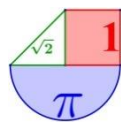
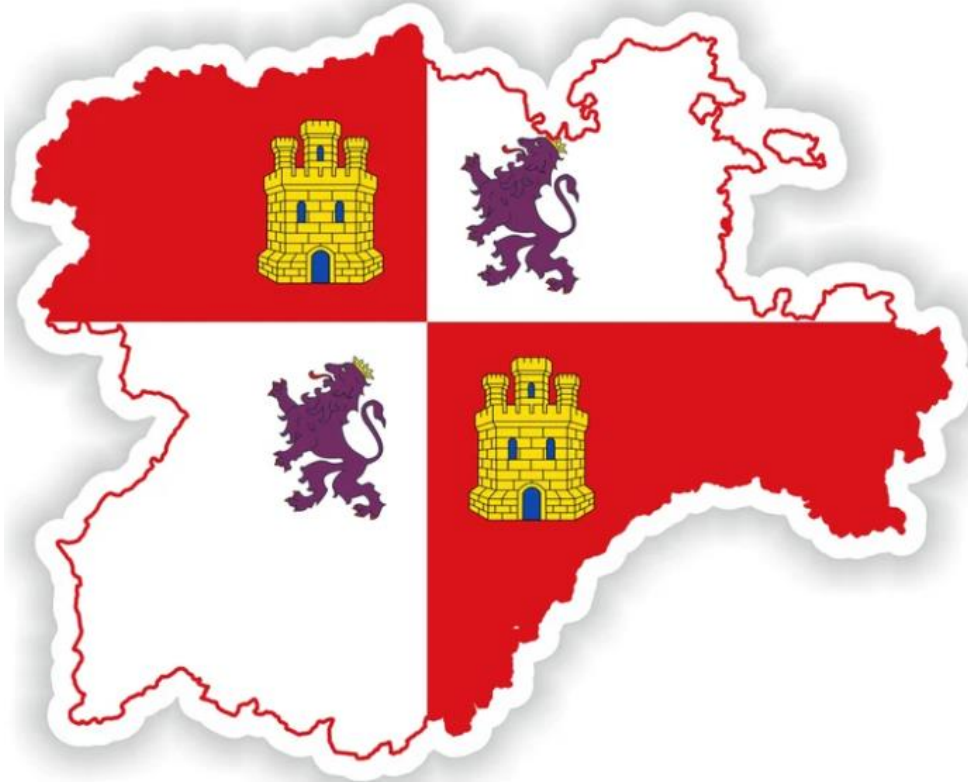


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU 2017 a 2025
Castilla y León



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EvAU de Castilla la Mancha desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	14
EBAU Extraordinaria 2024.....	25
EBAU Extraordinaria 2024 (Mejora de nota)	40
EBAU Ordinaria 2024	52
EBAU Ordinaria 2024 (Mejora de nota)	67
EBAU Extraordinaria 2023	80
EBAU Ordinaria 2023	92
EBAU Extraordinaria 2022	103
EBAU Ordinaria 2022	117
EBAU Extraordinaria 2021	130
EBAU Ordinaria 2021	141
EBAU Extraordinaria 2020	153
EBAU Ordinaria 2020	163
EBAU Extraordinaria 2019	174
EBAU Ordinaria 2019	185
EBAU Extraordinaria 2018	196
EBAU Ordinaria 2018	209
EBAU Septiembre 2017	223
EBAU Junio 2017.....	235

PAU Extraordinaria 2025

	Prueba de acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC SS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	---	--

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos. Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una planta de carburantes analiza la cantidad de gasolina, medida en miles de litros, almacenada en el nuevo depósito instalado, que viene dada por $f(t)$, donde t es el tiempo (en horas):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{15}{t+1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (2.1, 2.2, 2.3):

2.1 [1.5 puntos] Determinar la cantidad de litros de gasolina almacenada inicialmente y al cabo de 108 minutos.

2.2 [1.5 puntos] Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

2.3 [1.5 puntos] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2, \infty)$.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Un ayuntamiento estudia la movilidad hacia un campus universitario. El estudio detecta que, para ir al campus, el 20 % de los ciudadanos circula por aceras o carriles bici (a pie o bicicleta) y el resto circula por la calzada (patinete, coche o transporte público). Entre los usuarios de aceras o carriles bici únicamente el 10 % encuentra problemas de circulación, porcentaje que llega al 30% entre los usuarios de la calzada.

Responder a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1.

a) [1 punto] Si se elige un usuario al azar que va al campus, calcular la probabilidad de que sufra problemas de circulación.

b) [1 punto] Sabiendo que, al ir al campus, un usuario ha tenido problemas de circulación, ¿con qué probabilidad ha circulado por la calzada?

3.2. Un estudio reciente midió el tiempo de retraso según lo previsto (en minutos) que experimentaron 100 ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario. El tiempo medio de retraso en la muestra es de 4.2 minutos, con una desviación típica de 1.5 minutos.

a) [1 punto] Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población.

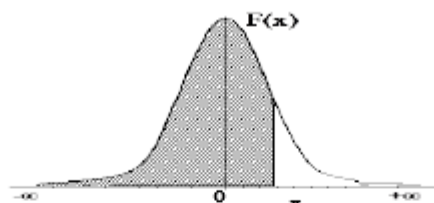
- b) [1 punto] Calcular qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de ciudadanos para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error máximo admisible sea de 0.12 minutos en la estimación de la media.

3.3. Se considera que el 45 % de los ciudadanos utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Se pregunta a 10 ciudadanos a su llegada al campus si han utilizado el transporte público.

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente 8 de ellos usen transporte público.
b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que más de 8 ciudadanos usen transporte público

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Distribución Binomial $p(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

n \ p	r	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0975	0,1800	0,2775	0,3600	0,4375	0,5100	0,5556	0,5775	0,6400	0,6975	0,7399	0,7500
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3885	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2983	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0585	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3980	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1835	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0486	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6834	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3947	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2985	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0082	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1968	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0012	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0114	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0494	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,2340	0,2456	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,1596	0,1966	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1080	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0389	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0083	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0010

SOLUCIONES**APARTADO 1 (Bloques A+C)**

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos. Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Llamemos x = “número de máquinas fabricadas del tipo A”, y = “número de máquinas fabricadas del tipo B”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 250x + 200y$.

Las restricciones del problema son:

“Debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B” $\rightarrow x \geq 6; y \leq 15$.

“El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos” $\rightarrow 500x + 300y \leq 12000$.

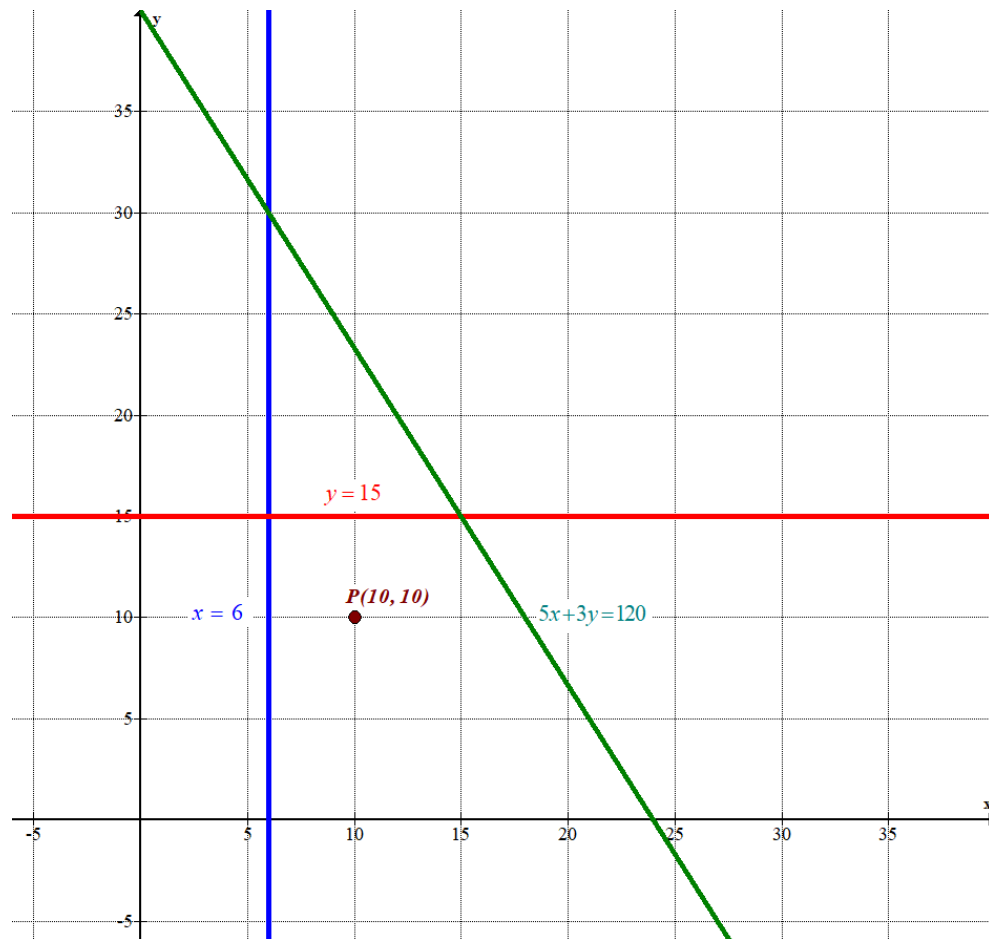
“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 500x + 300y \leq 12000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 5x + 3y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y = 15$	$x = 6$	$5x + 3y = 120$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = 15 \\ \hline 0 & 15 \\ 6 & 15 \\ 15 & 15 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x = 6 & y \\ \hline 6 & 0 \\ 6 & 15 \\ 6 & 30 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{120-5x}{3} \\ \hline 0 & 40 \\ 15 & 15 \\ 24 & 0 \end{array}$	Primer cuadrante



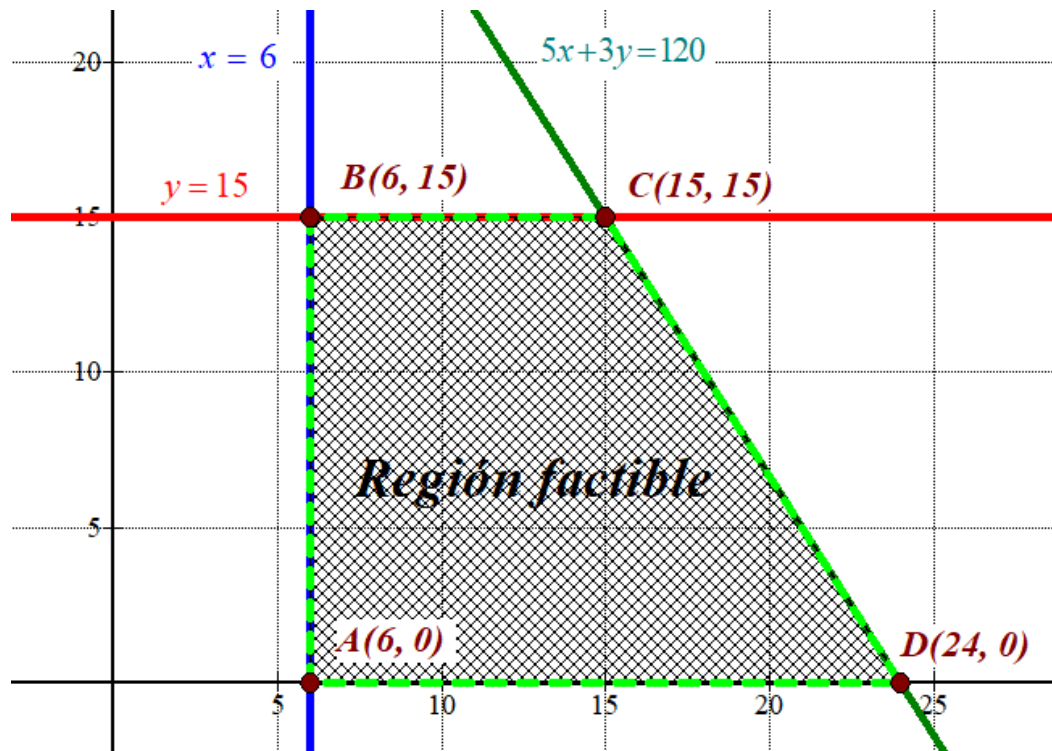
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 5x + 3y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas roja y verde, y a la derecha de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 6 \\ 10 \leq 15 \\ 50 + 30 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los beneficios $B(x, y) = 250x + 200y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 0 = 1500$$

$$B(6, 15) \rightarrow B(6, 15) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 15 = 4500$$

$$C(15, 15) \rightarrow B(15, 15) = 250 \cdot 15 + 200 \cdot 15 = 6750 \text{ Máximo}$$

$$D(24, 0) \rightarrow B(24, 0) = 250 \cdot 24 + 200 \cdot 0 = 6000$$

El máximo es 6750 y se alcanza en el vértice $C(15, 15)$.

El beneficio máximo cumpliendo con las restricciones es de 6750 euros y se consigue fabricando 15 máquinas de cada tipo.

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una planta de carburantes analiza la cantidad de gasolina, medida en miles de litros, almacenada en el nuevo depósito instalado, que viene dada por $f(t)$, donde t es el tiempo (en horas):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{15}{t+1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (2.1, 2.2, 2.3):

2.1 [1.5 puntos] Determinar la cantidad de litros de gasolina almacenada inicialmente y al cabo de 108 minutos.

2.2 [1.5 puntos] Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

2.3 [1.5 puntos] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2, \infty)$.

2.1 Para $t=0$ la función vale $f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0^2 + 2 = 2$. Inicialmente están almacenados 2000 litros de gasolina.

108 minutos son $\frac{108}{60} = 1.8$ horas. Para $t=1.8$ la función vale $f(1.8) = \frac{3}{4} \cdot 1.8^2 + 2 = 4.43$. Al cabo de 108 minutos están almacenados 4430 litros de gasolina.

2.2 La función en el intervalo $[0, 2)$ tiene la expresión $f(t) = \frac{3}{4}t^2 + 2$ que es una expresión polinómica y por tanto es continua.

La función en el intervalo $(2, +\infty)$ tiene la expresión $f(t) = \frac{15}{t+1}$ cuyo denominador se anula para $t = -1$ que no pertenece al intervalo de definición. Por tanto, es continua. Estudiamos la continuidad en $t = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{3}{4} \cdot 2^2 + 2 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{3}{4}t^2 + 2 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{15}{t+1} = \frac{15}{2+1} = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = f(2) = 5$$

La función es continua en su dominio $[0, +\infty)$.

2.3. La función en el intervalo $(2, +\infty)$ tiene la expresión $f(t) = \frac{15}{t+1}$, siendo su derivada

$$f'(t) = \frac{-15}{(t+1)^2}$$

Esta derivada siempre es negativa pues el numerador es negativo y el denominador positivo. La función decrece en $(2, +\infty)$.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Un ayuntamiento estudia la movilidad hacia un campus universitario. El estudio detecta que, para ir al campus, el 20 % de los ciudadanos circula por aceras o carriles bici (a pie o bicicleta) y el resto circula por la calzada (patinete, coche o transporte público). Entre los usuarios de aceras o carriles bici únicamente el 10 % encuentra problemas de circulación, porcentaje que llega al 30% entre los usuarios de la calzada.

Responder a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1.

- a) [1 punto] Si se elige un usuario al azar que va al campus, calcular la probabilidad de que sufra problemas de circulación.
- b) [1 punto] Sabiendo que, al ir al campus, un usuario ha tenido problemas de circulación, ¿con qué probabilidad ha circulado por la calzada?

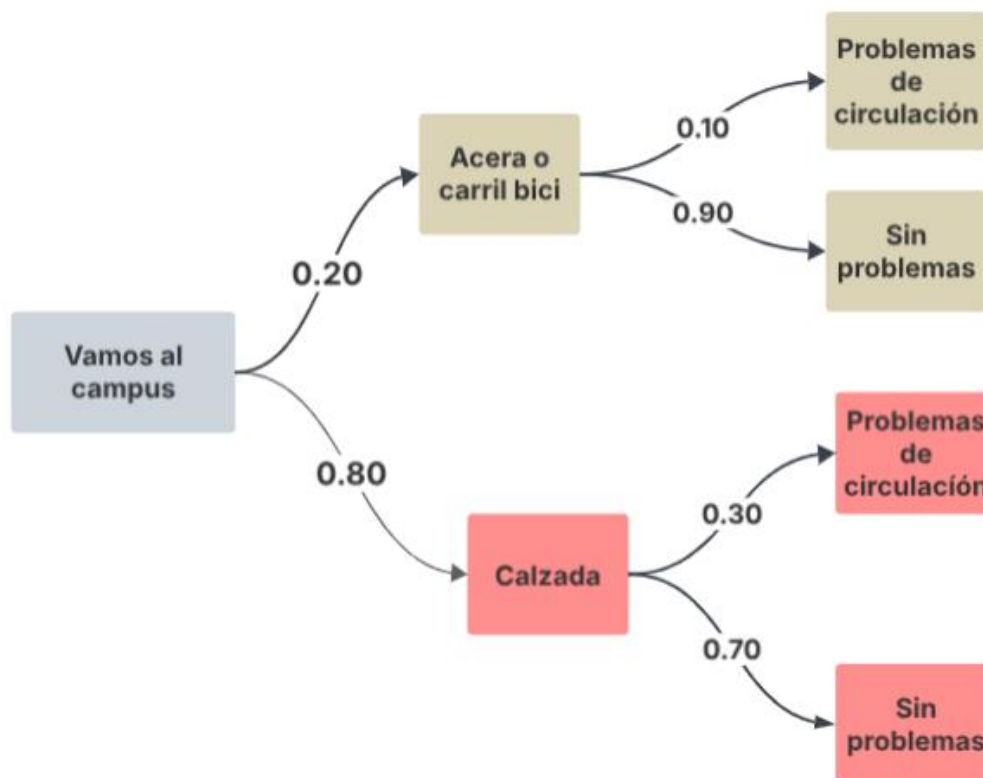
3.2. Un estudio reciente midió el tiempo de retraso según lo previsto (en minutos) que experimentaron 100 ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario. El tiempo medio de retraso en la muestra es de 4.2 minutos, con una desviación típica de 1.5 minutos.

- a) [1 punto] Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población.
- b) [1 punto] Calcular qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de ciudadanos para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error máximo admisible sea de 0.12 minutos en la estimación de la media.

3.3. Se considera que el 45 % de los ciudadanos utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Se pregunta a 10 ciudadanos a su llegada al campus si han utilizado el transporte público.

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente 8 de ellos usen transporte público.
- b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que más de 8 ciudadanos usen transporte público

Realizamos un diagrama de árbol.



3.1. Llamamos C al suceso “sufrir problemas de circulación”, A al suceso “Ir al campus por la acera o carril bici”.

a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(A^c)P(C/A^c) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.3 = \boxed{0.26}$$

b) Nos piden calcular $P(A^c/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

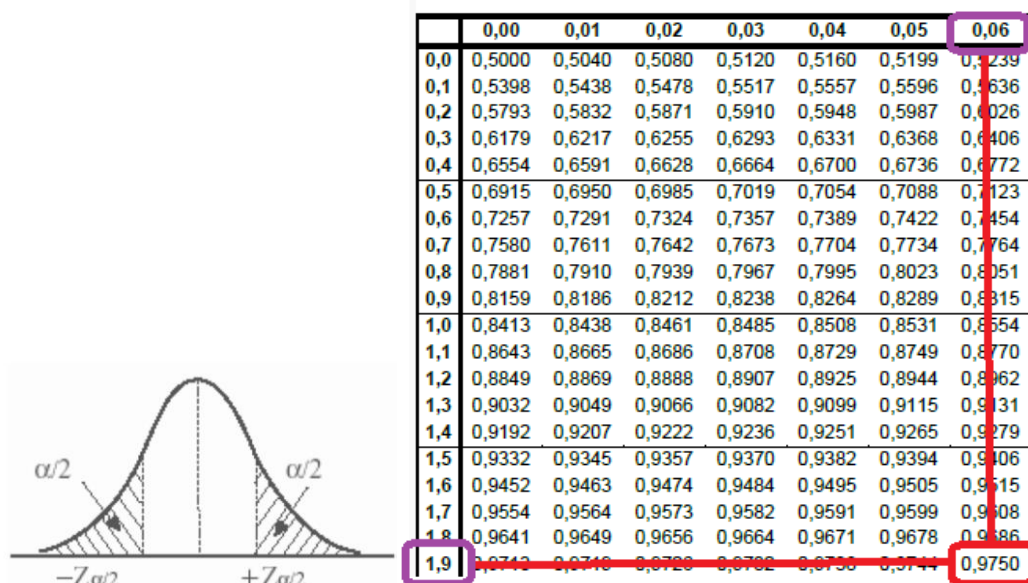
$$P(A^c/C) = \frac{P(A^c \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A^c)P(C/A^c)}{P(C)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.26} = \frac{12}{13} \approx 0.9231$$

3.2. Consideramos X = El tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población. $X = N(\mu, 1.5)$.

a) El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 4.2$ minutos.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 0.294 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4.2 - 0.294, 4.2 + 0.294) = (3.906, 4.494)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9942	0,9943	0,9944	0,9945	0,9946	0,9947

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.12 = 2.575 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 1.5}{0.12} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 1.5}{0.12} \right)^2 = 1036.03$$

El tamaño mínimo es de 1037 ciudadanos.

3.3. Consideramos la variable X que cuenta el número de ciudadanos de un grupo de 10 que utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Esta variable es binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.45$. $X = B(10, 0.45)$.

a) Nos piden calcular $P(X = 8)$. Consultando en la tabla tenemos que $P(X = 8) = 0.0229$.

b) Nos piden calcular $P(X > 8)$.

Consultando en la tabla tenemos que:

$$P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0.0042 + 0.0003 = \boxed{0.0045}.$$

n	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,4
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3225	0,26
1	0,0198	0,0975	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,4500	0,4500	0,49
2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2225	0,25	0,24
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,164	0,13
1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3940	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4384	0,38	0,38
2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1990	0,2222	0,2389	0,2880	0,341	0,31	0,36
3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,081	0,11	0,11
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,06
1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3885	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,296	0,25	0,26
2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,375	0,37	0,37
3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,205	0,24	0,24
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,04	0,05	0,05
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,03	0,03
1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,259	0,16	0,16
2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,369	0,31	0,31
3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,257	0,30	0,30
4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0084	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,128	0,14	0,14
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,02	0,02
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0177	0,01
1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,159	0,10	0,10
2	0,0014	0,0305	0,0994	0,1762	0,2458	0,2968	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,280	0,24	0,24
3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,312	0,31	0,31
4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	0,181	0,22	0,22
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,059	0,08	0,08
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,01	0,01
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,00
1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,072	0,06	0,06
2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,240	0,17	0,17
3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,218	0,27	0,27
4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,288	0,26	0,26
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,172	0,15	0,15
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,020	0,04	0,04
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,00	0,00
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,00
1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1581	0,1373	0,0986	0,048	0,03	0,03
2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	0,169	0,11	0,11
3	0,0001	0,0054	0,0183	0,0539	0,1068	0,1688	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,268	0,26
4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0885	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,227	0,27	0,27
5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,119	0,20	0,20
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,073	0,10	0,10
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,02	0,02
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,00	0,00
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,00
1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0805	0,039	0,02	0,02
2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1812	0,110	0,07	0,07
3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1066	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,219	0,17	0,17
4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0681	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,200	0,25	0,25
5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,228	0,24	0,24
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,160	0,15	0,15
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,06	0,06
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,01	0,01
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,00	0,00
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,00
1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,01	0,01
2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,04	0,04
3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,165	0,12	0,12
4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,264	0,21	0,21
5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,240	0,24	0,24
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,166	0,19	0,19
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,080	0,10	0,10
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00	0,00

n	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3225	0,2600
1	0,0198	0,0975	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	0,5000	0,5000	0,5000
2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2000	0,2250	0,2600
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1641	0,1091
1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4320	0,3840	0,3409
2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1990	0,2222	0,2389	0,2880	0,3410	0,3961	0,4444
3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0910	0,1160	0,1409
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0606
1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3885	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2967	0,2500	0,2045
2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	0,3750	0,4091	0,4444
3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2051	0,2500	0,2967
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0409	0,0606	0,0910
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0309	0,0091
1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2592	0,2160	0,1641
2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3691	0,3961	0,4210
3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2570	0,2820	0,3070
4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0084	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1280	0,1641	0,2045
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0389
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1178	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0141
1	0,0571	0,2321	0,3693	0,3993	0,3822	0,3502	0,3025	0,2634	0,2437	0,2368	0,2160	0,1909	0,1641
2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2968	0,3341	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2500	0,2210
3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,1915	0,2355	0,2765	0,3320	0,3891	0,4444
4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0596	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2360	0,2820
5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0910	0,1210
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0010	0,0018	0,0041	0,0080	0,0121
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1332	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0091
1	0,0856	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1308	0,0872	0,0541	0,0309
2	0,0003	0,0046	0,0240	0,0512	0,0879	0,1318	0,1780	0,1915	0,2355	0,2765	0,3320	0,3891	0,4444
3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0619	0,1147	0,1730	0,2298	0,2561	0,2698	0,2698	0,2698	0,2698	0,2698
4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1335	0,1288	0,1288	0,1288
5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0112	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641	0,2160
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0541	0,0820
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0070	0,0121
8	0	0,9227	0,6834	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0041
1	0,0748	0,2793	0,3826	0,3947	0,3355	0,2670	0,1977	0,1581	0,1373	0,0898	0,0498	0,0241	0,0141
2	0,0026	0,0015	0,0488	0,2376	0,2938	0,3115	0,2985	0,2731	0,2587	0,2090	0,1609	0,1091	0,0606
3	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1675	0,1237	0,0827	0,0327	0,0141
5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2210	0,2698
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1091	0,1409
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0309	0,0491
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0037	0,0070
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0280	0,0207	0,0101	0,0046	0,0021
1	0,0830	0,2985	0,3974	0,3979	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0805	0,0389	0,0241	0,0141
2	0,0034	0,0172	0,0512	0,1020	0,1620	0,2003	0,2355	0,2561	0,2561	0,2561	0,2561	0,2561	0,2561
3	0,0001	0,0077	0,0246	0,0586	0,1089	0,1732	0,2388	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641	0,1160
4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1518	0,1408	0,2194	0,2508	0,2200	0,1641	0,1091
5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2280	0,2820	0,3320
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1280	0,1861	0,2409
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703	0,1091
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0164	0,0282
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
10	0	0,9044	0,5987	0,3577	0,2099	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0043	0,0021	0,0010
1	0,0914	0,3151	0,3870	0,3471	0,2533	0,1816	0,1217	0,0854	0,0703	0,0403	0,0241	0,0141	0,0091
2	0,0042	0,0748	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1206	0,0763	0,0409	0,0241
3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2686	0,2601	0,2522	0,2150	0,1650	0,1160	0,0606
4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2884	0,3320	0,3891
5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0284	0,0584	0,1029	0,1368	0,1536	0,2007	0,2440	0,2820	0,3209
6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,1696	0,2360	0,3070
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1210	0,1641
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0109	0,0210	0,0389	0,0606
9	0	0,8953	0,5625	0,3225	0,1775	0,0775	0,0375	0,0197	0,0123	0,0088	0,0031	0,0015	0,0008
10	0,0959	0,3076	0,3826	0,3426	0,2486	0,1769	0,1170	0,0807	0,0656	0,0356	0,0210	0,0121	0,0070

PAU Ordinaria 2025

	Prueba de acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC SS II	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1.

Dado el sistema con los parámetros a y b :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (1.1, 1.2, 1.3):**1.1 [1.5 puntos]** Si $b = -1$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .**1.2 [1.5 puntos]** Si $a = 3$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro b .**1.3 [1.5 puntos]** Resolver el sistema para $a = 1$ y $b = -2$.**APARTADO 2 (Bloque B)**

2. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según la función

$$m(t) = \frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

donde m es la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día.**Responda a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):****2.1 [1.5 puntos]** ¿A qué hora del día arroja la máxima cantidad de material contaminante? ¿Y a qué hora la mínima? Determinar la cantidad arrojada en ambos momentos.**2.2 [1.5 puntos]** ¿Cuánto material contaminante arroja en un día? Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.**APARTADO 3 (Bloque D)**

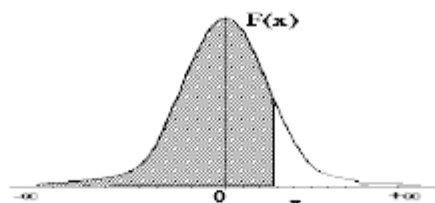
3. Se ha publicado una encuesta sobre hábitos deportivos según la cual seis de cada diez personas practicaron deporte en el último año, ya sea de forma periódica u ocasional, en su tiempo libre. Por otra parte, entre las personas que practicaban deporte, el 85 % presenció, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo mientras que, entre las que no practicaban deporte, fue el 70 %.

Responda a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):**3.1. a) [1 punto]** Definir correctamente los sucesos y escribir la información anterior en términos de probabilidad.**b) [1 punto]** Se selecciona una persona al azar y resulta que no ha presenciado ningún evento deportivo. Determinar si es más probable que haya practicado deporte o que no lo haya hecho.**3.2.** Se seleccionan 8 personas al azar entre las que no practicaron deporte.**a) [1 punto]** Calcular la probabilidad de que exactamente la mitad de ellas hayan presenciado un evento deportivo.**b) [1 punto]** Calcular la probabilidad de que alguna de ellas haya presenciado un evento deportivo.**3.3.** El tiempo (en horas) en el que las personas que practicaron deporte presenciaron eventos deportivos sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 10 horas.**a) [1 punto]** Suponiendo que μ toma el valor de 25, calcular el porcentaje de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año.

- b) [1 punto] Se elige al azar una muestra de 49 personas y se obtiene una media muestral de 26 horas. Determinar, al nivel de confianza del 98 %, un intervalo de confianza para el número medio de horas que presenciaron eventos deportivos en dicha población.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Distribución Binomial $p(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

n \ p	r	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2601	0,2500
	1	0,0198	0,0975	0,1800	0,2775	0,3600	0,4375	0,5100	0,5556	0,5775	0,6400	0,6975	0,7399	0,7500
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	0,2025	0,2401	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1327	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	0,4084	0,3823	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0980	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	0,3341	0,3674	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	0,0911	0,1176	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0677	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3885	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	0,2995	0,2600	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2983	0,3105	0,3456	0,3675	0,3747	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	0,2005	0,2400	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	0,0410	0,0576	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0176	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	0,1359	0,1014	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	0,2780	0,2436	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	0,3032	0,3121	0,3125
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0585	0,0823	0,0951	0,1382	0,1861	0,2249	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	0,0609	0,0864	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3980	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1835	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0486	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078
8	0	0,9227	0,6834	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0046	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3947	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	0,0548	0,0352	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2985	0,2731	0,2587	0,2090	0,1569	0,1183	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	0,2568	0,2273	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	0,2627	0,2730	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0082	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	0,1719	0,2098	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	0,0703	0,1008	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	0,0164	0,0277	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0007	0,0017	0,0033	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0023	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1171	0,1004	0,0605	0,0339	0,0202	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2341	0,2162	0,1612	0,1110	0,0776	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	0,2508	0,2119	0,1739	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2048	0,2194	0,2508	0,2600	0,2506	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1024	0,1181	0,1672	0,2128	0,2408	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0341	0,0424	0,0743	0,1160	0,1542	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0073	0,0098	0,0212	0,0407	0,0635	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0013	0,0035	0,0083	0,0153	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016	0,0020
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1968	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0012	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0114	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0494	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1267	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2130	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,2340	0,2456	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,0689	0,1115	0,1596	0,1966	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1080	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0389	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0083	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0010

SOLUCIONES**APARTADO 1 (Bloques A+C)****1.**

Dado el sistema con los parámetros a y b :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$$
Responder a dos de las siguientes cuestiones (1.1, 1.2, 1.3):**1.1 [1.5 puntos]** Si $b = -1$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .**1.2 [1.5 puntos]** Si $a = 3$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro b .**1.3 [1.5 puntos]** Resolver el sistema para $a = 1$ y $b = -2$.

1.1 Si $b = -1$ el sistema queda $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$, dependiente del parámetro a .

Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a + 12 + 1 + 3 + 2 - 2a = -a + 18$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 18}$$

Analizamos por separados dos casos.

CASO 1. $a \neq 18$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 18$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.

Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada usando el método de Gauss y obtener un sistema triangular equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 18 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 18 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 18 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -18 \quad 18 \quad -36 \quad -72 \\ \hline 0 \quad 20 \quad -35 \quad -71 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad -1 \quad 5 \\ -3 \quad 3 \quad -6 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -7 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 20 & -35 & -71 \\ 0 & 4 & -7 & -7 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 20 \quad -35 \quad -35 \\ 0 \quad -20 \quad 35 \quad 71 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 36 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad 2 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 20 \quad -35 \quad -71 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 36}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B que es 3. El sistema es incompatible (sin solución).

1.2 Si $a = 3$ el sistema queda $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4, \text{ dependiente del parámetro } b. \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$

Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 4 \\ 3 & 1 & b & 5 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 3b^2 + 12 + 1 - 3b - 2b - 6 = 3b^2 - 5b + 7$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3b^2 - 5b + 7 \Rightarrow b = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{-35}}{6} = \text{No existe}$$

El determinante de A no se anula y su rango siempre es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución) para cualquier valor de b .

1.3 Para $a = 1$ y $b = -2$ el sistema queda $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 4. \text{ Intentamos resolverlo.} \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ x-2y+2z=4 \\ 3x+y-2z=5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad -2y \quad +2z \quad = 4 \\ -x \quad -2y \quad -z \quad = -1 \\ \hline -4y \quad +z \quad = 3 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x \quad +y \quad -2z \quad = 5 \\ -3x \quad -6y \quad -3z \quad = -3 \\ \hline -5y \quad -5z \quad = 2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ -4y+z=3 \\ -5y-5z=2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ z=3+4y \\ -y-5z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y+3+4y=1 \\ -5y-5(3+4y)=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+6y=-2 \\ -5y-15-20y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+6y=-2 \\ -25y=17 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+6\frac{-17}{25}=-2 \Rightarrow x=-2+\frac{102}{25}=\frac{52}{25} \\ z=3+4\frac{-17}{25}=\frac{7}{25} \end{array} \right\}$$

La solución es $x = \frac{52}{25}$, $y = \frac{-17}{25}$, $z = \frac{7}{25}$.

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según la función

$$m(t) = \frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

donde m es la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día.

Responda a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):

2.1 [1.5 puntos] ¿A qué hora del día arroja la máxima cantidad de material contaminante? ¿Y a qué hora la mínima? Determinar la cantidad arrojada en ambos momentos.

2.2 [1.5 puntos] ¿Cuánto material contaminante arroja en un día? Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

2.1 Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$m(t) = \frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Rightarrow m'(t) = \frac{3}{200}t^2 - \frac{2}{10}t + \frac{1}{2}$$

$$m'(t) = 0 \Rightarrow \frac{3}{200}t^2 - \frac{2}{10}t + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3t^2 - 40t + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 100}}{2 \cdot 3} = \frac{40 \pm 20}{6} = \begin{cases} \frac{40-20}{6} = \frac{10}{3} \\ \frac{40+20}{6} = 10 \end{cases}$$

Valoramos la función en los puntos críticos y en los momentos $t = 0$ y $t = 24$.

$$\left. \begin{aligned} m(0) &= \frac{1}{200}0^3 - \frac{1}{10}0^2 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{0.5 Mínimo} \\ m\left(\frac{10}{3}\right) &= \frac{1}{200}\left(\frac{10}{3}\right)^3 - \frac{1}{10}\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{10}{3} + \frac{1}{2} = \frac{67}{54} \approx 1.24 \\ m(10) &= \frac{1}{200}10^3 - \frac{1}{10}10^2 + \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{0.5 Mínimo} \\ m(24) &= \frac{1}{200}24^3 - \frac{1}{10}24^2 + \frac{1}{2}24 + \frac{1}{2} = \frac{1201}{50} = \text{24.02 Máximo} \end{aligned} \right\}$$

Se arroja la mínima cantidad de material contaminante al comienzo del día $t = 0$ y a las 10 horas $t = 10$. Esta cantidad mínima es de medio kilo.

Se arroja la máxima cantidad de material contaminante al final del día $t = 24$. Esta cantidad máxima es de 24.02 kilos.

2.2 Calculamos la cantidad total arrojada en un día con la integral definida de la función entre 0 y 24.

$$\begin{aligned} \int_0^{24} m(t) dt &= \int_0^{24} \left(\frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) dt = \left[\frac{t^4}{800} - \frac{t^3}{30} + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{24} = \\ &= \left[\frac{24^4}{800} - \frac{24^3}{30} + \frac{24^2}{4} + \frac{24}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{800} - \frac{0^3}{30} + \frac{0^2}{4} + \frac{0}{2} \right] = \boxed{109.92 \text{ kilos}} \end{aligned}$$

La función tiene dos puntos críticos: $t = \frac{10}{3}$ y $t = 10$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left[0, \frac{10}{3}\right)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale

$$m'(1) = \frac{3}{200} \cdot 1^2 - \frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{63}{200} > 0. \text{ La función crece en } \left[0, \frac{10}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{10}{3}, 10\right)$ tomamos $t = 9$ y la derivada vale

$$m'(9) = \frac{3}{200} \cdot 9^2 - \frac{2}{10} \cdot 9 + \frac{1}{2} = \frac{-17}{200} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{10}{3}, 10\right).$$

- En el intervalo $(10, 24]$ tomamos $t = 11$ y la derivada vale

$$m'(11) = \frac{3}{200} \cdot 11^2 - \frac{2}{10} \cdot 11 + \frac{1}{2} = \frac{23}{200} > 0. \text{ La función crece en } (10, 24].$$

La función crece en $\left[0, \frac{10}{3}\right) \cup (10, 24]$ y decrece en $\left(\frac{10}{3}, 10\right)$.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Se ha publicado una encuesta sobre hábitos deportivos según la cual seis de cada diez personas practicaron deporte en el último año, ya sea de forma periódica u ocasional, en su tiempo libre. Por otra parte, entre las personas que practicaban deporte, el 85 % presenciaron, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo mientras que, entre las que no practicaban deporte, fue el 70 %.

Responda a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1. a) [1 punto] Definir correctamente los sucesos y escribir la información anterior en términos de probabilidad.

b) [1 punto] Se selecciona una persona al azar y resulta que no ha presenciado ningún evento deportivo. Determinar si es más probable que haya practicado deporte o que no lo haya hecho.

3.1. a) Como seis de cada diez personas practicaron deporte en el último año la probabilidad de que al elegir una persona haya practicado deporte es $\frac{6}{10} = 0.6$. Si llamamos D al suceso “la persona ha practicado deporte en el último año” entonces $P(D) = 0.6$.

Si llamamos V al suceso “la persona elegida presenciaron, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo” tenemos que:

Entre las personas que practicaban deporte, el 85 % presenciaron, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo $\rightarrow P(V/D) = 0.85$. Mientras que, entre las que no practicaban deporte, fue el 70 % $\rightarrow P(V/\bar{D}) = 0.70$.

Resumiendo: D = Ha practicado deporte, V = Ha visto algún evento deportivo.

Las probabilidades proporcionadas son $P(D) = 0.6$, $P(V/D) = 0.85$ y $P(V/\bar{D}) = 0.70$.

3.1.b) Calculamos la probabilidad de que una persona elegida al azar hay visto algún evento deportivo: $P(V)$.

$$P(V) = P(D)P(V/D) + P(\bar{D})P(V/\bar{D}) = 0.6 \cdot 0.85 + 0.4 \cdot 0.70 = 0.79.$$

Debemos hallar $P(D/\bar{V})$ y $P(\bar{D}/\bar{V})$.

$$P(D/\bar{V}) = \frac{P(D \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P(D)P(\bar{V}/D)}{1 - P(V)} = \frac{0.6 \cdot 0.15}{1 - 0.79} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

$$P(\bar{D}/\bar{V}) = 1 - P(D/\bar{V}) = 1 - \frac{3}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

Como $P(D/\bar{V}) = \frac{3}{7} < \frac{4}{7} = P(\bar{D}/\bar{V})$ es más probable que no haya practicado ningún deporte el último año.

3.2. Se seleccionan 8 personas al azar entre las que no practicaron deporte.

- a) [1 punto]** Calcular la probabilidad de que exactamente la mitad de ellas hayan presenciado un evento deportivo.
- b) [1 punto]** Calcular la probabilidad de que alguna de ellas haya presenciado un evento deportivo.

Sea X = Número de personas que no han presenciado un evento deportivo de un grupo de 8.

La variable X es una binomial siendo sus parámetros $n = 8$ y $p = 1 - 0.7 = 0.3$.

$X = B(8, 0.3)$. Considerando esta binomial podemos consultar la tabla binomial proporcionada en el examen para determinar la probabilidad de cualquier suceso.

3.2.a) Nos piden calcular $P(X = 4)$. Consultando en la tabla tenemos que $P(X = 4) = 0.1361$.

		p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	
n	r	p								
		r								
2	0	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.44
	1	1	0.0198	0.0975	0.1900	0.2775	0.3600	0.4375	0.5100	0.56
	2	2	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.11
	3	3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.00
3	0	0	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.26
	1	1	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.32
	2	2	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1408	0.1890	0.22
	3	3	0.0000	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.03
4	0	0	0.9608	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.16
	1	1	0.0388	0.1715	0.2916	0.3885	0.4096	0.4219	0.4116	0.36
	2	2	0.0006	0.0135	0.0488	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.26
	3	3	0.0000	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.08
5	0	0	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.11
	1	1	0.0480	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.32
	2	2	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.32
	3	3	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.16
6	0	0	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.06
	1	1	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.26
	2	2	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.32
	3	3	0.0000	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.21
7	0	0	0.9321	0.6883	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.04
	1	1	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.22
	2	2	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.32
	3	3	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.26
8	0	0	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.03
	1	1	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.15
	2	2	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2985	0.27
	3	3	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.27
9	0	0	0.9132	0.6438	0.4005	0.2425	0.1378	0.0799	0.0451	0.02
	1	1	0.0858	0.2905	0.3938	0.3859	0.3367	0.2682	0.1989	0.17
	2	2	0.0032	0.0571	0.1544	0.2432	0.2992	0.3171	0.2940	0.29
	3	3	0.0002	0.0060	0.0350	0.0858	0.1487	0.2095	0.2560	0.29
10	0	0	0.9038	0.6343	0.3910	0.2345	0.1298	0.0719	0.0402	0.01
	1	1	0.0962	0.2957	0.3980	0.3901	0.3409	0.2724	0.2031	0.19
	2	2	0.0040	0.0599	0.1572	0.2460	0.3020	0.3199	0.2968	0.31
	3	3	0.0004	0.0066	0.0356	0.0866	0.1495	0.2103	0.2568	0.31
11	0	0	0.8943	0.6248	0.3815	0.2250	0.1213	0.0634	0.0385	0.01
	1	1	0.1067	0.2963	0.3993	0.3914	0.3422	0.2737	0.2044	0.21
	2	2	0.0050	0.0605	0.1578	0.2466	0.3026	0.3205	0.2974	0.33
	3	3	0.0006	0.0072	0.0362	0.0870	0.1500	0.2108	0.2573	0.33
12	0	0	0.8848	0.6153	0.3720	0.2145	0.1118	0.0555	0.0336	0.01
	1	1	0.1172	0.2978	0.4003	0.3924	0.3432	0.2747	0.2054	0.23
	2	2	0.0060	0.0611	0.1591	0.2478	0.3038	0.3217	0.2986	0.35
	3	3	0.0008	0.0078	0.0368	0.0876	0.1506	0.2114	0.2579	0.35
13	0	0	0.8753	0.6058	0.3625	0.2040	0.1023	0.0476	0.0307	0.01
	1	1	0.1277	0.2993	0.4018	0.3939	0.3447	0.2762	0.2063	0.25
	2	2	0.0070	0.0617	0.1602	0.2484	0.3044	0.3223	0.2992	0.37
	3	3	0.0010	0.0084	0.0374	0.0882	0.1510	0.2118	0.2583	0.37
14	0	0	0.8658	0.5963	0.3530	0.1935	0.0928	0.0427	0.0278	0.01
	1	1	0.1382	0.2999	0.4023	0.3944	0.3458	0.2777	0.2070	0.27
	2	2	0.0080	0.0623	0.1616	0.2490	0.3054	0.3233	0.3000	0.39
	3	3	0.0012	0.0090	0.0380	0.0890	0.1518	0.2126	0.2593	0.39
15	0	0	0.8563	0.5868	0.3435	0.1840	0.0833	0.0378	0.0229	0.01
	1	1	0.1487	0.2995	0.4028	0.3955	0.3469	0.2782	0.2077	0.29
	2	2	0.0090	0.0629	0.1628	0.2502	0.3060	0.3243	0.3006	0.41
	3	3	0.0014	0.0096	0.0386	0.0896	0.1526	0.2134	0.2603	0.41
16	0	0	0.8468	0.5773	0.3340	0.1745	0.0738	0.0329	0.0180	0.01
	1	1	0.1592	0.2991	0.4033	0.3966	0.3480	0.2787	0.2080	0.31
	2	2	0.0100	0.0635	0.1640	0.2514	0.3066	0.3249	0.3010	0.43
	3	3	0.0016	0.0102	0.0390	0.0902	0.1534	0.2142	0.2613	0.43
17	0	0	0.8373	0.5678	0.3245	0.1650	0.0643	0.0280	0.0131	0.01
	1	1	0.1697	0.2987	0.4036	0.3977	0.3491	0.2792	0.2083	0.33
	2	2	0.0110	0.0639	0.1652	0.2526	0.3070	0.3253	0.3014	0.45
	3	3	0.0018	0.0108	0.0394	0.0908	0.1542	0.2150	0.2621	0.45
18	0	0	0.8278	0.5583	0.3150	0.1555	0.0548	0.0231	0.0082	0.01
	1	1	0.1802	0.2983	0.4037	0.3988	0.3502	0.2793	0.2084	0.35
	2	2	0.0120	0.0643	0.1664	0.2538	0.3076	0.3257	0.3016	0.47
	3	3	0.0020	0.0110	0.0396	0.0910	0.1550	0.2158	0.2623	0.47
19	0	0	0.8183	0.5488	0.3055	0.1460	0.0453	0.0182	0.0033	0.01
	1	1	0.1907	0.2971	0.4038	0.3999	0.3513	0.2795	0.2085	0.37
	2	2	0.0130	0.0647	0.1676	0.2550	0.3080	0.3261	0.3018	0.49
	3	3	0.0022	0.0112	0.0398	0.0912	0.1558	0.2160	0.2625	0.49
20	0	0	0.8088	0.5393	0.2960	0.1365	0.0358	0.0133	0.0004	0.01
	1	1	0.2012	0.2961	0.4039	0.4010	0.3524	0.2797	0.2086	0.39
	2	2	0.0140	0.0651	0.1688	0.2562	0.3082	0.3263	0.3020	0.51
	3	3	0.0024	0.0114	0.0400	0.0914	0.1560	0.2162	0.2627	0.51
21	0	0	0.7993	0.5298	0.2865	0.1270	0.0263	0.0084	0.0000	0.01
	1	1	0.2117	0.2949	0.4040	0.4021	0.3535	0.2799	0.2087	0.41
	2	2	0.0150	0.0655	0.1696	0.2574	0.3084	0.3265	0.3022	0.53
	3	3	0.0026	0.0116	0.0402	0.0916	0.1562	0.2164	0.2629	0.53
22	0	0	0.7898	0.5203	0.2770	0.1175	0.0168	0.0035	0.0000	0.01
	1	1	0.2222	0.2931	0.4041	0.4032	0.3546	0.2801	0.2088	0.43
	2	2	0.0160	0.0659	0.1704	0.2584	0.3086	0.3267	0.3024	0.55
	3	3	0.0028	0.0118	0.0404	0.0918	0.1564	0.2166	0.2631	0.55
23	0	0	0.7803	0.5108	0.2675	0.1080	0.0073	0.0000	0.0000	0.01
	1	1	0.2327	0.2913	0.4042	0.4043	0.3557	0.2803	0.2089	0.45
	2	2	0.0170	0.0663	0.1712	0.2596	0.3088	0.3269	0.3026	0.57
	3	3	0.0030	0.0120	0.0406	0.0920	0.1566	0.2168	0.2633	0.57
24	0	0	0.7708	0.5013	0.2580	0.0985	0.0000	0.0000	0.0000	0.01
	1	1	0.2432	0.2895	0.4043	0.4054	0.3568	0.2805	0.2090	0.47
	2	2	0.0180	0.0667	0.1720	0.2608	0.3089	0.3271	0.3028	0.59
	3	3	0.0032	0.0122	0.0408	0.0922	0.1568	0.2170	0.2635	0.59
25	0	0	0.7613	0.4918	0.2485	0.0890	0.0000	0.0000	0.0000	0.01
	1	1	0.2537	0.2877	0.4044	0.4065	0.3579	0.2807	0.2091	0.49
	2	2	0.0190	0.0671	0.1728	0.2620	0.3090	0.3273	0.3030	0.61
	3	3	0.0034	0.0124	0.0410	0.0924	0.1570	0.2172	0.2637	0.61
26	0	0	0.7518	0.4823	0.2390	0.0795	0.0000	0.0000	0.0000	0.01
	1	1	0.2642	0.2859	0.4045	0.4076	0.3590	0.2809	0.2092	0.51
	2	2	0.0200	0.0675	0.1736	0.2632	0.3091	0.3275	0.3032	0.63
	3	3	0.0036	0.0126	0.0412	0.0926	0.1572	0.2174	0.2639	0.63
27	0	0	0.7423	0.4728	0.2295	0.0700	0.0000	0.0000	0.0000	0.01

3.3. El tiempo (en horas) en el que las personas que practicaron deporte presenciaron eventos deportivos sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 10 horas.

a) [1 punto] Suponiendo que μ toma el valor de 25, calcular el porcentaje de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año.

b) [1 punto] Se elige al azar una muestra de 49 personas y se obtiene una media muestral de 26 horas. Determinar, al nivel de confianza del 98 %, un intervalo de confianza para el número medio de horas que presenciaron eventos deportivos en dicha población.

3.3.a) X = El tiempo (en horas) en el que las personas que practicaron deporte presenciaron eventos deportivos. $X = N(25, 10)$. Nos piden calcular $P(X > 30)$.

$$P(X > 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{30-25}{10}\right) = P(Z > 0.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

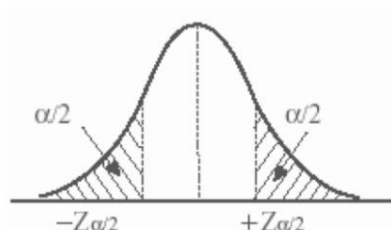
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088

Hay un 30.85 % de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año.

3.3.b) Tamaño de la muestra es $n = 49$. La media muestral es $\bar{x} = 26$ horas.

Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7421
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8530
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8943
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9874	0,9877
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9903	0,9905

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}} = 3.33 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (26 - 3.33, 26 + 3.33) = (22.67, 29.33)$$

EBAU Extraordinaria 2024

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
- Resolver el sistema para $a = -1$.

P3.

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

- Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.
- Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4, 5]$.

P4.

Una empresa tiene un gran servidor *web* cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. **(2 puntos)**
- b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? **(1 punto)**

P5.

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

- a) La probabilidad de que el test resulte positivo.
- b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

P6.

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

- a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?
- b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ .

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1.**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B^t es la matriz traspuesta de B ,

determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

C2.

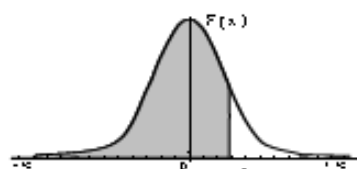
¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2 - 1)}$? Justificar la respuesta.

C3.

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**P1.**

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Llamamos x = número de estudiantes matriculados en A1 e y = número de estudiantes matriculados en A2.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio mensual: $B(x, y) = 145x + 150y$

Las restricciones son:

“Se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes” $\rightarrow x \leq 66; y \geq 60$.

“El número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2” $\rightarrow x \leq \frac{2}{3}y$.

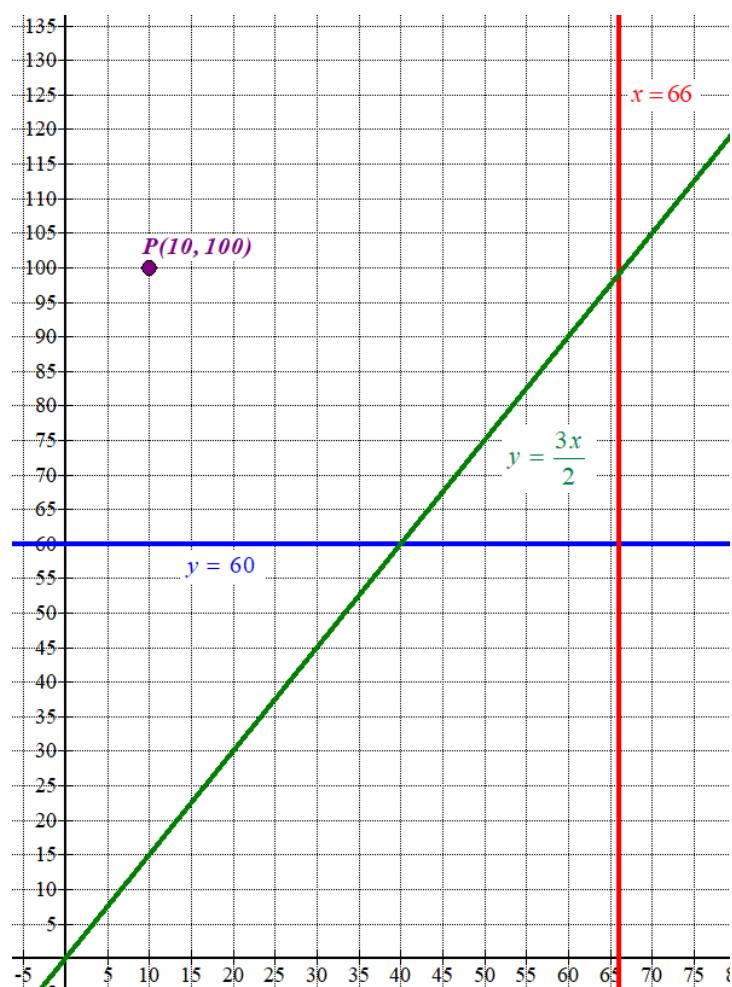
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ x \leq \frac{2}{3}y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ \frac{3x}{2} \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 66$	$y = 60$	$y = \frac{3x}{2}$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x = 66 \mid y$	$x \mid y = 60$	$x \mid y = \frac{3x}{2}$	Primer cuadrante
66 0	0 60	0 0	
66 60	40 60	40 60	
66 99	66 60	66 99	



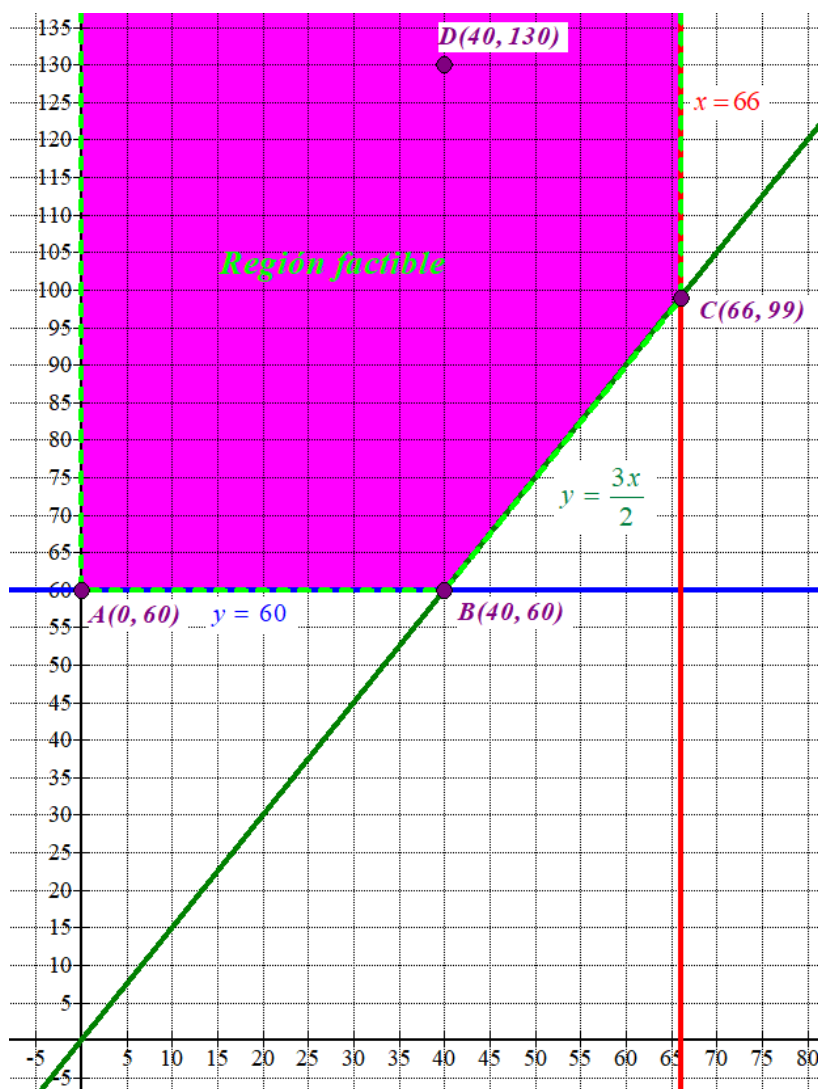
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ \frac{3x}{2} \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por encima de la recta horizontal azul y de la recta verde, y a la izquierda de la recta vertical roja. Comprobamos que el punto $P(10, 100)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 66 \\ 100 \geq 60 \\ \frac{3 \cdot 10}{2} \leq 100 \\ 10 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 60)$; $B(40, 60)$ y $C(66, 99)$. Al ser una región no acotada añadimos el punto $D(40, 130)$ para considerarlo en la búsqueda del valor máximo de la función.

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 145x + 150y$ en cada vértice y en el punto D en busca del valor máximo.

$$A(0, 60) \rightarrow B(0, 60) = 145 \cdot 0 + 150 \cdot 60 = 9000$$

$$B(40, 60) \rightarrow B(40, 60) = 145 \cdot 40 + 150 \cdot 60 = 14800$$

$$C(66, 99) \rightarrow B(66, 99) = 145 \cdot 66 + 150 \cdot 99 = 24420$$

$$D(40, 130) \rightarrow B(40, 130) = 145 \cdot 40 + 150 \cdot 130 = 25300 \text{ ; Máximo!}$$

El valor máximo de la función beneficio se sitúa fuera de los vértices, por lo que cuanto más alejado tomemos el punto de la región factible mayor será el beneficio. No existe solución que optimice el beneficio.

P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 1 & 5 & -2a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6a + 2a - 15a - 1 + 4a = -3a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = \frac{-6}{3} = -2$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$

En este caso la matriz A tiene determinante no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.

Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular la matriz y que sea más fácil obtener el rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad 2 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 6 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ -3 \quad 3 \quad 6 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 5 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 6 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & 30 & 30 & -48 \\ 0 & -30 & -30 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -38 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad -1 \quad -2 \quad 3}^{A/B} & & \\ 0 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -38 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq -2$ el sistema tiene una única solución y si $a = -2$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = -1$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

[illegible]

La solución del sistema es $x=9$, $y=\frac{-20}{3}$ y $z=\frac{38}{3}$.

P3.

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

- a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.
 b) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4, 5]$.

- a) Si la función tiene un extremo en el punto $(2, -8)$ significa que la función pasa por dicho punto, es decir, $f(2) = -8$ y también que la derivada primera se anula en $x = 2$, es decir, $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4 \\ f(2) = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow -8 = a \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 = 8a + 12 + 2b - 4 \Rightarrow 8a + 2b = -16 \Rightarrow 4a + b = -8 \Rightarrow \boxed{b = -8 - 4a}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a + 12 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -12 - 12a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} b = -8 - 4a \\ b = -12 - 12a \end{array} \right\} \Rightarrow -8 - 4a = -12 - 12a \Rightarrow 4 = -8a \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -8 - 4 \cdot \frac{-1}{2} = -8 + 2 = -6}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{2}$ y $b = -6$.

Comprobamos que para estos valores la función tiene un extremo en $(2, -8)$.

La función queda $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x - 4$.

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = -3x + 6 \Rightarrow f''(2) = -6 + 6 = 0$$

$$f'''(x) = -3 \Rightarrow f'''(2) = -3 \neq 0$$

Para los valores hallados la función presenta un punto de inflexión en el punto $(2, -8)$.
 La respuesta correcta es que no existen los valores a y b que hagan posible lo pedido.

- b) Si $a = 0$ y $b = -11$ la función queda $f(x) = 3x^2 - 11x - 4$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

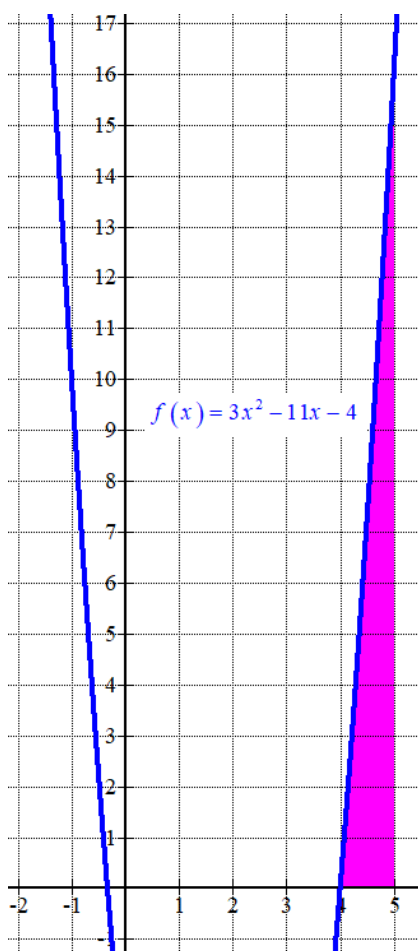
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 11x - 4 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(-4)}}{6} =$$

$$= \frac{11 \pm 13}{6} = \begin{cases} \frac{11+13}{6} = 4 = x \\ \frac{11-13}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} = x \end{cases}$$

La gráfica corta el eje OX en dos puntos, pero ninguno de ellos está en el intervalo (4, 5). El área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo [4, 5] es el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 5 de la función.

$$\begin{aligned} \int_4^5 f(x) dx &= \int_4^5 3x^2 - 11x - 4 dx = \left[x^3 - 11 \frac{x^2}{2} - 4x \right]_4^5 = \\ &= \left[5^3 - 11 \frac{5^2}{2} - 4 \cdot 5 \right] - \left[4^3 - 11 \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right] = 125 - \frac{275}{2} - 20 - 64 + 88 + 16 = \frac{15}{2} = 7.5 \end{aligned}$$

El área pedida tiene un valor de 7.5 unidades cuadradas.



P4.

Una empresa tiene un gran servidor *web* cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. **(2 puntos)**
- b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? **(1 punto)**

a) Utilizamos la derivada para estudiar la monotonía de la función.

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - (2x)(3x)}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 3-3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Como la función solo está definida para $x \geq 0$ solo consideramos el punto crítico $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{3-3 \cdot 0.5^2}{(1+0.5^2)^2} = \frac{36}{25} > 0. \text{ La función crece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1,+\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{3-3 \cdot 2^2}{(1+2^2)^2} = \frac{-9}{25} < 0$.

La función decrece en $(1,+\infty)$.

La velocidad de respuesta del servidor crece de 0 a 1 terabyte, decrece a partir de 1 terabyte.

La respuesta máxima es para $x = 1$. Calculamos $f(1)$: $f(1) = 8.5 + \frac{3}{1+1^2} = 8.5 + 1.5 = 10$.

La velocidad máxima es de 10 Gbps.

b) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8.5 + \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8.5 + \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \\ &= 8.5 + \frac{\frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + 1} = 8.5 + \frac{0}{0+1} = 8.5 \end{aligned}$$

A medida que aumenta la memoria requerida la velocidad de respuesta se acerca a 8.5 Gbps.

P5.

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

- a) La probabilidad de que el test resulte positivo.
b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

- a) Llamamos A = “La persona padece cierta enfermedad”, $T+$ = “El test da positivo” y $T-$ = “el test da negativo”.

Sabemos que $P(A) = 0.10$, $P(T+/A) = 0.97$, $P(T+/A^C) = 0.01$.

Nos piden calcular $P(T+)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(A)P(T+/A) + P(A^C)P(T+/A^C) = 0.1 \cdot 0.97 + 0.9 \cdot 0.01 = \boxed{0.106}$$

La probabilidad de que el test resulte positivo es de 0.106.

- b) Nos piden calcular $P(A/T-)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T-) = \frac{P(A \cap T-)}{P(T-)} = \frac{P(A)P(T-/A)}{1 - P(T+)} = \frac{0.1(1-0.97)}{1-0.106} = \boxed{\frac{1}{298} \approx 0.0034}$$

La probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad sabiendo que el test es negativo es de 1 de cada 298 pruebas.

P6.

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

- a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?
- b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ .

- a) X = El peso (en kg) de cada saco de cemento. $X = N(24, 2.25)$

La distribución de la media de los pesos de muestras de 36 sacos sigue una ley normal de media la misma (24 kg) y desviación típica $\sigma = \frac{2.25}{\sqrt{36}} = 0.375$. $\bar{X}_{36} = N(24, 0.375)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{36} > 25.125)$.

$$P(\bar{X}_{36} > 25.125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{25.125 - 24}{0.375}\right) = P(Z > 3) =$$

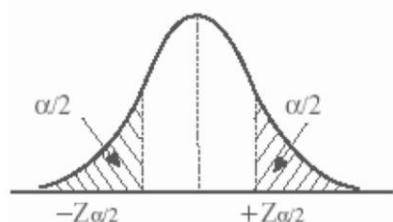
$$= 1 - P(Z \leq 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

La probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg es de 0.0013.

- b) El tamaño de la muestra es $n = 15$. La media muestral es 25.65 kg.

Con un nivel de confianza del 97 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0
1.5	0.9332	0.9346	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9831	0.9836	0.9841	0.9846	0.9850	0.9855	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0

0.0	0.0000	0
0.1	0.0008	0
0.2	0.0024	0
0.3	0.0044	0
0.4	0.0068	0
0.5	0.0095	0
0.6	0.0125	0
0.7	0.0160	0
0.8	0.0199	0
0.9	0.0242	0
1.0	0.0287	0
1.1	0.0334	0
1.2	0.0382	0
1.3	0.0430	0
1.4	0.0479	0
1.5	0.0528	0
1.6	0.0577	0
1.7	0.0625	0
1.8	0.0673	0
1.9	0.0719	0
2.0	0.0772	0
2.1	0.0821	0
2.2	0.0861	0
2.3	0.0893	0
2.4	0.0918	0
2.5	0.0938	0
2.6	0.0953	0
2.7	0.0965	0
2.8	0.0974	0
2.9	0.0981	0
3.0	0.9987	0
3.1	0.9990	0

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2.25}{\sqrt{15}} \approx 1.26 \text{ kg}$$

El error es de 1.26 kg.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (25.65 - 1.26, 25.65 + 1.26) = (24.39, 26.91)$$

C1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Si X es una matriz de dimensiones $m \times n$ para que sean posibles las operaciones de la ecuación matricial, debería cumplirse:

$$A + B^t \text{ es una matriz } 2 \times 3$$

$$(A + B^t) \cdot X = C$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para poder realizar el producto debe ser $m = 3$. Como el resultado del producto es una matriz de dimensiones $2 \times n$ y debe ser igual a la matriz C de dimensiones 2×1 debe ser $n = 1$.

La matriz X debe tener dimensiones 3×1 .

C2.

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2 - 1)}$? Justificar la respuesta.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

C3.

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Se pueden formar 1000 papeletas (000 a 999). De todas ellas hay 10 que acaban en 55:

$$055, 155, 255, 355, 455, 555, 655, 755, 855 \text{ y } 955.$$

Dado que cada papeleta tiene la misma probabilidad de ser premiada aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que el número premiado acabe en 55 es $\frac{10}{1000} = 0.01$.

EBAU Extraordinaria 2024 (Mejora de nota)

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

P2.

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Transcurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

P3.

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$.

P4.

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función $P(t)$ donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58; \text{ si } 0 \leq t \leq 30$$

- a) Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.
- b) Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

P5.

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

- a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.
- b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.
- c) Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

P6.

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

- a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90%?
- b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ ?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1.

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

C2.

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

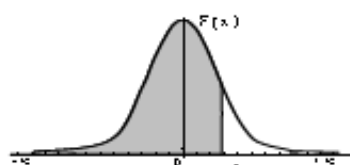
$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

C3.

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**P1.**

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

Llamamos x = número de apartamentos T2 e y = número de apartamentos T3.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio dado en miles de euros:

$$B(x, y) = 150x + 250y$$

Las restricciones son:

“El número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3” $\rightarrow x \leq 2y$.

“El número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2” $\rightarrow y \leq 3x$.

“Se pueden construir 60 apartamentos en total” $\rightarrow x + y \leq 60$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

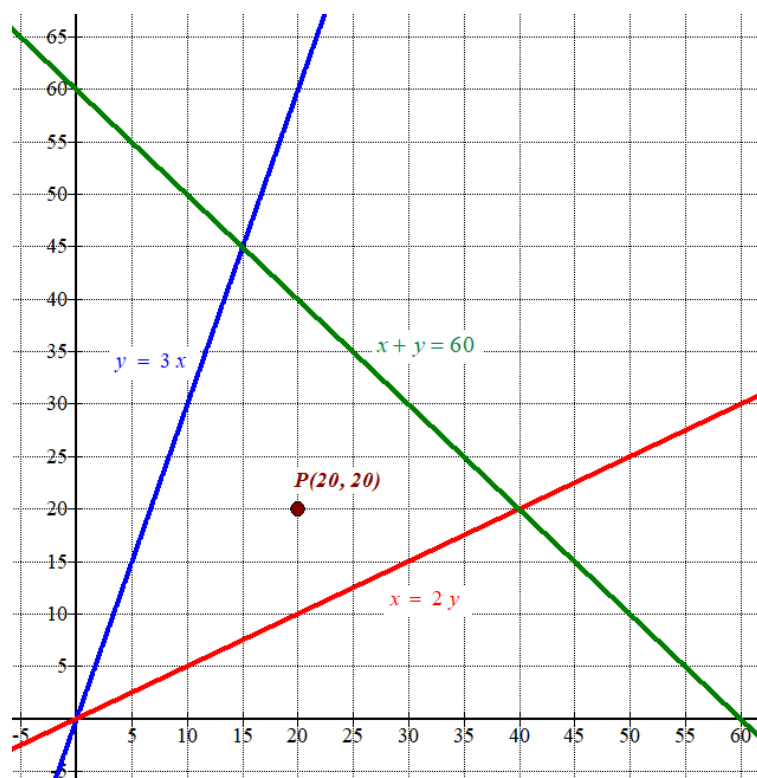
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 2y$	$x + y = 60$
$x \mid y = \frac{x}{2}$	$x \mid y = 60 - x$
0 0	0 60
40 20	15 45
60 30	40 20

$y = 3x$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 3x$	Primer cuadrante
0 0	
15 45	
20 60	



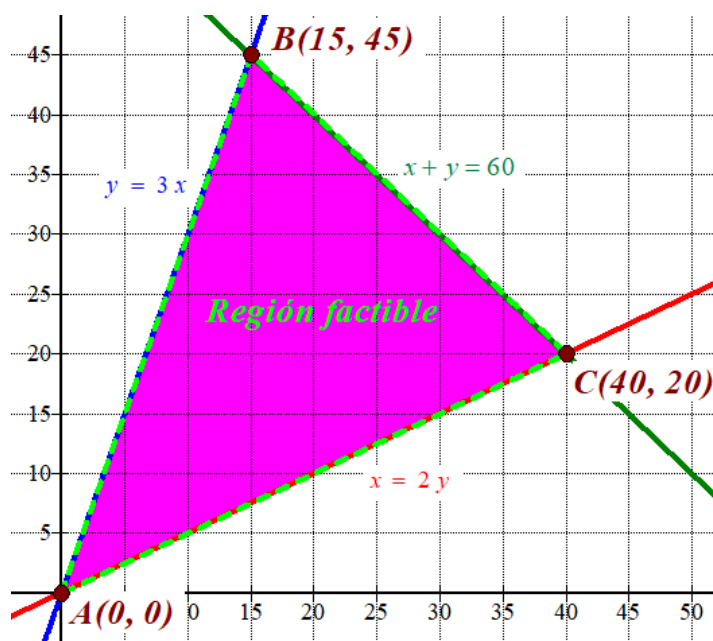
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por encima de la recta roja y por debajo de las rectas verde y azul.
Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 2 \cdot 20 \\ 20 \leq 3 \cdot 20 \\ 20 + 20 \leq 60 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 0)$; $B(15, 45)$ y $C(40, 20)$.

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 150x + 250y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(15, 45) \rightarrow B(15, 45) = 150 \cdot 15 + 250 \cdot 45 = 13500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(40, 20) \rightarrow B(40, 20) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 20 = 11000$$

El valor máximo de la función beneficio es 13 500 y se consigue en el vértice $B(15, 45)$, que significa que se deben construir 15 apartamentos T2 y 45 apartamentos T3 para obtener un beneficio máximo de 13.5 millones de euros.

P2.

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Trascurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

Llamamos “x” al dinero invertido en acciones, “y” al invertido en bonos y “z” al invertido en depósitos.

“Se invirtieron 3 millones de euros” $\rightarrow x + y + z = 3000000$

“En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos” $\rightarrow$

$$y = 1.4(x + z).$$

“Las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros” $\rightarrow$

$$0.04x - 0.05y - 0.02z = 2934300 - 3000000 \Rightarrow 0.04x - 0.05y - 0.02z = -65700$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3000000 \\ y = 1.4(x + z) \\ 0.04x - 0.05y - 0.02z = -65700 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3000000 \\ \Rightarrow y = 1.4x + 1.4z \\ 4x - 5y - 2z = -6570000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1.4x + 1.4z + z = 3000000 \\ 4x - 5(1.4x + 1.4z) - 2z = -6570000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1.4x + 1.4z + z = 3000000 \\ 4x - 7x - 7z - 2z = -6570000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.4x + 2.4z = 3000000 \\ -3x - 9z = -6570000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 1250000 \\ x + 3z = 2190000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1250000 - z \\ x + 3z = 2190000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1250000 - z + 3z = 2190000 \Rightarrow 2z = 940000 \Rightarrow \boxed{z = \frac{940000}{2} = 470000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1250000 - 470000 = 780000} \Rightarrow \boxed{y = 1.4(780000 + 470000) = 1750000}$$

La sociedad ha invertido 780 000 € en acciones, 1 750 000 € en bonos y 470 000 € en depósitos.

P3.

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$.

a) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = e^{-x} - 1$ que es una función exponencial y continua.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^2 + x$ que es una función polinómica y continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

- Existe $f(0) = e^0 - 1 = 0$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} - 1 = 0$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + x = 0^2 + 0 = 0$.
- Los tres valores son iguales: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

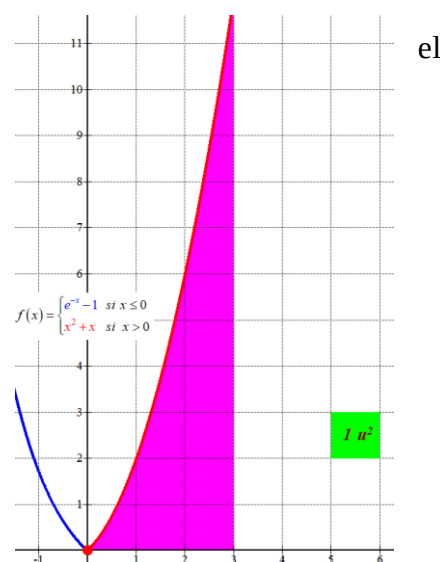
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} - 1 = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \notin (0, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Eje de abscisas $\rightarrow y = 0$

La gráfica de la función corta el eje de abscisas en $x = 0$. El área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$ se obtiene con el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 3 de la función. En este intervalo la función es $f(x) = x^2 + x$.

$$\int_0^3 x^2 + x dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \left[\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

El área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en intervalo $[0, 3]$ tiene un valor de 13.5 unidades cuadradas.



P4.

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función $P(t)$ donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58; \text{ si } 0 \leq t \leq 30$$

- Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.
- Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

a) Utilizamos la derivada para estudiar la monotonía de la función.

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58 \Rightarrow P'(t) = 0.12t^2 - 3.96t + 24$$

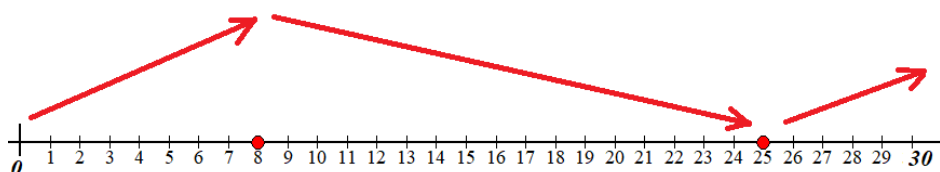
$$P'(t) = 0 \Rightarrow 0.12t^2 - 3.96t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 33t + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{33 \pm \sqrt{(-33)^2 - 4(200)}}{2} = \frac{33 \pm 17}{2} = \begin{cases} \frac{33+17}{2} = 25 = t \\ \frac{33-17}{2} = 8 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 8$ y $t = 25$.

- En el intervalo $[0, 8)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale
 $P'(1) = 0.12 \cdot 1^2 - 3.96 \cdot 1 + 24 = 20.16 > 0$. La función crece en $[0, 8)$.
- En el intervalo $(8, 25)$ consideramos $t = 10$ y la derivada vale
 $P'(10) = 0.12 \cdot 10^2 - 3.96 \cdot 10 + 24 = -3.6 < 0$. La función decrece en $(8, 25)$.
- En el intervalo $(25, 30]$ consideramos $t = 26$ y la derivada vale
 $P'(26) = 0.12 \cdot 26^2 - 3.96 \cdot 26 + 24 = 2.16 > 0$. La función crece en $(25, 30]$.

La función sigue el esquema siguiente.



El precio del oro crece durante los primeros ocho días del mes, baja del octavo al vigésimo quinto día y de ahí a final de mes crece.

- b) La función es continua y observando el esquema anterior el precio máximo del oro se produce en $t = 8$ o en $t = 30$.

$$P(8) = 0.04 \cdot 8^3 - 1.98 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 58 = 143.76$$

$$P(30) = 0.04 \cdot 30^3 - 1.98 \cdot 30^2 + 24 \cdot 30 + 58 = 76$$

El precio máximo del oro durante el mes es de 143,76 € por gramo y se produce el octavo día.

La función es continua y observando el esquema anterior el precio mínimo del oro se produce en $t = 0$ o en $t = 25$.

$$P(0) = 0.04 \cdot 0^3 - 1.98 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 58 = 58$$

$$P(25) = 0.04 \cdot 25^3 - 1.98 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 + 58 = 45.5$$

El precio mínimo del oro es de 45,5 € por gramo y se produce el vigésimo quinto día del mes.

P5.

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

- Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.
- Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.
- Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

- Llamamos H = “La persona es hombre” y A = “la persona está en paro”. Sabemos que $P(H) = 0.55$, $P(H^c) = 0.45$, $P(A/H) = 0.15$, $P(A/H^c) = 0.25$. Nos piden calcular $P(A \cap H^c)$.

$$P(A \cap H^c) = P(H^c)P(A/H^c) = (1 - 0.55) \cdot 0.25 = \boxed{0.1125}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer es de 0.1125.

- Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap H^c) = P(H)P(A/H) + 0.1125 = 0.55 \cdot 0.15 + 0.1125 = \boxed{0.195}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro es de 0.195.

- Nos piden calcular $P(H/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H/A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H)P(A/H)}{P(A)} = \frac{0.55 \cdot 0.15}{0.195} = \boxed{\frac{11}{26} \approx 0.4231}$$

La probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre tiene un valor aproximado de 0.4231.

P6.

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

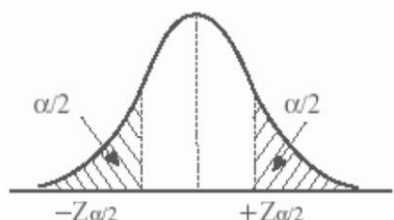
- a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90%?
 b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ ?

- a) X = La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas (en mm).
 $X = N(\mu, 1.8)$

El tamaño de la muestra es $n = 25$. La media muestral es 195 milímetros.

Con un nivel de confianza del 90 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9462	0,9474	0,9484	0,9494	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{25}} = 0.5922 \text{ mm}$$

El error es de 0.5922 milímetros.

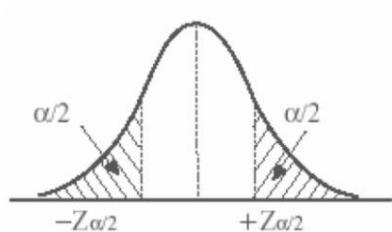
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (195 - 0.5922, 195 + 0.5922) = (194.4078, 195.5922)$$

La longitud media se encuentra entre 194.4078 y 195.5922 milímetros.

- b) Con un nivel de confianza del 99 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9947	0,9949	0,9951	0,
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,

Igualemos el error a 0.5 y despejamos n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 2.575 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\sqrt{n} = 2.575 \cdot 1.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 1.8}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 1.8}{0.5} \right)^2 = 85.9329$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 86 barras de metal.

C1.

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

$$AX + B = C - 3X \Rightarrow AX + 3X = C - B \Rightarrow (A - 3I)X = C - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Supongo que la matriz } A - 3I \text{ es invertible}\} \Rightarrow X = (A - 3I)^{-1}(C - B)$$

C2.

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

El dominio de definición son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} \text{ ¡Imposible!}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical $x = a$.

La función no tiene asíntotas verticales pues su dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{10x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{10}{x}}{3 + \frac{3}{x^2}} = \frac{6 - \frac{10}{\infty}}{3 + \frac{3}{\infty}} = \frac{6 - 0}{3 + 0} = 2$$

La recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Como existe asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

C3.

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

X = La precipitación anual en una localidad de Castilla y León. $X = N(632, 48)$.

Debemos calcular $P(X > 600)$.

$$P(X > 600) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z > \frac{600 - 632}{48}\right) =$$

$$= P(Z > -0.66) = P(Z < 0.67) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7486}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794

EBAU Ordinaria 2024

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5 - k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k .
- Resolver el sistema para $k = 1$

P3.

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Determinar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
- Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

P4.

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.
- Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

P5.

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

- ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

P6.

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura *Empresa y diseño de modelos de negocio*. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

- Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*.
- Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1.**

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A + X) = B - 2X$.

C2.

Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2, -1]$.

C3.

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

SOLUCIONES**P1.**

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

Llamamos x = número de comprimidos VITAMIN, y = número de comprimidos MAGNE.

La función objetivo que deseamos minimizar es el número total de comprimidos:

$$N(x, y) = x + y$$

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Vitamina C	Magnesio
Nº comprimidos VITAMIN (x)	$40x$	$10x$
Nº comprimidos MAGNE (y)	$10y$	$20y$
TOTALES	$40x + 10y$	$10x + 20y$

Las restricciones son:

“Cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día” $\rightarrow 110 \leq 40x + 10y \leq 250$

“Cada deportista debe tomar entre 80 y 150 mg de magnesio” $\rightarrow 80 \leq 10x + 20y \leq 150$

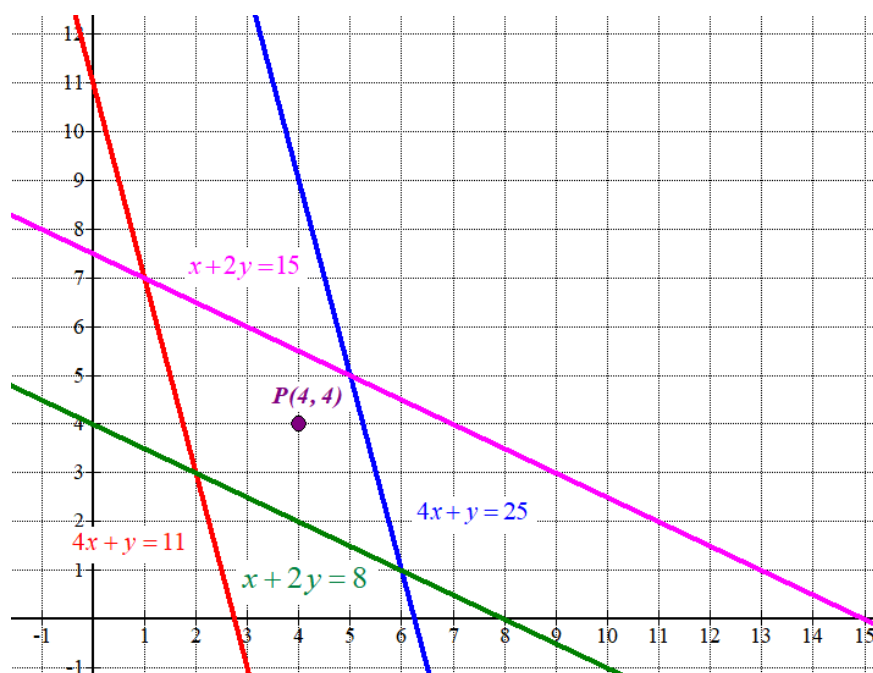
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 110 \leq 40x + 10y \leq 250 \\ 80 \leq 10x + 20y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11 \leq 4x + y \leq 25 \\ 8 \leq x + 2y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x + y = 11$		$4x + y = 25$		$x + 2y = 8$		$x + 2y = 15$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 11 - 4x$	x	$y = 25 - 4x$	x	$y = \frac{8-x}{2}$	x	$y = \frac{15-x}{2}$	
0	11	0	25	0	2	5	5	Primer cuadrante
1	7	5	5	8	0	15	0	
2	3	6	1					

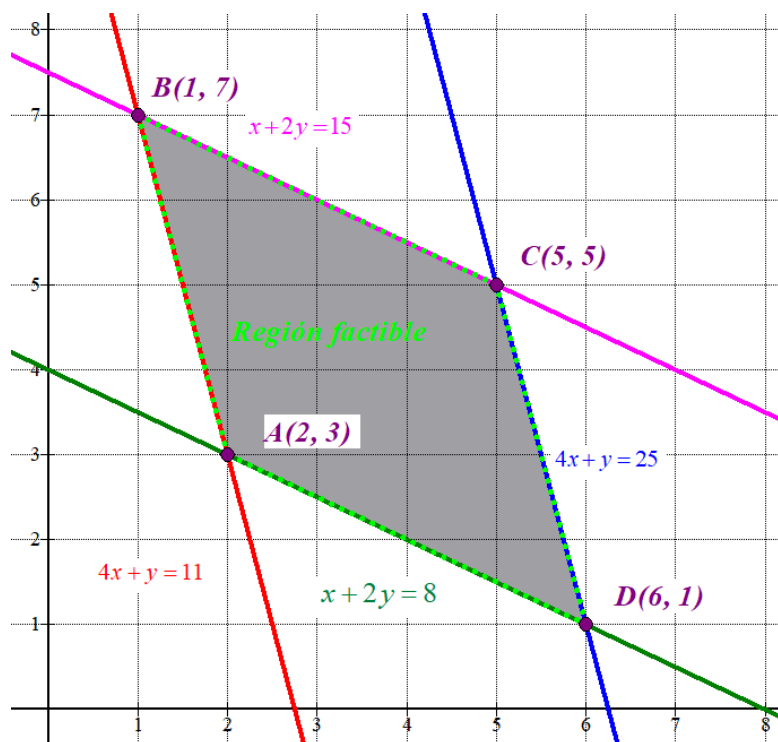


Como las restricciones del problema son $\left. \begin{array}{l} 11 \leq 4x + y \leq 25 \\ 8 \leq x + 2y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer

cuadrante que está por debajo de la recta azul y rosa, y por encima de las rectas verde y roja. Comprobamos que el punto $P(4, 4)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 11 \leq 4 \cdot 4 + 4 \leq 25 \\ 8 \leq 4 + 2 \cdot 4 \leq 15 \\ 4 \geq 0; 4 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(2, 3); B(1, 7); C(5, 5) y D(6, 1).

Valoramos la función objetivo $N(x, y) = x + y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A(2, 3) \rightarrow N(2, 3) = 2 + 3 = 5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(1, 7) \rightarrow N(1, 7) = 1 + 7 = 8$$

$$C(5, 5) \rightarrow N(5, 5) = 5 + 5 = 10$$

$$D(6, 1) \rightarrow N(6, 1) = 6 + 1 = 7$$

El número mínimo es 5 y se consigue en el vértice A(2, 3).

Para minimizar el número de comprimidos que se deben tomar consiguiendo la ingesta de la vitamina C y magnesio recomendado se deben tomar 2 comprimidos de VITAMIN y 3 de MAGNE, un total de 5 comprimidos.

P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5 - k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k .

b) Resolver el sistema para $k = 1$

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & k & 5-k \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & k & 5-k & -10 \\ 1 & -3 & k & 10 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & k & 5-k \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = k^2 - 3(5-k) + 0 - 5k - 0 + 3(5-k) =$$

$$= k^2 - \cancel{15} + \cancel{3k} - 5k + \cancel{15} - \cancel{3k} = k^2 - 5k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 5k = 0 \Rightarrow k(k-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k - 5 = 0 \rightarrow k = 5 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 5$

En este caso la matriz A tiene determinante no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.

Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular la matriz y que sea más fácil de obtener el rango.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -3 \quad 0 \quad 10 \\ -1 \quad 3 \quad -5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -5 \quad 10 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -5 \quad 10 \\ 0 \quad 0 \quad 5 \quad 10 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = 5$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda
$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 5y = -10 \\ x - 3y + 5z = 10 \end{cases}$$
. Se observa que la primera y tercera ecuación son iguales

salvo el segundo término de la igualdad, por lo que el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 5$ el sistema tiene una única solución, si $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones y si $k = 5$ el sistema no tiene solución.

b) Para $k = 1$ el sistema tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ y + 4z = -10 \\ x - 3y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ y = -10 - 4z \\ x - 3y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3(-10 - 4z) + 5z = 0 \\ x - 3(-10 - 4z) + z = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 30 + 12z + 5z = 0 \\ x + 30 + 12z + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 17z = -30 \\ x + 13z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -30 - 17z \\ x + 13z = -20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30 - 17z + 13z = -20 \Rightarrow -4z = 10 \Rightarrow z = \frac{10}{-4} = \frac{-5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -30 - 17 \frac{-5}{2} = \frac{25}{2} \\ y = -10 - 4 \frac{-5}{2} = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = \frac{25}{2}$, $y = 0$ y $z = \frac{-5}{2}$.

P3.

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Determinar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
 b) Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

- a) En $(-\infty, 1)$ la función es una parábola y es continua. En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es $f(x) = a + \ln(x)$ y es continua en el intervalo de definición.

La función debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + 1 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \ln(x) = a + \ln(1) = a \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 0$$

Para $a = 0$ la función es continua en todo su dominio.

- b) Para $a = 1$ la función queda: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

eje OY $\rightarrow x = 0$

El punto de corte con el eje OY es $A(0, -2)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

eje OX $\rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \in (-\infty, 1] \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \in (-\infty, 1] \end{cases} \\ 1 + \ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = -1 \rightarrow x = e^{-1} \approx 0.36 \notin (1, +\infty) \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son $B(1, 0)$ y $C(-2, 0)$.

Utilizamos la derivada para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

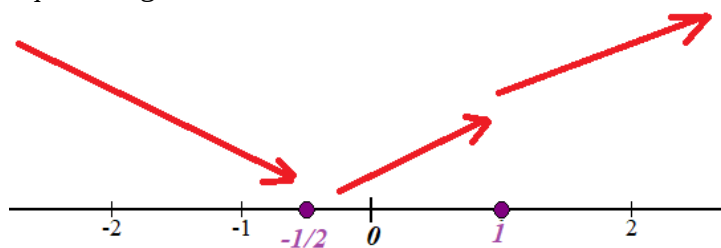
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow 2x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{x}=0 \rightarrow \text{¡Im posible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1/2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1) + 1 = -1 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1/2)$.
- En el intervalo $(-1/2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. La función crece en $(-1/2, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{1}{2} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

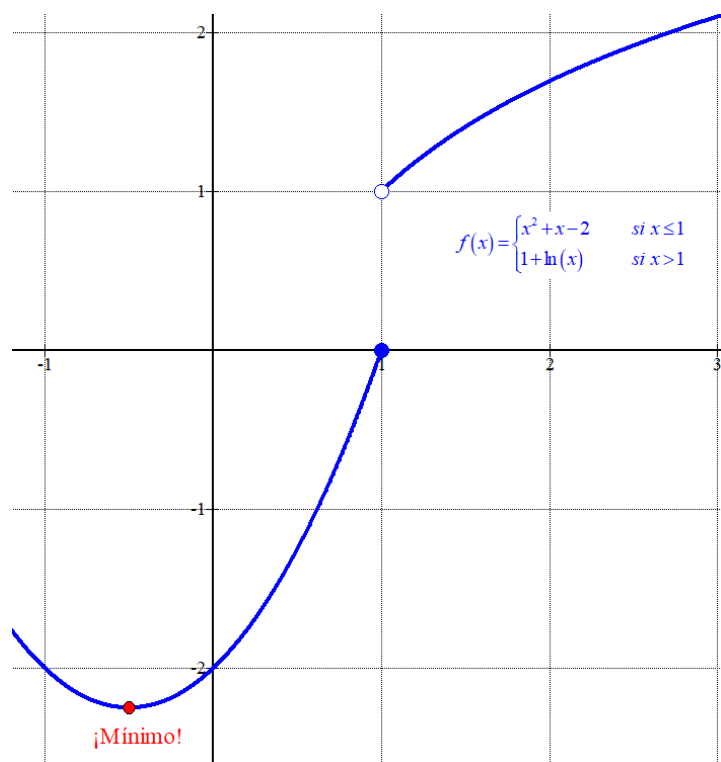
La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -1/2)$ y crece en $(-1/2, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$. Como $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 0.5 - 2 = -2.25$ el

mínimo tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$



P4.

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.
b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

- a) En el intervalo $[0, 3)$ la función es $T(x) = 22 + 5.5x - 1.5x^2$ que es continua (un trozo de parábola).

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $T(x) = \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2}$ que es continua pues su denominador no se anula para ningún valor; $2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{Im posible}$.

Comprobamos si es continua en el cambio de definición ($x = 3$).

$$\left. \begin{aligned} T(3) &= \frac{52 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 23}{2 \cdot 3^2 + 2} = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} T(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 22 + 5.5x - 1.5x^2 = 22 + 5.5 \cdot 3 - 1.5 \cdot 3^2 = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} T(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} T(x) = T(3) = 25$$

La función es continua en $x = 3$.

La función es continua en $[0, +\infty)$.

- b) La temperatura del agua al inicio del año 2014 es el valor de $T(4)$.

$$T(4) = \frac{52 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 23}{2 \cdot 4^2 + 2} = 25.5$$

La temperatura del agua al inicio del año 2014 es de 25.5°.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{52x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{23}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{52 + \frac{3}{x} + \frac{23}{x^2}}{2 + \frac{2}{x^2}} = \frac{52 + \frac{3}{\infty} + \frac{23}{\infty}}{2 + \frac{2}{\infty}} = \frac{52}{2} = 26 \end{aligned}$$

La temperatura del agua dentro de muchos años se aproximará a los 26°.

P5.

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

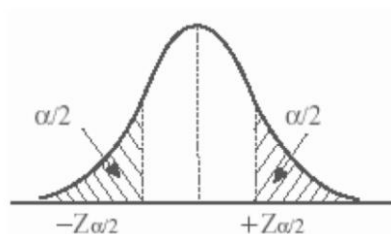
- a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?
 b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

- a) X = El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes. $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de la muestra es $n = 625$. La media muestral es $\bar{x} = 16$ viajes.

Con un nivel de significación del 4 % tenemos

$$\alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}} = 0.822$$

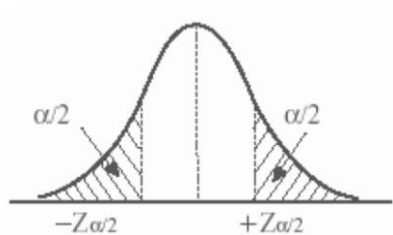
El error es de 0.822 viajes.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16 - 0.822, 16 + 0.822) = (15.178, 16.822)$$

- b) Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,6
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,7
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,8
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,9
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	1,0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	1,1
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	1,2
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	1,3
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	1,4
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	1,5
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	1,6
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	1,7
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{500}} \approx 0.7357$$

El error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 % es de 0.7357 viajes.

P6.

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura *Empresa y diseño de modelos de negocio*. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

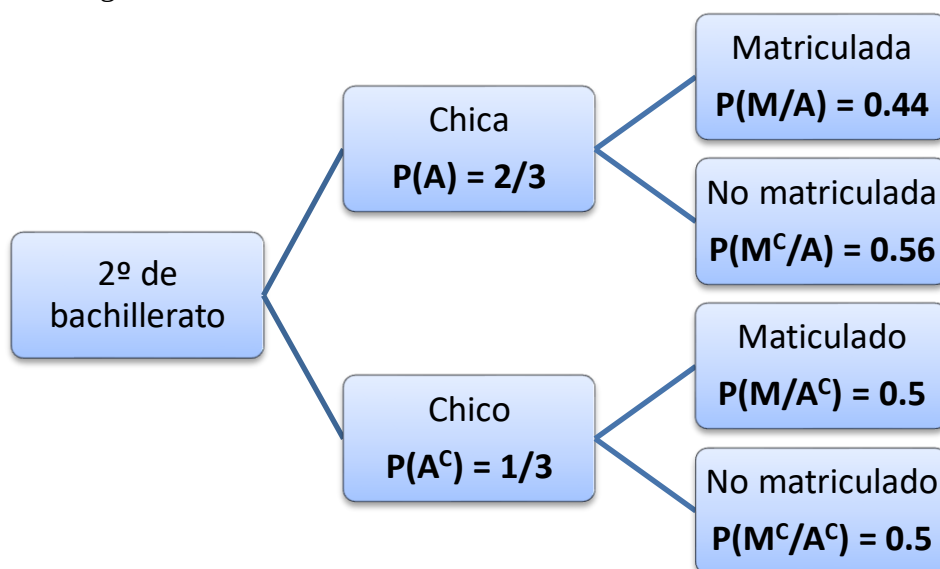
- a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*.
 b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio*, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Llamamos A al suceso “ser chica de 2º de bachillerato”, A^C al suceso “ser chico de 2º de bachillerato” y M al suceso “estar matriculado en la asignatura *Empresa y diseño de modelos de negocio*”.

Hay $150 + 75 = 225$ alumnos en 2º de bachillerato. $P(A) = \frac{150}{225} = \frac{2}{3} \approx 0.66$,

$$P(A^C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.33, \quad P(M/A) = 0.44; \quad P(M/A^C) = \frac{5}{10} = 0.5.$$

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M^C) = P(A)P(M^C/A) + P(A^C)P(M^C/A^C) = \frac{2}{3} \cdot 0.56 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 = \boxed{0.54}$$

La probabilidad de que al elegir un estudiante de 2º de bachillerato no esté matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocio* es de 0.54.

- b) Nos piden calcular $P(A/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{1 - P(M^C)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.44}{1 - 0.54} = \frac{44}{69} \approx 0.6377$$

Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en *Empresa y diseño de modelos de negocios* la probabilidad de que sea chica es de 0.6377.

C1.Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A + X) = B - 2X$.

$$C(A + X) = B - 2X \Rightarrow CA + CX = B - 2X \Rightarrow CX + 2X = B - CA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C + 2I)X = B - CA \Rightarrow \left\{ \text{Existe } (C + 2I)^{-1} \right\} \Rightarrow \boxed{X = (C + 2I)^{-1}(B - CA)}$$

C2.Calcular el área bajo la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2, -1]$.Comprobamos si la función corta el eje OX entre -2 y -1 .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \dots$$

$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & & & \\ \hline 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$

$$\dots \Rightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1=0 \rightarrow \boxed{x=-1} \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \\ = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} \approx \boxed{-2.7} \\ \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} \approx \boxed{0.73} \end{cases} \end{array} \right.$$

La función no corta el eje OX en el intervalo $(-2, -1)$. El valor del área bajo la curva es la integral definida entre -2 y -1 de la función.Como $f(-1.5) = (-1.5)^3 + 3(-1.5)^2 - 2 = 1.375 > 0$ podemos afirmar que la función es positiva en el intervalo $[-2, -1]$.

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} x^3 + 3x^2 - 2 dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - 2x \right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 - 2(-1) \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3 - 2(-2) \right] = \frac{1}{4} - 1 + 2 - 4 + 8 - 4 = \frac{5}{4} = \boxed{1.25 u^2}$$

C3.

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

Para sacar al menos dos caras seguidas, deberíamos sacar dos caras seguidas y una cruz o bien tres caras.

Sería sacar CC+, +CC o CCC.

La probabilidad de sacar cara al lanzar la moneda es $1/2$ y la de sacar cruz también es $1/2$.

La probabilidad de sacar al menos dos caras seguidas es:

$$P(CC+) + P(+CC) + P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$$

La probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas al lanzar una moneda no trucada tres veces es 0.375.

EBAU Ordinaria 2024 (Mejora de nota)

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

P1.

Durante una liga de fútbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota. Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

P2.

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

P3.

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x) = \begin{cases} -0.16x^2 + 1.6x + 3.64 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ \frac{3x + 49}{x + 3} & \text{si } 7 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

- Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.
- Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

P4.

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

- ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?
- Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.
- Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

P5.

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

- Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

P6.

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

- Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?
- Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1.

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3 : $M = (1 \ 2 \ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^t = 9$ (siendo M^t la matriz traspuesta de M).

C2.

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

C3.

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$.

SOLUCIONES**P1.**

Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota. Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Llamamos “x” al número de partidos ganados, “y” al número de partidos empatados y “z” al número de partidos perdidos.

“Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos” $\rightarrow x + y + z = 38$.

“El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota” $\rightarrow 3x + y = 86$.

“El triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados” $\rightarrow 3y + z = x + 2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 38 \\ 3x + y = 86 \\ 3y + z = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 38 \\ y = 86 - 3x \\ 3y + z = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 86 - 3x + z = 38 \\ 3(86 - 3x) + z = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + z = -48 \\ 258 - 9x + z = x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = -48 + 2x \\ z = -256 + 10x \end{array} \right\} \Rightarrow -48 + 2x = -256 + 10x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 208 = 8x \Rightarrow \boxed{x = \frac{208}{8} = 26} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = -48 + 2 \cdot 26 = 4} \\ \boxed{y = 86 - 3 \cdot 26 = 8} \end{array} \right.$$

El campeón de liga ganó 26 partidos, empató 8 y perdió 4 partidos.

P2.

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Llamamos x = la inversión en artículos A e y = la inversión en artículos B.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio: $B(x, y) = 0.10x + 0.05y$

Las restricciones son:

“Se dispone de 12000 euros” $\rightarrow x + y \leq 12000$

“La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B” $\rightarrow y \geq 3000; x \leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 12000$$

x	$y = 12000 - x$
0	12000
8000	4000
12000	0

$$y = 3000$$

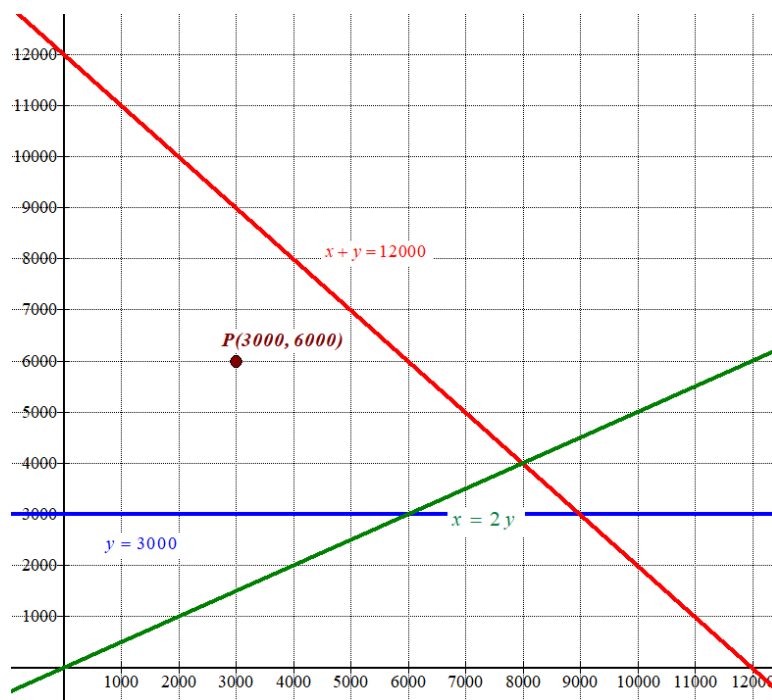
x	$y = 3000$
0	3000
1000	3000
6000	3000

$$x = 2y$$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
6000	3000
8000	4000

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

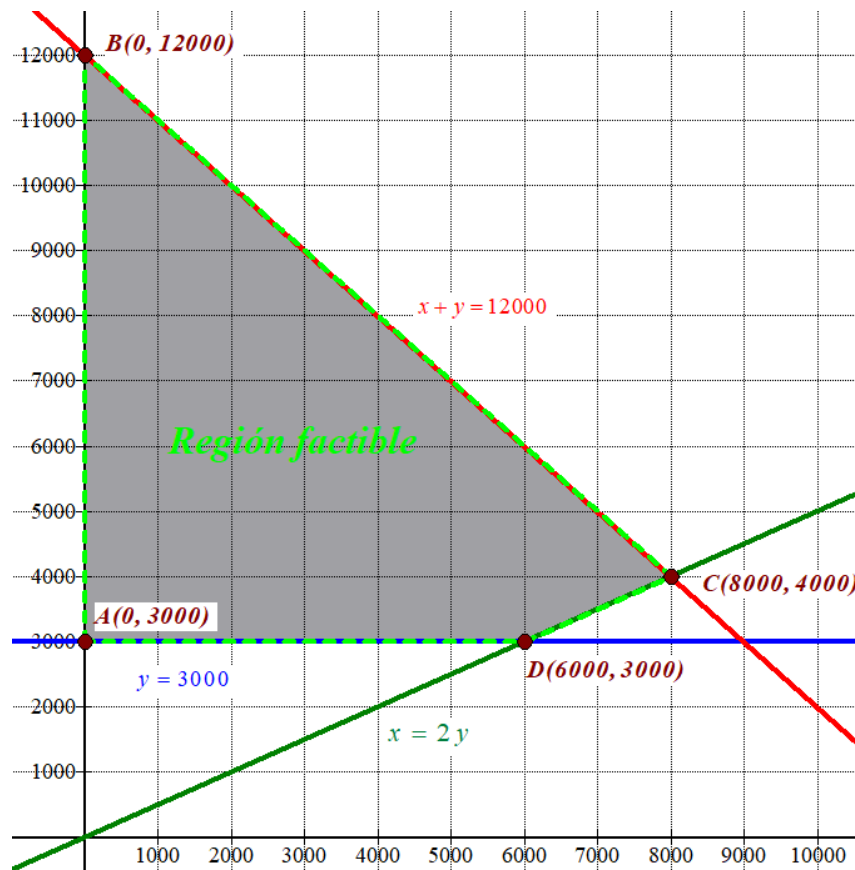


Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja, y por encima de las rectas verde y azul. Comprobamos que el punto } P(3000, 6000) \text{ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3000 + 6000 \leq 12000 \\ 6000 \geq 3000 \\ 3000 \leq 2 \cdot 6000 \\ 3000 \geq 0; 6000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 3000)$; $B(0, 12000)$; $C(8000, 4000)$ y $D(6000, 3000)$.

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 0.10x + 0.05y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 3000) \rightarrow B(0, 3000) = 0.10 \cdot 0 + 0.05 \cdot 3000 = 150$$

$$B(0, 12000) \rightarrow B(0, 12000) = 0.10 \cdot 0 + 0.05 \cdot 12000 = 600$$

$$C(8000, 4000) \rightarrow B(8000, 4000) = 0.10 \cdot 8000 + 0.05 \cdot 4000 = 1000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(6000, 3000) \rightarrow B(6000, 3000) = 0.10 \cdot 6000 + 0.05 \cdot 3000 = 750$$

El beneficio máximo son 1000 € y se consiguen invirtiendo 8000 € en artículos A y 4000 € en artículos B.

P3.

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x) = \begin{cases} -0.16x^2 + 1.6x + 3.64 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ \frac{3x+49}{x+3} & \text{si } 7 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

- a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.
 b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

- a) En $[0, 7)$ la función es una parábola y es continua. En el intervalo $(7, 12]$ la función es

$$f(x) = \frac{3x+49}{x+3} \text{ y es continua en el intervalo de definición.}$$

Estudiamos si la función es continua en $x = 7$.

$$\left. \begin{aligned} f(7) &= \frac{3 \cdot 7 + 49}{7 + 3} = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^-} -0.16x^2 + 1.6x + 3.64 = -0.16 \cdot 7^2 + 1.6 \cdot 7 + 3.64 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{3x+49}{x+3} = 7 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(7) = \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 7$ la función es continua en $x = 7$ y por tanto, continua en todo su dominio.

- b) Utilizamos el signo de la derivada para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} -0.32x + 1.6 & \text{si } 0 \leq x < 7 \\ \frac{3(x+3) - 1 \cdot (3x+49)}{(x+3)^2} = \frac{3x+9-3x-49}{(x+3)^2} = \frac{-40}{(x+3)^2} & \text{si } 7 < x \leq 12 \end{cases}$$

Vemos cuando se anula la derivada.

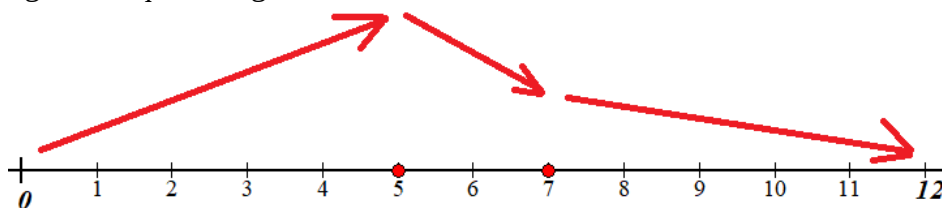
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0.32x + 1.6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1.6}{-0.32} = 5 \in (0, 7) \\ \frac{-40}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 5$ y $x = 7$.

- En el intervalo $[0, 5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -0.32 \cdot 1 + 1.6 = 1.28 > 0$. La función crece en $[0, 5)$.
- En el intervalo $(5, 7)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6) = -0.32 \cdot 6 + 1.6 = -0.32 < 0$. La función decrece en $(5, 7)$.

- En el intervalo $(7,12]$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(8) = \frac{-40}{(8+3)^2} < 0$. La función decrece en $(7,12]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $[0,5]$ y decrece en $(5,12]$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 5$. Como $f(5) = -0.16 \cdot 5^2 + 1.6 \cdot 5 + 3.64 = 7.64$ el máximo tiene coordenadas $(5, 7.64)$.

Como la función es continua en todo su dominio y sigue el esquema anterior, el valor mínimo está situado en uno de los extremos del intervalo.

$$f(0) = -0.16 \cdot 0^2 + 1.6 \cdot 0 + 3.64 = 3.64$$

$$f(12) = \frac{3 \cdot 12 + 49}{12 + 3} = \frac{17}{3} \approx 5.667$$

La tasa de variación del IPC fue máxima en el mes 5, siendo esta tasa de 7.64. y fue mínima al comienzo del año (mes 0) con una tasa de 3.64.

P4.

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

- ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?
- Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.
- Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

- a) Debemos hallar “ x ” para que $f(x) = 50$.

$$f(x) = 50 \Rightarrow -x^2 + 25x - 100 = 50 \Rightarrow -x^2 + 25x - 150 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-1)(-150)}}{2(-1)} = \frac{-25 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-25+5}{-2} = \boxed{10 = x} \\ \frac{-25-5}{-2} = \boxed{15 = x} \end{cases}$$

Se debe elaborar 10 o 15 kilos de masa para obtener un beneficio de 50 euros.

- b) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 25 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 25 = 0 \Rightarrow 2x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12.5$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y vemos si el resultado es positivo o negativo.

$$f'(x) = -2x + 25 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(12.5) = -2 < 0$$

Al tener la segunda derivada valor negativo la función tiene un máximo relativo en $x = 12.5$.

Se han de vender 12.5 kilogramos de masa para obtener un beneficio máximo.

Como $f(12.5) = -12.5^2 + 25 \cdot 12.5 - 100 = 56.25$ este beneficio máximo es de 56.25 euros.

- c) Averiguamos cuando los beneficios son nulos.

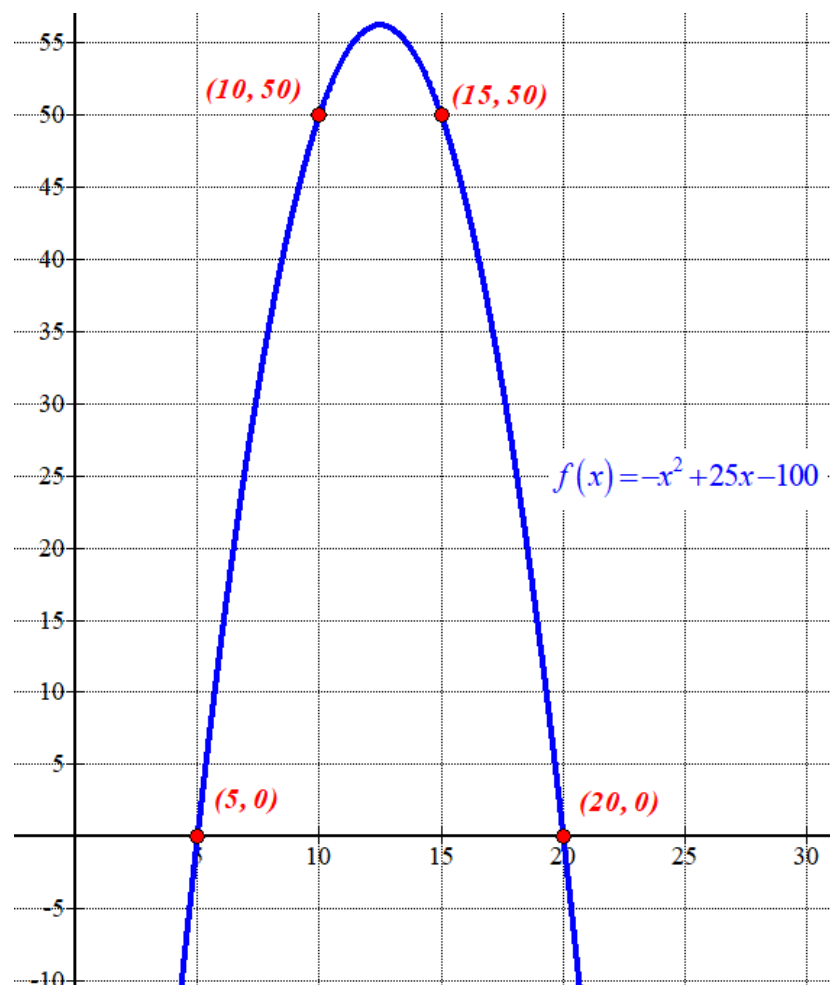
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 25x - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4(-1)(-100)}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-25 \pm 15}{-2} = \begin{cases} \frac{-25+15}{-2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{-25-15}{-2} = \boxed{20 = x} \end{cases}$$

La función tiene un máximo en (12.5, 56.25), crece en (0, 12.5) y decrece en (12.5, $+\infty$).

Además, la función es continua, por lo que el beneficio es negativo con menos de 5 kilogramos de masa y a partir de 20 kilogramos de masa.

Para no tener pérdidas se deben vender entre 5 y 20 kilogramos de masa.



P5.

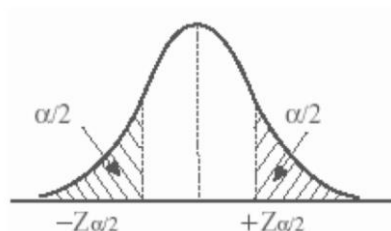
Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

- a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.
 b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

- a) $X =$ El número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años. $X = N(\mu, 9)$
 Tamaño de la muestra es $n = 400$. La media muestral es $\bar{x} = 75$ pulsaciones por minuto.
 Con un nivel de confianza del 95 % determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{400}} \approx 0.882$$

El error es de 0.882 pulsaciones.

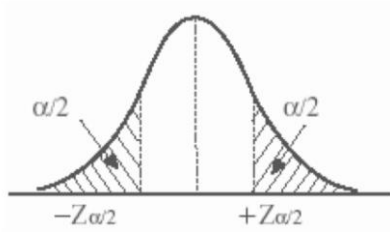
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (75 - 0.882, 75 + 0.882) = (74.118, 75.882)$$

- b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.005 = 0.995 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9439
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9544
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9915
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9935
2,5	0,9936	0,9938	0,9939	0,9940	0,9941	0,9942	0,9943	0,9944	0,9945	0,9946
2,6	0,9947	0,9948	0,9949	0,9950	0,9951	0,9952	0,9953	0,9954	0,9955	0,9956

Utilizamos la fórmula del error, lo igualamos a 0.88 y despejamos n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.88 = 2.575 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.88\sqrt{n} = 2.575 \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 9}{0.88} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 9}{0.88} \right)^2 \approx 693.54$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 694 personas entre 20 y 30 años.

P6.

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

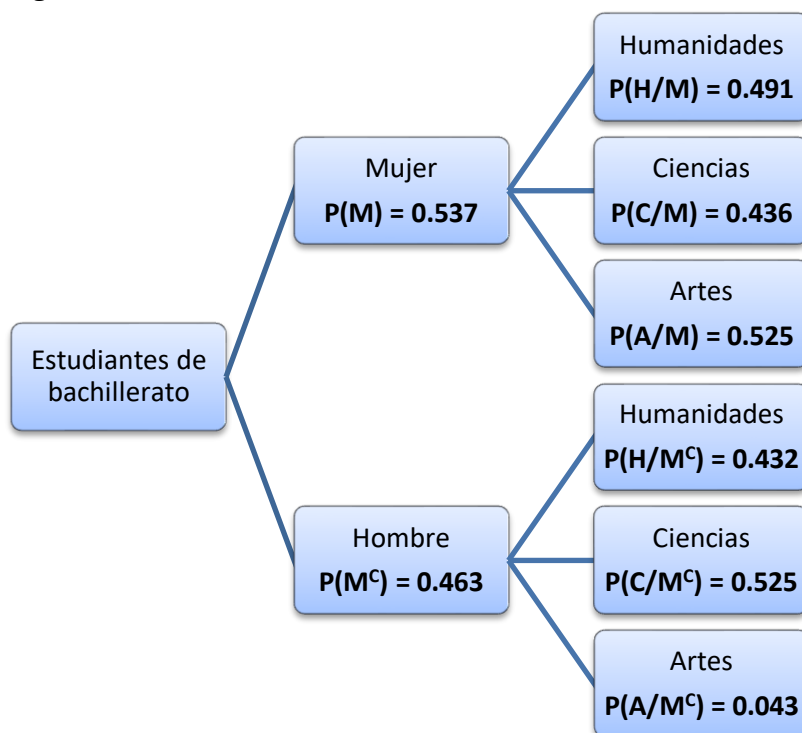
- a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?
- b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Llamamos M al suceso “El estudiante de bachillerato es mujer”, H al suceso “el estudiante cursa la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales”, C al suceso “el estudiante cursa la modalidad de Ciencias y Tecnología” y A al suceso “el estudiante cursa la modalidad de Artes”.

Sabemos que $P(M) = 0.537$, $P(H/M) = 0.491$; $P(C/M) = 0.436$, $P(A/M) = 0.525$,

$P(H/M^c) = 0.432$; $P(C/M^c) = 0.525$ y $P(A/M^c) = 1 - 0.432 - 0.525 = 0.043$.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(M)P(C/M) + P(M^c)P(C/M^c) = 0.537 \cdot 0.436 + 0.463 \cdot 0.525 \approx \boxed{0.4772}$$

La probabilidad de que al elegir un estudiante de bachillerato esté matriculado en la modalidad de Ciencias y Tecnología tiene un valor aproximado de 0.4772.

- b) Nos piden calcular $P(M/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)P(C/M)}{P(C)} = \frac{0.537 \cdot 0.436}{0.4772} \approx \boxed{0.4906}$$

Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, la probabilidad de que sea mujer tiene un valor aproximado de 0.4906.

C1.

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3 : $M = (1 \ 2 \ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^t = 9$ (siendo M^t la matriz traspuesta de M).

$$M \cdot M^t = 9 \Rightarrow (1 \ 2 \ m) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} = 9 \Rightarrow 1 + 4 + m^2 = 9 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

C2.

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Comprobamos si la función corta el eje OX entre -1 y 2 .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 9 \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(9)}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \notin (-1, 2)$$

La función no corta el eje OX en el intervalo $(-1, 2)$. Como $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ la función es positiva en el intervalo $(-1, 2)$.

El valor del área del recinto limitado por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$, es la integral definida entre -1 y 2 de la función.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^2 x^2 - 6x + 9 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) \right] = \frac{8}{3} - 12 + 18 + \frac{1}{3} + 3 + 9 = \boxed{21u^2} \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$ tiene un valor de 21 unidades cuadradas.

C3.

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$.

$$P(A \cup B) = 0.8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow 1 - P(\bar{A}) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0.3 + P(B) - 0.2 = 0.8 \Rightarrow P(B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

EBAU Extraordinaria 2023

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .
- Resolver el sistema para $a = -1$.

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.
- Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Determinar el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1,10]$, dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

- Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

Llamamos x = unidades del formato S, y = unidades del formato L.

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 3000x + 2500y$$

Las restricciones son:

“La cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades”
 $\rightarrow x + y \leq 70$

“La tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales” $\rightarrow$
 $y \geq \frac{x+y}{5}$

“Sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L” $\rightarrow$
 $y \leq 40$

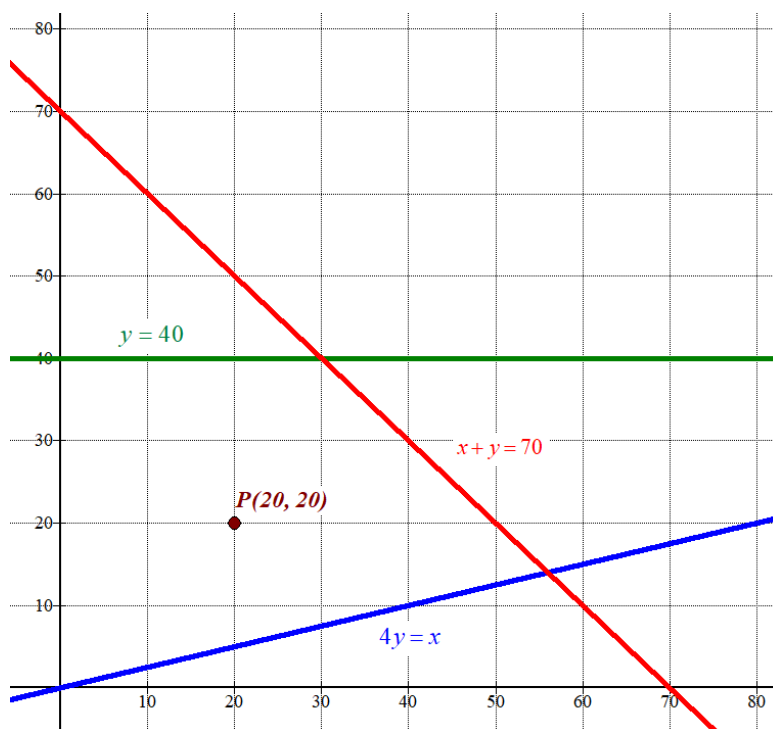
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ y \geq \frac{x+y}{5} \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 5y \geq x + y \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 4y \geq x \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 70$		$4y = x$		$y = 40$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 70 - x$	x	$y = \frac{x}{4}$	x	$y = 40$	
0	70	0	0	20	40	
56	14	56	14	90	40	
70	0	80	20			



Como las restricciones del problema son

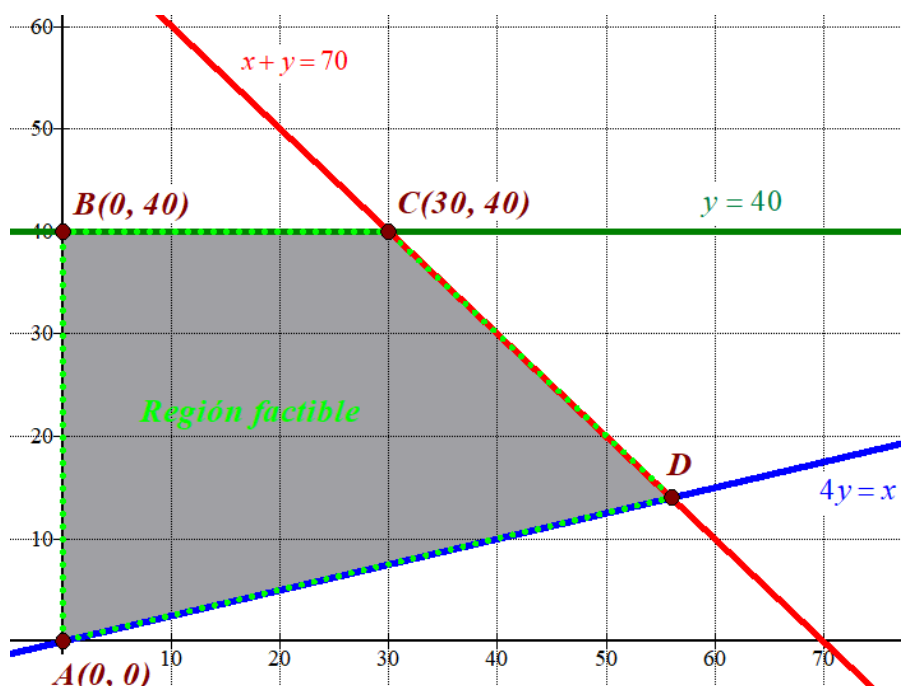
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 4y \geq x \\ y \leq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de la recta verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 20 \leq 70 \\ 4 \cdot 20 \geq 20 \\ 20 \leq 40 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 70 \\ 4y = x \end{array} \right\} \Rightarrow 4y + y = 70 \Rightarrow 5y = 70 \Rightarrow y = \frac{70}{5} = 14 \Rightarrow x = 4 \cdot 14 = 56 \Rightarrow \boxed{D(56, 14)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 40); C(30, 40) y D(56, 14).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 3000x + 2500y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 100000 = 100.000$$

$$C(30, 40) \rightarrow B(30, 40) = 90000 + 100000 = 190.000$$

$$D(56, 14) \rightarrow B(56, 14) = 3000 \cdot 56 + 2500 \cdot 14 = 203.000 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice D(56, 14). Se deben repartir 56 unidades de formato S y 14 unidades de formato L para obtener un beneficio máximo.

El beneficio máximo que se puede obtener es de 203.000 euros.

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .
 b) Resolver el sistema para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 0 + 1 + 1 - 0 - 1 = 1 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso la matriz A tiene determinante no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3.

Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1}^{A/B} & & \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -2}_A & & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Como son distintos el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = -1$ el sistema tiene una única solución.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - z - y + z = 0 \\ 1 - z + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -1 \rightarrow \boxed{y = 1} \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2z = -1 \Rightarrow -2z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{-2} = 1} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 1 = 0}$$

La solución del sistema es $x = 0, y = 1, z = 1$.

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.
- Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

a) Usamos la derivada.

$$C(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x} = 2x + 720 + 80000x^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = 2 - \frac{80000}{x^2} \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - \frac{80000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{80000}{x^2} = 2 \Rightarrow 80000 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40000 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{40000} = 200}$$

Solo tomamos el valor positivo de la raíz pues el dominio de la función es $x > 0$.

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 200$.

- En el intervalo $[0, 200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $C'(100) = 2 - \frac{80000}{100^2} = -6 < 0$.

La función decrece en $[0, 200)$.

- En el intervalo $(200, +\infty)$ tomamos $x = 300$ y la derivada vale

$$C'(300) = 2 - \frac{80000}{300^2} = \frac{10}{9} > 0. \text{ La función crece en } (200, +\infty).$$

Los costes decrecen entre 0 y 200 toneladas y crecen a partir de 200 toneladas.

- En $x = 200$ hay un mínimo relativo, pues la función decrece antes de $x = 200$ y crece después de este valor. Este mínimo relativo es absoluto.

Como $C(200) = 400 + 720 + \frac{80000}{200} = 1520$ tenemos que el coste mínimo se consigue con la producción de 200 toneladas y dicho coste mínimo es de 1520 miles de euros.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
 b) Determinar el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1,10]$, dibujando el recinto correspondiente.

a) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es $f(x) = 6x-1$ que es continua (un trozo de recta).

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{1}{x}$ que es continua pues su denominador se anula en $x = 0 \notin (0, +\infty)$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Comprobamos si es continua en el cambio de definición ($x = 0$).

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 6x-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 0$.

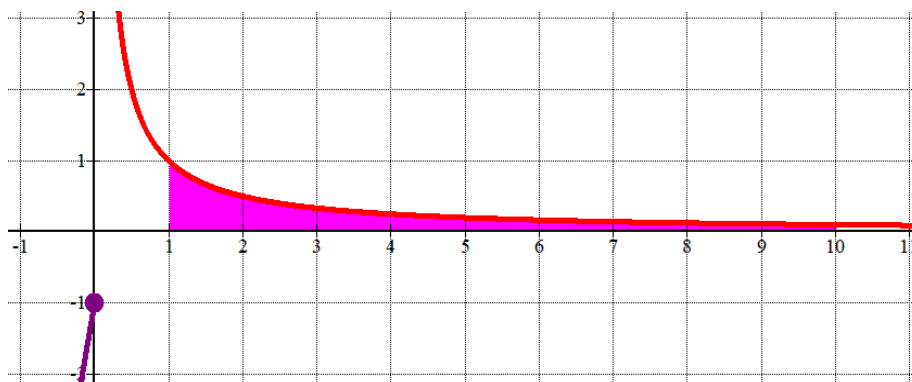
b) En el intervalo $[1,10]$ la función es $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vemos si la gráfica corta el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Como la gráfica no corta el eje de abscisas el área del recinto es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 10.

$$\text{Área} = \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \boxed{\ln 10 \approx 2.3 \text{ u}^2}$$



P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

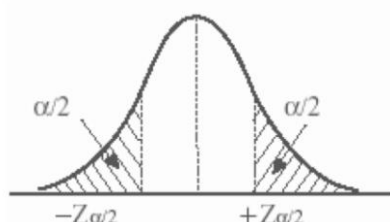
- a) Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
 b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

- a) X = La recaudación diaria de una tienda de deportes. $X = N(\mu, 328)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 1248$

Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}} = 84.46 \text{ €}$$

El error es de 84.46 euros.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1248 - 84.46, 1248 + 84.46) = (1163.54, 1332.46)$$

- b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 127 = 1.96 \cdot \frac{328}{\sqrt{n}} \Rightarrow 127\sqrt{n} = 1.96 \cdot 328 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 328}{127} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 328}{127} \right)^2 \approx 25.62$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra cumpliendo lo pedido es de 26 tiendas de esta marca.

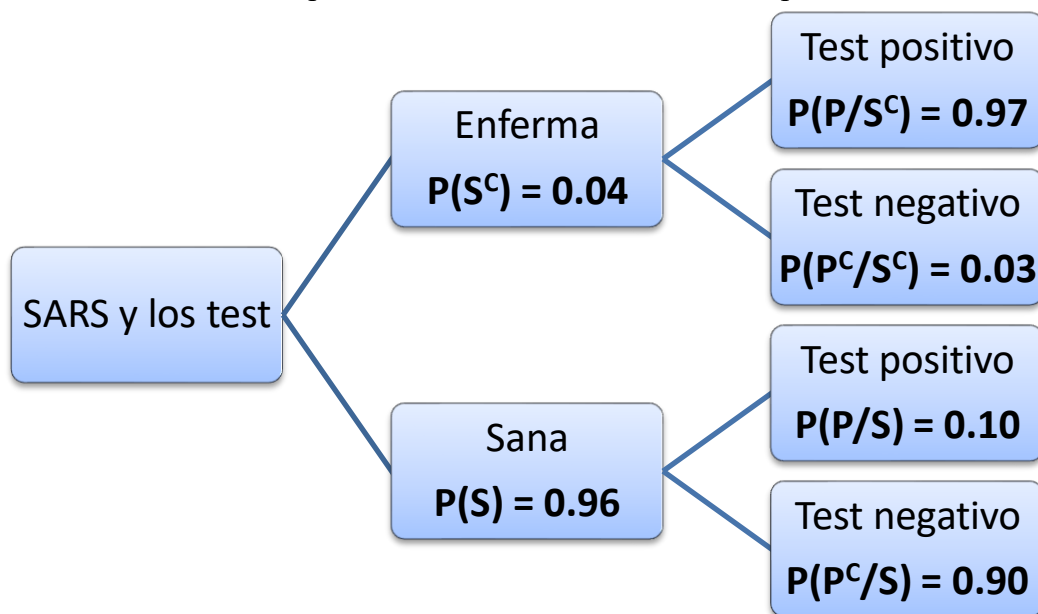
P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Realizamos un diagrama de árbol.

Llamamos S al suceso “La persona está sana”, P al suceso “Dar positivo en el test”.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(S^c)P(P/S^c) + P(S)P(P/S) = 0.04 \cdot 0.97 + 0.96 \cdot 0.10 = \boxed{0.1348}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^c/P) = \frac{P(P \cap S^c)}{P(P)} = \frac{P(S^c)P(P/S^c)}{P(P)} = \frac{0.04 \cdot 0.97}{0.1348} = \boxed{\frac{97}{337} \approx 0.2878}$$

C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

Para que el rango sea 1 las dos filas deben tener valores proporcionales.

$$\frac{a}{-2} = \frac{4}{b} = \frac{1}{4} = \frac{8}{c} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{8}{c} \rightarrow \boxed{c=32} \\ \frac{1}{4} = \frac{4}{b} \rightarrow \boxed{b=16} \\ \frac{1}{4} = \frac{a}{-2} \rightarrow -2 = 4a \rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{2}$, $b = 16$, $c = 32$.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

El logaritmo neperiano solo existe de números positivos.

El dominio son todos los valores que hacen positiva la expresión $x^2 - 4$.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y el valor de la función es $f(-3) = \ln((-3)^2 - 4) = \ln(5)$. La función existe en el intervalo $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y el valor de la función es $f(0) = \ln(0^2 - 4) = \ln(-4) = \text{No existe}$. La función no existe en el intervalo $(-2, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y el valor de la función es $f(3) = \ln(3^2 - 4) = \ln 5$. La función existe en el intervalo $(2, +\infty)$.
- En los valores $x = -2$ y $x = 2$ la función no existe pues el logaritmo neperiano de 0 no existe.

El dominio de definición de la función es $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

Llamamos A al suceso “Llega antes del anochecer el equipo que procede de la localidad A” y B al suceso “Llega antes del anochecer el equipo que procede de la localidad B”.

Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

Como son independientes los sucesos tenemos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.7 + 0.4 - 0.7 \cdot 0.4 = \boxed{0.82}$$

La probabilidad de que al menos uno de los equipos llegue antes del anochecer es de 0.82.

EBAU Ordinaria 2023

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$.
- Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$.

P3. (Análisis)

Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo (en horas).

- ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?
- ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$, dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

- Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.
- Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

- ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?
- Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$? Justifica la respuesta.

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

SOLUCIONES**P1. (Números y álgebra)**

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

Es un problema resoluble con sistema de ecuaciones.

Llamamos “x” al precio de la entrada al teatro, “y” al precio de la entrada al baloncesto, “z” al precio de la entrada al concierto.

“Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas” →

$$0.90(x + y + z) = 117$$

“El precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro” → $z = 2x$

“La entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto” →

$$z = 20 + y$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.90(x + y + z) = 117 \\ z = 2x \\ z = 20 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = \frac{117}{0.9} = 130 \\ \frac{z}{2} = x \\ z - 20 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{z}{2} + z - 20 + z = 130 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 2z - 40 + 2z = 260 \Rightarrow 5z = 300 \Rightarrow z = \frac{300}{5} = 60 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{60}{2} = 30 \\ y = 60 - 20 = 40 \end{cases}$$

La entrada al teatro cuesta 30 euros, al baloncesto cuesta 40 y al concierto cuesta 60 euros.

P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$.

b) Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$.

a)

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+4a & 2b+2a \\ -1+4+a & -b+2+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+4a = -2 \\ 2b+2a = 2 \\ 3+a = 2 \\ 2-b+3a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ b+a = 1 \\ a = -1 \\ -b+3a = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-4}{4} = -1 \\ b+a = 1 \\ \boxed{a = -1} \\ -b+3a = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-1 = 1 \\ -b+3(-1) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 2} \\ -b-3 = -5 \rightarrow 2 = b \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 2$.

b) Para $a = 2$ y $b = 4$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculamos la expresión de la matriz X .

$$X = A \cdot B + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+8 & 8+4 \\ -1+4+2 & -4+2+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}} = X$$

P3. (Análisis)

Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo (en horas).

- a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?
 b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

a) Nos piden $f(3)$.

$$f(3) = -32 \cdot 3^2 + 352 \cdot 3 - 568 = 200$$

En la tercera hora la potencia desarrollada es de 200 vatios.

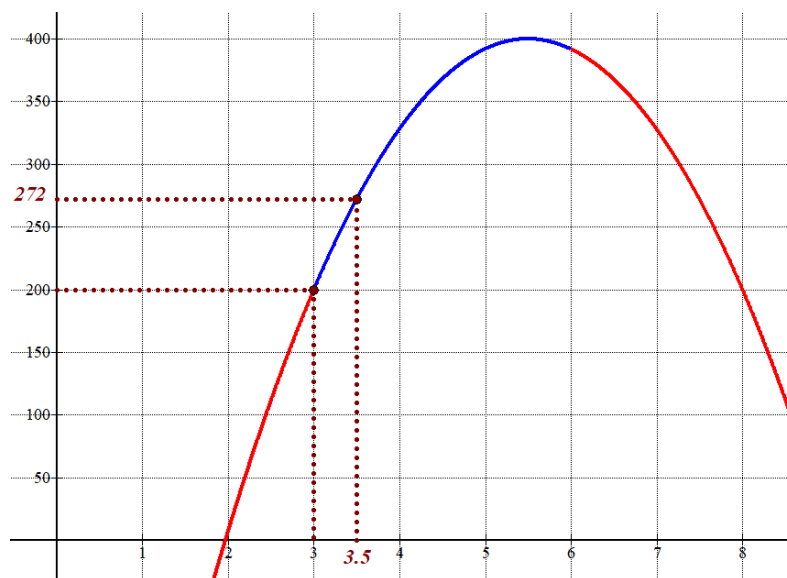
Averiguamos cuando la potencia es igual a 272.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = -32t^2 + 352t - 568 \\ f(t) = 272 \end{array} \right\} \Rightarrow -32t^2 + 352t - 568 = 272 \Rightarrow -32t^2 + 352t - 840 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4t^2 + 44t - 105 = 0 \Rightarrow t = \frac{-44 \pm \sqrt{44^2 - 4(-4)(-105)}}{-8} = \frac{-44 \pm 16}{-8} = \begin{cases} \frac{-44+16}{-8} = 3.5 = t \\ \frac{-44-16}{-8} = 7.5 = t \end{cases}$$

Como empieza con una potencia de 200 vatios (menor de 272) y la función es una parábola podemos afirmar que está con una potencia inferior a 272 vatios entre las 3 horas y las 3 horas y media. A partir de ese momento la potencia supera los 272 vatios hasta las 7 horas y media que no se contemplan en el entrenamiento.

Desde las 3 horas hasta las 3.5 horas está con una potencia inferior a 272 vatios.



b) Usamos la derivada.

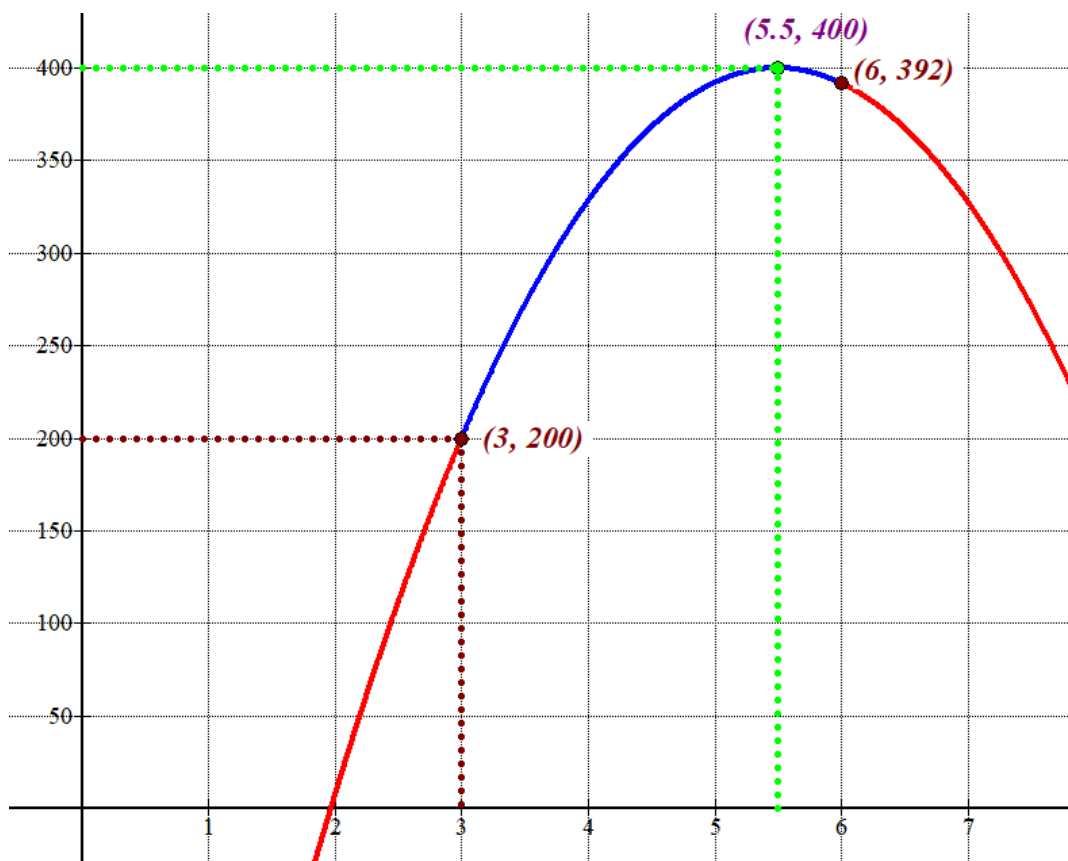
$$f(t) = -32t^2 + 352t - 568 \Rightarrow f'(t) = -64t + 352$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -64t + 352 = 0 \Rightarrow 64t = 352 \Rightarrow t = \frac{352}{64} = 5.5$$

$$f''(t) = -64 \Rightarrow f''(5.5) = -64 < 0$$

A las 5 horas y media se anula la derivada primera y la derivada segunda es negativa, por lo que a esa hora hay un máximo valor de la potencia.

Como $f(5.5) = -32 \cdot 5.5^2 + 352 \cdot 5.5 - 568 = 400$. La máxima potencia que alcanza es de 400 vatios.



P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
 b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$, dibujando el recinto correspondiente.

a) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^2$ que es continua (un trozo de parábola).

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ que es continua pues su denominador se anula en $x = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty)$.

Comprobamos si es continua en el cambio de definición ($x = 1$).

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$. No tiene puntos de discontinuidad.

b) En el intervalo $[0,1]$ la función queda $f(x) = x^2$.

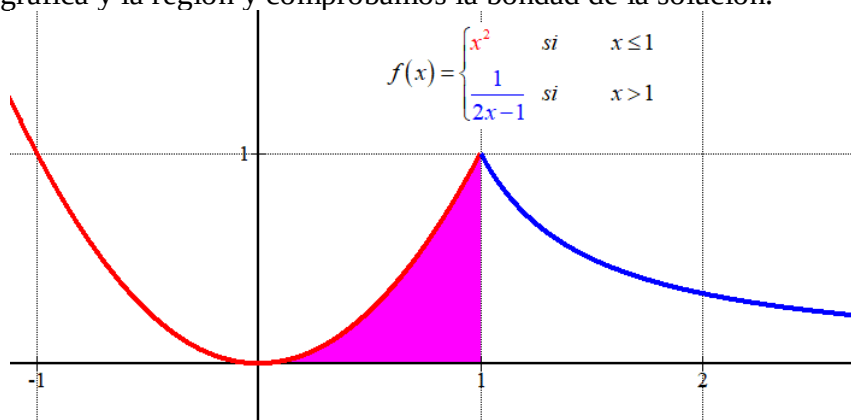
Vemos si la gráfica corta el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como la gráfica solo corta el eje en un extremo del intervalo el área del recinto es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\text{Área} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \left[\frac{1}{3} u^2 \right]$$

Dibujamos la gráfica y la región y comprobamos la bondad de la solución.



P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

- Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.
- Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

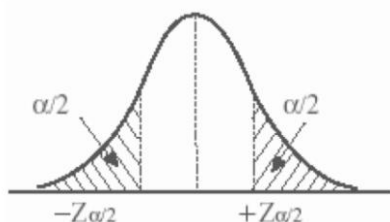
- a) $X = \text{Precio del litro de gasolina. } X = N(\mu, 0.05)$

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{1.612 + 1.739 + 1.625 + 1.771 + 1.642 + 1.713 + 1.705 + 1.654 + 1.632 + 1.647}{10} = 1.674$$

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{10}} \approx 0.031$$

El error es de 0.031 euros.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1.674 - 0.031, 1.674 + 0.031) = (1.643, 1.705)$$

- b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.02 = 2.575 \cdot \frac{0.05}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.02\sqrt{n} = 2.575 \cdot 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 0.05}{0.02} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 0.05}{0.02} \right)^2 \approx 41.44$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra cumpliendo lo pedido es de 42 estaciones de servicio.

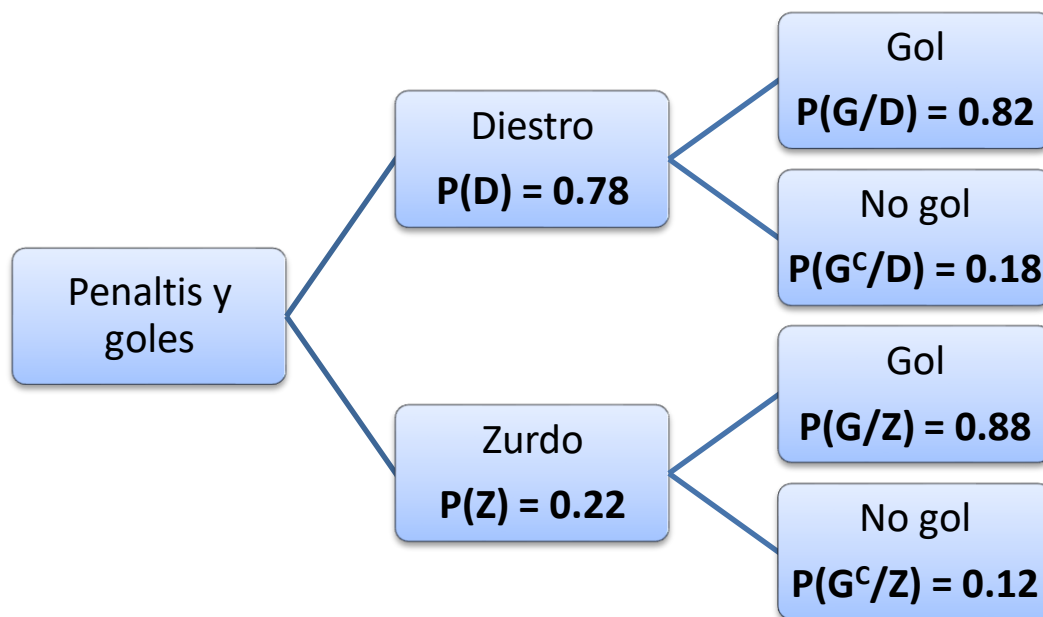
P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?
 b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

Realizamos un diagrama de árbol.

Llamamos D al suceso “ser lanzador de penalti Diestro”, Z al suceso “ser lanzador de penalti Zurdo” y G al suceso “marcar Gol”.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(D)P(G/D) + P(Z)P(G/Z) = 0.78 \cdot 0.82 + 0.22 \cdot 0.88 = \boxed{0.8332}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(Z/G^c) = \frac{P(Z \cap G^c)}{P(G^c)} = \frac{P(Z)P(G^c/Z)}{1 - P(G)} = \frac{0.22 \cdot 0.12}{1 - 0.8332} = \boxed{\frac{22}{139} \approx 0.1583}$$

C1. (Números y álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado

Triangulamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 3x & -3y & -3z & = 0 \\ -3x & +3y & +3z & = 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x & -y & -z & = 0 \\ -x & -y & -z & = 0 \\ \hline 0 & -2y & -2z & = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado.

OTRA FORMA DE RAZONARLO.

El sistema es compatible pues es un sistema homogéneo (término independiente = 0). Y como la tercera ecuación es proporcional a la 2ª el sistema se compone de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Es compatible indeterminado (más incógnitas que ecuaciones)

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$? Justifica la respuesta.

Su dominio son todos los valores que hacen el radicando positivo.

Vemos cuando se anula el radicando y después en que intervalos es positivo y existe la función.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y el valor de la función es $f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{3}$. La función existe en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y el valor de la función es $f(0) = \sqrt{0^2 - 1} = \sqrt{-1} = \text{no existe}$. La función no existe en el intervalo $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y el valor de la función es $f(2) = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. La función existe en el intervalo $(1, +\infty)$.

El dominio de definición de la función es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

El año tiene 365 días. Determinamos la probabilidad de que no coincidan ninguno de los tres cumpleaños. Para ello la primera de las amigas puede cumplir años cualquier día del año, la segunda amiga solo podría cumplir años en uno de los 364 días restantes y la tercera amiga debería cumplir años en uno de los 363 días que restan del año.

$$P(\text{Cumpleaños no coincidentes}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 0.9918$$

La probabilidad de que coincida alguno de sus cumpleaños será $1 - 0.9918 = 0.0082$.

EBAU Extraordinaria 2022

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
- Resolver el sistema para $a = 0$.

P3. (Análisis)

El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno

de 8 horas, se puede expresar por la función: $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -t + a & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$

donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

- Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?

- b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

P4. (Análisis)

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2000$ con $0 \leq x < 24$, donde x indica la hora del día.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.
b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

P5. (Estadística y probabilidad)

Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus seguros se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1.5 % de los contratados para B y el 3.5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar,

- a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.
b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

P6. (Estadística y probabilidad)

La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2.25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide

- a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.
b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0.1 kilómetros?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de ± 3.2 % fijada una confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)

Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Llamamos x = número de figuras a imprimir, y = número de fichas a imprimir.

Hacemos una tabla para establecer mejor las restricciones.

	Horas primera impresora	Horas segunda impresora	Beneficio
Nº figuras (x)	$6x$	$2x$	x
Nº fichas (y)	$5y$	$5y$	$1.5y$
TOTAL	$6x + 5y$	$2x + 5y$	$x + 1.5y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x, y) = x + 1.5y$$

Las restricciones son:

“La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas” $\rightarrow 6x + 5y \leq 300$

“La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas” $\rightarrow 2x + 5y \leq 200$

“El número máximo de figuras ha de ser 25” $\rightarrow x \leq 25$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 300 \\ 2x + 5y \leq 200 \\ x \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$6x + 5y = 300$$

x	$y = \frac{300 - 6x}{5}$
0	60
25	30
50	0

$$2x + 5y = 200$$

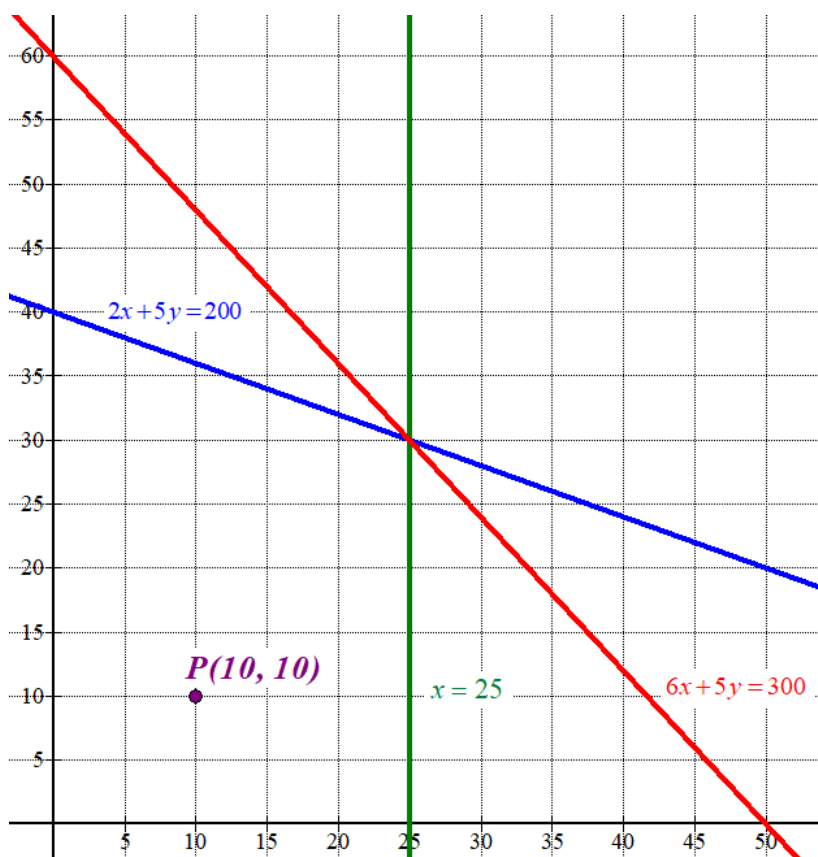
x	$y = \frac{200 - 2x}{5}$
0	40
25	30

$$x = 25$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Recta
vertical

Primer
cuadrante



Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 300 \\ 2x + 5y \leq 200 \\ x \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60 + 50 \leq 300 \\ 20 + 50 \leq 200 \\ 10 \leq 25 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 40); C(25, 30) y D(25, 0).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = x + 1.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 60 = 60$$

$$C(25, 30) \rightarrow B(25, 30) = 25 + 45 = 70 \text{ ;Máximo!}$$

$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 25 + 0 = 25$$

El máximo beneficio es de 70 € y se produce en el vértice C (25, 30) que significa imprimir 25 figuras y 30 fichas.

El beneficio máximo es de 70 €.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :
$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
b) Resolver el sistema para $a = 0$.

a) Transformamos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{Ecuación 1^a \leftrightarrow Ecuación 3^a\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + az = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación 2^a - 5 \cdot Ecuación 1^a \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \\ \hline -2y + 8z = -3 \rightarrow Nueva ecuación 2^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} Ecuación 3^a - 3 \cdot Ecuación 1^a \\ 3x + 2y + az = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \\ \hline -y + (a+3)z = -2 \rightarrow Nueva ecuación 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = -3 \\ -y + (a+3)z = -2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot Ecuación 3^a - Ecuación 2^a \\ -2y + (2a+6)z = -4 \\ 2y - 8z = 3 \\ \hline (2a-2)z = -1 \rightarrow Nueva ecuación 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = -3 \\ (2a-2)z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La compatibilidad del sistema depende del valor de “a”.

$$2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Se plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$.

En este caso el sistema es compatible determinado y se puede resolver teniendo una única solución.

CASO 2. Si $a = 1$.

Vemos como queda el sistema equivalente obtenido:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = -3 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Queda un sistema incompatible (sin solución) pues una de las igualdades es imposible.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

- b) Si $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \\ -2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+8z=-3 \\ \boxed{z=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-\frac{1}{2}=1 \\ -2y+8\frac{1}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1+\frac{1}{2} \\ -2y+4=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ -2y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{2} \\ \boxed{y=\frac{7}{2}} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{7}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-2}$$

La solución es $x = -2$; $y = \frac{7}{2}$; $z = \frac{1}{2}$

P3. (Análisis)

El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno

de 8 horas, se puede expresar por la función: $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -t + a & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$

donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

- a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. ¿A partir de la segunda hora cuánto cambia el consumo por cada hora que pasa?
- b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

- a) La función debe ser continua en $t = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} -t^2 + 6t + 3 = -2^2 + 12 + 3 = 11 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} -t + a = -2 + a \\ f(2) &= 11 \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 + a = 11 \Rightarrow \boxed{a = 13}$$

El valor buscado es $a = 13$.

A partir de la segunda hora ($t = 2$) la función consumo es lineal con pendiente $m = -1$, por lo que por cada hora que pasa el consumo disminuye una unidad (1 litro/hora).

Para $t = 3$ el consumo es $P(3) = -3 + 13 = 10$ y $P(4) = -4 + 13 = 9$. Disminuye el consumo 1 litro/hora como se ha indicado.

- b) Estudiamos la variación del consumo en cada intervalo de definición.

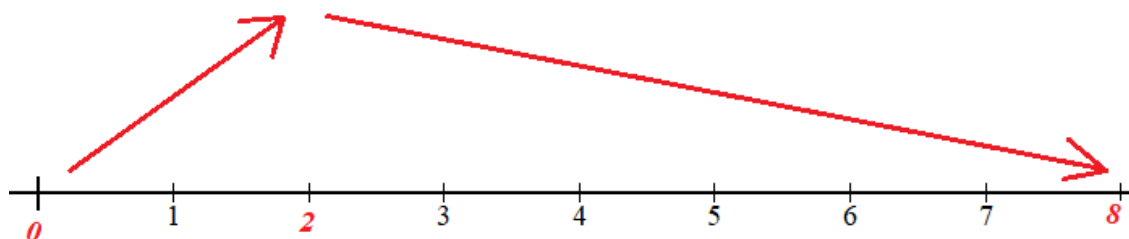
$$\begin{aligned} \text{si } 0 \leq t \leq 2 &\rightarrow f(t) = -t^2 + 6t + 3 \Rightarrow f'(t) = -2t + 6 \\ f'(t) = 0 &\Rightarrow -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3 \notin [0, 2] \end{aligned}$$

Como el extremo de la parábola no pertenece al intervalo de definición la función es creciente o decreciente en $[0, 2]$. Como $f'(1) = -2 + 6 = 4 > 0$ la función es creciente en $[0, 2]$.

$$\text{si } 2 < t \leq 8 \rightarrow f(t) = -t + 13 \Rightarrow f'(t) = -1$$

Como la derivada siempre es negativa la función es decreciente en $(2, 8]$.

La función sigue el esquema siguiente:



El máximo consumo se produce a las 2 horas.

Como $f(2) = 11$, el consumo en dicho momento es de 11 litros/hora.

Para averiguar en que periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora averiguamos cuando el consumo es de 8 litros/hora y por la evolución del consumo se superará entre esos dos valores que obtengamos.

$$f(t)=8 \Rightarrow \begin{cases} -t^2+6t+3=8 \rightarrow -t^2+6t-5=0 \rightarrow t=\frac{-6 \pm \sqrt{6^2-20}}{-2} = \begin{cases} \frac{-6+4}{-2} = \boxed{1=t} \\ \frac{-6-4}{-2} = 5 \notin [0,2] \end{cases} \\ -t+13=8 \rightarrow \boxed{t=5} \end{cases}$$

El consumo supera los 8 litros/hora entre la primera hora y la quinta.

P4. (Análisis)

El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2000$ con $0 \leq x < 24$, donde x indica la hora del día.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.
 b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

- a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$N'(x) = -6x^2 + 150x - 600$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 150x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 400}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{25+15}{2} = 20 = x \\ \frac{25-15}{2} = 5 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0, 5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $N'(1) = -6 + 150 - 600 = -456 < 0$. La función decrece en $(0, 5)$.
- En el intervalo $(5, 20)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $N'(10) = -600 + 1500 - 600 = 300 > 0$. La función crece en $(5, 20)$.
- En el intervalo $(20, 24)$ tomamos $x = 22$ y la derivada vale $N'(22) = -6 \cdot 22^2 + 150 \cdot 22 - 600 = -204 < 0$. La función decrece en $(20, 24)$.

El número de usuarios decrece durante las primeras cinco horas y también entre las 20 y las 24 horas. Crece en las horas centrales, entre la hora 5 y la hora 20.

- b) Por la evolución del número de usuarios en la hora 5 hay un mínimo relativo y en la hora 20 hay un máximo relativo. Valoramos el número de usuarios en estas horas intermedias y en los extremos del intervalo $[0, 24)$ para decidir cuándo se produce el máximo y mínimo absolutos.

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= 2000 \\ N(5) &= -2 \cdot 5^3 + 75 \cdot 5^2 - 600 \cdot 5 + 2000 = 625 \text{ ¡Mínimo!} \\ N(20) &= -2 \cdot 20^3 + 75 \cdot 20^2 - 600 \cdot 20 + 2000 = 4000 \text{ ¡Máximo!} \\ N(24) &= -2 \cdot 24^3 + 75 \cdot 24^2 - 600 \cdot 24 + 2000 = 3152 \end{aligned} \right\}$$

El número máximo de usuarios es de 4000 y se produce en la hora 5 y el mínimo es de 625 y se produce a la hora 20.

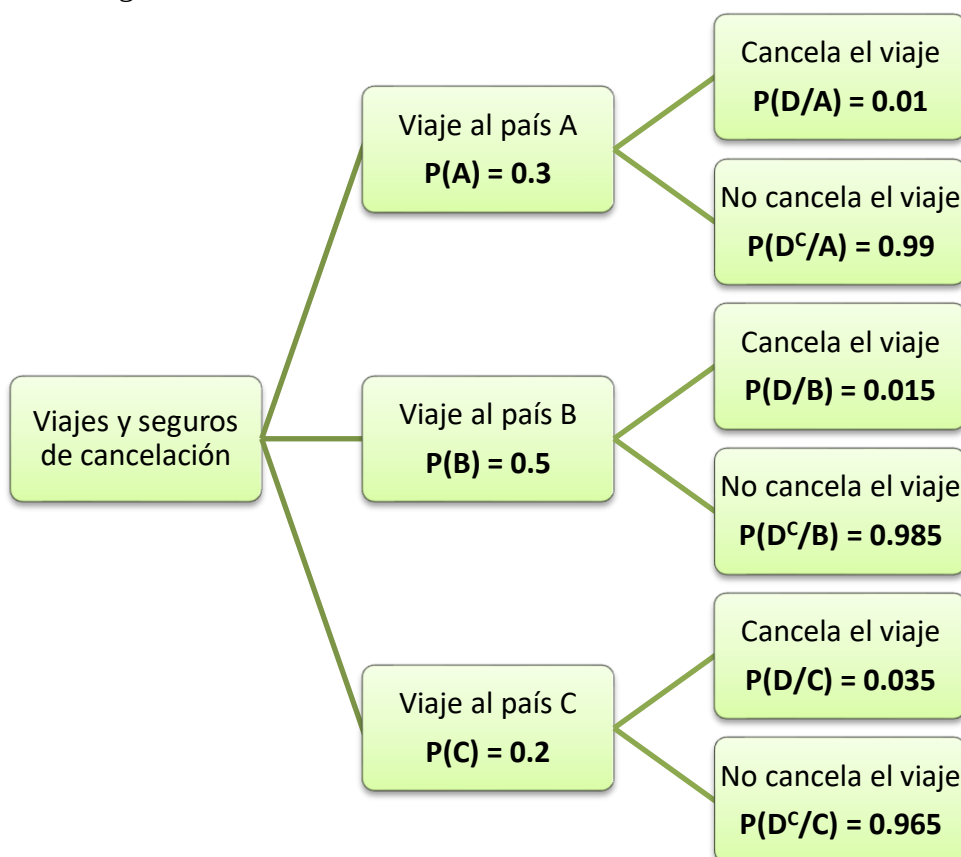
P5. (Estadística y probabilidad)

Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus seguros se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1.5 % de los contratados para B y el 3.5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar,

- Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.
- Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

Llamamos A “Viajar al país A”, B = “Viajar al país B”, C = “Viajar al país C” y D = “Cancelar un viaje”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.015 + 0.2 \cdot 0.035 = \boxed{0.0175}
 \end{aligned}$$

- Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.035}{0.0175} = \boxed{0.4}$$

P6. (Estadística y probabilidad)

La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2.25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide

- a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.
 b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0.1 kilómetros?

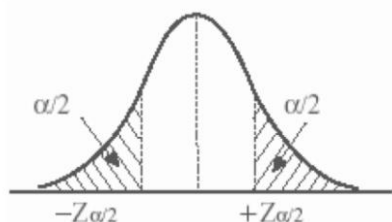
X = La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad (en km)

Como la varianza es 2.25 la desviación típica es $\sqrt{2.25} = 1.5$. $X = N(\mu, 1.5)$

Tamaño muestra = $n = 100$. Media muestral = $\bar{x} = 4$.

- a) Con un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9782	0,9786	0,9790	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Utilizamos la fórmula del error.

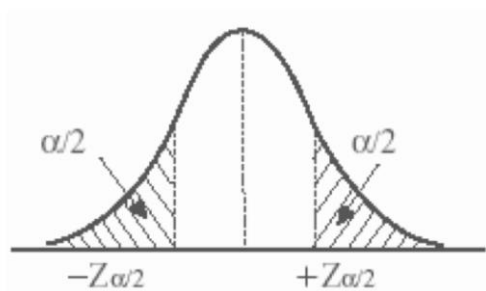
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 0.30825$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4 - 0.30825, 4 + 0.30825) = (3.69175, 4.30825)$$

- b) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea 0.1.
Utilizamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 1.96 \cdot 1.5 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 1.5}{0.1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 1.5}{0.1} \right)^2 = 864.36 \end{aligned}$$

Como n debe ser entero y superior al “ n ” hallado el tamaño mínimo es de 865 estudiantes.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

Si la matriz A es de dimensión $m \times n$ tenemos que
$$A \cdot B \cdot C \xrightarrow{m \times [n \cdot 4] \times 3} m \times 3.$$

Para poderse realizar el producto debe ser $n = 4$ y como el resultado debe ser una matriz 2×3 y obtenemos una matriz de dimensiones $m \times 3$ se debe cumplir que $m = 2$.

La matriz A es de dimensiones 2×4 .

C2. (Análisis)

Dada $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

Si tiene un extremo debe de anularse la derivada, es decir, $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{5x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot 5x - 5(ax^2 + 1)}{(5x)^2} = \frac{10ax^2 - 5ax^2 - 5}{(5x)^2} = \frac{5ax^2 - 5}{(5x)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{5ax^2 - 5}{(5x)^2} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5a - 5}{(5)^2} = 0 \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Debe ser $a = 1$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatorio simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al *partido K* es de $\pm 3.2\%$ fijada una confianza del 95.5% .

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Población: Residentes en Castilla y León con derecho a voto.

Diseño muestral: Muestreo aleatorio simple.

Tamaño muestral: $n = 1000$

Parámetro estimado: Proporción de la población que vota al partido K.

EBAU Ordinaria 2022

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)**P1. (Números y álgebra)**

Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = (4 \quad -1)$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

- Sea A^T la matriz traspuesta de A , indicar razonadamente cuáles de los productos de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.
- Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

P3. (Análisis)

Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la

función $f(t) = \frac{t^2 + 15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

- ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?

- b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?
- c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

P4. (Análisis)

Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \leq x \leq 60$ pasa por el punto $(0, 20)$ y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide

- a) Determinar a , b y c . Justificar la respuesta.
- b) Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

P5. (Estadística y probabilidad)

Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autónomas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autónomas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León.

- a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.
- b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente a Castilla y León?

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

- a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?
- b) Si se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B .

C2. (Análisis)

Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x) = -x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.

C3. (Estadística y probabilidad)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B) = \frac{3}{5}$; $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular $P(A \cap B)$

SOLUCIONES**P1. (Números y álgebra)**

Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

Es un problema resoluble con sistema de ecuaciones.

Llamamos “x” a los kilos de maíz, “y” a los kilos de trigo, “z” a los kilos de centeno.

Realizamos una tabla para ordenar los datos.

	Horas de trabajo	Minutos de riego
Kilos de maíz (x)	2x	6x
Kilos de trigo (y)	4y	4y
Kilos de centeno (z)	z	4z
TOTAL	2x + 4y + z	6x + 4y + 4z

Como deben producirse 12 kilos en total $\rightarrow x + y + z = 12$

Trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno $\rightarrow 2x + 4y + z = 3 \cdot 8$

Se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios $\rightarrow 6x + 4y + 4z = 60$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 3x + 2y + 2z = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 4y + z = 24 \\ -2x - 2y - 2z = -24 \\ \hline 0 \quad 2y - z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x + 2y + 2z = 30 \\ -3x - 3y - 3z = -36 \\ \hline 0 \quad -y - z = -6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -y - z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -2y - 2z = -12 \\ 2y - z = 0 \\ \hline 0 \quad -3z = -12 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -3z = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ z = \frac{-12}{-3} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 4 = 12 \\ 2y - 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 4 = 12 \\ 2y = 4 \rightarrow y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 + 4 = 12 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Se producen 6 kilos de maíz, 2 de trigo y 4 de centeno.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = (4 \quad -1)$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

- a) Sea A^T la matriz traspuesta de A , indicar razonadamente cuáles de los productos de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.
b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

a) ¿ $A \cdot B$?

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ | & | \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 2 \rightarrow 3 \times 2$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 3 filas y 2 columnas.

¿ $B \cdot A^T$?

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 2 filas y 3 columnas.

¿ $C \cdot D$?

$$C \cdot D = (4 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = (\boxed{} \quad \boxed{})$$

$$1 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 2 \longrightarrow 1 \times 2$$

Si es posible este producto y el resultado es una matriz con 1 fila y 2 columnas.

¿ $D \cdot A$?

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 3} \times 2$$

No es posible

- b) La matriz B tiene inversa pues su determinante es no nulo.
La hallamos y la usamos para resolver la ecuación matricial

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de } B$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{7} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$X \cdot B = D \Rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = D \cdot B^{-1} \Rightarrow X = D \cdot B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3+10 & 2+5 \\ 18-4 & -12-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

P3. (Análisis)

Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función

$f(t) = \frac{t^2 + 15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2005.

- ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?
- Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados, ¿En qué año se alcanza ese mínimo?
- Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

a) Nos piden $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0^2 + 15}{(0+1)^2} = 15$$

En el año 2005 había 15 millones de aparatos móviles hackeados.

b) Usamos la derivada.

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{t^2 + 15}{(t+1)^2} &\Rightarrow f'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - 2(t+1)(t^2 + 15)}{(t+1)^4} = \frac{(t+1)[2t(t+1) - 2(t^2 + 15)]}{(t+1)^4} = \\ &= \frac{(t+1)[\cancel{2t^2} + 2t - \cancel{2t^2} - 30]}{(t+1)^4} = \frac{2t - 30}{(t+1)^3} \end{aligned}$$

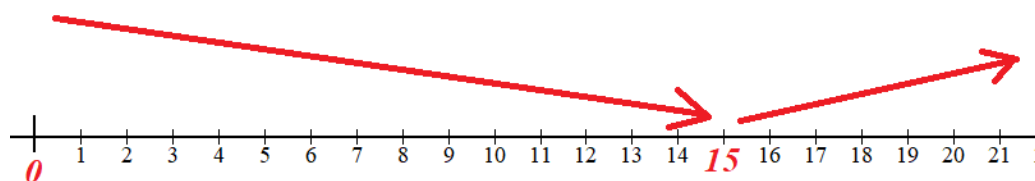
$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t - 30}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow 2t - 30 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{30}{2} = 15}$$

Como el dominio de la función es $(0, +\infty)$ comprobamos el cambio de signo de la derivada entre 0 y 15 y después de 15.

En el intervalo $(0, 15)$ tomamos $t = 5$ y la derivada es $f'(5) = \frac{10 - 30}{(5+1)^3} = -\frac{20}{6^3} < 0$. La función decrece en $(0, 15)$.

En el intervalo $(15, +\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada es $f'(20) = \frac{40 - 30}{(20+1)^3} = \frac{10}{21^3} > 0$. La función crece en $(15, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



Por lo que la función presenta un mínimo en $t = 15$, siendo el valor de la función

$$f(15) = \frac{15^2 + 15}{(15+1)^2} = 0.9375.$$

El número mínimo de dispositivos hackeados es de 937500 y se produce en el año 2020.

c) Nos piden calcular el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 15}{(t+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 15}{t^2 + 1 + 2t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2} + \frac{15}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{2t}{t^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{15}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1$$

A largo plazo el número de dispositivos hackeados será de un millón.

P4. (Análisis)

Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \leq x \leq 60$ pasa por el punto $(0, 20)$ y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide

a) Determinar a , b y c . Justificar la respuesta.

b) Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

a) La función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \leq x \leq 60$ pasa por el punto $(0, 20)$ significa que

$$f(0) = 20 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 20 \Rightarrow \boxed{c = 20}.$$

Alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$ significa dos cosas, la primera que $f(40) = 36$ y la segunda que $f'(40) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(40) = 36 \\ f(x) = ax^2 + bx + 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 36 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + 20 \Rightarrow 1600a + 40b = 16 \Rightarrow 200a + 5b = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(40) = 0 \\ f'(x) = 2ax + b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a \cdot 40 + b \Rightarrow 80a + b = 0 \Rightarrow b = -80a$$

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 200a + 5b = 2 \\ b = -80a \end{array} \right\} \Rightarrow 200a + 5(-80a) = 2 \Rightarrow 200a - 400a = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -200a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-200} = -\frac{1}{100}} \Rightarrow \boxed{b = -80 \left(-\frac{1}{100} \right) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}}$$

Los valores son $a = -\frac{1}{100}$; $b = \frac{4}{5}$; $c = 20$

b) La función queda $f(x) = \frac{-1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20$.

Vemos si la gráfica corta el eje de abscisas ($y = 0$).

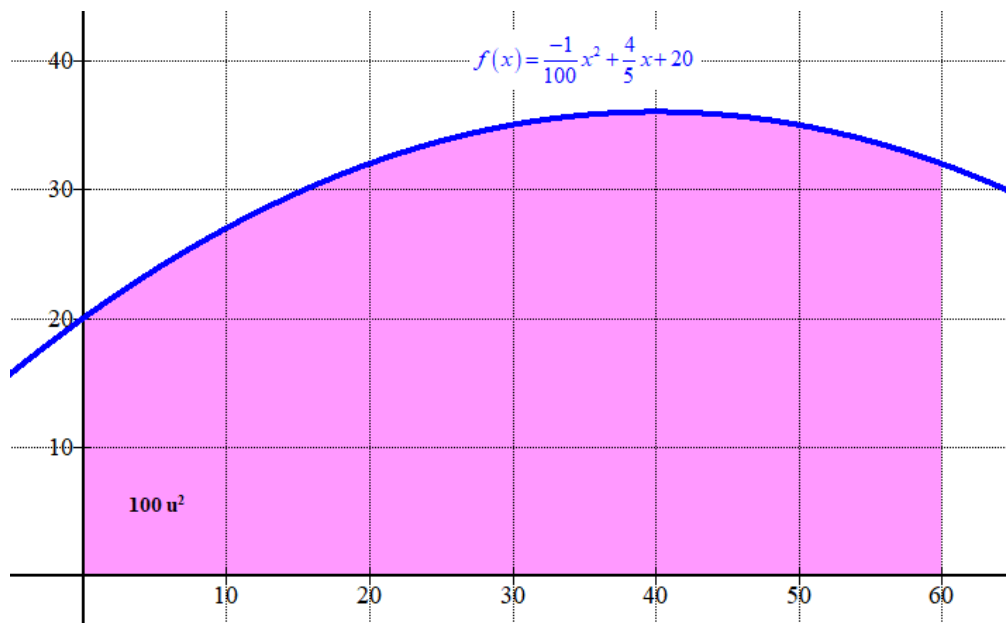
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{-1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{100}x^2 + \frac{4}{5}x + 20 = 0 \Rightarrow -x^2 + 80x + 2000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4(-1)2000}}{-2} = \frac{-80 \pm 120}{-2} = \begin{cases} \frac{-80+120}{-2} = -20 \notin (0, 60) \\ \frac{-80-120}{-2} = 100 \notin (0, 60) \end{cases}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 60.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{60} f(x) dx = \int_0^{60} \frac{-1}{100} x^2 + \frac{4}{5} x + 20 dx = \left[-\frac{1}{100} \frac{x^3}{3} + \frac{4}{5} \frac{x^2}{2} + 20x \right]_0^{60} = \\ &= \left[-\frac{x^3}{300} + \frac{2x^2}{5} + 20x \right]_0^{60} = \left[-\frac{60^3}{300} + \frac{2 \cdot 60^2}{5} + 20 \cdot 60 \right] - \left[-\frac{0^3}{300} + \frac{2 \cdot 0^2}{5} + 20 \cdot 0 \right] = \boxed{1920 u^2} \end{aligned}$$

No lo pide, pero dibujamos la gráfica y la región para comprobar la bondad de la solución.

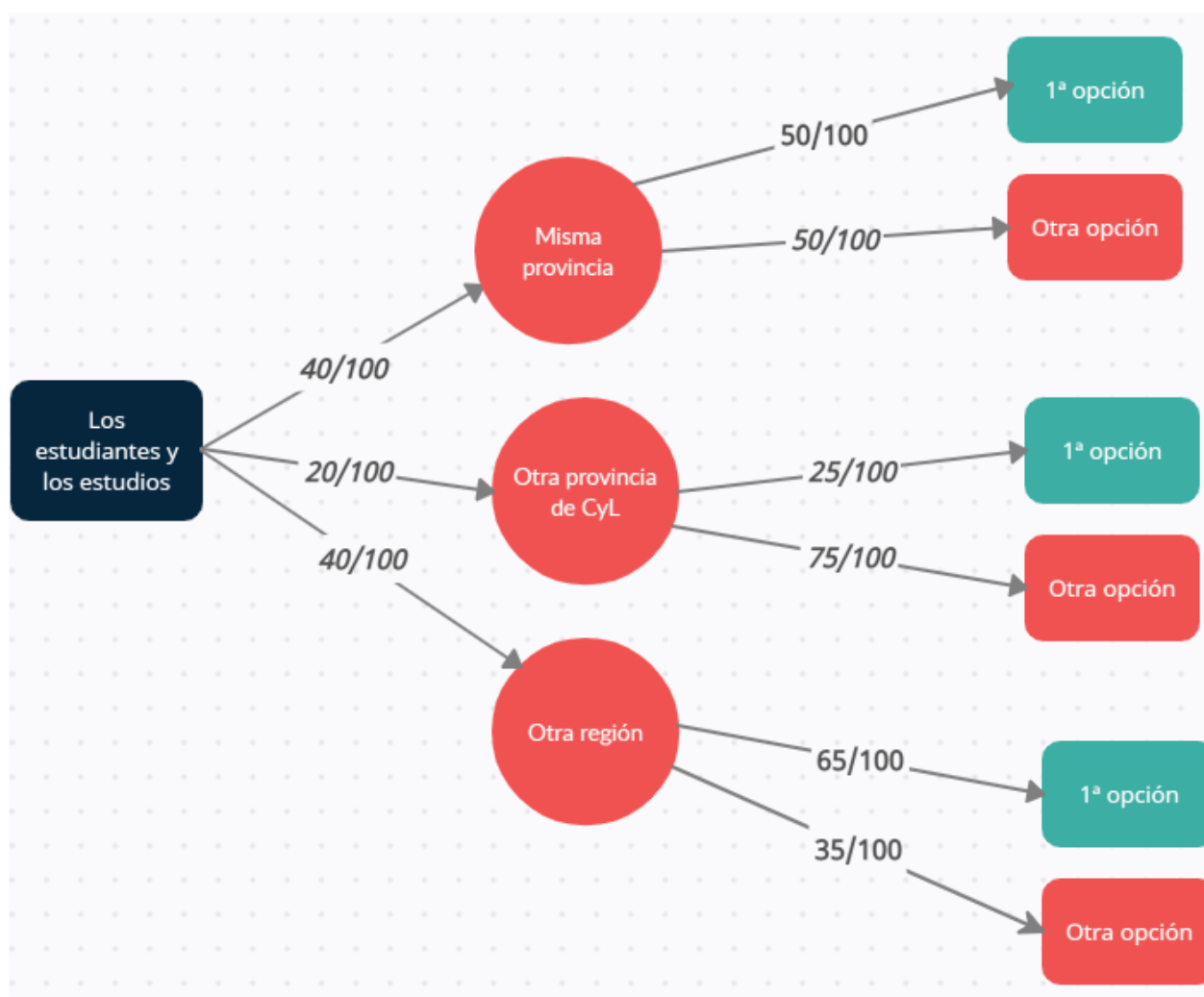


P5. (Estadística y probabilidad)

Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autónomas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autónomas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León.

- Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.
- Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente a Castilla y León?

Realizamos un diagrama de árbol para organizar la información.



Para simplificar la notación de los sucesos llamaremos M a “estudiar en la Misma provincia”, O a “estudiar en Otra provincia de Castilla y León”, F a “estudiar en Castilla y León viniendo de Fuera de la región”, A a “estudiar lo elegido en 1ª opción” y $\bar{A}$ a “estudiar lo no elegido en 1ª opción”.

- Nos piden calcular el valor de $P(A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}P(A) &= P(M)P(A/M) + P(O)P(A/O) + P(F)P(A/F) = \\&= \frac{40}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{65}{100} = \frac{5100}{10000} = \frac{51}{100} = \boxed{0.51}\end{aligned}$$

b) Nos piden $P(F/\bar{A})$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P(F/\bar{A}) = \frac{P(F \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(F)P(\bar{A}/F)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{35}{100}}{1 - \frac{51}{100}} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{49}{100}} = \frac{14}{49} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.29}$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

- a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?
- b) Si se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

X = Peso de un huevo en gramos. $X = N(67, 15)$

- a) Nos piden $P(X \geq 73)$.

$$P(X \geq 73) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ \frac{X - 67}{15} = Z \text{ es } N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{X - 67}{15} \geq \frac{73 - 67}{15}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$

	0.00	0.1
0.0	0.5000	0.51
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.66
0.5	0.6915	0.69

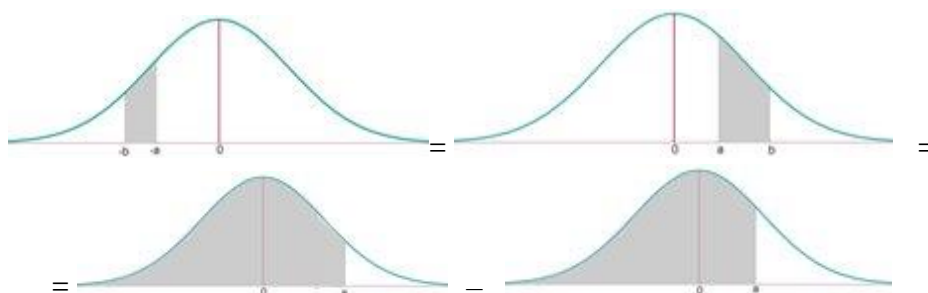
- b) Si $X = N(67, 15)$ la distribución de la media de una muestra de 6 huevos es $\bar{X}_6 = N\left(67, \frac{15}{\sqrt{6}}\right)$.

Nos piden calcular $P(53 \leq \bar{X}_6 \leq 63)$

$$P(53 \leq \bar{X}_6 \leq 63) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{53 - 67}{15/\sqrt{6}} \leq \frac{\bar{X}_6 - 67}{15/\sqrt{6}} \leq \frac{63 - 67}{15/\sqrt{6}}\right) =$$

$$= P(-2.29 \leq Z \leq -0.65) = P(0.65 \leq Z \leq 2.29) = P(Z \leq 2.29) - P(Z \leq 0.65) =$$

$$= \{ \text{Miramos en la tabla} \} = 0.9890 - 0.7422 = \boxed{0.2468}$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9655	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9877	0.9880	0.9883	0.9886	0.9889
2.3	0.9891	0.9893	0.9895	0.9897	0.9899	0.9901	0.9902	0.9904	0.9905	0.9906
2.4	0.9907	0.9908	0.9909	0.9910	0.9911	0.9912	0.9913	0.9914	0.9915	0.9916

C1. (Números y álgebra)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B .

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = a+b \\ b+1 = a \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = b \\ 1+1 = 2 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{Se cumplen todas las igualdades}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

C2. (Análisis)

Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x) = -x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.

Obtenemos la derivada primera y segunda de la función y comprobamos si la derivada primera se anula en $x = 0$ y la derivada segunda es negativa en $x = 0$.

$$f(x) = -x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$$

$$f'(0) = -3 \cdot 0^2 = 0 \quad \text{¡¡Se cumple!!}$$

$$f''(0) = -6 \cdot 0 = 0 \quad \text{¡¡No se cumple!!}$$

La afirmación es **falsa**.

Si obtenemos la tercera derivada $f'''(x) = -6$ observamos que $f'''(0) = -6 \neq 0$, por lo que es un punto de inflexión.

C3. (Estadística y probabilidad)

Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B) = \frac{3}{5}$; $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular $P(A \cap B)$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

EBAU Extraordinaria 2021

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.

Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .
- Resolver el sistema para $a = 1$.

P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.
- Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $(0, 1)$.

P4. (Análisis)

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, “ x ”, de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

- a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (**hasta 1 punto**).
- b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo $[0, 7]$ ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (**hasta 2 puntos**).

P5. (Estadística y probabilidad)

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica “spinning” así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

- a) Calcular la probabilidad de que practique “spinning”.
- b) Si el socio elegido no practica “spinning”, obtener la probabilidad de que sea una mujer.

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera “individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A”.

- a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son “individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A”?
- b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x}$, determinar a para que se verifique $f'(1) = 2$?

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

SOLUCIONES**P1. (Números y álgebra)**

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.

Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

Llamamos “x” al número de tartas a hornear e “y” al número de bizcochos.

Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Gramos de harina	Gramos de azúcar	Ingresos
Nº de tartas (x)	400x	200x	10x
Nº de bizcochos (y)	300y	100y	6y
TOTALES	400x + 300y	200x + 100y	10x + 6y

La función a maximizar son los ingresos que vienen dados por la expresión $I(x, y) = 10x + 6y$

Convertimos en inecuaciones las restricciones del problema.

“Se dispone de 6 kg de harina” $\rightarrow 400x + 300y \leq 6000$

“Se dispone de 2.4 kg de azúcar” $\rightarrow 200x + 100y \leq 2400$

“Saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos” $\rightarrow y \geq 6$

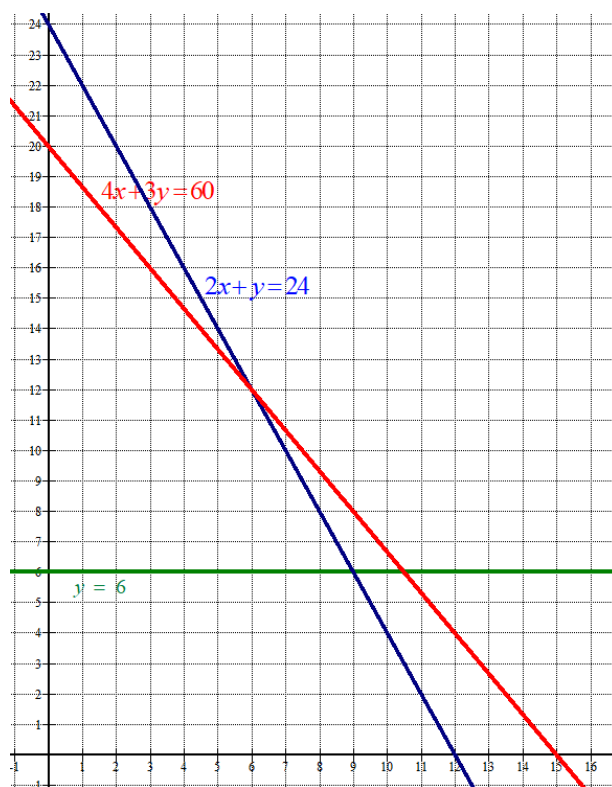
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 300y \leq 6000 \\ 200x + 100y \leq 2400 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \leq 24 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$4x + 3y = 60$	$2x + y = 24$	$y = 6$	$x \geq 0; y \geq 0$												
$x \mid y = \frac{60 - 4x}{3}$ <table> <tr><td>0</td><td>20</td></tr> <tr><td>6</td><td>12</td></tr> </table>	0	20	6	12	$x \mid y = 24 - 2x$ <table> <tr><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td>9</td><td>6</td></tr> </table>	6	12	9	6	$x \mid y = 6$ <table> <tr><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td></tr> </table>	9	6	10	6	Primer cuadrante
0	20														
6	12														
6	12														
9	6														
9	6														
10	6														



Como las restricciones son

$4x + 3y \leq 60 \rightarrow$ Por debajo	} la región factible es la región del
$2x + y \leq 24 \rightarrow$ Por debajo	
$y \geq 6 \rightarrow$ Por encima	
$x \geq 0; y \geq 0 \rightarrow$ Primer cuadrante	

primer cuadrante situada por encima de la recta horizontal verde y por debajo de las rectas roja y azul. Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.

Valoramos la función $I(x, y) = 10x + 6y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

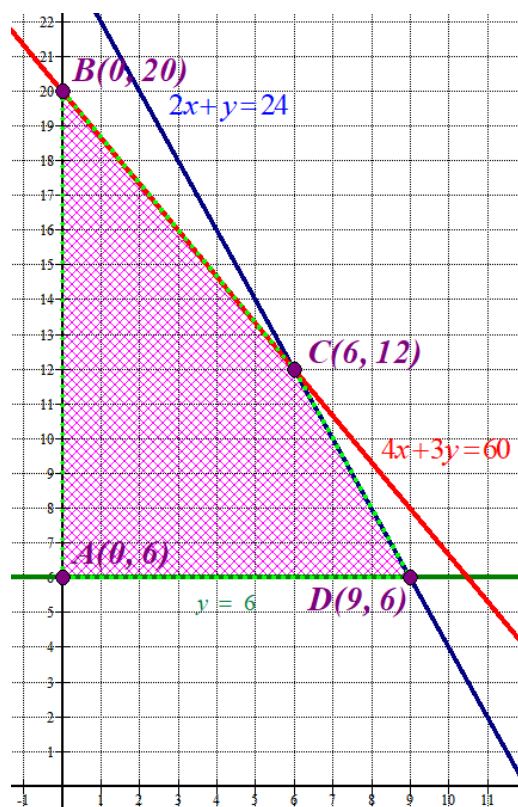
$$A(0, 6) \rightarrow I(0, 6) = 36$$

$$B(0, 20) \rightarrow I(0, 20) = 120$$

$$C(6, 12) \rightarrow I(6, 12) = 60 + 72 = 132$$

$$D(9, 6) \rightarrow I(9, 6) = 90 + 36 = 126$$

Los máximos ingresos son 132 € y se consiguen con la preparación de 6 tartas y 12 bizcochos.



P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2a + 2 - 1 - 4 + 2a = 4a - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4} = 1.25$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1.25$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 1.25$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Para estudiar el rango de A y de A/B transformamos A/B en una matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned} A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1.25 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2.25 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Observando la matriz obtenida tenemos que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, por lo que el sistema es incompatible (sin solución)

- b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado, hallamos su solución utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 0 \quad 3 \quad -2 \quad 0 \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline -1 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad 12 \quad -9 \quad -9 \\ 0 \quad -12 \quad 8 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad -9 \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{array} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ -z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ \boxed{z = 9} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 9 = 1 \\ 3y - 18 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -8 \\ 3y = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = -8 \\ \boxed{y = \frac{18}{3} = 6} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 12 = -8 \Rightarrow \boxed{x = 4}
 \end{aligned}$$

La solución es $x = 4, y = 6, z = 9$.

P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.
 b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $(0, 1)$.

- a) Para que $f(x)$ sea continua debe serlo en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 4 - 1^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 - x^2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

El valor de b que hace continua la función es $b = 3$.

- b) En el intervalo $(0, 1)$ la función es $f(x) = 4 - x^2$.
 Vemos donde esta función corta el eje OX.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 4 - x^2 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Estos dos puntos de corte están situados fuera del intervalo $(0, 1)$.

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 4 - x^2 dx \right| = \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| = \left| \left[4 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[0 - \frac{0^3}{3} \right] \right| = \boxed{\frac{11}{3} u^2}$$

P4. (Análisis)

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, “ x ”, de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

- a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (**hasta 1 punto**).
- b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo $[0, 7]$ ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (**hasta 2 puntos**).

a) Nos piden calcular $N(0) \rightarrow N(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 64 = 64$ socios fundadores.

Nos piden calcular $N(7) \rightarrow N(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 24 \cdot 7 + 64 = 134$ socios.

Vemos cuántos socios hay en el sexto año $\rightarrow N(6) = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 + 64 = 100$

Se supera por primera vez los 100 socios en el séptimo año y debe disolverse la sociedad en el año 7.

b) Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

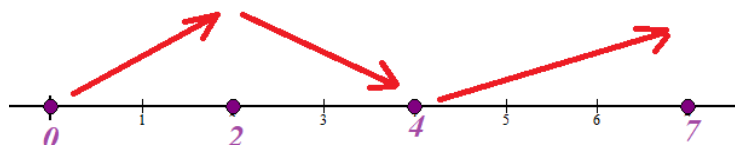
$$N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64 \Rightarrow N'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $[0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $N'(1) = 3 - 18 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $N'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.
- En $(4, 7]$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $N'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4, 7]$.

La función sigue el esquema.



La función crece en $[0, 2) \cup (4, 7]$ y decrece en $(2, 4)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 4$. Valoramos el número de socios también en los extremos del intervalo y obtendremos el mínimo absoluto.

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 64 = 64 \\ N(4) &= 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 64 = 80 \\ N(7) &= 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 24 \cdot 7 + 64 = 134 \end{aligned} \right\}$$

El número mínimo de socios se tiene al comienzo de la sociedad, en el año 0 siendo 64 los socios fundadores.

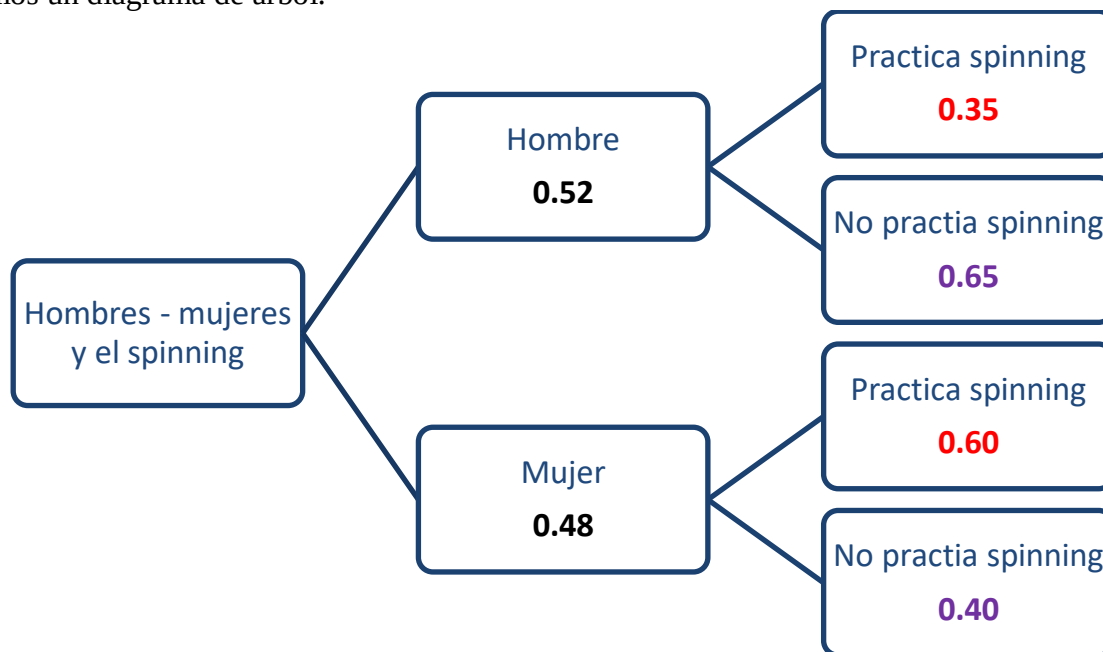
P5. (Estadística y probabilidad)

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica “spinning” así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique “spinning”.

b) Si el socio elegido no practica “spinning”, obtener la probabilidad de que sea una mujer.

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos H = Ser hombre, $\bar{H}$ = Ser mujer. S = Practica spinning, $\bar{S}$ = No practica spinning.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(H)P(S/H) + P(\bar{H})P(S/\bar{H}) = 0.52 \cdot 0.35 + 0.48 \cdot 0.60 = \boxed{0.47}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{H}/\bar{S}) = \frac{P(\bar{H} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{H})P(\bar{S}/\bar{H})}{1 - P(S)} = \frac{0.48 \cdot 0.4}{1 - 0.47} = \frac{96}{265} \approx 0.362$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera “individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A”.

- a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son “individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A”?
- b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

X = Peso (en kg) de un adulto con sobrepeso. $X = N(120, 20)$

- a) Calculamos $P(X > 150)$.

$$P(X > 150) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{150-120}{20}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) =$$

$$= \{\text{Miro en la tabla de la } N(0, 1)\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

El porcentaje de adultos con sobrepeso que son “individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A” es del 6.68 %

- b) $X = N(120, 20)$. Si tomamos una muestra de 20 adultos con sobrepeso la distribución de la media sigue una normal $\bar{X}_{20} = N\left(120, \frac{20}{\sqrt{20}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{20} = N(120, \sqrt{20})$

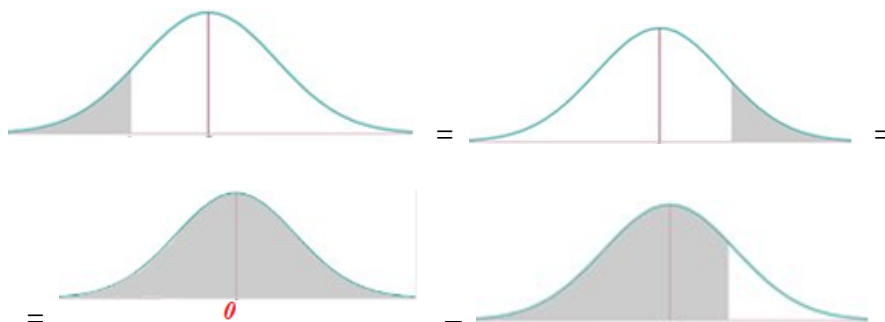
Nos piden $P(110 \leq \bar{X}_{20} \leq 125)$

$$P(110 \leq \bar{X}_{20} \leq 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{110-120}{\sqrt{20}} \leq Z \leq \frac{125-120}{\sqrt{20}}\right) = P\left(-\sqrt{5} \leq Z \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - P(Z \leq -\sqrt{5}) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - P(Z \geq \sqrt{5}) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - [1 - P(Z \leq \sqrt{5})] = P(Z \leq 1.12) - 1 + P(Z \leq 2.24) =$$

$$= \{\text{Miro en la tabla de la } N(0, 1)\} = 0.8686 - 1 + 0.9875 = \boxed{0.8561}$$



Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?

El padre tiene “x” años y el hijo tiene “x – 22” y su suma es $x + x - 22 = 46 \rightarrow 2x = 68 \rightarrow x = 34$.

El padre tiene 34 años y el hijo tiene 12 años.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x}$, determinar a para que se verifique $f'(1) = 2$?

$$f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x} \Rightarrow f'(x) = a - \frac{5}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = a - \frac{5}{1^2} = a - 5 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 7}$$

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

X = Nota media de un alumno de bachillerato. $X = N(6.8, 1.1)$.

$$P(X > 9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{9 - 6.8}{1.1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

	0.00	0.
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8
1.1	0.8643	0.8
1.2	0.8849	0.8
1.3	0.9032	0.9
1.4	0.9192	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	0.9452	0.9
1.7	0.9554	0.9
1.8	0.9641	0.9
1.9	0.9713	0.9
2.0	0.9772	0.9
2.1	0.9821	0.9

EBAU Ordinaria 2021

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B .
- Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si } 40 < x \leq 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo? **(hasta 2 puntos)**.
- Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida **(hasta 1 punto)**.

P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

- Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de 10 millones de euros.
- Para $a = 2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.

P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

- Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.
- ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

- Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).
- Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$?

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

	Kg de manzanas	Kg de naranjas	Kg de plátanos	Ingresos
Nº lotes A (x)	x	$2x$	x	$12x$
Nº lotes B (y)	$2y$	y	y	$14y$
TOTAL	$x + 2y$	$2x + y$	$x + y$	$12x + 14y$

La función a maximizar son los ingresos $f(x, y) = 12x + 14y$.

Las restricciones son:

“En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas” $\rightarrow x + 2y \leq 800$

“En un almacén de frutas disponen de 800 kg de naranjas” $\rightarrow 2x + y \leq 800$

“En un almacén de frutas disponen de 500 kg de plátanos” $\rightarrow x + y \leq 500$

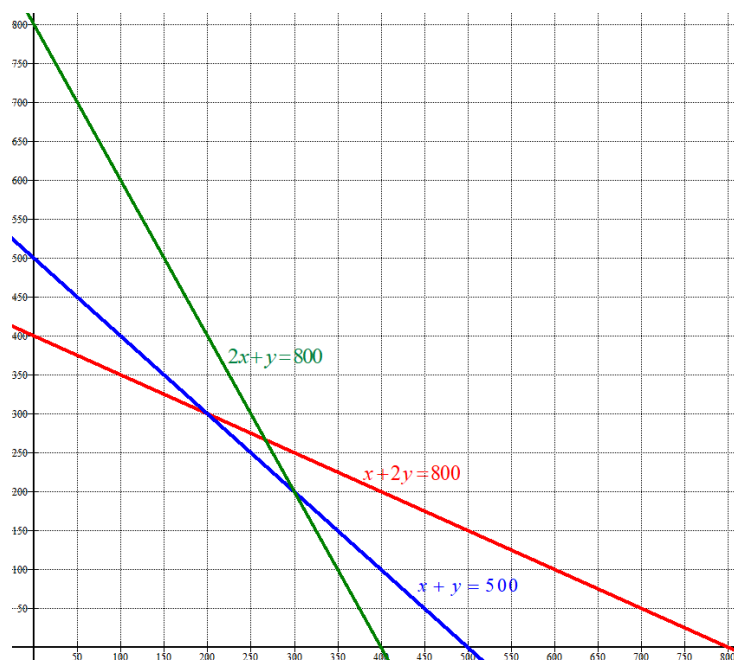
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones forman un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

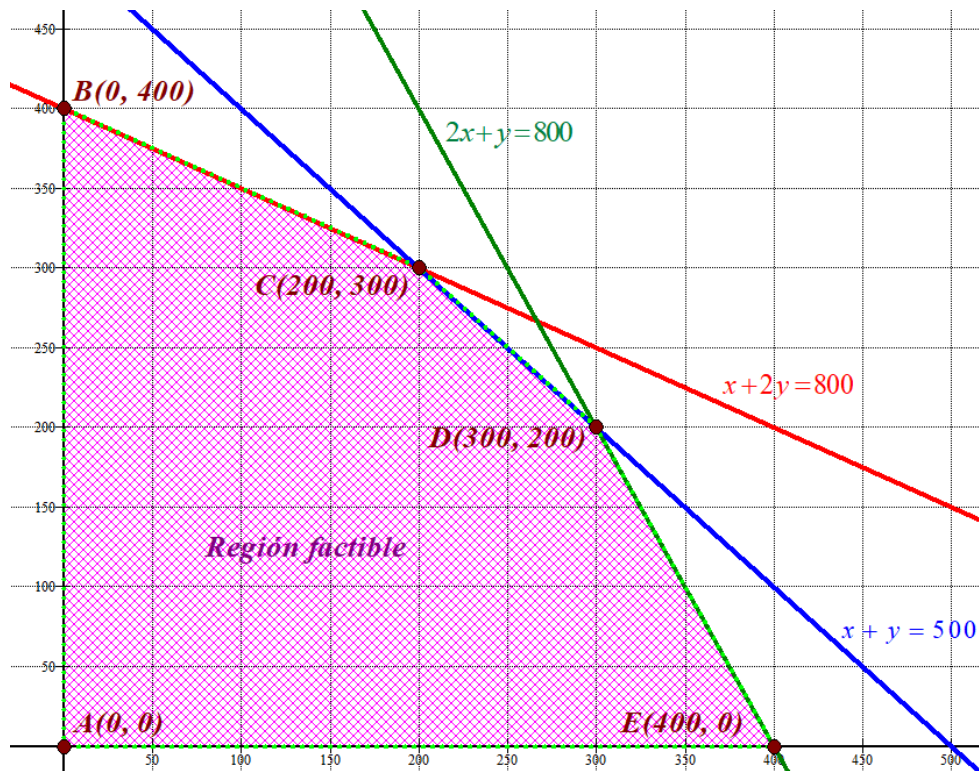
$$\begin{array}{l} x + 2y = 800 \\ x \quad y = \frac{800 - x}{2} \\ \hline 200 \quad 300 \\ 400 \quad 200 \\ 2x + y = 800 \\ x \quad y = 800 - 2x \\ \hline 0 \quad 800 \\ 300 \quad 200 \\ x + y = 500 \\ x \quad y = 500 - x \\ \hline 200 \quad 300 \\ 300 \quad 200 \end{array}$$



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ es la región del primer cuadrante que está por debajo de

las rectas azul, verde y roja.

Coloreamos de rosa la región factible.



Valoramos la función ingresos $f(x, y) = 12x + 14y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 400) \rightarrow f(0, 400) = 0 + 14 \cdot 400 = 5600$$

$$C(200, 300) \rightarrow f(200, 300) = 12 \cdot 200 + 14 \cdot 300 = 2400 + 4200 = 6600$$

$$D(300, 200) \rightarrow f(300, 200) = 12 \cdot 300 + 14 \cdot 200 = 3600 + 2800 = 6400$$

$$E(400, 0) \rightarrow f(400, 0) = 12 \cdot 400 + 0 = 4800$$

Los máximos ingresos son 6600 € que se obtienen en el vértice C(200, 300). Significa que se maximizan los ingresos con 200 lotes A y 300 lotes B.

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B .
 b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+2 \\ -1-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = (1 \quad -2) \Rightarrow BB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \quad -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^2 + BB^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2AX = B \Rightarrow AX = \frac{1}{2}B \Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3 \neq 0. \text{ Existe } A^{-1}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión que nos permite obtener la matriz X .

$$X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+4 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si } 40 < x \leq 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo? (**hasta 2 puntos**).
- b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida (**hasta 1 punto**).

- a) Comprobamos que la función es continua, para ello solo falta ver que lo es en $x = 40$.

$$\left. \begin{aligned} f(40) &= 70 \\ \lim_{x \rightarrow 40^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 40^-} 70 = 70 \\ \lim_{x \rightarrow 40^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 40^+} \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 = \frac{1}{10} \cdot 40^2 - 11 \cdot 40 + 350 = 70 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(40) = \lim_{x \rightarrow 40^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 40^+} f(x) = 70$$

La función es continua en todo su dominio.

En el intervalo $[0, 40]$ la función es constantemente igual a 70.

En el intervalo $(40, 60]$ es una parábola. Calculamos su derivada y buscamos su punto crítico.

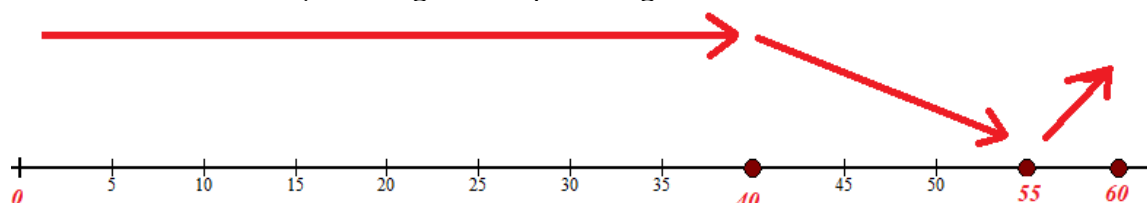
$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{10}x - 11 = \frac{1}{5}x - 11$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 11 = 0 \Rightarrow x - 55 = 0 \Rightarrow x = 55$$

Vemos cómo evoluciona la función antes y después del vértice de la parábola.

- En $(40, 55)$ tomamos $x = 50$ y la derivada vale $f'(50) = \frac{1}{5} \cdot 50 - 11 = -1 < 0$. La función decrece en $(40, 55)$.
- En $(55, 60)$ tomamos $x = 58$ y la derivada vale $f'(58) = \frac{1}{5} \cdot 58 - 11 = 0.6 > 0$. La función crece en $(55, 60)$.

La función en el intervalo $(0, 60]$ sigue el esquema siguiente:



La función es constante en $(0, 40)$, decrece en $(40, 55)$ y crece en $(55, 60)$.

Por el esquema y dada la continuidad de la función el mínimo absoluto se produce a los 55 minutos. Siendo el mínimo de zancadas de $f(55) = \frac{1}{10} \cdot 55^2 - 11 \cdot 55 + 350 = 47.5$ por minuto.

b) En el esquema tenemos una aproximación de la función.

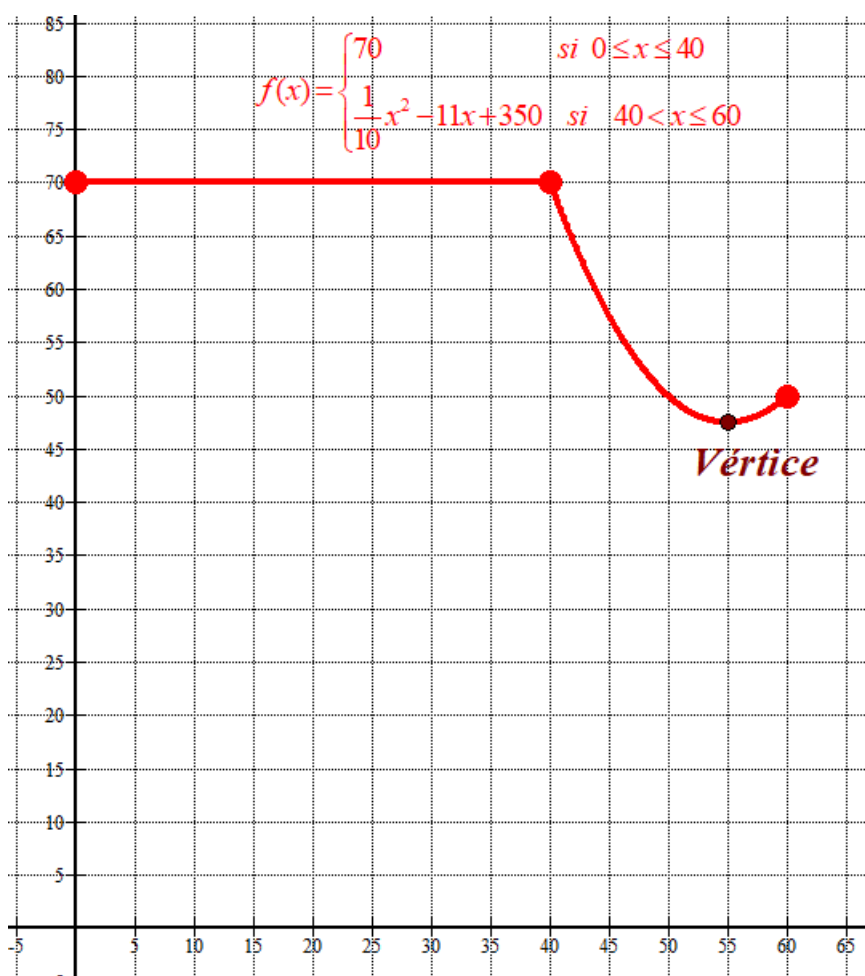
Para precisar un poco más su gráfica obtenemos una tabla de valores.

$$f(x) = 70 \quad (0 \leq x \leq 40)$$

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 \quad (40 < x \leq 60)$$

x	$y = 70$
0	70
40	70

x	$y = \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350$
50	50
55	47.5
60	50



P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

- a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de 10 millones de euros.
 b) Para $a = 2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.

- a) Nos dicen que para $x = 10$ el beneficio es $B(10) = 10000$.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -20x^2 + 1200x + a \\ B(10) = 10000 \end{array} \right\} \Rightarrow -20 \cdot 10^2 + 1200 \cdot 10 + a = 10000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2000 + 12000 + a = 10000 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

- b) Para $a = 2000$ la función queda $B(x) = -20x^2 + 1200x + 2000$

Averiguamos los puntos de corte con el eje OX, si los hay.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -20x^2 + 1200x + 2000 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -20x^2 + 1200x + 2000 = 0 \Rightarrow x^2 - 60x - 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{(-60)^2 - 4(-100)}}{2} = \frac{60 \pm \sqrt{4000}}{2} = \begin{cases} \frac{60 - 63.24}{2} = -1.62 \text{ No válido, pues } \notin [0, +\infty) \\ \frac{60 + 63.24}{2} = 61.62 \end{cases}$$

La gráfica de la función corta el eje OX después del intervalo $[0, 1]$, por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función $B(x)$.

$$\text{Área} = \int_0^1 B(x) dx = \int_0^1 -20x^2 + 1200x + 2000 dx = \left[-\frac{20}{3}x^3 + 600x^2 + 2000x \right]_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{20}{3} \cdot 1^3 + 600 \cdot 1^2 + 2000 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{20}{3} \cdot 0^3 + 600 \cdot 0^2 + 2000 \cdot 0 \right] =$$

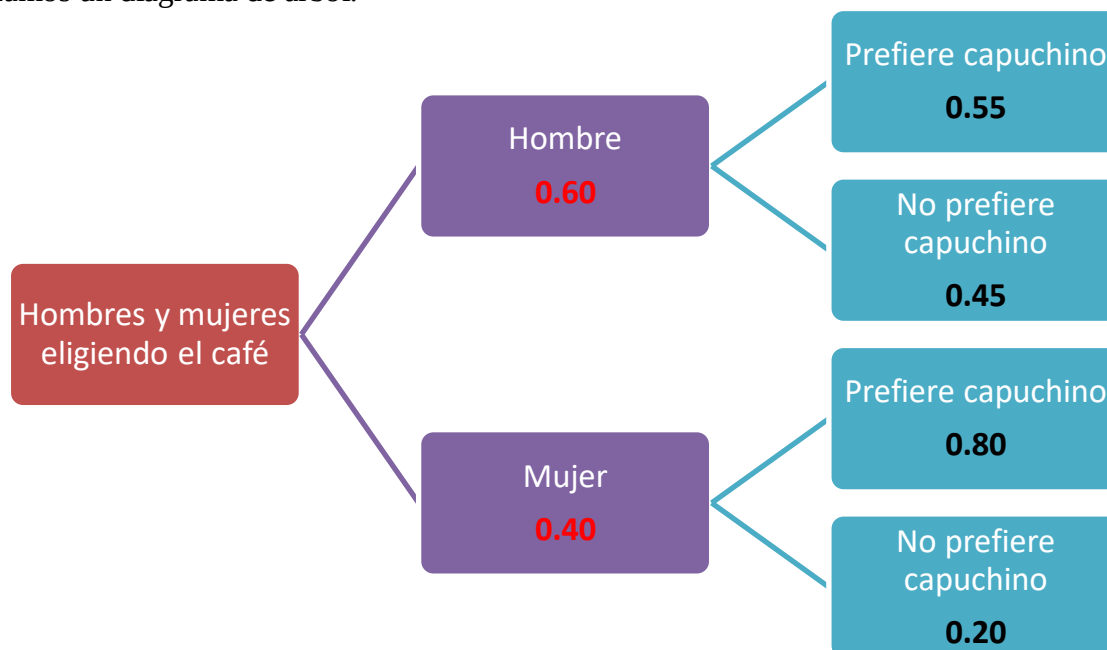
$$= -\frac{20}{3} + 600 + 2000 = \boxed{\frac{7780}{3} = 2593,33 \text{ u}^2}$$

P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

- a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.
 b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamemos H = “Ser hombre”, por lo que $\bar{H}$ = “Ser mujer”.

C = “Prefiere capsulas de café capuchino”, por lo que $\bar{C}$ = “No prefiere café capuchino”.

a)

$$P(\text{Sea hombre y prefiera capsulas de café capuchino}) = P(H \cap C) =$$

$$= P(H)P(C/H) = \{\text{Mirando en el diagrama de árbol}\} = 0.6 \cdot 0.55 = \boxed{0.33}$$

b) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H \cap C) + P(\bar{H} \cap C) = P(H)P(C/H) + P(\bar{H})P(C/\bar{H}) = \\ &= \{\text{Mirando en el diagrama de árbol}\} = 0.6 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.8 = \boxed{0.65} \end{aligned}$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

- Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).
- Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

X = Tiempo (en minutos) que tarda un auditor en revisar un expediente. $X = N(30, 10)$

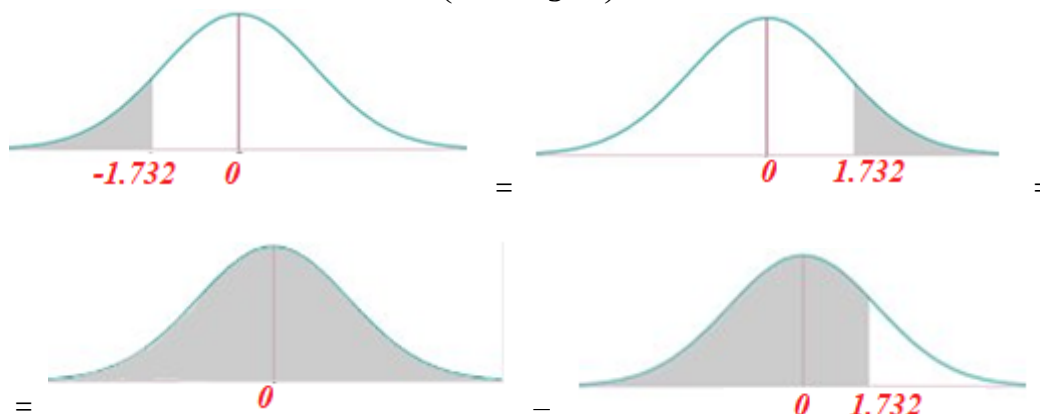
- a) $X = N(30, 10)$. Si tomamos una muestra de 75 expedientes la distribución de la media sigue una

$$\text{normal } \overline{X}_{75} = N\left(30, \frac{10}{\sqrt{75}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{75} = N\left(30, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Como nos piden la probabilidad de que los revise en menos de 2100 minutos, eso da una media de $\frac{2100}{75} = 28$ minutos por expediente o menos.

Nos piden $P(\overline{X}_{75} \leq 28)$

$$P(\overline{X}_{75} \leq 28) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{28-30}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) = P(Z \leq -\sqrt{3}) = P(Z \leq -1.732) = \dots$$



$$\dots = P(Z \geq 1.732) = 1 - P(Z \leq 1.732) =$$

$$= \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9582 = \boxed{0.0418}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582

b)

$$P\left(28 \leq \overline{X}_{75} \leq 33\right) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{28-30}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \leq Z \leq \frac{33-30}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\right) =$$

$$= P\left(-\sqrt{3} \leq Z \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - P\left(Z \leq -\sqrt{3}\right) =$$

$$= P(Z \leq 2.6) - P(Z \leq -1,732) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miro en la tabla de la } N(0, 1) \\ \text{y en el resultado del apartado a)} \end{array} \right\} =$$

$$= 0.9953 - 0.0418 = \boxed{0,9535}$$

	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7267
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,6	0,9452
1,7	0,9554
1,8	0,9641
1,9	0,9713
2,0	0,9772
2,1	0,9821
2,2	0,9861
2,3	0,9893
2,4	0,9918
2,5	0,9938
2,6	0,9953

Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

Para que sea incompatible hay muchas opciones, la más sencilla es añadir una ecuación imposible como $10 = 3$.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ 10 = 3 \end{cases}$$

O añadir una de las ecuaciones con el término independiente cambiado por otro. Por ejemplo añadimos la segunda ecuación terminando en 1.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$?

El dominio son todos los números reales a excepción de los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.

Suponemos independientes las probabilidades de que hombre o mujer lleguen a los 70 años.

Bajo esta hipótesis la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años sería el producto de las probabilidades de que hombre llegue a los 70 por el de que la mujer llegue a los 70.

$$P(\text{Hombre y mujer lleguen a los 70 años}) =$$

$$= P(\text{Hombre llegue a los 70 años}) P(\text{Mujer llegue a los 70 años}) = 0.78 \cdot 0.83 = \boxed{0.6474}$$

EBAU Extraordinaria 2020

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

La asociación “Stop Stress” tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

P2. (Números y álgebra)

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B.

Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

P3. (Análisis)

Se considera la función
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Determinar el valor de m para que $f(x)$ sea continua.
- Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.

P4. (Análisis)

La cotización en euros de la criptomoneda *Bitcoin* en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000$ donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.
- ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

P5. (Estadística y probabilidad)

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

- a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.
- b) Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda el servidor de una empresa de venta *online* en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0.16 minutos y desviación típica 0.37 minutos. Al comienzo de un *viernes negro* la empresa recibe 365 pedidos.

- a) Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.
- b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos.

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $AB + C$.

C2. (Análisis)

Calcula el valor de a para que la función $f(x) = ax^2 - 5ax + 4$ corte al eje OX en el punto de abscisa $x = 4$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de ± 2.8 % con un nivel de confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.

SOLUCIONES**P1. (Números y álgebra)**

La asociación “Stop Stress” tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

Llamemos “x” al número de personas que corren, “y” al número de personas que hacen yoga y “z” al número de personas que nadan.

“60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación” $\rightarrow x + y + z = 60$

“Hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación” $\rightarrow x = y + z - 18$

“La séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga” $\rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5}$

Juntamos estas ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = y + z - 18 \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x - y - z = -18 \\ 5x - 7y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad -y \quad -z = -18 \\ -x \quad -y \quad -z = -60 \\ \hline -2y \quad -2z = -78 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 5 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 5x \quad -7y \quad \quad = 0 \\ -5x \quad -5y \quad -5z = -300 \\ \hline -12y \quad -5z = -300 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ -2y - 2z = -78 \\ -12y - 5z = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y + z = 39 \\ 12y + 5z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 12 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 12y \quad +5z = 300 \\ -12y \quad -12z = -468 \\ \hline -7z = -168 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y + z = 39 \\ -7z = -168 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y + z = 39 \\ \boxed{z = \frac{-168}{-7} = 24} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 24 = 60 \\ y + 24 = 39 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 24 = 60 \\ \boxed{y = 39 - 24 = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 15 + 24 = 60 \Rightarrow \boxed{x = 21}$$

En la asociación hay 21 personas que corren, 15 que hacen yoga y 24 que nadan.

P2. (Números y álgebra)

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B.

Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Llamamos “x” al número de lotes A e “y” al número de lotes B.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Nº botes alubias	Nº botes garbanzos	Beneficio
Nº lotes A (x)	x	3x	3x
Nº lotes B (y)	2y	y	2y
TOTALES	$x + 2y$	$3x + y$	$3x + 2y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio obtenido por la venta de los lotes y tiene la expresión $B(x, y) = 3x + 2y$.

Establecemos las restricciones en forma de inecuaciones.

“Tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos” $\rightarrow x + 2y \leq 100$

$3x + y \leq 150$

“Desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B” $\rightarrow x \geq 10; y \geq 15$

Unimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10; y \geq 15 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$x + 2y = 100$$

x	$y = \frac{100 - x}{2}$
0	50
100	0

$$3x + y = 150$$

x	$y = 150 - 3x$
0	150
50	0

$$x = 10$$

x = 10	y
10	0
10	50

$$y = 15$$

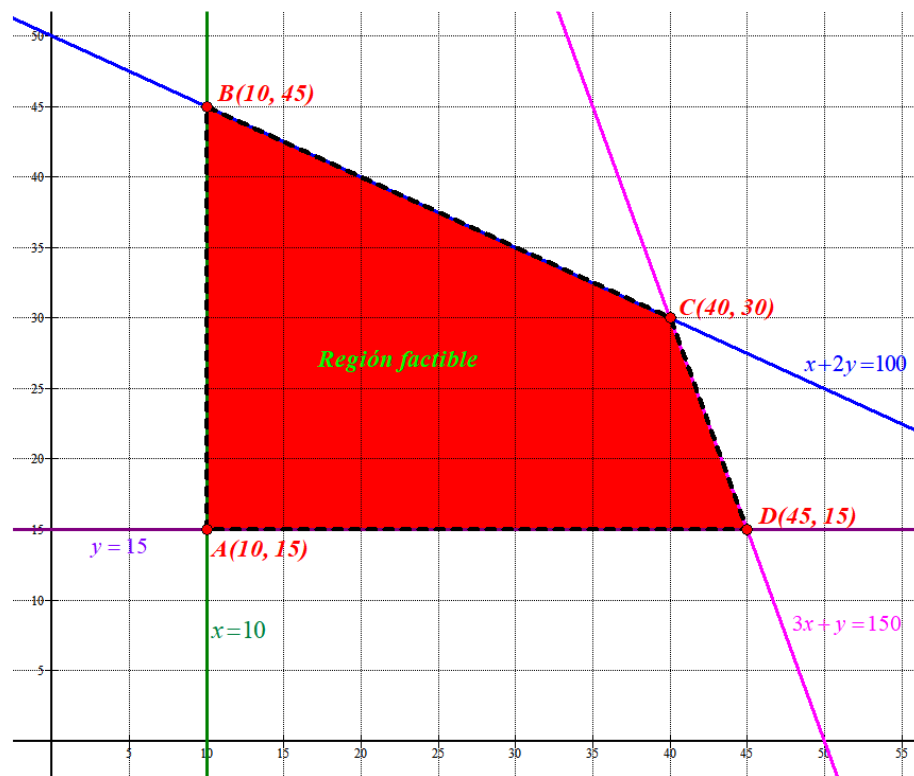
x	y = 15
0	15
10	15



Probamos si el punto $P(20, 20)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 40 \leq 100 \\ 60 + 20 \leq 150 \\ 20 \geq 10; \quad 20 \geq 15 \end{array} \right\} \text{ Si las cumple}$$

La región factible (contiene la solución del problema) es la región del plano que contiene el punto P y delimitada por las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función $B(x, y) = 3x + 2y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(10, 15) \rightarrow B(10, 15) = 30 + 30 = 60$$

$$B(10, 45) \rightarrow B(10, 45) = 30 + 90 = 120$$

$$C(40, 30) \rightarrow B(40, 30) = 120 + 60 = 180 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(45, 15) \rightarrow B(45, 15) = 135 + 30 = 165$$

El valor máximo del beneficio es 180 y se obtiene en el vértice $C(40, 30)$.

Para obtener un beneficio máximo de 180 € deben venderse 40 lotes A y 30 lotes B

P3. (Análisis)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Determinar el valor de m para que $f(x)$ sea continua.
 b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$.

a) Debe ser continua en $x = 2$ y para ello debe cumplirse que el valor de la función y el límite en dicho punto sean iguales.

▪ Existe $f(2) = -2^2 + 8 = 4$

▪ Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 8 = -4 + 8 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + m = 2 + m \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + m = 4 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

▪ $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

El valor buscado es $m = 2$.

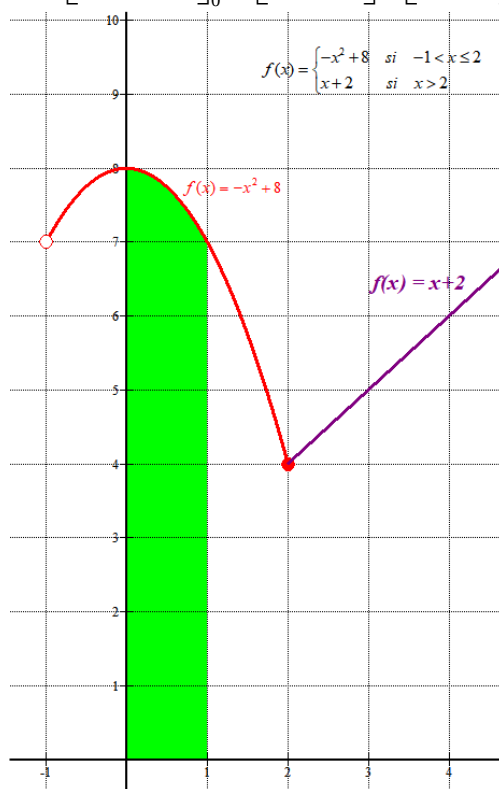
b) La función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Veamos donde corta la función el eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \text{ No pertenecen a } -1 < x \leq 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ No pertenece a } x > 2 \end{cases}$$

El área del recinto pedido es la integral definida de la función $f(x) = -x^2 + 8$ entre 0 y 1.

$$\text{Área} = \int_0^1 -x^2 + 8 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 8x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 8 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0 \right] = \frac{23}{3} = 7,66 \text{ u}^2$$



P4. (Análisis)

La cotización en euros de la criptomoneda *Bitcoin* en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000$ donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.

b) ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

a) Buscamos los puntos críticos de la función.

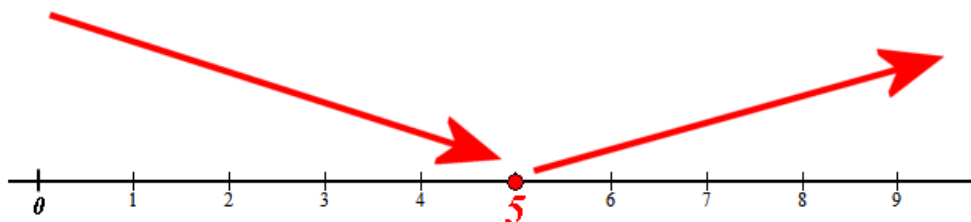
$$f(t) = 20t^2 - 200t + 1000 \Rightarrow f'(t) = 40t - 200$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 40t - 200 = 0 \Rightarrow t = \frac{200}{40} = 5$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes y después de las 5 horas.

- En $[0, 5)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 40 - 200 = -160 < 0$. La función decrece en $[0, 5)$.
- En $(5, 24]$ tomamos $t = 6$ y la derivada vale $f'(6) = 240 - 200 = 40 > 0$. La función crece en $(5, 24]$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $[0, 5)$ y crece en $(5, 24]$.

b) La mínima cotización se consigue en $t = 5$ como se aprecia en el dibujo.

$$f(5) = 20 \cdot 5^2 - 1000 + 1000 = 500$$

A las 5 horas se obtiene una cotización mínima de 500 € por cada bitcoin.

Se pagan 5000 € por 10 bitcoins.

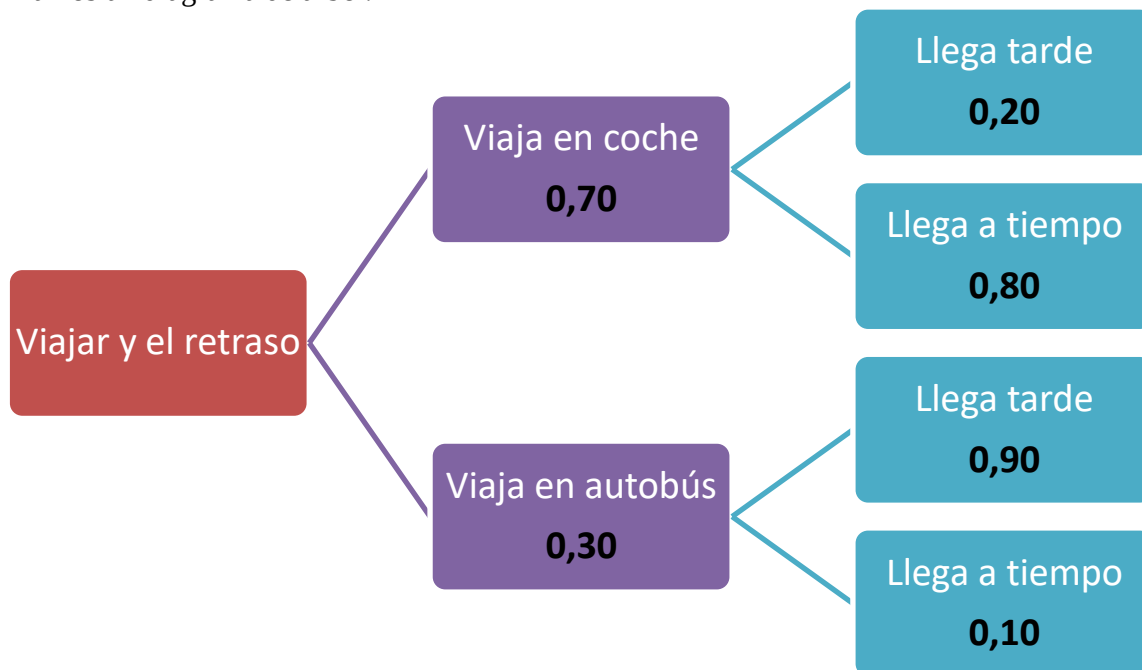
P5. (Estadística y probabilidad)

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Llegue tarde}) &= P(\text{Viaje en coche})P(\text{Llegue tarde} / \text{Viaje en coche}) + \\
 &+ P(\text{Viaje en autobús})P(\text{Llegue tarde} / \text{Viaje en autobús}) = \\
 &= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,9 = \boxed{0,41}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haya venido en autobús} / \text{Ha llegado a tiempo}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Ha venido en autobús} \cap \text{Llegue a tiempo})}{P(\text{Llegue a tiempo})} = \\
 &= \frac{P(\text{Haya venido en autobús})P(\text{Llegue a tiempo} / \text{Ha venido en autobús})}{P(\text{Llegue a tiempo})} = \\
 &= \frac{0,3 \cdot 0,1}{1 - 0,41} = \frac{0,03}{0,59} = \frac{3}{59} = 0,0508
 \end{aligned}$$

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda el servidor de una empresa de venta *online* en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0.16 minutos y desviación típica 0.37 minutos. Al comienzo de un *viernes negro* la empresa recibe 365 pedidos.

- Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.
- Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos.

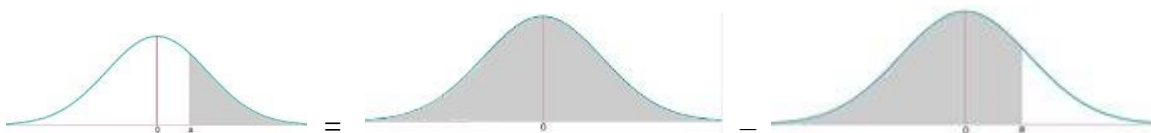
X = Tiempo en registrar un pedido en minutos. $X = N(0.16, 0.37)$

La distribución S que es la suma de los tiempos de los 365 pedidos es una distribución normal de media la suma de las medias ($\mu_s = 365 \cdot 0.16$) y de desviación típica la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las desviaciones:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \dots 365 \text{ veces} \dots + \sigma^2} = \sqrt{365 \cdot \sigma^2} = \sqrt{365} \cdot \sigma = \sqrt{365} \cdot 0.37$$

$$S = N(365 \cdot 0.16, \sqrt{365} \cdot 0.37) \Rightarrow S = N(58.4, 7.069)$$

$$a) P(S \geq 73) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{73 - 58.4}{7.069}\right) = P(Z \geq 2.065) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z \leq 2.065) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - \frac{0.9803 + 0.9808}{2} = \boxed{0.01945}$$

- La distribución de las medias $\overline{X}_{365}$ de los 365 pedidos en una distribución normal con la misma media (0.16) que X pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.37}{\sqrt{365}} = 0.0194$.

$$P(\overline{X}_{365} \leq 0.18) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{0.18 - 0.16}{0.0194}\right) = P(Z \leq 1.031) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.8485}$$

Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $AB + C$.

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 \\ 0+15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

C2. (Análisis)

Calcula el valor de a para que la función $f(x) = ax^2 - 5ax + 4$ corte al eje OX en el punto de abscisa $x = 4$.

Si corta al eje OX en $x = 4$ el punto debe tener coordenadas $(4, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 5ax + 4 \\ f(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 4^2 - 5a \cdot 4 + 4 \Rightarrow 16a - 20a + 4 = 0 \Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de $\pm 2.8\%$ con un nivel de confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.

Población: Personas de 18 o más años residentes en España.

Diseño muestral: Muestreo estratificado con asignación proporcional y muestreo aleatorio simple en cada estrato.

Tamaño muestral: $n = 1207$

Parámetro estimado: Proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones. Error máximo admisible: 0,028. Nivel de confianza del 95.5 %

EBAU Ordinaria 2020

	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 (tabla adicional)
---	---	--	---

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y - az = -1 \end{cases}$$

- Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a . **(hasta 2 puntos)**
- Resuelve el sistema para $a = -2$. **(hasta 1 punto)**

P2. (Números y álgebra)

Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.

Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

P3. (Análisis)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \leq 3 \\ 3x - 2m & x > 3 \end{cases}$$

- Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.
- Para $m = -1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[5, 7]$.

P4. (Análisis)

La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23 grados Celsius (°C) y en ningún caso debe bajar de 7°C. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo:

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$$

donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

- a) Determinar a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23°C.
- b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

P5. (Estadística y probabilidad)

El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6000 € mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

- a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6000 €?
- b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6000 €, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

P6. (Estadística y probabilidad)

Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12.5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los primeros 4 meses.

- a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.
- b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

¿Es posible que una matriz 4x2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

C2. (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

C3. (Estadística y probabilidad)

Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

SOLUCIONES**P1. (Números y álgebra)**

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y - az = -1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a . **(hasta 2 puntos)**
 b) Resuelve el sistema para $a = -2$. **(hasta 1 punto)**

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix} = -2a - 10 - 6 - 2 - 6a + 10 = -8a - 8$

Lo igualamos a cero $\rightarrow |A| = 0 \Rightarrow -8a - 8 = 0 \Rightarrow -8a = 8 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Distinguimos dos situaciones posibles.

CASO 1. $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3 e igual al número de incógnitas.

El sistema tiene **una solución única**. Es un sistema compatible determinado.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A vale 0 y el rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Con $a = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Podemos observar que la fila 1ª y la 3ª son iguales, por lo que considero el menor de orden 2 que resulta de quitarle la 1ª fila y la 1ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 10 = 12 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

Veamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitarle la 1ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

tiene determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 + 4 + 2 - 4 = 12 \neq 0$

El rango de A/B es 3.

Como el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 son distintos y el sistema **no tiene solución**, es un sistema incompatible.

Justificamos un poco más esta respuesta, aunque no es necesario.

Para $a = -1$ el sistema queda $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$ tenemos la ecuación 1ª y 3ª con la misma

expresión en el lado izquierdo de la igualdad ($x + 2y + z$) pero el lado derecho distinto (0 y -1). Es un sistema sin solución.

b) Para $a = -2$ el sistema tiene solución pues estamos en el caso 1 estudiado antes.

Lo resolvemos por Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \\ \hline 8y - 2z = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + 2y + 2z = -1 \\ -x - 2y - z = 0 \\ \hline z = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 8y - 2z = 2 \\ \boxed{z = -1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 8y + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ \boxed{y = 0} \end{cases} \Rightarrow x + 0 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución del sistema es $x = 1$; $y = 0$; $z = -1$.

P2. (Números y álgebra)

Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.

Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

Llamemos “x” al número de televisores LED e “y” al número de televisores QLED.

Reflejamos en la tabla siguiente los datos proporcionados por el problema

	Nº horas de trabajo electrónica	Nº horas de trabajo de montaje
Televisores LED (x)	4x	2x
Televisores QLED (y)	3y	y
TOTALES	4x + 3y	2x + y

“La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje” $\rightarrow 4x + 3y \leq 2400$; $2x + y \leq 1000$.

“La empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED” $\rightarrow y \geq 200$

El número de horas debe ser una cantidad positiva $\rightarrow x \geq 0$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 2400 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 200 \end{array} \right\}$$

La función objetivo son los beneficios que deseamos maximizar.

El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 € $\rightarrow$

$$B(x, y) = 70x + 50y$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones en busca de la región factible.

$$4x + 3y = 2400$$

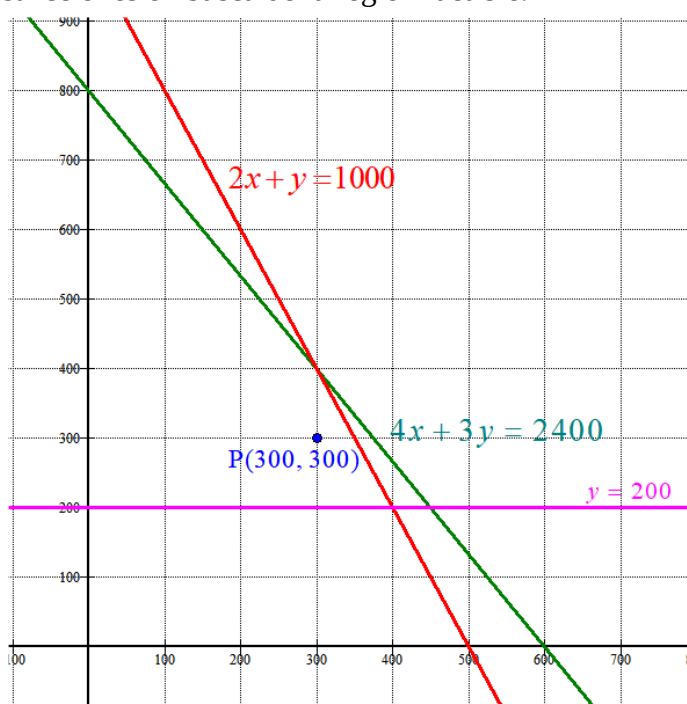
x	$y = \frac{2400 - 4x}{3}$
0	800
300	400

$$2x + y = 1000$$

x	$y = 1000 - 2x$
0	1000
300	400

$$y = 200$$

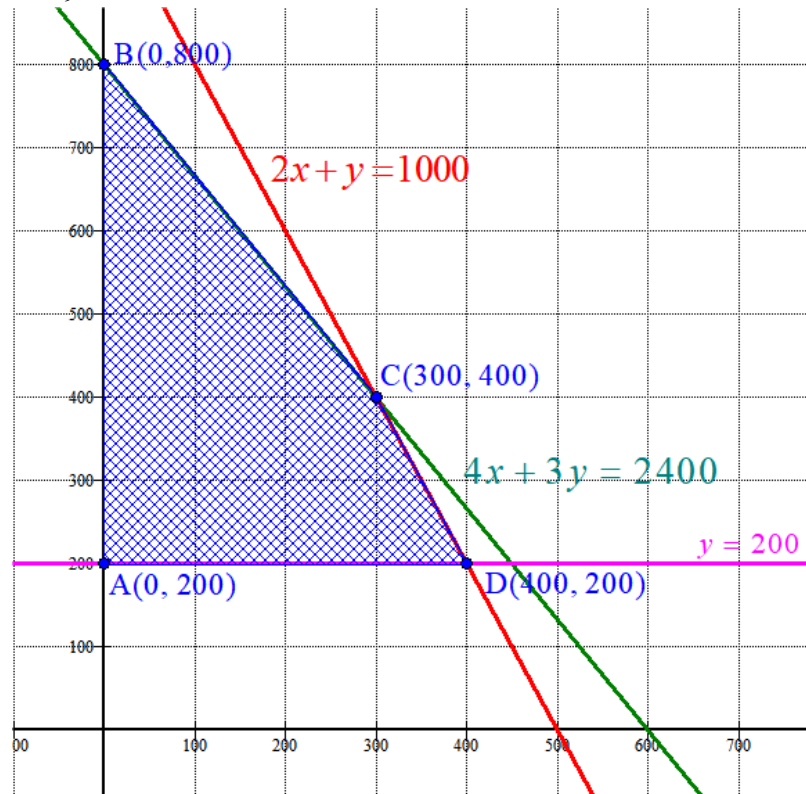
x	$y = 200$
0	200
400	200



Comprobamos si el punto $P(300, 300)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1200 + 900 \leq 2400 \\ 600 + 300 \leq 1000 \\ 300 \geq 0 \\ 300 \geq 200 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas, la región factible es la zona rayada.



Valoramos el beneficio en cada vértice en busca del máximo.

$$A(0, 200) \rightarrow B(0, 200) = 0 + 10000 = 10000$$

$$B(0, 800) \rightarrow B(0, 800) = 0 + 40000 = 40000$$

$$C(300, 400) \rightarrow B(300, 400) = 21000 + 20000 = \mathbf{41000}$$

$$D(400, 200) \rightarrow B(400, 200) = 28000 + 10000 = 38000$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(300, 400)$.

El beneficio máximo se obtiene con 300 televisores LED y 400 televisores QLED. Siendo este beneficio máximo de 41000 €.

P3. (Análisis)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \leq 3 \\ 3x - 2m & x > 3 \end{cases}$$

- a) Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.
 b) Para $m = -1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[5, 7]$.

a) Para que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \leq 3 \\ 3x - 2m & x > 3 \end{cases}$ sea continua debe serlo en $x = 3$ y debe cumplirse:

- Existe $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - 2m = 9 - 2m$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 3x + 2 = 2$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow 9 - 2m = 2 \Rightarrow 2m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{2} = 3.5$

El valor buscado es $m = \frac{7}{2} = 3.5$

b) Para $m = -1$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x \leq 3 \\ 3x + 2 & x > 3 \end{cases}$

En el intervalo $[5, 7]$ la función es $f(x) = 3x + 2$.

Veamos si la función corta el eje OX :

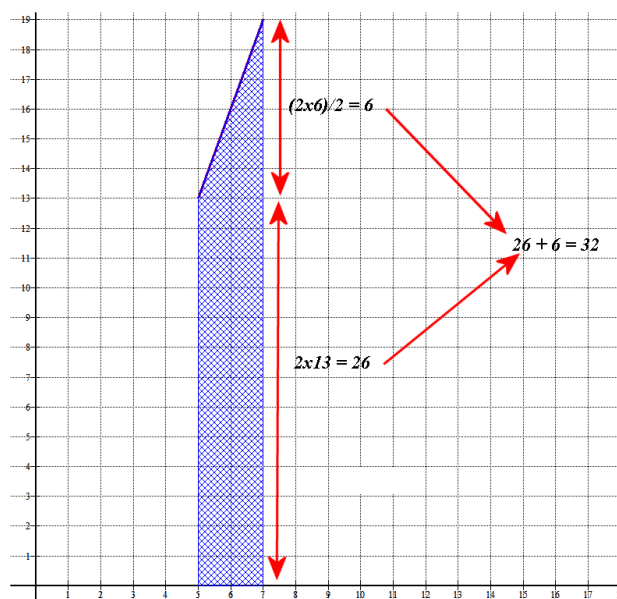
$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \notin [5, 7]$$

No corta el eje OX .

El área pedida es la integral definida entre 5 y 7 de la función $f(x) = 3x + 2$.

$$\text{Área} = \int_5^7 3x - 2dx = \left[3 \frac{x^2}{2} - 2x \right]_5^7 = \left[3 \frac{7^2}{2} - 2 \cdot 7 \right] - \left[3 \frac{5^2}{2} - 2 \cdot 5 \right] = 32 \text{ u}^2$$

No pide dibujarlo, pero lo hacemos para comprobar que está bien calculada el área.



P4. (Análisis)

La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23 grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) y en ningún caso debe bajar de 7°C . La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo:

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$$

donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

- a) Determinar a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23°C .
 b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

a) Para hallar el máximo utilizamos la derivada.

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10 \Rightarrow T'(x) = \frac{-1}{14}2x + 2 = \frac{-x}{7} + 2$$

Igualamos a cero la derivada.

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{7} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{7} = 2 \Rightarrow x = 14$$

Sustituimos $x = 14$ en la segunda derivada

$$T'(x) = \frac{-x}{7} + 2 \Rightarrow T''(x) = \frac{-1}{7} \Rightarrow T''(14) = \frac{-1}{7} < 0$$

En $x = 14$ hay un máximo.

En dicho momento la temperatura es $T(14) = \frac{-1}{14}14^2 + 28 + 10 = -14 + 28 + 10 = 24$.

Valoramos la temperatura en los extremos del día, a las 0 y a las 24 horas.

La temperatura a las 0 horas es $T(0) = 10^{\circ}\text{C}$

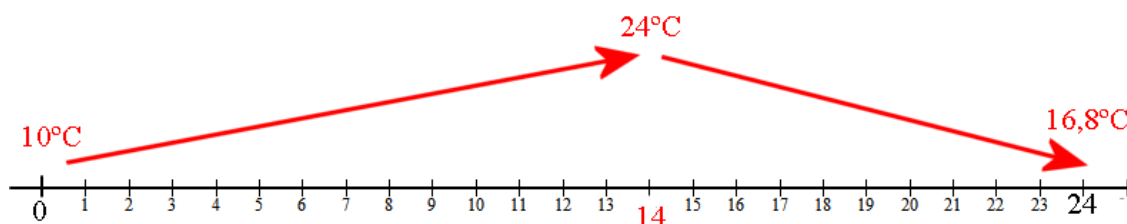
A las 24 horas es $T(24) = \frac{-1}{14}24^2 + 48 + 10 = 16,8^{\circ}\text{C}$

A las 14 horas se alcanza la temperatura máxima y es de 24°C , superando los 23°C .

b) No se baja de 7°C en ningún momento.

La función es continua y por lo estudiado en el apartado anterior la función crece antes de las 14 h y disminuye a partir de las 14 h.

Partiendo de 10°C a las 0 horas, se alcanza el valor máximo de 24°C a las 14 horas y acaba el día (a las 24 horas) con $16,8^{\circ}\text{C}$.



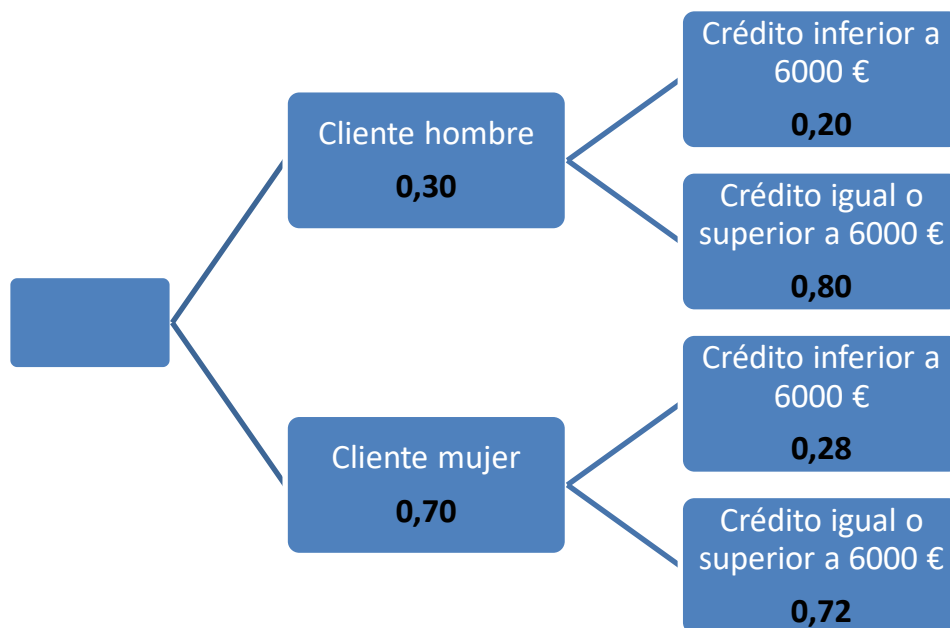
Por lo que no baja de 10°C que sería la temperatura más baja del día 14 de agosto.

P5. (Estadística y probabilidad)

El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6000 € mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

- a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6000 €?
- b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6000 €, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Realizamos un diagrama de árbol



- a) Miramos en el árbol y este suceso se verifica en dos ramas del árbol, por lo que aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos:

$$P(\text{Crédito inferior a 6000 €}) = 0,30 \cdot 0,20 + 0,70 \cdot 0,28 = \boxed{0,256}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea mujer} / \text{Crédito inferior a 6000 €}) &= \frac{P(\text{Sea mujer} \cap \text{Crédito inferior a 6000 €})}{P(\text{Crédito inferior a 6000 €})} = \\
 &= \frac{P(\text{Sea mujer}) P(\text{Crédito inferior a 6000 €} / \text{Sea mujer})}{P(\text{Crédito inferior a 6000 €})} = \frac{0,70 \cdot 0,28}{0,256} = \frac{0,196}{0,256} = \boxed{0,765}
 \end{aligned}$$

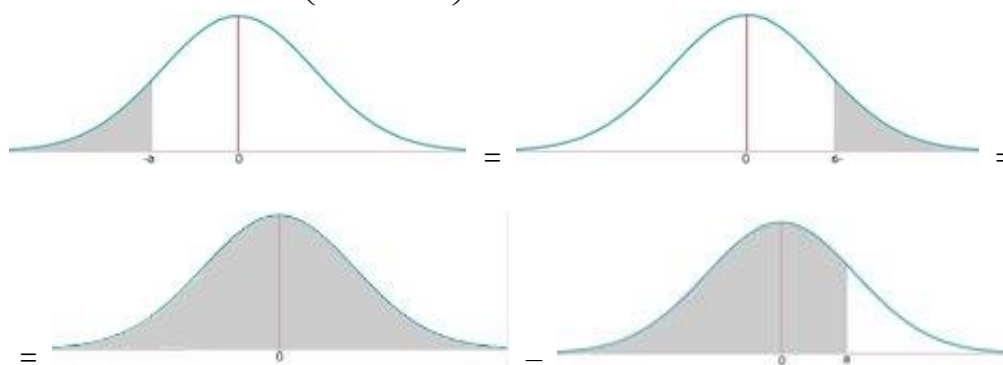
P6. (Estadística y probabilidad)

Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12.5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los primeros 4 meses.

- a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.
 b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

X = Número de meses sin averías de un móvil. $X = N(32, 12.5)$

$$a) P(X \leq 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{4-32}{12.5}\right) = P(Z \leq -2.24) =$$



$$= P(Z \geq 2.24) = 1 - P(Z \leq 2.24) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} =$$

$$= 1 - 0.9875 = \boxed{0.0125}$$

- b) $X = N(32, 12.5)$. Si tomamos una muestra de 64 teléfonos móviles la distribución de la media sigue

$$\text{una normal } \overline{X}_{64} = N\left(32, \frac{12.5}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{64} = N(32, 1.5625)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} \geq 36)$.

$$P(\overline{X}_{64} \geq 36) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{36-32}{1.5625}\right) = P(Z \geq 2.56) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.56) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9948 = \boxed{0.0052}$$

Cuestiones (a elegir una)**C1. (Números y álgebra)**

¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

No se puede calcular la inversa de una matriz no cuadrada, por lo que no existe la inversa de una matriz 4×2 .

La traspuesta de una matriz 4×2 es otra matriz 2×4 por lo que no coinciden en la dimensión y no pueden ser iguales

C2. (Análisis)

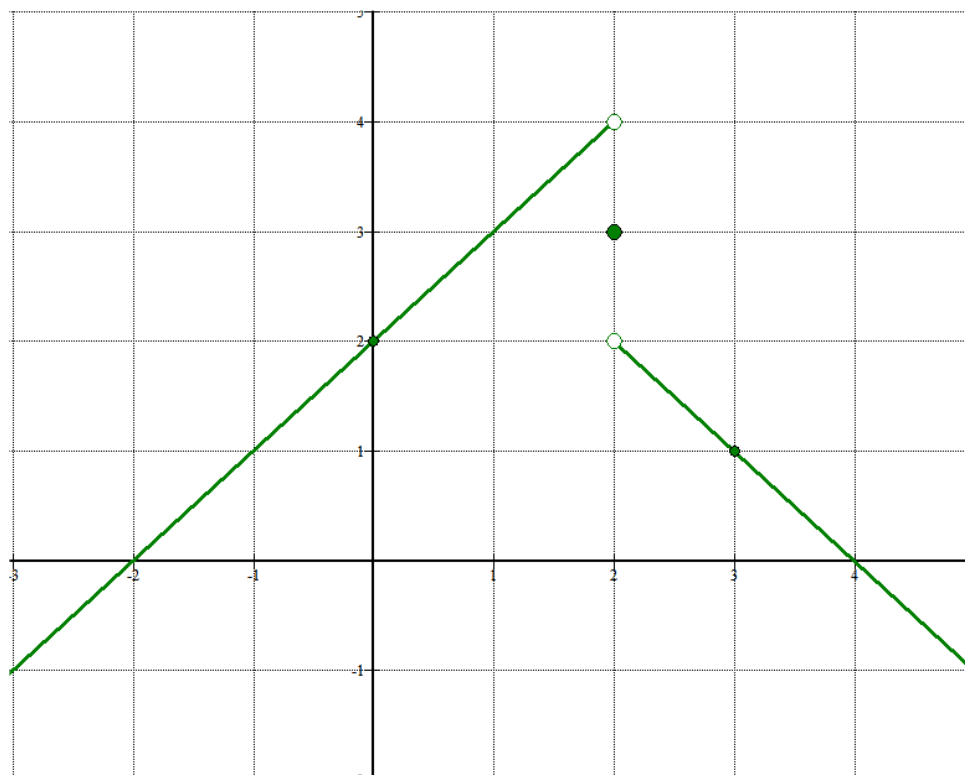
Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$y = x + 2$$

x	$y = x + 2$
0	2
2	4 No se incluye

$$y = 4 - x$$

x	$y = 4 - x$
2	2 No se incluye
3	1

**C3. (Estadística y probabilidad)**

Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

La probabilidad de obtener al menos una cruz es lo contrario de obtener ninguna cruz.

$$P(\text{Obtener al menos 1 cruz}) = 1 - P(\text{Obtener 0 cruces}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

EBAU Extraordinaria 2019

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

2A- Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$.

Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - (1 - a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial $(0, 0, 0)$.

2B- Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$, con $t \in [0, 60]$.

- a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase. **(1 punto)**
- b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima? **(2 puntos)**

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

- a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
- b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B . Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B .

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Llamemos x = número de lámparas del modelo A, y = número de lámparas del modelo B.

Las restricciones a la situación planteada son:

- Deben ser valores positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$
- Un comerciante dispone de 350000 €, el modelo A tiene un coste de 150 € y el modelo B cuesta 100 € $\rightarrow 350000 = 150x + 100y$
- Sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo $\rightarrow x + y \leq 3000$
- Puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A $\rightarrow x \leq 2000$

Resumiendo, las restricciones son:

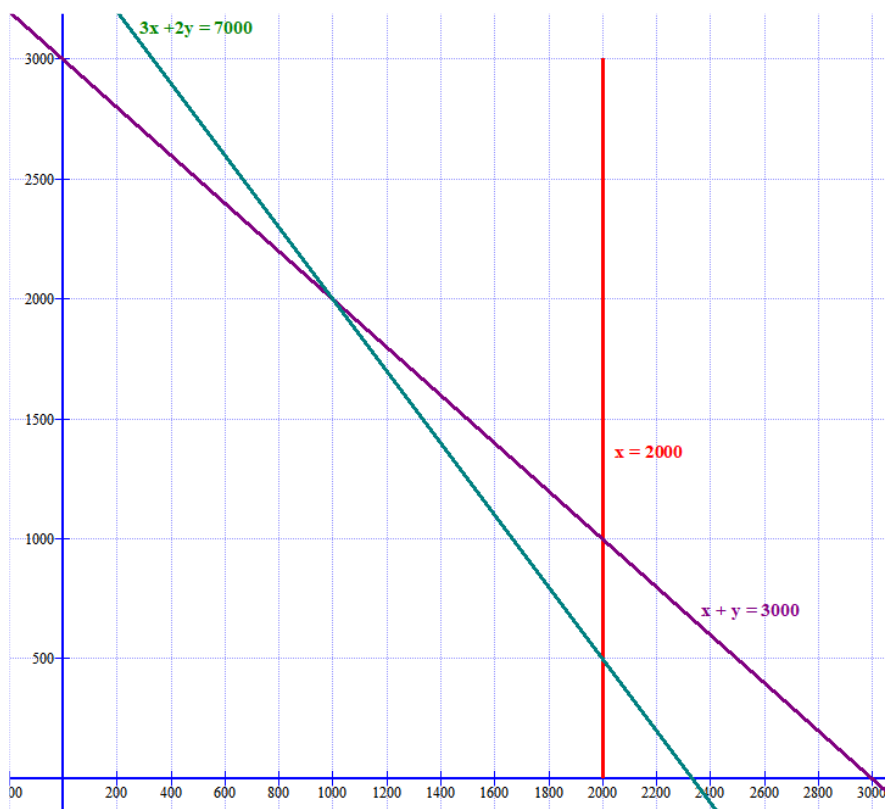
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2000 \\ 150x + 100y \leq 350000 \Rightarrow 3x + 2y \leq 7000 \\ x + y \leq 3000 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar es la función beneficio: $\text{Beneficio} = B(x, y) = 15x + 11y$

Dibujamos las rectas asociadas a cada restricción:

x	$y = \frac{7000 - 3x}{2}$
1000	2000
2000	500
0	3500

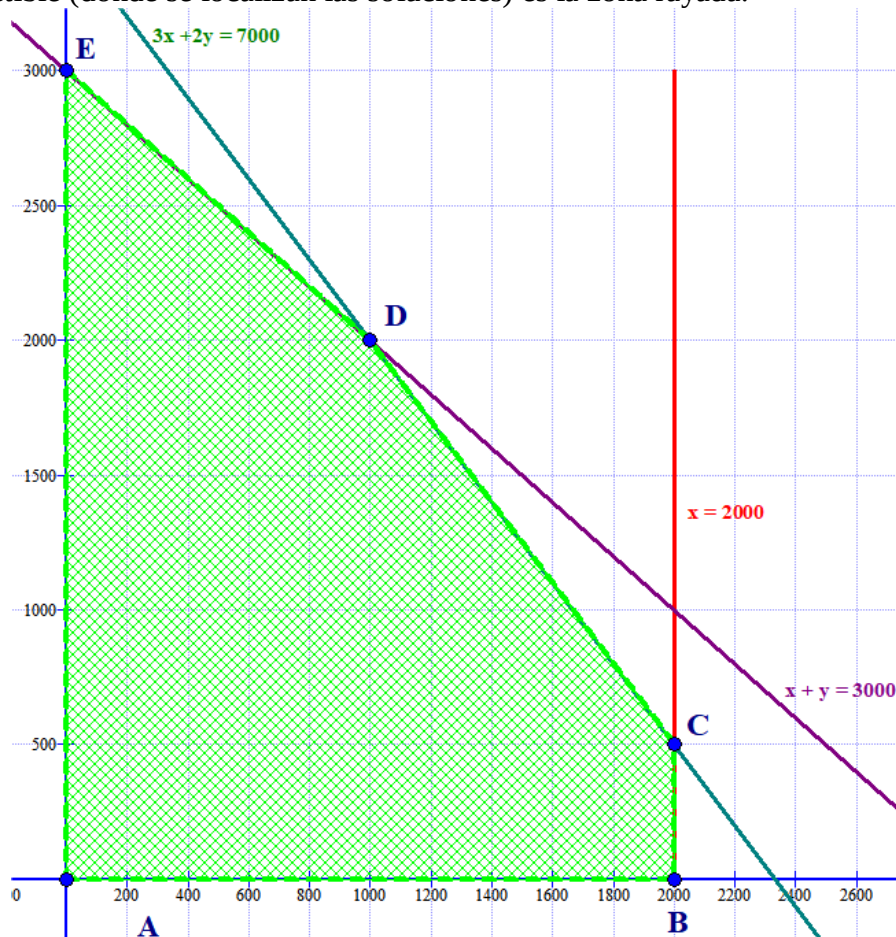
x	$y = 3000 - x$
0	3000
3000	0
1000	2000



Si probamos el punto (200, 200) vemos que cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200 \geq 0 \\ 200 \geq 0 \\ 200 \leq 2000 \\ 600 + 400 \leq 7000 \\ 200 + 200 \leq 3000 \end{array} \right\}$$

La región factible (donde se localizan las soluciones) es la zona rayada:



Y las coordenadas de los vértices de la región son: A(0,0), B(2000,0), C(2000, 500), D(1000, 2000) y E(0, 3000).

Valoramos la función beneficio en cada uno de ellos y decidimos cual da máximo beneficio.

$$A(0,0) \Rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(2000,0) \Rightarrow B(2000,0) = 30000$$

$$C(2000, 500) \Rightarrow B(2000,500) = 30000 + 5500 = 35500$$

$$D(1000, 2000) \Rightarrow B(1000,2000) = 15000 + 22000 = 37000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(0, 3000) \Rightarrow B(0,3000) = 33000$$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(1000, 2000). Debe comprar 1000 lámparas del modelo A y 2000 del modelo B. Obteniendo un beneficio de 37000 €.

2A- Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

Vamos a determinar el valor de a , b y c de la parábola cumpliendo los datos proporcionados.

- Pasa por el punto $(0, 0) \rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$
- Pasa por el punto $(x, y) = (1, -1) \rightarrow -1 = -a - b \Rightarrow a + b = 1$
- Mínimo relativo en $x = 1 \rightarrow$ la derivada en $x = 1$ es cero.

$$\left. \begin{array}{l} y = -ax^3 - bx \Rightarrow y' = -3ax^2 - b \\ y'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -3a - b \Rightarrow b + 3a = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos condiciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ b + 3a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 1 - a \\ b + 3a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a + 3a = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}}$$

La función es $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Ya conocemos un mínimo, situado en el punto $(1, -1)$. Hallemos el resto de puntos críticos.

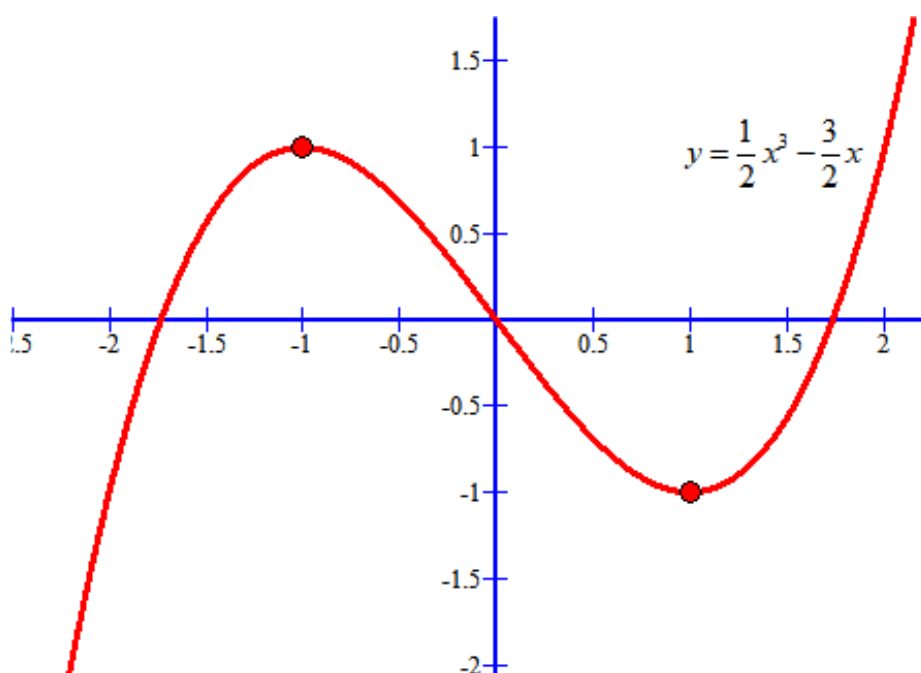
$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = 3x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y''(-1) = -3 < 0 \text{ es un máximo en } x = -1 \\ y''(1) = 3 > 0 \text{ es un mínimo en } x = 1 \end{array} \right\}$$

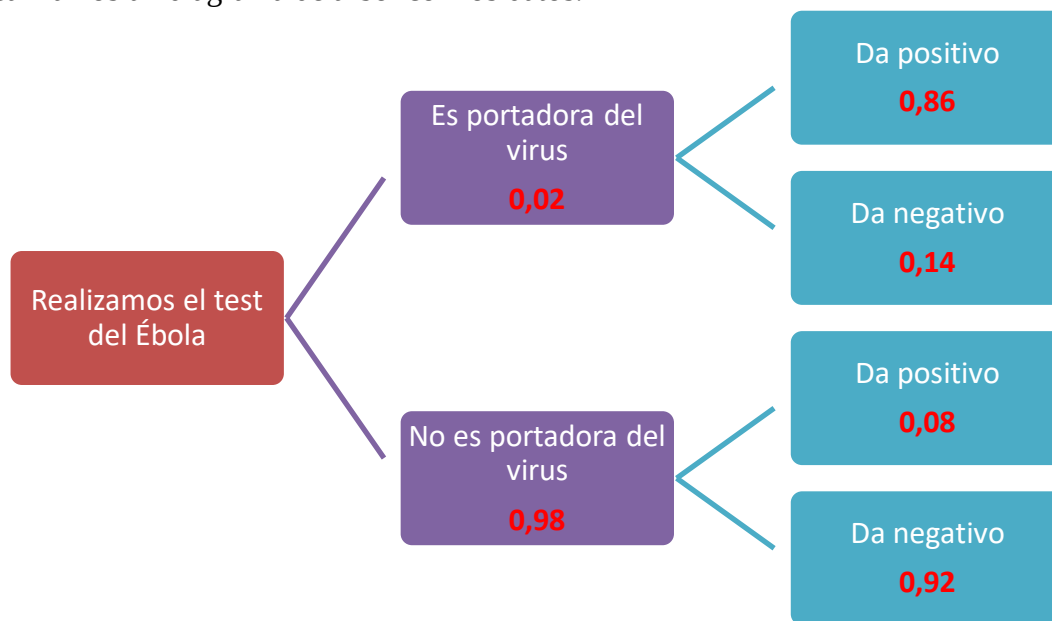
Hacemos una pequeña tabla para situar su gráfica.

x	y
-1	1
0	0
1	-1
2	1



3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos.



Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Portadora del virus} / \text{Test ha dado positivo}) =$$

$$= \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Test ha dado positivo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo})}{P(\text{Portadora del virus y Test da positivo}) + P(\text{No portadora del virus y Test da positivo})} =$$

$$= \frac{0,02 \cdot 0,86}{0,02 \cdot 0,86 + 0,98 \cdot 0,08} = \frac{172}{172 + 784} = \frac{172}{956} = \boxed{0,18}$$

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Si llamamos p a la probabilidad de salir cruz, se cumple que la probabilidad de salir cara es $3p$. La suma de estas probabilidades es 1, se cumple:

$$p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de salir cruz es $\frac{1}{4}$ y de salir cara es $\frac{3}{4}$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la probabilidad de que al lanzar la moneda al aire salga cara es el triple de que salga cruz, debe de ocurrir que por cada vez que salga cruz, saldrá tres veces cara. Cada 4 veces que lance la moneda saldrá una sola vez cruz.

Probabilidad de sacar cruz (según la regla de Laplace) = $\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Opción B**1B-** Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - (1 - a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial $(0, 0, 0)$.

El sistema tiene matriz de coeficientes y matriz ampliada asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 + a^2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 + a^2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 + a^2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 - 10 + 10a^2 + 8 - 8a^2 - 2 - 30 = 2a^2 - 18$$

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 18 = 0 \Rightarrow a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

CASO 1. $a \neq \pm 3$

En este caso el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su solución es la trivial $(0, 0, 0)$.

CASO 2. $a = 3$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

El rango de la matriz A es 2. Tiene un menor no nulo (quitamos fila y columna 3ª)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0. \text{ Como la matriz ampliada y la matriz de coeficientes tienen el mismo}$$

rango, ya que la ampliada solo añade una columna con todo ceros.

$$\text{Rango de A} = \text{Rango de A/B} < \text{nº incógnitas}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $a = -3$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y + 8z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Es el mismo caso que el anterior. Sistema compatible indeterminado.

Respuesta: El sistema tiene distintas soluciones de la trivial cuando $a = 3$ o $a = -3$.

2B- Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$, con $t \in [0, 60]$

- a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase. **(1 punto)**
 b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima? **(2 puntos)**

a) $f(60) = -7200 + 7200 + 5 = 5$

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(t) = -2t^2 + 120t + 5 \Rightarrow f'(t) = -4t + 120$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -4t + 120 = 0 \Rightarrow -4t = -120 \Rightarrow t = \frac{-120}{-4} = 30 \text{ minutos}$$

Comprobamos que es un máximo viendo el signo de la derivada segunda para $t = 30$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = -4t + 120 \Rightarrow f''(t) = -4 \\ t = 30 \text{ minutos} \end{array} \right\} \Rightarrow f''(30) = -4 < 0$$

A los 30 minutos hay una atención máxima. Siendo esta capacidad de atención

$$f(30) = -1800 + 3600 + 5 = 1805.$$

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo de definición $[0, 60]$.

$$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 120 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$f(60) = -2 \cdot 60^2 + 120 \cdot 60 + 5 = 5$$

La atención a los 0 minutos y a los 60 minutos es de 5. Por lo que el máximo relativo en $x = 30$ es un máximo absoluto.

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

- a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
- b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

X = Tiempo de resolución de un examen en minutos. $X = N(74, \sigma)$

- a) $X = N(74, 8)$. Nos piden calcular $P(X > 90)$.

$$P(X > 90) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 74}{8} > \frac{90 - 74}{8}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

- b) $X = N(74, 9)$. La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media que X (74) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{36}} = 1,5$. $\overline{X}_{36} = N(74, 1,5)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{36} < 77)$.

$$P(\overline{X}_{36} < 77) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{36} - 74}{1,5} < \frac{77 - 74}{1,5}\right) = P(Z < 2) = \boxed{0,9772}$$

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B . Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B .

Sabemos que $P(A) = 0,5$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(B)}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

Nos piden calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Sabemos que $P(A) = 0,5$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(B)}{2} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

Construimos una tabla de contingencia:

	B	B ^c	
A	1/3		1/2
A ^c			
	2/3		1

Completamos la tabla:

	B	B ^c	
A	1/3		1/2
A ^c	1/3		1/2
	2/3	1/3	1

Pasamos las fracciones a denominador común 6 para que sea más fácil restar y sumar.

	B	B ^c	
A	2/6	1/6	3/6
A ^c	2/6	1/6	3/6
	4/6	2/6	1

La probabilidad pedida es el valor situado en la celda de la fila A^c y la columna B^c .

$$P(A^c \cap B^c) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

EBAU Ordinaria 2019

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

- Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .
- Resuelve el sistema para $a = -1$.

2A- Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t) = (t - 2)^2 (1 - 2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

- Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto)**.
- Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

4A- La ficha técnica del estudio social “*Influencers* en redes sociales” indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5%.

Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Opción B

1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

2B- La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 17x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 10 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x = 8$?
- b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:

- a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
- b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: $[0.122, 0.378]$ y $[0.165, 0.335]$

¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = -1$.

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

El determinante de A vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 2a - 9 - 4 + 4a = 6a - 19$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 6a - 19 = 0 \Rightarrow 6a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{6}$$

Distinguimos dos casos.

CASO 1. $a \neq \frac{19}{6}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por lo tanto su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = \frac{19}{6}$.

El sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + \frac{19}{6}y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + \frac{19}{6}y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 18x + 19y + 12z = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \begin{array}{rrcr} 2x & +3y & -4z & = 0 \\ -2x & -2y & -2z & = -4 \\ \hline & y & -6z & = -4 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 18 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \begin{array}{rrcr} 18x & +19y & +12z & = 12 \\ -18x & -18y & -18z & = -36 \\ \hline & y & -6z & = -24 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y - 6z = -4 \\ y - 6z = -24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ \begin{array}{rrcr} y & -6z & & = -24 \\ -y & +6z & & = 4 \\ \hline & 0 & & = -20 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ y - 6z = -4 \\ 0 = -20 \end{array} \right.$$

La tercera ecuación es imposible. Este sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) Para $a = -1$ el sistema es compatible determinado. Hallemos su solución, utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 8 - 6 - 8}{-6 - 19} = \frac{-10}{-25} = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-24 + 4 - 8 + 8}{-6 - 19} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 4 - 18 - 4}{-6 - 19} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}$$

La solución es $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{4}{5}$; $z = \frac{4}{5}$

2A- Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Hallamos la derivada de la función y analizamos la evolución del signo de la misma.

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116 \Rightarrow p'(t) = 2(t-2)(1-2t) + (t-2)^2(-2) + 252$$

$$p'(t) = 2(t-2t^2-2+4t) + (t^2+4-4t)(-2) + 252$$

$$p'(t) = 2(-2t^2-2+5t) + (-2t^2-8+8t) + 252$$

$$p'(t) = -4t^2-4+10t-2t^2-8+8t+252$$

$$p'(t) = -6t^2+18t+240$$

La igualamos a cero.

$$p'(t) = 0 \Rightarrow -6t^2 + 18t + 240 = 0 \Rightarrow -t^2 + 3t + 40 = 0$$

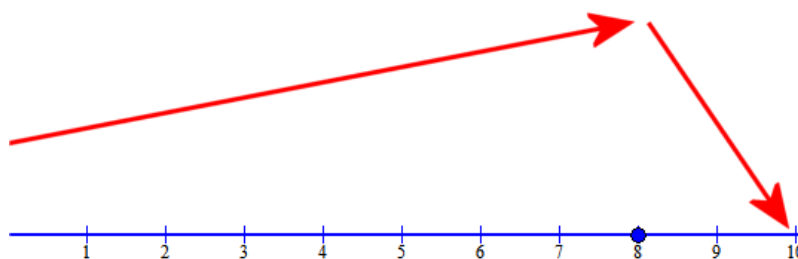
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{-2} = \frac{-3 \pm 13}{-2} = \begin{cases} = \frac{-3+13}{-2} = -5 \\ = \frac{-3-13}{-2} = 8 \end{cases}$$

Esta función solo afecta al periodo 2005-2015, es decir, cuando $t \in [0,10]$.

Rechazamos el valor $t = -5$.

Estudiemos el signo de la derivada antes de 8 y después de 8.

- En $[0,8)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $p'(2) = -24 + 36 + 240 = 252 > 0$. El número de habitantes crece.
- En $(8,10]$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $p'(10) = -600 + 180 + 240 = -180 < 0$. El número de habitantes decrece.



La función alcanza un valor máximo en $x = 8$, es decir, en el año 2013. En ese momento la población es de 1592 mil habitantes, es decir, 1.592.000 habitantes.

$$p(8) = (8-2)^2(1-16) + 252 \cdot 8 + 116 = 36(-15) + 252 \cdot 8 + 116 = 1592$$

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

- a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto)**.
 b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

X = Tiempo en meses que un fumador tarda en dejar definitivamente de fumar. $X = N(5, 2)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 4)$.

$$P(X > 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-5}{2} > \frac{4-5}{2}\right) = P(Z > -0,5) =$$

$$= P(Z \leq 0,5) = \boxed{0,6915}$$

- b) $X = N(5, 2)$. La distribución de las medias muestrales de tamaño 50 sigue una normal de la misma media que X (5) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. $\overline{X}_{50} = N\left(5, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{50} < 6)$.

$$P(\overline{X}_{50} < 6) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{50}-5}{\frac{\sqrt{2}}{5}} < \frac{6-5}{\frac{\sqrt{2}}{5}}\right) = P(Z < 3,54) = \boxed{0,9998}$$

4A- La ficha técnica del estudio social “*Influencers* en redes sociales” indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

$$n = 1096$$

$$\text{Error} = \pm 0,03$$

$$\alpha = 0,955$$

Población: Individuos de 16 a 55 años residentes en España.

Diseño muestral: Muestra estratificada con muestreo aleatorio simple por estratos.

Tamaño muestral: 1096

Parámetro estudiado: Proporción de individuos seguidores de Influencers.

Opción B

1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Es un problema que se resuelve con un sistema de ecuaciones, busquemos las ecuaciones que componen el sistema.

Llamemos x = dinero que recibe el hijo; y = dinero que recibe la madre; z = dinero que recibe el padre.

- La madre recibe el doble que el hijo $\rightarrow y = 2x$.
- El padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre $\rightarrow z = \frac{2}{3}y$
- El importe de la devolución es 3250 € $\rightarrow x + y + z = 3250$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ z = \frac{2}{3}y \\ x + y + z = 3250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{2}{3}2x \\ x + 2x + z = 3250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{4}{3}x \\ x + 2x + z = 3250 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2x + \frac{4}{3}x = 3250 \Rightarrow 3x + 6x + 4x = 9750 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x = 9750 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9750}{13} = 750} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{3}750 = 1000} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 750 = 1500}$$

El hijo recibe 750 €, la madre 1500 € y el padre 1000 €.

2B- La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 17x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 10 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuándo $x=8$?
 b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

a) La función es continua cuando lo es en $x = 5$ y en $x = 10$.

En $x=5$ debe cumplirse:

- Existe $f(5) = -75 + 150 + 10 = 85$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 17x = 85$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (-3x^2 + 30x + 10) = -75 + 150 + 10 = 85$
- Los tres valores son iguales.

Todo se cumple, luego la función es continua en $x = 5$.

En $x = 10$ debe cumplirse

- Existe $f(10) = 10$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} -3x^2 + 30x + 10 = -300 + 300 + 10 = 10$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} 10 = 10$
- Los tres valores son iguales.

Todo se cumple, luego la función es continua en $x = 10$.

La función es continua en $[0, 10]$.

¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuándo $x=8$?

Calculamos $f(8)$.

$$f(8) = -3 \cdot 64 + 240 + 10 = -192 + 250 = 58 \text{ millones de barriles}$$

b) Entre 2 y 3 la función es una recta $f(x) = 17x$.

El área será el valor de la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$\int_2^3 17x dx = \left[17 \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = \left[17 \frac{3^2}{2} \right] - \left[17 \frac{2^2}{2} \right] = \frac{153}{2} - 34 = \frac{85}{2} = 42,5$$

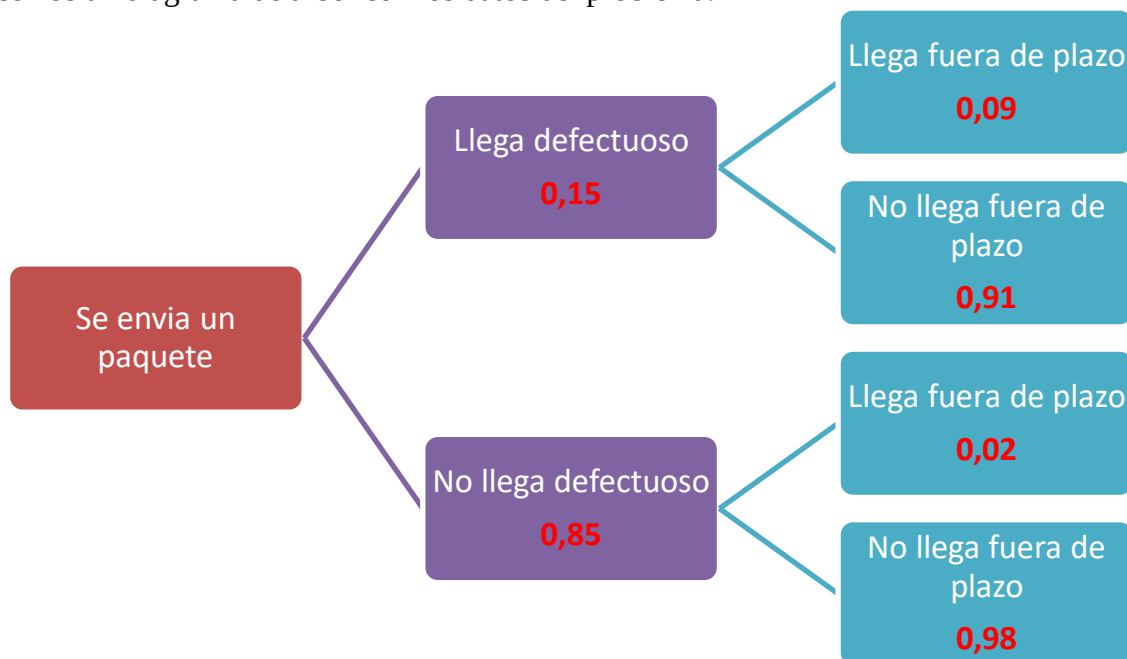
El área tiene un valor de 42,5 unidades cuadradas.

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:

a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.

b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Realicemos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Llega fuera de plazo}) &= \\
 &= P(\text{Llega defectuoso})P(\text{Llega fuera de plazo} / \text{Llega defectuoso}) + \\
 &+ P(\text{No llega defectuoso})P(\text{Llega fuera de plazo} / \text{No llega defectuoso}) = \\
 &= 0,15 \cdot 0,09 + 0,85 \cdot 0,02 = \boxed{0,0305}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Llega defectuoso} / \text{Llega fuera de plazo}) &= \frac{P(\text{Llega defectuoso y fuera de plazo})}{P(\text{Llega fuera de plazo})} = \\
 &= \frac{0,15 \cdot 0,09}{0,0305} = \boxed{0,443}
 \end{aligned}$$

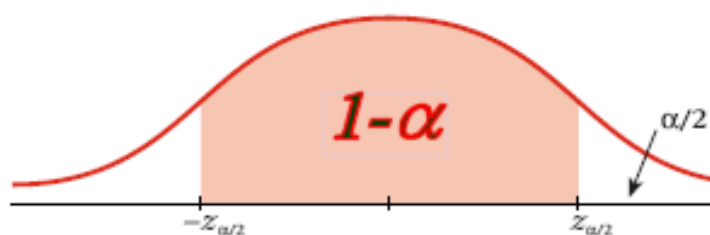
4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: $[0.122, 0.378]$ y $[0.165, 0.335]$
¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

X = Proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A.

La amplitud del intervalo $[0.122, 0.378]$ es $A_1 = \frac{0,378 - 0,122}{2} = \frac{0,256}{2} = 0,128$. El error en este intervalo de confianza es $E_1 = \frac{0,128}{2} = 0,064$

La amplitud del intervalo $[0.165, 0.335]$ es $A_2 = \frac{0,335 - 0,165}{2} = \frac{0,170}{2} = 0,085$. El error en este intervalo de confianza es $E_2 = \frac{0,085}{2} = 0,0425$

Dada la imagen:



Si el nivel de confianza es mayor $(1 - \alpha)$ entonces el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es mayor y el error cuya

fórmula es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$ será mayor. Siendo p , q y n valores iguales.

A mayor amplitud del intervalo mayor nivel de confianza.

Por lo tanto, el intervalo $[0.165, 0.335]$ tiene menor amplitud y por tanto menor confianza.

EBAU Extraordinaria 2018

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	--	--	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Una empresa de asistencia ha de enviar enfermeros y médicos a una residencia de mayores para cubrir las vacaciones. Por limitación de espacio, sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales. Además, en cada visita cada enfermero acumula 2 descansos y cada médico acumula 4 descansos. La empresa sólo dispone de 8 médicos y no le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia. Si la empresa obtiene un beneficio neto de 50 euros por cada enfermero y de 80 euros por cada médico que va a la residencia, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos enfermeros y médicos han de acudir cada vez a la residencia para obtener el máximo beneficio neto por parte de la empresa de asistencia. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{100}{x-3} + bx^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ donde a y b son parámetros

- Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y tenga un mínimo relativo en $x = 2$.
- Para $a = 0$, halla el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

3A- Se sabe que el salario mensual de los trabajadores de dos empresas A y B sigue la distribución normal.

- Si en la empresa A el salario mensual medio es de 1200 euros y su desviación típica es 400 euros, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador cobre más de 1740 euros al mes?
- Si en la empresa B el 80.23 % de los trabajadores cobra menos de 1570 euros, calcula la desviación típica del salario mensual sabiendo que el salario medio mensual es de 1400 euros.

4A- Se sabe que si ha ocurrido A, la probabilidad de que ocurra B es 0.3. Halla la probabilidad de que, si ha ocurrido A no ocurra B.

Opción B

1B- En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los 3 países.

2B- Una empresa de aguas realiza un estudio de mercado y descubre que la curva de beneficios mensuales viene dada, en miles de euros, por la función $B(x) = 10x - x^2 - 21$, donde x representa, en euros, el precio de venta de una caja de botellas. Si este producto se vende en cajas de 10 botellas, calcula el precio de venta de una botella para que el beneficio obtenido sea máximo y calcula el importe de ese beneficio.

3B- Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados. Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales.

- a) Determina la probabilidad de que la empresa gane el caso.
- b) Si el caso elegido se ha ganado, calcula la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

4B- En una clase de yoga hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escoge a tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen dos mujeres y un hombre.

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Una empresa de asistencia ha de enviar enfermeros y médicos a una residencia de mayores para cubrir las vacaciones. Por limitación de espacio, sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales. Además, en cada visita cada enfermero acumula 2 descansos y cada médico acumula 4 descansos. La empresa sólo dispone de 8 médicos y no le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia. Si la empresa obtiene un beneficio neto de 50 euros por cada enfermero y de 80 euros por cada médico que va a la residencia, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos enfermeros y médicos han de acudir cada vez a la residencia para obtener el máximo beneficio neto por parte de la empresa de asistencia. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Llamamos “x” al número de médicos que van a la residencia e “y” al número de enfermeros.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información ofrecida por el ejercicio.

	Descansos	Beneficio
Nº médicos (x)	$4x$	$80x$
Nº enfermeros (y)	$2y$	$50y$
TOTALES	$4x + 2y$	$80x + 50y$

FUNCIÓN OBJETIVO

La función a maximizar es el beneficio que viene expresado por la función $B(x, y) = 80x + 50y$

RESTRICCIONES

Los valores del número de personas debe ser mayores o igual que 0 $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales” $\rightarrow x + y \leq 12$

“La empresa sólo dispone de 8 médicos” $\rightarrow x \leq 8$

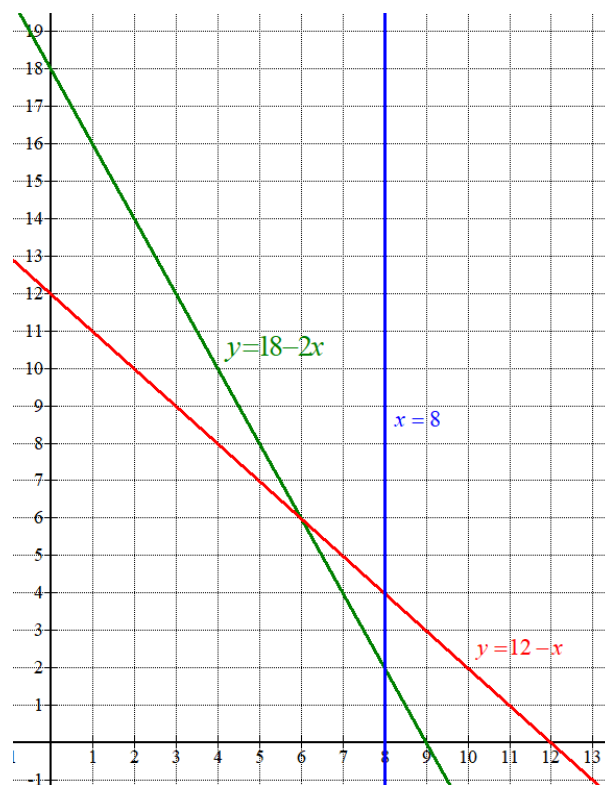
“No le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia” $\rightarrow 4x + 2y \leq 36$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ x \leq 8 \\ 4x + 2y \leq 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ x \leq 8 \\ 2x + y \leq 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 12 - x \\ x \leq 8 \\ y \leq 18 - 2x \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible, empezando por dibujar las rectas asociadas.

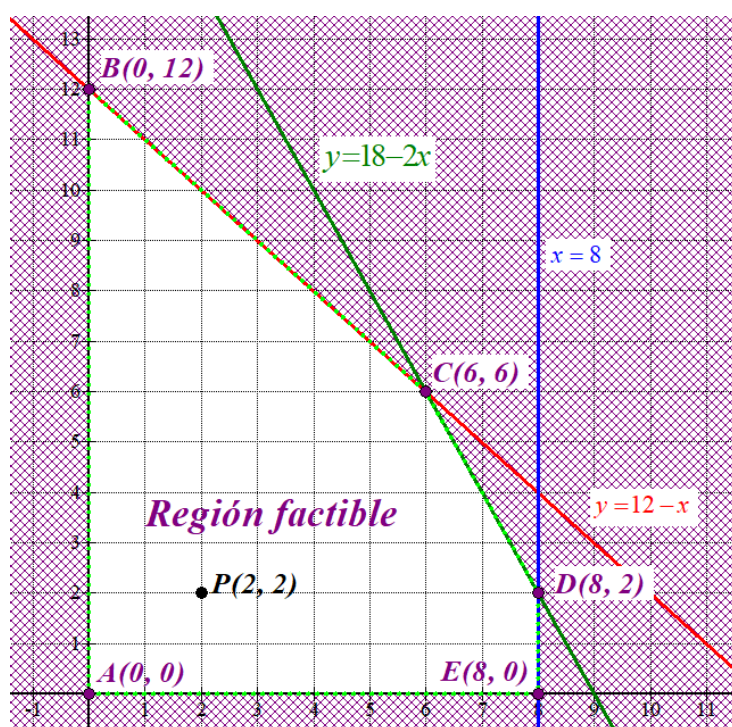
$x \geq 0; y \geq 0$	$y = 12 - x$	$x = 8$	$y = 18 - 2x$
Primer cuadrante	$x \mid y = 12 - x$	$x \mid y = 12 - x$	$x \mid y = 18 - 2x$
	0 $\mid$ 12	8 $\mid$ 0	0 $\mid$ 18
	12 $\mid$ 0	8 $\mid$ 4	5 $\mid$ 8



Probamos si un punto cualquiera situado en el primer cuadrante por debajo de las rectas verde y roja y a la izquierda de la recta vertical azul cumple las inecuaciones, por ejemplo $P(2, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq 0; 2 \geq 0 \\ 2 \leq 12 - 2 \\ 2 \leq 8 \\ 2 \leq 18 - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡¡¡Se cumplen todas!!!}$$

La región factible es la que contiene dicho punto y limitada por los ejes de coordenadas y las rectas verde, azul y roja. La dejamos en blanco en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficios $B(x, y) = 80x + 50y$ en cada uno de los vértices de la región factible, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 12) \rightarrow B(0, 12) = 600$$

$$C(6, 6) \rightarrow B(6, 6) = 480 + 300 = 780 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(8, 2) \rightarrow B(8, 2) = 640 + 100 = 740$$

$$E(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 640$$

El beneficio máximo es 780 € y se obtiene enviando a 6 enfermeros y 6 médicos al centro.

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{100}{x-3} + bx^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$ donde a y b son parámetros

- a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y tenga un mínimo relativo en $x = 2$.
 b) Para $a = 0$, halla el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

a) La única posible discontinuidad de la función está en el punto de abscisa $x = 5$, por lo que para que la función sea continua, ha de cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} f(5) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \\ f(5) &= 5^3 + 5a + 10 = 135 + 5a \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} x^3 + ax + 10 = 135 + 5a \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{100}{x-3} + bx^2 = \frac{100}{5-3} + 25b = 50 + 25b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 135 + 5a = 50 + 25b \Rightarrow \boxed{5b - a = 17}$$

Además, $f(x)$ posee un mínimo relativo en $x = 2$, por lo que ha de cumplirse que $f'(2) = 0$.
 Como en el entorno de $x = 2$ la función es $f(x) = x^3 + ax + 10$, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -12}$$

Siendo $a = -12$, sustituimos este valor en la ecuación obtenida anteriormente y hallamos el valor de b .

$$\left. \begin{aligned} 5b - a &= 17 \\ a &= -12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5b + 12 = 17 \Rightarrow 5b = 5 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Los valores buscados son $a = -12$ y $b = 1$.

b) Para $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^3 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{100}{x-3} + bx^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

El intervalo $[0,5]$ corresponde al primer tramo de la función que está definido por $f(x) = x^3 + 10$.
 Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + 10 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 + 10 = 0 \Rightarrow x^3 = -10 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{10}$$

Como $x = -\sqrt[3]{10} \notin [0,5]$ el área pedida se obtiene con el cálculo de la integral definida entre 0 y 5 de la función.

$$\text{Área} = \int_0^5 x^3 + 10 dx = \left[\frac{x^4}{4} + 10x \right]_0^5 = \left[\frac{5^4}{4} + 50 \right] - \left[\frac{0^4}{4} + 0 \right] = \boxed{\frac{825}{4} = 206.25 \text{ u}^2}$$

El área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$ tiene un valor de 206.25 unidades cuadradas.

3A- Se sabe que el salario mensual de los trabajadores de dos empresas A y B sigue la distribución normal.

- a) Si en la empresa A el salario mensual medio es de 1200 euros y su desviación típica es 400 euros, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador cobre más de 1740 euros al mes?
- b) Si en la empresa B el 80.23 % de los trabajadores cobra menos de 1570 euros, calcula la desviación típica del salario mensual sabiendo que el salario medio mensual es de 1400 euros.

- a) El salario mensual de los trabajadores de la empresa A es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1200$ € y desviación típica $\sigma = 400$ €. $X = N(1200, 400)$

Se nos pide la probabilidad de que el sueldo de un trabajador supere los 1 740 € mensuales, es decir: $P(X > 1740)$

Tipificando la variable, podemos recurrir a la tabla de desviación normal estándar $N(0,1)$ y conocer esta probabilidad:

$$P(X > 1740) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{1740 - 1200}{400}\right) = P(Z > 1.35) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z < 1.35) = \dots$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,94

$$\dots = 1 - 0.9115 = 0.0885$$

Es decir, el 8,85 % de los trabajadores cobrarían más de 1 740 euros al mes.

- b) El salario mensual de los trabajadores de la empresa B es una variable aleatoria Y que sigue una distribución normal, de media $\mu = 1400$ € y desviación típica σ desconocida: $Y \sim N(1400, \sigma)$. En este caso se nos dice que el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1570 €, lo que significa: $P(Y < 1570) = 0,8023$

Tipificando la variable y localizando esta probabilidad en la tabla de distribución normal estándar, se deduce el valor de la desviación típica σ :

$$P(Y < 1570) = 0.8023 \Rightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1570 - 1400}{\sigma}\right) = 0.8023 \Rightarrow P\left(Z < \frac{170}{\sigma}\right) = 0.8023 \Rightarrow \dots$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7894	0,7925	0,7955	0,7985	0,8015	0,8043
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

$$\dots \Rightarrow \frac{170}{\sigma} = 0.85 \Rightarrow \sigma = \frac{170}{0.85} = 200$$

La desviación típica del salario mensual es de 200 €.

4A- Se sabe que si ha ocurrido A, la probabilidad de que ocurra B es 0.3. Halla la probabilidad de que, si ha ocurrido A no ocurra B.

Tenemos que $P(B/A) = 0.3$ y nos piden la probabilidad: $P(\bar{B}/A)$

Utilizamos la probabilidad del suceso contrario.

$$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0.3 = \boxed{0.7}$$

Opción B

1B- En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los 3 países.

Si llamamos “ x ” al número de huéspedes italianos, “ y ” al número de huéspedes portugueses y “ z ” al número de huéspedes japoneses:

“En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón” $\rightarrow x + y + z = 25$

“Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés” $\rightarrow 140x + 130y + 160z = 3610$

“El número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países” $\rightarrow y = \frac{x+z}{4}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ 140x + 130y + 160z = 3610 \\ y = \frac{x+z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 25 - y - z \\ 14x + 13y + 16z = 361 \\ 4y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 14(25 - y - z) + 13y + 16z = 361 \\ 4y = 25 - y - \cancel{z} + \cancel{z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 350 - 14y - 14z + 13y + 16z = 361 \\ 5y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + 2z = 11 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -5 + 2z = 11 \Rightarrow 2z = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 8} \Rightarrow \boxed{x = 25 - 5 - 8 = 12}$$

Estuvieron alojados 12 italianos, 5 portugueses y 8 japoneses.

2B- Una empresa de aguas realiza un estudio de mercado y descubre que la curva de beneficios mensuales viene dada, en miles de euros, por la función $B(x) = 10x - x^2 - 21$, donde x representa, en euros, el precio de venta de una caja de botellas. Si este producto se vende en cajas de 10 botellas, calcula el precio de venta de una botella para que el beneficio obtenido sea máximo y calcula el importe de ese beneficio.

Siendo $B(x)$ la función que proporciona el beneficio de la empresa en función del precio x de cada caja de botellas, el máximo beneficio se obtendrá, por tanto, cuando el precio x es tal que $B'(x) = 0$ y $B''(x) < 0$:

$$B(x) = 10x - x^2 - 21 \Rightarrow B'(x) = 10 - 2x$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0 \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

$$B'(x) = 10 - 2x \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(5) = -2 < 0$$

El beneficio es máximo para un precio de 5 € por una caja de 10 botellas. Por lo que el precio será máximo para un precio de $\frac{5}{10} = 0.5$ € por botella.

El beneficio máximo lo obtenemos sustituyendo en la función beneficio $B(x) = 10x - x^2 - 21$ el valor de $x = 5 \rightarrow B(5) = 50 - 5^2 - 21 = 50 - 46 = 4$.

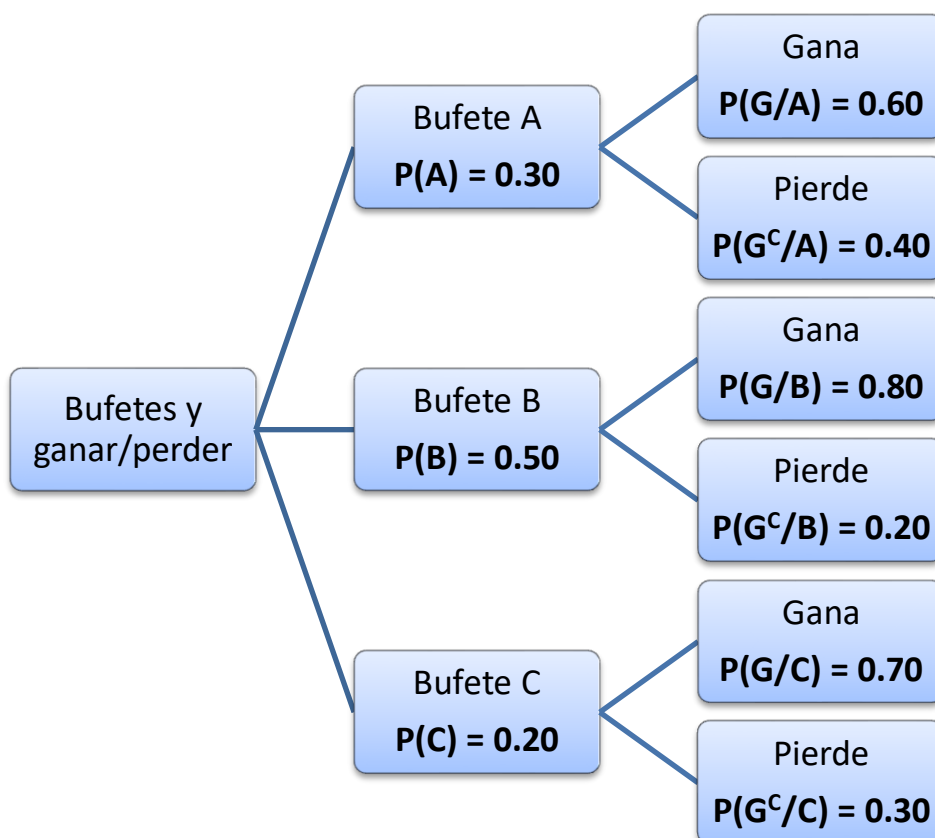
El beneficio máximo es de 4000 €.

3B- Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados. Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales.

a) Determina la probabilidad de que la empresa gane el caso.

b) Si el caso elegido se ha ganado, calcula la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

a) Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.18 + 0.40 + 0.14 = \boxed{0.72}
 \end{aligned}$$

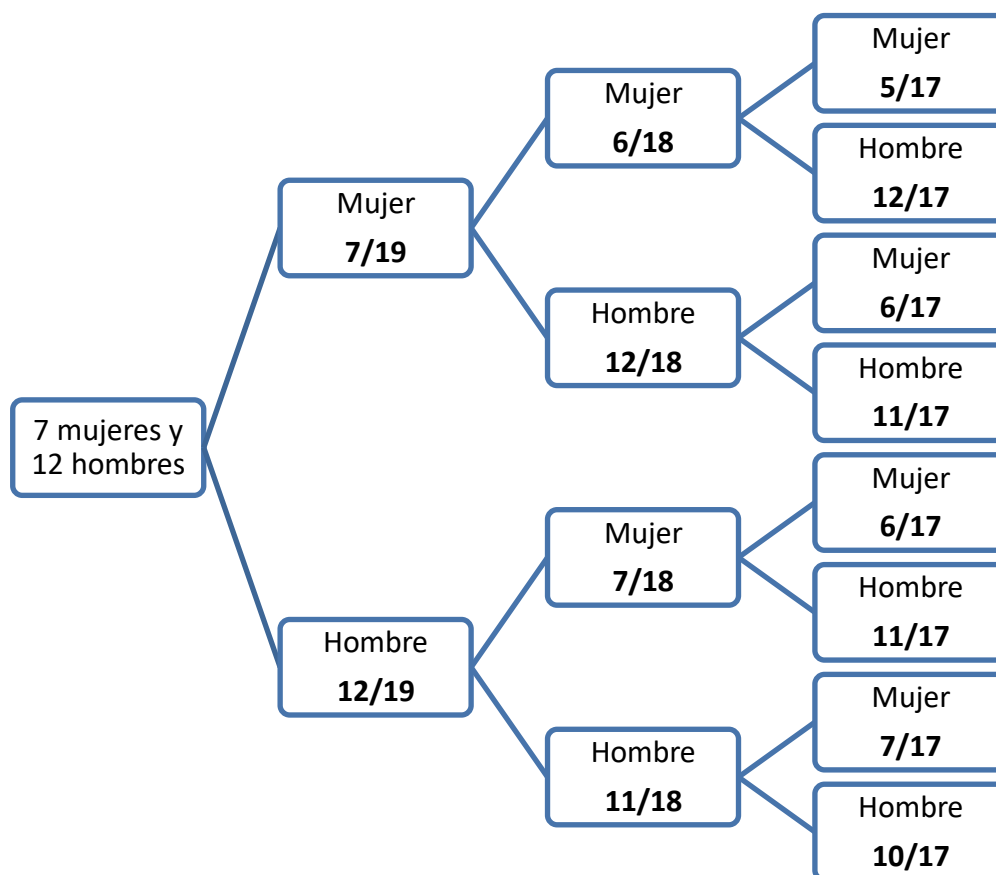
Tiene una probabilidad del 72 % de ganar el caso.

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P(G/A)}{P(G)} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.72} = \frac{0.18}{0.72} = \frac{1}{4} = 0.25$$

4B- En una clase de yoga hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escoge a tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen dos mujeres y un hombre.

Realizamos un diagrama de árbol.



Las distintas formas de seleccionar 2 mujeres y 1 hombre son: MMH, MHM, HMM. Sumamos las probabilidades de cada suceso y obtenemos la probabilidad pedida.

$$P(\text{Elegir 2 mujeres y 1 hombre}) = P(MMH) + P(MHM) + P(HMM) =$$

$$= \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} + \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} + \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{6}{17} + \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = 3 \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} = \boxed{\frac{84}{323} \approx 0.2601}$$

EBAU Ordinaria 2018

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	--	--	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 16 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.
- b) Analiza el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

3A- Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.

- a) Halla el intervalo de confianza del 90% para el sueldo medio de un trabajador.
- b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99%, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

4A- El 40% de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + (a-1)z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

- a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .
- b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

2B- Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, donde $t \in (0, 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

- a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.
- b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

3B- Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45%), semicurado (30%) y tierno (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25% del queso curado, el 23% del semicurado y el 20% del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?
- b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

4B- La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80%, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60%. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50%, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Llamamos “x” al número de collares que se fabrican e “y” al número de pulseras.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información ofrecida por el ejercicio.

	Horas de trabajo	Beneficio
Nº collares (x)	$2x$	$5x$
Nº pulseras (y)	y	$4y$
TOTALES	$2x + y$	$5x + 4y$

FUNCIÓN OBJETIVO

La función a maximizar es el beneficio que viene expresado por la función $B(x, y) = 5x + 4y$

RESTRICCIONES

Los valores del número de piezas deben ser mayores o iguales que 0 $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas” $\rightarrow 2x + y \leq 80$

“Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras)” $\rightarrow x + y \leq 50$

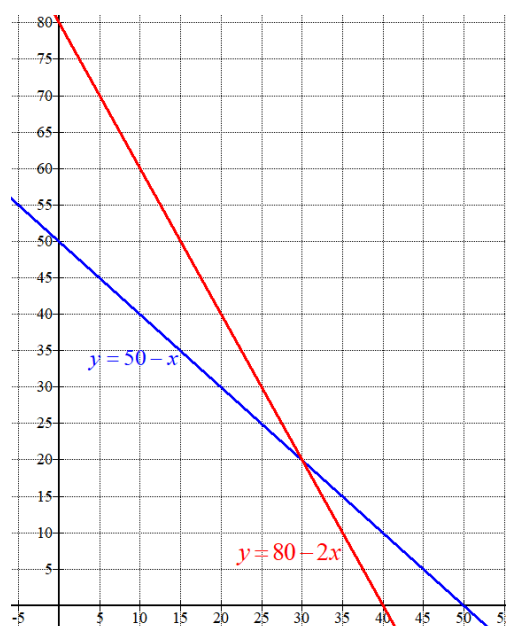
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y \leq 80 \\ x + y \leq 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 80 - 2x \\ y \leq 50 - x \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible, empezando por dibujar las rectas asociadas.

$$x \geq 0; y \geq 0$$

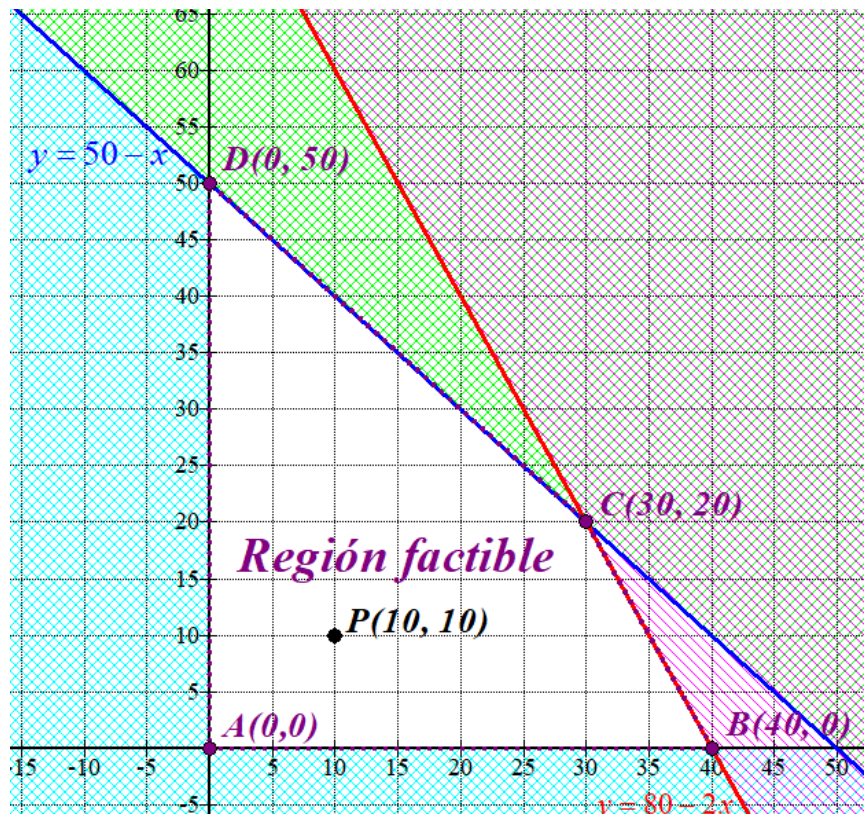
	$y = 80 - 2x$	$y = 50 - x$												
Primer cuadrante	<table><tr><td>x</td><td>y = 80 - 2x</td></tr><tr><td>0</td><td>80</td></tr><tr><td>40</td><td>0</td></tr></table>	x	y = 80 - 2x	0	80	40	0	<table><tr><td>x</td><td>y = 50 - x</td></tr><tr><td>0</td><td>50</td></tr><tr><td>50</td><td>0</td></tr></table>	x	y = 50 - x	0	50	50	0
x	y = 80 - 2x													
0	80													
40	0													
x	y = 50 - x													
0	50													
50	0													



Probamos si un punto cualquiera situado en el primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja cumple las inecuaciones, por ejemplo $P(10, 10)$.

$$P(10,10) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 \leq 80 - 20 \\ 10 \leq 50 - 10 \end{array} \right\} \rightarrow \text{¡¡¡Ciertas todas las desigualdades!!!}$$

La región factible es la que contiene dicho punto y limitada por los ejes de coordenadas y las rectas azul y roja. La dejamos en blanco en el siguiente dibujo.



Observando el dibujo obtenemos las coordenadas de los vértices de dicha región: $A(0, 0)$, $B(40, 0)$, $C(30, 20)$ y $D(0, 50)$.

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices para encontrar el beneficio máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 200$$

$$C(30, 20) \rightarrow B(30, 20) = 150 + 80 = 230$$

$$D(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 200$$

El beneficio máximo es de 230 € y se consigue en el punto $C(30, 20)$, lo que significa la fabricación de 30 collares y 20 pulseras.

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x < 4 \\ x^2-16 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.
 b) Analiza el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) La función $f(x)$ está definida mediante expresiones polinómicas, que son siempre continuas. Así, el único posible punto de discontinuidad se encuentra en el cambio de definición, en $x = 4$. Estudiamos los límites laterales en ese punto:

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 4^2 - 16 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} 4 - x = 4 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} x^2 - 16 = 4^2 - 16 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 0$$

Luego la función es continua en $x = 4$ y, en consecuencia: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

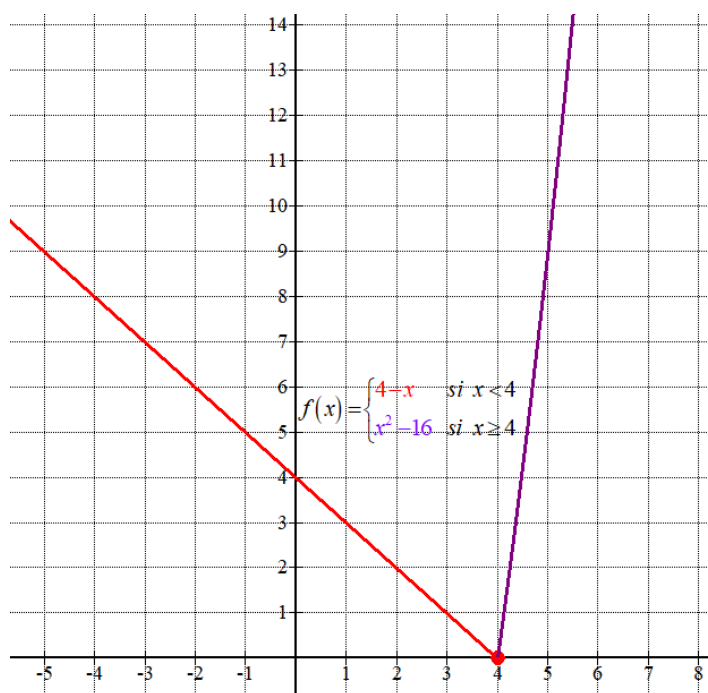
b) Para determinar la monotonía de la función debemos analizar el signo de su primera derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 4 \\ 2x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(4) = -1 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 4)$.
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10 > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty, 4)$ y creciente en $(4, +\infty)$.

No lo pide, pero dibujamos la gráfica de la función:



3A- Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.

- a) Halla el intervalo de confianza del 90% para el sueldo medio de un trabajador.
 b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99%, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

- a) El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 250$. $X = N(\mu, 250)$.

El intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador viene dado por:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$$

Donde el error viene dado por la expresión $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La media muestral es $\bar{x} = 1480$ €, la desviación típica es $\sigma = 250$ € y el tamaño de la muestra es $n = 625$. Calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 90 %:



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

Calculamos el valor del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} = 16.45$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (1480 - 16.45, 1480 + 16.45) = (1463.55, 1496.45)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5238
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8314
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9644	0.9653	0.9661	0.9668	0.9675	0.9681	0.9687

b) El error máximo admisible viene dado por: $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 99 %:



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9346	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9439
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9544
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9915
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9935
2,5	0,9937	0,9938	0,9939	0,9940	0,9941	0,9942	0,9943	0,9944	0,9945	0,9946
2,6	0,9947	0,9948	0,9949	0,9950	0,9951	0,9952	0,9953	0,9954	0,9955	0,9956

Por lo tanto, el tamaño de la muestra para que el error sea de 10 € lo despejamos de la fórmula:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2,575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{250 \cdot 2,575}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{250 \cdot 2,575}{10} \right)^2 = 4144,1$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero y superior al obtenido, por lo que este tamaño mínimo es de 4145 trabajadores.

4A- El 40% de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

Sea D el suceso “utilizar Dropbox” y G el suceso “utilizar Google Drive”.

Entonces los datos proporcionados en el ejercicio se traducen en las probabilidades siguientes:

$$P(D) = 0,25, P(G) = 0,20, P(D \cup G) = 0,40$$

Teniendo en cuenta la fórmula: $P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G)$

La probabilidad de la intersección de ambos sucesos es:

$$P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G) \Rightarrow 0.40 = 0.25 + 0.20 - P(D \cap G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap G) = 0.25 + 0.20 - 0.40 = 0.05$$

Luego, el porcentaje de internautas que utiliza los dos sistemas de almacenamiento es del 5 % .

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.

Si el 40 % usan Google Drive o Dropbox significa que el restante 60 % no utiliza ninguno de ellos.

	Usan Google Drive	No usan Google Drive	
Usan Dropbox			25
No usan Dropbox		60	
	20		100

Completamos la tabla

	Usan Google Drive	No usan Google Drive	
Usan Dropbox	iii 5 !!!	20	25
No usan Dropbox	15	60	75
	20	80	100

Hemos obtenido que 5 de cada 100 internautas usan ambos sistemas de almacenamiento. El 5 % de los internautas usan ambos sistemas.

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + (a-1)z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

a) Escribimos la matriz de los coeficientes, A , y la matriz ampliada A/B con los términos independientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de cada una de ellas. Aplicamos el método de Gauss:

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad a-1 \quad 3 \\ -3 \quad -9 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad -8 \quad a-4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -1 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 4 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -8 \quad a-4 \quad 0 \\ 0 \quad 8 \quad 0 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a-4 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & -12 \end{pmatrix}$$

$a - 4 = 0 \rightarrow a = 4$. Se plantean dos opciones.

CASO 1. Si $a = 4$,

La matriz A es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 2.

La matriz A/B es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

Como Rango de $A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B$ por el teorema de Rouché- Frobenius el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. Si $a \neq 4$.

En este caso $a - 4 \neq 0$.

La matriz A es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

La matriz A/B es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & -12 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

Como Rango de $A = 3 = \text{Rango de } A/B = \text{N}^\circ$ de incógnitas, por el teorema de Rouché- Frobenius el sistema es compatible determinado (una única solución).

b) Para $a = 3$ estamos en el caso 2 y el sistema es compatible determinado.

Como hemos obtenido con transformaciones un sistema equivalente triangular resolvemos el sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ -8y-z=0 \\ -z=-12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ -8y-z=0 \\ \boxed{z=12} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y+12=1 \\ -8y-12=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y=-11 \\ -8y=12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y=-11 \\ \boxed{y=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow x+3\left(-\frac{3}{2}\right)=-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{9}{2} = -11 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{2} - 11 = -\frac{13}{2}}$$

La solución es $x = -\frac{13}{2}$; $y = -\frac{3}{2}$; $z = 12$

2B- Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, donde $t \in (0, 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

- a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.
 b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

- a) Como los beneficios, en millones de euros, vienen dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, debemos determinar el valor de t para el cual $P(t) = 16$:

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = 16 \\ P(t) = t^2 - 10t + 16 \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 16 \Rightarrow t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t(t - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

Dado que $t \in (0, 10]$, entonces $t = 0$ no es una solución válida y, en consecuencia, el tiempo buscado es $t = 10$, es decir, al décimo año.

- b) En el punto en el cual función $P(t)$ alcanza el mínimo debe cumplirse que $P'(t) = 0$.

$$P(t) = t^2 - 10t + 16 \Rightarrow P'(t) = 2t - 10$$

Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} P'(t) = 0 \\ P'(t) = 2t - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 2t - 10 = 0 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow \boxed{t = 5}$$

Se comprueba que para este valor de t existe un mínimo, evaluando el signo de la segunda derivada:

$$P'(t) = 2t - 10 \Rightarrow P''(t) = 2 > 0$$

Como la segunda derivada es siempre positiva, sea cual sea el valor de t , podemos asegurar que hay un mínimo cuando $t = 5$ años.

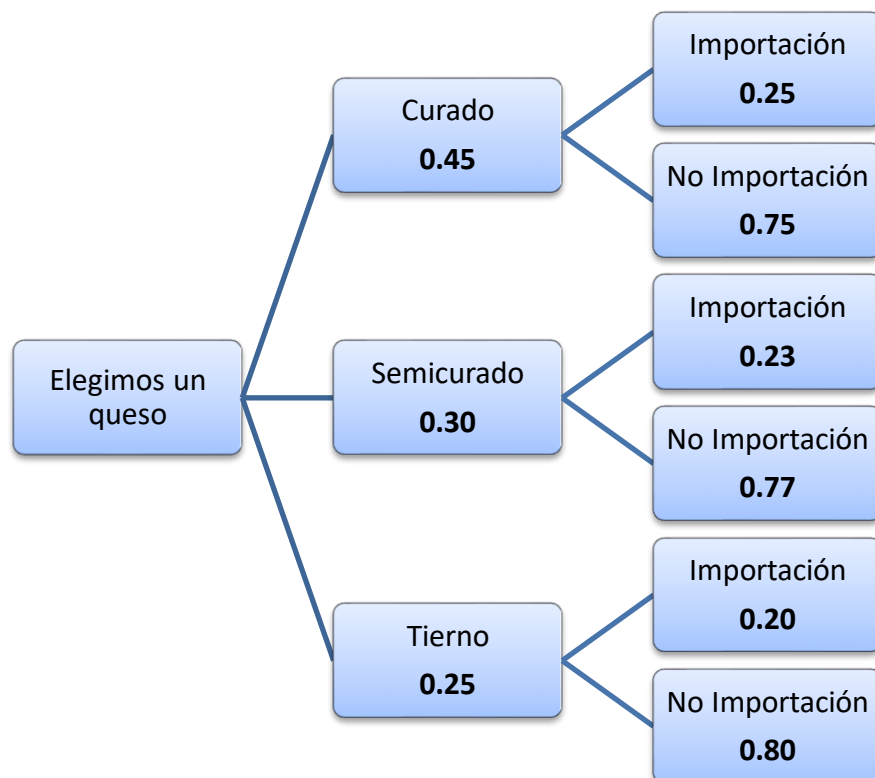
En ese momento, los beneficios son $P(5) = -9$ millones de euros (es decir, la empresa tiene pérdidas millonarias).

3B- Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45%), semicurado (30%) y tierno (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25% del queso curado, el 23% del semicurado y el 20% del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Realizamos el diagrama de árbol de esta situación planteada.



a) Llamamos C a elegir un queso curado, S a elegirlo semicurado, T a elegirlo tierno e I a elegirlo de importación.

$$P(\bar{I}) = P(C)P(\bar{I}/C) + P(S)P(\bar{I}/S) + P(T)P(\bar{I}/T) = \\ = 0.45 \cdot 0.75 + 0.3 \cdot 0.77 + 0.25 \cdot 0.8 = \boxed{0.7685}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(C/I)}{1 - P(\bar{I})} = \frac{0.45 \cdot 0.25}{1 - 0.7685} \approx \boxed{0.486}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Pasemos estos datos a valores absolutos suponiendo que tenemos 100 quesos.

Son curados el 45 %, es decir, 45 quesos curados, análogamente son 30 semicurados y 25 tiernos.

El 25 % de los curados (45) son de importación, luego $\frac{45 \cdot 25}{100} = \frac{45}{4}$, nos da un resultado decimal pero nos sirve para nuestro cálculo aunque sea un valor no real.

El 23 % de los semicurados (30) son de importación, luego $\frac{23 \cdot 30}{100} = \frac{69}{10}$, nos da un resultado decimal pero nos sirve para nuestro cálculo aunque sea un valor no real.

El 20 % de los tiernos (25) son de importación, luego $\frac{20 \cdot 25}{100} = 5$ son quesos tiernos de importación.

Si hubiésemos supuesto que son 2000 quesos las cuentas saldrían con números naturales.

- a) Tenemos 100 quesos y de importación son $\frac{45}{4} + \frac{69}{10} + 5 = \frac{463}{20}$, por lo que los que no son de importación son $100 - \frac{463}{20} = \frac{1537}{20}$. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No sea de importación}) = \frac{\frac{1537}{20}}{100} = \boxed{\frac{1537}{2000} = 0.7685}$$

- b) Si es de importación es uno de los $\frac{463}{20}$ quesos de importación. De estos son $\frac{45}{4}$ los curados, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P(\text{Sea curado / Es de importación}) = \frac{\frac{45}{4}}{\frac{463}{20}} = \boxed{\frac{225}{463} \approx 0.486}$$

4B- La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80%, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60%. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50%, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

Hacemos una tabla de contingencia.

	Aprueban examen problemas	Suspenden examen problemas	
Aprueban examen test	50		80
Suspenden examen test			
	60		100

Completamos la tabla.

	Aprueban examen problemas	Suspenden examen problemas	
Aprueban examen test	50	30	80
Suspenden examen test	10	10	20
	60	40	100

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Suspendan los dos exámenes}) = \frac{\text{Nº de alumnos que aprueban test y problemas}}{\text{Nº de alumnos}} = \frac{10}{100} = \boxed{0.10}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Aplicando las fórmulas de cálculo de probabilidades.

Llamamos T = Aprobar examen tipo test, P = Aprobar examen problemas.

La probabilidad de aprobar un examen tipo test es $P(T) = 0,80$; la de aprobar un examen de problemas es $P(P) = 0,60$; y la de aprobar los dos, $P(T \cap P) = 0,50$. Se pide la probabilidad de no aprobar ninguno. Nos piden calcular $P(\bar{T} \cap \bar{P})$.

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) = P(\overline{T \cup P}) = 1 - P(T \cup P) = 1 - (P(T) + P(P) - P(T \cap P))$$

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) = 1 - (0.80 + 0.60 - 0.50) = 1 - 0.90 = \boxed{0.10}$$

EBAU Septiembre 2017

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	--	---	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-x^2} & 0 < x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 4 \end{cases}$.

- Estudia razonadamente su continuidad.
- Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

3A- En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el período docente, superan la asignatura el 80% de los alumnos que asisten regularmente a clase y el 50% de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar.

- Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase. **(Hasta 1 punto)**
- Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase? **(Hasta 2 puntos)**

4A- En un grupo de 8 amigos se encuentran los 3 agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

Opción B

1B- Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1000 € mientras que el beneficio neto que obtiene por cada coche reparado es de 1500 €. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

2B- Halla razonadamente dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

3B- Una granja cultiva perlas cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ mm y desviación típica $\sigma = 0,8$ mm. Se quiere comprobar el cumplimiento de las especificaciones exigidas por una joyería en la elaboración de sus collares. Para ello se elige una muestra representativa de 256 perlas, resultando un diámetro medio muestral de 9.92 mm.

- a) Calcula el intervalo de confianza para el diámetro medio poblacional de las perlas con un nivel de confianza del 90 %.
- b) Calcula el tamaño necesario de la muestra de perlas que permita alcanzar, con un nivel de confianza del 98%, un error máximo de 0.2 mm en la estimación del diámetro medio poblacional de una perla.

4B- El 48% de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82% de los hombres y el 75% de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

Llamemos x = precio del pantalón en temporada, y = precio de la camisa en temporada, z = precio del abrigo en temporada.

Traducimos cada frase en una ecuación.

Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total $\rightarrow x + y + z = 360$

En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros $\rightarrow 0,9x + 0,8y = 137$

En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros $\rightarrow 0,8x + 0,7z = 212$

Juntamos las ecuaciones y resolvemos el sistema resultante.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ 0,9x + 0,8y = 137 \\ 0,8x + 0,7z = 212 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ 9x + 8y = 1370 \\ 8x + 7z = 2120 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 9 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 9x + 8y = 1370 \\ -9x - 9y - 9z = -3240 \\ \hline -y - 9z = -1870 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 8 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 8x + 7z = 2120 \\ -8x - 8y - 8z = -2880 \\ \hline -8y - z = -760 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ -y - 9z = -1870 \\ -8y - z = -760 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 8 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ -8y - z = -760 \\ +8y + 72z = 14960 \\ \hline 71z = 14200 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 360 \\ -y - 9z = -1870 \\ 71z = 14200 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{14200}{71} = 200} \Rightarrow -y - 1800 = -1870 \Rightarrow \boxed{y = 70} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 70 + 200 = 360 \Rightarrow \boxed{x = 90}$$

Los precios en temporada son de 90 € el pantalón, 70 € la camisa y 200 € el abrigo.

2A- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-x^2} & 0 < x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 4 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

a) Para $0 < x < 2$ la función es $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ que es continua salvo en los valores que anulan el denominador.

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$. Ninguno de estos dos valores de x están en el dominio de definición de la función. Es continua en $0 < x < 2$.

Para $2 < x < 4$ la función es $f(x) = 2x$. Es una función polinómica, que es continua.

Falta por comprobar en el cambio de definición de la función, en $x = 2$.

- Existe $f(2) = 4$, Se cumple.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$. No se cumple.

La función no es continua en $x = 2$

Resumiendo: La función es continua en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

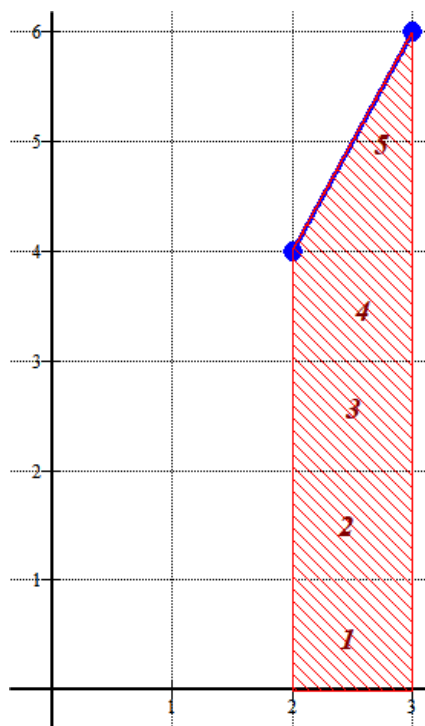
b) Veamos si la función corta al eje OX en el intervalo $[2,3]$.

En este intervalo la función es $f(x) = 2x$. Para que corte al eje OX debe ser $f(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que no pertenece al intervalo $[2,3]$.

El área pedida es la integral definida:

$$\int_2^3 2x dx = \left[x^2 \right]_2^3 = \left[3^2 \right] - \left[2^2 \right] = 9 - 4 = \boxed{5 u^2}$$

Si la dibujamos comprobamos este valor del área.

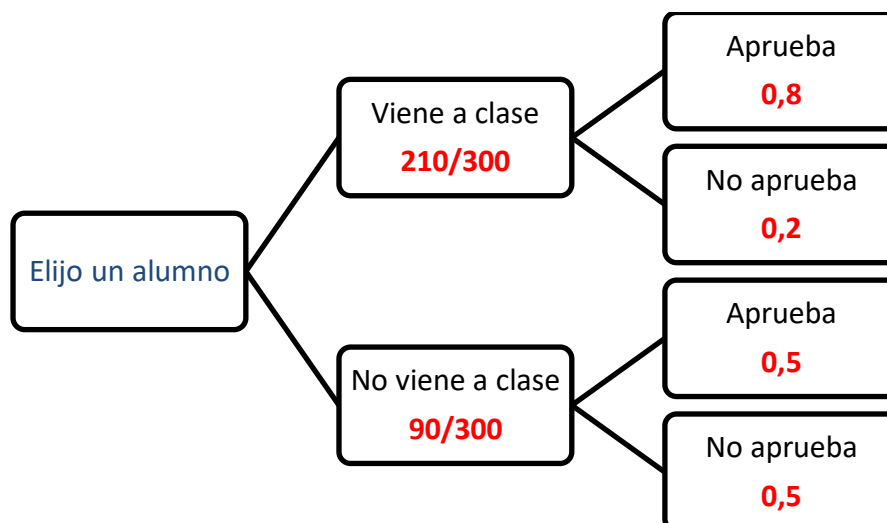


3A- En una asignatura de primer curso de un grado universitario, asisten a clase regularmente 210 alumnos de los 300 alumnos matriculados. Al finalizar el período docente, superan la asignatura el 80% de los alumnos que asisten regularmente a clase y el 50% de los alumnos que no asisten regularmente a clase. Se elige un alumno matriculado al azar.

a) Calcula la probabilidad de que haya superado la asignatura y no haya asistido regularmente a clase. **(Hasta 1 punto)**

b) Sabiendo que ha superado la asignatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido regularmente a clase? **(Hasta 2 puntos)**

Realicemos un diagrama de árbol para ayudarnos a calcular las probabilidades pedidas.



a)

$$P(\text{Apruebe y no haya asistido a clase}) =$$

$$= P(\text{No haya asistido a clase}) P(\text{Apruebe} / \text{No ha asistido a clase}) =$$

$$= \frac{90}{300} \cdot \frac{50}{100} = \frac{4500}{30000} = \frac{45}{300} = \boxed{\frac{15}{100} = 0,15}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haya asistido a clase} / \text{Ha aprobado}) =$$

$$= \frac{P(\text{Haya asistido a clase y ha aprobado})}{P(\text{Ha aprobado})} = \frac{\frac{210}{300} \cdot 0,8}{\frac{210}{300} \cdot 0,8 + \frac{90}{300} \cdot 0,5} =$$

$$= \frac{\frac{168}{300}}{\frac{168}{300} + \frac{45}{300}} = \frac{168}{168 + 45} = \boxed{\frac{168}{213} = 0,79}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Podemos calcular el número de alumnos que hay en cada situación y utilizar la regla de Laplace para el cálculo de cada probabilidad.

De 300 alumnos 210 vienen a clase regularmente y 90 no vienen regularmente.

De los 210 que vienen regularmente el 80% aprueban la asignatura, es decir, $0,8 \cdot 210 = 168$ alumnos vienen a clase regularmente y aprueban la asignatura. Los otros $210 - 168 = 42$ vienen a clase regularmente y suspenden la asignatura.

De los 90 que no vienen a clase regularmente aprueban la asignatura el 50%, es decir, 45 no vienen a clase regularmente y aprueban la asignatura. Los otros 45 no vienen a clase regularmente y suspenden la asignatura.

- a) Hay 300 alumnos y de estos hay 45 que no asisten a clase y aprueban la asignatura. Aplicando Laplace:

$$P(\text{Apruebe y no haya asistido a clase}) = \frac{45}{300} = \boxed{\frac{15}{100} = 0,15}$$

- b) Han aprobado $168 + 45 = 213$ y de estos 168 son los que han asistido a clase. Aplicando Laplace queda:

$$P(\text{Haya asistido a clase / Ha aprobado}) = \boxed{\frac{168}{213} = 0,789}$$

4A- En un grupo de 8 amigos se encuentran los 3 agraciados con un viaje para visitar Lisboa sorteado por la embajada portuguesa. Si hay 4 amigos que ya han visitado Lisboa, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los agraciados haya visitado Lisboa?

De los 8 amigos 4 han visitado Lisboa y los otros 4 no.
Si elegimos 3 de los 8 amigos.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ninguno de los 3 elegidos ha visitado Lisboa}) &= \\
 &= P(\text{El elegido 1 no ha visitado Lisboa}) \cdot \\
 &\cdot P(\text{El 2º no ha visitado Lisboa} / \text{El 1º no ha visitado Lisboa}) \cdot \\
 &\cdot P(\text{El 3º no ha visitado Lisboa} / \text{Ni el 1º, ni el 2º han visitado Lisboa}) = \\
 &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{24}{336} = \boxed{\frac{1}{14} = 0,071}
 \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Contemos de cuantas maneras diferentes se pueden repartir los premios utilizando la combinatoria. Si tenemos en cuenta a los 8 amigos como receptores del premio las distintas formas posibles de recibir el premio son variaciones de 8 elementos (los 8 amigos) tomados de 3 en 3 (los 3 regalos).

$$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Y si contamos las distintas maneras de recibir el premio los 4 amigos que no han estado en Lisboa.

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Ninguno de los 3 elegidos ha visitado Lisboa}) &= \\
 &= \frac{\text{Número de casos favorables al suceso}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{24}{336} = \boxed{\frac{1}{14} = 0,071}
 \end{aligned}$$

Opción B

1B- Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1000 € mientras que el beneficio neto que obtiene por cada coche reparado es de 1500 €. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Supondré que las motos y los coches deben de pasar por los dos talleres.

Llamemos x al número de motos que se reparan e y al número de coches que se reparan.

La función a maximizar es el beneficio.

El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1000 € mientras que el beneficio neto que obtiene por cada coche reparado es de 1500 € $\rightarrow B(x, y) = 1000x + 1500y$

Para las restricciones:

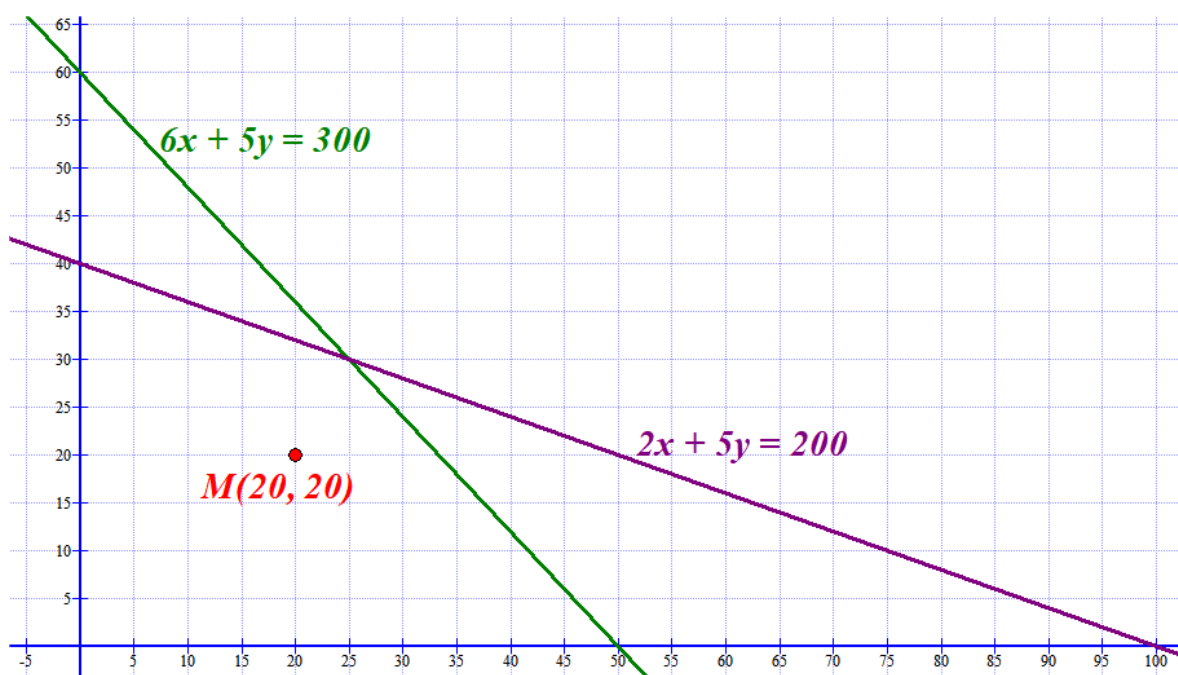
El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche $\rightarrow 6x + 5y \leq 300$

El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche $\rightarrow 2x + 5y \leq 200$

Además, el número de motos y coches son enteros y positivos. Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 300 \\ 2x + 5y \leq 200 \end{array} \right\}$$

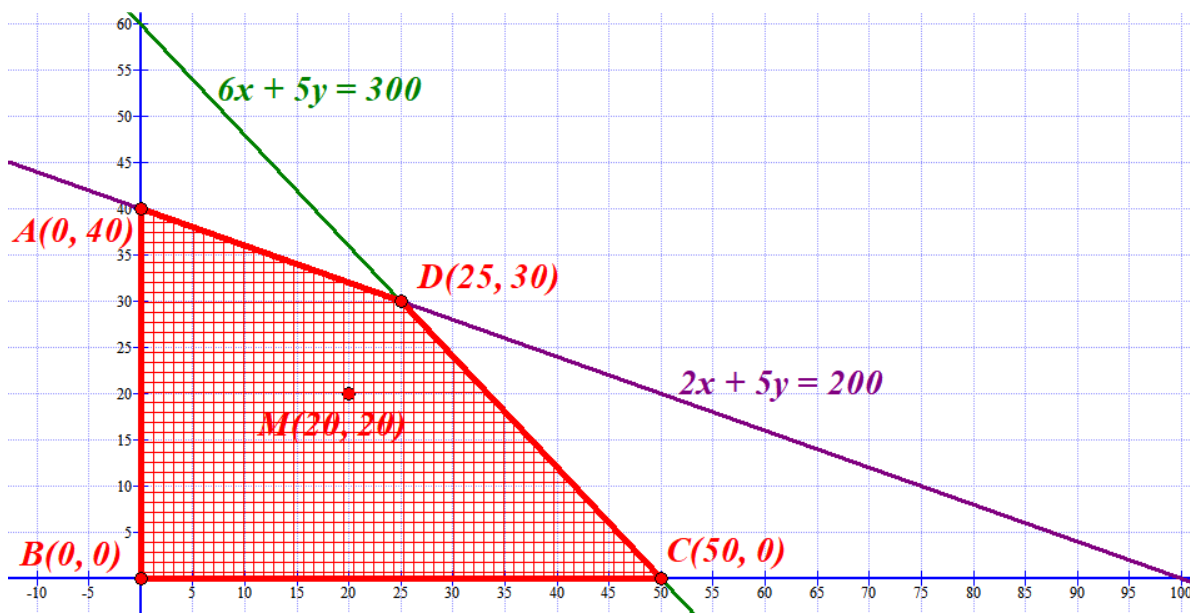
Dibujamos las rectas asociadas y decidimos la región factible.



Probamos si el punto $M(20, 20)$ cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 0 \\ 20 \geq 0 \\ 120 + 100 \leq 300 \\ 40 + 100 \leq 200 \end{array} \right\} \text{ Si se cumplen.}$$

La región factible es la limitada por los ejes y las dos rectas y que contiene el punto M.



Las coordenadas de los vértices A, B y C se obtienen muy fácil y las coordenadas del punto D las obtenemos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas que lo determinan.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 300 \\ 2x + 5y = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 6x + 5y = 300 \\ -6x - 15y = -600 \\ \hline -10y = -300 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 300 \\ -10y = -300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 5y = 300 \\ y = \frac{-300}{-10} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x + 150 = 300 \Rightarrow 6x = 150 \Rightarrow \boxed{x = 25}$$

El vértice D tiene coordenadas $D(25, 30)$

Sustituimos las coordenadas de cada punto en la función Beneficio $B(x, y) = 1000x + 1500y$

$$A(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 60000 = 60000$$

$$B(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$C(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 50000 + 0 = 50000$$

$$D(25, 30) \rightarrow B(25, 30) = 25000 + 45000 = 70000 \text{ ¡Máximo!}$$

El beneficio máximo que se obtiene es de 70000 € reparando 25 motos y 30 coches.

2B- Halla razonadamente dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Llamemos x e y a los dos números reales que buscamos.

Como su suma es 10 se cumple: $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

Los números buscados son x y $10 - x$.

Queremos que el producto de sus cuadrados sea máximo. Hallamos la expresión de la función que nos da el producto de sus cuadrados.

$$f(x) = x^2(10-x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$$

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de su valor máximo.

$$f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 15x + 50) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} = \frac{15+5}{2} = \boxed{10 = x} \\ = \frac{15-5}{2} = \boxed{5 = x} \end{cases} \end{cases}$$

Sustituimos estos tres valores de x en la segunda derivada y determinamos cual es el máximo.

$$f'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 120x + 200$$

Para $x = 0 \rightarrow f''(0) = 200 > 0$. $x = 0$ es un mínimo local.

Para $x = 5 \rightarrow f''(5) = 12 \cdot 25 - 120 \cdot 5 + 200 = -100 < 0$. $x = 5$ es un máximo local.

Para $x = 10 \rightarrow f''(10) = 1200 - 1200 + 200 = 200 > 0$. $x = 10$ es un mínimo local.

Los dos números reales que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo son 5 y 5.

3B- Una granja cultiva perlas cuyos diámetros siguen una distribución normal con media μ mm y desviación típica $\sigma = 0,8$ mm. Se quiere comprobar el cumplimiento de las especificaciones exigidas por una joyería en la elaboración de sus collares. Para ello se elige una muestra representativa de 256 perlas, resultando un diámetro medio muestral de 9.92 mm.

- Calcula el intervalo de confianza para el diámetro medio poblacional de las perlas con un nivel de confianza del 90 %.
- Calcula el tamaño necesario de la muestra de perlas que permita alcanzar, con un nivel de confianza del 98%, un error máximo de 0.2 mm en la estimación del diámetro medio poblacional de una perla.

X = Diámetro de una perla. Sabemos que $X = N(\mu, 0,8)$

- Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$, siendo

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

El tamaño de la muestra es $n = 256$, la media muestral es $\bar{x} = 9,92$ mm.

Como el nivel de confianza es del 90% hallamos el valor correspondiente de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{256}} = 1,645 \cdot \frac{0,8}{16} = 0,08225$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (9,92 - 0,08225, 9,92 + 0,08225) =$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (9,83775, 10,00225)}$$

- Como $1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$

Un error máximo de 0,2 mm lo sustituimos en la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,2 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{n}} = 0,2 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{0,8}{0,2} = \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(2,325 \cdot \frac{0,8}{0,2} \right)^2 = 86,49$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 87 perlas.

4B- El 48% de los trabajadores de una empresa son hombres. Si en esa empresa, el 82% de los hombres y el 75% de las mujeres están satisfechos con su trabajo, ¿qué porcentaje de trabajadores está satisfecho con su trabajo en esa empresa?

UNA FORMA DE HACERLO

Un simple cálculo de porcentajes.

HOMBRES → 48% son hombres, de ellos el 82% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 82% del 48% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{48}{100} \cdot \frac{82}{100} = \frac{3936}{10000}$$

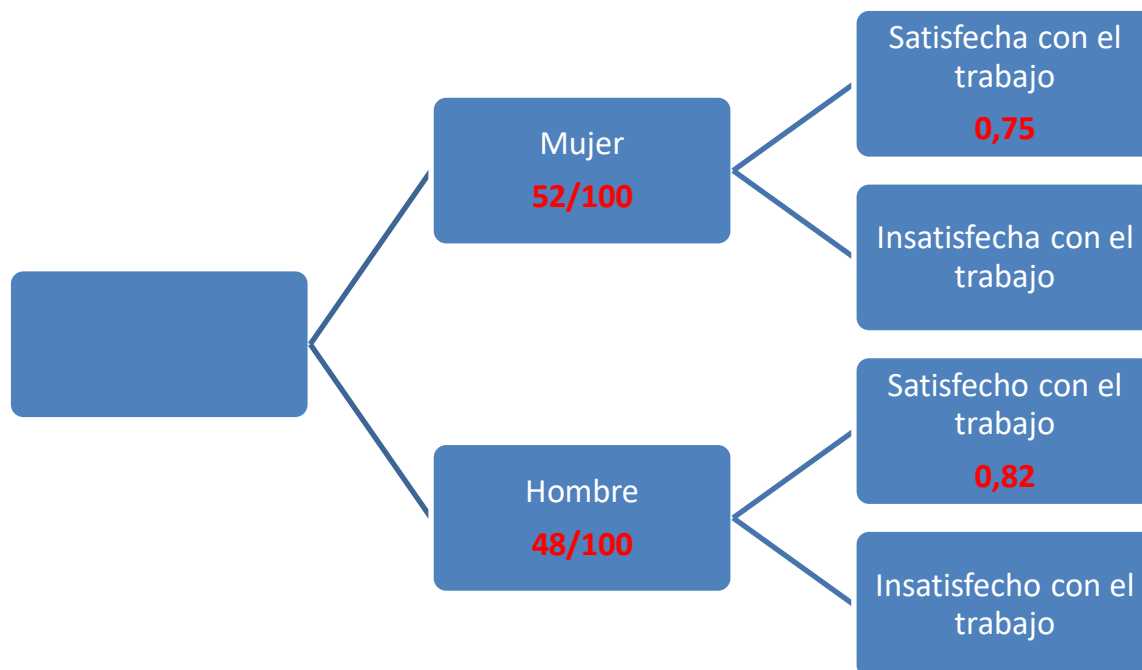
MUJERES → 52% son mujeres, de ellas el 75% están satisfechos con su trabajo, es decir, el 75% del 52% de los trabajadores están satisfechos.

$$\frac{52}{100} \cdot \frac{75}{100} = \frac{3900}{10000}$$

Si sumamos estas cifras tenemos $\frac{3936}{10000} + \frac{3900}{10000} = \frac{7836}{10000} = 0,7836 = \boxed{78,36\%}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Elegir un trabajador y que esté satisfecho}) = \frac{52}{100} \cdot 0,75 + \frac{48}{100} \cdot 0,82 = 0,7836$$

Lo cual significa que el porcentaje de trabajadores satisfechos es del 78,36%.

EBAU Junio 2017

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios Castilla y León	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN Nº Páginas: 2 Y tabla
---	---	---	---

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - az = 2 \end{cases}$$

- Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
- Resuelve el sistema para $a = 2$.

2A- La función:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 - 20x + 32 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{90x - 45}{x + 8} + 27 & x > 1 \end{cases}$$

Representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos x meses.

- Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.
- Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?
- Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

3A- La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60% de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30% de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.

- Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.
- Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

4A- El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional $\sigma = 0.042$ cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0.824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

Opción B

1B- Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos A y B que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de A contiene 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.4 kg de proteínas. Cada kg de B contiene 0.9 kg de hidratos de carbono y 0.1 kg de proteínas. Si los costes de A y B son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

2B-

- a) Calcula el valor de a que hace que el valor de la derivada de la función $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$, en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 1$, sean iguales.
- b) Sabiendo que la curva $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ pasa por el punto $(2, 12)$, calcula el valor de a y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

3B- El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica $\sigma = 10$ euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2587.50 euros.

- a) Determina un intervalo de confianza del 99% para el gasto medio por cliente.
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95%, un error máximo de 1.20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

4B- En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

SOLUCIONES**Opción A**

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - az = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = a - 2a - 1 = -a - 1$$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Existen dos casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, así como el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = -1$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \text{ y la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante nulo y su rango es menor de 3. Veamos si su rango es 2.

Extraemos el menor resultante de quitar la 1ª fila y columna $\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

El rango de A es 2

Veamos el rango de A/B .

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

¿Rango de A/B es 3? Tomamos el menor resultante de quitar la 1ª columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 + 3 = 3 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es 3.}$$

Como el rango de A y el de A/B son distintos el sistema no tiene solución. El sistema es incompatible.

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado (CASO 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(y - 1) - y + z = 3 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2 - y + z = 3 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + z = 5 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z + 5 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow -z + 5 - 2z = 2 \Rightarrow -3z = -3 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$\boxed{y = -1 + 5 = 4} \Rightarrow \boxed{x = 4 - 1 = 3}$$

La solución es $x = 3$; $y = 4$; $z = 1$.

2A- La función:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 - 20x + 32 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{90x - 45}{x + 8} + 27 & x > 1 \end{cases}$$

representa el beneficio, en miles de euros, de cierta empresa transcurridos x meses.

- Estudia razonadamente la continuidad de la función $f(x)$.
- Halla los intervalos donde se produce un aumento del beneficio y una disminución del beneficio. ¿En qué momento el beneficio es mínimo?
- Determina el beneficio de la empresa a muy largo plazo.

a) Para $0 < x \leq 1$ la función es un polinomio de grado dos. Es continua

Para $x > 1$ la función es una fracción que es continua salvo en los puntos que anulan el denominador. Esto ocurre para $x = -8$, que no está en los valores para los que se define la función.

La función es continua para todo su dominio, aunque falta comprobar su continuidad en el cambio de definición, para $x = 1$.

- Existe $f(1) = 20 \cdot 1^2 - 20 + 32 = 32$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 20x^2 - 20x + 32 = 32$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{90x - 45}{x + 8} + 27 = \frac{90 - 45}{1 + 8} + 27 = 5 + 27 = 32$
- Los tres valores son iguales.

Se cumplen todas las condiciones y la función es continua en $x = 1$. Por lo tanto la función es continua en todo su dominio $(0, +\infty)$.

b) Estudiemos la variación de la función usando su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 - 20x + 32 & 0 < x \leq 1 \\ \frac{90x - 45}{x + 8} + 27 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 40x - 20 & 0 < x < 1 \\ \frac{90(x + 8) - (90x - 45)}{(x + 8)^2} = \frac{765}{(x + 8)^2} & x > 1 \end{cases}$$

Igualemos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 40x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{40} = 0,5 \in (0, 1] \\ \frac{765}{(x + 8)^2} = 0 \Rightarrow \text{No es posible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada de 0 a 0,5, luego de 0,5 a 1 y por último a partir de 1.

- En $(0, 0,5)$ tomamos $x = 0,25$ y la derivada vale $f'(0,25) = 40 \cdot 0,25 - 20 = 10 - 20 = -10 < 0$. La función decrece.
- En $(0,5, 1)$ tomamos $x = 0,75$ y la derivada vale $f'(0,75) = 40 \cdot 0,75 - 20 = 30 - 20 = 10 > 0$. La función crece.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{765}{(2+8)^2} = 7,65 > 0$. La función crece.

Resumiendo: El beneficio disminuye en $(0, 0.5)$, es decir, hasta el medio mes. Aumenta a partir de entonces, durante el resto del tiempo, es decir en $(0.5, +\infty)$.

El valor mínimo se alcanza al cabo de medio mes.

- c) El beneficio de la empresa a largo plazo es el valor del límite de la función beneficio cuando el número de meses se acerca al infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{90x - 45}{x + 8} + 27 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{90x - 45 + 27x + 216}{x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{117x + 171}{x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{117x}{x} = 117$$

A muy largo plazo el beneficio de la empresa se acerca a 117000 €

3A- La lista electoral de un determinado partido político está formada por un número igual de hombres y mujeres. Un análisis sociológico de dichas listas revela que el 60% de los hombres tienen 40 o más años de edad, mientras que el 30% de las mujeres tienen menos de 40 años. Se elige al azar una persona que forma parte de las listas electorales.

a) Calcula la probabilidad de que tenga menos de 40 años.

b) Sabiendo que tiene 40 o más años de edad, calcula la probabilidad de que sea mujer.

Podemos hacer un cálculo sencillo de la probabilidad pasando todo a valores absolutos y aplicar la regla de Laplace.

Supongamos que hay 200 integrantes en el partido político en cuestión (suponemos esta cantidad por lo fácil que será para el resto de cálculos).

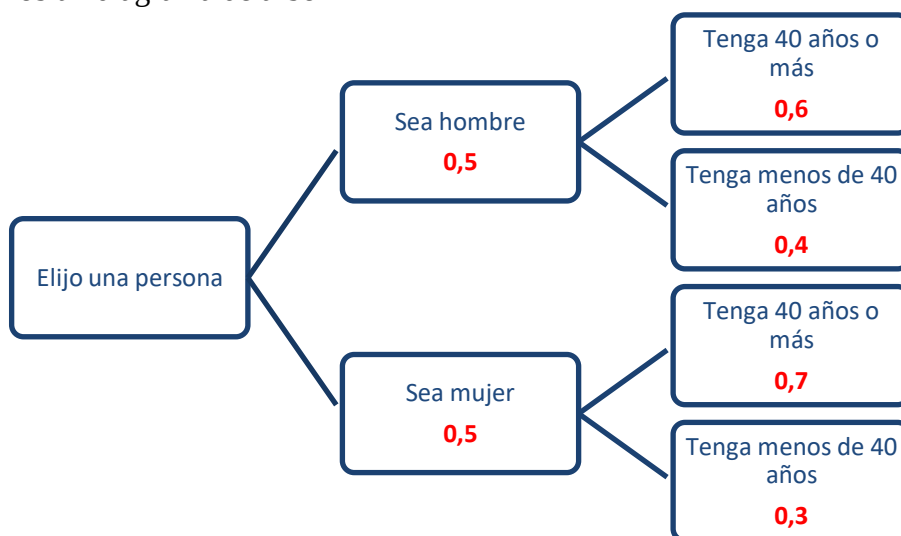
100 son mujeres y 100 son hombres. De los 100 hombres 60 tienen 40 o más años de edad y 40 hombres tienen menos de 40 años. De las mujeres 70 tienen 40 o más años y 30 tienen menos de 40 años.

$$a) P(\text{Tenga menos de 40 años}) = \frac{40 \text{ hombres} + 30 \text{ mujeres}}{200} = \frac{70}{200} = \boxed{0,35}$$

$$b) P(\text{Sea mujer} / \text{Tiene más de 40 años}) = \frac{70}{60 + 70} = \frac{70}{130} = \frac{7}{13} = \boxed{0,538}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realicemos un diagrama de árbol



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Tenga menos de 40 años}) = P(\text{Es hombre})P(\text{Tenga menos de 40 años} / \text{Es hombre}) +$$

$$+ P(\text{Es mujer})P(\text{Tenga menos de 40 años} / \text{Es mujer}) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,3 = \boxed{0,35}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea mujer} / \text{Tiene más de 40 años}) = \frac{P(\text{Sea mujer y Tiene más de 40 años})}{P(\text{Tiene más de 40 años})} =$$

$$= \frac{P(\text{Sea mujer})P(\text{Tiene más de 40 años} / \text{Sea mujer})}{1 - P(\text{Tiene menos de 40 años})} = \frac{0,5 \cdot 0,7}{1 - 0,35} = \frac{0,35}{0,65} = \frac{35}{65} = \frac{7}{13} = \boxed{0,538}$$

4A- El diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina sigue una distribución normal con desviación típica poblacional $\sigma = 0.042$ cm. Se elige una muestra representativa de 200 piezas fabricadas por la máquina, resultando un diámetro medio muestral de 0.824 cm. Halla el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio poblacional de las piezas fabricadas por esa máquina.

X = diámetro de las piezas fabricadas por cierta máquina. Sabemos que $X = N(\mu, 0,042)$

Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$, siendo

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$n = 200$, $\bar{x} = 0,824$ cm, $\sigma = 0,042$

Como $1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El error sería $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{0,042}{\sqrt{200}} = 0,006$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (0.824 - 0.006, 0.824 + 0.006) = (0.818, 0.830)$$

Intervalo de confianza = (0.818, 0.830)

Opción B

1B- Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos A y B que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de A contiene 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.4 kg de proteínas. Cada kg de B contiene 0.9 kg de hidratos de carbono y 0.1 kg de proteínas. Si los costes de A y B son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

Llamemos x = número de kilos de nutriente A. y = número de kilos de nutriente B.

Expresamos los condicionantes del ejercicio en una tabla.

	Nutriente A	Nutriente B	Total
Kgs de nutriente	x	y	
Kgs de hidratos de carbono	$0,6x$	$0,9y$	$0,6x + 0,9y$
Kgs de proteínas	$0,4x$	$0,1y$	$0,4x + 0,1y$
Coste	$12x$	$6y$	$12x + 6y$

Establezcamos las restricciones que nos proporciona el ejercicio.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,6x + 0,9y \geq 210 \\ 0,4x + 0,1y \geq 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 9y \geq 2100 \\ 4x + y \geq 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 700 \\ 4x + y \geq 1000 \end{array} \right\}$$

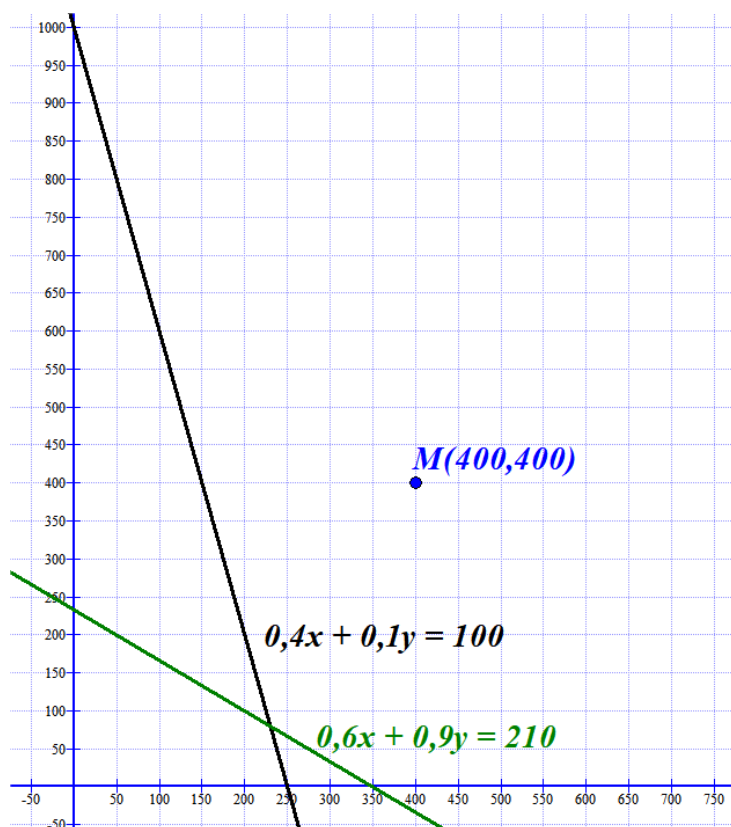
Dibujamos la región del plano que cumple estas restricciones. Para ello dibujo las rectas asociadas a cada desigualdad.

$$2x + 3y = 700$$

x	$y = \frac{700 - 2x}{3}$
50	200
200	100
350	0

$$4x + y = 1000$$

x	$y = 1000 - 4x$
0	1000
200	200
250	0



Probamos en las restricciones el punto $M(400, 400)$

$$\left. \begin{array}{l} 400 \geq 0 \\ 400 \geq 0 \\ 0,6 \cdot 400 + 0,9 \cdot 400 \geq 210 \\ 0,4 \cdot 400 + 0,1 \cdot 400 \geq 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 \geq 0; \text{ Si es cierto} \\ 400 \geq 0; \text{ Si es cierto} \\ 240 + 360 \geq 210; \text{ Si es cierto} \\ 160 + 40 \geq 100; \text{ Si es cierto} \end{array} \right\}$$

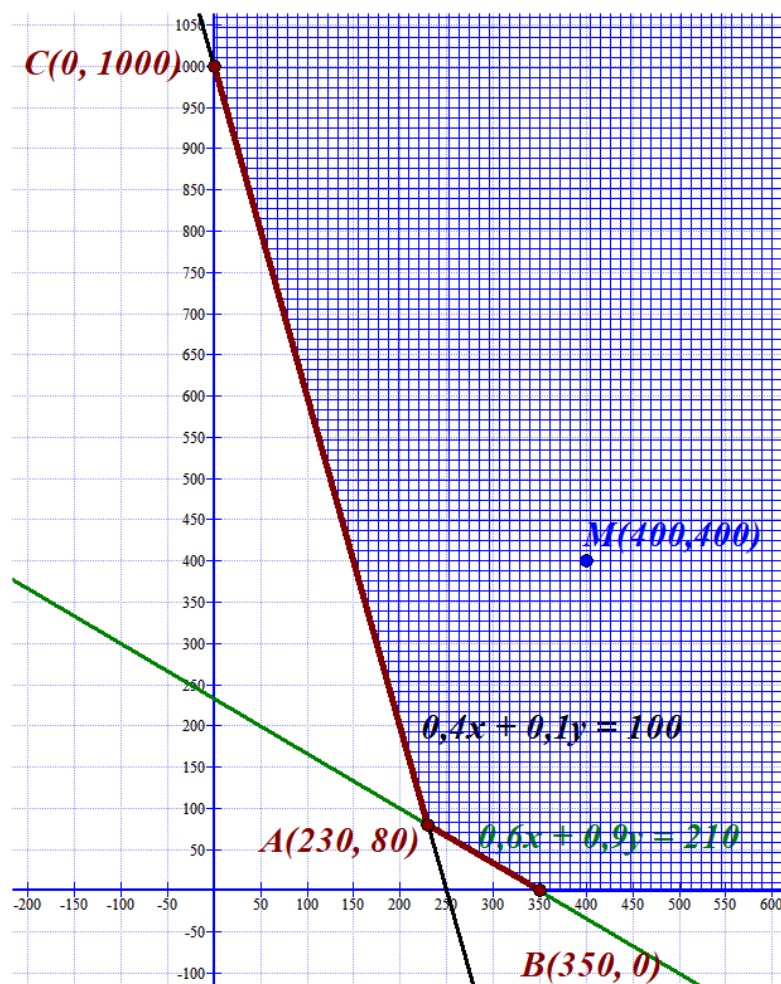
La región factible es la que contiene al punto M y limitada por los ejes de coordenadas y las dos rectas dibujadas.

El punto de corte entre ambas rectas lo obtenemos resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0,6x + 0,9y = 210 \\ 0,4x + 0,1y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{700-2x}{3} \\ y = 1000-4x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{700-2x}{3} = 1000-4x \Rightarrow$$

$$700-2x = 3000-12x \Rightarrow 10x = 2300 \Rightarrow x = 230 \Rightarrow y = 1000-4 \cdot 230 = 80$$

El punto de corte es A(230, 80)



Valoramos la función Coste $f(x, y) = 12x + 6y$ en cada uno de estos vértices.

$$A(230, 80) \rightarrow f(230, 80) = 12 \cdot 230 + 6 \cdot 80 = 3240 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(350, 0) \rightarrow f(350, 0) = 12 \cdot 350 + 0 = 4200$$

$$C(0, 1000) \rightarrow f(0, 1000) = 0 + 6000 = 6000$$

El coste mínimo se obtiene en el punto A(230, 80). Significa 230 kg del nutriente A y 80 kg del nutriente B con un coste de 3240 €.

2B-

- a) Calcula el valor de a que hace que el valor de la derivada de la función $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$, en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 1$, sean iguales.
- b) Sabiendo que la curva $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ pasa por el punto $(2, 12)$, calcula el valor de a y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

- a) La derivada de $y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18$ es $y' = 3ax^2 + 12x - a$.

La derivada en $x = -2$ vale $y' = 3a(-2)^2 + 12(-2) - a = 12a - 24 - a = 11a - 24$

La derivada en $x = 1$ vale $y' = 3a + 12 - a = 2a + 12$

Como deben ser iguales, debe cumplirse: $2a + 12 = 11a - 24 \Rightarrow 36 = 9a \Rightarrow a = \frac{36}{9} = 4$

El valor de a es 4.

- b) La curva pasa por el punto $(2, 12)$.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^3 + 6x^2 - ax - 18 \\ \text{Pasa por } (2, 12) \end{array} \right\} \Rightarrow 12 = a \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2a - 18 \Rightarrow 12 = 8a + 24 - 2a - 18$$

$$6 = 6a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para $a = 1$ la derivada de $y = x^3 + 6x^2 - x - 18$ es $y' = 3x^2 + 12x - 1$. La segunda derivada es $y'' = 6x + 12$.

Esta segunda derivada se anula cuando $y'' = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{6} = -2$

Si $x = -2$ entonces $y = (-2)^3 + 6(-2)^2 - (-2) - 18 = -8 + 24 + 2 - 18 = 0$.

Las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada son $(-2, 0)$.

3B- El gasto por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con media μ euros (desconocida) y desviación típica $\sigma = 10$ euros. Se elige una muestra representativa de 225 clientes, resultando una suma total de sus gastos de 2587.50 euros.

- a) Determina un intervalo de confianza del 99% para el gasto medio por cliente.
 b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra de clientes que permita alcanzar, con una confianza del 95%, un error máximo de 1.20 euros en la estimación del gasto medio por cliente.

X = Gasto por cliente en un supermercado. Sabemos que $X = N(\mu, 10)$

- a) Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$, siendo

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$n = 225, \bar{x} = \frac{2587.5}{225} = 11.5 \text{ €}, \sigma = 10 \text{ €}$$

Como el nivel de confianza es del 99%

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

$$\text{El error sería } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}} = 2.575 \cdot \frac{10}{15} = 1.716$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (11.5 - 1.716, 11.5 + 1.716) =$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (9.784, 13.26)}$$

- b) Como $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

El error máximo de 1,2 € lo sustituimos en su fórmula y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 1.2 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{10}{1.2} = \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(1.96 \cdot \frac{10}{1.2} \right)^2 = 266.777$$

El tamaño mínimo es de 267 clientes.

4B- En una clase con 15 alumnos de segundo de bachillerato, 2 alumnos están jugando al mus y 5 están jugando al tute, mientras que el resto de alumnos no está jugando a las cartas. Si se eligen al azar dos alumnos, ¿qué probabilidad hay de que ninguno de los elegidos estén jugando a las cartas?

Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

$$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$$

$$= P(\text{El primer elegido no esté jugando a las cartas}) \cdot$$

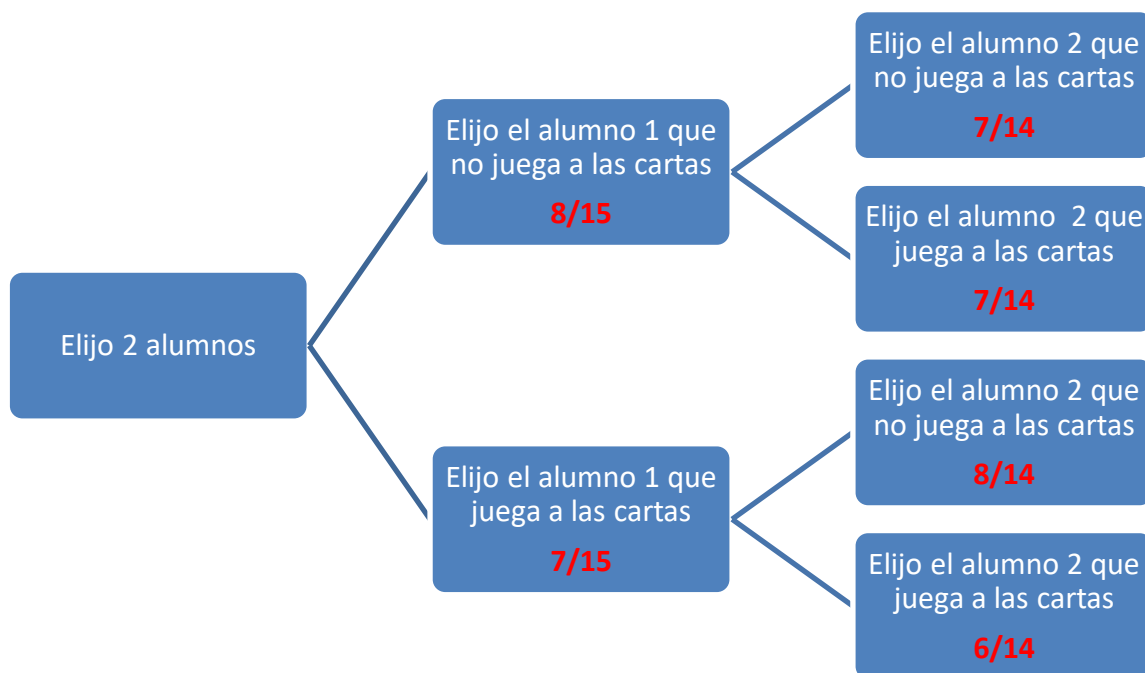
$$\cdot P(\text{El 2º elegido no esté jugando a las cartas} / \text{El 1º no juega a las cartas}) =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \frac{4}{15} = \boxed{0,266}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Son 7 los alumnos que juegan a las cartas y 8 los que no juegan a las cartas.

Hacemos un diagrama de árbol



$$P(\text{Ninguno de los 2 alumnos esté jugando a las cartas}) =$$

$$= P(\text{No juegue el alumno 1 a las cartas}) \cdot$$

$$\cdot P(\text{No juegue el alumno 2 a las cartas} / \text{El alumno 1 no juega a las cartas}) =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{14} = \boxed{0,266}$$