + 3y \\ x + y + 2x + 2y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ 3x + 3y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x + y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x = 500 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 3(500 - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 1500 - 3y \Rightarrow 5y = 1500 \Rightarrow y = \frac{1500}{5} = 300 \Rightarrow x = 500 - 300 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 200 + 300 = 500$$

Los precios de las mesas son 200 € la de gama baja, 300 € la de gama media y 500 € la de gama superior.

2. En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

- Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)
- Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

a) Llamamos “x” a las hectáreas dedicadas al aguacate e “y” a las hectáreas dedicadas al mango.

Se desea maximizar la ganancia $G(x, y) = 10000x + 12000y$

b) Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

“Se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos” $\rightarrow x + y \leq 18$

“Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas” $\rightarrow x \leq 16$

“Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates” $\rightarrow y \leq x$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

El sistema de inecuaciones queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 18 \\ x \leq 16 \\ y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema y que delimitan la región factible.

$$x + y = 18$$

x	y = 18 - x
2	16
9	9

$$x = 16$$

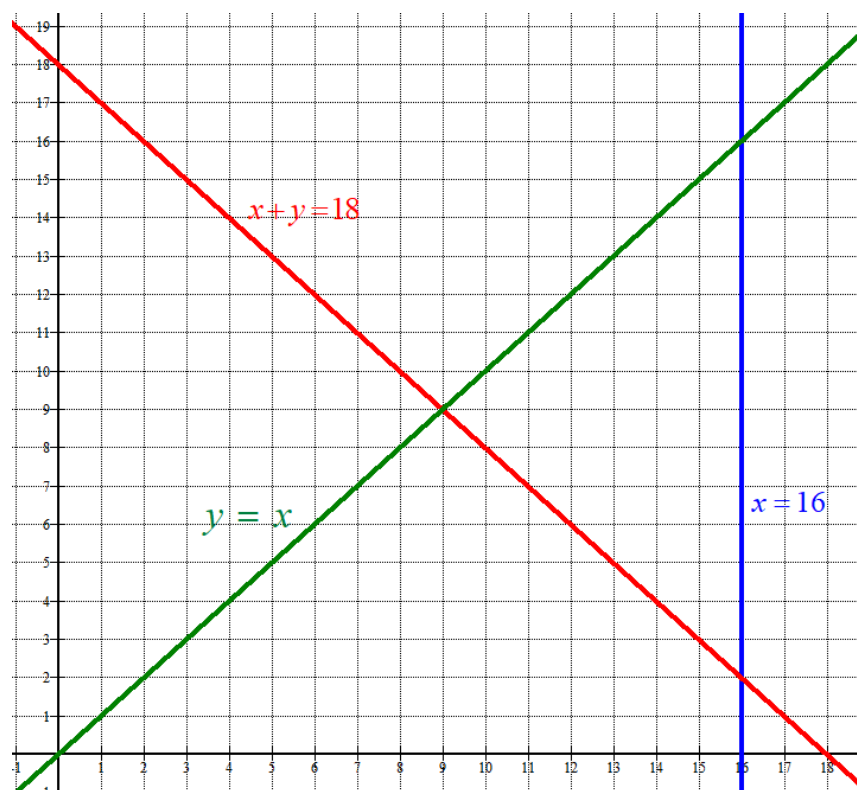
x	y
16	0
16	2

$$y = x$$

x	y = x
0	0
9	9

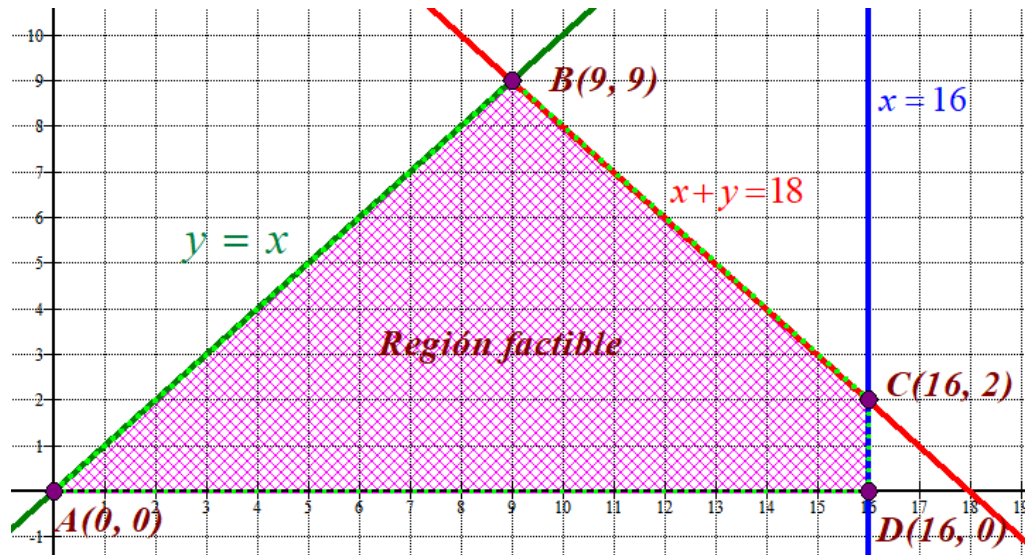
$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 18 \\ x \leq 16 \\ y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de la recta roja y verde y a la izquierda de la recta azul.
Coloreo de rosa esta región del plano que cumple las inecuaciones.



c) Valoramos la función objetivo $G(x, y) = 10000x + 12000y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow G(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$B(9, 9) \rightarrow G(9, 9) = 90000 + 108000 = 198000 \text{ €}$$

$$C(16, 2) \rightarrow G(16, 2) = 160000 + 24000 = 184000 \text{ €}$$

$$D(16, 0) \rightarrow G(16, 0) = 160000 \text{ €}$$

El máximo valor de la función objetivo se obtiene en el vértice B(9, 9).

Hay que plantar 9 hectáreas de aguacate y otras 9 de mangos para obtener un beneficio máximo, siendo este de 198.000 €

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

a) La función es continua en $x = 1$ cuando cumple que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 + t = 4 + t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3)^2 + t = 4 + t \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = 4 + t \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

La función es continua para $t = -1$.

b) Para $t = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En $(1, +\infty)$ la función es una parábola $f(x) = (x-3)^2$.

Averiguamos su vértice para obtener el extremo relativo de la función.

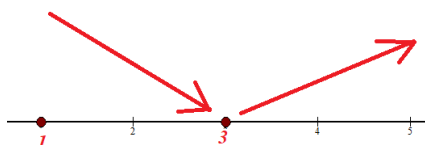
$$f(x) = (x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2(2-3) = -2 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 2(4-3) = 2 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(3) = (3-3)^2 = 0$ las coordenadas del punto mínimo relativo son $(3, 0)$.

c) En el apartado anterior se ha estudiado como crece o decrece la función en $(1, +\infty)$.

La función decrece en el intervalo $(1, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.

2. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

El punto máximo tiene coordenadas $(0, -3)$, por lo que $f(0) = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

Tiene un máximo en $x = 0$, lo que significa que la derivada se anula en dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(x) = 2ax + b \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a(0) + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

En el punto de abscisa $x = -1$ la pendiente de la recta tangente es 6. Esto significa que la derivada primera en $x = -1$ vale 6.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2ax + b \\ b = 0 \\ f'(-1) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = 2a(-1) + 0 \Rightarrow 6 = -2a \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Los valores buscados son $a = -3$; $b = 0$, $c = -3$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:

- Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)
- Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

X = Consumo de azúcar de una persona en una semana en gramos.

Desviación típica = $\sigma = 60$ gramos

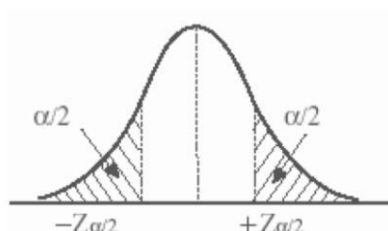
$X = N(\mu, 60)$

Media muestral = $\bar{x} = 200$ gramos. Tamaño de la muestra = $n = 50$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{50}} \approx 16.63 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (200 - 16.63, 200 + 16.63) = (183.37, 216.63)$$

- b) Para disminuir la amplitud del intervalo de confianza hay que disminuir el error que viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este valor puede disminuir disminuyendo $z_{\alpha/2}$ que se consigue disminuyendo el nivel de confianza o aumentando el tamaño de la muestra (n) con lo que disminuye $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

- c) 220 gramos no pertenece al intervalo de confianza (183.37, 216.63) obtenido para un nivel de confianza del 95 % hallado en el apartado anterior. Si disminuimos el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo de confianza y 220 gramos seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza para un 90 % de nivel de confianza. Por lo tanto, NO es admisible.

4. De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.
- a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)
- c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

a) Proporción = $\frac{100 - 6}{100} = \frac{94}{100} = 0.94 = 94\%$ de alumnos que han encontrado trabajo el primer año.

- b) Es la probabilidad de que el primer elegido de entre los 100 no haya encontrado trabajo (hay 6), el segundo elegido de entre los 99 restantes no haya encontrado trabajo (quedan 5) y que el tercer elegido de entre los 98 restantes no haya encontrado trabajo (quedan 4).

Llamamos N_1 al suceso “el elegido en primer lugar no ha encontrado trabajo”, N_2 al suceso “el elegido en segundo lugar no ha encontrado trabajo”, N_3 al suceso “el elegido en tercer lugar no ha encontrado trabajo”.

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P(N_2 / N_1)P(N_3 / (N_1 \cap N_2)) =$$

$$= \frac{6}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot \frac{4}{98} = \boxed{\frac{1}{8085}}$$

c) Nos piden $P(N_2 \cap N_3 / N_1) = \frac{P(N_2 \cap N_3 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{\frac{1}{8085}}{\frac{6}{100}} = \boxed{\frac{10}{4851}}$

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ t & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

a) La función es continua en $x = 0$ cuando cumple que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2)^2 = 4 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

La función es continua para $t = 4$.

b) Para $t = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Esta función es discontinua en $x = 0$ por lo visto en el apartado anterior.

La gráfica de la función son dos trozos de parábola, con un punto desplazado en $x = 0$.

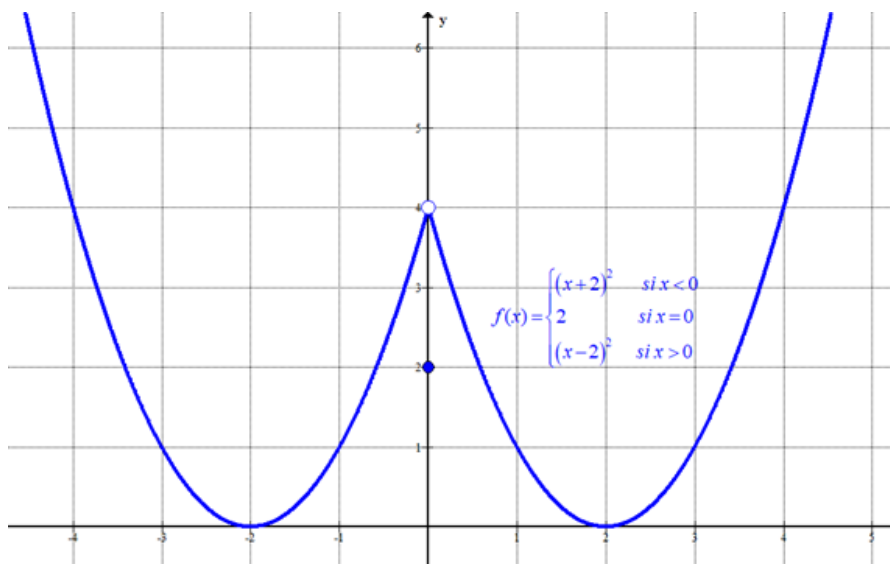
Hallamos los vértices de cada parábola, hacemos una tabla de valores y representamos.

$$\text{si } x < 0 \rightarrow f(x) = (x+2)^2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 2(x+2) \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(x+2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2} \text{ Vértice}$$

$$\text{si } x > 0 \rightarrow f(x) = (x-2)^2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 2(x-2) \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2} \text{ Vértice}$$

$x < 0$	$y = (x+2)^2$
-3	1
-2	0
-1	1

$x > 0$	$y = (x-2)^2$
1	1
2	0
3	1



4. En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función: $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, con $t = \text{semanas}$ y $(1 \leq t \leq 4)$.

- a) ¿Cuántas porciones han vendido durante las dos primeras semanas? (0.5 puntos)
 b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)
 c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

a) Nos piden la suma de las ventas de la primera semana $P(1)$ y las de la segunda $P(2)$.

$$P(1) + P(2) = (-40 + 240 + 540) + (-160 + 480 + 540) = 740 + 860 = 1600$$

b) Lo averiguamos derivando la función e igualando a cero la derivada.

$$P(t) = -40t^2 + 240t + 540 \Rightarrow P'(t) = -80t + 240$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow -80t + 240 = 0 \Rightarrow t = \frac{240}{80} = 3$$

Sustituimos $t = 3$ en la segunda derivada para ver si el punto crítico es máximo o mínimo.

$$P'(t) = -80t + 240 \Rightarrow P''(t) = -80 \Rightarrow P''(3) = -80 < 0$$

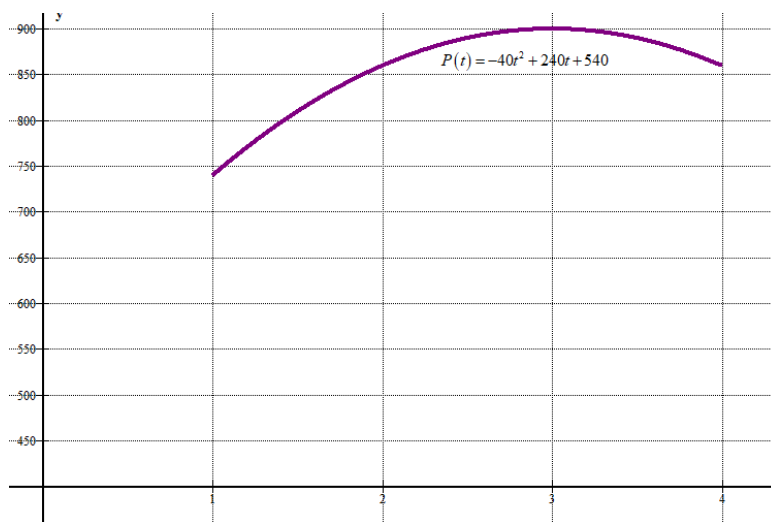
La función alcanza un máximo en $t = 3$.

Como $P(3) = -40 \cdot 3^2 + 240 \cdot 3 + 540 = 900$ podemos decir que en la tercera semana se producen unas ventas máximas de 900 porciones.

c) Valoramos la función en los extremos y como es una parábola uno de esos valores serán el mínimo de ventas.

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = 740 \\ P(4) = -40 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 540 = 860 \end{array} \right\}$$

El valor de ventas mínimo se produce en la primera semana, siendo las ventas de 740 porciones.



Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$. (0.5 puntos)

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D \cdot C$ y $D^T \cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)

a) Realizamos los cálculos pedidos.

$$A \cdot C + D^T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -1/3+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

b) Para que tengan inversa deben determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{No existe } B^{-1}$$

c) Hacemos un esquema para establecer las dimensiones.

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

El resultado del producto es una matriz cuadrada de orden 1.

$$1 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

$$D^T \cdot C^T = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

El resultado del producto es una matriz cuadrada de orden 2

$$2 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

6. En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de motos de gasolina, “y” al número de motos de gasolina y aceite y “z” al número de motos eléctricas.

“Disponen de 100 motos” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas” $\rightarrow y - x = \frac{z}{2}$

“La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite” $\rightarrow x - z = \frac{y}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ y - x = \frac{z}{2} \\ x - z = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2y - 2x = z \\ 3x - 3z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -3x + y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -3x + y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 200 \\ \hline 4y + z = 200 \\ \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -3x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 300 \\ \hline 0 + 4y + 6z = 300 \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ 4y + 6z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ 4y + 6z = 300 \\ -4y - z = -200 \\ \hline 0 + 5z = 100 \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ 5z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ \boxed{z = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 20 = 100 \\ 4y + 20 = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ 4y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ y = \frac{180}{4} = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 45 = 80 \Rightarrow \boxed{x = 35}$$

En el concesionario hay 35 motos de gasolina, 45 de gasolina y aceite y 20 eléctricas.

Bloque 2

5. Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8% de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además, una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.

- a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)
- b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

Podemos pasar los porcentajes a valores absolutos y hacer una tabla de contingencia.

Manejaremos número decimales pues nuestro objetivo es hallar probabilidades. Podríamos optar por un total que nos permitiese trabajar con números enteros pero no es necesario.

Estudiando Grados de Informática hay un $100 - 24.8 = 75.2$ % de hombres

El 95 % de 24.8 es 23.56 mujeres las que terminan informática.

El 85 % de 75.2 es 63.92 hombres los que terminan informática.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Termina informática	No termina informática	
Mujeres estudiando informática	23.56		24.8
Hombres estudiando informática	63.92		75.2
			100

Completamos la tabla.

	Termina informática	No termina informática	
Mujeres estudiando informática	23.56	12.40	24.8
Hombres estudiando informática	63.92	97.76	75.2
	87.48	110.16	100

Con los datos que aparecen en la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Acabe la titulación}) = \frac{87.48}{100} = \boxed{0.8748}$$

- b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea mujer / Ha terminado informática}) = \frac{23.56}{87.48} = \boxed{\frac{589}{2187} \approx 0.2693}$$

6. Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15$ cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
- Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

X = Altura en cm de un tipo de planta.

Desviación típica = $\sigma = 15$ cm

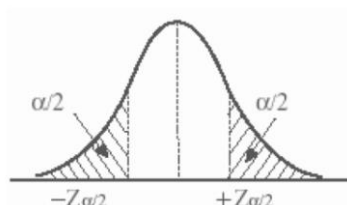
$X = N(\mu, 15)$

Media muestral = $\bar{x} = 110$ cm. Tamaño de la muestra = $n = 400$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}} = 1.47$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (110 - 1.47, 110 + 1.47) = (108.53, 111.47)$$

- b) Si aumentamos el nivel de confianza se aumenta el valor de $1 - \alpha$, con lo que aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ y esto repercute en un aumento del error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por lo que aumentaría la amplitud del intervalo de confianza.

Un aumento del nivel de confianza implica un aumento de la amplitud del intervalo de confianza. De la misma forma si disminuye el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

- c) 109 cm pertenece al intervalo de confianza (108.53, 111.47) hallado en el apartado a).

Por lo tanto, **si** es admisible.

EvAU Ordinaria 2021

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2021

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS

SOCIALES II



El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x, y) = 12x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x \geq y$$

$$x + y \geq 0$$

$$x \leq 3$$

- a) Dibuja la región factible. (1 punto)
- b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)
- c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si } x \leq 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
- b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)
- c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4 . Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un municipio el 5% de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40% pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10% de ellos pertenece al sector turístico.

- a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)
- b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)
4. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.
- a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)
- b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 1.3$ horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podrá aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál será el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)
- b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

4. Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:

$$N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54), \text{ con } x = \text{días y } (1 \leq x \leq 5).$$

- a) ¿Cuál es la proporción el tercer día? (0.25 puntos)
- b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)
- c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
- a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)
- b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

- Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)
- Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30% del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

6. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. (1 punto).

- Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ (0.5 puntos)

SOLUCIONESSección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x, y) = 12x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x \geq y$$

$$x + y \geq 0$$

$$x \leq 3$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$y = x$$

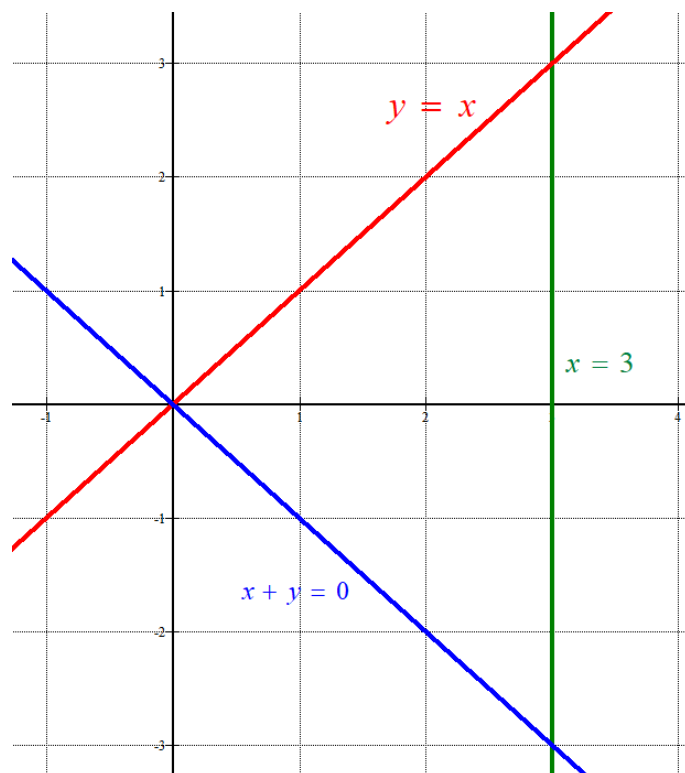
x	y = x
0	0
2	2

$$x + y = 0$$

x	y = -x
0	0
1	-1

$$x = 3$$

Recta vertical



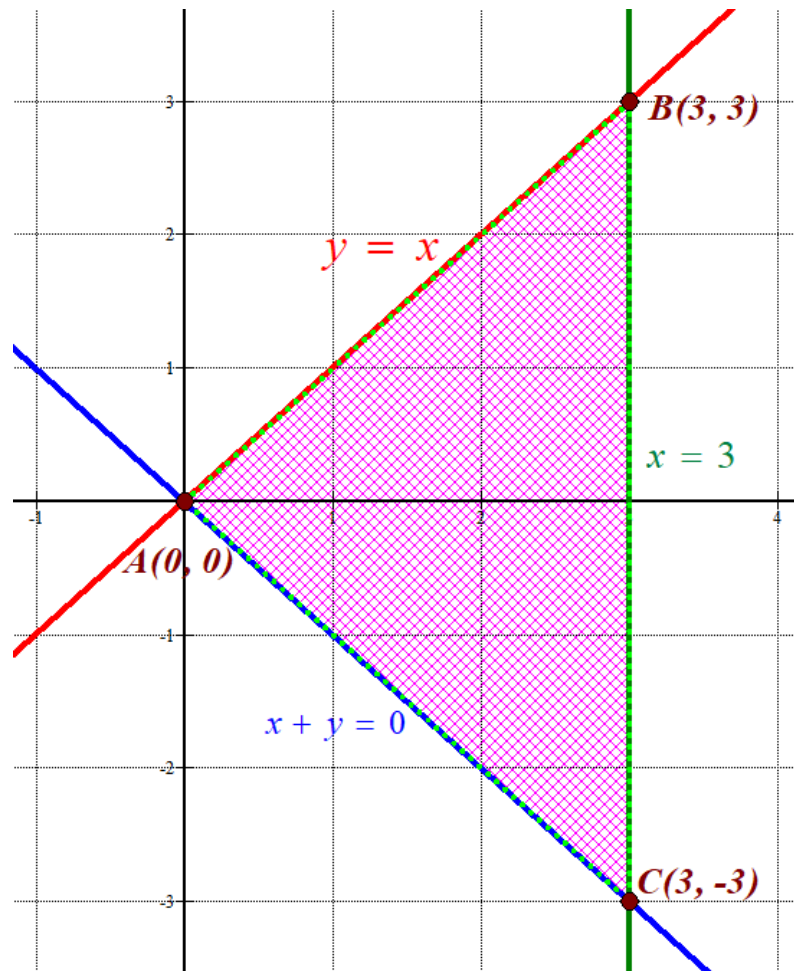
$$x \geq y$$

Como las restricciones son $x + y \geq 0$ la región factible es la región situada por debajo de la recta

$$x \leq 3$$

roja, por encima de la recta azul y a la izquierda de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible.



b) Las coordenadas de los vértices son: $A(0, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(3, -3)$.

Se pueden hallar sus coordenadas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas correspondientes, pero no es necesario.

c) Valoramos la función $f(x, y) = 12x - 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(3, 3) \rightarrow f(3, 3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 30$$

$$C(3, -3) \rightarrow f(3, -3) = 12 \cdot 3 - 2(-3) = 42$$

El valor máximo de $f(x, y) = 12x - 2y$ es 42 y se obtiene en el vértice $C(3, -3)$.

2. En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.
- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de personas que elige la opción A, “y” al número de personas que elige la opción B y “z” al número de personas que elige la opción C.

“Se presentan 120 alumnos” $\rightarrow x + y + z = 120$

“El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C” $\rightarrow x = 3(y + z)$

“Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B” $\rightarrow z = 2y$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 120 \\ x = 3(y + z) \\ z = 2y \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 120 \\ x = 3(y + z) \\ z = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2y = 120 \\ x = 3(y + 2y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 120 \\ x = 9y \end{array} \right\} \Rightarrow 9y + 3y = 120 \Rightarrow 12y = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{120}{12} = 10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 90} \\ \boxed{z = 20} \end{array} \right.$$

90 personas eligen la opción A, 10 eligen la B y 20 la opción C.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si } x \leq 1 \\ (x-3)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
 b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)
 c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

a) La función es continua en $x = 1$ cuando cumple que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1+3+t = 4+t \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x+3+t = 4+t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3)^2 + t = 4+t \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4+t$$

La función es continua para cualquier valor de t .

b) Para $t = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En $(1, +\infty)$ la función es una parábola $f(x) = (x-3)^2$

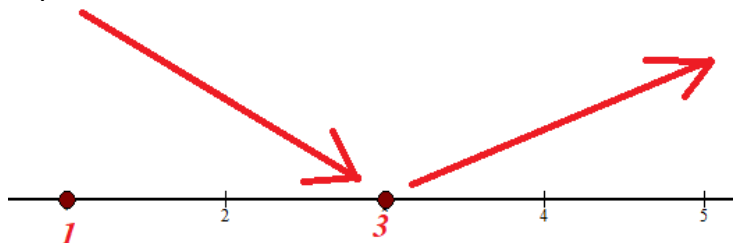
Averiguamos su vértice para obtener el extremo relativo de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-3) \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2(2-3) = -2 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 2(4-3) = 2 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(3) = (3-3)^2 = 0$ las coordenadas del punto mínimo relativo son $(3, 0)$.

c) En el apartado anterior se ha estudiado como crece o decrece la función en $(1, +\infty)$.

La función decrece en el intervalo $(1, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4 . Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 puntos)

El punto de inflexión tiene coordenadas $(-1, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \\ f(-1) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = -a + b - c \Rightarrow \boxed{-a + b - c = 6}$$

Tiene un punto de inflexión en $x = -1$, lo que significa que la derivada segunda se anula en dicho valor.

$$\begin{aligned} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx &\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \\ \left. \begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(-1) = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow 0 = 6a(-1) + 2b \Rightarrow 0 = -6a + 2b \Rightarrow 0 = -3a + b \Rightarrow \boxed{b = 3a} \end{aligned}$$

En el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4 . Esto significa que la derivada primera en $x = -2$ vale -4 .

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(-2) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c \Rightarrow \boxed{-4 = 12a - 4b + c}$$

Reunimos las tres condiciones en un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -4 = 12a - 4b + c \\ -a + b - c = 6 \\ b = 3a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 = 12a - 4(3a) + c \\ -a + 3a - c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{-4 = c} \\ 2a - c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - (-4) = 6 \Rightarrow$$

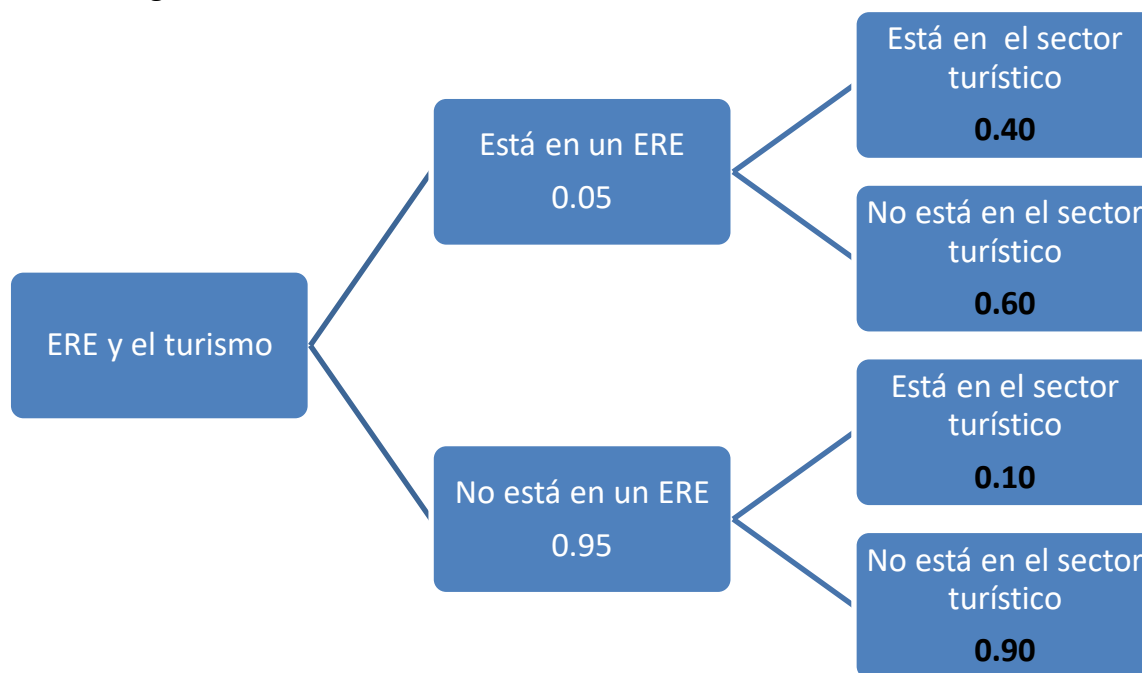
$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 3(1) = 3}$$

Los valores buscados son $a = 1$; $b = 3$, $c = -4$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un municipio el 5% de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40% pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10% de ellos pertenece al sector turístico.
- a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)
- b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos A = estar en un ERE. $\bar{A}$ = No estar en un ERE.

Llamamos T = Estar en el sector turístico. $\bar{T}$ = No estar en el sector turístico.

- a) Nos piden calcular $P(T)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(A)P(T/A) + P(\bar{A})P(T/\bar{A}) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = \boxed{0.115}$$

- b) Nos piden calcular $P(A/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A)P(T/A)}{P(T)} = \frac{0.05 \cdot 0.4}{0.115} = \boxed{\frac{4}{23} \approx 0.1739}$$

4. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.
- Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)
 - ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 1.3$ horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podrá aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)
 - ¿Cuál será el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

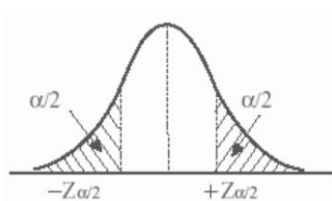
X = Tiempo de uso del móvil por un alumno de un instituto en horas. Desviación típica = $\sigma = 20$ minutos = $1/3$ hora. $X = N(\mu, 1/3)$

Media muestral = $\bar{x} = 2$ horas. Tamaño de la muestra = $n = 36$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1/3}{\sqrt{36}} \approx 0.1089$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (2 - 0.1089, 2 + 0.1089) = (1.8911, 2.1089)$$

- b) 1.3 horas no pertenece al intervalo de confianza (1.8911, 2.1089) hallado en el apartado anterior. Por lo tanto, no es admisible.

- c) Con un nivel de confianza del 94.64 %

$$1 - \alpha = 0,9464 \rightarrow \alpha = 0,0536 \rightarrow \alpha/2 = 0,0268 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.93$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{1/3}{\sqrt{100}} \approx 0.0643$$

El error máximo es de aproximadamente 0.0643 horas.

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

a) La función es continua en $x = 0$ cuando cumple que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(x-t)^2 = -(0-t)^2 = -t^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = 0^2 - 2 = -2 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 = -t^2 \Rightarrow 2 = t^2 \Rightarrow \boxed{t = \pm\sqrt{2}}$$

La función es continua en $x = 0$ cuando $t = \pm\sqrt{2}$.

b) Para $t = -1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Por lo visto en el apartado anterior la función es discontinua en $x = 0$.

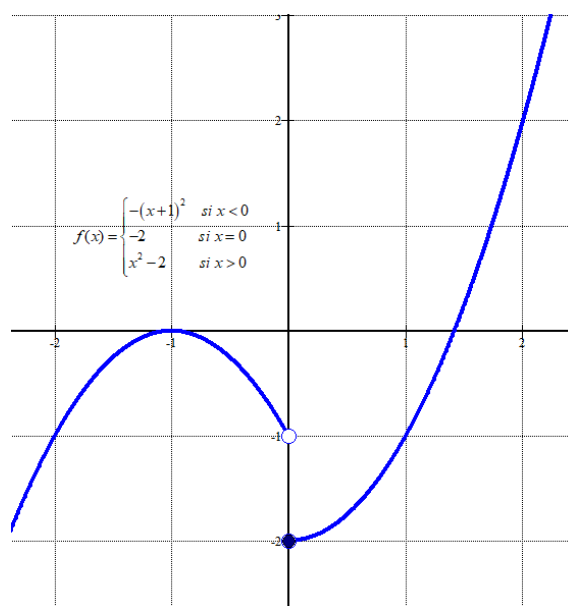
La gráfica serán dos trozos de dos parábolas. Hallamos los vértices y hacemos una tabla de valores.

$$\begin{aligned} \text{si } x < 0 &\Rightarrow f(x) = -(x+1)^2 \Rightarrow f'(x) = -2(x+1) \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow -2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ Vértice} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } x > 0 &\Rightarrow f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Vértice} \end{aligned}$$

x	$y = -(x+1)^2$
-2	-1
-1	0
0	-1 No se incluye

x	$y = x^2 - 2$
0	-2 No se incluye
1	-1
2	2



4. Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:

$$N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54), \text{ con } x = \text{días y } (1 \leq x \leq 5).$$

- a) ¿Cuál es la proporción el tercer día? (0.25 puntos)
 b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)
 c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

a) Nos piden el valor de $N(3)$.

$$N(3) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 3^4 + 128 \cdot 3^2 + 54) = 8.82. \text{ La proporción es de } 8,82\%.$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero.

$$N'(x) = \frac{1}{100}(-16x^3 + 256x)$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{100}(-16x^3 + 256x) = 0 \Rightarrow -16x^3 + 256x = 0 \Rightarrow -16x(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow$$

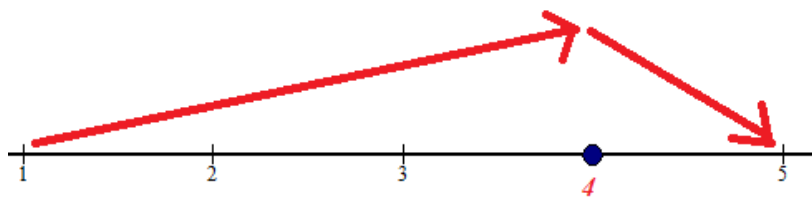
$$\Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{16} = \pm 4}$$

Solamente consideramos el valor $x = 4$

Vemos como evoluciona la derivada en el intervalo $[1,5]$ antes y después de $x = 4$.

- En $[1,4)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $N'(2) = \frac{1}{100}(-128 + 512) = 3.84 > 0$. La función crece en $[1,4)$
- En $(4,5]$ tomamos $x = 4.5$ y la derivada vale $N'(4.5) = \frac{1}{100}(-1458 + 1152) = -3.06 < 0$. La función decrece en $(4,5]$.

La función sigue el esquema:



El valor máximo se obtiene el 4º día.

Valoramos la función el día 1 y el 5 para determinar el valor mínimo.

$$N(1) = \frac{1}{100}(-4 + 128 + 54) = 1.78$$

$$N(5) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 5^4 + 128 \cdot 5^2 + 54) = 7.54$$

El valor mínimo se alcanza el día 1.

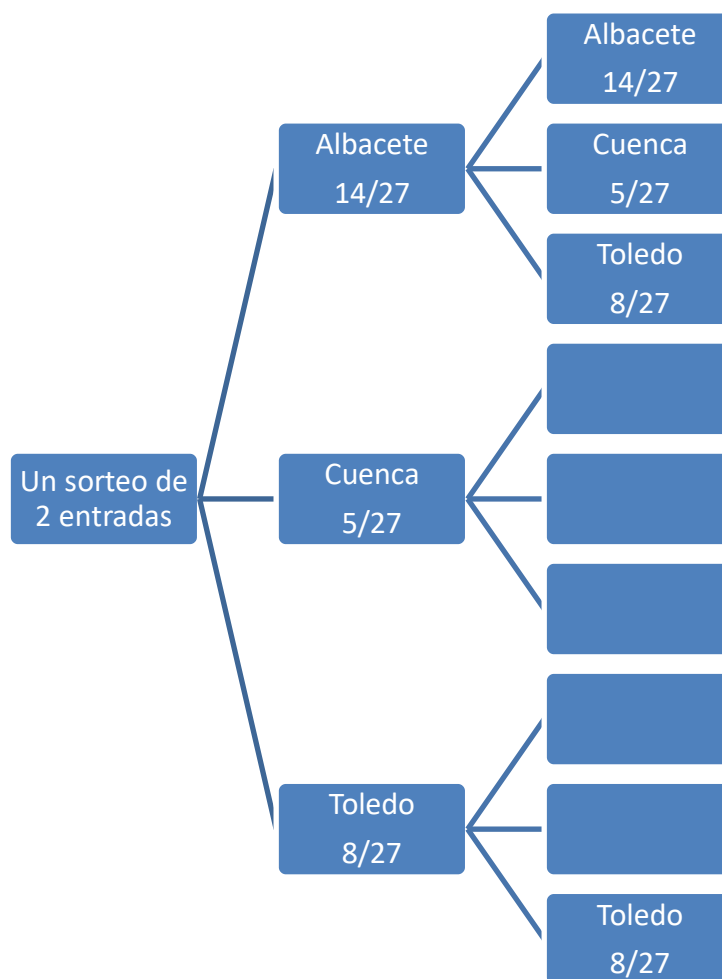
- c) El valor mínimo es 1.78 % y el máximo es $N(4) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 4^4 + 128 \cdot 4^2 + 54) = 10.78\%$.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
- a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)
- b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

Ejercicio puesto en el año 2018.

Hacemos un diagrama de árbol. Como le pueden tocar las dos entradas a la misma persona, en el sorteo de la segunda entrada la probabilidad de que le toque a alguien de Albacete es la misma que en el sorteo de la primera entrada.



Llamamos A =Tocar la entrada a uno de Albacete. C = Tocar la entrada a uno de Cuenca.

T = Tocar la entrada a uno de Toledo.

- a) Llamaremos A1, A2 a que toque la primera o segunda entrada a un alumno de Albacete. Las probabilidades de que toque en primer o segundo sorteo tiene el mismo valor, pues todos vuelven a participar en el segundo sorteo.
- $P(A) = 14/27$. $P(C) = 5/27$. $P(T) = 8/27$.

$$P(\overline{A1} \cap \overline{A2}) = \{\text{Sucesos independientes}\} = P(\overline{A1})P(\overline{A2}) = \left(1 - \frac{14}{27}\right)\left(1 - \frac{14}{27}\right) = \boxed{\frac{169}{729} \approx 0.2318}$$

- b) Ahora las probabilidades de que toque a un alumno de Albacete va cambiando en cada sorteo sucesivo. Las probabilidades sucesivas dependen de lo que haya pasado en los sorteos previos. Nos piden la probabilidad del suceso $T1 \cap T2 \cap T3 \cap T4 \cap T5$.

Como tenemos las probabilidades de que le toque a un alumno de Toledo en cada sorteo sucesivo.

$$P(T1) = \frac{8}{27}; P(T2/T1) = \frac{7}{26}; P(T3/(T1 \cap T2)) = \frac{6}{25}$$

$$P(T4/(T1 \cap T2 \cap T3)) = \frac{5}{24}; P(T5/(T1 \cap T2 \cap T3 \cap T4)) = \frac{4}{23}$$

Lo aplicamos al cálculo de la probabilidad de que le toquen las cinco entradas en los cinco sorteos sucesivos.

$$\begin{aligned} P(T1 \cap T2 \cap T3 \cap T4 \cap T5) &= \\ &= P(T1)P(T2/T1)P(T3/(T1 \cap T2))P(T4/(T1 \cap T2 \cap T3))P(T5/(T1 \cap T2 \cap T3 \cap T4)) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} = \boxed{\frac{28}{40365} \approx 0.000693} \end{aligned}$$

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:
- Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)
 - Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
 - ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

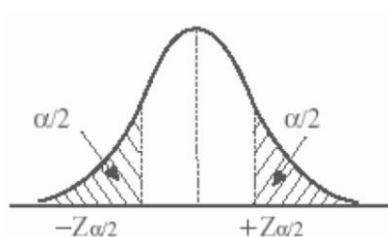
X = Contenido en azúcar de una lata de refresco en gramos. $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de la muestra = $n = 10$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{70 + 75 + 85 + 100 + 60 + 80 + 120 + 95 + 65 + 90}{10} = 84 \text{ gramos}$$

- a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.8621$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (84 - 6.8621, 84 + 6.8621) = (77.1379, 90.8621)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$. Si mantenemos el nivel de confianza entonces debemos aumentar el tamaño de la muestra para conseguir un intervalo de confianza con menos amplitud.

- c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es $(77.1379, 90.8621)$.

La media de 90 gramos pertenece a este intervalo. Si aumentamos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ será mayor y el intervalo de confianza tendrá mayor amplitud.

La media de 90 gramos seguirá perteneciendo al intervalo de confianza.

Bloque 2

5. Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30% del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de personas que responden “SI”, “y” al número de los que responden “NO” y “Z” a los que responden “NO SABE/NO CONTESTA”.

Son 600 respuestas $\rightarrow x + y + z = 600$

“Los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA” $\rightarrow y = \frac{z}{2}$

“El 30 % de los que dicen SI o NO son 135” $\rightarrow \frac{30}{100}(x + y) = 135$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ y = \frac{z}{2} \\ \frac{30}{100}(x + y) = 135 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 2y = z \\ 0.3x + 0.3y = 135 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 2y = z \\ x + y = 450 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 2y = z \\ x + y = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2y = 600 \\ x + y = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 600 \\ x + y = 450 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 600 \\ x = 450 - y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 450 - y + 3y = 600 \Rightarrow 2y = 150 \Rightarrow \boxed{y = 75} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 450 - 75 = 375} \\ \boxed{z = 2 \cdot 75 = 150} \end{array} \right.$$

Responden “SI” 375 personas, “NO” responden 75 y “NO SABE/NO CONTESTA” lo responden 150.

6. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. (1 punto).
- b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ (0.5 puntos)

a) Calculamos las matrices inversas.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |N| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$$N^{-1} = \frac{\text{Adj}(N^T)}{|N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 & 4+3 \\ 1+1 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \neq 0$$

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{\text{Adj}((M \cdot N)^T)}{|M \cdot N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Comprobamos la igualdad:

$$\left. \begin{aligned} N^{-1} \cdot M^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & -3-4 \\ -1-1 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \\ (M \cdot N)^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$$

b) Como M tiene inversa despejamos de la ecuación.

$$M \cdot X = N \Rightarrow X = M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2-3 \\ -1-2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

EvAU Extraordinaria 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Curso 2019/2020

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.

- Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).
- Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -4x + 4 & \text{si } x \leq c \\ x^2 - 4x & \text{si } x > c \end{cases}$

- ¿Para qué valor de la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)
- Para $c = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

2. Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El 10% de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.

- ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)
- Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

4. El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:

- Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)
- Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x-t & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)
- Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)
- Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \leq x \leq 5$, siendo $x=1$ el lunes y $x=5$ el viernes.

- ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)
- ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50% de votos más que C.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

- Calcula $(A - B)^2$. (0.75 ptos)
- ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A - B)^2$? (0.25 ptos)
- ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$? (0.5 ptos)

Bloque 2

5. En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.

- Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)
- Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

- Halla el intervalo de confianza del 97% para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)
- Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1.**

1. Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Llamemos x = precio del teléfono de precio reducido, y = precio del teléfono de precio medio, z = precio del teléfono de precio superior.

a) Transformamos la información proporcionada en ecuaciones.

- “El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos” $\rightarrow z = x + y$
- “Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior” $\rightarrow 50y = 30z$
- “Por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros” $\rightarrow 5x + 5y + 10z = 7500$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema despejando y sustituyendo.

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 3(x + y) \\ x + y + 2(x + y) = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 3x + 3y \\ x + y + 2x + 2y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ 3x + 3y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x + y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x = 500 - y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 3(500 - y) \Rightarrow 2y = 1500 - 3y \Rightarrow 5y = 1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1500}{5} = 300} \Rightarrow \boxed{x = 500 - 300 = 200} \Rightarrow \boxed{z = 300 + 200 = 500}$$

Los precios son de 200 € el teléfono de precio reducido, 300 € el de precio medio y 500 € el de precio superior.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1.

2. En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.

- Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).
- Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Llamamos “x” al número de tartas tipo A e “y” al número de tartas tipo B.

Realizamos una tabla para aclarar cuanto chocolate con leche y negro necesitamos y cuanto beneficio obtenemos en función del número de tartas de cada tipo que hagamos.

	Gramos de chocolate con leche	Gramos de chocolate negro	Beneficio
Nº de tartas tipo A (x)	100x	200x	5x
Nº de tartas tipo B (y)	200y	100y	4y
	100x + 200y	200x + 100y	5x + 4y

- a) “Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros” →

$$B(x, y) = 5x + 4y$$

- b) “Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate” → $100x + 200y \leq 9000$; $200x + 100y \leq 9000$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 100x + 200y \leq 9000 \\ 200x + 100y \leq 9000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- c) Representamos el recinto del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$x + 2y = 90$$

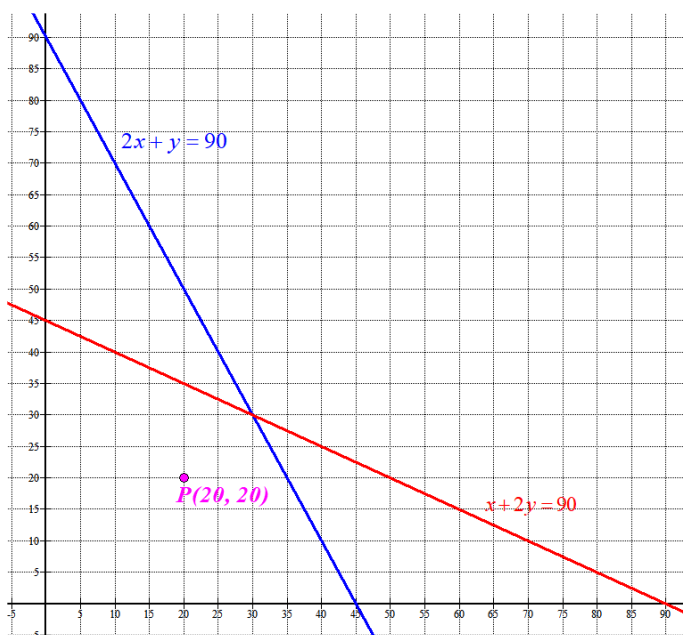
x	y = $\frac{90 - x}{2}$
0	45
90	0

$$2x + y = 90$$

x	y = $90 - 2x$
0	90
45	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

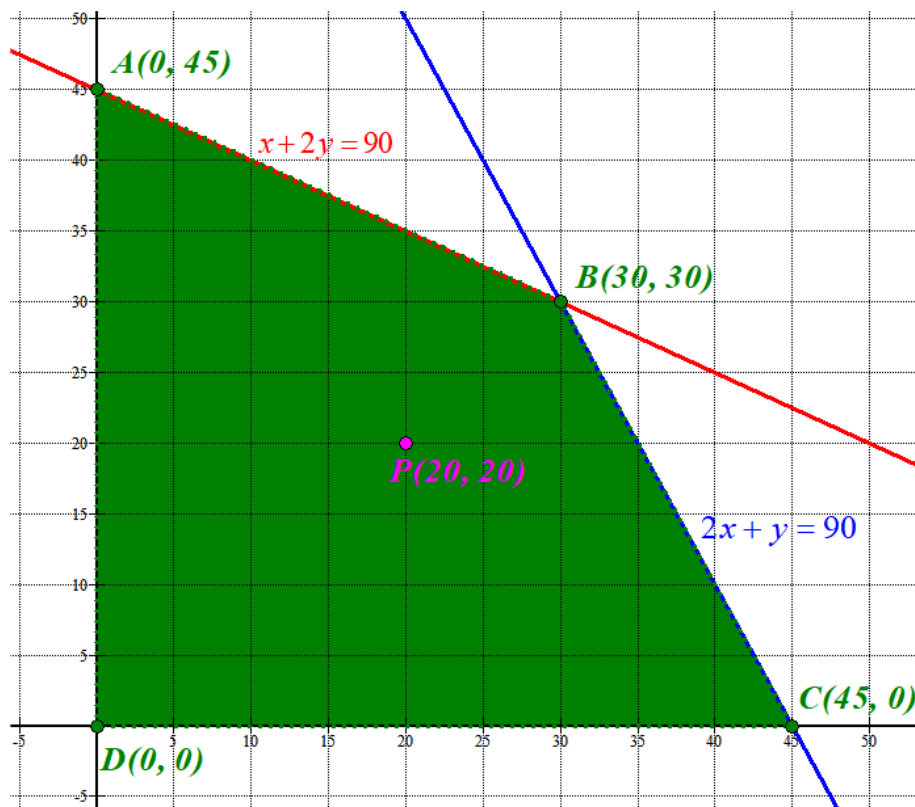
(Primer cuadrante)



Comprobamos si el punto $P(20, 20)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} P(20, 20) \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20 + 40 \leq 90 \\ 40 + 20 \leq 90 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen y por tanto la región factible es la zona de color verde del dibujo inferior.



Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 45) \rightarrow B(0, 45) = 180$$

$$B(30, 30) \rightarrow B(30, 30) = 150 + 120 = 270$$

$$C(45, 0) \rightarrow B(45, 0) = 225$$

$$D(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

El beneficio máximo se produce en el vértice $B(30, 30)$.

Vendiendo 30 tartas de cada tipo se obtiene un beneficio máximo de 270 €.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & \text{si } x \leq c \\ x^2 - 4x & \text{si } x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que sea continua debe cumplirse que los límites laterales en $x = c$ sean iguales al valor de la función.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^-} -4x + 4 = -4c + 4 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} x^2 - 4x = c^2 - 4c \\ f(c) = -4c + 4 \end{cases} \Rightarrow c^2 - 4c = -4c + 4 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{4} = \pm 2}$$

b) Para $c = 2$, $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$, sabemos por el apartado anterior que es continua.

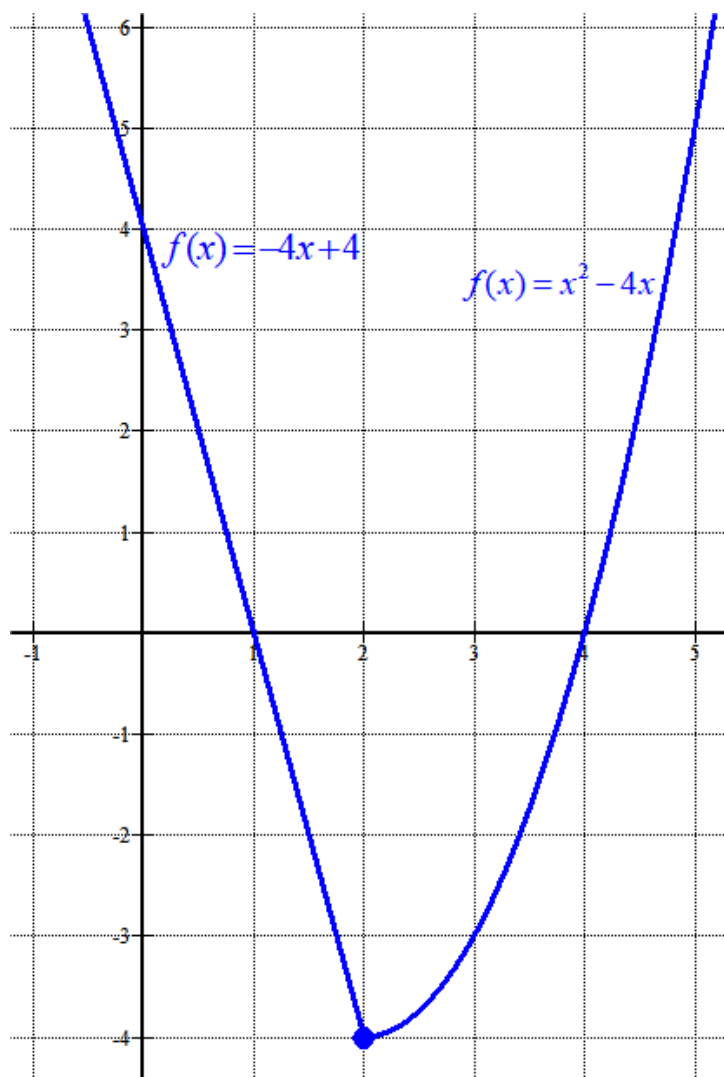
Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

$$f(x) = -4x + 4 \quad \text{si } x \leq 2$$

x	$y = -4x + 4$
0	4
2	$-8 + 4 = -4$

$$f(x) = x^2 - 4x \quad \text{si } x > 2$$

x	$y = (x-4)^2 - 4$
2	-4 (no se incluye)
3	$9 - 12 = -3$
4	$16 - 16 = 0$
5	$25 - 20 = 5$
6	$36 - 24 = 12$



Sección 1 (3 puntos) Bloque 2.

2. Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

Si tiene un máximo en $x = -1$ entonces se anula la derivada en $x = -1$.

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow \underline{3 - 2a + b = 0}$$

Si tiene un punto de inflexión en $x = 1$ entonces se anula la derivada segunda en $x = 1$.

$$f''(1) = 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \underline{a = -3}$$

Sustituimos el valor obtenido de “a” en la igualdad obtenida primero y despejamos b :

$$\left. \begin{array}{l} 3 - 2a + b = 0 \\ a = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -9}$$

¡Nos falta el valor de c !

Tenemos una última información: La función pasa por el punto $(1, -9)$, por lo que $f(1) = -9$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 + a + b + c = -9 \\ a = -3 \\ b = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 3 - 9 + c = -9 \Rightarrow \underline{c = 2}$$

Los valores de los parámetros son $\underline{a = -3, b = -9 \text{ y } c = 2}$.

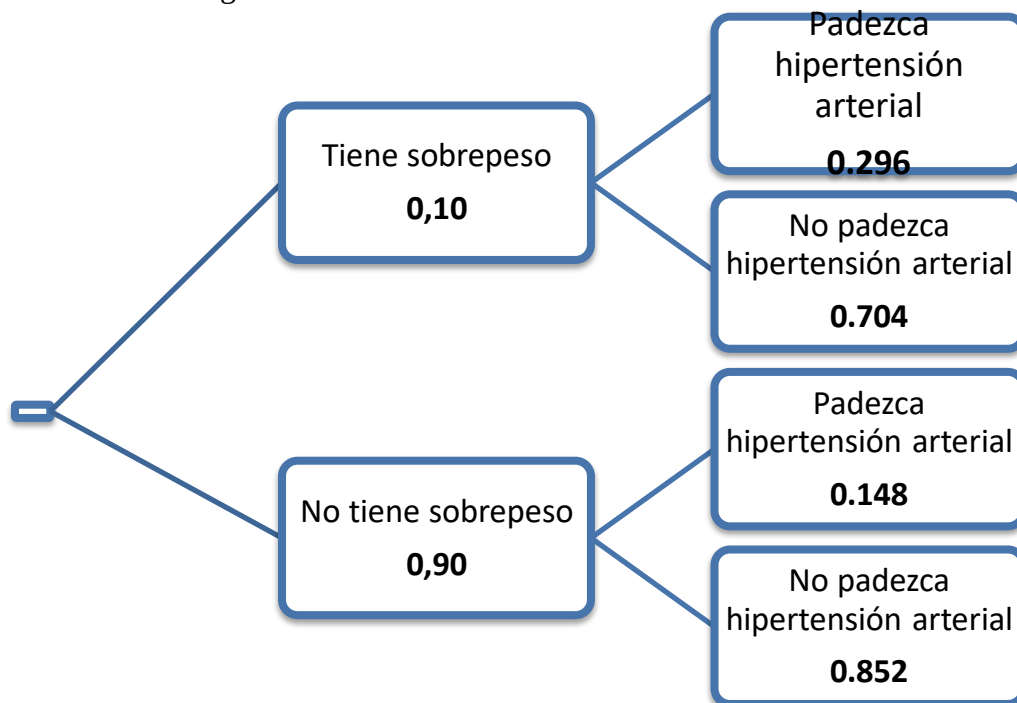
Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1.

3. El 10% de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.

- a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 pts)
 b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 pts)

El 10% de los adultos padece sobrepeso $\rightarrow$ El 90% de los adultos no padecen sobrepeso
 La probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %. El riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso $\rightarrow$ La probabilidad de padecer hipertensión arterial en personas con sobrepeso es $2 \cdot 14.8 = 29.6$ %.

Construimos el diagrama de árbol asociado a estos datos.



a) $P(\text{Sobrepeso e hipertensión arterial}) = 0,10 \cdot 0.296 = 0.0296 = \boxed{2.96\%}$

El porcentaje de adultos que tienen sobrepeso e hipertensión arterial es del 2.96%.

b)

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Tenga sobrepeso} / \text{Tiene hipertensión arterial}) = \\
 &= \frac{P(\text{Tenga sobrepeso} \cap \text{Tiene hipertensión arterial})}{P(\text{Tenga hipertensión arterial})} = \\
 &= \frac{0,10 \cdot 0.296}{0,10 \cdot 0.296 + 0.90 \cdot 0.148} = \frac{2}{11} = \boxed{0.1818 = 18.2\%}
 \end{aligned}$$

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1.

4. El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:

- Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)
- Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

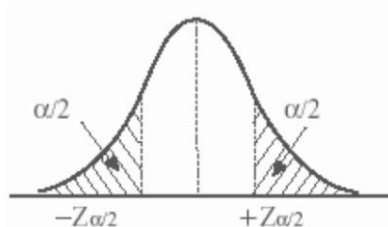
X = El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha (minutos).

$X = N(\mu, 30)$

Tamaño de muestra $n = 50$. Media muestral $= \bar{x} = 220$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{50}} = 8,316$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (220 - 8,316, 220 + 8,316) = (211,684, 228,316)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza.

- c) Con un nivel de confianza del 90% hallamos el intervalo de confianza para la media.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,45}$$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,45 \cdot \frac{30}{\sqrt{50}} = 6,152$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (220 - 6,152, 220 + 6,152) = (213,848, 226,152)$$

La media de 230 no pertenece a este intervalo.

También podríamos haber razonado diciendo que si disminuimos el nivel de confianza al 90% la amplitud del intervalo de confianza disminuye y la media 230 no pertenecía al intervalo de confianza del 97% y seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza, pues este nuevo intervalo tiene el mismo centro pero menos amplitud.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 2.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x-t & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)
 b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)
 c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

- a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben de ser iguales el valor de la función y el límite en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x - t = -t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 = t^2 - 5t + 4 \end{cases} \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = -t \Rightarrow$$

$$f(0) = 0 - t = -t$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe ser $t = 2$.

- b) Para $t = 0$ tenemos $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 5x + 4$ si $x > 0$.

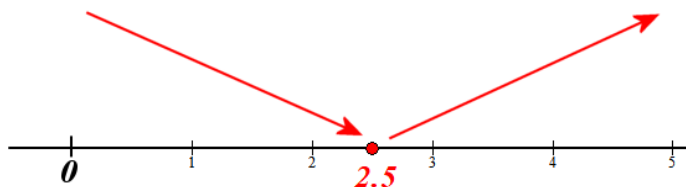
Derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Veamos la evolución del signo de la derivada antes y después de $x = 2.5$.

- En el intervalo $(0, 2.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 - 5 = -3 < 0$. La función decrece en el intervalo $(0, 2.5)$.
- En el intervalo $(2.5, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 8 - 5 = 3 > 0$. La función crece en el intervalo $(2.5, +\infty)$.



La función tiene un mínimo en $x = 2.5$. $f(2.5) = 2.5^2 - 12.5 + 4 = -2.25$.

La función presenta un mínimo en el punto $(2.5, -2.25)$

- c) Por el estudio realizado en el apartado anterior podemos decir que la función $f(x)$ decrece en $(0, 2.5)$ y crece en $(2.5, +\infty)$.

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 2.

4. En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \leq x \leq 5$, siendo $x=1$ el lunes y $x=5$ el viernes.

- a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)
 b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

Una forma de hacerlo.

Hacemos una tabla de valores con el número de clientes de los 5 días y vemos cual es la respuesta a cada apartado del ejercicio.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75, \quad 1 \leq x \leq 5$$

x	$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$
1	$2 - 15 + 24 + 75 = 86$ clientes
2	$16 - 60 + 48 + 75 = 79$ clientes
3	$54 - 135 + 72 + 75 = 66$ clientes
4	59 clientes
5	70 clientes

a) El día 4 (Jueves) acuden menos clientes (59 clientes).

b) El día 1 (Lunes) acuden más clientes (86 clientes)

Otra forma de hacerlo.

Lo resolvemos con la derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Utilizamos la derivada segunda para identificar los puntos críticos obtenidos.

$$f''(x) = 12x - 30 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f''(1) = 12 - 30 = -18 < 0 \rightarrow \text{Es máximo} \\ x = 4 \Rightarrow f''(4) = 48 - 30 = 18 > 0 \rightarrow \text{Es mínimo} \end{cases}$$

En $x = 1$ es un máximo relativo, valoramos en el otro extremo del intervalo ($x = 5$) para decidir si es un máximo absoluto.

$$f(1) = 86; f(5) = 70 \rightarrow \text{El máximo absoluto está en el día 1 (Lunes) con 86 clientes.}$$

En $x = 4$ es un mínimo relativo, valoramos en los extremos del intervalo ($x = 1$ y $x = 5$) para decidir si es un máximo absoluto.

$$f(4) = 59; f(1) = 86; f(5) = 70 \rightarrow \text{El mínimo absoluto está en el día 4 (Jueves) con 59 clientes.}$$

a) El día 4 (Jueves) acuden menos clientes (59 clientes).

b) El día 1 (Lunes) acuden más clientes (86 clientes)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1.

5. La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50% de votos más que C.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película.

(1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Llamemos “x” al número de votos de A, “y” al número de votos de B y “z” al número de votos de C.

a) “El número de votantes es de 1200 personas” $\rightarrow x + y + z = 1200$

“El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas” $\rightarrow x = 2(y + z)$

“B consigue el 50% de votos más que C” $\rightarrow y = z + 0,5z = 1,5z$

Resumimos todo en un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x = 2(y + z) \\ y = 1,5z \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x = 2(y + z) \\ y = 1,5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ x = 2y + 2z \\ y = 1,5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1,5z + z = 1200 \\ x = 2 \cdot 1,5z + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2,5z = 1200 \\ x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2,5z = 1200 \\ x = 5z \end{array} \right\} \Rightarrow 5z + 2,5z = 1200 \Rightarrow 7,5z = 1200 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1200}{7,5} = 160} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5 \cdot 160 = 800} \Rightarrow \boxed{y = 1,5 \cdot 160 = 240}$$

La película A recibe 800 votos, la B 240 y la C recibe 160 votos.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - B)^2$. (0.75 ptos)

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A - B)^2$? (0.25 ptos)

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$? (0.5 ptos)

a)

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3+5 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos su determinante y vemos si es cero.

$$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow |(A - B)^2| = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = 225 \neq 0$$

Tiene inversa y se podría calcular al ser su determinante no nulo.

c)

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = AA - AB - BA - BB = A^2 - AB - BA - B^2 \left. \vphantom{\begin{matrix} A^2 - AB - BA - B^2 \\ A^2 - 2AB - B^2 \end{matrix}} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Son iguales cuando } \cancel{A^2} - AB - BA - \cancel{B^2} = \cancel{A^2} - 2AB - \cancel{B^2} \Rightarrow -AB + 2AB = BA \rightarrow AB = BA$$

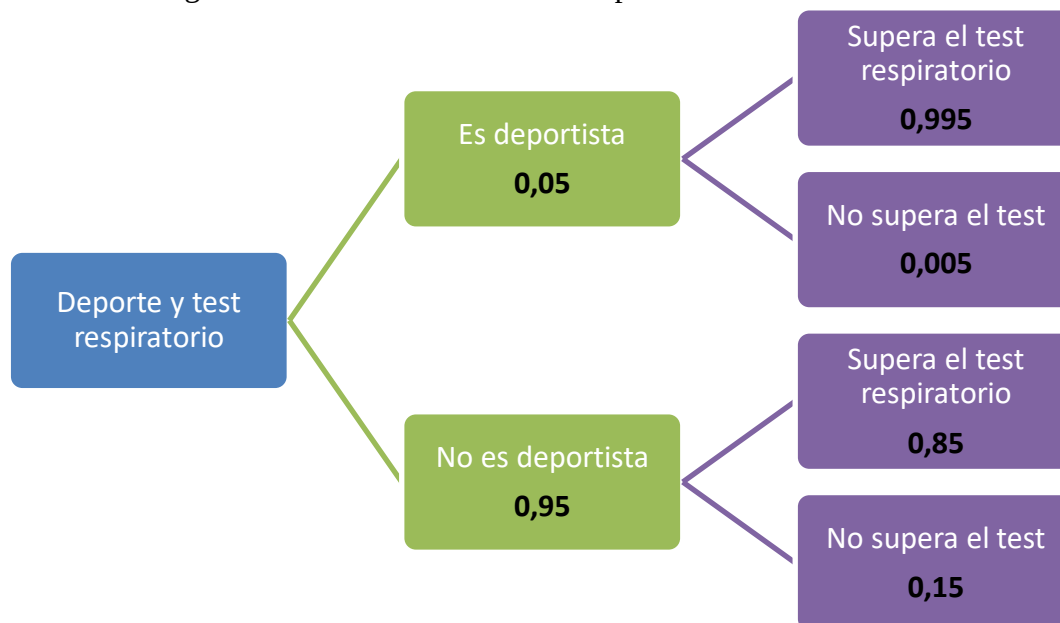
La igualdad se cumple cuando se cumpla que $AB = BA$.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 2.

5. En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.

- a) Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)
- b) Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

Realizamos el diagrama de árbol asociado a este experimento.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y los datos del diagrama de árbol.

$$P(\text{No supere el test respiratorio}) =$$

$$= P(\text{Es deportista})P(\text{No supere el test respiratorio/Es deportista}) + \\ + P(\text{No es deportista})P(\text{No supere el test respiratorio/No es deportista}) =$$

$$= \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} =$$

$$= 0,05 \cdot 0,005 + 0,95 \cdot 0,15 = 0,00025 + 0,1425 = \boxed{0,14275}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea deportista} / \text{No ha superado el test}) =$$

$$= \frac{P(\text{Sea deportista} \cap \text{No ha superado el test})}{P(\text{No ha superado el test})} = \frac{0,05 \cdot 0,005}{0,14275} = \frac{1}{571} = \boxed{0,00175}$$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 2.

6. Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

- Halla el intervalo de confianza del 97% para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)
- Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

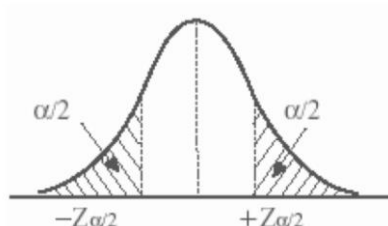
X = contenido en fibra de un frasco de berenjenas de Almagro (gramos). $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de la muestra $n = 10$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{60 + 80 + 120 + 95 + 65 + 70 + 75 + 85 + 100 + 90}{10} = 84$$

- a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6,862$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (84 - 6,862, 84 + 6,862) = (77,138, 90,862)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si mantenemos constante el $z_{\alpha/2}$ (el nivel de confianza) y la desviación típica solo podemos aumentar el tamaño de la muestra (n está en el denominador) para conseguir esta disminución.
- c) La media de $\mu = 85$ pertenece al intervalo de confianza $(77,138, 90,862)$, obtenido con un nivel de confianza del 97%.
Si aumentamos el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo y 85 seguirá estando en el nuevo intervalo de confianza.

EvAU Ordinaria 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Curso 2019/2020

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ t & \text{si } -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -2$. (0.5 ptos)
b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

Bloque 2

1. Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 pto)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \quad x - y \leq 2; \quad y \leq 1; \quad x \geq 0$$

- a) Dibuja la región factible. (1 punto)
b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un instituto el 15% de los alumnos ven la tele todos los días, el 25% juegan todos los días a la consola y el 26% ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.

- a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)
b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

4. Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7,

5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas de duración de la batería” sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

- Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)
- Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? (0.75 ptos)
- Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)
- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1; +\infty)$. (0.5 ptos)

4. Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t=1$ la primera hora desde la apertura y $t=6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.

- ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)
- ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)
- ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Calcula $M = A \cdot C - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)
- Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ (0.75 ptos)

Bloque 2

5. En una ciudad el 1% de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70% tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5% tiene problemas financieros.

- a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)
- b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

6. El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

- a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)
- b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ t & \text{si } -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -2$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que sea continua debe cumplirse que los límites laterales en $x = -2$ sean iguales al valor de la función.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+4)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} t = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t=0}$$

b) Para $t = 3$, $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

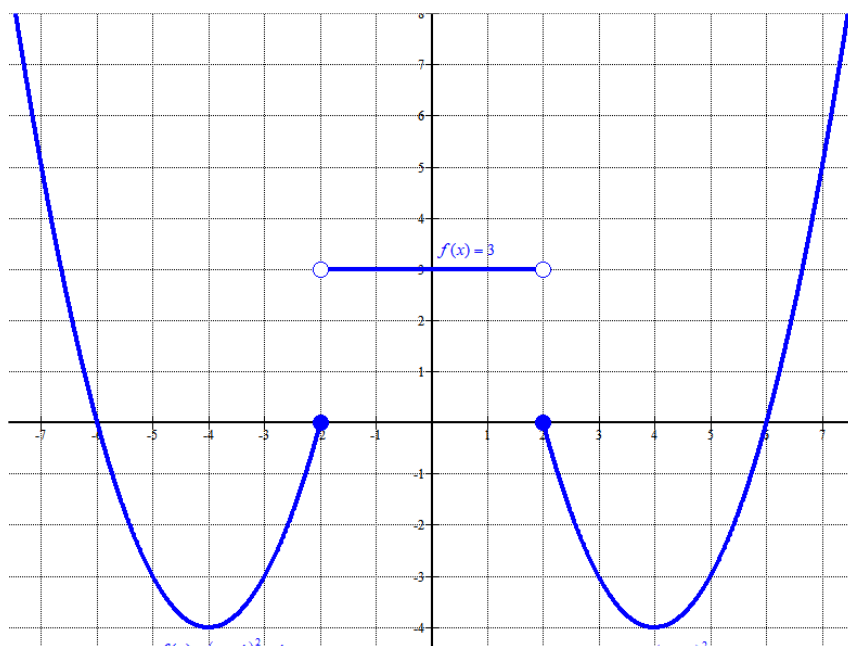
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$$f(x) = (x+4)^2 - 4 \quad \text{si } x \leq -2 \quad f(x) = 3 \quad \text{si } -2 < x < 2 \quad f(x) = (x-4)^2 - 4 \quad \text{si } x \geq 2$$

x	$y = (x+4)^2 - 4$
-6	0
-5	-3
-4	-4
-3	-3
-2	0

x	$y = 3$
-1	3
1	3

x	$y = (x-4)^2 - 4$
2	0
3	-3
4	-4
5	-3
6	0



2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

Si tiene un punto de inflexión en $x = 1$ significa que se anula la derivada segunda.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + 16x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(1) &= 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \end{aligned}$$

Además, pasa por $(1, 10)$, es decir $f(1) = 10 \Rightarrow a + b + 16 + c = 10 \Rightarrow a + b + c + 6 = 0$

Como la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es 7 tenemos que $f'(1) = 7$.

$$f'(1) = 7 \Rightarrow 3a + 2b + 16 = 7 \Rightarrow 3a + 2b + 9 = 0$$

Reunimos las tres condiciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = -3a \\ a + b + c + 6 = 0 \\ 3a + 2b + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - 3a + c + 6 = 0 \\ 3a - 6a + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + c + 6 = 0 \\ -3a + 9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + c + 6 = 0 \\ a = \frac{9}{3} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 + c + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0} \Rightarrow \boxed{b = -9}$$

Los valores de los parámetros son: $a = 3$, $b = -9$ y $c = 0$.

Bloque 2

1. Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron.

(1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamemos “x” al número de botines, “y” al número de botas de media caña y “z” al número de botas de caña alta.

“La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas” $\rightarrow x - z = y$

“El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines” $\rightarrow z = \frac{x}{3}$

“El total de las ventas suponen 5500 euros, vendiendo cada unidad de botines, botas de media caña y botas de caña alta a 150, 200 y 250 euros” $\rightarrow 150x + 200y + 250z = 5500$

Juntamos todo en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ z = \frac{x}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - z = y \\ 3z = x \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - z = y \\ 3z = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9z + 4y + 5z = 110 \\ 3z - z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + 14z = 110 \\ 2z = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8z + 14z = 110 \Rightarrow 22z = 110 \Rightarrow \boxed{z = \frac{110}{22} = 5} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 5 = 10} \Rightarrow \boxed{x = 3 \cdot 5 = 15}$$

Se vendieron 15 botines, 10 botas de media caña y 5 botas de caña alta.

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \quad x - y \leq 2; \quad y \leq 1; \quad x \geq 0$$

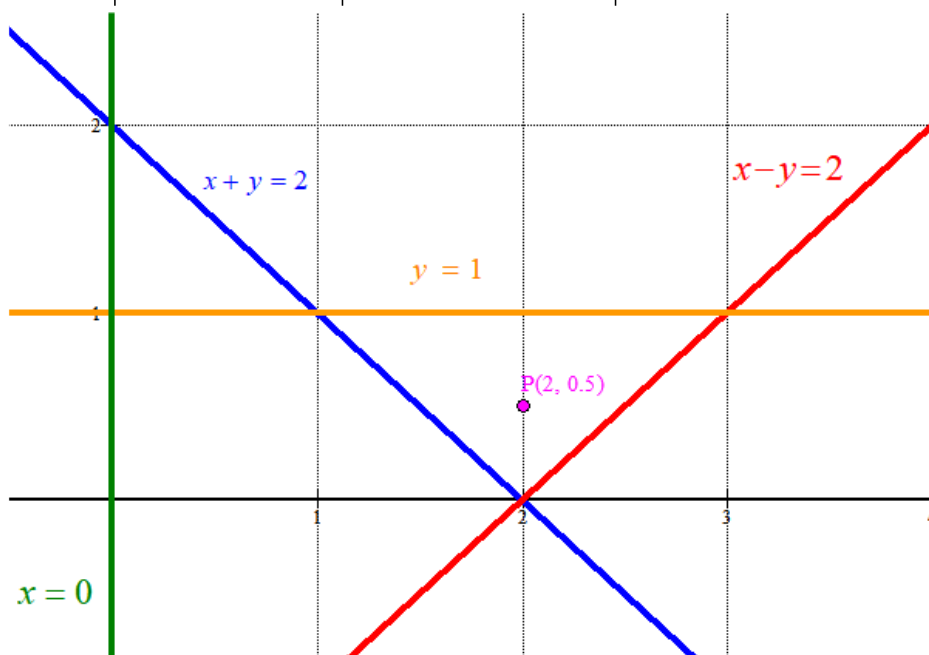
a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

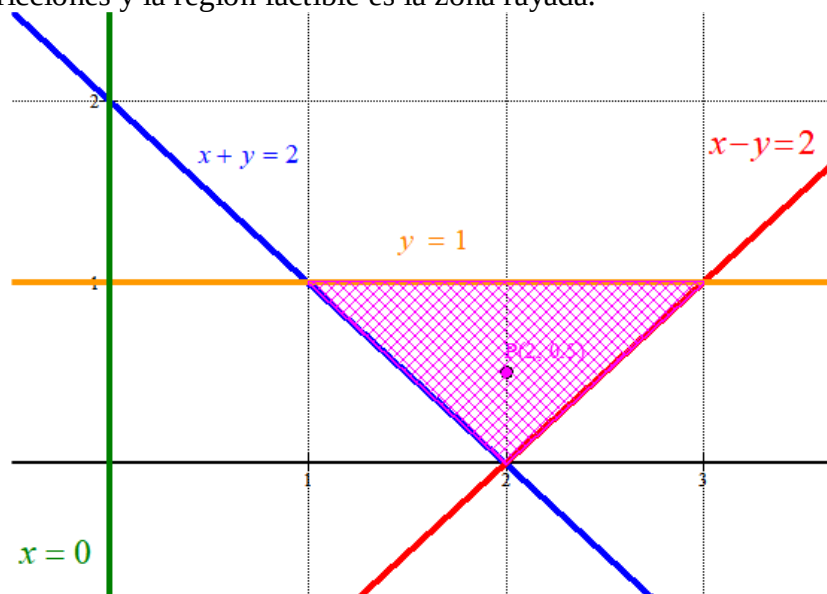
$x + y = 2;$	$x - y = 2;$	$y = 1;$	$x = 0$
$x \mid y = 2 - x$	$x \mid y = x - 2$	$x \mid y = 1$	$x \mid y$
0 $\mid$ 2	0 $\mid$ -2	0 $\mid$ 1	0 $\mid$ 1
2 $\mid$ 0	2 $\mid$ 0	1 $\mid$ 1	0 $\mid$ 2



Comprobamos si el punto $P(2, 0.5)$ cumple las restricciones:

$$2 + 0.5 \geq 2; \quad 2 - 0.5 \leq 2; \quad 0.5 \leq 1; \quad 2 \geq 0$$

Cumple las restricciones y la región factible es la zona rayada.



- b) Las coordenadas de los vértices se pueden determinar mirando la gráfica de la región factible $\rightarrow$ A(2, 0), B(1, 1) y C(3, 1).

También se puede comprobar resolviendo un sistema de ecuaciones para cada punto:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - y \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - y - y = 2 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \boxed{A(2, 0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{B(1, 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{C(3, 1)}$$

- c) Valoramos la función $f(x, y) = 6x - 2y$ en cada uno de los vértices en busca de un valor máximo y mínimo.

$$A(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 12$$

$$B(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = 6 - 2 = 4$$

$$C(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = 18 - 2 = 16$$

El valor máximo es 16 que se alcanza en el punto C(3, 1).

El valor mínimo es 4 que se alcanza en el punto B(1, 1).

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un instituto el 15% de los alumnos ven la tele todos los días, el 25% juegan todos los días a la consola y el 26% ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.

- a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)
- b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Juegan todos los días a la consola	No juegan todos los días a la consola	
Ven la tele todos los días			15
No ven la tele todos los días			
	25		100

Como el 26% ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos, entonces hay un 74% que no hace ninguna de las dos cosas.

El 74% ni ve la tele ni juega a la consola. Lo ponemos en la tabla.

	Juegan todos los días a la consola	No juegan todos los días a la consola	
Ven la tele todos los días			15
No ven la tele todos los días		74	
	25		100

Completamos la tabla.

	Juegan todos los días a la consola	No juegan todos los días a la consola	
Ven la tele todos los días	14	1	15
No ven la tele todos los días	11	74	85
	25	75	100

- a) De cada 100 alumnos hay 14 que ven la tele y juegan a la consola, la probabilidad pedida es 0,14.
- b) Hay 25 alumnos de cada 100 que juega a la consola todos los días y de ellos 14 ven la tele todos los días. Aplicando la regla de Laplace.

$$P(\text{Vea la tele} / \text{Juega a la consola}) = \frac{14}{25} = \boxed{0,56}$$

4. Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas de duración de la batería” sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

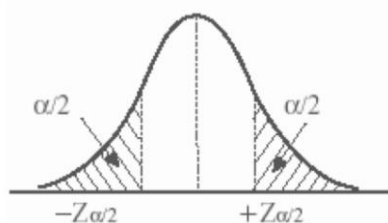
- Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)
- Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

X = Horas de duración de una batería. $X = N(\mu, 2.1)$.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{4.2 + 4.6 + 5 + 5.7 + 5.8 + 5.9 + 6.1 + 6.2 + 6.5 + 7.3}{10} = 5.73$$

- a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{10}} = 1.441$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (5.73 - 1.441, 5.73 + 1.441) = (4.289, 7.171)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza.

- c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es (4.289, 7.171).

La media 4 no pertenece a este intervalo. Si disminuimos el nivel de confianza al 90% la amplitud del intervalo de confianza disminuye y la media 4 seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza, pues este nuevo intervalo tiene el mismo centro pero menos amplitud.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? (0.75 ptos)
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1; +\infty)$. (0.5 ptos)

a) Para que la función sea continua en $x = -1$ debe de cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} x+t = -1+t \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} x^3 - 2x^2 + 4 = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow -1+t = 1 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

b) Calculamos la derivada de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$$

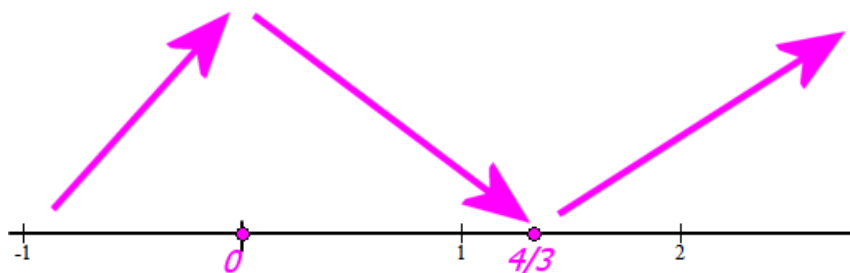
$$f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow x = 0 \text{ es máximo}$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6\left(\frac{4}{3}\right) - 4 = 4 > 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ es mínimo}$$

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 4 = 4. \text{ El máximo es el punto } (0, 4)$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 4 = \frac{76}{27}. \text{ El mínimo es el punto } \left(\frac{4}{3}, \frac{76}{27}\right)$$

c) Hemos encontrado el máximo relativo en $x = 0$ y el mínimo en $x = \frac{4}{3}$, por lo que la función tiene la evolución del gráfico:



Por lo que la función crece en $(-1, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

4. Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.

- a) ¿En qué intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)
 b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)
 c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

a) Derivamos $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$

$$C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t \Rightarrow C'(t) = 6t^2 - 54t + 120$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 120 = 0 \Rightarrow t^2 - 9t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 = t \\ \frac{9-1}{2} = 4 = t \end{cases}$$

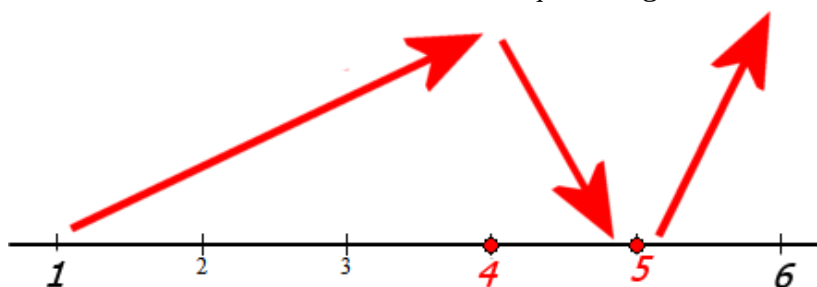
Hallamos la segunda derivada y comprobamos si los puntos críticos obtenidos son máximos o mínimos relativos.

$$C'(t) = 6t^2 - 54t + 120 \Rightarrow C''(t) = 12t - 54$$

$$C''(4) = 48 - 54 = -6 < 0 \rightarrow t = 4 \text{ es un máximo de ventas}$$

$$C''(5) = 60 - 54 = 6 > 0 \rightarrow t = 5 \text{ es un mínimo de ventas}$$

La evolución de las ventas entonces es como indica el esquema siguiente.



Las ventas aumentan desde la apertura hasta 4 horas más tarde (2 de la tarde), disminuyen de la 4ª hora a la 5ª hora (de 2 a 3 de la tarde) y vuelven a aumentar de 5ª a 6ª hora (de 3 a 4 de la tarde)

- b) La máxima venta relativa se produce a las 2 de la tarde y la mínima relativa a las 3 de la tarde. Pero valoramos que ocurre en los extremos para establecer ese máximo y mínimo absolutos.

$$C(1) = 2 - 27 + 120 = 95$$

$$C(4) = 2 \cdot 4^3 - 27 \cdot 4^2 + 120 \cdot 4 = 128 - 432 + 480 = 172$$

$$C(5) = 2 \cdot 5^3 - 27 \cdot 5^2 + 120 \cdot 5 = 250 - 675 + 600 = 175$$

$$C(6) = 2 \cdot 6^3 - 27 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 = 180$$

La máxima venta se produce en la última hora. Y la mínima en la primera hora.

- c) La máxima venta es de 18 000 botellas.
 La mínima venta es de 9500 botellas.

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

- a) Llamemos “x” al número de paquetes de tortitas de arroz con espelta, “y” al número de tortitas de arroz con amapola y “z” al número de tortitas de arroz con chía.

“Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta” $\rightarrow y = 3x$

“Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía” $\rightarrow y = z + 40$

“Se obtienen 1640 € por la venta a 2.5 con espelta, 3.5 con amapola y 3 con chía” $\rightarrow 1640 = 2.5x + 3.5y + 3z$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 1640 = 2.5x + 3.5y + 3z \\ y = z + 40 \\ y = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16400 = 25x + 35y + 30z \\ y = z + 40 \\ y = 3x \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 16400 = 25x + 35y + 30z \\ y = z + 40 \\ y = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16400 = 25x + 105x + 30z \\ 3x = z + 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16400 = 130x + 30z \\ z = 3x - 40 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16400 = 130x + 30(3x - 40) \Rightarrow 16400 = 130x + 90x - 1200 \Rightarrow 17600 = 220x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{17600}{220} = 80} \Rightarrow \boxed{z = 240 - 40 = 200} \Rightarrow \boxed{y = 240}$$

Se venden 80 paquetes de tortitas de arroz con espelta, 240 de tortitas con amapola y 200 con chía.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A \cdot C - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 pts)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ (0.75 pts)

a) Obtenemos la expresión de la matriz M .

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-8+0 & 0+2+0 \\ 30-4+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B - I)^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = A \cdot C - (B - I)^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para que sea posible ese resultado debe ser la matriz X de dimensión $1 \times 2 \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

$$X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a & 2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a = 2 \\ 2a + 2b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{a = -1} \\ a + b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

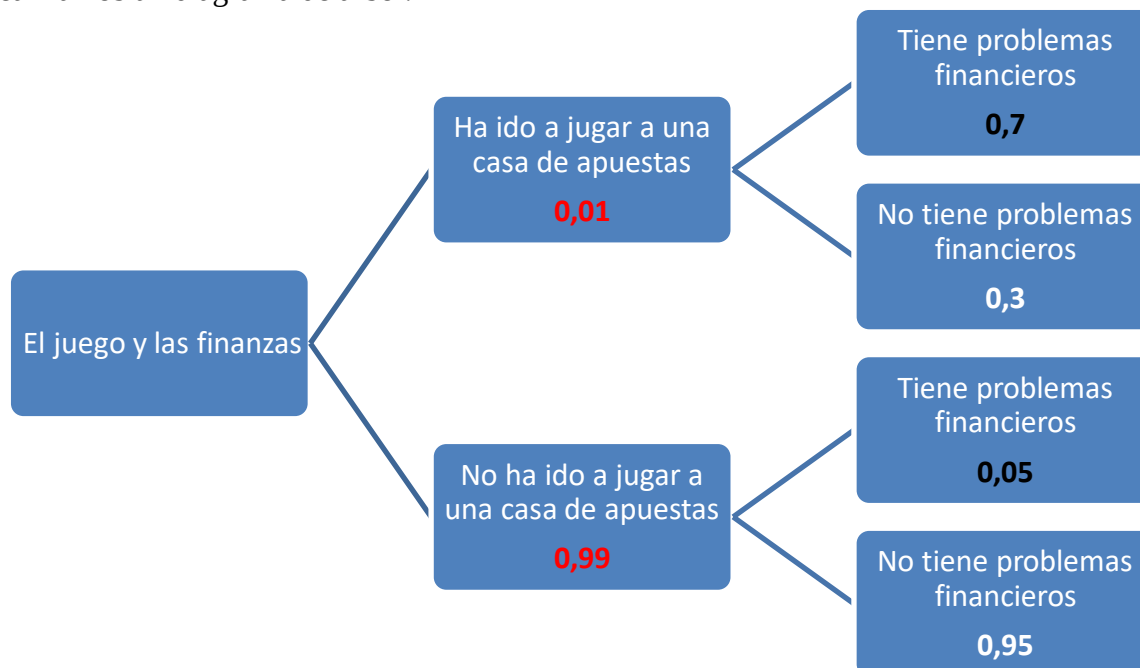
La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

Bloque 2

5. En una ciudad el 1% de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70% tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5% tiene problemas financieros.

- a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)
 b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Se puede calcular observando el diagrama, multiplicando en horizontal y sumando en vertical.

$$P(\text{Tenga problemas financieros}) = 0,01 \cdot 0,7 + 0,99 \cdot 0,05 = 0,007 + 0,0495 = \boxed{0,0565}$$

- b) Es un problema a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya ido a jugar} / \text{Tiene problemas financieros}) =$$

$$= \frac{P(\text{Haya ido a jugar} \cap \text{Tiene problemas financieros})}{P(\text{Tiene problemas financieros})} =$$

$$= \frac{0,01 \cdot 0,7}{0,0565} = \frac{70}{565} = \boxed{0,1239}$$

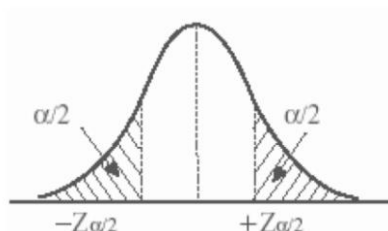
6. El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.
- a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)
- b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

X = Tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente (en minutos). $X = N(\mu, 2)$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3$$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

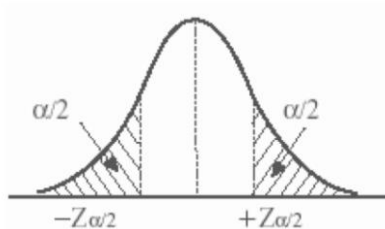


$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 1.2396$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (10.3 - 1.2396, 10.3 + 1.2396) = (9.0604, 11.5396)$$

- b) Con un nivel de confianza del 95% tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 2)^2 = 15.3664$$

El tamaño mínimo es de 16 clientes.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

EvAU Extraordinaria 2019

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuantos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1 , T_2). Disponen de 160 m² del tejido T_1 y 240 m² del tejido T_2 . Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m² de T_1 y 2 m² de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m² de T_1 y 3 m² de T_2 . El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 ptos)

3. Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

5. En una universidad el 40% de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 ptos)

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 ptos)

- b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 pts)
- c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Calcula $A \cdot B - C^T$. (0.75 pts)
- b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado. (0.75 pts)

2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 pts)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x < c \\ -3 & \text{si } c \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 pts)
- b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
- c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

4. Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $1 \leq x \leq 27$

- a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)
- b) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 pts)

5. El 5% de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5% de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15% de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

- a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 ptos)
- b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

6. El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0.1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 ptos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 ptos)

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)

d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONESPropuesta A

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuantos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamemos b al número de kilos de judías blancas vendidas, c al número de kilos de judías canela vendidas y p al número de kilos de judías pintas vendidas.

“Se vendieron 40 kilos” $\rightarrow b + c + p = 40$

“Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo. Se vendieron por un valor de 111.5 euros” $\rightarrow 2.75b + 3c + 2.5p = 111.5$

“La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas” $\rightarrow b + c = 3p$

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} b + c + p = 40 \\ 2.75b + 3c + 2.5p = 111.5 \\ b + c = 3p \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} b + c + p = 40 \\ 2.75b + 3c + 2.5p = 111.5 \\ b + c = 3p \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + c + p = 40 \\ 11b + 12c + 10p = 446 \\ b = 3p - c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3p - c + c + p = 40 \\ 11(3p - c) + 12c + 10p = 446 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3p + p = 40 \\ 33p - 11c + 12c + 10p = 446 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4p = 40 \\ 43p + c = 446 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p = 10 \\ 43p + c = 446 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 430 + c = 446 \Rightarrow c = 16 \Rightarrow b = 30 - 16 = 14$$

Se vendieron 14 kg de judías blancas, 16 kg de judías canela y 10 kg de judías pintas.

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1 , T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2 . Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2 . El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).
- Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 pts)

a) Llamamos x = número de conjuntos chaqueta falda, y = número de conjuntos chaqueta pantalón. El objetivo es obtener el mayor beneficio. Este se obtiene con la venta de cada conjunto con falda a 250 euros y el del pantalón a 350 euros.

Viene expresado con la función $B(x, y) = 250x + 350y$

b) “Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2 . El conjunto chaqueta falda utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2 ” $\rightarrow$

$$2x + y \leq 160; \quad 2x + 3y \leq 240$$

Para obtener estas inecuaciones nos podemos ayudar de una tabla donde se refleje la situación planteada.

	x = nº conjuntos chaqueta falda	y = nº conjuntos chaqueta pantalón	TOTALES
m^2 de tela T_1	$2x$	y	$2x + y$
m^2 de tela T_2	$2x$	$3y$	$2x + 3y$

Son cantidades positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

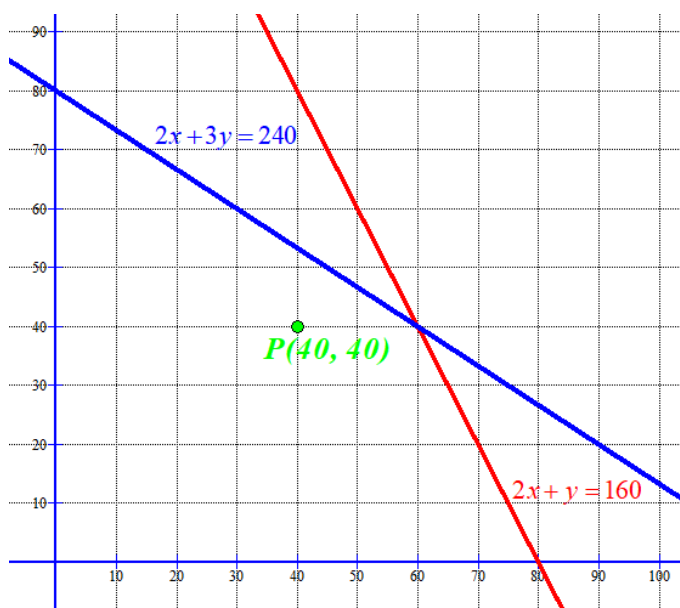
$$2x + y = 160$$

x	$y = 160 - 2x$
80	0
0	160
60	40

$$2x + 3y = 240$$

x	$y = \frac{240 - 2x}{3}$
120	0
0	80
60	40

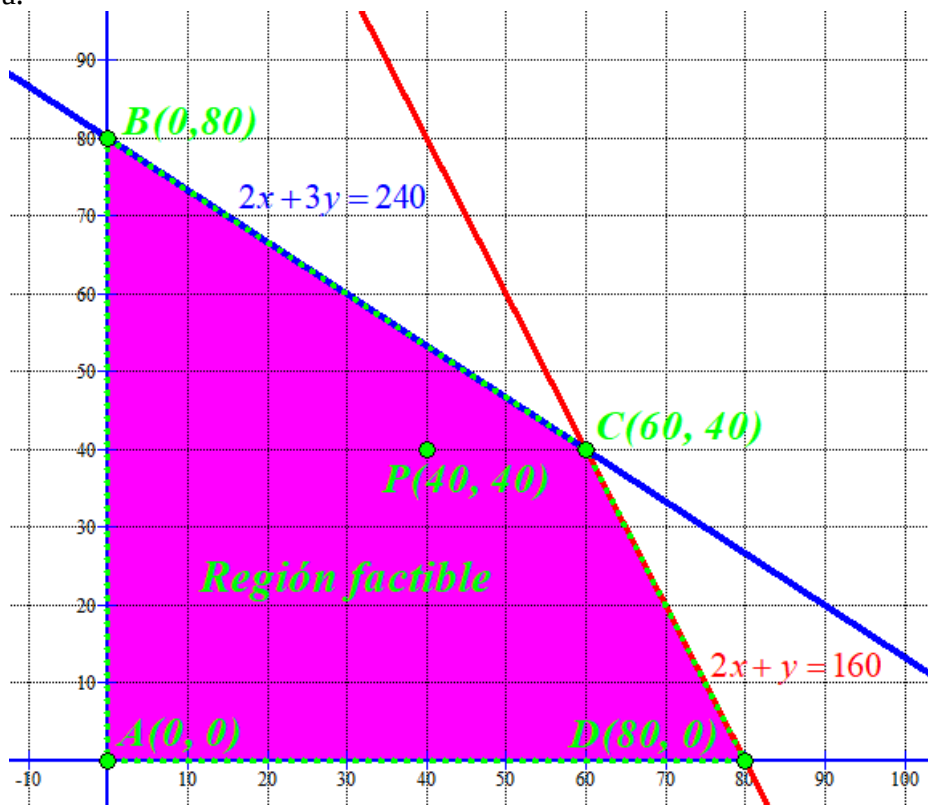
$$x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow \text{Primer cuadrante}$$



Comprobamos si el punto $P(40, 40)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} 2 \cdot 40 + 40 \leq 160? \\ \text{¿} 2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 \leq 240? \\ \text{¿} 40 \geq 0; 40 \geq 0? \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{¿} 120 \leq 160? \\ \text{¿} 200 \leq 240? \\ \text{¿} 40 \geq 0; 40 \geq 0? \end{array} \right\} \text{ ¡SE CUMPLEN! }$$

La región factible es la región pintada de rosa, delimitada por los ejes de coordenadas, la recta azul y la roja.



c) Determinamos el máximo valorando cada vértice en la función objetivo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 80) \rightarrow B(0, 80) = 350 \cdot 80 = 28000$$

$$C(60, 40) \rightarrow B(60, 40) = 250 \cdot 60 + 350 \cdot 40 = 15000 + 14000 = 29000$$

$$D(80, 0) \rightarrow B(80, 0) = 250 \cdot 80 + 0 = 20000$$

El beneficio máximo es de 29000 € y se obtienen en el punto $C(60, 40)$.

Se maximizan los beneficios (29000 €) con la venta de 60 conjuntos chaqueta falda y 40 conjuntos chaqueta pantalón.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -3$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que la función sea continua en $x = -3$ deben de coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} x+t = -3+t \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3+t = 4 \Rightarrow \boxed{t=7}$$

La función es continua en $x = -3$ para $t = 7$ pues existe el límite y es igual al valor de la función en $x = -3$.

b) Para $t = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq -3 \\ 4 & \text{si } -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Es un trozo de recta, otro de recta horizontal y otro trozo de una parábola.

$$f(x) = x+3$$

$$x \leq -3$$

x	$y = x+3$
-5	-2
-4	-1
-3	0

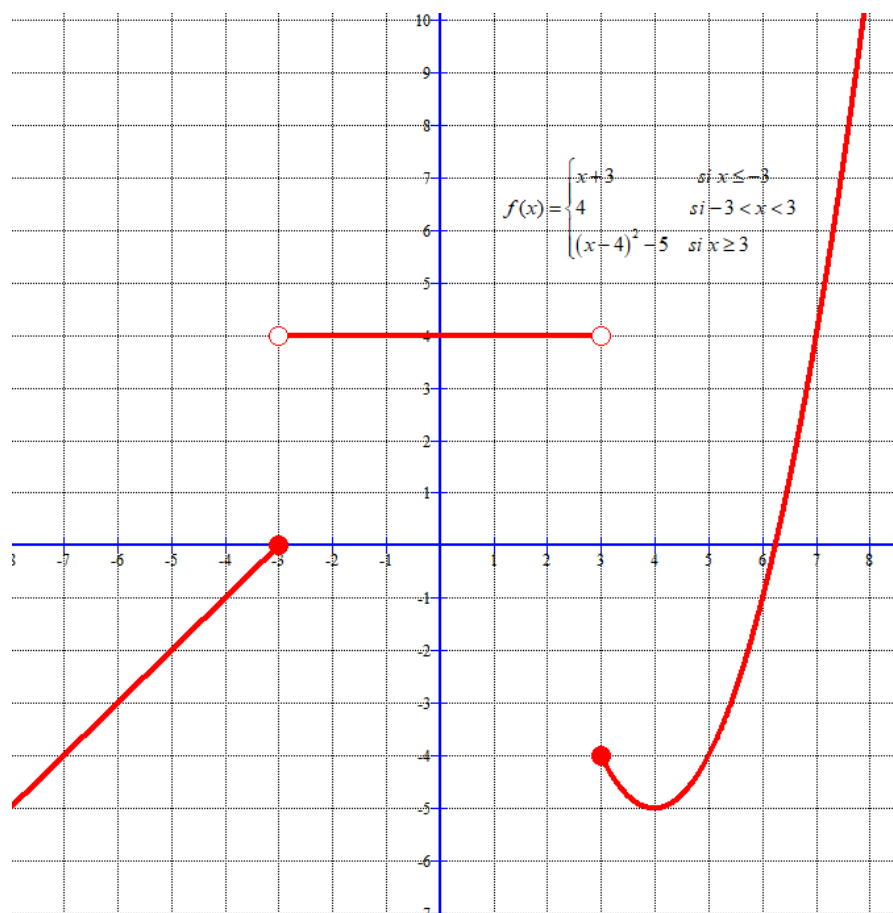
$$f(x) = 4$$

$$-3 < x < 3$$

x	$y = 4$
-3	4 No incluido
0	4
3	4 No incluido

$$x \geq 3$$

x	$y = (x-4)^2 - 5$
3	-4
4	-5
5	-4



4. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto $(1,1)$ y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

La gráfica pasa por el punto $(1, 1)$ por lo que se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a + b + c$$

La función tiene un mínimo en $x = 1$ por lo que su derivada se anula para $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + b$$

Corta al eje de ordenadas en 4 significa que pasa por el punto $(0,4)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ \text{Pasa por } (0,4) \rightarrow f(0) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 = a + b + c \\ 0 = 2a + b \\ \boxed{c = 4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = a + b + 4 \\ 0 = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -3 - a \\ 0 = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a - 3 - a \Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow \boxed{b = -3 - 3 = -6}$$

Los valores buscados son $a = 3$, $b = -6$, $c = 4$. La función es $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

5. En una universidad el 40% de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

- a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)
- b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 ptos)

Si al 70% le gusta el cine o la lectura o ambas cosas tendremos que al 30% restante no le gusta ni el cine ni la lectura.

Realizamos una tabla de contingencia de este grupo de alumnos.

	Le gusta el cine	No le gusta el cine	
Le gusta la lectura			40
No le gusta la lectura		30	
	50		100

Completamos la tabla teniendo en cuenta que la suma de los dos primeros valores de cada línea debe sumar lo que aparece al final de ella.

	Le gusta el cine	No le gusta el cine	
Le gusta la lectura	20	20	40
No le gusta la lectura	30	30	60
	50	50	100

A partir de estos datos respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

- a) Como de un total de 100 alumnos a solo 20 le gustan la lectura y el cine, tenemos que:

$$P(\text{Le guste la lectura y el cine}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{20}{100} = \boxed{0.2}$$

- b) Miramos los datos que aparecen en la primera fila de la tabla.

$$P(\text{Le guste el cine / Le gusta la lectura}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{20}{40} = \boxed{0.5}$$

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

- Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 ptos)
- ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 ptos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 ptos)

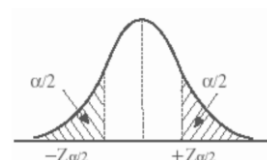
$X =$ Tiempo de uso de móvil por día en minutos. $X = N(\mu, 20)$

Media muestral $= \bar{x} = 2 \text{ h} = 120$ minutos. Tamaño muestra $= n = 36$

- a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{36}} = 6.5333$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (120 - 6.5333, 120 + 6.5333) = (113.4667, 126.5333)$$

- b) 2.3 horas son $2.3 \cdot 60 = 138$ minutos.

Esta media de 138 minutos no pertenece al intervalo hallado para el nivel de confianza de 95%. No se puede admitir esta media.

Se puede aumentar la amplitud del intervalo disminuyendo el nivel de confianza (o disminuyendo el tamaño de la muestra). Y de forma recíproca se disminuye la amplitud del intervalo tomando un nivel de confianza mayor (o aumentando el tamaño de la muestra)

La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si

aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

- c) Con un nivel de confianza del 94,64%

$$1 - \alpha = 0,9464 \rightarrow \alpha = 0,0536 \rightarrow \alpha/2 = 0,0268 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,93}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3.86$$

Con un tamaño de muestra 100 y un nivel de confianza del 94,64% el máximo error es de 3,86 minutos.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = (2 \ 1 \ 5)$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B - C^T$. (0.75 ptos)

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado. (0.75 ptos)

a)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - C^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 5) - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}}$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

b) Calculamos el determinante de la matriz C .

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 4 = 0$$

Al ser su determinante nulo la matriz C no tiene matriz inversa.

¿Se puede realizar $D^2 \cdot B$? Para poderse realizar el número de columnas de D^2 debe ser igual que el número de filas de B .

$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+15 & -20-20 \\ -12-12 & 15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -30 \\ -24 & 31 \end{pmatrix}$ es una matriz 2×2 . Tiene 2 columnas.

$B = (2 \ 1 \ 5)$ es una matriz 1×3 . Tiene 1 fila.

No coinciden el número de columnas de D^2 y el de filas de B .

No es posible realizar $D^2 \cdot B$.

$$D^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 31 & -30 \\ -24 & 31 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 5) \quad \text{¡NO ES POSIBLE!}$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow \text{¡NO!}$$

2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos x = precio de una sesión por la mañana, y = precio de una sesión al mediodía, z = precio de una sesión por la tarde.

“Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros” $\rightarrow 150x + 30y + 270z = 15900$

“La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía” $\rightarrow z - x = \frac{y}{2}$

“Al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana” $\rightarrow y + z = 2x$

Reuniendo todas las ecuaciones se forma el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 150x + 30y + 270z = 15900 \\ z - x = \frac{y}{2} \\ y + z = 2x \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 150x + 30y + 270z = 15900 \\ z - x = \frac{y}{2} \\ y + z = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y + 9z = 530 \\ 2z - 2x = y \\ -2x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y + 9z = 530 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -10x - 5y + 10z = 0 \\ 10x + 2y + 18z = 1060 \\ \hline -3y + 28z = 1060 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -10x + 5y + 5z = 0 \\ 10x + 2y + 18z = 1060 \\ \hline 7y + 23z = 1060 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y + 9z = 530 \\ -3y + 28z = 1060 \\ 7y + 23z = 1060 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 7 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 21y + 69z = 3180 \\ -21y + 196z = 7420 \\ \hline 265z = 10600 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 9z = 530 \\ -3y + 28z = 1060 \\ 265z = 10600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 9z = 530 \\ -3y + 28z = 1060 \\ \boxed{z = \frac{10600}{265} = 40} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 360 = 530 \\ -3y + 1120 = 1060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 170 \\ -3y = -60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 170 \\ \boxed{y = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 20 = 170 \Rightarrow 5x = 150 \Rightarrow \boxed{x = 30}$$

Los precios de las sesiones son 30 € por la mañana, 20 € por la tarde y 40 € por la tarde

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x < c \\ -3 & \text{si } c \leq x \leq 0 \\ x^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

a) Para que sea continua deben de coincidir sus límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} -x - 4 = -c - 4 \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} -3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 = -c - 4 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

Para $c = -1$ existe el límite de la función y coincide con el valor de la función en $x = -1$.

b) En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 10x$. Es una parábola, determinamos su extremo relativo usando la derivada.

$$f(x) = x^2 - 10x \Rightarrow f'(x) = 2x - 10$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

$$f'(x) = 2x - 10 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(5) = 2 > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 5$.

c) En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 10x$. Es una parábola y hemos determinado su vértice, el mínimo en $x = 5$.

La función decrece en $(0, 5)$ y crece en $(5, +\infty)$.

- En $(0, 5)$ tomamos $x = 2$ y $f'(2) = 4 - 10 = -6 < 0$. La función decrece en $(0, 5)$.
- En $(5, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y $f'(10) = 20 - 10 = 10 > 0$. La función crece en $(5, +\infty)$.

4. Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $1 \leq x \leq 27$

a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)

b) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 ptos)

a) Utilizamos la deriva primera de la función coste.

$$C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500 \Rightarrow C'(x) = -3x^2 + 90x - 243$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{576}}{2} = \begin{cases} \frac{30 + 24}{2} = 27 = x \\ \frac{30 - 24}{2} = 3 = x \end{cases}$$

Los puntos críticos son $x = 3$ y $x = 27$. Determinamos si son máximos o mínimos con la segunda derivada.

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 \Rightarrow C''(x) = -6x + 90 \Rightarrow \begin{cases} C''(3) = -18 + 90 = 72 > 0 \\ C''(27) = -162 + 90 = -72 < 0 \end{cases}$$

La función costes tiene un mínimo en $x = 3$. Con la fabricación de 300 vehículos.

La función costes tiene un máximo en $x = 27$. Con la fabricación de 2700 vehículos.

b) La función costes tiene un mínimo en $x = 3$.

$$C(3) = -3^3 + 45 \cdot 3^2 - 243 \cdot 3 + 500 = 149$$

Con la fabricación de 300 vehículos se tiene un coste mínimo de 149000 €.

La función costes tiene un máximo en $x = 27$,

$$C(27) = -27^3 + 45 \cdot 27^2 - 243 \cdot 27 + 500 = 7061$$

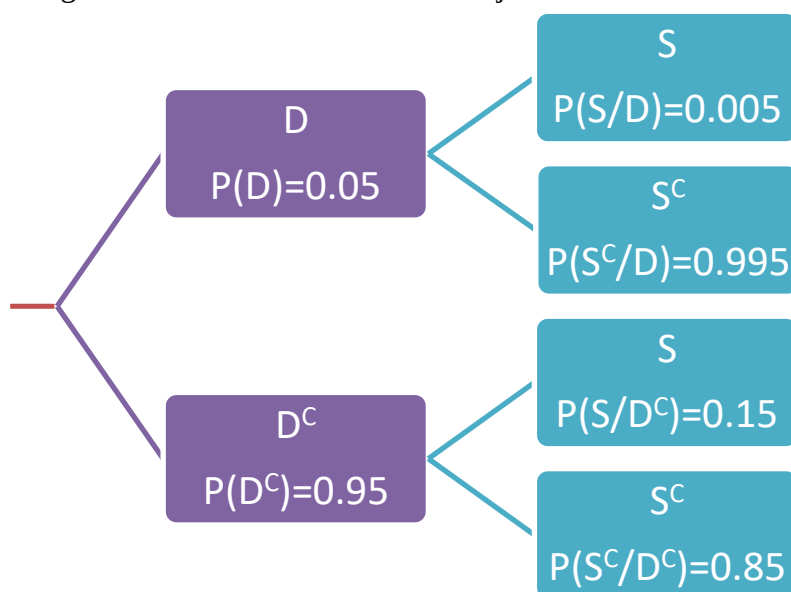
Con la fabricación de 2700 vehículos se tiene un coste máximo de 7061000 €.

5. El 5% de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5% de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15% de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

- Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 pts)
- Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 pts)

Llamamos S al suceso “Estar suspenso en una asignatura de bachillerato” y D al suceso “Ser deportista aficionado”

Construyamos un diagrama de árbol con los datos del ejercicio.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(D)P(S/D) + P(D^c)P(S/D^c) = 0.05 \cdot 0.005 + 0.95 \cdot 0.15 = \boxed{0.14275}$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D/S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{P(D)P(S/D)}{P(S)} = \frac{0.05 \cdot 0.005}{0.14275} = \frac{25}{14275} = \boxed{\frac{1}{571} = 0.0017}$$

6. El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0.1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

- Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 ptos)
- Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 ptos)
- Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)
- ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 ptos)

a) $X =$ Contenido en grasas saturadas por litro de leche. $X = N(\mu, 0.1)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$

La media muestral está en el centro del intervalo de confianza, por lo que:

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{0.682 + 0.718}{2} = 0.7 \text{ gramos / l}$$

El contenido medio de grasas en los 100 litros de la muestra es 0.7 gramos por litro.

b) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = \frac{0.718 - 0.682}{2} = 0.018$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.018 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} \Rightarrow 0.018 = z_{\alpha/2} \cdot 0.01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.018}{0.01} = 1.8$$

Buscamos en la tabla.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

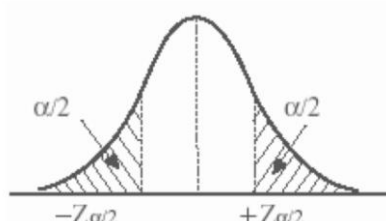
$$z_{\alpha/2} = 1.8 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9641 \rightarrow \alpha/2 = 0.0359 \rightarrow \alpha = 0.0718 \rightarrow 1 - \alpha = 0.9282$$

El nivel de confianza es del 92.82 %

c) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} = 0.0196$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (0.7 - 0.0196, 0.7 + 0.0196) = (0.6804, 0.7196)$$

d) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} \left. \vphantom{\frac{0.1}{\sqrt{n}}} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow \\ Error < 0.01 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{0.196}{0.01} = 19.6 \Rightarrow \boxed{n > 19.6^2 = 384.16}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 litros de leche.

EvAU Ordinaria 2019

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande.

Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

3. Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si } x \leq c \\ (x - 2)^2 + 3/2 & \text{si } x > c \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. (0.5 ptos)

b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. (0.5 ptos)

c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? (0.5 ptos)

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? (0.75 ptos)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de ketchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del ketchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de ketchup. (1 pto)

- b) Razona y explica qué se podrá hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.5 pts)
- c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten. (1.5 pts)
2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2 :
- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 pts)
 - Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)
3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si } x \leq -1 \\ (x-t)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? (0.5 pts)
 - Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 pts)
 - Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 pts)
4. Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)
5. En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
- Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 pts)
 - Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 pts)
6. El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.
- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
 - ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONESPropuesta A

- 1.** Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande.
 Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.
 a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 ptos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

- a) Llamamos $x =$ Peso de un saco pequeño, $y =$ Peso de un saco mediano, $z =$ Peso de un saco grande.

Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos $\rightarrow 20x + 14y + 6z = 1800$

El peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes $\rightarrow 2x + 3y = 2z$

El peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño $\rightarrow z = 4x$

Reunimos todas las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 6z = 1800 \\ 2x + 3y = 2z \\ z = 4x \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 6z = 1800 \\ 2x + 3y = 2z \\ z = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 6(4x) = 1800 \\ 2x + 3y = 2(4x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 24x = 1800 \\ 2x + 3y = 8x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 44x + 14y = 1800 \\ -6x + 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 22x + 7y = 900 \\ -2x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 22x + 7y = 900 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 22x + 7(2x) = 900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x + 14x = 900 \Rightarrow 36x = 900 \Rightarrow \boxed{x = \frac{900}{36} = 25} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 25 = 50} \Rightarrow \boxed{z = 4 \cdot 25 = 100}$$

El saco pequeño pesa 25 kilos, el mediano 50 kilos y el grande 100 kilos.

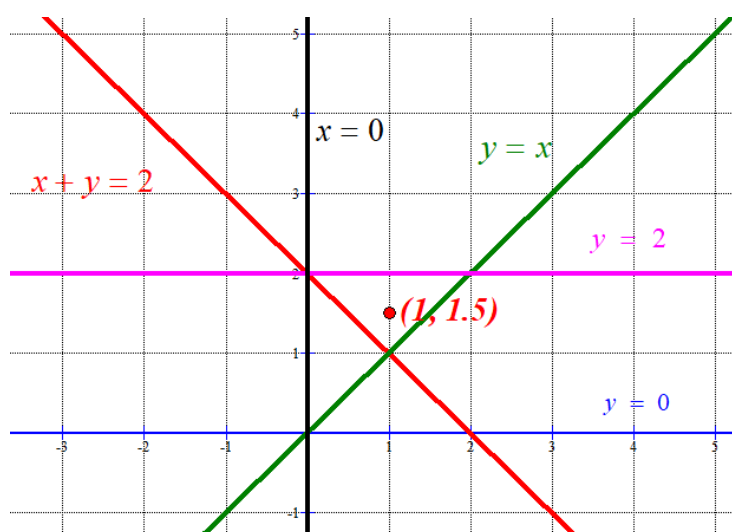
2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0$$

- Dibuja la región factible. (1 pto)
- Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)
- Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 2$		$y = x$		$y = 0$		$y = 2$		$x = 0$
x	$y = 2 - x$	x	$y = x$	x	$y = 0$	x	$y = 2$	
0	2	0	0	0	0	0	2	Eje OY
1	1	1	1	1	0	1	2	
2	0	2	2	2	0	2	2	

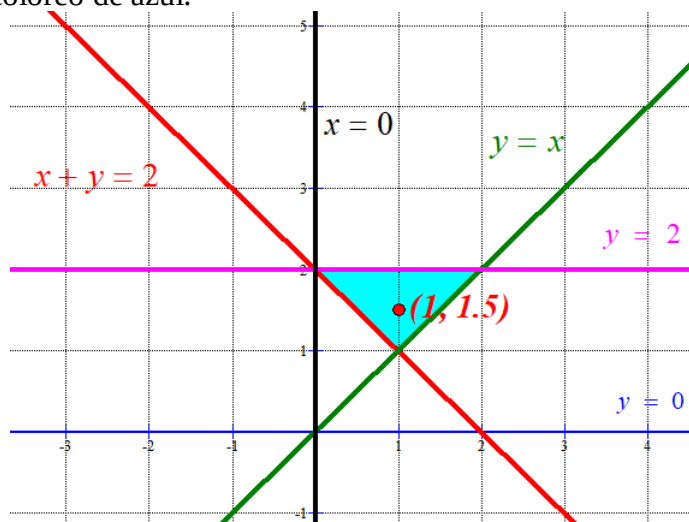


Comprobamos que el punto de coordenadas (1, 1.5) cumple todas las condiciones de la región buscada

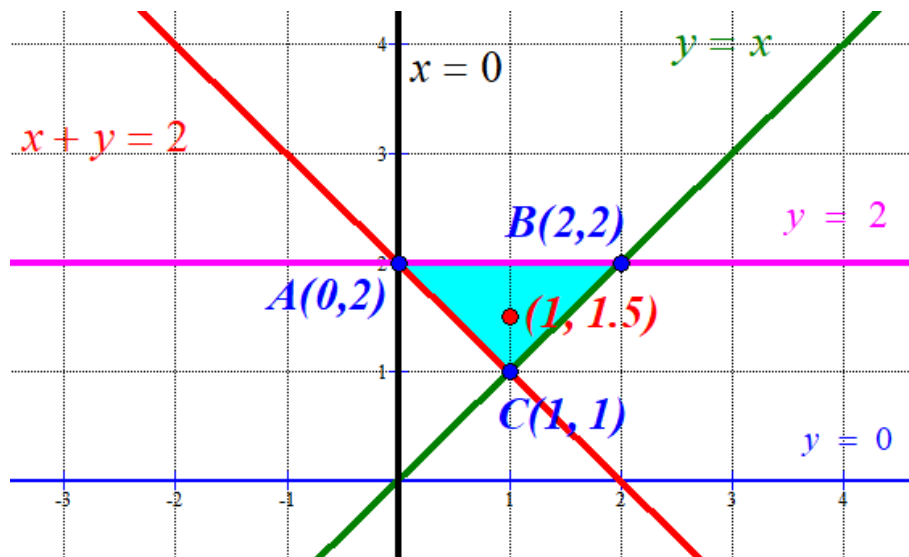
$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{¿} 1 + 1.5 \geq 2; \quad 1 \leq 1.5; \quad 0 \leq 1.5 \leq 2; \quad 1 \geq 0? \\ (1, 1.5) \end{array}$$

¡SE CUMPLEN TODAS!

La región factible la coloreo de azul.



b) Los vértices de la región factible se observan en el dibujo que son $A(0, 2)$, $B(2, 2)$ y $C(1, 1)$.



c) El máximo y mínimo de la función estará localizado en uno de los vértices. Valoramos la función en cada uno de ellos.

$$A(0,2) \rightarrow f(0,2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$$

$$B(2,2) \rightarrow f(2,2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14 \rightarrow \text{Valor máximo}$$

$$C(1,1) \rightarrow f(1,1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7 \rightarrow \text{Valor mínimo}$$

El máximo valor de la función es 14 y se alcanza en el punto $B(2, 2)$.

El mínimo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto $C(1, 1)$

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si } x \leq c \\ (x-2)^2 + 3/2 & \text{si } x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = c$. Para ello deben coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} 4x - (3/2) = 4c - \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} (x-2)^2 + 3/2 = (c-2)^2 + \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4c - \frac{3}{2} = (c-2)^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c - \frac{3}{2} = c^2 - 4c + 4 + \frac{3}{2} \Rightarrow 0 = c^2 - 8c + 7 \Rightarrow c = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 28}}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = 7 \\ \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua si $c = 7$ o $c = 1$.

b) Para $c = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 4x - \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 + \frac{3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

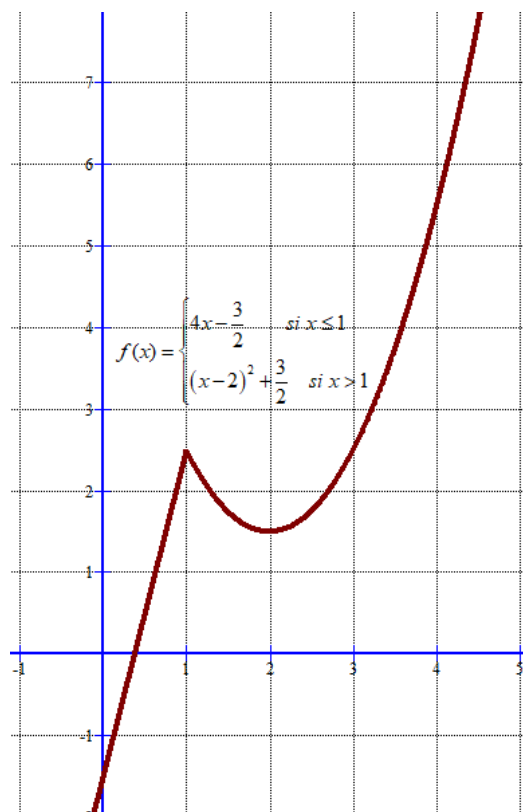
Su gráfica es un trozo de recta y otro de una parábola.

$$f(x) = 4x - \frac{3}{2} \quad \text{si } x \leq 1$$

x	$y = 4x - \frac{3}{2}$
-2	$-19/2$
-1	$-11/2$
0	$-3/2$
1	$5/2$

$$f(x) = (x-2)^2 + \frac{3}{2} \quad \text{si } x > 1$$

x	$y = (x-2)^2 + \frac{3}{2}$
1	$5/2$
2	$3/2$
3	$5/2$
4	$11/2$



4. La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus
- Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. (0.5 ptos)
 - Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. (0.5 ptos)
 - ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? (0.5 ptos)

a) El virus deja de propagarse cuando los ordenadores contagiados son 0.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 48t^2 - 2t^3 = 0 \Rightarrow 2t^2(24 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 0 \\ 24 - t = 0 \Rightarrow t = 24 \end{cases}$$

El virus tiene 0 contagios en el momento $t = 0$ y a las 24 horas.

b) Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de $v(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= 48t^2 - 2t^3 \Rightarrow v'(t) = 96t - 6t^2 \\ v'(t) &= 0 \Rightarrow 96t - 6t^2 = 0 \Rightarrow 6t(16 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 16 - t = 0 \Rightarrow t = 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $t = 0$ y $t = 16$. Vemos que pasa entre estos valores y después de ellos.

- En $(0, 16)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $v'(10) = 960 - 600 = 360 > 0$. $v(t)$ es creciente de 0 a 16 horas.
- En $(16, +\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale $v'(20) = 1920 - 2400 = -480 < 0$. $v(t)$ es decreciente a partir de las 16 horas.

De 0 a 16 horas el número de ordenadores afectados aumenta y a partir de las 16 horas el número de ordenadores afectados disminuye.

c) Hemos visto que a las 16 horas hay un máximo de la función $v(t)$. Este número de ordenadores afectados lo obtenemos hallando el valor de $v(16)$.

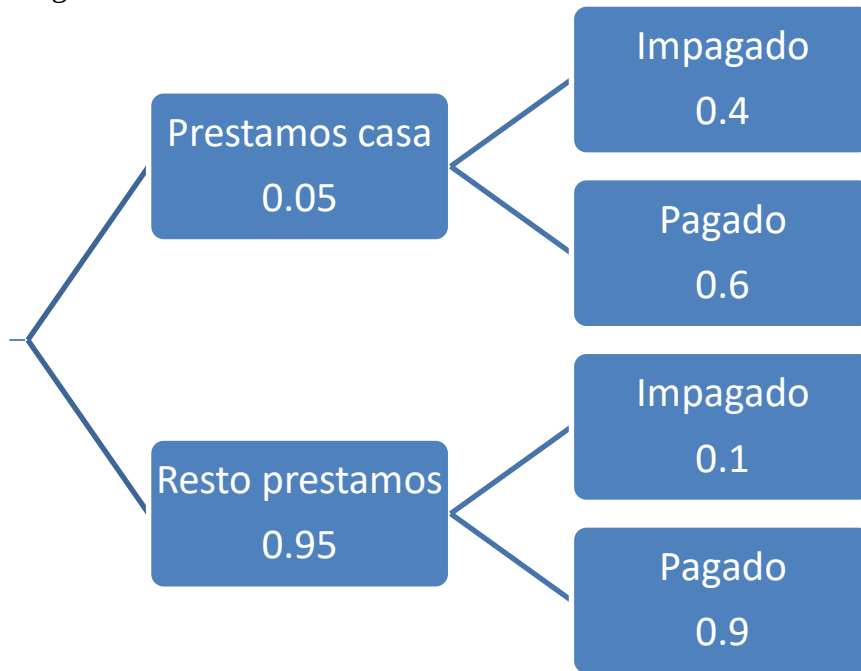
$$v(16) = 48 \cdot 16^2 - 2 \cdot 16^3 = 4096$$

El número máximo de ordenadores afectados es 4096 y se produce a las 16 horas.

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.

- a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)
 b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? (0.75 ptos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Impagado}) &= P(\text{Casa})P(\text{Impagado} / \text{Casa}) + P(\text{Resto})P(\text{Impagado} / \text{Resto}) = \\
 &= 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.020 + 0.095 = \boxed{0.115}
 \end{aligned}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Casa} / \text{Pagado}) &= \frac{P(\text{Casa} \cap \text{Pagado})}{P(\text{Pagado})} = \frac{P(\text{Casa})P(\text{Pagado} / \text{Casa})}{1 - P(\text{Impagado})} = \\
 &= \frac{0.05 \cdot 0.6}{1 - 0.115} = \frac{30}{885} = \boxed{\frac{2}{59} = 0.0339}
 \end{aligned}$$

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de ketchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del ketchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

- Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de ketchup. (1 pto)
- Razona y explica qué se podrá hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

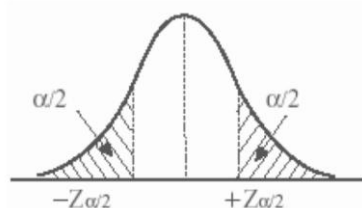
X = Gramos de azúcar en frascos de 500 gramos. $X = N(\mu, 10)$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100+90}{10} = 84$$

- a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.86$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (84 - 6.86, 84 + 6.86) = (77.14, 90.86)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si

aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

- c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es $(77.14, 90.86)$.

La media 85 pertenece a este intervalo.

Si aumentamos el nivel de confianza al 98.5% la amplitud del intervalo de confianza aumenta y la media 85 seguirá perteneciendo al intervalo de confianza, pues este nuevo intervalo tiene el mismo centro pero más amplitud.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten. (1.5 ptos)

Para que conmuten debe cumplirse que $AB = BA$.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+3a & 5+3b \\ 3+a & 15+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+15 & 3+5 \\ a+3b & 3a+b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+3a=16 \\ 5+3b=8 \\ 3+a=a+3b \\ 15+b=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=15 \\ 3b=3 \\ 3=3b \\ 15=3a \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}}$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = 1$

2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca.

Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2 :

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos x = número de becas B_1 , y = número de becas B_2 , z = número de becas B_3 .

“El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros” $\rightarrow 400x + 160y + 200z = 43400$

“Son 145 personas las que obtienen beca” $\rightarrow x + y + z = 145$

“La cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2 ”
 $\rightarrow x = 5y$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 160y + 200z = 43400 \\ x + y + z = 145 \\ x = 5y \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 160y + 200z = 43400 \\ x + y + z = 145 \\ x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x + 4y + 5z = 1085 \\ x + y + z = 145 \\ x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50y + 4y + 5z = 1085 \\ 5y + y + z = 145 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 54y + 5z = 1085 \\ 6y + z = 145 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 54y + 5z = 1085 \\ z = 145 - 6y \end{array} \right\} \Rightarrow 54y + 5(145 - 6y) = 1085 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 54y + 725 - 30y = 1085 \Rightarrow 24y = 360 \Rightarrow \boxed{y = \frac{360}{24} = 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 145 - 90 = 55} \Rightarrow \boxed{x = 75}$$

Se reparten 75 becas B_1 , 15 becas B_2 y 55 becas B_3 .

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si } x \leq -1 \\ (x-t)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? (0.5 ptos)
 b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)
 c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

- a) Para que la función sea continua deben de coincidir sus límites laterales en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} |x+2|+t = 1+t \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-t)^2 = (-1-t)^2 = t^2 + 2t + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 1 + t \Rightarrow t^2 + t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Los valores buscados son $t = 0$ y $t = -1$.

b) Para $t = 3$ la función es $f(x) = \begin{cases} |x+2|+3 & \text{si } x \leq -1 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-1, +\infty)$ la función es $f(x) = (x-3)^2$.

Calculamos sus extremos relativos usando la derivada primera y segunda.

$$f(x) = (x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

El punto crítico es $x = 3$. Comprobamos si es mínimo o máximo.

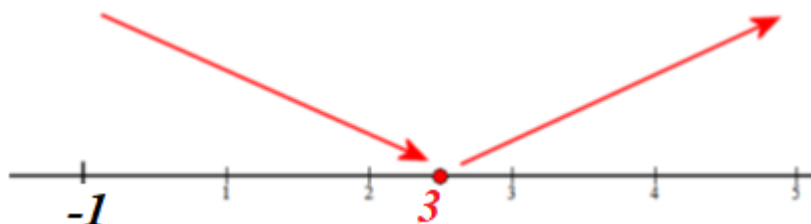
$$f'(x) = 2(x-3) \Rightarrow f''(x) = 2$$

$$f''(3) = 2 > 0$$

En $x = 3$ hay un mínimo de la función.

$$f(3) = (3-3)^2 = 0 \rightarrow \text{El mínimo relativo se sitúa en el punto } (3, 0).$$

- c) Tenemos ya el punto crítico de la función en $x = 3$ y además es un mínimo, por lo que la función decrece en $(-1, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.



4. Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 ptos)

Si la función presenta un máximo en $x = 1$ se cumple que la derivada se anula en $x = 1$.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1 \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + 3b + c = 0$$

Además, por ser punto de inflexión en $x = 0$ se anula la derivada segunda en $x = 0$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx \left\{ \begin{array}{l} f''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

Además, la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24 $\rightarrow f'(-1) = 24$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a(-1)^3 + 3b(-1)^2 + c = 24 \Rightarrow -4a + 3b + c = 24$$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a + 3b + c = 0 \\ -4a + 3b + c = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -4a - 3b \\ -4a + 3b + c = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4a + 3b - 4a - 3b = 24 \Rightarrow -8a = 24 \Rightarrow \boxed{a = -3} \Rightarrow \boxed{c = 12 - 3b}$$

Si la función presenta un máximo en $x = 1$ la derivada segunda es negativa.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) = 12ax^2 + 6bx \\ a = -3 \\ f''(1) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -36 \cdot 1^2 + 6b \cdot 1 < 0 \Rightarrow 6b < 36 \Rightarrow \boxed{b < 6}$$

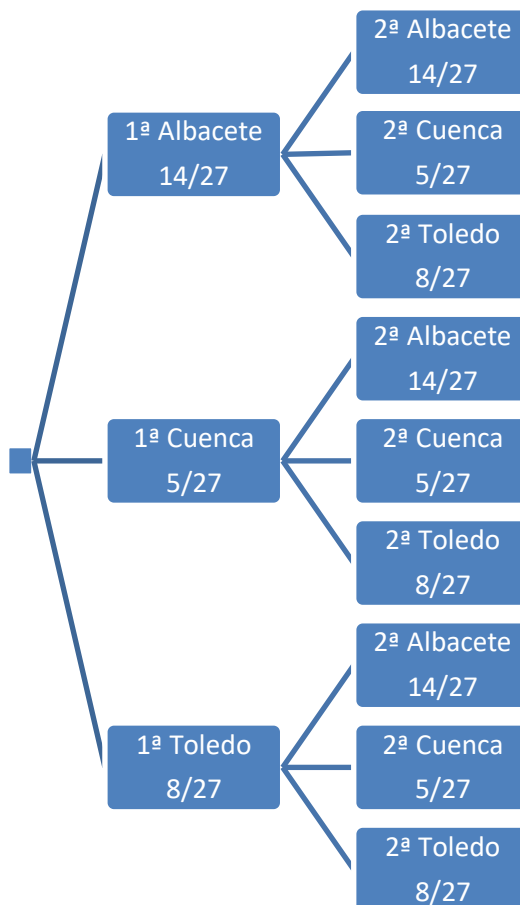
Los valores buscados son infinitos: $a = -3$, $b = \text{cualquiera menor que } 6$ y $c = 12 - 3b$.

5. En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

- a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 ptos)
- b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 ptos)

Ejercicio puesto en el año 2018.

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Las dos entradas a alumnos que no son de Albacete}) &= \\
 &= P(CC) + P(CT) + P(TC) + P(TT) = \\
 &= \frac{5}{27} \cdot \frac{5}{27} + \frac{5}{27} \cdot \frac{8}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{5}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{27} = \frac{25 + 40 + 40 + 64}{27 \cdot 27} = \boxed{\frac{169}{729} = 0.2318}
 \end{aligned}$$

- b) Para que les toque a los cinco alumnos de Cuenca en los cinco sorteos debe tocarle en el primer sorteo la primera entrada, con probabilidad 5/27. Le debe tocar el segundo sorteo con probabilidad 4/26, pues un alumno de Cuenca ya no se incluye en el segundo sorteo. En el tercero con probabilidad 3/25, el cuarto con probabilidad 2/24 y en el quinto con probabilidad 1/23.

La probabilidad de que ocurra todo esto es el producto de las probabilidades.

$$P(5 \text{ entradas a los 5 alumnos de Cuenca}) = \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{23} = \boxed{\frac{1}{80730} = 0.0000123}$$

6. El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (1 pto)

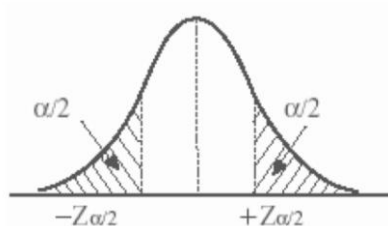
X = Tiempo de atención a un paciente (en minutos). $X = N(\mu, 2)$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3$$

a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

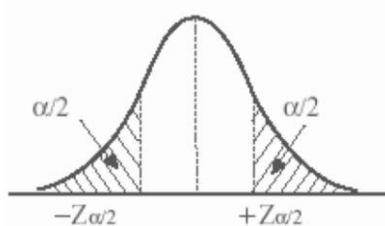


$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 1.2396$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (10.3 - 1.2396, 10.3 + 1.2396) = (9.0604, 11.5396)$$

b) Con un nivel de confianza del 95% tenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 2)^2 = 15.3664$$

El tamaño mínimo es de 16 pacientes.

EvAU Extraordinaria 2018

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.



Propuesta A

1. En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.

El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo.

Para ello se pide:

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 pts)
- Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 pts)

2. Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:

Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción. Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 pts)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} 4x - t & \text{si } x \leq 1 \\ (x - 2)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 pts)
- Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. De la función $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2, -44)$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $(x=6)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c (1.5 pts).

5. En un municipio el 40% de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

- Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 pts)
- Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 pts)

6. Se desea investigar la resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica

$\sigma = 15 \text{ Kg/cm}^2$. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de 110 Kg/cm^2 .

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
- Explica razonadamente el efecto que tendrá sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Se puede admitir que la media de resistencia μ del material pueda ser de 111 kg/cm^2 con una confianza del 95%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

- a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su

inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$. (0.75 ptos)

- Calcula A^3 y A^4 . (0.75 ptos)

2. Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 ptos)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x| + 5t & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$? (0.5 ptos)
- Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)
- Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. Cierta club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su

número de socios se ha ajustado a la función: $S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180$

Donde x está en años, con $0 \leq x \leq 25$, y $S(x)$ está en cientos de socios. Se pide:

- Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio ($x = 0$) y cuántos en este momento ($x = 25$). (0.5 ptos)
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años. (0.5 ptos)
- Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos. (0.5 ptos)

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.

- a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 pts)
- b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta? (0.75 pts)
6. Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.
- a) Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
- b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 pts)
- c) ¿Crees que la media poblacional μ del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONESPropuesta A

1. En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.

El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo.

Para ello se pide:

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 pts)
- Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 pts)

- a) Llamamos “x” al número de bicicletas de paseo montadas e “y” al número de bicicletas de montaña montadas.

“El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas” $\rightarrow T(x, y) = x + 2y$

El objetivo es minimizar el tiempo necesario para fabricar las bicicletas. Buscamos minimizar la función $T(x, y) = x + 2y$.

- b) Las restricciones son:

“El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2” $\rightarrow 1 \leq x \leq 2$

“El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6” $\rightarrow 3 \leq y \leq 6$

“Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9” $\rightarrow 3x + y \geq 9$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 6 \\ 3x + y \geq 9 \end{array} \right\}$$

Dibujamos cada una de las rectas que limitan la región factible o región que cumple todas las inecuaciones.

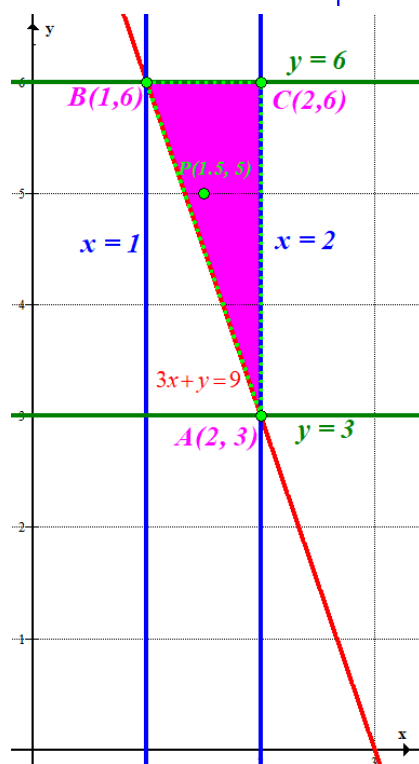
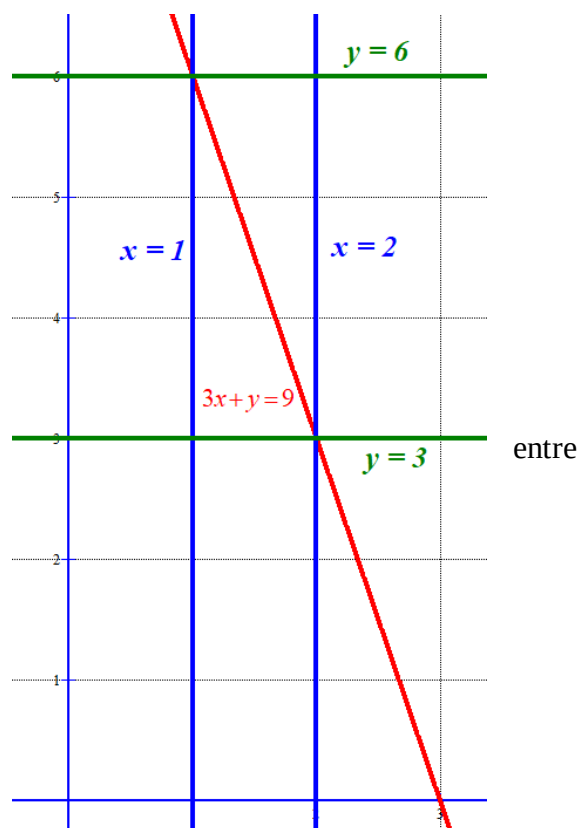
$x = 1; x = 2$ Rectas verticales $y = 3; y = 6$ Rectas horizontales

$3x + y = 9$

x	$y = 9 - 3x$
0	9
1	6
2	3

Como la región está en el rectángulo encerrado por las líneas azules y verdes y además está por encima de la recta roja, la región factible es el triángulo que coloreo de rosa en el siguiente dibujo.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 6 \\ 3x + y \geq 9 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$



- c) Valoramos la función $T(x, y) = x + 2y$ en cada uno de los vértices, en busca del valor mínimo del tiempo de montaje de las bicicletas cumpliendo las restricciones pedidas.

$$A(2,3) \rightarrow T(2,3) = 2 + 6 = 8$$

$$B(1,6) \rightarrow T(1,6) = 1 + 12 = 13$$

$$C(2,6) \rightarrow T(2,6) = 2 + 12 = 14$$

El tiempo mínimo son 8 horas que se alcanzan en el punto $A(2,3)$ que significa montar 2 bicicletas de paseo y 3 de montaña.

2. Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:

Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción. Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamamos “a” al número de acciones de la empresa A, “b” a las de B y “c” a las de C.

“En total hemos comprado 255 acciones” $\rightarrow a + b + c = 255$

“Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C”

$$\rightarrow a = \frac{b+c}{2}$$

“Ha gastado 7000 € y una acción de la empresa A cuesta 20 €, una de B cuesta 25 € y una de C cuesta 40 €” $\rightarrow 7000 = 20a + 25b + 40c$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ a = \frac{b+c}{2} \\ 7000 = 20a + 25b + 40c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ 2a = b + c \\ 20a + 25b + 40c = 7000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ 2a - b - c = 0 \\ 4a + 5b + 8c = 1400 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ 2a - b - c = 0 \\ 4a + 5b + 8c = 1400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2a \quad -b \quad -c \quad = 0 \\ -2a \quad -2b \quad -2c \quad = -510 \\ \hline -3b \quad -3c \quad = -510 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 4 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 4a \quad +5b \quad +8c \quad = 1400 \\ -4a \quad -4b \quad -4c \quad = -1020 \\ \hline b \quad +4c \quad = 380 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ -3b - 3c = -510 \\ b + 4c = 380 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ 3b \quad +12c \quad = 1140 \\ -3b \quad -3c \quad = -510 \\ \hline 9c \quad = 630 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ -3b - 3c = -510 \\ 9c = 630 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ -3b - 3c = -510 \\ \boxed{c = 70} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + 70 = 255 \\ -3b - 210 = -510 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 185 \\ -3b = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 185 \\ \boxed{b = 100} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + 100 = 185 \Rightarrow \boxed{a = 85}$$

Hemos comprado 85 acciones de A, 100 de B y 70 de C.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - t & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 pts)
 b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

- a) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe cumplirse que los límites laterales coincidan con el valor de la función en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 - t \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x - t = 4 - t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 + t = 1 + t \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - t = 1 + t \Rightarrow 3 = 2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

El valor buscado es $t = \frac{3}{2}$

- b) Para $t = 0$ la función no es continua y queda $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

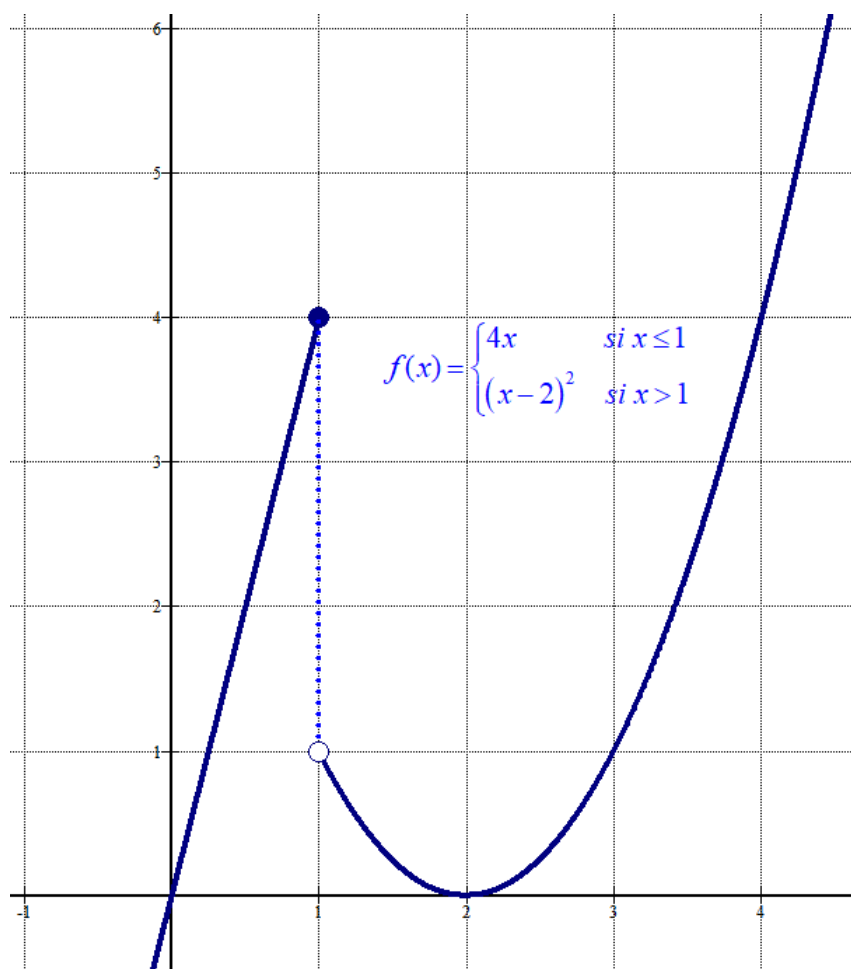
Es un trozo de parábola y un trozo de recta.

$$f(x) = 4x \quad (x \leq 1)$$

x	$y = 4x$
-1	-4
0	0
1	4 Si se incluye

$$f(x) = (x-2)^2 \quad (x > 1)$$

x	$y = (x-2)^2$
1	1 No se incluye
2	0
3	1
4	4



4. De la función $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2, -44)$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $(x=6)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c (1.5 pts).

La función $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pasa por el punto $(2, -44)$ y por tanto se cumple:

$$G(2) = -44 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = -44 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c = -44 \Rightarrow \boxed{4a + 2b + c = -22}$$

La función $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$ por lo que se anula la derivada segunda.

$$\begin{aligned} G(x) &= ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow G''(x) = 6ax + 2b \\ G''(x) &= 6ax + 2b \\ G''(2) &= 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow 0 = 12a + 2b \Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -6a} \right.$$

En $x = 6$ la función tiene un mínimo relativo, por lo que la derivada primera se anula en $x = 6$.

$$\begin{aligned} G(x) &= ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ G'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ G'(6) &= 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow 0 = 3a \cdot 6^2 + 2b \cdot 6 + c \Rightarrow \boxed{108a + 12b + c = 0} \right.$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -22 \\ b = -6a \\ 108a + 12b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2(-6a) + c = -22 \\ 108a + 12(-6a) + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 12a + c = -22 \\ 108a - 72a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8a + c = -22 \\ 36a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 8a - 22 \\ 36a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 36a + 8a - 22 = 0 \Rightarrow 44a - 22 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{22}{44} = \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 8 \cdot \frac{1}{2} - 22 = -18 \\ b = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \\ c = -18 \end{cases} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 18x}$$

5. En un municipio el 40% de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

- a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 pts)
- b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 pts)

Realizamos una tabla de contingencia. Como al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas entonces al 30% restante no le gusta ni el cine ni la lectura.

	Aficionado a la lectura (L)	No aficionado a la lectura ($\bar{L}$)	
Aficionado al cine (C)	$C \cap L$	$C \cap \bar{L}$	50
No aficionado al cine ($\bar{C}$)	$\bar{C} \cap L$	30 $\bar{C} \cap \bar{L}$	
	40		100

Completamos los valores que faltan en la tabla, teniendo en cuenta que la suma de los dos primeros elementos de cada fila o columna debe darnos el tercer elemento de la fila o columna.

	Aficionado a la lectura (L)	No aficionado a la lectura ($\bar{L}$)	
Aficionado al cine (C)	20 $C \cap L$	30 $C \cap \bar{L}$	50
No aficionado al cine ($\bar{C}$)	20 $\bar{C} \cap L$	30 $\bar{C} \cap \bar{L}$	50
	40	60	100

Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de las probabilidades pedidas.

a) $P(\text{Le gusta el cine y la lectura}) = \frac{20}{100} = \boxed{0,2}$

b) $P(\text{Le guste la lectura} / \text{Le gusta el cine}) = \frac{\text{Nº de aficionados al cine y la lectura}}{\text{Nº de aficionados al cine}} = \frac{20}{50} = \boxed{0,4}$

6. Se desea investigar la resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15 \text{ Kg/cm}^2$. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de 110 Kg/cm^2 .

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
- Explica razonadamente el efecto que tendrá sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 pts)
- ¿Se puede admitir que la media de resistencia μ del material pueda ser de 111 kg/cm^2 con una confianza del 95%? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

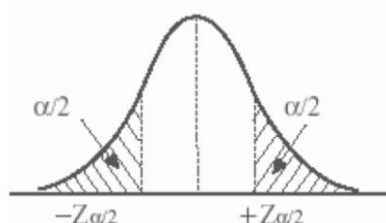
X = Resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor. $X = N(\mu, 15)$

Tamaño de muestra = $n = 400$ elementos. *Media muestral* = $\bar{x} = 110 \text{ kg / cm}^2$

- Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}} = 1.47$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (110 - 1.47, 110 + 1.47) = (108.53, 111.47)$$

- Cuando el nivel de confianza aumenta, también aumenta $z_{\alpha/2}$ luego crece la amplitud del intervalo; si el nivel de confianza disminuye, disminuye la amplitud del intervalo porque $z_{\alpha/2}$ disminuye. En la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se observa que el Error y $z_{\alpha/2}$ son proporcionales.
- Se puede admitir que la media sea 111 Kg/cm^2 porque ese valor pertenece al intervalo de confianza calculado $(108.53, 111.47)$.

Propuesta B

1. a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$. (0.75 ptos)
 b) Calcula A^3 y A^4 . (0.75 ptos)

a) Calculamos su cuadrado y su inversa y los comparamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & 14-21 \\ -2+3 & -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 7 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & -21+21 \\ 2-2 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A$$

2. Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 pts)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

- a) Llamamos “a” al valor de una acción de la empresa A, “b” al de la empresa B y “c” al de C.

“Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C” $\rightarrow 85a + 100b + 70c = 7000$

“El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A” $\rightarrow c = 2a$

“El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A” $\rightarrow b = 5 + a$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 85a + 100b + 70c = 7000 \\ c = 2a \\ b = 5 + a \end{array} \right\}$$

- b) Resolvemos el sistema por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} 85a + 100b + 70c = 7000 \\ c = 2a \\ b = 5 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 85a + 100(5 + a) + 70 \cdot 2a = 7000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 85a + 500 + 100a + 140a = 7000 \Rightarrow 325a = 6500 \Rightarrow \boxed{a = 20} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 40} \\ \boxed{b = 5 + 20 = 25} \end{cases}$$

Las acciones de la empresa A valen 20 € cada una, 25 € cada una de B y 40 € cada una de C.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x| + 5t & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^2 - 10x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$? (0.5 pts)
 b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
 c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

- a) Para que sea continua deben de coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 5t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| + 5t = |0| + 5t = 5t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+t)^2 - 10x = t^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow 5t = t^2 \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 0 \\ t = 5 \end{cases}$$

La función es continua para $t = 0$ y para $t = 5$.

b) Para $t = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} |x| + 10 & \text{si } x \leq 0 \\ (x+2)^2 - 10x = x^2 + 4x + 4 - 10x = x^2 - 6x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función se reduce a $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Es una parábola. Tendrá un máximo o un mínimo, lo investigamos haciendo uso de la derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3} \end{aligned}$$

$x = 3$ es un máximo o mínimo relativo, lo averiguamos usando la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 6 \Rightarrow f''(x) = 2 \\ f''(3) &= 2 > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo relativo} \end{aligned}$$

- c) Para $t = 2$ y en el intervalo $(0, +\infty)$ la función queda $f(x) = x^2 - 6x + 4$. De esta función ya hemos encontrado un mínimo relativo en $x = 3$.
 Por ello la función decrece en $(0, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$

4. Cierta club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función: $S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180$

Donde x está en años, con $0 \leq x \leq 25$, y $S(x)$ está en cientos de socios. Se pide:

- Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio ($x = 0$) y cuántos en este momento ($x = 25$). (0.5 pts)
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años. (0.5 pts)
- Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos. (0.5 pts)

$$a) S(0) = -\frac{1}{3}0^3 + \frac{21}{2}0^2 - 54 \cdot 0 + 180 = 180 \Rightarrow 18000 \text{ socios}$$

$$S(25) = -\frac{1}{3}25^3 + \frac{21}{2}25^2 - 54 \cdot 25 + 180 = 184.166... \Rightarrow 18417 \text{ socios}$$

b)

$$S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180 \Rightarrow S'(x) = -x^2 + 21x - 54$$

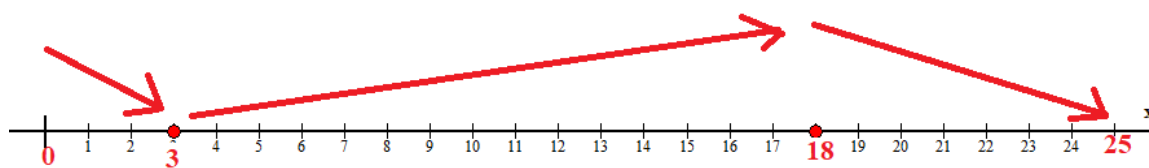
$$S'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 21x - 54 = 0 \Rightarrow x = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(-1)(-54)}}{-2} = \frac{-21 \pm 15}{-2} = \begin{cases} \frac{-21+15}{-2} = 3 \\ \frac{-21-15}{-2} = 18 \end{cases}$$

Los puntos críticos del número de socios están en $x = 3$ y en $x = 18$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores.

- En $(0, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $S'(2) = -2^2 + 21 \cdot 2 - 54 = -16 < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.
- En $(3, 18)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $S'(10) = -10^2 + 210 - 54 = 56 > 0$. La función crece en $(3, 18)$.
- En $(18, 25)$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale $S'(20) = -20^2 + 420 - 54 = -34 < 0$. La función decrece en $(18, 25)$.

La variación del crecimiento y decrecimiento de la función sigue el esquema siguiente:



La función $S(x)$ decrece en $(0, 3) \cup (18, 25)$ y crece en $(3, 18)$

- Observando el esquema anterior $S(x)$ tiene un mínimo en $x = 3$ y un máximo en $x = 18$.

$$S(3) = -\frac{1}{3}3^3 + \frac{21}{2}3^2 - 54 \cdot 3 + 180 = 103.5 \Rightarrow 10350 \text{ socios}$$

$$S(18) = -\frac{1}{3}18^3 + \frac{21}{2}18^2 - 54 \cdot 18 + 180 = 666 \Rightarrow 66600 \text{ socios}$$

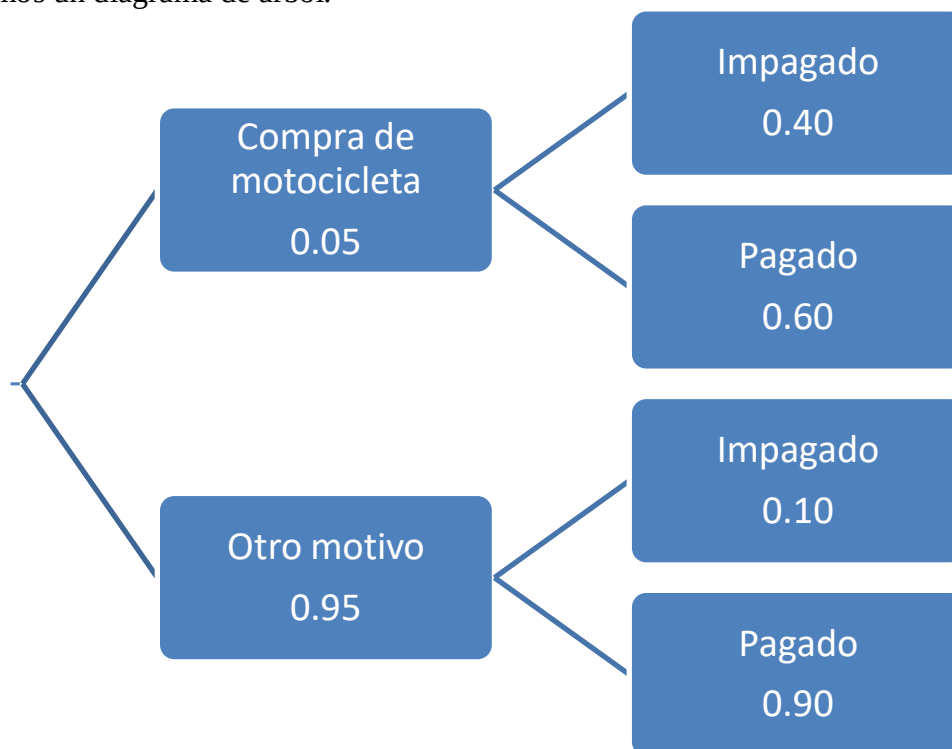
A los 3 años se produce un número mínimo de socios (10350 socios) y a los 18 años se produce un número máximo de socios (66600 socios).

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 pts)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta? (0.75 pts)

Construimos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Impagado}) = P(\text{Crédito moto})P(\text{Impagado} / \text{Crédito moto}) + P(\text{Otro crédito})P(\text{Impagado} / \text{Otro crédito}) =$$

$$= 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = \boxed{0.115}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Crédito moto} / \text{Pagado}) = \frac{P(\text{Crédito moto} \cap \text{Pagado})}{P(\text{Pagado})} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.6}{1 - 0.115} = \frac{0.030}{0.885} = \frac{30}{885} = \boxed{\frac{2}{59} = 0.0339}$$

6. Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.

- Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
- Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 pts)
- ¿Crees que la media poblacional μ del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

X = Días que tarda un cliente en comprar de nuevo ropa de cierta marca. $X = N(\mu, 4)$

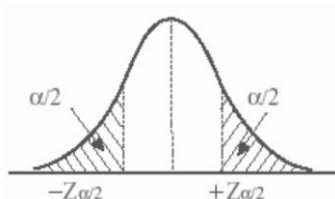
Tamaño de muestra = $n = 10$ clientes.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{50 + 58 + 59 + 60 + 62 + 63 + 64 + 65 + 68 + 71}{10} = 62 \text{ días}$$

- a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 2.48$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (62 - 2.48, 62 + 2.48) = (59.52, 64.48)$$

- b) Para disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza debemos de disminuir el error y en su fórmula solo aparecen 3 conceptos: $z_{\alpha/2}$ que depende del nivel de confianza, la desviación típica que no puede cambiar y “n” el tamaño de la muestra.

Aumentando el tamaño de la muestra disminuye la amplitud del intervalo de confianza, pues “n” está en el denominador de la fórmula del error $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

- c) La media de 64 días pertenece al intervalo de confianza calculado con un nivel de confianza del 95%, si aumentamos el nivel de confianza a 99% aumentaremos la amplitud del intervalo y 64 días seguirá estando en el intervalo de confianza.

EvAU Ordinaria 2018

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar la función $F = -x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 7y \leq 58 \quad ; \quad 4x + 5y \geq 48 \quad ; \quad 3x - 2y \leq 13$$

- a) Dibuja la región factible. (1 pto)
- b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)
- c) Indica la solución óptima del problema y su valor. (0.25 ptos)

2. En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. (1.5 ptos)
- b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 ptos)
- b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ con $t = 3$. (0.5 ptos)
- c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$ con $t = 3$. (0.5 ptos)

4. Dada la función $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ se pide que calcules los parámetros a , b y c sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: $(0,0)$ y $(1,7)$. (1.5 ptos)

5. El 10% de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 97% de los casos de personas con la enfermedad, pero también da positivo en el 1% de personas que no padecen la enfermedad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona obtenga un diagnóstico positivo? (0.75 ptos)
- b) Si una persona obtiene negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? (0.75 ptos)

6. Para hacer un estudio del uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas semanales que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas diarias de uso de NT” sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

- a) Halla el intervalo de confianza para el número medio diario de horas que hacen uso de las nuevas tecnologías los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)
- b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas es 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D = (0 \quad -1 \quad 3)$

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuales pueden realizarse y cuáles no:
 $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$. (0.5 ptos)

b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada. (1 pto)

2. Cierta concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada tipo. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -1$? (0.5 ptos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (0.5 ptos)

4. Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40 \text{ donde } f(x) \text{ está en mg/litro y } x \text{ en horas, con } 0 \leq x \leq 9.$$

a) Determina cuales son los valores inicial ($x = 0$) y final ($x = 9$) de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente. (0.5 ptos)

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración. (0.5 ptos)

c) Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos. (0.5 ptos)

5. En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 ptos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 ptos)

6. El tiempo de conexión a internet por semana de los alumnos de una universidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1$ hora. Se eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos y se observó que la media de tiempo en internet para esa muestra era de 5 horas.

- Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de conexión a internet con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 ptos)
- ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 4$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 ptos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONESPropuesta A

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar la función $F = -x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 7y \leq 58 \quad ; \quad 4x + 5y \geq 48 \quad ; \quad 3x - 2y \leq 13$$

- a) Dibuja la región factible. (1 pto)
 b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)
 c) Indica la solución óptima del problema y su valor. (0.25 ptos)

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$$x + 7y = 58$$

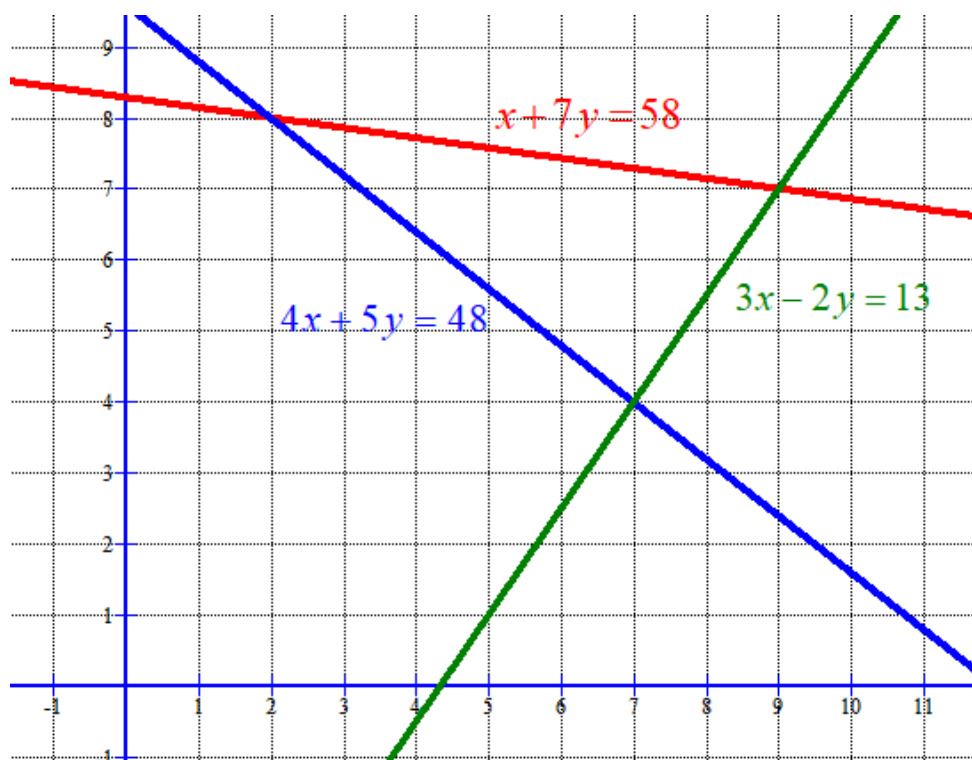
$$4x + 5y = 48$$

$$3x - 2y = 13$$

x	$y = \frac{58-x}{7}$
2	8
58	0
9	7

x	$y = \frac{48-4x}{5}$
2	8
12	0
7	4

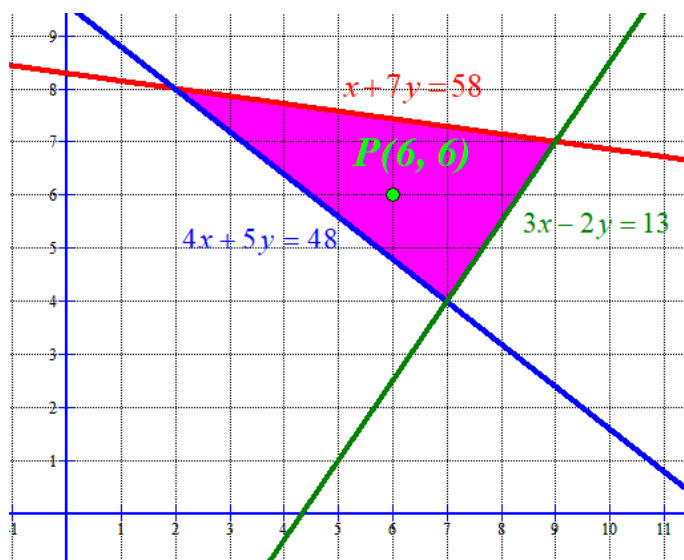
x	$y = \frac{3x-13}{2}$
5	1
7	4
9	7



Como las restricciones son $x + 7y \leq 58$; $4x + 5y \geq 48$; $3x - 2y \leq 13$ colocamos la “y” positiva y localizamos la región del plano que cumple todas las restricciones.

$$7y \leq 58 - x \quad ; \quad 5y \geq 48 - 4x \quad ; \quad 3x - 13 \leq 2y$$

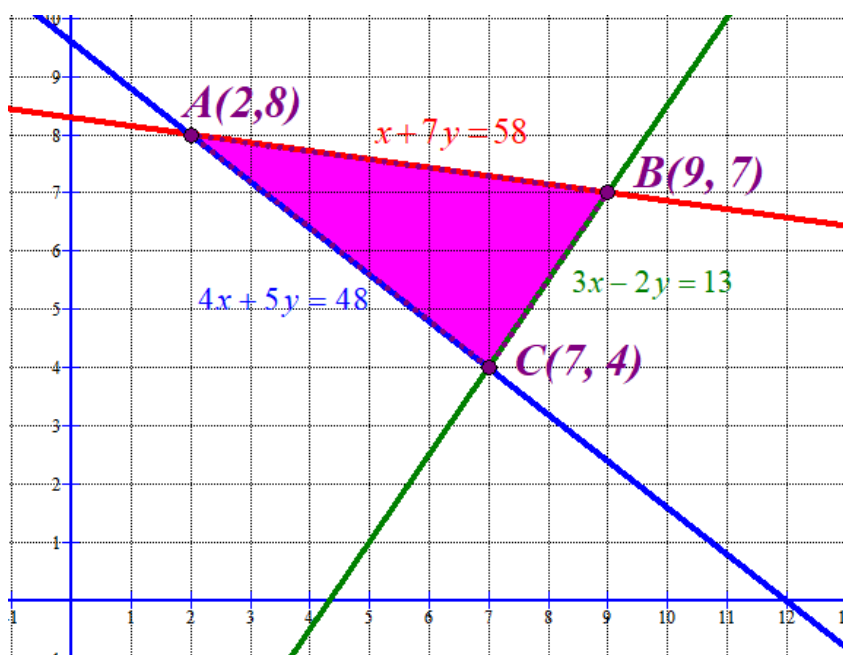
La región está por debajo de la línea roja, por encima de la azul y por encima de la verde. Marcamos de rosa la región factible y lo comprobamos en un punto cualquiera de la misma.



$$\left. \begin{array}{l} x + 7y \leq 58 \\ 4x + 5y \geq 48 \\ 3x - 2y \leq 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6 + 42 \leq 58 \\ 24 + 30 \geq 48 \\ 18 - 12 \leq 13 \end{array} \right\} \text{¡SE CUMPLEN!}$$

$P(6, 6)$

b) Los vértices los obtengo resolviendo los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas que se cortan.



$$\left. \begin{array}{l} x + 7y = 58 \\ 4x + 5y = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 58 - 7y \\ 4x + 5y = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(58 - 7y) + 5y = 48 \Rightarrow 232 - 28y + 5y = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23y = -184 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 58 - 56 = 2 \Rightarrow \boxed{A(2, 8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 7y = 58 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 58 - 7y \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(58 - 7y) - 2y = 13 \Rightarrow 174 - 21y - 2y = 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23y = -161 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x = 58 - 49 = 9 \Rightarrow \boxed{B(9, 7)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 5y = 48 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{48-5y}{4} \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \Rightarrow 3 \frac{48-5y}{4} - 2y = 13 \Rightarrow 144 - 15y - 8y = 52 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -23y = -92 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = \frac{48-20}{4} = 7 \Rightarrow \boxed{C(7,4)}$$

Los vértices tienen coordenadas A(2,8), B(9,7) y C(7,4)

c) Valoramos la función $F = -x + 6y$ en cada vértice y localizamos el valor mínimo.

- $A(2,8) \rightarrow F = -2 + 48 = 46$
- $B(9,7) \rightarrow F = -9 + 42 = 33$
- $C(7,4) \rightarrow F = -7 + 24 = 17$

El valor mínimo de la función F se alcanza en el punto C(7,4)

2. En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además, sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamaremos b al número de botellas de blanco, t al número de botellas de tinto y r al número de botellas de rosado, que hay en la bodega.

“Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado” $\rightarrow b + t = 3r$

“La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco” $\rightarrow t + r = b + 40$

“Antonio tiene en su bodega 280 botellas” $\rightarrow r + b + t = 280$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} b + t = 3r \\ t + r = b + 40 \\ r + b + t = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + t - 3r = 0 \\ -b + t + r = 40 \\ b + t + r = 280 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} b + t - 3r = 0 \\ -b + t + r = 40 \\ b + t + r = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ -b \quad +t \quad +r \quad = 40 \\ b \quad +t \quad -3r \quad = 0 \\ \hline 2t \quad -2r \quad = 40 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ b \quad +t \quad +r \quad = 280 \\ -b \quad -t \quad +3r \quad = 0 \\ \hline 4r \quad = 280 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + t - 3r = 0 \\ 2t - 2r = 40 \\ 4r = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + t - 3r = 0 \\ t - r = 20 \\ \boxed{r = 70} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + t - 210 = 0 \\ t - 70 = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + t = 210 \\ \boxed{t = 90} \end{array} \right\} \Rightarrow b + 90 = 210 \Rightarrow \boxed{b = 120}$$

Antonio tiene en su bodega 70 botellas de vino rosado, 120 de vino blanco y 90 de vino tinto.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 ptos)
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ con $t = 3$. (0.5 ptos)
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$ con $t = 3$. (0.5 ptos)

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben de coincidir sus límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} |x+2|+t = 2+t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-t)^2 = t^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t^2 = 2+t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = t \\ \frac{1-3}{2} = -1 = t \end{cases}$$

Los valores buscados son $t = -1$ y $t = 2$.

b) Para $t = 3$ la función queda $f(x) = \begin{cases} |x+2|+3 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y en el intervalo $(0, +\infty)$ se reduce a la expresión $f(x) = (x-3)^2$. Su gráfica es un trozo de parábola.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(x-3) \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

En $x = 3$ hay un punto crítico de la función, utilizamos la segunda derivada para comprobar de que tipo es.

$$f'(x) = 2(x-3) \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(3) = 2 > 0$$

En $x = 3$ hay un mínimo relativo de la función.

Como $f(3) = (3-3)^2 = 0$ las coordenadas del mínimo son $(3, 0)$.

c) Como hemos encontrado el mínimo relativo de la función en $(3, 0)$, antes de $x = 3$ la función debe decrecer y después de $x = 3$ la función debe crecer.

En $(0, 3)$ la función decrece y en $(3, +\infty)$ la función crece.

4. Dada la función $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ se pide que calcules los parámetros a , b y c sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: $(0,0)$ y $(1,7)$. (1.5 ptos)

En los puntos de inflexión se anula la derivada segunda.

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c \Rightarrow f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 \Rightarrow f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 20ax^3 + 6bx \\ f''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 20ax^3 + 6bx \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 20a + 6b = 0 \Rightarrow 10a + 3b = 0$$

Además, la función pasa por $(0,0)$ y $(1,7)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^5 + bx^3 + c \\ \text{Pasa por } (0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^5 + bx^3 + c \\ \text{Pasa por } (1,7) \end{array} \right\} \Rightarrow 7 = a + b + c \Rightarrow 7 = a + b$$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 10a + 3b = 0 \\ 7 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10a + 3b = 0 \\ 7 - b = a \end{array} \right\} \Rightarrow 10(7 - b) + 3b = 0 \Rightarrow 70 - 10b + 3b = 0 \Rightarrow 70 = 7b \Rightarrow$$

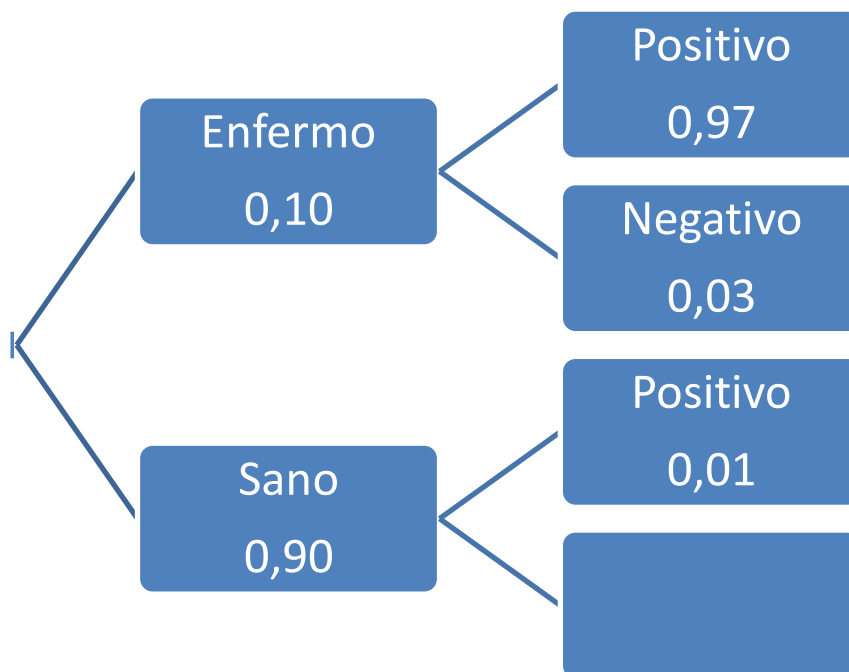
$$\Rightarrow \boxed{b = 10} \Rightarrow \boxed{a = 7 - 10 = -3}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 10$, $c = 0$. La función queda $f(x) = -3x^5 + 10x^3$

5. El 10% de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 97% de los casos de personas con la enfermedad, pero también da positivo en el 1% de personas que no padecen la enfermedad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona obtenga un diagnóstico positivo? (0.75 ptos)
 b) Si una persona obtiene negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? (0.75 ptos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Positivo}) &= P(\text{Enfermo})P(\text{Positivo} / \text{Enfermo}) + P(\text{Sano})P(\text{Positivo} / \text{Sano}) = \\
 &= 0,1 \cdot 0,97 + 0,9 \cdot 0,01 = 0,097 + 0,009 = \boxed{0,106}
 \end{aligned}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Enfermo} / \text{Da negativo}) &= \frac{P(\text{Enfermo} \cap \text{Da negativo})}{P(\text{Da negativo})} = \\
 &= \frac{P(\text{Enfermo})P(\text{Da negativo} / \text{Enfermo})}{P(\text{Da negativo})} = \frac{0,1 \cdot 0,03}{1 - 0,106} = \frac{0,003}{0,894} = \boxed{\frac{1}{298} = 0,003}
 \end{aligned}$$

6. Para hacer un estudio del uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas semanales que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas diarias de uso de NT” sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

- Halla el intervalo de confianza para el número medio diario de horas que hacen uso de las nuevas tecnologías los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)
- Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas es 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

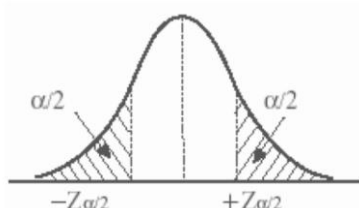
X = Número de horas semanales que hace uso de las nuevas tecnologías un joven. $X = N(\mu, 2.1)$

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{4.2 + 4.6 + 5 + 5.7 + 5.8 + 5.9 + 6.1 + 6.2 + 6.5 + 7.3}{10} = 5.73$$

a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{10}} = 1.441$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (5.73 - 1.441, 5.73 + 1.441) = (4.289, 7.171)$$

b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si

aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ aumentando el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (4.289, 7.171). \text{ La media 4 no pertenece a este intervalo.}$$

Si disminuimos el nivel de confianza al 90% la amplitud del intervalo de confianza aumenta y la media 4 puede pertenecer al intervalo de confianza.

Calculamos el nuevo intervalo de confianza.

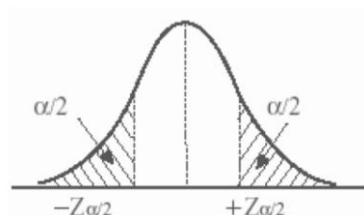
X = Número de horas semanales que hace uso de las nuevas tecnologías un joven.

$X = N(\mu, 2.1)$ Media muestral $= \bar{x} = 5.73$

Con un nivel de confianza del 90%

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.5	0.9939	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{10}} = 1.71$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (5.73 - 1.71, 5.73 + 1.71) = (4.02, 7.44)$$

Disminuyendo el nivel de confianza al 90% el intervalo de confianza aumenta de amplitud, pero la media poblacional de 4 horas sigue sin estar en el intervalo de confianza.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D = (0 \quad -1 \quad 3)$

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuales pueden realizarse y cuáles no:

$A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$. (0.5 pto)

b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada. (1 pto)

a) Para poderse realizar un producto de dos matrices el número de columnas del primer factor del producto debe de coincidir con el número de filas del segundo factor.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$\xrightarrow{2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2} 2 \times 2$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$\xrightarrow{2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 1} 2 \times 1$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} (0 \quad -1 \quad 3) = \text{¡NO ES POSIBLE!}$$

$$\xrightarrow{2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{1} \times 3} \text{NO ES POSIBLE}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad -1 \quad 3) = \text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$\xrightarrow{3 \times \boxed{1} \cdot \boxed{1} \times 3} 3 \times 3$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+10 & -2 \\ 6-3 & 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ Es una matriz cuadrada.}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad -1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Es una matriz cuadrada.}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{¡NO ES CUADRADA!}$$

$$\xrightarrow{2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 1} 2 \times 1$$

2. Cierta concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada tipo. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) x = número de coches gasolina, y = número de coches diésel, z = número de coches híbridos.

“Guardan 100 automóviles” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos” $\rightarrow y - x = \frac{z}{2}$

“Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel” $\rightarrow x - z = \frac{y}{3}$

Reunimos las 3 ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ y - x = \frac{z}{2} \\ x - z = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2y - 2x = z \\ 3x - 3z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Utilizamos el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 200 \\ \hline 4y + z = 200 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x - y - 3z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = -300 \\ \hline -4y - 6z = -300 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ -4y - 6z = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -4y - 6z = -300 \\ 4y + z = 200 \\ \hline -5z = -100 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ -5z = -100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4y + z = 200 \\ \boxed{z = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 20 = 100 \\ 4y + 20 = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ 4y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ \boxed{y = 45} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 45 = 80 \Rightarrow \boxed{x = 35}$$

Tienen guardados 35 coches gasolina, 45 diésel y 20 híbridos.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+t & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -1$? (0.5 ptos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (0.5 ptos)

a) Para que la función sea continua en $x = -1$ deben de coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x+t = -1+t \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1+t = 4 \Rightarrow \boxed{t=5}$$

b) Para $t = 3$ la función es $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-4)^2 - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La gráfica es un trozo de recta oblicua, otro de recta horizontal y un trozo de parábola.

$$f(x) = x+3 \quad (x < -1)$$

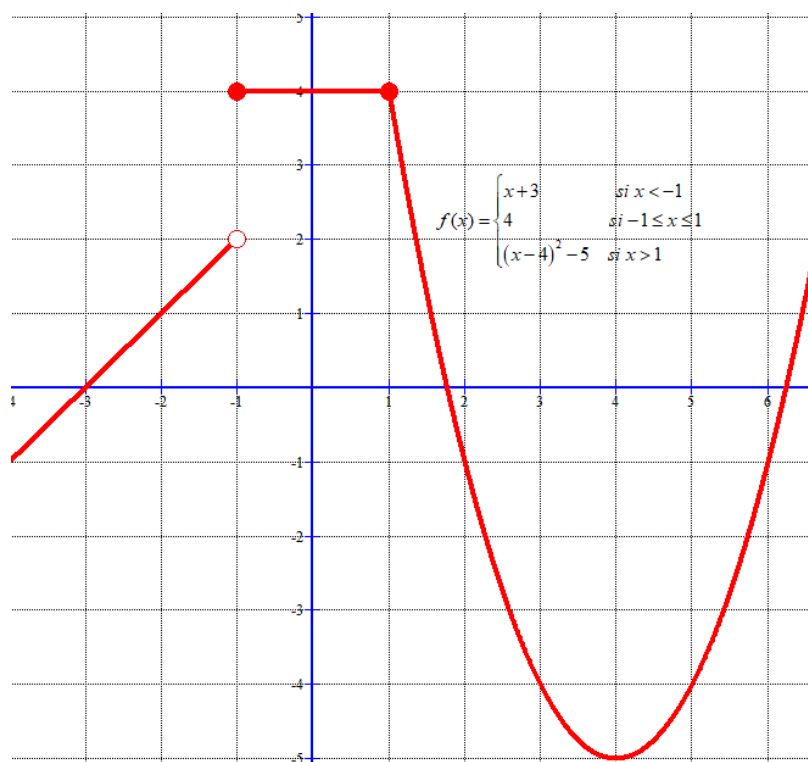
x	$y = x+3$
-3	0
-2	1
-1	2 No se incluye

$$f(x) = 4 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

x	$y = 4$
-1	4
0	4
1	4

$$f(x) = (x-4)^2 - 5 \quad (x > 1)$$

x	$y = (x-4)^2 - 5$
1	4 No se incluye
2	-1
4	-5
6	-1



4. Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40 \text{ donde } f(x) \text{ está en mg/litro y } x \text{ en horas, con } 0 \leq x \leq 9.$$

- Determina cuales son los valores inicial ($x = 0$) y final ($x = 9$) de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente. (0.5 ptos)
- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración. (0.5 ptos)
- Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos. (0.5 ptos)

a) $f(0) = \frac{1}{3}0^3 - 4 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 40 = 40$. El valor inicial es 40 mg/litro.

$$f(9) = \frac{1}{3}9^3 - 4 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + 40 = 22. \text{ El valor final es 22 mg/litro.}$$

b) Buscamos los puntos críticos hallando la derivada e igualando a cero.

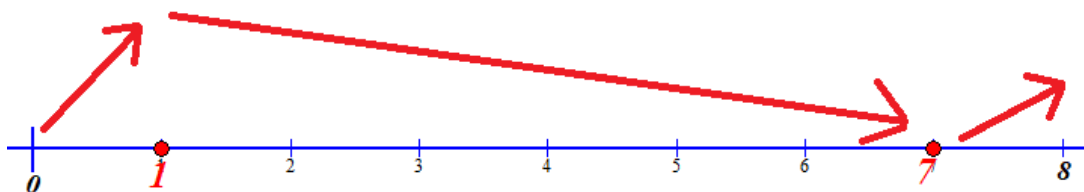
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 28}}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = 7 \\ \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases}$$

Vemos como es el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $[0,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$, la función crece en $[0,1)$.
- En $(1,7)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = -5 < 0$, la función decrece en $(1,7)$.
- En $(7,8]$ tomamos $x = 8$ y la derivada vale $f'(8) = 8^2 - 8 \cdot 8 + 7 = 7 > 0$, la función crece en $(7,8]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La concentración crece en $[0,1) \cup (7,8]$ y decrece en $(1,7)$.

c) Mirando el análisis anterior hay un máximo a las 1 horas siendo este valor máximo de

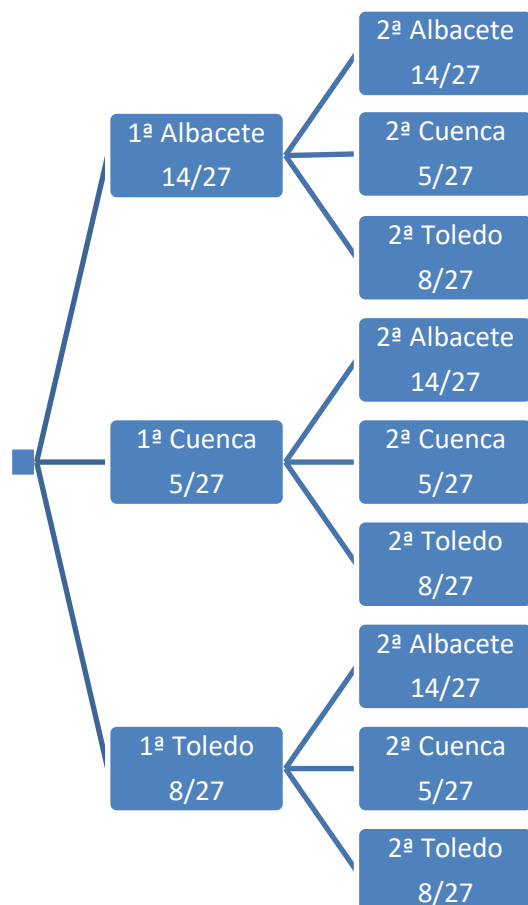
$$f(1) = \frac{1}{3}1^3 - 4 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 40 = 43,33 \text{ mg / litro}$$

$$f(7) = \frac{1}{3} \cdot 7^3 - 4 \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 + 40 = 7,33 \text{ mg / litro}$$

5. En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

- a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 ptos)
- b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 ptos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$P(\text{Las dos entradas a alumnos que no son de Albacete}) =$

$$= P(CC) + P(CT) + P(TC) + P(TT) =$$

$$= \frac{5}{27} \cdot \frac{5}{27} + \frac{5}{27} \cdot \frac{8}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{5}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{27} = \frac{25 + 40 + 40 + 64}{27 \cdot 27} = \frac{169}{729} = 0.2318$$

- b) Para que les toque a los cinco alumnos de Cuenca en los cinco sorteos debe tocarle en el primer sorteo la primera entrada, con probabilidad 5/27. Le debe tocar el segundo sorteo con probabilidad 4/26, pues un alumno de Cuenca ya no se incluye en el segundo sorteo. En el tercero con probabilidad 3/25, el cuarto con probabilidad 2/24 y en el quinto con probabilidad 1/23.

La probabilidad de que ocurra todo esto es el producto de las probabilidades.

$$P(5 \text{ entradas a los 5 alumnos de Cuenca}) = \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{80730} = 0.0000123$$

6. El tiempo de conexión a internet por semana de los alumnos de una universidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1$ hora. Se eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos y se observó que la media de tiempo en internet para esa muestra era de 5 horas.

- Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de conexión a internet con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 pts)
- ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 4$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 pts)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 pts)

$X =$ Tiempo de conexión a internet por semana de un alumno. $X = N(\mu, 1)$

Tamaño de muestra = $n = 100$ alumnos. Media muestral = $\bar{x} = 5$ h

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.196$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (5 - 0.196, 5 + 0.196) = (4.804, 5.196)$$

- La media poblacional 4 horas queda fuera del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior, por lo que no se puede admitir esa media poblacional.
Si tomamos una muestra más pequeña la amplitud del intervalo de confianza aumentará.

c) Con un nivel de confianza del 94,64% calculamos el nuevo intervalo de confianza.

$$1 - \alpha = 0,9464 \rightarrow \alpha = 0,0536 \rightarrow \alpha/2 = 0,0268 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,93$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.193$$

El error máximo es de 0.193 horas.

EvAU Septiembre 2017

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.



Opción A

1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 pts)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I, \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).}$$

2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 2t & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 pts)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

4. De la función $J(x) = a x^4 + b x^3 + c x$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2 . Además, sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29% de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14% de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)

b) Razona si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)

6. El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2$ kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 pts)

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea $\mu = 5$ kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Opción B

1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.

El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 pts)
- Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 pts)

2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

- Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 pts)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (tx-6)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)
- Para $t = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función: $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ donde $V(x)$ está en Km/h y x en minutos, siendo

$x \geq 0$ y $V(x) \geq 0$. Se pide:

- Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 pts).
- Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 pts).
- Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 pts).

5. Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.

- Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 pts)
- ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 pts)
- ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 pts)

6. El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 7$ euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.

- a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97% (1.25 pts)
- b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 pts)

<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONESOpción A

1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 pts)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I, \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).}$$

a) Suponiendo que las matrices M y N son invertibles entonces podemos multiplicar por la inversa de dichas matrices y nos queda:

$$M \cdot X \cdot N = P \Rightarrow M^{-1} \cdot M \cdot X \cdot N \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow I \cdot X \cdot I = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1}}$$

b) Veamos si las matrices tienen inversa. Comprobamos que sus determinantes son no nulos.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

Calculamos sus inversas.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos lo obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}}$$

2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 pts)
 b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamamos “x” al peso de la pesa más pesada, “y” a la intermedia, “z” a la menos pesada.

“Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g” $\rightarrow 8x + 12y + 20z = 3800$

“Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores” $\rightarrow y = \frac{x}{2}$

“Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor” $\rightarrow 4z = x$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 12y + 20z = 3800 \\ y = \frac{x}{2} \\ 4z = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 950 \\ 2y = x \\ -x + 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 950 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 950 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 950 \\ -x + 2y = 0 \\ 4z = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8z + 3y + 5z = 950 \\ -4z + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 13z = 950 \\ -2z + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 13z = 950 \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow 6z + 13z = 950 \Rightarrow 19z = 950 \Rightarrow \boxed{z = \frac{950}{19} = 50} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 2 \cdot 50 = 100 \\ x = 4 \cdot 50 = 200 \end{array}}$$

Las pesas son de 200 gramos, 100 gramos y 50 gramos.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 2t & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 pts)
 b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)
 c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

a) Para ser continua en $x = 0$ deben de ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + 2t = 2t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2t = 2t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+t)^3 - x = t^3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow t^3 = 2t \Rightarrow t^3 - 2t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 0 \\ t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

b) Para $t = 0$ la función en el intervalo $(0, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = (x+0)^3 - x = x^3 - x$.
 Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

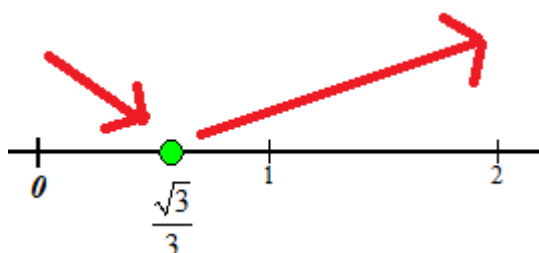
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

De estos dos valores solo pertenece al intervalo $(0, +\infty)$ el valor $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = 3 \cdot 0.1^2 - 1 = -0.97 < 0$. La función decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- En $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 > 0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

La función sigue el siguiente esquema.



La función presenta un mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ las coordenadas del mínimo son $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

c) Según el estudio realizado en el apartado anterior la función decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y crece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

4. De la función $J(x) = ax^4 + bx^3 + cx$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2 . Además, sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

Si en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2 significa que $J'(0) = -2$.

$$J(x) = ax^4 + bx^3 + cx \Rightarrow J'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c$$

$$J'(0) = -2 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + c = -2 \Rightarrow \boxed{c = -2}$$

Con $c = -2$ la función queda $J(x) = ax^4 + bx^3 - 2x$.

Si tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$ significa que $J''(2) = 0$.

$$J'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 - 2 \Rightarrow J''(x) = 12ax^2 + 6bx$$

$$J''(2) = 0 \Rightarrow 12a \cdot 2^2 + 6b \cdot 2 = 0 \Rightarrow 48a + 12b = 0 \Rightarrow \boxed{4a + b = 0}$$

Si tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$ significa que pasa por ese punto, es decir, $J(2) = 0$.

$$J(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 16a + 8b = 4 \Rightarrow \boxed{4a + 2b = 1}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -4a \\ 4a + 2b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + 2(-4a) = 1 \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{b = -4 \cdot \frac{-1}{4} = 1}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ y $c = -2$.

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29% de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14% de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

- a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)
 b) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)

- a) Para simplificar la escritura llamamos A al suceso “superar los límites de alcohol en sangre” y D al suceso “tener presencia de drogas en sangre”.

Como el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas entonces el restante 63% no supera los límites de alcohol ni tiene presencia de drogas en sangre.

Construimos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	D = Presencia de drogas en sangre	$\bar{D}$ = No presencia de drogas en sangre	
A = Supera los límites de alcohol en sangre	$A \cap D$	$A \cap \bar{D}$	29
$\bar{A}$ = No supera...	$\bar{A} \cap D$	$\bar{A} \cap \bar{D}$	63
	14		100

Completamos la tabla.

	D = Presencia de drogas en sangre	$\bar{D}$ = No presencia de drogas en sangre	
A = Supera los límites de alcohol en sangre	6 $A \cap D$	23 $A \cap \bar{D}$	29
$\bar{A}$ = No supera...	8 $\bar{A} \cap D$	63 $\bar{A} \cap \bar{D}$	71
	14	86	100

Nos piden calcular $P(A \cap D) = \frac{6}{100} = \boxed{0.06}$

- b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A \cap D) = P(A)P(D)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap D) = 0.06 \\ P(A)P(D) = \frac{29}{100} \cdot \frac{14}{100} = 0.0406 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$$

No se cumple, por lo que tener presencia de drogas en sangre y superar los límites de alcohol en sangre no son independientes.

6. El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2$ kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
- Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)
- ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea $\mu = 5$ kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

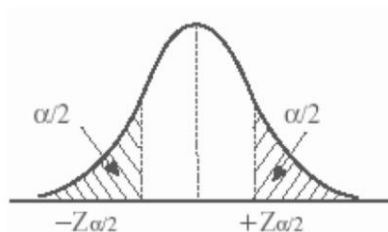
X = Rendimiento por árbol de una especie de pistacho. $X = N(\mu, 1.2)$

Tamaño de muestra = $n = 40$ árboles. *Media muestral* = $\bar{x} = 6.7$ kilos

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{40}} = 0.3719$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (6.7 - 0.3719, 6.7 + 0.3719) = (6.3281, 7.0719)$$

- Cuando el nivel de confianza aumenta, también aumenta $z_{\alpha/2}$ luego crece la amplitud del intervalo; si el nivel de confianza disminuye, disminuye la amplitud del intervalo porque $z_{\alpha/2}$ disminuye. En la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se observa que el Error y $z_{\alpha/2}$ son proporcionales.
- La media de 5 kilos no pertenece al intervalo calculado para un nivel de confianza del 95% (6.3281, 7.0719) y si disminuimos el nivel de confianza disminuiríamos la amplitud del intervalo y la media de 5 kg seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza y seguirá siendo no admisible.

Opción B

1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90. El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 pts)
- Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 pts)

a) Llamamos “x” al número de sacos de cemento e “y” al número de sacos de yeso.

La función objetivo es el peso de todos los sacos. Y deseamos minimizarla.

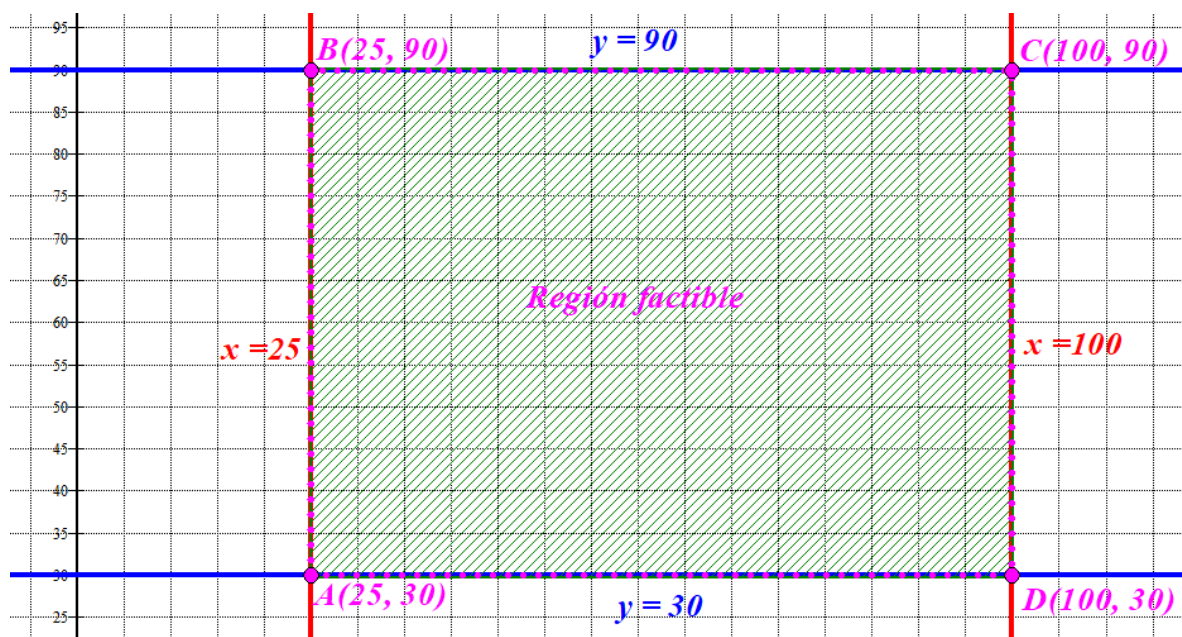
$$P(x, y) = 30x + 20y$$

b) Las restricciones son:

“El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100” $\rightarrow 25 \leq x \leq 100$

“El número de sacos de yeso estará entre 30 y 90” $\rightarrow 30 \leq y \leq 90$

La región factible está entre las rectas verticales $x = 25$ y $x = 100$ y entre las líneas horizontales $y = 30$ e $y = 90$.



c) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

$$A(25, 30) \rightarrow P(25, 30) = 750 + 600 = 1350$$

$$B(25, 90) \rightarrow P(25, 90) = 750 + 1800 = 2550$$

$$C(100, 90) \rightarrow P(100, 90) = 3000 + 1800 = 4800$$

$$D(100, 30) \rightarrow P(100, 30) = 3000 + 600 = 3600$$

Se minimiza el peso en el punto A(25, 30). Significa transportar 25 sacos de cemento y 30 de yeso con un peso total de 1350 kilos.

2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamamos “x” al precio de la entrada al estreno de cine, “y” al precio de la función teatral y “z” al precio de la entrada al concierto de música.

“120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música han costado 6460 euros” $\rightarrow 120x + 50y + 150z = 6460$

“El precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine” $\rightarrow 2y = 5x$

“El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro” $\rightarrow 2z = 3y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 120x + 50y + 150z = 6460 \\ 2y = 5x \\ 2z = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 5y + 15z = 646 \\ \frac{2}{5}y = x \\ z = \frac{3}{2}y \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 5y + 15z = 646 \\ \frac{2}{5}y = x \\ z = \frac{3}{2}y \end{array} \right\} \Rightarrow 12 \cdot \frac{2}{5}y + 5y + 15 \cdot \frac{3}{2}y = 646 \Rightarrow \frac{24}{5}y + 5y + \frac{45}{2}y = 646 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48y + 50y + 225y = 6460 \Rightarrow 323y = 6460 \Rightarrow y = \frac{6460}{323} = 20 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \\ z = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 8$, $y = 20$, $z = 30$. Una entrada al estreno de cine cuesta 8 €, una a la función teatral vale 20 € y la entrada al concierto de música cuesta 30 €.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (tx-6)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)
 b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que sea continua en $x = 1$ deben de ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (tx-6)^2 = (t-6)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (t-6)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} t-6 = 2 \Rightarrow \boxed{t=8} \\ 0 \\ t-6 = -2 \Rightarrow \boxed{t=4} \end{cases}$$

La función es continua en $x = 1$ para $t = 8$ y también para $t = 4$.

b) Para $t = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (2x-6)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos. Hay un trozo de parábola, un trozo de recta horizontal y otro trozo de otra parábola. Hacemos una tabla de valores para poder representarla.

Si $x < -1$

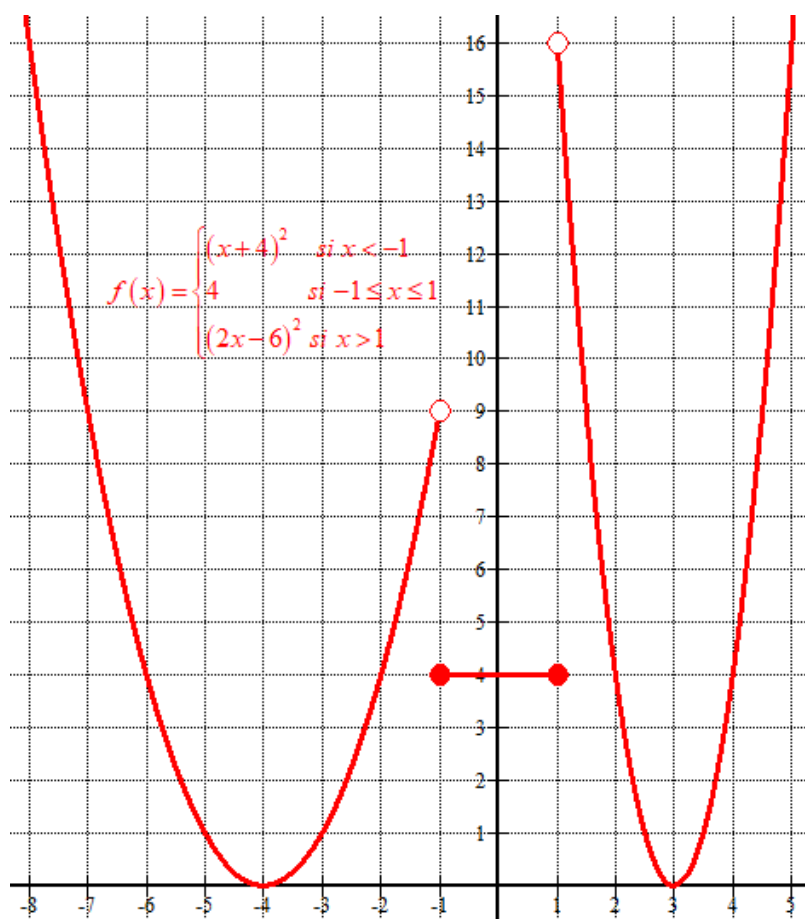
x	$y = (x+4)^2$
-4	0
-3	1
-2	4
0	16
1	25 No se incluye

Si $-1 \leq x \leq 1$

x	$y = 4$
-1	4
0	4
1	4

Si $x > 1$

x	$y = (2x-6)^2$
1	16 No se incluye
2	4
3	0
4	16



4. Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función: $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ donde $V(x)$ está en Km/h y x en minutos, siendo $x \geq 0$ y $V(x) \geq 0$. Se pide:

- Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 pts).
- Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 pts).
- Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 pts).

a) Nos piden que averigüemos cuando la función $V(x)$ se anula.

$$V(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 \left(-\frac{1}{10}x + 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{1}{10}x + 1 = 0 \Rightarrow -x + 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

El ciclista tarda 10 minutos en pararse tras completar la primera vuelta.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow V'(x) = -\frac{4}{20}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -2x^3 + 15x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-2x + 15) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7.5 \end{cases}$$

Comprobamos el signo de la derivada entre 0 y 7.5, así como después de 7.5.

- En $(0, 7.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $V'(1) = -\frac{1}{5}1^3 + \frac{3}{2}1^2 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{2} = 1.3 > 0$. La velocidad crece en $(0, 7.5)$
- En $(7.5, 10)$ tomamos $x = 8$ y la derivada vale $V'(8) = -\frac{1}{5}8^3 + \frac{3}{2}8^2 = -6.4 < 0$. La velocidad decrece en $(7.5, 10)$

La velocidad crece del principio ($x = 0$) hasta el minuto 7.5 y luego decrece hasta acabar la vuelta (10 minutos).

c) La velocidad máxima la alcanza en el minuto 7.5, pues en dicho momento deja de crecer la velocidad y empieza a disminuir hasta el final.

La velocidad máxima es de $V(7.5) = -\frac{1}{20}7.5^4 + \frac{1}{2}7.5^3 = 52.73$. La velocidad máxima es de 52.73 km/h.

5. Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.

- a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 pts)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 pts)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 pts)

a) $P(\text{Dos personas fumadoras padezcan cáncer}) =$

$$= P(\text{Padezca cáncer la 1ª}) \cdot P(\text{Padezca cáncer la 2ª}) = 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.01}$$

b) $P(\text{al menos 1 persona padezca cáncer de 4 fumadores}) =$

$$= P(\text{Padezca cáncer 1, 2, 3 o 4 de los 4 fumadores}) =$$

$$= 1 - P(0 \text{ personas padezca cáncer de 4 fumadores}) = 1 - 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = \boxed{0.3439}$$

c) $P(\text{Una persona padezca cáncer de dos que fuman habitualmente}) =$

$$= P(\text{Padezca cáncer la 1ª y no la 2ª}) + P(\text{Padezca cáncer la 2ª y no la 1ª}) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.9 = \boxed{0.18}$$

6. El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 7$ euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97% (1.25 pts)
- ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 pts)

X = El gasto mensual en electricidad. $X = N(\mu, 7)$

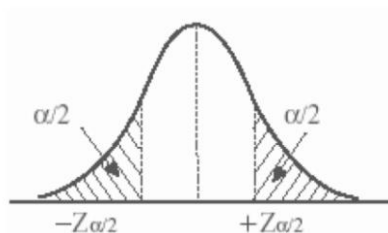
Tamaño de muestra = $n = 10$ hogares.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{25 + 29 + 30 + 32 + 24 + 28 + 31 + 32 + 33 + 32}{10} = 29.6 \text{ €}$$

a) Nivel de confianza 97%

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 4.803$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (29.6 - 4.803, 29.6 + 4.803) = (24.797, 34.403)$$

b) Con nivel de confianza 97% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.17$.

Sustituimos en la fórmula del error.

$$\text{Error} = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{7}{2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2.17 \cdot \frac{7}{2} \right)^2 = 57.68$$

Para que el error sea menor de 2 el tamaño de la muestra debe ser como mínimo de 58 hogares.



EvAU Junio 2017

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ (siendo M^t la matriz transpuesta de M). (0.5 pts)

b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P \cdot X = M \cdot M^t$. (0.5 pts)

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior. (0.5 pts)

2. A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 pts)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 pts)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 pts)

4. De la función $H(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y un

máximo relativo en el punto $(4, 6)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

5. En un instituto el 45% de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35% son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10% de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20% de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25% de los de la modalidad de Arte.

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 pts)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 pts)

6. Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10$ minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95% (1.25 pts)

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Opción B

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

- Dibuja la región factible (1 pto).
- Determina los vértices de la región factible (0.25 ptos).
- Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 ptos).

2. Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.

- Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 ptos)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 ptos)
- Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150 \quad \text{donde } 0 \leq x \leq 16 \quad \text{está en semanas y } F(x) \text{ es la recaudación en}$$

cientos de euros. Se pide:

- Cuál es la recaudación en el momento del estreno ($x=0$) y cuál es la recaudación al final ($x=16$). (0.5 ptos)
- En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 ptos)
- En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 ptos)

5. En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80% de los empleados y el resto en la B. El 10% de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.

- Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)
- Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

6. El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).

- Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONESOpción A

1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ (siendo M^t la matriz transpuesta de M). (0.5 pts)

b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P \cdot X = M \cdot M^t$. (0.5 pts)

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior. (0.5 pts)

a) $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = (-2 \quad -1)$

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} (-2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para despejar suponemos que P tiene inversa.

$$P \cdot X = M \cdot M^t \Rightarrow P^{-1} \cdot P \cdot X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t \Rightarrow \boxed{X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t}$$

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comprobemos que tiene inversa.

$$|P| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 9 = 1 \neq 0 \text{ Tiene inversa. La calculamos.}$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^t)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado anterior.

$$X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} (-2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+6 & 8+3 \\ -12-4 & -6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

2. A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamamos “x” al número de entradas al estreno de cine, “y” al número de entradas a la función teatral y “z” al número de entradas al concierto de música.

“Han vendido hoy 320 entradas para tres eventos” $\rightarrow x + y + z = 320$

“El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros” $\rightarrow 8x + 20y + 30z = 6460$

“El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro” $\rightarrow z = 3y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 320 \\ 8x + 20y + 30z = 6460 \\ z = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 320 \\ 4x + 10y + 15z = 3230 \\ z = 3y \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 320 \\ 4x + 10y + 15z = 3230 \\ z = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 3y = 320 \\ 4x + 10y + 45y = 3230 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 320 \\ 4x + 55y = 3230 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 320 - 4y \\ 4x + 55y = 3230 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(320 - 4y) + 55y = 3230 \Rightarrow 1280 - 16y + 55y = 3230 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39y = 1950 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1950}{39} = 50} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 320 - 200 = 120} \\ \boxed{z = 3 \cdot 50 = 150} \end{array} \right.$$

Las soluciones son $x = 120$, $y = 50$, $z = 150$.

El número de entradas vendidas son 120 para el cine, 50 para el teatro y 150 para el concierto musical.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 pts)
 b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 pts)
 c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 pts)

a) Para que la función sea continua en $x = 1$ el valor de la función y los límites laterales deben ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + 1 - 3 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 3 = 1 + 1 - 3 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + t = 1 + t \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 = 1 + t \Rightarrow \boxed{t = -2}$$

Para que sea continua el valor de t debe ser -2 .

b) La función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = x^2 + x - 3$.

Para calcular los extremos relativos estudio el signo de la derivada.

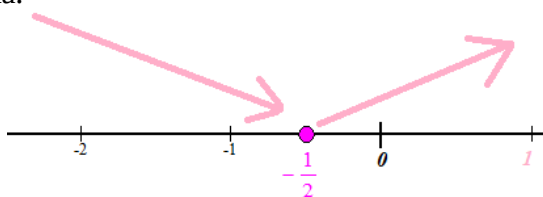
$$f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo antes y después del valor $x = -\frac{1}{2}$.

- En el intervalo $(-\infty, -1/2)$ tomamos el valor $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1/2)$.
- En el intervalo $(-1/2, 1)$ tomamos el valor $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 1 > 0$. La función crece en $(-1/2, 1)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -1/2$.

Como $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-2-12}{4} = \frac{-13}{4}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento los obtenemos del esquema del apartado anterior.

La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, y crece en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

4. De la función $H(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto (4, 6). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 pts)

Como la función pasa por el punto de inflexión $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y el máximo relativo (4, 6) se cumple:

$$\left. \begin{aligned} H(0) = \frac{2}{3} &\Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{3}} \\ H(4) = 6 &\Rightarrow a \cdot 4^3 + b \cdot 4 + c = 6 \Rightarrow 64a + 4b + c = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 64a + 4b + \frac{2}{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192a + 12b + 2 = 18 \Rightarrow 192a + 12b = 16 \Rightarrow 96a + 6b = 8 \Rightarrow \boxed{48a + 3b = 4}$$

Al ser (4, 6) un máximo relativo se anula la derivada para $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} H(x) = ax^3 + bx + c &\Rightarrow H'(x) = 3ax^2 + b \\ H'(4) = 0 &\end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 4^2 + b = 0 \Rightarrow 48a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -48a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 48a + 3b &= 4 \\ b &= -48a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 48a - 144a = 4 \Rightarrow -96a = 4 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{4}{96} = -\frac{1}{24}} \Rightarrow b = -48 \left(-\frac{1}{24}\right) = 2$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{24}$, $b = 2$ y $c = \frac{2}{3}$.

Al tener un punto de inflexión en $x = 0$ debe cumplirse que la derivada segunda se anule para $x = 0$ y la derivada tercera sea no nula.

$$H(x) = -\frac{1}{24}x^3 + 2x + \frac{2}{3} \Rightarrow H'(x) = \frac{-3}{24}x^2 + 2 \Rightarrow H''(x) = \frac{-6}{24}x \Rightarrow H'''(x) = \frac{-6}{24}$$

$$H''(0) = \frac{-6}{24} \cdot 0 = 0 \quad y \quad H'''(0) = \frac{-6}{24} \neq 0 \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ hay punto de inflexión}$$

Al tener un máximo relativo en $x = 4$ debe cumplirse que la derivada segunda debe ser negativa.

$$H'(4) = 0 \quad y \quad H''(4) = \frac{-6}{24} \cdot 4 = -1 < 0 \Rightarrow \text{En } x = 4 \text{ hay un un máximo relativo}$$

Se cumplen el resto de condiciones para que haya un máximo en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 0$.

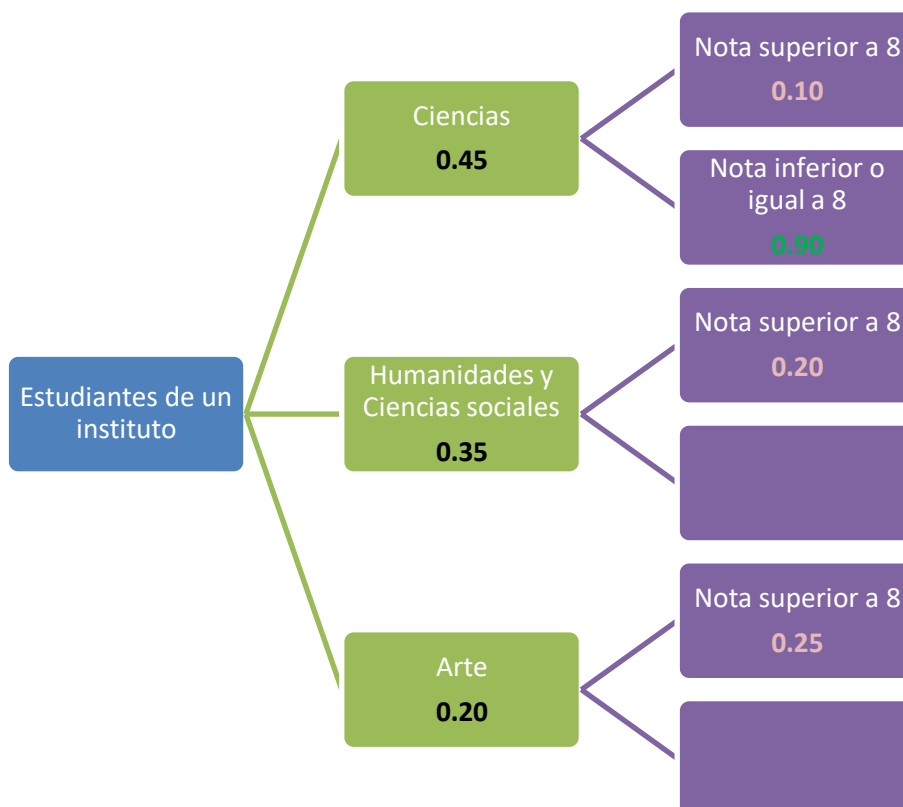
5. En un instituto el 45% de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35% son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10% de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20% de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25% de los de la modalidad de Arte.

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 pts)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 pts)

Realizamos un diagrama de árbol.

Los alumnos de la modalidad de Arte son $100 - 45 - 35 = 20$ % del total de alumnos.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Nota superior a 8}) &= \\
 &= P(\text{Ciencias})P(\text{Nota superior a 8} / \text{Ciencias}) + \\
 &+ P(\text{Humanidades})P(\text{Nota superior a 8} / \text{Humanidades}) + \\
 &+ P(\text{Arte})P(\text{Nota superior a 8} / \text{Arte}) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.10 + 0.35 \cdot 0.20 + 0.20 \cdot 0.25 = 0.0450 + 0.0700 + 0.0500 = \boxed{0.1650}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ciencias} / \text{Nota menor o igual a 8}) &= \frac{P(\text{Ciencias} \cap \text{Nota menor o igual a 8})}{P(\text{Nota menor o igual a 8})} = \\
 &= \frac{P(\text{Ciencias})P(\text{Nota menor o igual a 8} / \text{Ciencias})}{1 - P(\text{Nota superior a 8})} = \frac{0.45 \cdot 0.9}{1 - 0.165} = \frac{0.405}{0.835} = \boxed{0.485}
 \end{aligned}$$

6. Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 10$ minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.

- a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95% (1.25 pts)
 b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 pts)

X = El tiempo que tarda un corredor en recorrer 6 kms. $X = N(\mu, 10)$

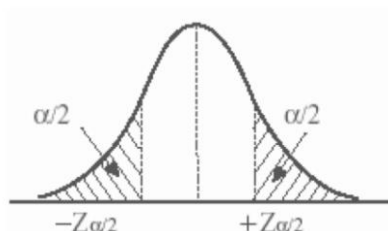
Tamaño de muestra = $n = 10$ corredores.

$$\text{La media muestral es } \bar{x} = \frac{15+19+20+22+24+25+27+28+30+32}{10} = 24.2$$

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.198$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (24.2 - 6.198, 24.2 + 6.198) = (18.002, 30.398)$$

b) Utilizando la fórmula del error y sabiendo que $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 19.6 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (19.6)^2 = 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra es 385 corredores.

Opción B

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

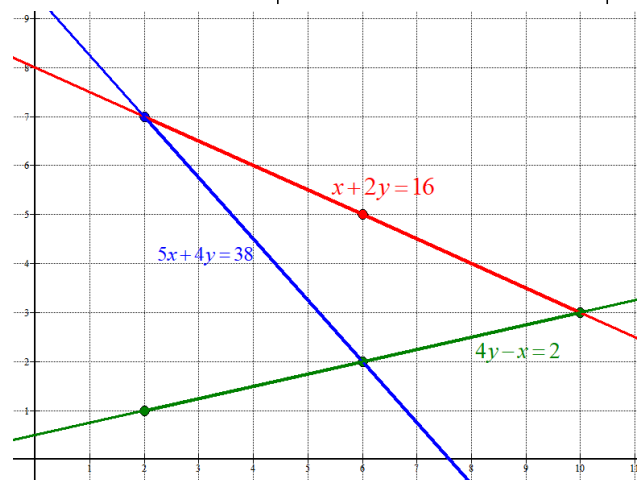
Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

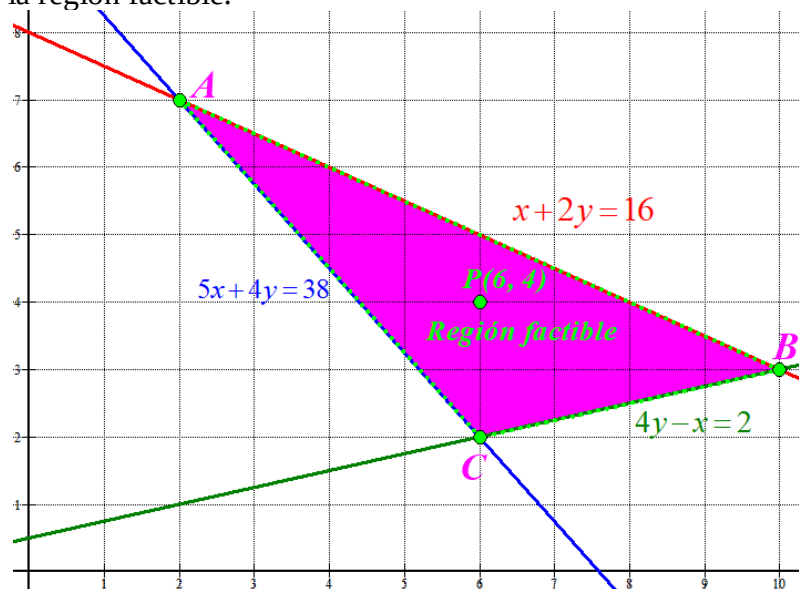
- Dibuja la región factible (1 pto).
- Determina los vértices de la región factible (0.25 pts).
- Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 pts).

a) Para dibujar la región factible dibujamos las rectas que la delimitan y que proceden de convertir en igualdad las inecuaciones.

$x + 2y = 16$;	$5x + 4y = 38$;	$4y - x = 2$
$x \quad y = \frac{16-x}{2}$	$x \quad y = \frac{38-5x}{4}$	$x \quad y = \frac{2+x}{4}$
2	2	2
6	6	6
10	10	10
7	-3	1
5	2	2
3	-3	3



Como las restricciones son $x + 2y \leq 16$; $5x + 4y \geq 38$; $4y - x \geq 2$ la región factible está por debajo de la recta roja y por encima de la azul y la verde. Coloreo de rosa la región factible.



Se puede comprobar que el punto P(6, 4) cumple todas las restricciones:

$$6+8 \leq 16 \quad ; \quad 30+16 \geq 38 \quad ; \quad 24-4 \geq 2 \quad \text{Se cumplen y la región factible es correcta.}$$

b) Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y C resolviendo los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas.

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=16 \\ 5x+4y=38 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=16-2y \\ 5x+4y=38 \end{array} \right\} \Rightarrow 5(16-2y)+4y=38 \Rightarrow 80-10y+4y=38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6y = -42 \Rightarrow \boxed{y=7} \Rightarrow \boxed{x=16-14=2} \Rightarrow \boxed{A(2,7)}$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y=16 \\ 4y-x=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=16-2y \\ 4y-x=2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4y-16+2y=2 \Rightarrow 6y=18 \Rightarrow \boxed{y=\frac{18}{6}=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=16-6=10} \Rightarrow \boxed{B(10,3)}$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+4y=38 \\ 4y-x=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+4y=38 \\ 4y-2=x \end{array} \right\} \Rightarrow 5(4y-2)+4y=38 \Rightarrow 20y-10+4y=38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24y=48 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=8-2=6} \Rightarrow \boxed{C(6,2)}$$

c) Averiguamos el mínimo de la función $F = 5x + 3y$ valorándola en cada uno de los vértices.

$$A(2,7) \rightarrow F(2,7) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = \mathbf{31}$$

$$B(10,3) \rightarrow F(10,3) = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 59$$

$$C(6,2) \rightarrow F(6,2) = 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 36$$

El valor mínimo de la función es 31 y se alcanza en el punto A de coordenadas (2,7).

2. Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

a) Llamamos “x” al número de pesas de 200 g, “y” al número de pesas de 100 g, “z” al número de pesas de 50 g.

“Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas” $\rightarrow x + y + z = 40$

“El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g” $\rightarrow z = x + y + 8$

“Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g” $\rightarrow 200x + 100y + 50z = 3400$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ z = x + y + 8 \\ 200x + 100y + 50z = 3400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ -x - y + z = 8 \\ 4x + 2y + z = 68 \end{array} \right\}$$

b) Lo resolvemos por Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ -x - y + z = 8 \\ 4x + 2y + z = 68 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ -x \quad -y \quad +z = 8 \\ x \quad +y \quad +z = 40 \\ \hline 2z = 48 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 4 · Ecuación 1ª} \\ 4x \quad +2y \quad +z = 68 \\ -4x \quad -4y \quad -4z = -160 \\ \hline -2y \quad -3z = -92 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ 2z = 48 \\ -2y - 3z = -92 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ \boxed{z = \frac{48}{2} = 24} \\ -2y - 3z = -92 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 24 = 40 \\ -2y - 3 \cdot 24 = -92 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 40 - 24 = 16 \\ -2y = -92 + 72 = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 16 \\ \boxed{y = \frac{-20}{-2} = 10} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 10 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 16 - 10 = 6}$$

Son 6 pesas de 200 gramos, 10 pesas de 100 g y 24 pesas de 50 gramos.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)
 b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

a) Para que f sea continua en $x = 1$ deben ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= (1+2)^2 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2)^2 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 + t = (1-2)^2 + t = 1+t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1+t = 9 \Rightarrow \boxed{t=8}$$

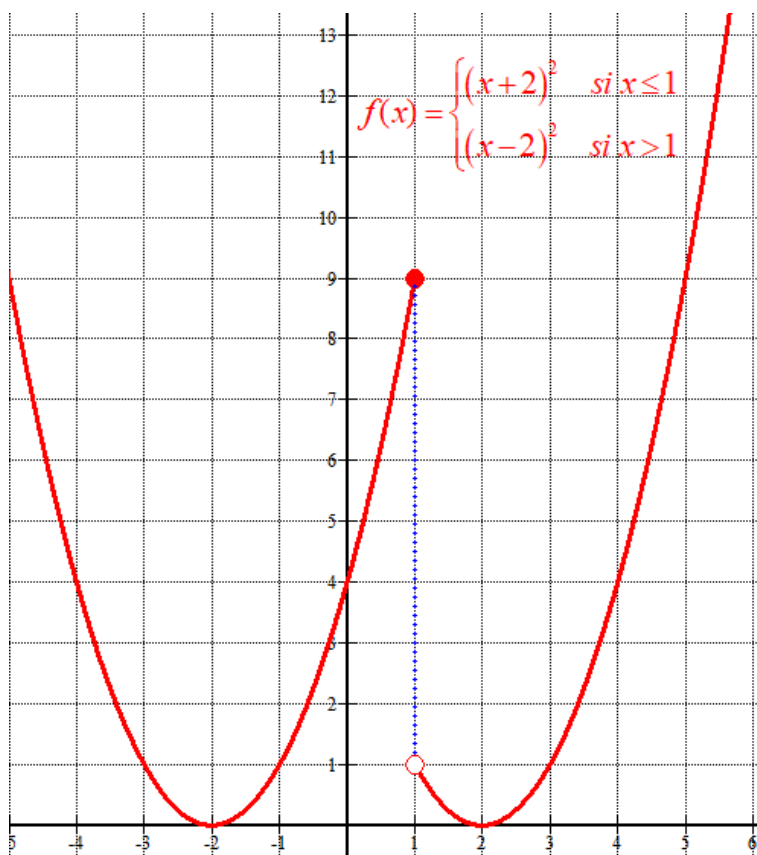
Para que sea continua en $x = 1$ el valor de t debe ser 8.

b) Para $t = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Su gráfica son dos trozos de parábola.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica sabiendo que va a ser discontinua en $x = 1$.

$x \leq 1$	$y = (x+2)^2$
-2	0
-1	1
0	1
1	4

$x > 1$	$y = (x-2)^2$
1	1 No se incluye
2	0
3	1
4	4



4. En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150$ donde $0 \leq x \leq 16$ está en semanas y $F(x)$ es la recaudación en cientos de euros. Se pide:

- Cuál es la recaudación en el momento del estreno ($x=0$) y cuál es la recaudación al final ($x=16$). (0.5 pts)
- En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 pts)
- En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 pts)

a) Nos piden calcular $F(0)$.

$$F(0) = \frac{1}{3}0^3 - \frac{15}{2}0^2 + 36 \cdot 0 + 150 = 150. \text{ La recaudación es de 15000 €.}$$

b) Utilizamos la derivada y su signo.

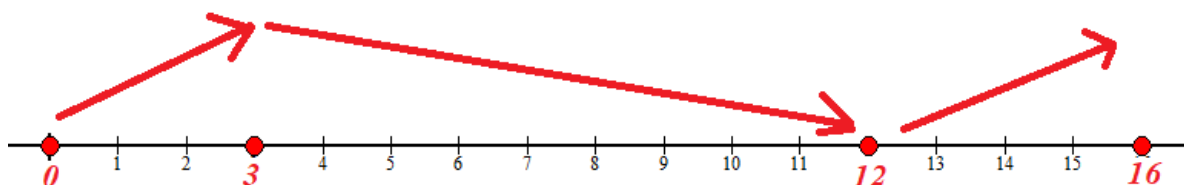
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150 \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{15}{2}2x + 36 = x^2 - 15x + 36$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(1)(36)}}{2} = \frac{15 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{15+9}{2} = 12 \\ \frac{15-9}{2} = 3 \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos están en el intervalo $0 \leq x \leq 16$ y son puntos críticos de la función. Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores.

- En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $F'(2) = 2^2 - 30 + 36 = 10 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 12)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $F'(4) = 4^2 - 60 + 36 = -8 < 0$. La función decrece en $(3, 12)$.
- En el intervalo $(12, 16)$ tomamos $x = 14$ y la derivada vale $F'(14) = 14^2 - 15 \cdot 14 + 36 = 22 > 0$. La función crece en $(12, 16)$.

La función $F(x)$ sigue el siguiente esquema.



La función crece en $(0,3) \cup (12,16)$ y decrece en $(3,12)$.

- Como se aprecia en el esquema la función alcanza un máximo relativo en $x = 3$, pero también alcanza una recaudación alta en $x = 16$. Estas recaudaciones son de:

$$\left. \begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3}3^3 - \frac{15}{2}3^2 + 36 \cdot 3 + 150 = 199.5 \\ F(16) &= \frac{1}{3}16^3 - \frac{15}{2}16^2 + 36 \cdot 16 + 150 = 171.33 \end{aligned} \right\}$$

La recaudación máxima se produce a las 3 semanas y es de 19950 €.

La recaudación mínima se alcanza en el mínimo relativo $x = 12$ o en $x = 0$. Valoramos en cada punto.

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{3}0^3 - \frac{15}{2}0^2 + 36 \cdot 0 + 150 = 150 \\ F(12) &= \frac{1}{3}12^3 - \frac{15}{2}12^2 + 36 \cdot 12 + 150 = 78 \end{aligned} \right\}$$

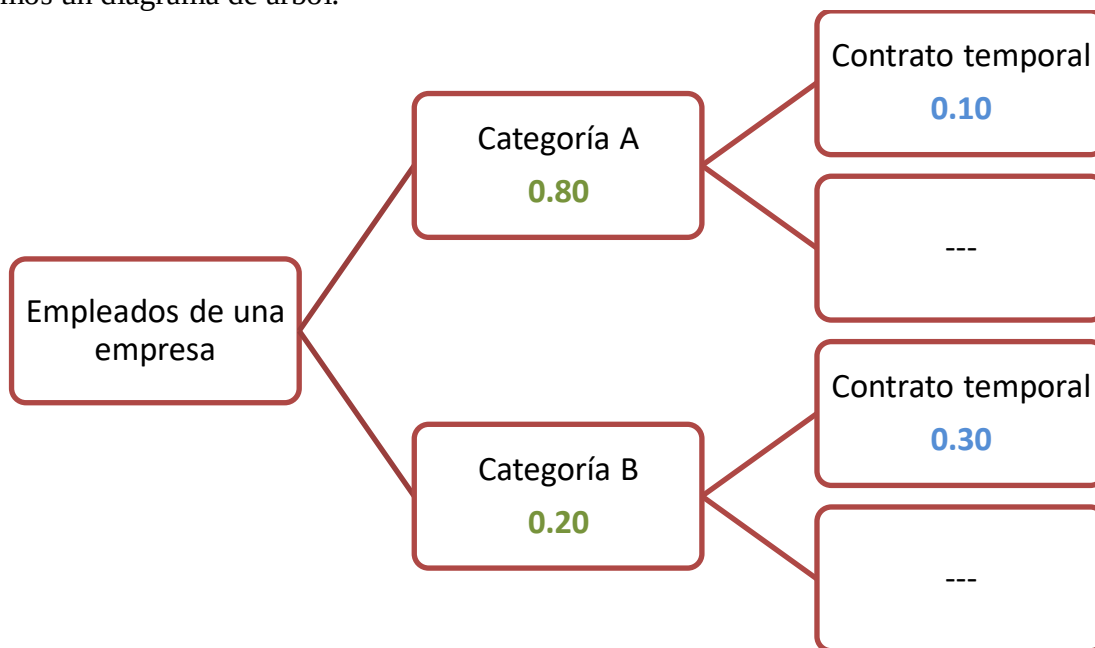
La recaudación mínima se produce a las 12 semanas y es de 7800 €.

5. En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80% de los empleados y el resto en la B. El 10% de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.

a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)

b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

Hacemos un diagrama de árbol.



Con estos datos y utilizando el teorema de la probabilidad total y de Bayes respondemos a las preguntas.

a) Teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Contrato temporal}) =$$

$$= P(\text{Cat. A})P(\text{Contrato temporal} / \text{Cat. A}) + P(\text{Cat. B})P(\text{Contrato temporal} / \text{Cat. B}) =$$

$$= 0.80 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.30 = \boxed{0.14}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos teorema de Bayes.

$$P(\text{Cat. B} / \text{Contrato temporal}) = \frac{P(\text{Cat. B} \cap \text{Contrato temporal})}{P(\text{Contrato temporal})} = \frac{0.20 \cdot 0.30}{0.14} = \boxed{\frac{3}{7} = 0.42}$$

6. El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).

- a) Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 pts)
 b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 pts)

X = El gasto en teléfonos móviles e internet. $X = N(\mu, 30)$

Tamaño de muestra = $n = 9$ hogares.

- a) Como el intervalo de confianza sigue esta fórmula $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (128.3, 171.7)$ podemos deducir que la media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{128.3 + 171.7}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ €}$$

También podemos deducir que el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{171.7 - 128.3}{2} = \frac{43.4}{2} = 21.7$$

La fórmula del error nos permitirá determinar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 21.7 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{30}{\sqrt{9}} \Rightarrow 21.7 = z_{\alpha/2} \cdot 10 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{21.7}{10} = 2.17$$

Averiguamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 2.17 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow \dots$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

$$\dots \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$

El nivel de confianza es del 97 %

- b) Con una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 % averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ y del error.

$$1 - \alpha = 0.966 \rightarrow \alpha = 0.034 \rightarrow \alpha/2 = 0.017 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.983 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.12$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Sustituimos en la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.12 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 6.36$$

El máximo error es de 6.36 €.