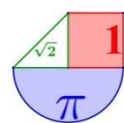


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU Extremadura
2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EBAU de Extremadura desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	16
EBAU Extraordinaria 2024.....	28
EBAU Ordinaria 2024	42
EBAU Extraordinaria 2023.....	56
EBAU Ordinaria 2023	70
EBAU Extraordinaria 2022	84
EBAU Ordinaria 2022	99
EBAU Extraordinaria 2021.....	113
EBAU Ordinaria 2021	127
EBAU Extraordinaria 2020.....	141
EBAU Ordinaria 2020	156
EBAU Extraordinaria 2019.....	171
EBAU Ordinaria 2019	181
EBAU Extraordinaria 2018.....	190
EBAU Ordinaria 2018	200
EBAU Extraordinaria 2017.....	210
EBAU Ordinaria 2017	221



PAU Extraordinaria 2025
Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2024-2025

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones para realizar el examen: En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.

Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.

Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.

Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0,10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.

Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

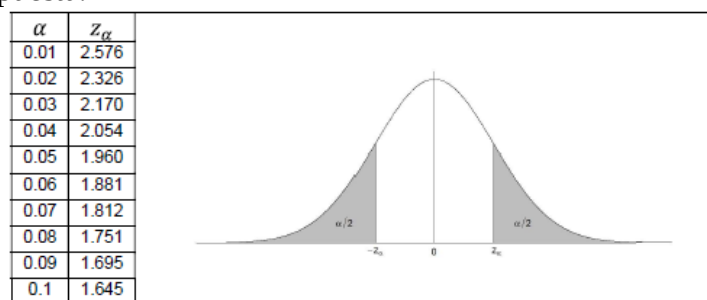
APARTADO A (4 puntos)

Una piscifactoría realiza un estudio de mercado para determinados tipos de pescado (salmones y truchas). Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los salmones suponen el 70% de la producción y las truchas el 30% de la producción. El 40% de los salmones se vende en España, el 35% en Portugal y el resto en otros países. En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España, el 10% en Portugal y el resto en otros países. Se pide, razonando la respuesta:

- Calcular la probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de España y Portugal.
- Calcular la probabilidad de que un pescado que sabemos que se ha vendido en Portugal, sea trucha.

A2. Se asume que el precio por kg de estos pescados tiene distribución normal con desviación típica 3 euros. ¿Cuántas pescaderías habrá que visitar como mínimo si se quiere estimar el precio medio mediante un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, cuya longitud no sea superior a 4 euros? Razonar la respuesta.



Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 1 punto.

Ejercicio B2: Entre 0 y 2 puntos.

APARTADO B (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

- Hallar los valores de x para los que no existe la matriz inversa de $A+C$.
- Para $x=3$, obtener la matriz Y que verifica la ecuación matricial $A \cdot Y = C - B \cdot Y$.

B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 2 puntos.

Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

APARTADO C (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. Los ingresos $I(t)$ y gastos $G(t)$ (en miles de euros) de un establecimiento desde el primer al sexto mes que lleva abierto dependen del tiempo, en meses, según las funciones:

$$I(t) = 3t^3 + 10Bt, \quad G(t) = 2t^3 + 3At^2 + Bt \quad 1 \leq t \leq 6$$

Se pide, justificando la respuesta:

- Calcular la función $F(t)$ que relaciona los beneficios con el tiempo.
- Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que el beneficio máximo fue de 112 mil euros y se alcanzó a los 4 meses desde la apertura.
- Para los valores de A y B calculados en el apartado anterior, determinar el momento donde se produce el beneficio mínimo y a cuánto asciende éste.

C2. Calcular de forma razonada:

- El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX entre $x = -1$ y $x = 4$.
- Las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{2x-4}{x^2-2x}$$

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 0.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos, apartado c) entre 0 y 1 punto.

Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

SOLUCIONES

APARTADO A (4 puntos)

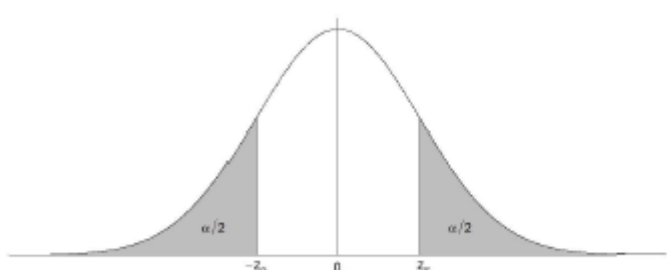
Una piscifactoría realiza un estudio de mercado para determinados tipos de pescado (salmones y truchas). Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los salmones suponen el 70% de la producción y las truchas el 30% de la producción. El 40% de los salmones se vende en España, el 35% en Portugal y el resto en otros países. En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España, el 10% en Portugal y el resto en otros países. Se pide, razonando la respuesta:

- Calcular la probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de España y Portugal.
- Calcular la probabilidad de que un pescado que sabemos que se ha vendido en Portugal, sea trucha.

A2. Se asume que el precio por kg de estos pescados tiene distribución normal con desviación típica 3 euros. ¿Cuántas pescaderías habrá que visitar como mínimo si se quiere estimar el precio medio mediante un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, cuya longitud no sea superior a 4 euros? Razonar la respuesta.

α	Z_{α}
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645



A1. Pasamos los datos a valores absolutos. Supongamos que hay 1000 peces en la piscifactoría, nos da lo mismo suponer otra cantidad, elegimos esta porque no nos va a dar números decimales.

El 70 % de la producción son salmones, es decir, en la piscifactoría hay $0.7 \cdot 1000 = 700$ salmones, el 30% son truchas, es decir, en la piscifactoría hay $0.3 \cdot 1000 = 300$ truchas.

El 40% de los salmones se vende en España ($0.4 \cdot 700 = 280$), el 35% en Portugal ($0.35 \cdot 700 = 245$) y el resto en otros países ($700 - 280 - 245 = 175$).

En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España ($0.3 \cdot 300 = 90$), el 10% en Portugal ($0.1 \cdot 300 = 30$) y el resto en otros países ($300 - 90 - 30 = 180$).

Ponemos estos datos en una tabla para tener más fácil acceso a ellos.

	Salmones	Truchas	
España	280	90	370
Portugal	245	30	275
Otros países	175	180	355
	700	300	1000

- De los 1000 peces que hemos supuesto que produce la piscifactoría hay 355 que se venden fuera de España y Portugal. La probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de

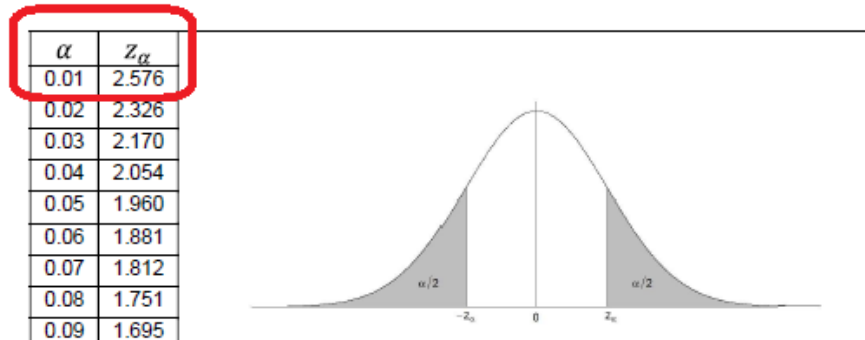
España y Portugal es de $\frac{355}{1000} = 0.355$.

b) De los 275 peces vendidos en Portugal sabemos que 30 son truchas. La probabilidad de que un pescado vendido en Portugal sea trucha tiene un valor de $\frac{30}{275} = \frac{6}{55} \approx 0.1091$.

A2. Consideramos $X =$ Precio en euros del kg de pescado de la piscifactoría. $X = N(\mu, 3)$

Si la longitud del intervalo de confianza no puede ser superior a 4 euros entonces el error no puede superar los 2 euros.

El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow$



Tenemos que $z_{\alpha} = 2.576$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.576 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{7.728}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{7.728}{2} \Rightarrow n = 3.864^2 = 14.93$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 15 pescaderías.

B1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar los valores de x para los que no existe la matriz inversa de $A+C$.

b) Para $x=3$, obtener la matriz Y que verifica la ecuación matricial $A \cdot Y = C - B \cdot Y$.

a) Obtenemos la expresión de la matriz $A+C$.

$$A+C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & x \\ 0 & x & -1-x \end{pmatrix}$$

Para que no exista la matriz inversa debe ser su determinante nulo.

$$|A+C| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & x \\ 0 & x & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8+8x-2x-2x^2 = 0 \Rightarrow -2x^2+6x+8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = x \\ \frac{3-5}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Para $x=-1$ y $x=4$ no existe la matriz inversa de $A+C$.

b) Para $x=3$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Despejamos Y en la ecuación matricial.

$$A \cdot Y = C - B \cdot Y \Rightarrow A \cdot Y + B \cdot Y = C \Rightarrow (A+B)Y = C \Rightarrow Y = (A+B)^{-1} C$$

Comprobamos que la matriz $A+B$ es invertible y calculamos su inversa.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 1 = -1 \neq 0$$

$$(A+B)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A+B)^T\right)}{|A+B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= (A+B)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz Y.

$$Y = (A+B)^{-1} C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & -2 & 24 \\ 2+1 & 1 & -15 \\ 2+1 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 24 \\ 3 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Llamamos “ x ” al número de quesos de oveja que se fabrica diariamente e “ y ” al número de quesos de cabra.

“Cada queso de oveja le reporta unos beneficios de 5 € y cada queso de cabra le reporta 11 €” $\rightarrow$ Los beneficios son $B(x, y) = 5x + 11y$.

Las restricciones son:

“Diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos” $\rightarrow 10x + 15y \leq 300$.

“Debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso” $\rightarrow x + y \geq 25$

“El número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades” $\rightarrow x + 2y \leq 30$.

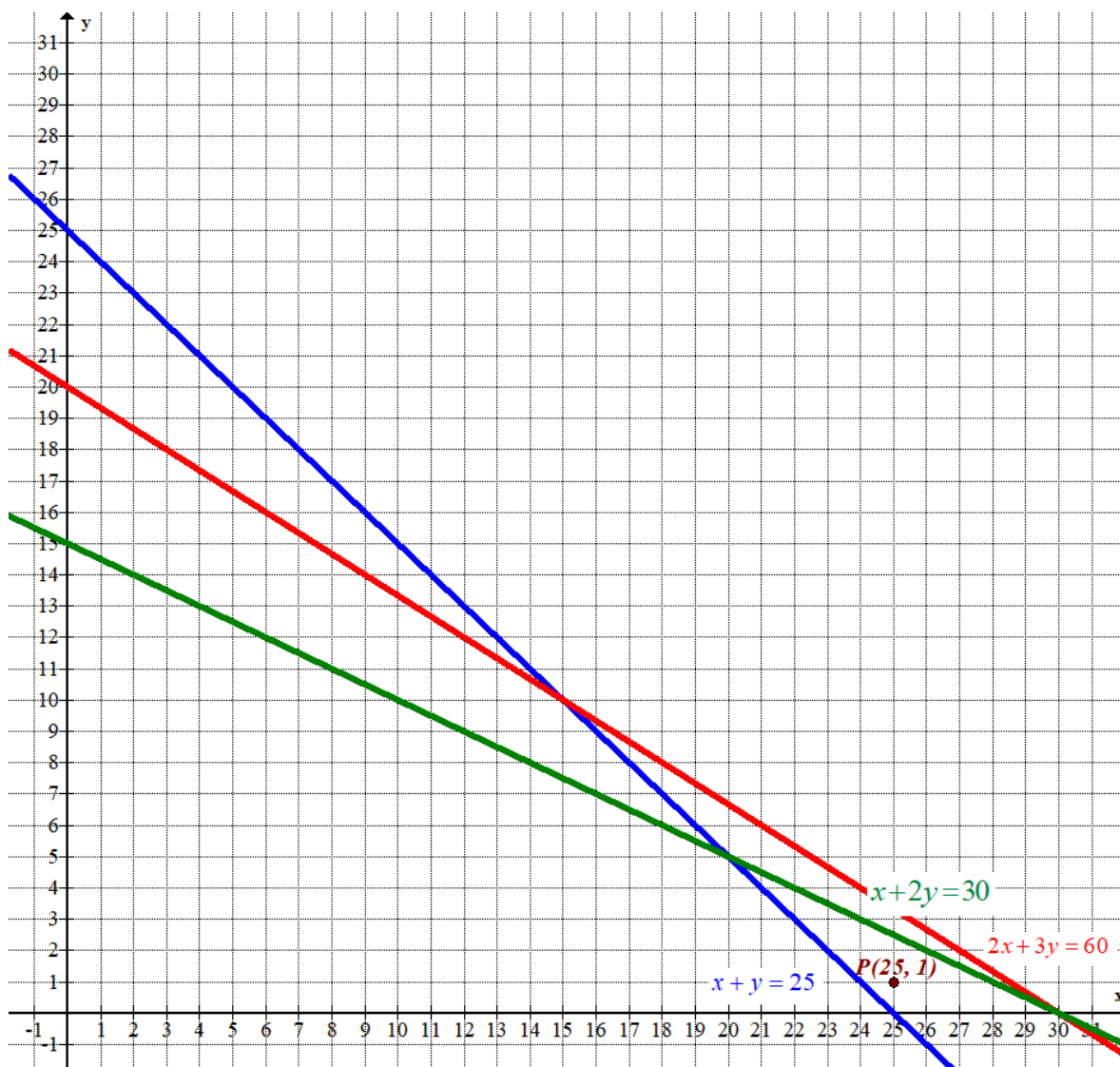
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 15y \leq 300 \\ x + y \geq 25 \\ x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 25 \\ x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + 3y = 60$	$x + y = 25$	$x + 2y = 30$	$x \geq 0, y \geq 0$																
$x \mid y = \frac{60 - 2x}{3}$ <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">20</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">30</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> </table>	0	20	30	0	$x \mid y = 25 - x$ <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">25</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">20</td><td style="padding: 0 10px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">25</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> </table>	0	25	20	5	25	0	$x \mid y = \frac{30 - x}{2}$ <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">15</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">20</td><td style="padding: 0 10px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">30</td><td style="padding: 0 10px;">0</td></tr> </table>	0	15	20	5	30	0	Primer cuadrante
0	20																		
30	0																		
0	25																		
20	5																		
25	0																		
0	15																		
20	5																		
30	0																		



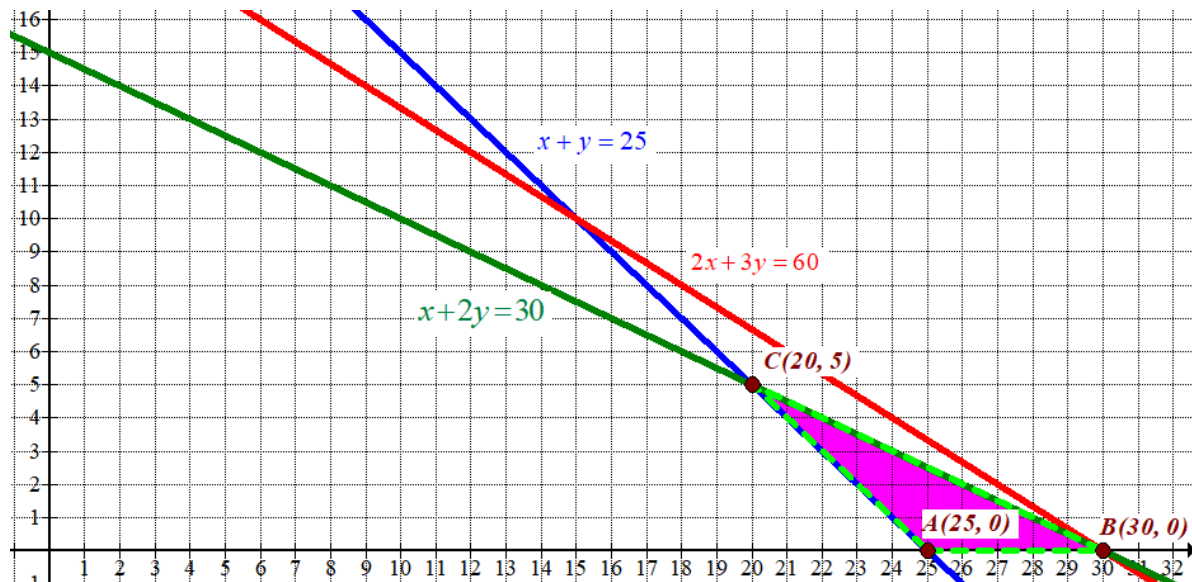
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \geq 25 \\ x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(25, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 25 + 3 \cdot 1 \leq 60 \\ 25 + 1 \geq 25 \\ 25 + 2 \cdot 1 \leq 30 \\ 25 \geq 0, 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 5x + 11y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 5 \cdot 25 + 11 \cdot 0 = 125$$

$$B(30, 0) \rightarrow B(30, 0) = 5 \cdot 30 + 11 \cdot 0 = 150$$

$$C(20, 5) \rightarrow B(20, 5) = 5 \cdot 20 + 11 \cdot 5 = 155 \text{ Máximo}$$

El valor máximo es 155 y se obtiene en el vértice $C(20, 5)$. Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 155 euros con la fabricación de 20 quesos de oveja y 5 quesos de cabra.

C1. Los ingresos $I(t)$ y gastos $G(t)$ (en miles de euros) de un establecimiento desde el primer al sexto mes que lleva abierto dependen del tiempo, en meses, según las funciones:

$$I(t) = 3t^3 + 10Bt, \quad G(t) = 2t^3 + 3At^2 + Bt \quad 1 \leq t \leq 6$$

Se pide, justificando la respuesta:

- Calcular la función $F(t)$ que relaciona los beneficios con el tiempo.
- Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que el beneficio máximo fue de 112 mil euros y se alcanzó a los 4 meses desde la apertura.
- Para los valores de A y B calculados en el apartado anterior, determinar el momento donde se produce el beneficio mínimo y a cuánto asciende éste.

- a) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$F(t) = I(t) - G(t) = 3t^3 + 10Bt - (2t^3 + 3At^2 + Bt) = t^3 - 3At^2 + 9Bt \quad 1 \leq t \leq 6$$

La función beneficios tiene la expresión $F(t) = t^3 - 3At^2 + 9Bt \quad 1 \leq t \leq 6$.

- b) Nos dicen que $B(4) = 112$. Además, como el beneficio es máximo para $t = 4$ la derivada debe anularse para este valor: $F'(4) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(4) = 112 \\ F(t) = t^3 - 3At^2 + 9Bt \end{array} \right\} \Rightarrow 112 = 4^3 - 3A \cdot 4^2 + 9B \cdot 4 \Rightarrow 36B - 48A = 48 \Rightarrow \boxed{3B - 4A = 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'(t) = 3t^2 - 6At + 9B \\ F'(4) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 4^2 - 6A \cdot 4 + 9B \Rightarrow 48 - 24A + 9B = 0 \Rightarrow \boxed{16 - 8A + 3B = 0}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} 16 - 8A + 3B = 0 \\ 3B - 4A = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16 - 8A + 3B = 0 \\ 3B = 4 + 4A \end{array} \right\} \Rightarrow 16 - 8A + 4 + 4A = 0 \Rightarrow -4A = -20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 5} \Rightarrow 3B = 4 + 4 \cdot 5 = 24 \Rightarrow \boxed{B = 8}$$

Los valores buscados son $A = 5$ y $B = 8$.

- c) Para $A = 5$ y $B = 8$ la función beneficios queda $F(t) = t^3 - 15t^2 + 72t \quad 1 \leq t \leq 6$.

Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$F(t) = t^3 - 15t^2 + 72t \Rightarrow F'(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 30t + 72 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{10+2}{2} = \boxed{6=t} \\ \frac{10-2}{2} = \boxed{4=t} \end{cases}$$

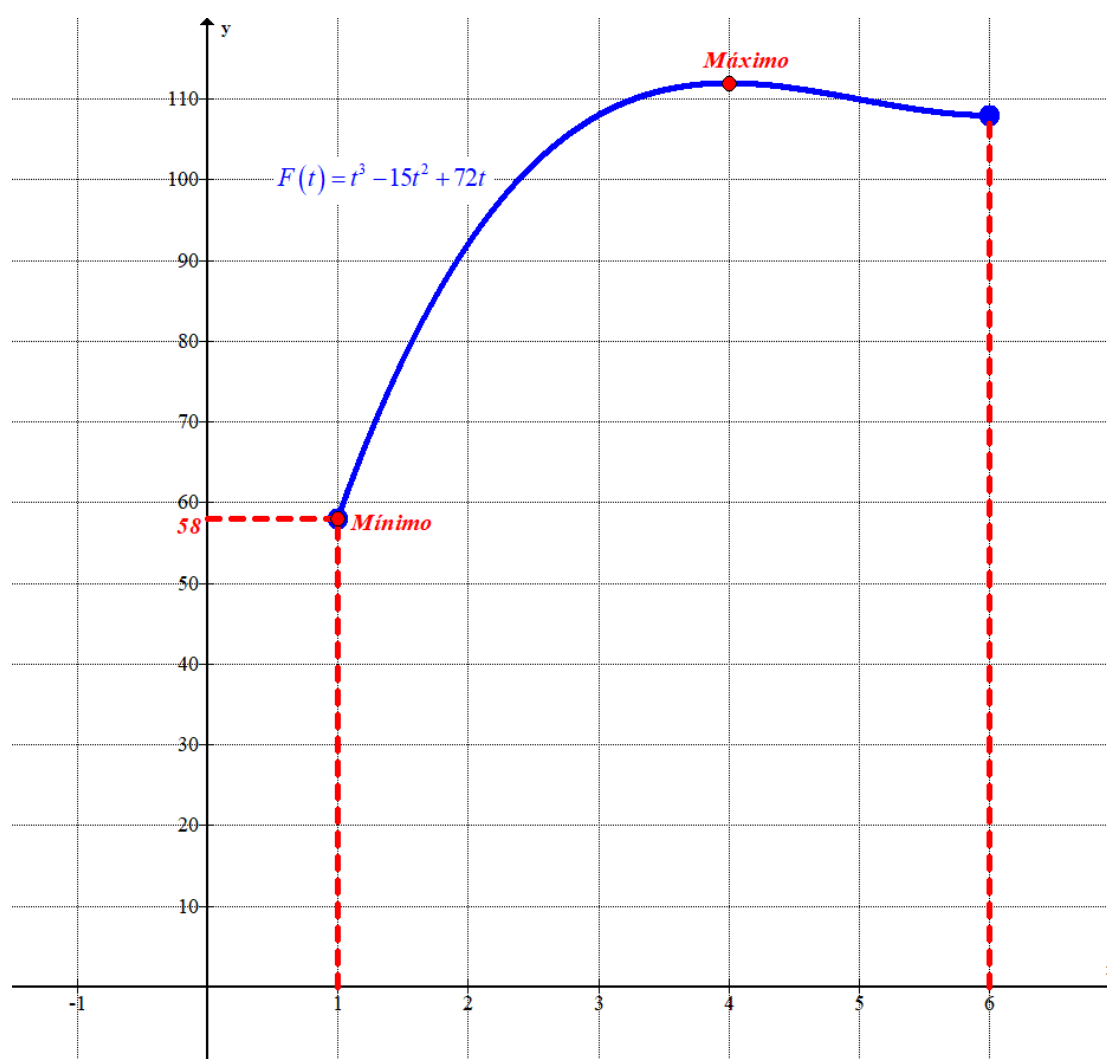
En $t = 4$ sabemos que hay un máximo de la función. Sustituimos en la segunda derivada el otro valor obtenido como punto crítico $t = 6$.

$$F'(t) = 3t^2 - 30t + 72 \Rightarrow F''(t) = 6t - 30 \Rightarrow F''(6) = 6 \cdot 6 - 30 = 6 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función beneficio presenta un mínimo relativo en $t = 6$. Valoramos la función en el otro extremo del intervalo para averiguar si en este mes se consigue el máximo absoluto del beneficio.

$$\left. \begin{aligned} F(1) &= 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 72 \cdot 1 = 58 \\ F(6) &= 6^3 - 15 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 = 108 \end{aligned} \right\}$$

El beneficio mínimo se alcanza el primer mes con un beneficio de 58 000 euros.



C2. Calcular de forma razonada:

a) El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje OX entre $x = -1$ y $x = 4$.

b) Las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{2x-4}{x^2-2x}$$

a) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

El recinto del cual queremos hallar el área lo dividimos en tres trozos.

El primer trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de la función.

$$\int_{-1}^0 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 \right] = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

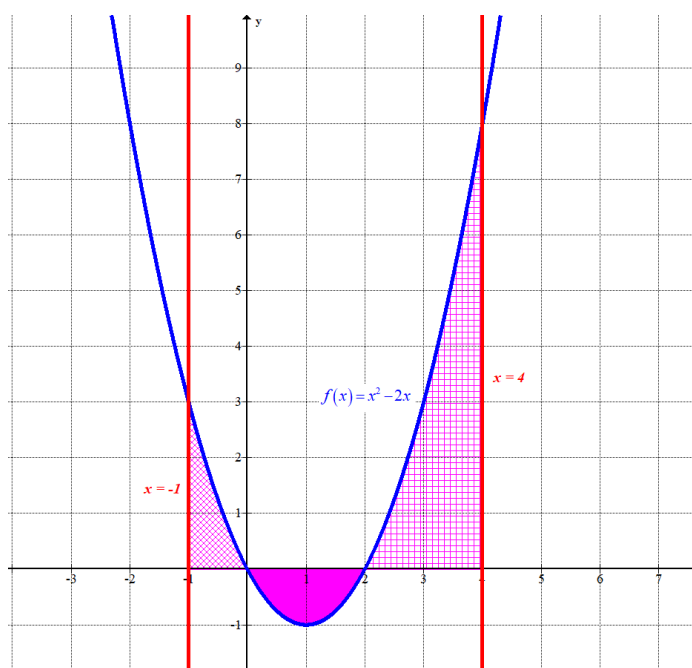
El segundo trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_0^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

Y el tercer trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre 2 y 4 de la función.

$$\int_2^4 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 4^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

El área total es la suma de las áreas de los tres trozos y vale $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} \approx 9.333 u^2$.



b) Hallamos el dominio de la función $g(x) = \frac{2x-4}{x^2-2x}$. Como es una función racional su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-4}{x^2-2x} = \frac{0-4}{0} = \frac{-4}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^2-2x} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x} = 1$$

$x = 2$ NO es asíntota vertical.

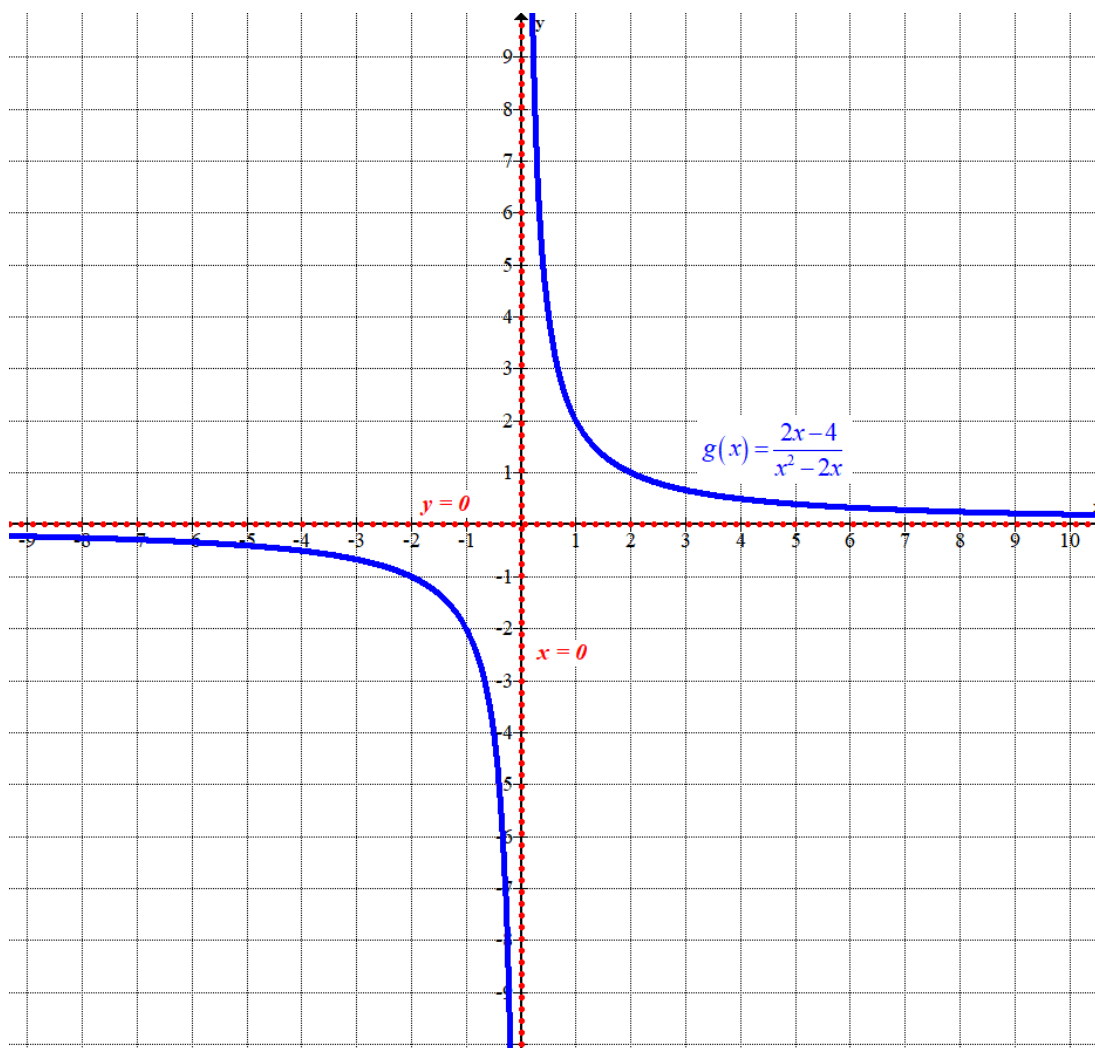
Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como la función tiene una asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.





PAU Ordinaria 2025
Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2024-2025

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones para realizar el examen: En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.

Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.

Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.

Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0,10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.

Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

APARTADO A (4 puntos)

El servicio de atención al cliente de una compañía telefónica decide realizar un estudio sobre el tipo de reclamaciones que recibe. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron:

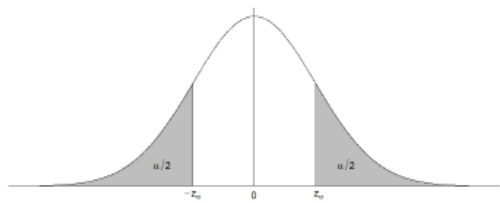
A1. En este servicio se reciben 1500 llamadas al día, de las cuales 700 son consultas técnicas, 600 consultas financieras y el resto son reclamaciones. El cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas, en el 40% de las consultas financieras y en el 10% de las reclamaciones. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma.
- Calcular la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida.

A2. De las 200 reclamaciones recibidas telefónicamente cierto día, se resolvieron favorablemente para el cliente 64. Se pide, justificando las respuestas:

- Hallar un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de reclamaciones telefónicas favorables al cliente.
- En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%?

α	z_{α}
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645



Ejercicio A1 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 1 punto.

Ejercicio A2 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 0.5 puntos.

APARTADO B (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5x & 4 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2

a) Calcular, justificando la respuesta, los valores de x , y , z para que se verifique la igualdad

$I + A' = B \cdot C$, siendo A' la matriz traspuesta de A .

b) Tomando $x = 1$, determinar los valores de y para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 2 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto.

Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

APARTADO C (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. La temperatura de una bodega oscila entre los 6 y los 14 grados y la cantidad de vino que se estropea, $C(x)$ en litros, depende de su temperatura de conservación, x en grados, de acuerdo con la siguiente función:

$$C(x) = 1000 - 231x + 27x^2 - x^3 \quad 6 \leq x \leq 14$$

Determinar, razonando las respuestas:

a) El crecimiento y decrecimiento de la cantidad de vino que se estropea dependiendo de la temperatura de conservación.

b) Las temperaturas de la bodega que hacen que se estropee la cantidad máxima y mínima de vino y los valores de estas cantidades.

c) La diferencia, en cuanto a cantidad de vino estropeada, entre mantener la bodega a 8 y a 10 grados.

C2. Consideramos la parábola $p(x) = Ax^2 + Bx - 30$. Se pide:

a) Determinar los valores de A y B para que el valor de la parábola en $x = 1$ sea -32 y su derivada en $x = 2$ sea igual a 4.

b) Para $A = 1$ y $B = -1$, hallar el área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x = 5$ y $x = 7$.

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto, apartado c) entre 0 y 0.5 puntos.

Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

SOLUCIONES

APARTADO A (4 puntos)

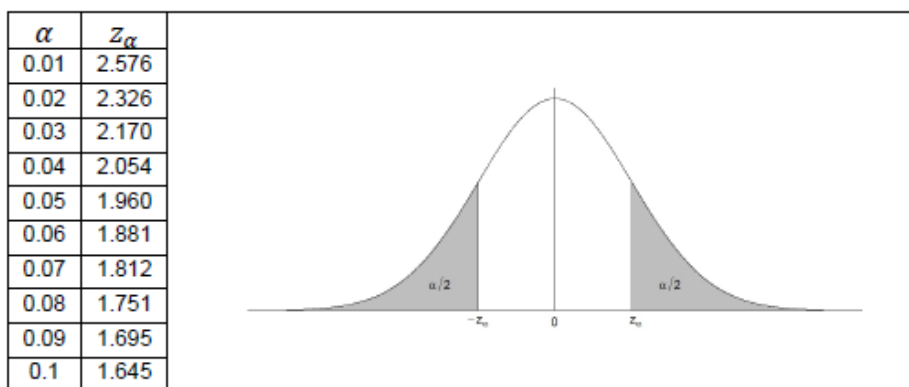
El servicio de atención al cliente de una compañía telefónica decide realizar un estudio sobre el tipo de reclamaciones que recibe. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron:

A1. En este servicio se reciben 1500 llamadas al día, de las cuales 700 son consultas técnicas, 600 consultas financieras y el resto son reclamaciones. El cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas, en el 40% de las consultas financieras y en el 10% de las reclamaciones. Se pide:

- Calcular la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma.
- Calcular la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida.

A2. De las 200 reclamaciones recibidas telefónicamente cierto día, se resolvieron favorablemente para el cliente 64. Se pide, justificando las respuestas:

- Hallar un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de reclamaciones telefónicas favorables al cliente.
- En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%?

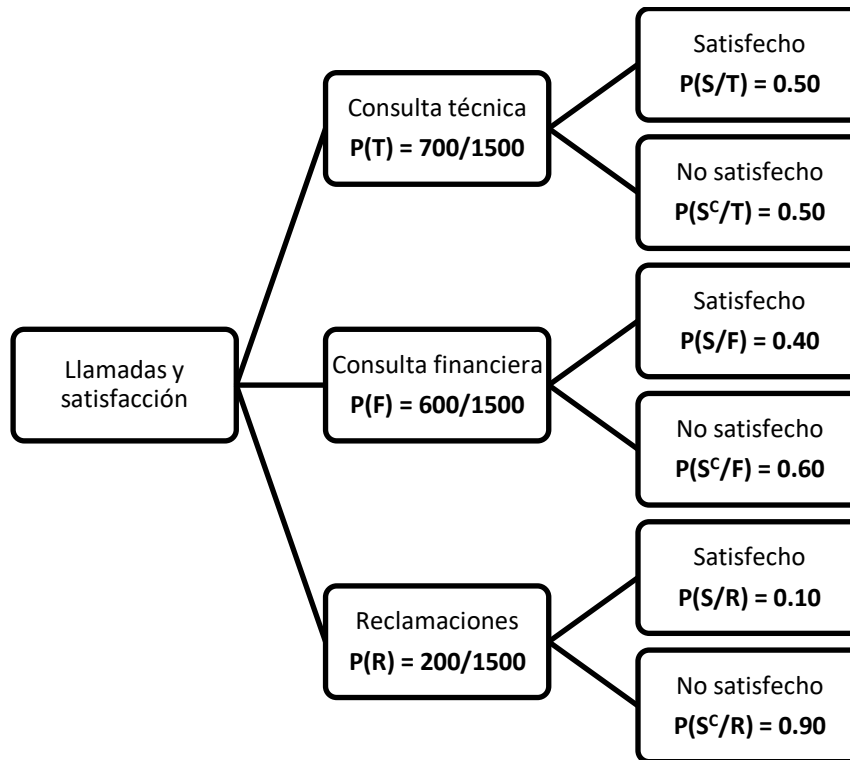


A1. Pasamos los datos a valores absolutos. Presentan una reclamación $1500 - 700 - 600 = 200$ clientes. Si el cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas entonces son $700/2 = 350$ los clientes satisfechos, en el 40% de las consultas financieras, entonces son $0.40 \cdot 600 = 240$ los clientes satisfechos y en el 10% de las reclamaciones, entonces son $0.10 \cdot 200 = 20$ los clientes que han reclamado y han acabado satisfechos.

- Como de 1500 clientes que realizan una llamada son 20 los que presentan una reclamación y quedan satisfechos, entonces hay $200 - 20 = 180$ clientes que presentan una reclamación y no resultan satisfechos. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma tiene un valor de $\frac{180}{1500} = 0.12$.

- De las 1500 llamadas hay $350 + 240 + 20 = 610$ clientes que quedan satisfechos. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida tiene un valor de $\frac{610}{1500} = \frac{61}{150} \approx 0.4067$.

También se puede resolver realizando un diagrama de árbol.



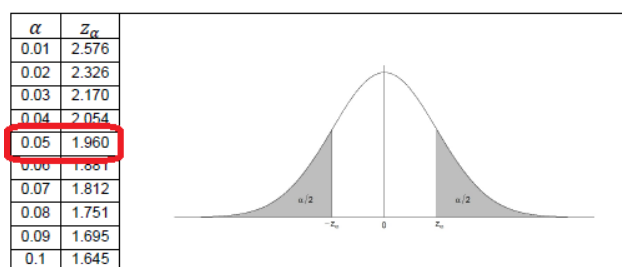
$$a) P(R \cap S) = P(R)P(S/R) = \frac{200}{1500} \cdot 0.10 = \boxed{0.12}.$$

b) Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P(T)P(S/T) + P(F)P(S/F) + P(R)P(S/R) = \\
 &= \frac{700}{1500} \cdot 0.50 + \frac{600}{1500} \cdot 0.40 + \frac{200}{1500} \cdot 0.10 = \boxed{\frac{61}{150} \approx 0.4067}
 \end{aligned}$$

A2. a) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 200$, la proporción muestral de reclamaciones telefónicas favorables al cliente es $p = \frac{64}{200} = 0.32$.

El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow$



Tenemos que $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{200}} \approx 0.06465$$

El intervalo de confianza es

$$(p_r - Error, p_r + Error) = (0.32 - 0.06465, 0.32 + 0.06465) = (0.25535, 0.38465)$$

- b) El porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20% supone una proporción de 0.20. Todos los valores del intervalo de confianza están por encima de este valor, por lo que se puede afirmar que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%.

APARTADO B (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5x & 4 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2

- a) Calcular, justificando la respuesta, los valores de x , y , z para que se verifique la igualdad $I + A^t = B \cdot C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .
 b) Tomando $x=1$, determinar los valores de y para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$I + A^t = B \cdot C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x & -x \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+5x & -x \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z+2y & -3 \\ -z+8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+5x=3z+2y \\ -x=-3 \\ 4=-z+8 \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+5x=3z+2y \\ x=3 \\ z=8-4=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+5 \cdot 3 = 3 \cdot 4 + 2y \Rightarrow 1+15 = 12 + 2y \Rightarrow 4 = 2y \Rightarrow y=2$$

Para $x=3$, $y=2$, $z=4$ se cumple la igualdad $I + A^t = B \cdot C$.

b) Con $x=1$ nos quedan las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de la matriz $A \cdot B$.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-4 & 5y+16 \\ -3+0 & -y+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5y+16 \\ -3 & -y \end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 11 & 5y+16 \\ -3 & -y \end{vmatrix} = -11y + 15y + 48 = 4y + 48$$

$$|AB| \neq 0 \Rightarrow 4y + 48 \neq 0 \Rightarrow 4y \neq -48 \Rightarrow y \neq -12$$

La matriz $A \cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de " y " distinto de -12 .

B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.

Llamamos “x” al número de hectáreas de maíz e “y” al número de hectáreas de trigo.

“Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo” → Los beneficios son $B(x, y) = 50x + 40y$.

Las restricciones son:

“La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar” → $x + y \leq 120$.

“La granja dispone de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2.” → $3x + 2y \leq 300$

“La granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo” → $x \geq 20$; $y \geq 15$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x \geq 20; y \geq 15 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 120$

x	y = 120 - x
0	120
120	0

$3x + 2y = 300$

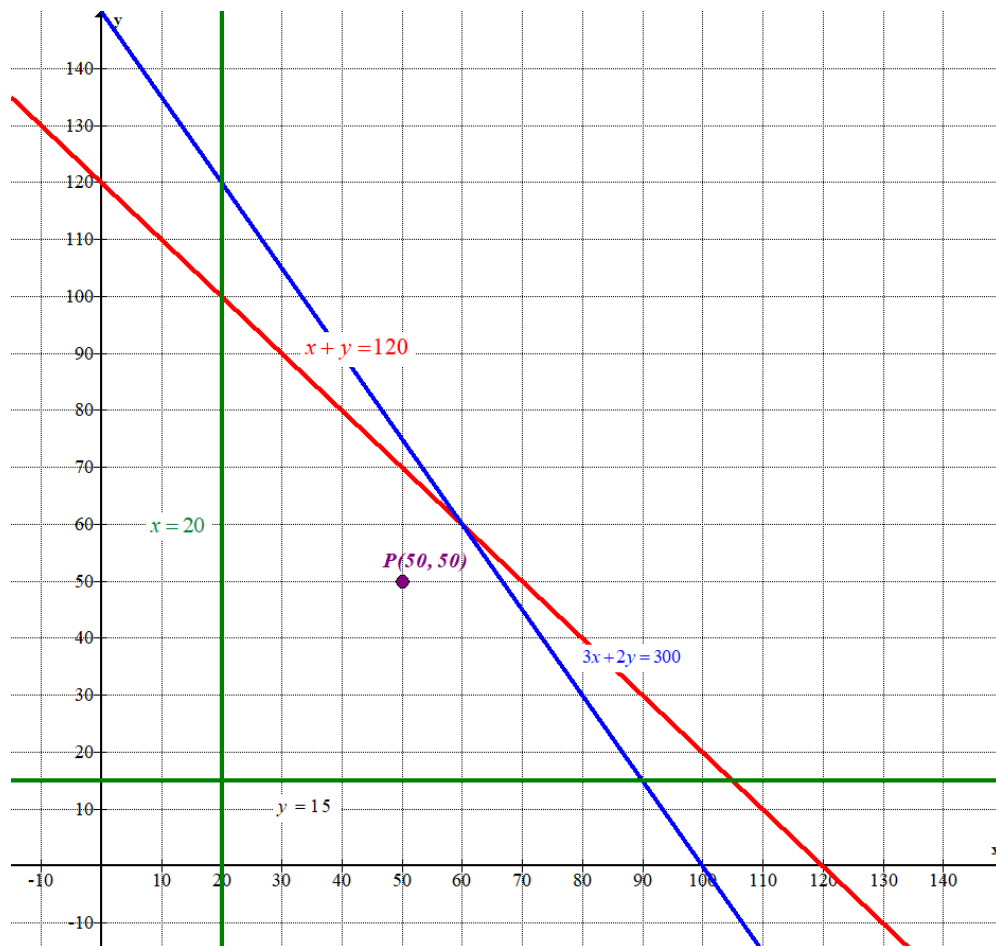
x	y = $\frac{300 - 3x}{2}$
0	150
100	0

$x = 20$

x = 20	y
20	0
20	15

$y = 15$

x	y = 15
0	15
20	15



Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x \geq 20; y \geq 15 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 50 \leq 120 \\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \leq 300 \\ 50 \geq 20; 50 \geq 15 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 50x + 40y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(20, 15) \rightarrow B(20, 15) = 50 \cdot 20 + 40 \cdot 15 = 1600$$

$$B(20, 100) \rightarrow B(20, 100) = 50 \cdot 20 + 40 \cdot 100 = 5000$$

$$C(60, 60) \rightarrow B(60, 60) = 50 \cdot 60 + 40 \cdot 60 = 5400 \text{ máximo}$$

$$D(90, 15) \rightarrow B(90, 15) = 50 \cdot 90 + 40 \cdot 15 = 5100$$

El valor máximo es 5400 y se obtiene en el vértice C(60, 60). Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 5400 euros plantando 60 hectáreas de maíz y 60 de trigo.

APARTADO C (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. La temperatura de una bodega oscila entre los 6 y los 14 grados y la cantidad de vino que se estropea, $C(x)$ en litros, depende de su temperatura de conservación, x en grados, de acuerdo con la siguiente función:

$$C(x) = 1000 - 231x + 27x^2 - x^3 \quad 6 \leq x \leq 14$$

Determinar, razonando las respuestas:

- El crecimiento y decrecimiento de la cantidad de vino que se estropea dependiendo de la temperatura de conservación.
- Las temperaturas de la bodega que hacen que se estropee la cantidad máxima y mínima de vino y los valores de estas cantidades.
- La diferencia, en cuanto a cantidad de vino estropeada, entre mantener la bodega a 8 y a 10 grados.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$C(x) = 1000 - 231x + 27x^2 - x^3 \Rightarrow C'(x) = -231 + 54x - 3x^2$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -231 + 54x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 77 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 77}}{2} = \frac{18 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{18+4}{2} = 11 \in [6, 14] \\ \frac{18-4}{2} = 7 \in [6, 14] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[6, 7)$ consideramos $x = 6$ y la derivada vale $C'(6) = -231 + 54 \cdot 6 - 3 \cdot 6^2 = -15 < 0$. La función decrece en $[6, 7)$.
- En el intervalo $(7, 11)$ consideramos $x = 8$ y la derivada vale $C'(8) = -231 + 54 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2 = 9 > 0$. La función crece en $(7, 11)$.
- En el intervalo $(11, 14]$ consideramos $x = 12$ y la derivada vale $C'(12) = -231 + 54 \cdot 12 - 3 \cdot 12^2 = -15 < 0$. La función decrece en $(11, 14]$.

La cantidad de vino que se estropea decrece entre 6 y 7 grados, crece entre 7 y 11 grados y vuelve a decrecer entre 11 y 14 grados.

- b) Con el estudio anterior podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x = 7$ y un máximo relativo en $x = 11$.
Valoramos la función en estos puntos y en los extremos del intervalo para encontrar los máximos y mínimos absolutos.

$$\begin{cases} C(6) = 1000 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 370 \\ C(7) = 1000 - 231 \cdot 7 + 27 \cdot 7^2 - 7^3 = 363 \\ C(11) = 1000 - 231 \cdot 11 + 27 \cdot 11^2 - 11^3 = 395 \text{ Máximo} \\ C(14) = 1000 - 231 \cdot 14 + 27 \cdot 14^2 - 14^3 = 314 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

La máxima cantidad de vino estropeada es de 395 litros y se produce con la temperatura de 11 grados.

La mínima cantidad de vino estropeada es de 314 litros y se produce con la temperatura de 14 grados.

- c) La cantidad de vino estropeada con 8 grados es de $C(8) = 1000 - 231 \cdot 8 + 27 \cdot 8^2 - 8^3 = 368$ litros y con 10 grados es de $C(10) = 1000 - 231 \cdot 10 + 27 \cdot 10^2 - 10^3 = 390$ litros. La diferencia es un incremento de $390 - 368 = 22$ litros.

C2. Consideramos la parábola $p(x) = Ax^2 + Bx - 30$. Se pide:

- a) Determinar los valores de A y B para que el valor de la parábola en $x=1$ sea -32 y su derivada en $x=2$ sea igual a 4.
 b) Para $A=1$ y $B=-1$, hallar el área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x=5$ y $x=7$.

a) Si el valor de la parábola en $x=1$ es -32 entonces $p(1) = -32$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = Ax^2 + Bx - 30 \\ p(1) = -32 \end{array} \right\} \Rightarrow -32 = A + B - 30 \Rightarrow A + B = -2$$

Si su derivada en $x=2$ es igual a 4 entonces $p'(2) = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = Ax^2 + Bx - 30 \Rightarrow p'(x) = 2Ax + B \\ p'(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 2A \cdot 2 + B \Rightarrow 4A + B = 4$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} A + B = -2 \\ 4A + B = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A + B = -2 \\ B = 4 - 4A \end{array} \right\} \Rightarrow A + 4 - 4A = -2 \Rightarrow -3A = -6 \Rightarrow \boxed{A = 2} \Rightarrow \boxed{B = 4 - 4 \cdot 2 = -4}$$

Para $A=2$ y $B=-4$ se cumple lo pedido.

- b) Para $A=1$ y $B=-1$ la función queda $p(x) = x^2 - x - 30$. Determinamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = x^2 - x - 30 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-30)}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2} = \begin{cases} \frac{1+11}{2} = 6 \in (5, 7) \\ \frac{1-11}{2} = -5 = x \end{cases}$$

El área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x=5$ y $x=7$ la calculamos como la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre 5 y 6 más el valor absoluto de la integral definida de la función entre 6 y 7.

$$\begin{aligned} \int_5^6 p(x) dx &= \int_5^6 x^2 - x - 30 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 30x \right]_5^6 = \left[\frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} - 30 \cdot 6 \right] - \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2} - 30 \cdot 5 \right] = \\ &= 72 - 18 - 180 - \frac{125}{3} + \frac{25}{2} + 150 = 24 - \frac{175}{6} = \frac{-31}{6} \approx -5.1667 \end{aligned}$$

El área del primer trozo vale $\frac{31}{6} \approx 5.1667$ unidades cuadradas.

$$\begin{aligned}\int_6^7 p(x) dx &= \int_6^7 x^2 - x - 30 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 30x \right]_6^7 \\ &= \left[\frac{7^3}{3} - \frac{7^2}{2} - 30 \cdot 7 \right] - \left[\frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} - 30 \cdot 6 \right] = \frac{35}{6} \approx 5.8333\end{aligned}$$

El área del segundo trozo vale $\frac{35}{6} \approx 5.8333$ unidades cuadradas.

El área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x=5$ y $x=7$ vale $\frac{31}{6} + \frac{35}{6} = 11$ unidades cuadradas.





EBAU Extraordinaria 2024
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Universidad de Extremadura
Curso 2023-2024

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMENEl examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El estudiante ha de elegir **5 problemas**.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.**PROBLEMA 1 (2 puntos)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \\ 2 \cdot X + Y = B \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

- Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**
- Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $(A \cdot B^t) \cdot Y = 2 \cdot I$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierta día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x) = \begin{cases} -x^2 + 3Ax + 3B & 0 \leq x < 4 \\ -x + 39 & 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x , que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

- Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**
- Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

- Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**
- Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

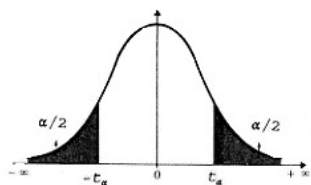
Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

- ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**
- Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

- Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**
- En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \\ 2 \cdot X + Y = B \end{cases}$$

Despejamos X de la primera ecuación matricial.

$$A \cdot X + I = B \Rightarrow A \cdot X = B - I \Rightarrow X = A^{-1}(B - I)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X = A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2-1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y hallamos la matriz Y.

$$2 \cdot X + Y = B \Rightarrow Y = B - 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema de ecuaciones matriciales son $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

- a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**
 b) Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $(A \cdot B^t) \cdot Y = 2 \cdot I$. **(1 punto)**

a) Hallamos la expresión de $A \cdot B^t$.

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -1+2 \\ x+x-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 2x-2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2x-2 & 3 \end{vmatrix} = 3(x-1) - (2x-2) = 3x-3-2x+2 = x-1$$

$$|A \cdot B^t| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de 1.

- b) Para $x = -1$ la matriz $A \cdot B^t$ queda $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1-1 & 1 \\ -2-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de $A \cdot B^t$ para $x = -1$.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$$

$$(A \cdot B^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B^t)^t)}{|A \cdot B^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la ecuación matricial y obtenemos la expresión de Y .

$$(A \cdot B^t) \cdot Y = 2 \cdot I \Rightarrow Y = (A \cdot B^t)^{-1} 2I = 2 \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz Y solución de la ecuación matricial es $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierta día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Llamamos “x” al número de carteras vendidas, “y” al de bolsos y “z” al de mochilas.

“El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Por esta venta ingresa un total de 450 euros” $\rightarrow 10x + 15y + 20z = 450$.

“Cierta día vende 35 artículos” $\rightarrow x + y + z = 35$

“El número de carteras vendidas es el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas” $\rightarrow x = y + 2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 35 \\ 10x + 15y + 20z = 450 \\ x = y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 35 \\ 2x + 3y + 4z = 90 \\ x = y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z + y + z = 35 \\ 2(y + 2z) + 3y + 4z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 3z = 35 \\ 5y + 8z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \times(-5) \rightarrow -10y - 15z = -175 \\ \times(2) \rightarrow 10y + 16z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{z = 5} \Rightarrow 2y + 15 = 35 \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{20}{2} = 10} \Rightarrow \boxed{x = 10 + 2 \cdot 5 = 20}$$

Ese día se vendieron 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Llamamos “x” al número de lotes A e “y” al número de lotes B.

Realizamos una tabla.

	Nº chorizos	Nº salchichones	Beneficio
Nº lotes A (x)	6x	6x	20x
Nº lotes B (y)	10y	16y	36y
TOTALES	$6x+10y$	$6x+16y$	$20x+36y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 20x + 36y$.

Las restricciones del problema son:

“Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta” $\rightarrow$

$$6x + 10y \leq 390; 6x + 16y \leq 480.$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 10y \leq 390 \\ 6x + 16y \leq 480 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 195 \\ 3x + 8y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x + 5y = 195$

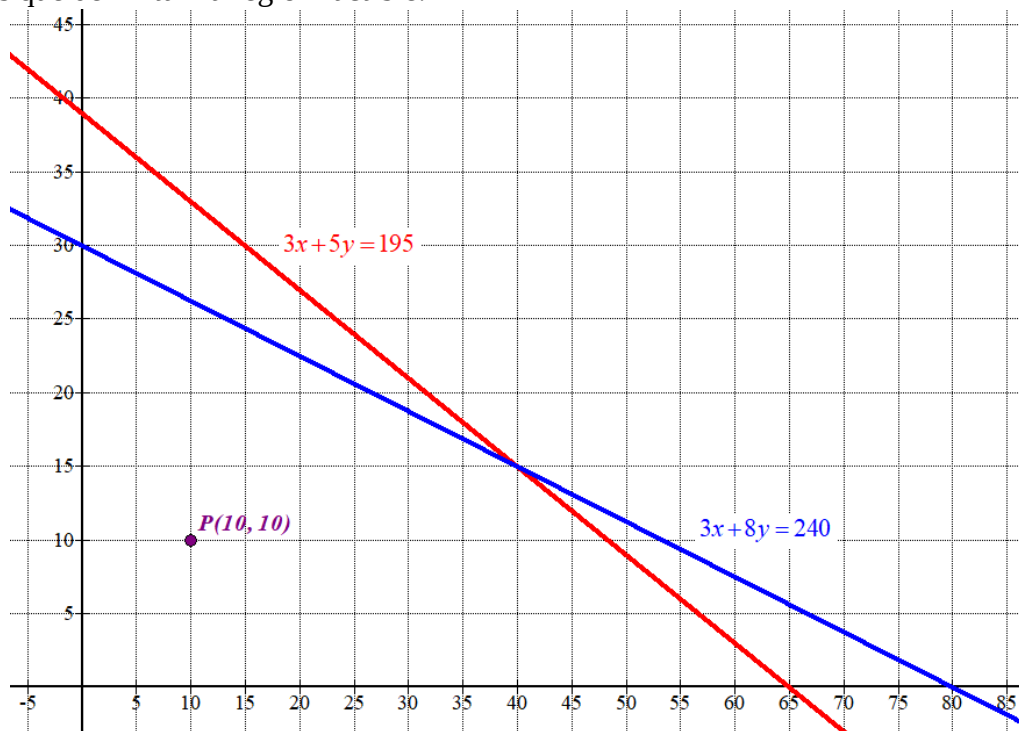
x	$y = \frac{195 - 3x}{5}$
0	39
40	15
65	0

$3x + 8y = 240$

x	$y = \frac{240 - 3x}{8}$
0	30
40	15
80	0

$x \geq 0; y \geq 0$

Primer cuadrante



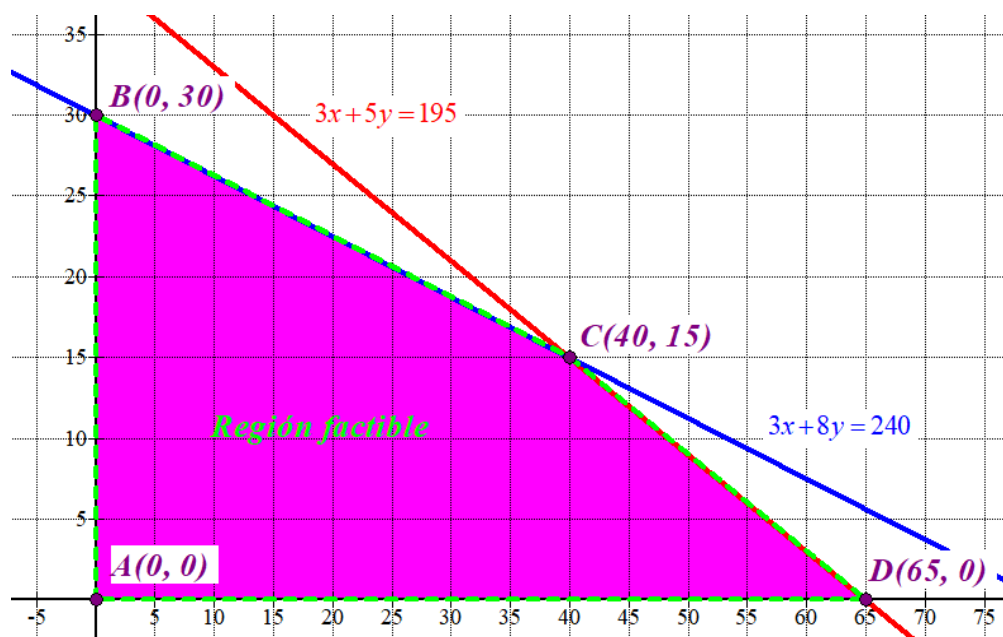
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 195 \\ 3x + 8y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 50 \leq 195 \\ 30 + 80 \leq 240 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función beneficio $B(x, y) = 20x + 36y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 20 \cdot 0 + 36 \cdot 30 = 1080$$

$$C(40, 15) \rightarrow B(40, 15) = 20 \cdot 40 + 36 \cdot 15 = 1340 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(65, 0) \rightarrow B(65, 0) = 20 \cdot 65 + 36 \cdot 0 = 1300$$

El beneficio máximo es de 1340 euros y se obtiene en el vértice C(40, 15).

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 1340 euros, obteniéndose con la venta de 40 lotes A y 15 lotes B.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x) = \begin{cases} -x^2 + 3Ax + 3B & 0 \leq x < 4 \\ -x + 39 & 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

La función es continua en $x = 4$, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} N(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} -x^2 + 3Ax + 3B = -4^2 + 12A + 3B = -16 + 12A + 3B \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} N(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -x + 39 = -4 + 39 = 35 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} N(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} N(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 + 12A + 3B = 35 \Rightarrow 12A + 3B = 51 \Rightarrow \boxed{4A + B = 17}$$

Cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Esto implica que $N(3) = 36$

$$N(x) = \begin{cases} -x^2 + 3Ax + 3B & 0 \leq x < 4 \\ -x + 39 & 4 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3^2 + 9A + 3B = 36 \\ N(3) = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9A + 3B = 45 \Rightarrow \boxed{3A + B = 15}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} 4A + B = 17 \\ 3A + B = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 17 - 4A \\ 3A + B = 15 \end{cases} \Rightarrow 3A + 17 - 4A = 15 \Rightarrow -A = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2} \Rightarrow \boxed{B = 17 - 4 \cdot 2 = 9}$$

Los valores buscados son $A = 2$ y $B = 9$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x , que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = 12x - 3x^2 \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1, 6] \\ x = 4 \in [1, 6] \end{cases}$$

Hemos encontrado un punto crítico: $x = 4$.

Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo es.

$$C'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow C''(x) = 12 - 6x \Rightarrow C''(4) = 12 - 6 \cdot 4 = -12 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 4$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si este extremo relativo es absoluto y para encontrar el valor mínimo de la función.

$$C(1) = 30 + 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 35$$

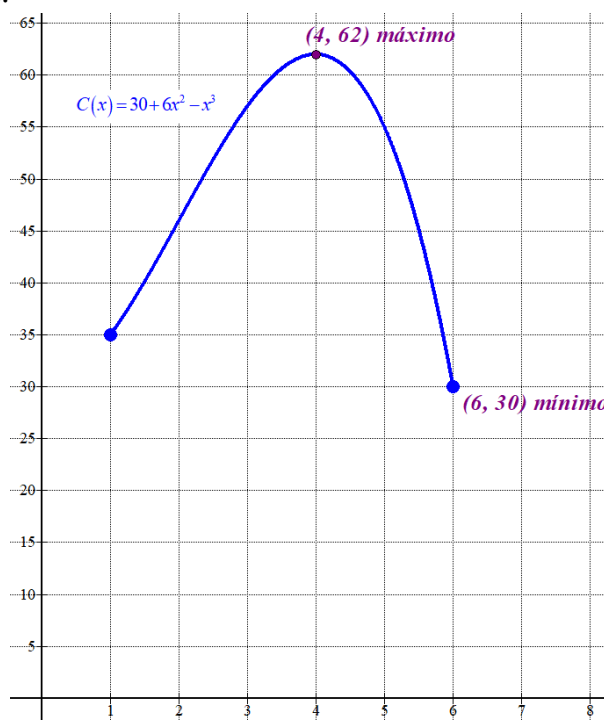
$$C(4) = 30 + 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 62 \text{ ; Máximo!}$$

$$C(6) = 30 + 6 \cdot 6^2 - 6^3 = 30 \text{ ; Mínimo!}$$

Para 4 gramos de aditivo se consigue un consumo máximo de 62 litros. Para 6 gramos de aditivo se consigue un consumo mínimo de 30 litros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \leq x \leq 6$
1	35
2	46
3	57
4	62
5	55
6	30



PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 1 = 1 \Rightarrow V(0, 1)$$

Como $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(1) = -2 < 0$ la función tiene un punto máximo relativo en $x = 0$.

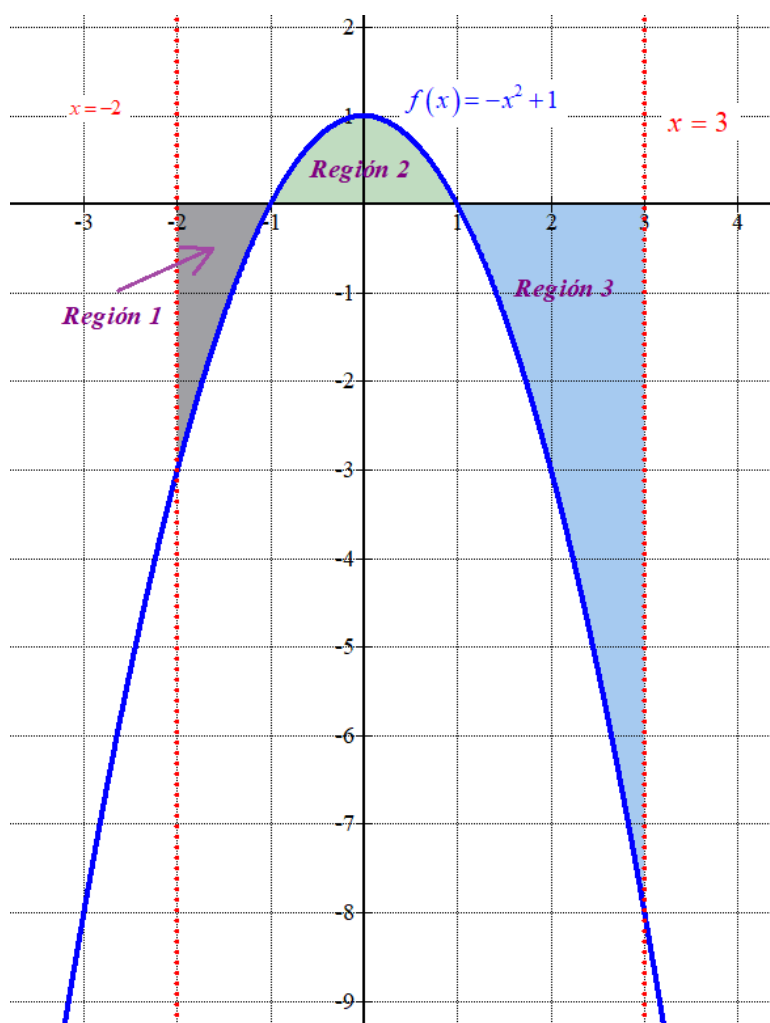
Las coordenadas del vértice de la parábola son $V(0, 1)$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 1 \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Como los dos puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas pertenecen al intervalo $[-2, 3]$ el área la dividimos en tres regiones calculando por separado el área de cada una de ellas. Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 3$.

x	$f(x) = -x^2 + 1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
3	-8



Hallamos el área de la región 1.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3} - 1 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - 2 \right] = \\ &= \frac{1}{3} - 1 - \frac{8}{3} + 2 = 1 - \frac{7}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \text{Área 1} = \frac{4}{3} u^2\end{aligned}$$

Hallamos el área de la región 2.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 1 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} - 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{Área 2} = \frac{4}{3} u^2\end{aligned}$$

Hallamos el área de la región 3.

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 -x^2 + 1 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 1 \right] = \\ &= -9 + 3 + \frac{1}{3} - 1 = -7 + \frac{1}{3} = \frac{-20}{3} \Rightarrow \text{Área 3} = \frac{20}{3} u^2\end{aligned}$$

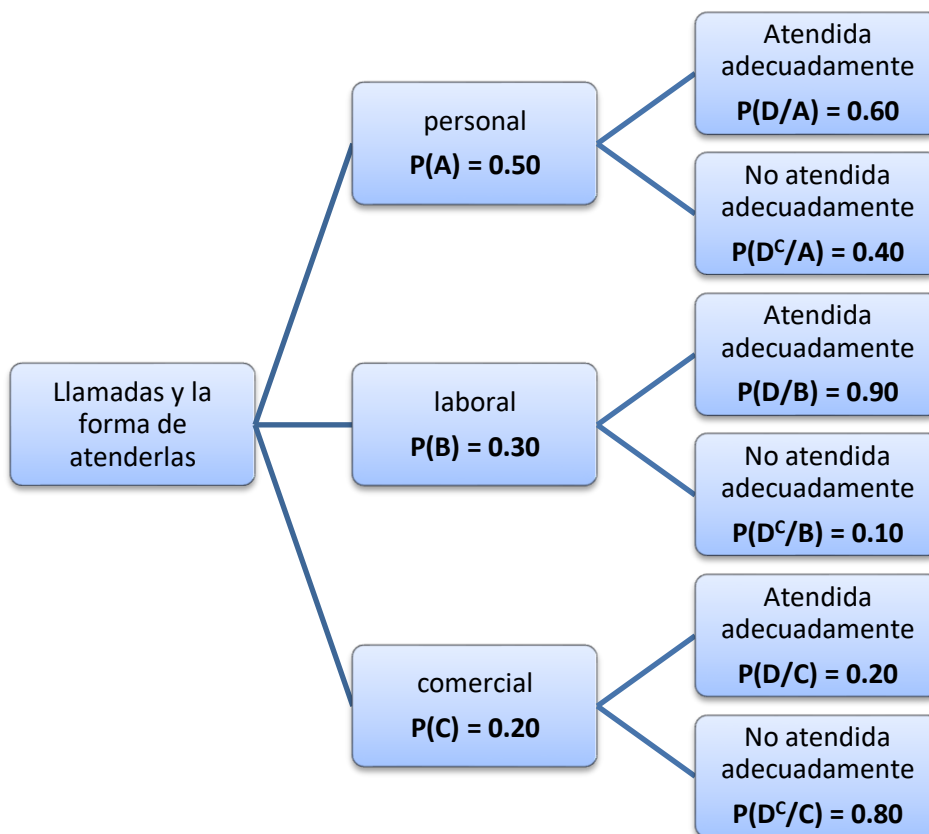
El área de la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} \simeq 9.33$ unidades cuadradas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

- a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**
 b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D^c) &= P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.8 = \boxed{0.39}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente es de 0.39.

- b) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{1 - P(D^c)} = \frac{0.2 \cdot 0.2}{1 - 0.39} = \boxed{\frac{4}{61} \approx 0.06557}$$

La probabilidad de que una llamada sea comercial sabiendo que ha sido bien atendida tiene un valor aproximado de 0.06557.

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

- a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**
 b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

a) Lo contratan el 20 % del 75% $\rightarrow 0.20 \cdot 0.75 = 0.15$. El 15 % de los clientes contratan ambos tipos de productos de ahorro.

b) Llamamos A al suceso “contrata producto conservador” y B al suceso “contrata producto de riesgo”.

Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos entonces el 10 % restante no contrata ninguno de los dos tipos de productos de ahorro.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15		75
No producto conservador		10	
			100

Completamos la tabla.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15	60	75
No producto conservador	15	10	25
	30	70	100

Observando los datos obtenidos al completar la tabla observamos que un 30 % de los clientes contrata un producto de ahorro de riesgo.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

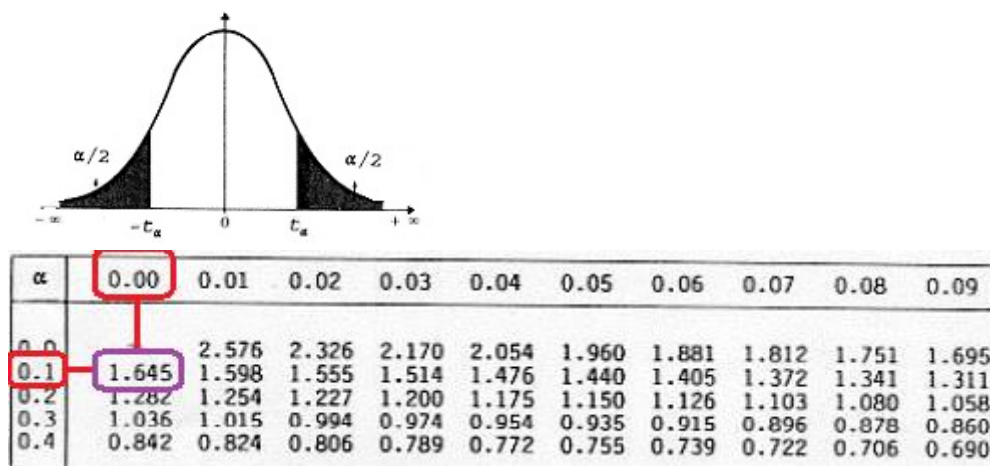
a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

X = El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad. $X = N(\mu, 16)$

a) La muestra es de tamaño $n = 81$. La media muestral es $\bar{x} = 72$ euros.

El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow$



Tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.645$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} \approx 2.924 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (72 - 2.924, 72 + 2.924) = (69.076, 74.924)$$

b) 70 euros de gasto medio pertenece al intervalo de confianza obtenido, al igual que 71, 72, 73, 74, pero no pertenece al intervalo ningún valor superior a 75 euros.

No podemos asegurar con el nivel de confianza del apartado anterior que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad.

Sería más adecuado afirmar que el gasto mensual en electricidad está entre 70 y 74 euros.



EBAU Ordinaria 2024
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Universidad de Extremadura
Curso 2023-2024

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMENEl examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El estudiante ha de elegir **5 problemas**.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

Observación importante: Se permitirá una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.**PROBLEMA 1 (2 puntos)**Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X - 2I = B^t - A \cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.**PROBLEMA 2 (2 puntos)**Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las

respuestas:

- a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A \cdot B^t + 3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B . **(1.5 puntos)**
- b) Calcular la inversa de $A \cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierta modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & 1 \leq t < 4 \\ Bt & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $C(t)$ es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, $P(x)$ en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

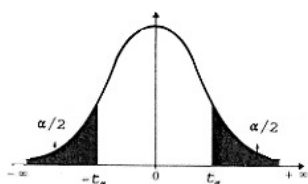
b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X - 2I = B^t - A \cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3X - 2I = B^t - A \cdot X \Rightarrow 3X + A \cdot X = B^t + 2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3I + A)X = B^t + 2I \Rightarrow X = (3I + A)^{-1}(B^t + 2I)$$

Calculamos la inversa de la matriz $(3I + A)$.

$$3I + A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|3I + A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(3I + A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((3I + A)^t)}{|3I + A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X .

$$X = (3I + A)^{-1}(B^t + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

- a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A \cdot B^t + 3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B . **(1.5 puntos)**
 b) Calcular la inversa de $A \cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

a) Hallamos la expresión de $A \cdot B^t + 3C$.

$$A \cdot B^t + 3C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1+2 \\ -2x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3x & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A \cdot B^t + 3C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & -1 \end{vmatrix} = -2 - x$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$|A \cdot B^t + 3C| = 0 \Rightarrow -2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

La matriz $A \cdot B^t + 3C$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de -2 .

b) Hallamos la expresión de $A \cdot B^t$ para $x=1$.

$$x=1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos su inversa.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$$

$$(A \cdot B^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B^t)^t)}{|A \cdot B^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La inversa de $A \cdot B^t$ para $x=1$ es la matriz $(A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Llamamos “x” al tiempo de lavado, “y” al tiempo de aclarado y “z” al tiempo de centrifugado.

“El programa completo es de 90 minutos” $\rightarrow x + y + z = 90$.

“El tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado” $\rightarrow y = 2z$

“El tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado”

$$\rightarrow y + z = \frac{x}{2}.$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ y = 2z \\ y + z = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 90 \\ 2z + z = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 90 \\ 3z = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 90 \Rightarrow 2x + x = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow \boxed{x = \frac{180}{3} = 60} \Rightarrow 3z = \frac{60}{2} \Rightarrow 3z = 30 \Rightarrow \boxed{z = \frac{30}{3} = 10} \Rightarrow \boxed{y = 20}$$

El tiempo de lavado es de 60 minutos, 20 minutos de aclarado y 10 de centrifugado.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

Llamamos “x” al número de litros de aceite de oliva virgen extra e “y” al número de litros de orujo.

“El virgen extra se vende a 10 euros el litro y el de orujo cada litro se vende a 7 euros” → Los ingresos son $I(x, y) = 10x + 7y$.

Las restricciones son:

“No puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos)” → $x + y \leq 3000$.

“No puede producir más de 2.000 litros de aceite de orujo” → $y \leq 2000$

“El aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo” → $x \leq 2y$

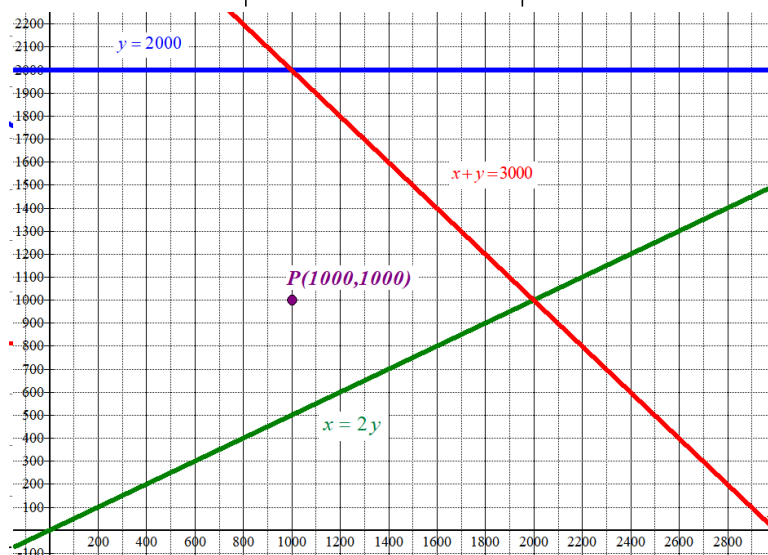
Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 3000 \\ y \leq 2000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 3000$		$y = 2000$		$x = 2y$		Primer cuadrante
x	$y = 3000 - x$	x	$y = 2000$	x	$y = x / 2$	
0	3000	0	2000	0	0	
1000	2000	1000	2000	200	100	



Como las restricciones son

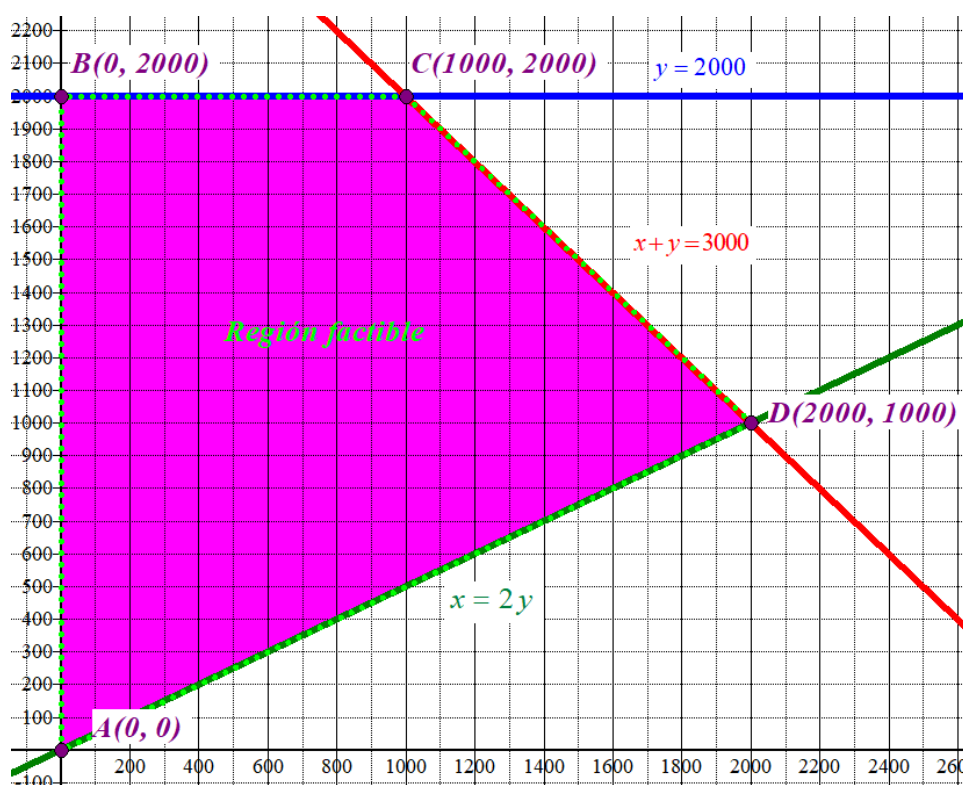
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 3000 \\ y \leq 2000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(1000, 1000) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1000 + 1000 \leq 3000 \\ 1000 \leq 2000 \\ 1000 \leq 2000 \\ 1000 \geq 0; 1000 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x, y) = 10x + 7y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 2000) \rightarrow I(0, 2000) = 10 \cdot 0 + 7 \cdot 2000 = 14000$$

$$C(1000, 2000) \rightarrow I(1000, 2000) = 10 \cdot 1000 + 7 \cdot 2000 = 24000$$

$$D(2000, 1000) \rightarrow I(2000, 1000) = 10 \cdot 2000 + 7 \cdot 1000 = 27000 \text{ ¡Máximo!}$$

El valor máximo es 27000 y se obtiene en el vértice D(2000, 1000).

Los ingresos máximos se obtienen elaborando 2000 litros de aceite de oliva virgen y 1000 litros de aceite de orujo, siendo 27 000 € los ingresos máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & 1 \leq t < 4 \\ Bt & 4 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $C(t)$ es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

La función es continua en $t = 4$, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^-} t^2 - 3Bt + 2A = 4^2 - 3B \cdot 4 + 2A = 16 - 12B + 2A \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} Bt = 4B \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} C(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 16 - 12B + 2A = 4B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 16B + 2A = 0 \Rightarrow 8 - 8B + A = 0 \Rightarrow \boxed{A - 8B = -8}$$

El consumo en el mes 3 es de 7 mil litros por lo que $C(3) = 7$.

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & 1 \leq t < 4 \\ Bt & 4 \leq t \leq 12 \end{cases} \Rightarrow 7 = 3^2 - 3B \cdot 3 + 2A \Rightarrow \boxed{-2 = -9B + 2A}$$

$$C(3) = 7$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} A - 8B &= -8 \\ 2A - 9B &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= -8 + 8B \\ 2A - 9B &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(-8 + 8B) - 9B = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 + 16B - 9B = -2 \Rightarrow 7B = 14 \Rightarrow \boxed{B = \frac{14}{7} = 2} \Rightarrow \boxed{A = -8 + 8 \cdot 2 = 8}$$

Los valores buscados son $A = 8$ y $B = 2$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, $P(x)$ en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riega de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

- a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**
- b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

- a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = x \\ \frac{7-3}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos: $x = 2$ y $x = 5$.

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo son.

$$P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \Rightarrow P''(x) = 12x - 42 \Rightarrow \begin{cases} P''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = -18 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ P''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 18 > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si estos extremos relativos son absolutos.

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 10 = 10$$

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 10 = 62$$

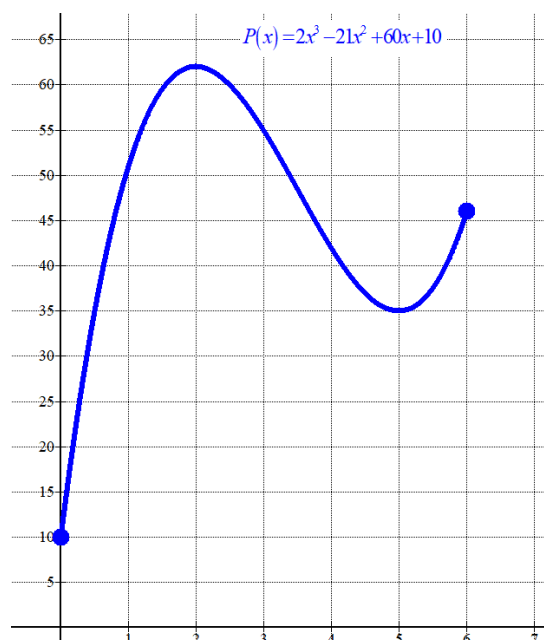
$$P(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 10 = 35$$

$$P(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 10 = 46$$

El mínimo absoluto de producción son 10 kg de fruta y se obtienen con 0 litros diarios de agua. La máxima producción se consigue con 2 litros diarios de agua y es de 62 kg de fruta.

- b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la producción.

x	$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$
0	10
1	51
2	62
3	55
5	35
6	46



PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2=x} \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(\cancel{x-2})(x-1)}{(\cancel{x-2})(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)}{(x-3)} = \frac{2(2-1)}{-1} = -2$$

$x = 2$ no es asíntota vertical.

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 3\frac{x^2}{x^3} + 2\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - 5\frac{x}{x^3} + \frac{6}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}} = \frac{1-0+0}{0-0+0} = \infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}} =$$

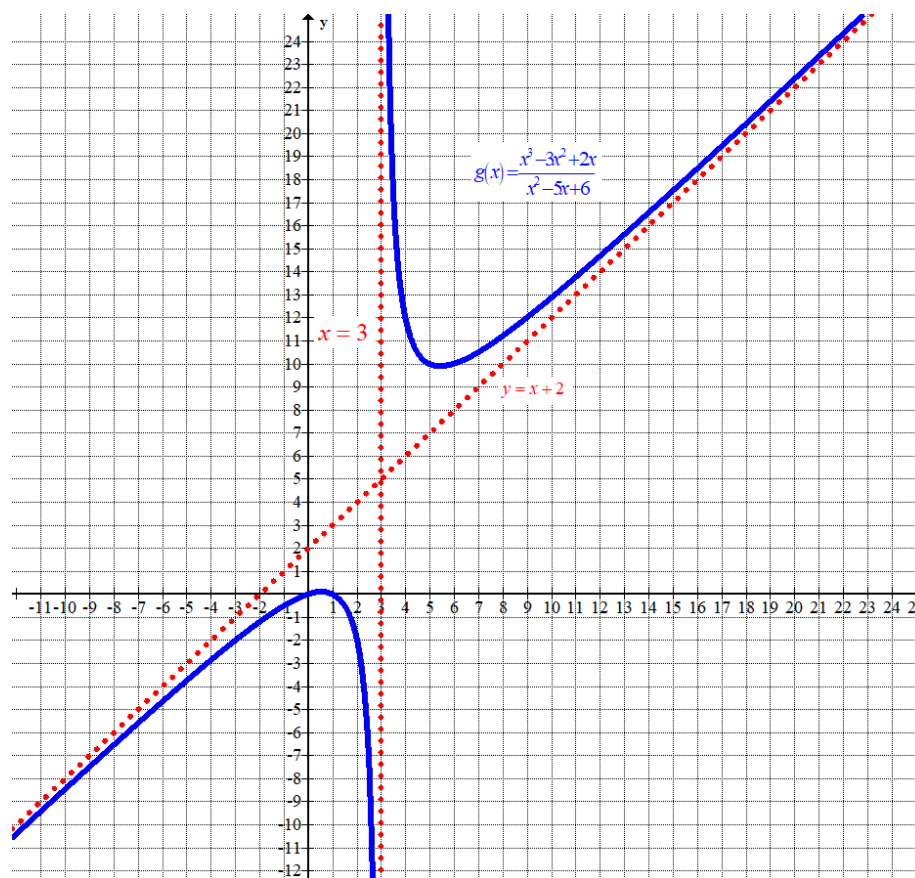
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - x^3 + 5x^2 - 6x}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = 3$, no tiene asíntota horizontal y tiene una asíntota oblicua: $y = x + 2$.



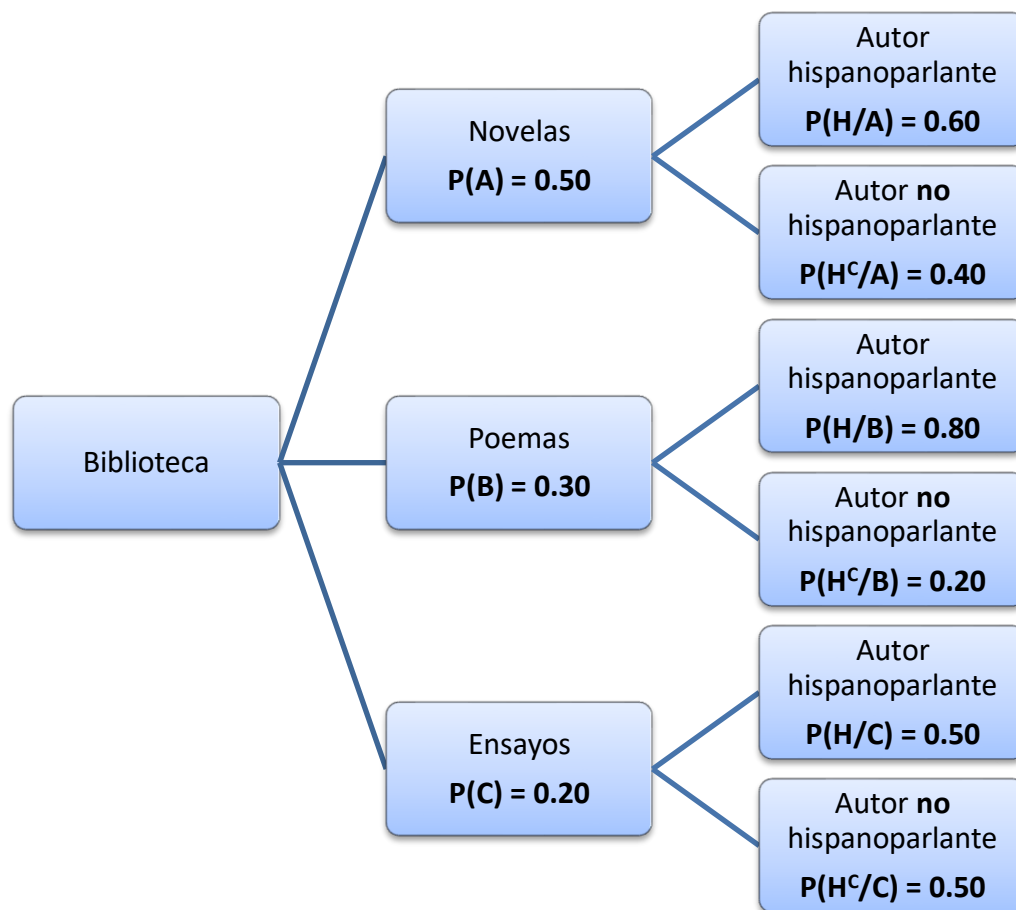
PROBLEMA 8 (2 puntos)

Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A \cap H^c)$.

$$P(A \cap H^c) = P(A)P(H^c / A) = 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{0.2}$$

La probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(H)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A)P(H / A) + P(B)P(H / B) + P(C)P(H / C) = \\ &= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.64} \end{aligned}$$

La probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante es de 0.64.

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

- a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**
 b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

Llamamos A al suceso “ser detectado por el radar A” y B al suceso “ser detectado por el radar B”.

Los datos del problema nos dicen que $P(A) = 0.80$ y $P(B) = 0.85$.

También nos dan el dato $P(A \cup B) = 0.95$.

- a) Nos piden el valor de $P(A \cap B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.95 \\ P(A) = 0.80 \\ P(B) = 0.85 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.95 = 0.8 + 0.85 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.8 + 0.85 - 0.95 = \boxed{0.7}$$

La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B es 0.7.

- b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.7}{0.8} = \boxed{0.875}$$

La probabilidad de que un infractor que ha sido detectado por el radar A también lo detecte el radar B es de 0.875.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

- a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**
- b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**

- a) Hay un total de $4000 + 5000 + 1000 = 10\,000$ personas y hay que elegir 500 la proporción es

$$\frac{500}{10000} = \frac{1}{20}.$$

De las 4.000 personas entre 18 y 30 años debemos elegir $\frac{1}{20} 4000 = 200$ personas.

De las 5.000 personas entre 30 y 60 años debemos elegir $\frac{1}{20} 5000 = 250$ personas.

De las 1.000 personas mayores de 60 años debemos elegir $\frac{1}{20} 1000 = 50$ personas.

- b) La proporción de personas favorables a participar en el festival de cine es $p_r = \frac{150}{250} = 0.6$.

El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow$



Tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.576$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{250}} \approx 0.0798$$

El intervalo de confianza es

$$(p_r - Error, p_r + Error) = (0.6 - 0.0798, 0.6 + 0.0798) = (0.5202, 0.6798)$$



EBAU Extraordinaria 2023
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Universidad de Extremadura
Curso 2022-2023

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**
- Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} . **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x , (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \quad 0 \leq x \leq 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x , (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100, \quad 0 \leq x \leq 25, \quad \text{y} \quad E(x) = -x^2 + 10x + 200, \quad 0 \leq x \leq 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

- La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**
- A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

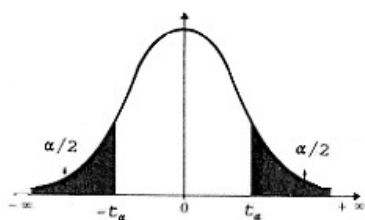
- Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**
- Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . Justificar la respuesta.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X \cdot A - A^t = B \Rightarrow X \cdot A = A^t + B \Rightarrow X = (A^t + B)A^{-1}$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz A y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t + B)A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2-15 & 1+0-6 & 1+0-3 \\ 8+2+0 & 2+0+0 & 2+0+0 \\ -12+0+5 & -3+0+2 & -3+0+1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} . **(1 punto)**

a) Resolvemos la ecuación matricial $A^2 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & -x+x \\ 2-2 & -2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1-2x = -1 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

El valor buscado es $x = 1$.

b) Sabemos que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y que $A^2 = -I$.

$$A^{43} = A^{2 \cdot 21 + 1} = (A^2)^{21} \cdot A^1 = (-I)^{21} \cdot A = (-1)^{21} \cdot I^{21} \cdot A = -A = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{43} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Llamamos “x” a los kilos de lomos, “y” a los kilos de salchichones y “z” a los kilos de chorizos.

“Durante un día vendió 60 kg de embutidos” $\rightarrow x + y + z = 60$

“Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo cobrando por ellos 737 €.” $\rightarrow 26x + 15y + 9z = 737$

“El peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones”
 $\rightarrow z = 2(x + y)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ 26x + 15y + 9z = 737 \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 60 - y - z \\ 26x + 15y + 9z = 737 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 26(60 - y - z) + 15y + 9z = 737 \\ z = 2(60 - y - z) + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1560 - 26y - 26z + 15y + 9z = 737 \\ z = 120 - 2y - 2z + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -11y - 17z = -823 \\ 3z = 120 \rightarrow \boxed{z = 40} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11y - 17 \cdot 40 = -823 \Rightarrow -11y = -823 + 680 \Rightarrow -11y = -143 \Rightarrow \boxed{y = \frac{143}{11} = 13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 60 - 13 - 40 = 7}$$

Vendió 7 kilogramos de lomos, 13 kilogramos de salchichones y 40 kilogramos de chorizos.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Llamamos “x” al número de móviles e “y” al número de tabletas.

“Vende cada móvil a 720 € y cada tableta a 540 €” → Los ingresos son $I(x, y) = 720x + 540y$.

Esta es la función objetivo que deseamos maximizar: $I(x, y) = 720x + 540y$.

Las restricciones son:

“No puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos” → $x \leq 800$; $y \leq 600$; $x + y \leq 1000$.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x = 800$$

$x = 800$	y
800	0
800	100

$$y = 600$$

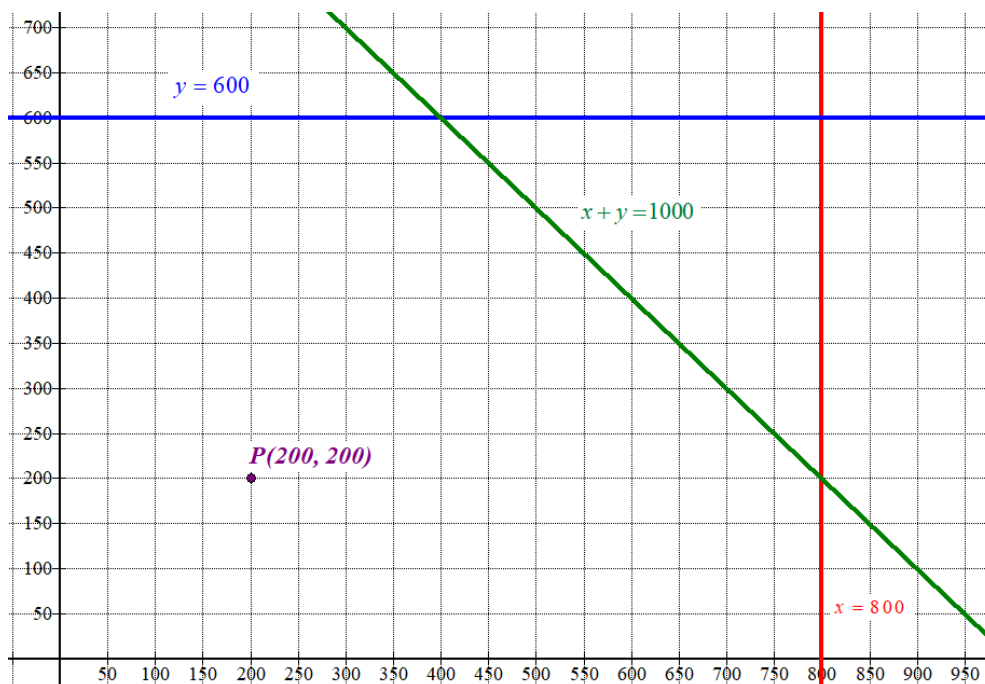
x	$y = 600$
0	600
100	600

$$x + y = 1000$$

x	$y = 1000 - x$
0	1000
1000	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



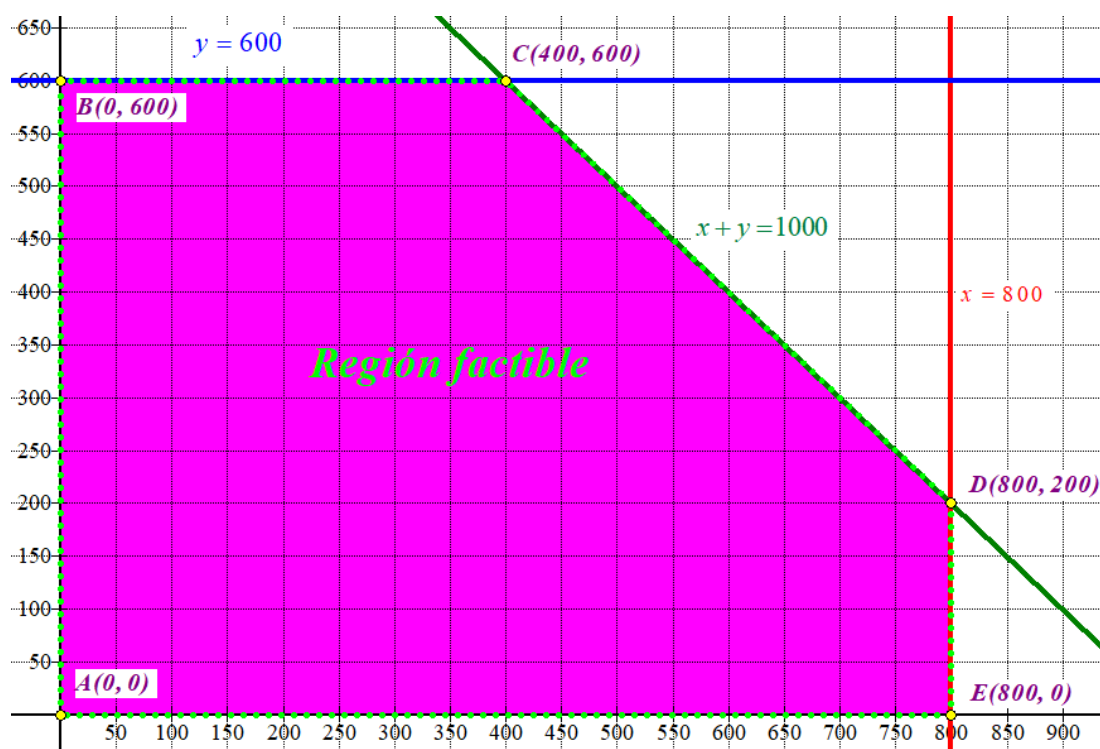
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas azul y verde, y a la izquierda de la recta vertical roja.

Comprobamos que el punto P(200, 200) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq 800 \\ 200 \leq 600 \\ 200 + 200 \leq 1000 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x, y) = 720x + 540y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 600) \rightarrow I(0, 600) = 324000$$

$$C(400, 600) \rightarrow I(400, 600) = 720 \cdot 400 + 540 \cdot 600 = 612000$$

$$D(800, 200) \rightarrow I(800, 200) = 720 \cdot 800 + 540 \cdot 200 = 684000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(800, 0) \rightarrow I(800, 0) = 576000$$

El valor máximo es 684000 y se obtiene en el vértice D(800, 200).

Los ingresos máximos se obtienen fabricando y vendiendo 800 móviles y 200 tabletas. Siendo 684000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x , (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \quad 0 \leq x \leq 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Si la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1 significa que $P(1) = 13$ y que $P'(1) = 0$.

$$P(1) = 13 \Rightarrow -1^3 + 3A \cdot 1^2 - 3B \cdot 1 + 23 = 13 \Rightarrow 3A - 3B = -9 \Rightarrow \boxed{A - B = -3}$$

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \Rightarrow P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B$$

$$P'(1) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 1^2 + 6A \cdot 1 - 3B = 0 \Rightarrow 6A - 3B = 3 \Rightarrow \boxed{2A - B = 1}$$

Juntamos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} A - B = -3 \\ 2A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = B - 3 \\ 2A - B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(B - 3) - B = 1 \Rightarrow 2B - 6 - B = 1 \Rightarrow \boxed{B = 7} \Rightarrow \boxed{A = 7 - 3 = 4}$$

Los valores buscados son $A = 4$ y $B = 7$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x , (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100, \quad 0 \leq x \leq 25, \quad \text{y} \quad E(x) = -x^2 + 10x + 200, \quad 0 \leq x \leq 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

- a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**
- b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

- a) Los gastos totales son la suma de los gastos en suelo y en edificación.

$$G(x) = S(x) + E(x) = 10x + 100 - x^2 + 10x + 200 = -x^2 + 20x + 300, \quad 0 \leq x \leq 25$$

- b) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$G(x) = -x^2 + 20x + 300 \Rightarrow G'(x) = -2x + 20$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 20 = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

Sustituimos el valor en la segunda derivada.

$$G'(x) = -2x + 20 \Rightarrow G''(x) = -2 \Rightarrow G''(10) = -2 < 0 \rightarrow x = 10 \text{ es máximo relativo}$$

Obtenemos el valor de la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición para decidir cuál es el valor máximo y mínimo absoluto de los gastos.

$$\left. \begin{array}{l} G(0) = -0^2 + 20 \cdot 0 + 300 = 300 \\ G(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 300 = 400 \quad \text{¡Máximo!} \\ G(25) = -25^2 + 20 \cdot 25 + 300 = 175 \quad \text{¡Mínimo!} \end{array} \right\}$$

Los gastos máximos son 400 000 euros que se producen a una distancia del centro de 10 kilómetros.

Los gastos mínimos son 175 000 euros que se producen a una distancia del centro de 25 kilómetros.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

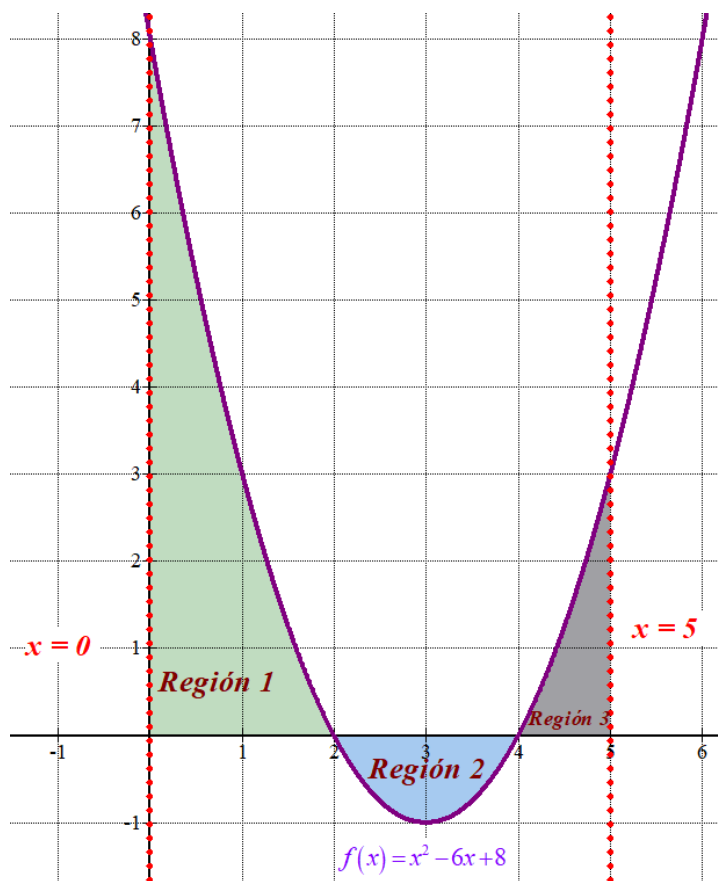
Hallamos los puntos de corte de la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$ con el eje OX ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 8 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 = x \\ \frac{6-2}{2} = 2 = x \end{cases}$$

Dibujamos la gráfica de la parábola y de las dos rectas verticales.

x	$y = x^2 - 6x + 8$
0	8
1	3
2	0
3	-1
4	0
5	3



La región de la que queremos hallar el área la dividimos en tres subregiones coloreadas de distinto color en el dibujo y cuya área calcularemos con tres integrales definidas.

Área de la región 1.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 - 6x + 8 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 \right] = \frac{20}{3}$$

El área de la región 1 es $20/3$ unidades cuadradas.

Área de la región 2.

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 x^2 - 6x + 8 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{4^3}{3} - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] = \frac{64}{3} - 48 + 32 - \frac{8}{3} + 12 - 16 = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

El área del trozo 2 es $4/3$ unidades cuadradas.

Área de la región 3.

$$\begin{aligned}\int_4^5 f(x) dx &= \int_4^5 x^2 - 6x + 8 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_4^5 = \\ &= \left[\frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 \right] - \left[\frac{4^3}{3} - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 \right] = \frac{125}{3} - 75 + 40 - \frac{64}{3} + 48 - 32 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

El área de la región 3 es $4/3$ unidades cuadradas.

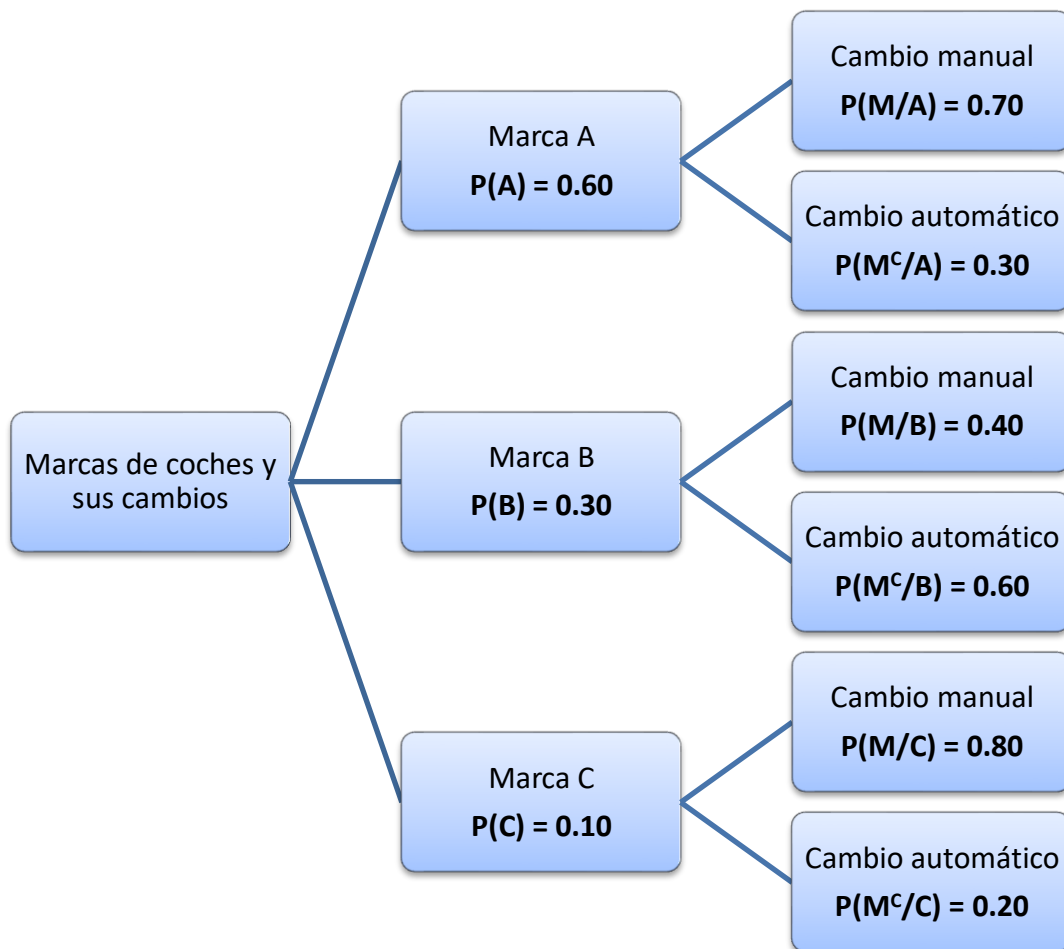
El área total es la suma de las áreas calculadas $\rightarrow \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{28}{3} \approx 9.33 \text{ unidades cuadradas}}$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

- a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**
 b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M^c) &= P(A)P(M^c/A) + P(B)P(M^c/B) + P(C)P(M^c/C) = \\
 &= 0.6 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.2 = \boxed{0.38}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M/C)}{1 - P(M^c)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{1 - 0.38} = \boxed{\frac{4}{31} \approx 0.129}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Sabemos que $n = 500$ y que $p = \frac{120}{500} = 0.24$.

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05$$

$$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.0000	0.2420	0.4778	0.6744	0.8413	1.0000	1.1641
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.406
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{500}} = 0.037$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.24 - 0.037, 0.24 + 0.037) = (0.203, 0.277).$$

Con un nivel de confianza del 95 % el porcentaje de latas con la sustancia estará entre 20.3 % y 27.7 %.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

Sea X = El contenido en alcohol de las cervezas. $X = N(\mu, 1.5)$

Para un nivel de confianza del 99% hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,576$$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

El error del intervalo de confianza es la mitad de la longitud del intervalo, por lo que debe ser menor de 1/2.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Error} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 0.5 = 2,576 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\sqrt{n} = 2.576 \cdot 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.576 \cdot 1.5}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2.576 \cdot 1.5}{0.5} \right)^2 \approx 59.7$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 60 cervezas.



EBAU Ordinaria 2023
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Universidad de Extremadura
Curso 2022-2023

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor máximo es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar para qué valores de x existe la inversa de A . **(1 punto)**
- Para $x=1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, $I(t)$, y los gastos, $G(t)$, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \leq t \leq 14 \quad y \quad G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \leq t \leq 14$$

- a) Calcular la función $B(t)$ que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día.

(0.5 puntos)

- b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B.

(1.5 puntos)**PROBLEMA 6 (2 puntos)**

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, $V(t)$, durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t , (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad 0 \leq t \leq 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

- a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. **(1.25 puntos)**
- b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. **(0.75 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20% de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

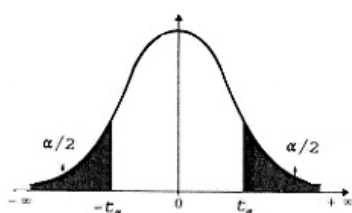
- a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. **(1 punto)**
- b) Si se sabe que el 15% de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0.5$. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} *(-3) \rightarrow -6X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & -39 \\ -18 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \\ *(2) \rightarrow 6X - 2Y = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -26 & 2 \\ -28 & -8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \{\text{Sumamos las ecuaciones}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11Y = \begin{pmatrix} -6 & -39 \\ -18 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -26 & 2 \\ -28 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -33 \\ -44 & 11 \\ -22 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{-1}{11} \begin{pmatrix} 0 & -33 \\ -44 & 11 \\ -22 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \\ -12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

(1 punto)b) Para $x=1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3.**(1 punto)**

a) La inversa de la matriz A existe si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = -4x - 4 + 4 - 4x^2 = -4x^2 - 4x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -4x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

La inversa de A existe para cualquier valor de x distinto de 0 y -1.

b) Para $x=1$ existe la inversa de A. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.Despejamos X de la ecuación $X \cdot A = I + A$.

$$X \cdot A = I + A \Rightarrow X = (I + A)A^{-1} = A^{-1} + AA^{-1} = A^{-1} + I$$

Hallamos la inversa de A y determinamos la expresión de X.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 4 - 4 = -8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-8} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Llamamos “x” al número de habitaciones sencillas, “y” al número de habitaciones dobles y “z” al número de habitaciones triples,

$$\text{“El número de habitaciones es de 195”} \rightarrow x + y + z = 195$$

$$\text{“El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300”} \rightarrow x + 2y = 300$$

$$\text{“El número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples”} \rightarrow y = 2(x + z)$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ y = 2(x + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 195 \\ x + 2y = 300 \\ y = 2x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2x + 2z + z = 195 \\ x + 2(2x + 2z) = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3z = 195 \\ x + 4x + 4z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 65 \\ 5x + 4z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 65 - z \\ 5x + 4z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(65 - z) + 4z = 300 \Rightarrow 325 - 5z + 4z = 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -z = -25 \Rightarrow \boxed{z = 25} \Rightarrow \boxed{x = 65 - 25 = 40} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 25 = 130}$$

El hotel cuenta con 40 habitaciones sencillas, 130 dobles y 25 triples.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

Llamamos “x” al número de coches que compra e “y” al número de motocicletas.

“Obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta” → El beneficio es $B(x, y) = 500x + 400y$.

Las restricciones son:

“Dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros cada coche y 2000 euros cada motocicleta” → $3000x + 2000y \leq 300000$.

“No puede comprar más de 125 vehículos” → $x + y \leq 125$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3000x + 2000y \leq 300000 \\ x + y \leq 125 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 300 \\ y \leq 125 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y \leq 300 - 3x \\ y \leq 125 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$2y = 300 - 3x$$

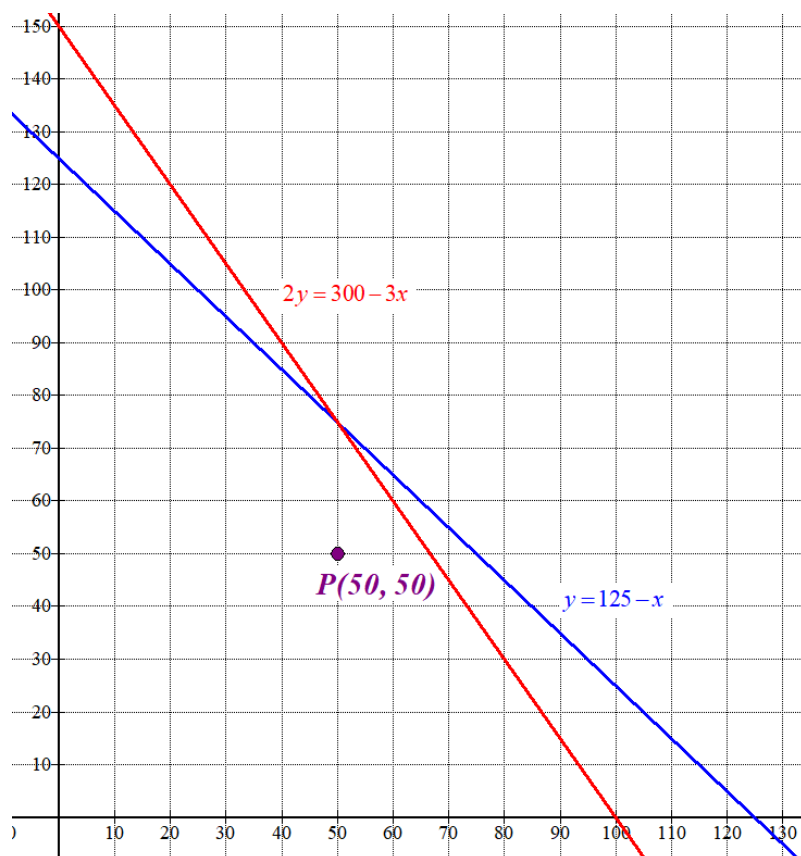
x	$y = \frac{300 - 3x}{2}$
0	150
50	75
100	0

$$y = 125 - x$$

x	$y = 125 - x$
0	125
50	75
125	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

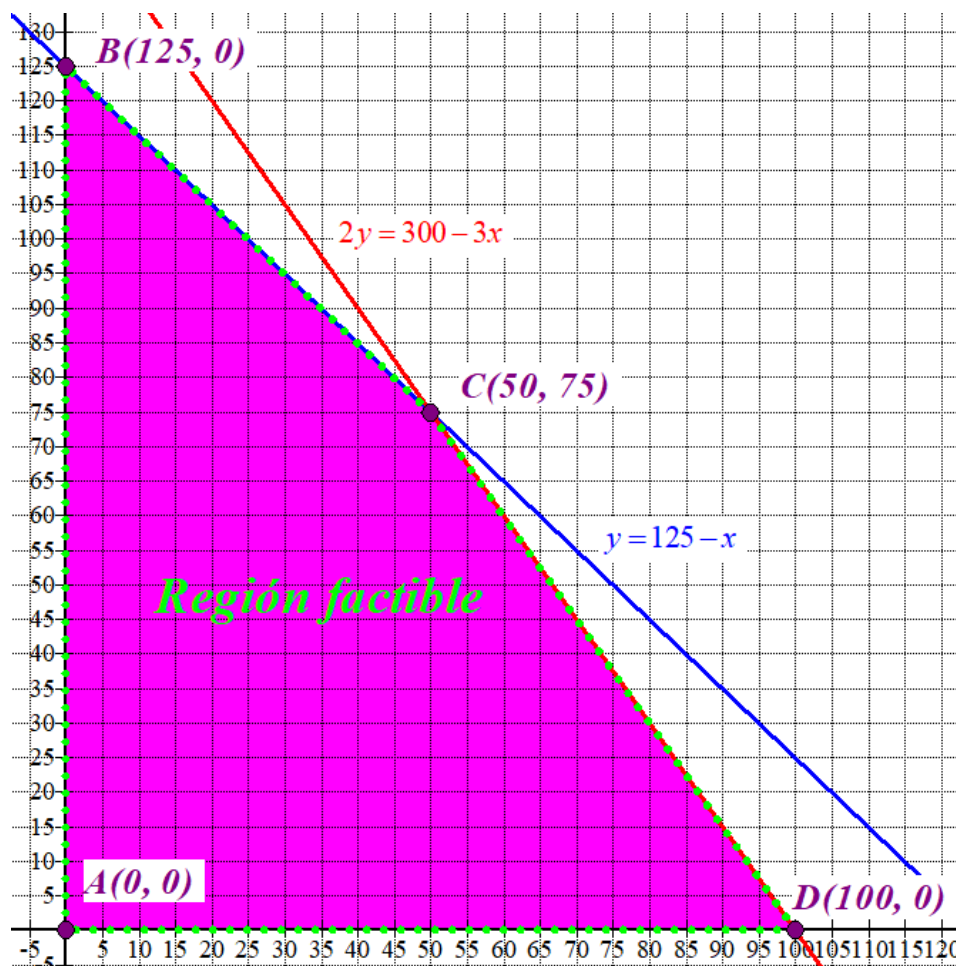
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2y \leq 300 - 3x \\ y \leq 125 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 500x + 400y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 125) \rightarrow B(0, 125) = 0 + 400 \cdot 125 = 50000$$

$$C(50, 75) \rightarrow B(50, 75) = 500 \cdot 50 + 400 \cdot 75 = 55000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(100, 0) \rightarrow B(100, 0) = 50000$$

El valor máximo es 55000 y se obtiene en el vértice C(50, 75).

El beneficio máximo se obtiene comprando y vendiendo 50 coches y 75 motocicletas. Siendo 55000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, $I(t)$, y los gastos, $G(t)$, en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \leq t \leq 14 \quad y \quad G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \leq t \leq 14$$

- a) Calcular la función $B(t)$ que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. **(0.5 puntos)**
 b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. **(1.5 puntos)**

- a) Los beneficios es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) = t^2 + At - (3At - (A^2 + B)) = t^2 + At - 3At + (A^2 + B)$$

$$B(t) = t^2 - 2At + A^2 + B \quad 9 \leq t \leq 14$$

- b) Si a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros se cumplen dos cosas:

Primera. El beneficio a las 12 horas vale 150 $\rightarrow B(12) = 150$.

$$B(12) = 150 = 12^2 - 2A \cdot 12 + A^2 + B \Rightarrow 6 = -24A + A^2 + B$$

Segunda. Al ser un mínimo la derivada primera debe anularse $\rightarrow B'(12) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} B'(t) = 2t - 2A \\ B'(12) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2 \cdot 12 - 2A \Rightarrow 2A = 24 \Rightarrow \boxed{A = 12}$$

Sustituimos el valor de A en la primera ecuación obtenida y obtendremos B.

$$\left. \begin{array}{l} 6 = -24A + A^2 + B \\ A = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = -24 \cdot 12 + 12^2 + B \Rightarrow 6 = -288 + 144 + B \Rightarrow \boxed{B = 150}$$

Las constantes buscadas son $A = 12$ y $B = 150$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, $V(t)$, durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t , (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad 0 \leq t \leq 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

- a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. **(1.25 puntos)**
 b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. **(0.75 puntos)**

- a) Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 \\ V'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 84 - 54t + 6t^2 = 0 \Rightarrow 14 - 9t + t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(14)}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{9+5}{2} = 7 = t \\ \frac{9-5}{2} = 2 = t \end{cases}$$

Estudiamos el cambio de signo de la función antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $V'(1) = 84 - 54 + 6 \cdot 1^2 = 36 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 7)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $V'(3) = 84 - 54 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 = -24 < 0$. La función decrece en $(2, 7)$.
- En el intervalo $(7, 8)$ tomamos $t = 7.5$ y la derivada vale $V'(7.5) = 84 - 54 \cdot 7.5 + 6 \cdot 7.5^2 = 16.5 > 0$. La función crece en $(7, 8)$.

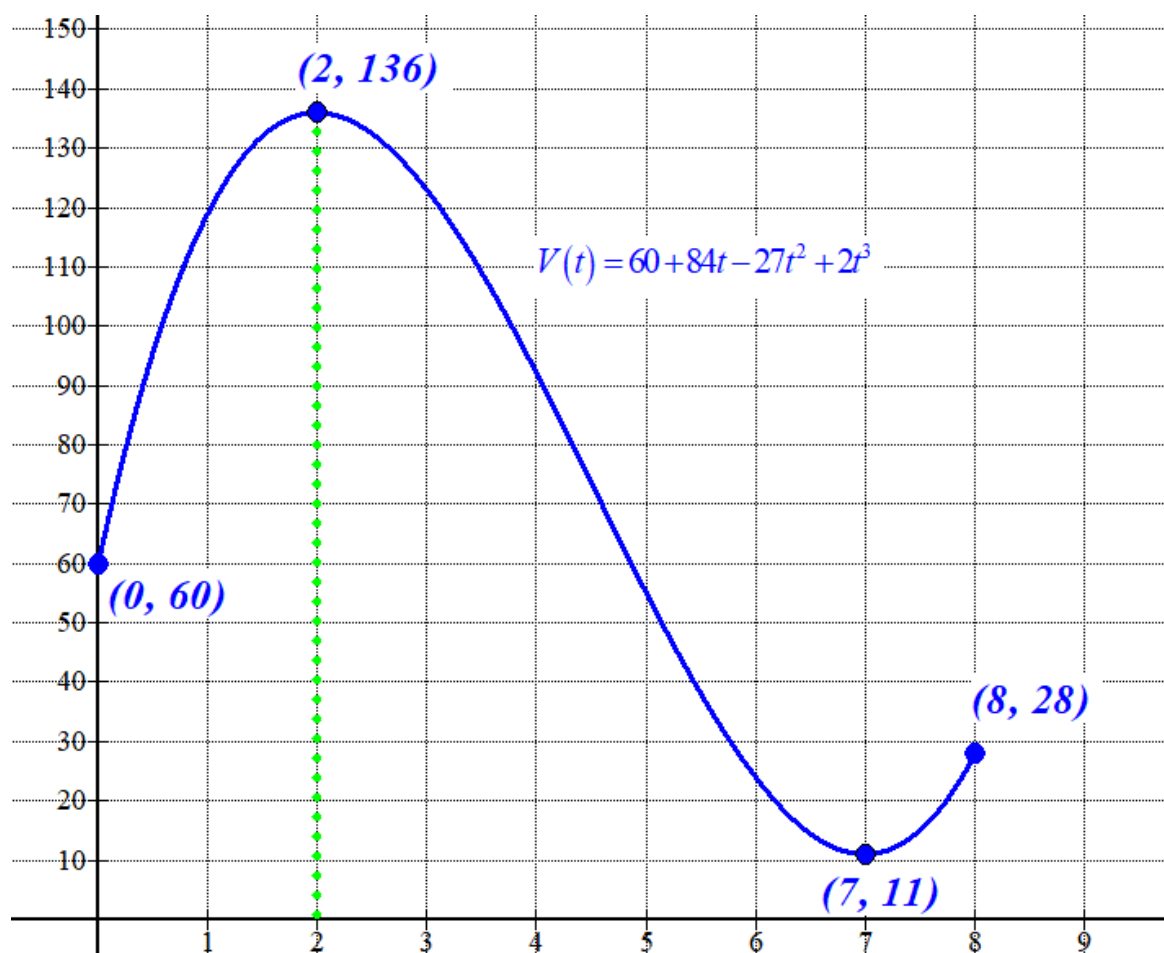
El valor de cada acción se incrementa desde la hora 0 a la hora 2 y también entre la 7ª y la 8ª hora. Disminuye entre la 2ª y la 7ª hora.

- b) Hallamos $V(0)$ y $V(8)$.

$$V(0) = 60; \quad V(8) = 60 + 84 \cdot 8 - 27 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^3 = 28$$

Para la representación gráfica obtenemos más valores de la función.

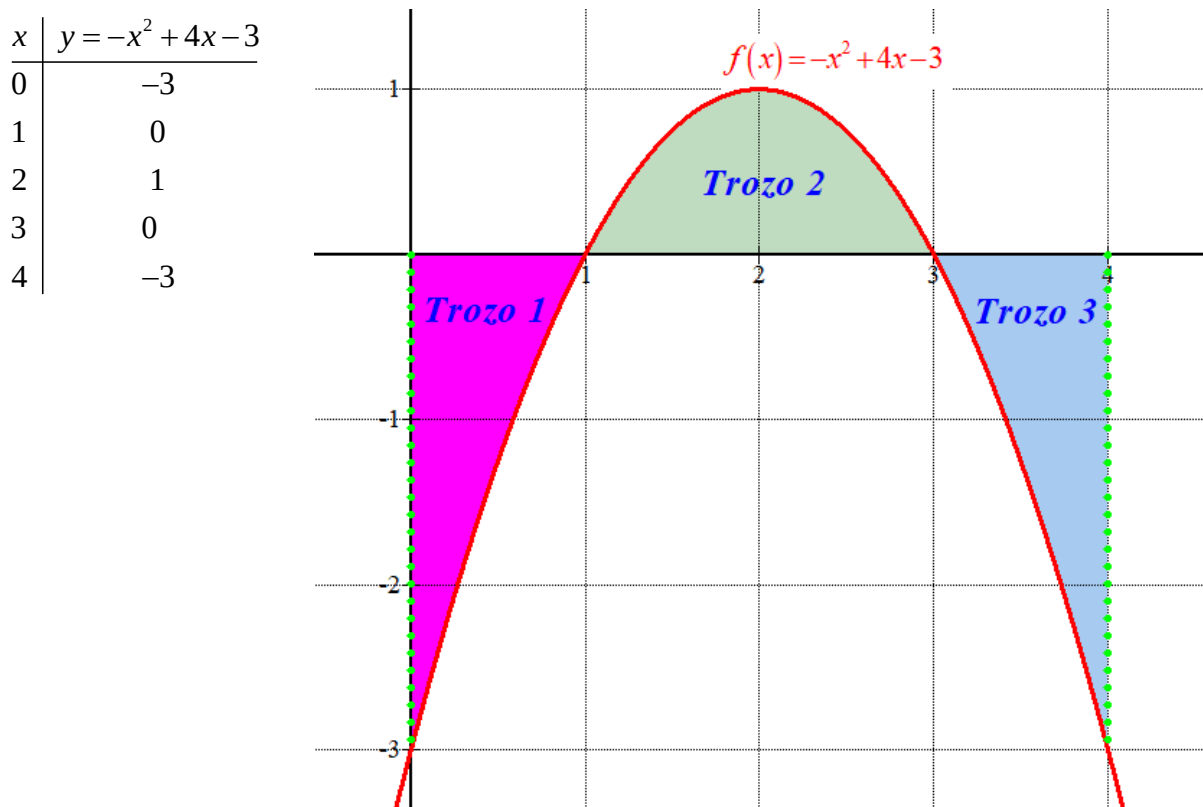
t	$V(t)$
0	60
2	136 Máximo
7	11 Mínimo
8	28



PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Dibujamos la gráfica de la parábola y de las dos rectas verticales.

**Área de trozo 1.**

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 -x^2 + 4x - 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 \right] = -\frac{4}{3}$$

El área del trozo 1 es $4/3$ unidades cuadradas.

Área de trozo 2.

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right] = \frac{4}{3}$$

El área del trozo 2 es $4/3$ unidades cuadradas.

Área de trozo 3.

Por la simetría de la región el trozo 1 y el trozo 3 tienen el mismo valor de área.

El área total es la suma de las tres áreas calculadas $\rightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{4 \text{ unidades cuadradas}}$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20% de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

- a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. **(1 punto)**
 b) Si se sabe que el 15% de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. **(1 punto)**

Llamamos A al suceso “Predice lluvia” y B al suceso “Realmente llueve”.

Sabemos que $P(A) = 0.20$ y $P(B/A) = 0.9$.

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.9 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18}$$

- b) Se sabe que $P(B) = 0.15$. Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.15 - 0.18 = \boxed{0.17}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

Sea X = El tiempo que se emplea en montar un determinado producto. $X = N(\mu, 10)$

El tamaño de la muestra es $n = 49$ y la media de la muestra es $\bar{x} = 45$ minutos

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0										
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}} \approx 2.35 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

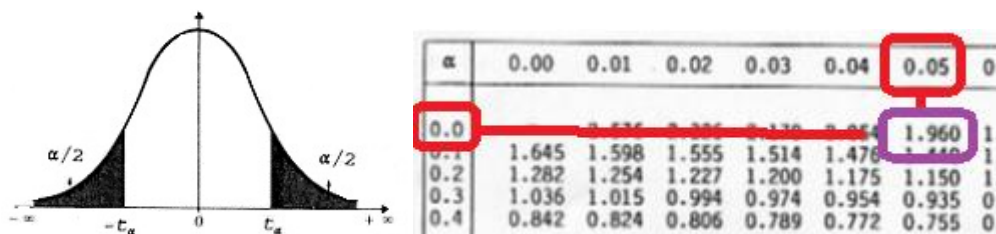
$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (45 - 2.35, 45 + 2.35) = (42.65, 47.35).$$

Con un nivel de confianza del 90 % el tiempo medio que se tarda en montar un determinado producto está entre 42.65 y 47.35 minutos.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0.5$. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$



Como piden que la longitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.1 y el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza tenemos que el error debe ser inferior a 0.05.

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2} \approx 384.16$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que el obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 385 clubes de fútbol.

EBAU Extraordinaria 2022



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)**
Universidad de Extremadura
Curso 2021-2022

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX - B^t = C + 3X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dada la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar para qué valores de x existe la inversa de A .
- Calcular la inversa de A para $x = 0$.

(1 punto)**(1 punto)****PROBLEMA 3 (2 puntos)**

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:

$$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \quad 1 \leq t \leq 8$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x , que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \quad 1 \leq x \leq 12$$

Se pide, razonando las respuestas:

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada. **(1,5 puntos)**
- Representar gráficamente la función $P(x)$. **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

- Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**
- Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

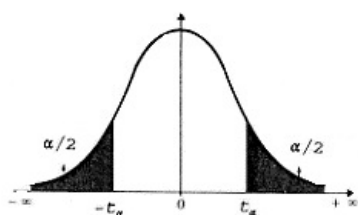
- Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida. **(1 punto)**
- Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8.7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0.5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 99% y cuya longitud sea inferior a 0.14. Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES**PROBLEMA 1 (2 puntos)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX - B^t = C + 3X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Despejamos en la ecuación la matriz X .

$$AX - B^t = C + 3X \Rightarrow AX - 3X = B^t + C \Rightarrow (A - 3I)X = B^t + C \Rightarrow X = (A - 3I)^{-1}(B^t + C)$$

Comprobamos si la matriz $A - 3I$ es invertible.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - 3I| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

Es invertible, calculamos su inversa

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - 3I)^t)}{|A - 3I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Usamos este resultado para terminar de resolver la ecuación matricial

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^t + C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - 3I)^{-1}(B^t + C) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-2 & 4-3 \\ -6+6 & -2+6 & -8+9 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dada la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

(1 punto)b) Calcular la inversa de A para $x = 0$.**(1 punto)**

a) La matriz inversa existe si el determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = x - x + 2 - x^2 + 1 - 2 = -x^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La matriz inversa de A existe para cualquier valor de x distinto de 1 y de -1.

b) Según lo visto en el apartado a) para $x = 0$ la matriz inversa existe.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -0^2 + 1 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 2^a \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^a \} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - 2y + 4z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x \quad -2y \quad +4z = 3 \\ -3x \quad -3y \quad +3z = 6 \\ \hline -5y \quad +7z = 9 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -3y \quad +2z = -1 \\ -2x \quad -2y \quad +2z = 4 \\ \hline -5y \quad +4z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -5y + 7z = 9 \\ -5y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ -5y \quad +4z = 3 \\ 5y \quad -7z = -9 \\ \hline -3z = -6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -5y + 7z = 9 \\ -3z = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -5y + 7z = 9 \\ \boxed{z = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = -2 \\ -5y + 14 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -5y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \boxed{y = 1} \end{cases} \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

La solución del sistema planteado es $x = -1$, $y = 1$, $z = 2$.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de pasteles de tipo A, y = número de pasteles de tipo B.

Realizamos una tabla para organizar todos los datos proporcionados.

	Gramos de azúcar	Gramos de levadura	Beneficio
Pasteles tipo A (x)	$6x$	$3x$	$4.5x$
Pasteles tipo B (y)	$4y$	$4y$	$5.5y$
TOTAL	$6x + 4y$	$3x + 4y$	$4.5x + 5.5y$

Se desea maximizar los beneficios que vienen expresados por la función:

$$B(x, y) = 4.5x + 5.5y$$

Las restricciones son:

“Dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura” $\rightarrow$
 $6x + 4y \leq 240$; $3x + 4y \leq 180$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y \leq 240 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 2y = 120$$

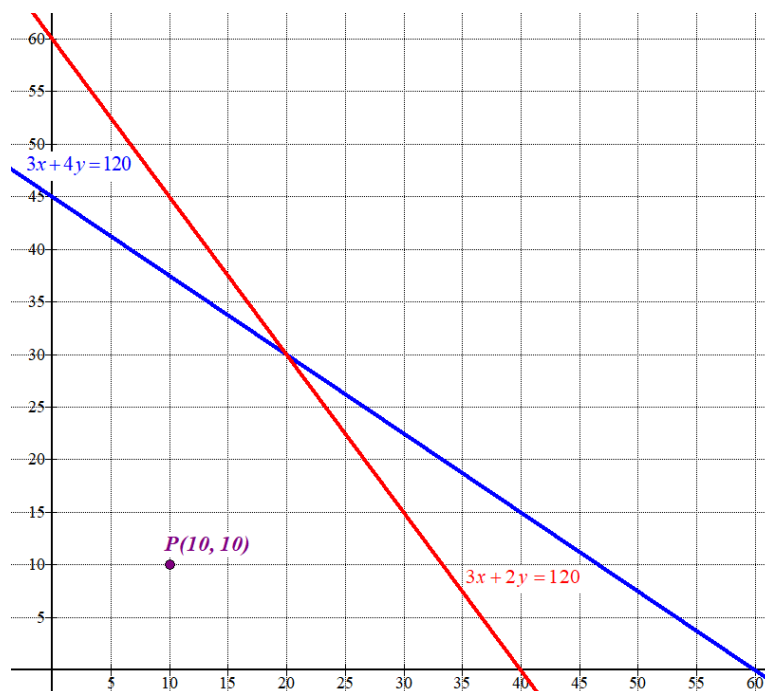
x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$
0	60
40	0

$$3x + 4y = 180$$

x	$y = \frac{180 - 3x}{4}$
0	45
60	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



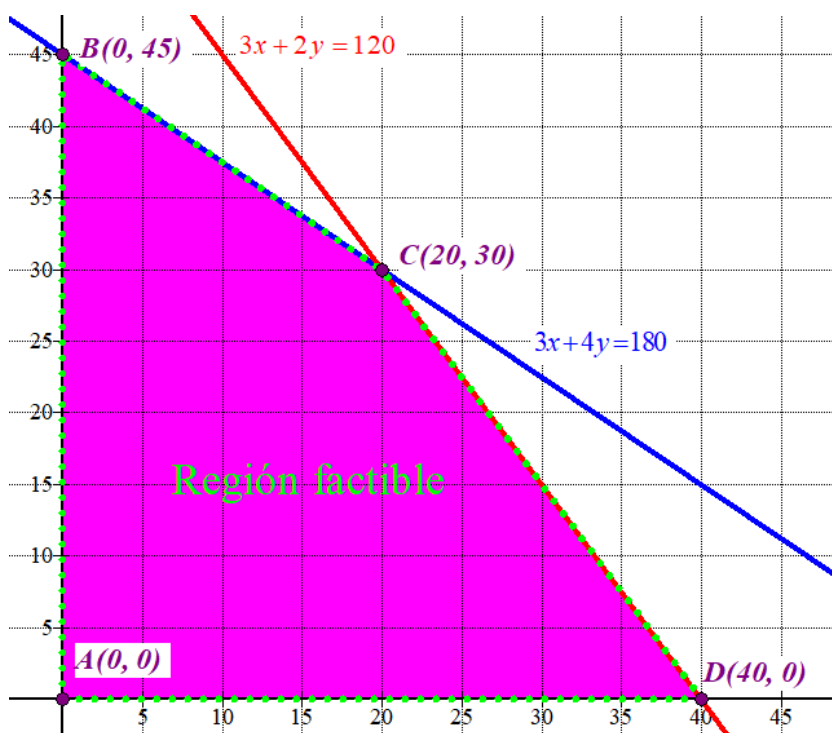
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de la recta roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 20 \leq 120 \\ 30 + 40 \leq 180 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema planteado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ -3x - 4y = -180 \end{array} \right\}$$

$$\hline -2y = -60 \Rightarrow \boxed{y = 30} \Rightarrow 3x + 60 = 120 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 20}$$

El punto C tiene coordenadas C(20, 30).

El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 4.5x + 5.5y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 45) \rightarrow B(0, 45) = 0 + 5.5 \cdot 45 = 247.5$$

$$C(20, 30) \rightarrow B(20, 30) = 4.5 \cdot 20 + 5.5 \cdot 30 = 255 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 4.5 \cdot 40 + 0 = 180$$

El valor máximo es 255 y se obtiene en el vértice C(20, 30).

El beneficio máximo se obtiene vendiendo 20 pasteles del tipo A y 30 del tipo B. Siendo 255 € los beneficios máximos que se obtienen con esta venta.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la función:

$$C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \quad 1 \leq t \leq 8$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

Si el consumo máximo es en $t = 6$ debe de anularse la derivada en dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} C'(t) = 6B + 12At + 3t^2 \\ C'(6) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6B + 12A \cdot 6 + 3 \cdot 6^2 \Rightarrow 0 = 6B + 72A + 108 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = B + 12A + 18}$$

Además debe cumplirse que $C(6) = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \\ C(6) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 = 10 + 6B \cdot 6 + 6A \cdot 6^2 + 6^3 \Rightarrow 0 = 36B + 216A + 216 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = B + 6A + 6}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = B + 12A + 18 \\ 0 = B + 6A + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = B + 12A + 18 \\ -6A - 6 = B \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -6A - 6 + 12A + 18 \Rightarrow 6A + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6A = -12 \Rightarrow \boxed{A = -2} \Rightarrow \boxed{B = 12 - 6 = 6}$$

Los valores buscados son $A = -2$ y $B = 6$.

Comprobamos que para los valores obtenidos la función tiene un máximo en $t = 6$, es decir, la segunda derivada es negativa.

$$C(t) = 10 + 36t - 12t^2 + t^3 \Rightarrow C'(t) = 36 - 24t + 3t^2 \Rightarrow C''(t) = -24 + 6t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C''(6) = -24 + 6 \cdot 6 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow \text{!!! En } t = 6 \text{ hay un mínimo!!!}$$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x , que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \quad 1 \leq x \leq 12$$

Se pide, razonando las respuestas:

- a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada. **(1,5 puntos)**
 b) Representar gráficamente la función $P(x)$. **(0,5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \Rightarrow P'(x) = 9x^2 - 90x + 144$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 90x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(16)}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 \in [1,12] \\ \frac{10-6}{2} = 2 \in [1,12] \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores en el intervalo $[1,12]$.

- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$P'(1.5) = 9 \cdot 1.5^2 - 90 \cdot 1.5 + 144 = 29.25 > 0. \text{ La función crece en } (1,2).$$

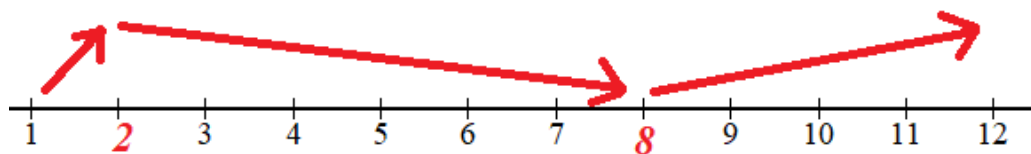
- En el intervalo $(2,8)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$P'(3) = 9 \cdot 3^2 - 90 \cdot 3 + 144 = -45 < 0. \text{ La función decrece en } (2,8).$$

- En el intervalo $(8,12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$P'(10) = 900 - 900 + 144 = 144 > 0. \text{ La función crece en } (8,12).$$

La función sigue el esquema siguiente:

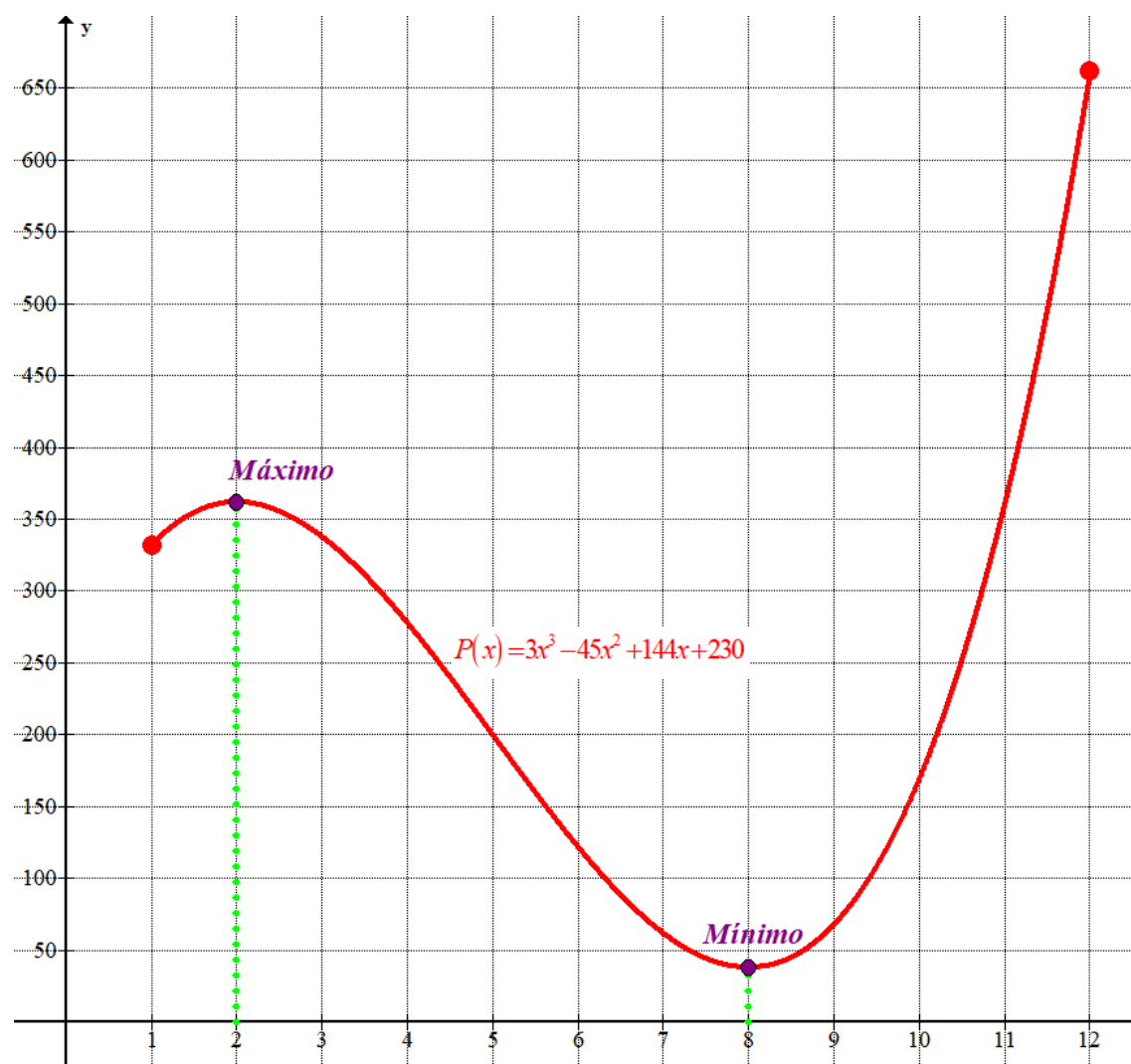


La función crece en $(1,2) \cup (8,12)$ y decrece en $(2,8)$.

El número de capturas crece entre 1 y 2 metros, así como entre 8 y 12 metros. Decrece entre 2 y 8 metros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la función.

x	$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230$
1	332
2	362
4	278
8	38
12	662



PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2}$$

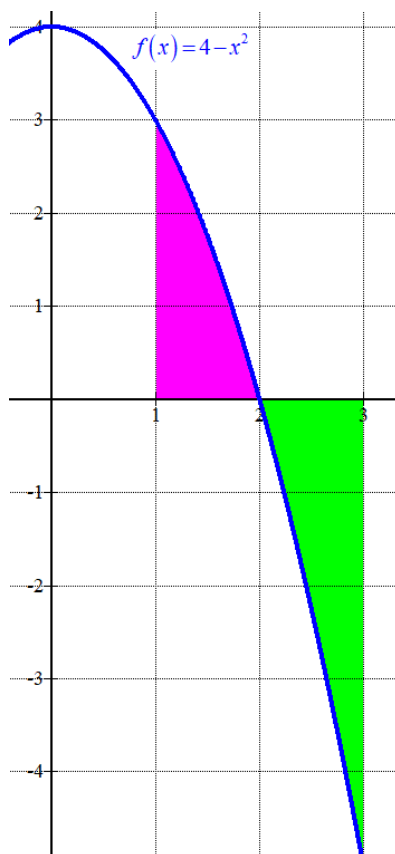
a) Averiguamos si la gráfica de la función corta el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Como $x = 2$ está comprendido entre 1 y 3 el área se calcula con la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2 y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_1^2 4 - x^2 dx \right| + \left| \int_2^3 4 - x^2 dx \right| = \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \right| + \left| \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 \right| = \\ &= \left| \left[8 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4 - \frac{1^3}{3} \right] \right| + \left| \left[12 - \frac{3^3}{3} \right] - \left[8 - \frac{2^3}{3} \right] \right| = \\ &= \left| 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right| + \left| 12 - 9 - 8 + \frac{8}{3} \right| = \left| 4 - \frac{7}{3} \right| + \left| -5 + \frac{8}{3} \right| = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

No pide dibujar la región, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución.



b) El dominio de la función $g(x) = \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2}$ son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2} \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$?

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \frac{12 + 2}{0} = \infty. \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

¿ $x = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \frac{12 + 2}{0} = \infty. \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{3 + 0}{0 - 1} = -3$$

La asíntota horizontal es $y = -3$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$ y una asíntota horizontal $y = -3$.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

- a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida. **(1 punto)**
 b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tenga una gran antigüedad en el club. **(1 punto)**

Realizamos una tabla de contingencia para organizar la información proporcionada.

	Favorables a la subida	Contrarios a la subida	
Abonados de gran antigüedad	80		200
Abonados con varios años de antigüedad	280		500
Nuevos abonados	120		300

Completamos la tabla.

	Favorables a la subida	Contrarios a la subida	
Abonados de gran antigüedad	80	120	200
Abonados con varios años de antigüedad	280	220	500
Nuevos abonados	120	180	300
	480	520	1000

Llamamos G = “Ser abonado de gran antigüedad”, V = “Ser abonado con varios años de antigüedad”, N = “Ser nuevo abonado”, F = “Ser favorable a la subida”.

- a) Aplicamos la regla de Laplace. De los 1000 abonados solo 120 son nuevos abonados favorables a la subida.

$$P(N \cap F) = \frac{120}{1000} = \boxed{0.12}$$

- b) Hay 480 abonados favorables a la subida y de estos hay 80 que son abonados de gran antigüedad. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(G / F) = \frac{80}{480} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.167}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8.7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

Sea X = La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío (en toneladas). $X = N(\mu, 1)$

El tamaño de la muestra es $n = 36$ y la media de la muestra es $\bar{x} = 8.7$ toneladas.

Buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

Un nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0										
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2		1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.645$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{1}{\sqrt{36}} \approx 0.2742$$

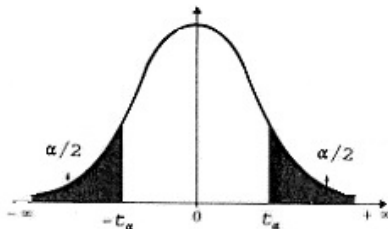
El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (8.7 - 0.2742, 8.7 + 0.2742) = (8.4258, 8.9742).$$

Con un nivel de confianza del 90 % la producción media de tomates está entre 8425.8 kilos y 8974.2 kilos.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $P = 0.5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 99% y cuya longitud sea inferior a 0.14. Razonar la respuesta.



El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.558	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.576$

Como piden que la longitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.14 y el error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza tenemos que el error debe ser inferior a 0.07.

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot Q}{n}} \Rightarrow 0.07 = 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.07}{2.576} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.07}{2.576} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.07}{2.576} \right)^2} = 338.56
 \end{aligned}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y mayor que el obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 339 hogares españoles.

EBAU Ordinaria 2022



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)**
Universidad de Extremadura
Curso 2021-2022

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2 \cdot X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A .
- Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(1 punto)**(1 punto)****PROBLEMA 3 (2 puntos)**

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que, previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los beneficios de una empresa (en miles de euros) $B(t)$ durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & 1 \leq t < 6 \\ Bt & 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x , (en tanto por ciento), de acuerdo con la función:

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto ascienden estos precios.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$. (1 punto)

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: (1 punto)

$$g(x) = \frac{3 - 2x^2}{-x^2 + x}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

En un quiosco de prensa, el 50% de los clientes compra prensa deportiva, el 15% prensa nacional y el resto prensa regional. El 20% de los clientes de prensa deportiva, el 40% de los de prensa nacional y el 60% de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es un hombre, compre prensa regional. (1 punto)

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré.

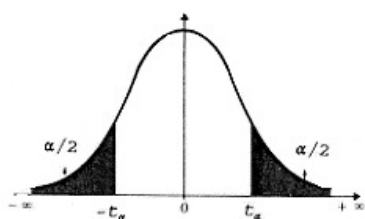
Razona la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3000 cajeros, 4000 reponedores y 1000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta? (1,5 puntos)

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo. (0,5 puntos)



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES**PROBLEMA 1 (2 puntos)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2 \cdot X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Despejamos en la ecuación la matriz X .

$$A \cdot X + C = B^t - 2 \cdot X \Rightarrow A \cdot X + 2 \cdot X = B^t - C \Rightarrow (A + 2I)X = B^t - C \Rightarrow X = (A + 2I)^{-1}(B^t - C)$$

Comprobamos si la matriz $A + 2I$ es invertible.

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + 2I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

Es invertible, calculamos su inversa

$$(A + 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A + 2I)^T\right)}{|A + 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Usamos este resultado para terminar de resolver la ecuación matricial

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + 2I)^{-1}(B^t - C) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+2 & 5-2 & -5-6 \\ 4-1 & -2+1 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

(1 punto)b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.**(1 punto)**

a) La matriz inversa existe si el determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 0 + 3 + x^2 - 0 - 0 = x^2 - 4x + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

La matriz inversa de A existe para cualquier valor de x distinto de 1 y de 3.

b) Según lo visto en el apartado a) para $x = 2$ la matriz inversa existe.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 4 = -1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 3^a \\ 4x + 4y - 8z = -12 \\ -4x - 3y - 2z = 3 \\ \hline 0 \quad y - 10z = -9 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 3x + 3y - 6z = -9 \\ -3x - 2y - z = 3 \\ \hline 0 \quad y - 7z = -6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ y - 7z = -6 \Rightarrow \\ y - 10z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ y - 10z = -9 \\ -y + 7z = 6 \\ \hline 0 \quad -3z = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ y - 7z = -6 \Rightarrow \\ -3z = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ y - 7z = -6 \Rightarrow \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 1 = -3 \\ y - 7 = -6 \Rightarrow \\ \boxed{y=1} \end{cases} \Rightarrow 3x + 2 = -4 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

La solución del sistema planteado es $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que, previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de espejos a vender, y = número de cuadros a vender.

Se desea maximizar los beneficios, siendo estos de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro.

$$B(x, y) = 120x + 180y$$

“Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos” $\rightarrow x + y \leq 45$

“Necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas” $\rightarrow x + 4y \leq 60$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 45 \\ x + 4y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 45$$

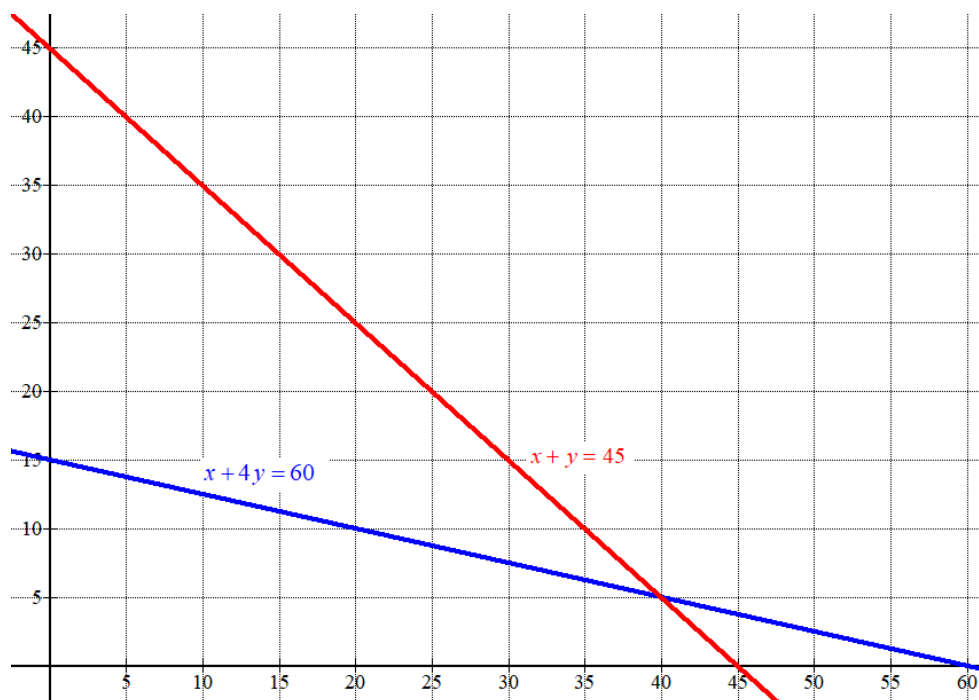
x	$y = 45 - x$
0	45
40	5
45	0

$$x + 4y = 60$$

x	$y = \frac{60 - x}{4}$
0	15
40	5
60	0

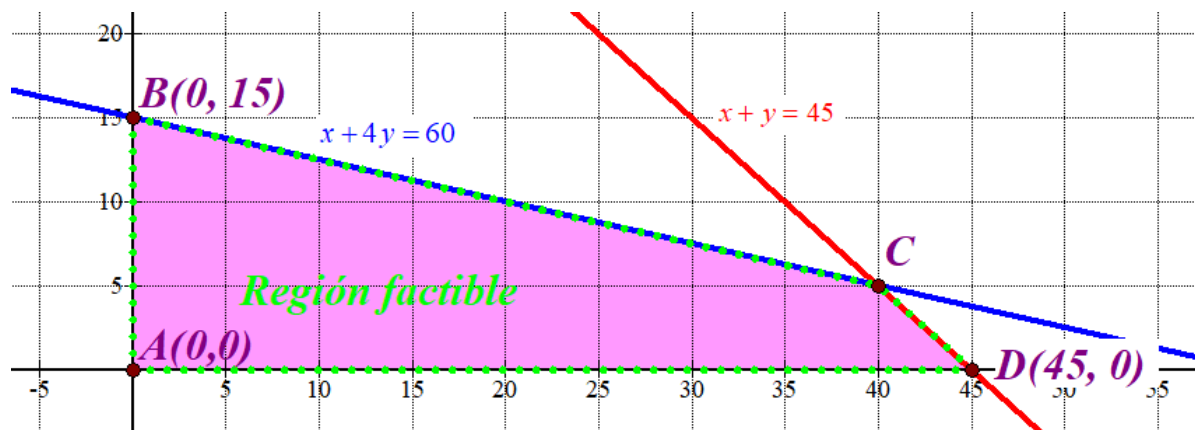
$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 45 \\ x + 4y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja y azul.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema planteado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ x + 4y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 45 - y \\ x + 4y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 - y + 4y = 60 \Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = 45 - 5 = 40}$$

El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 40x + 100y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 15) \rightarrow B(0, 15) = 0 + 2700 = 2700$$

$$C(40, 5) \rightarrow B(40, 5) = 5700$$

$$D(45, 0) \rightarrow B(45, 0) = 5400$$

El valor máximo es 5700 y se obtiene en el vértice C(40, 5).

El beneficio máximo se obtiene vendiendo 40 espejos y 5 cuadros. Siendo 5700 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los beneficios de una empresa (en miles de euros) $B(t)$ durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & 1 \leq t < 6 \\ Bt & 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

Para que la función sea continua debe serlo en $t = 6$ y para ello los límites laterales deben ser iguales al valor de la función en $t = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} B(t) = \lim_{x \rightarrow 6^-} t^2 - 8t + 2A = 36 - 48 + 2A = -12 + 2A \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} B(t) = \lim_{x \rightarrow 6^+} Bt = 6B \\ B(6) = 6B \end{array} \right\} \Rightarrow -12 + 2A = 6B \Rightarrow \boxed{-6 + A = 3B}$$

En el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros significa que $B(8) = 16$.

$$B(8) = 8B = 16 \Rightarrow \boxed{B = 2}$$

Sustituimos en la ecuación anterior: $-6 + A = 6 \Rightarrow \boxed{A = 12}$

Los valores buscados son $A = 12$ y $B = 2$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x , (en tanto por ciento), de acuerdo con la función:

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto ascienden estos precios.

Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90 \Rightarrow P'(x) = 12x^2 - 12x - 24$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

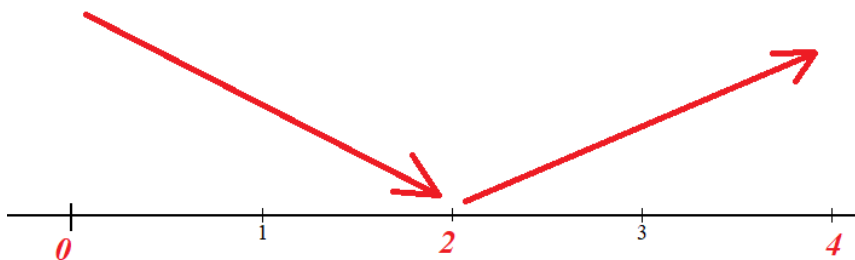
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \in [0, 4] \\ \frac{1-3}{2} = -1 \notin [0, 4] \end{cases}$$

Estudiamos el cambio de signo de la derivada en $[0, 4]$ teniendo en cuenta el punto crítico $x = 2$.

En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ la derivada vale $P'(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 24 = -24 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

En $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ la derivada vale $P'(3) = 12 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 - 24 = 48 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$, siendo también un mínimo absoluto.

Este precio mínimo de $P(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 90 = 50$

El precio mínimo se alcanza con un porcentaje de esencia del 2 %, y el precio mínimo es de 50 €.

Para el valor máximo valoramos la función en los extremos del intervalo $[0, 4]$, pues en uno de los extremos está el valor máximo.

$$\left. \begin{aligned} P(0) &= 90 \\ P(4) &= 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 90 = 154 \end{aligned} \right\}$$

El precio máximo es de 154 € y se obtiene con un 4 % de esencia.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$$

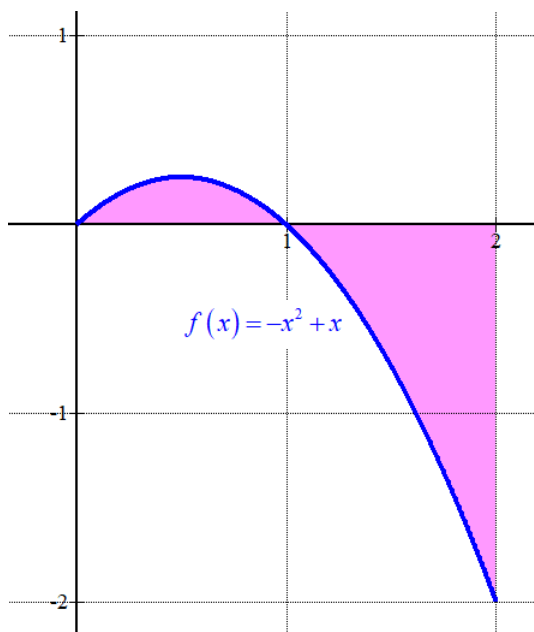
a) Averiguamos si la gráfica de la función corta el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Como $x = 1$ está comprendido entre 0 y 2 el área se calcula con la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1 y el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^1 -x^2 + x dx \right| + \left| \int_1^2 -x^2 + x dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] \right| + \left| \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right| + \left| 2 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6} + \left| -\frac{5}{6} \right| = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \boxed{1u^2} \end{aligned}$$

No pide dibujar la región, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución.



b) El dominio de la función $g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$ son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x} \Rightarrow -x^2+x=0 \Rightarrow x(-x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{0,1\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \frac{3-0}{0} = \infty. \quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

¿ $x=1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \frac{3-2}{0} = \infty. \quad x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Las asíntotas verticales son $x=0$ y $x=1$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{-\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 2}{-1 + \frac{1}{x}} = 2$$

La asíntota horizontal es $y = 2$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x=0$, $x=1$ y una asíntota horizontal $y = 2$.

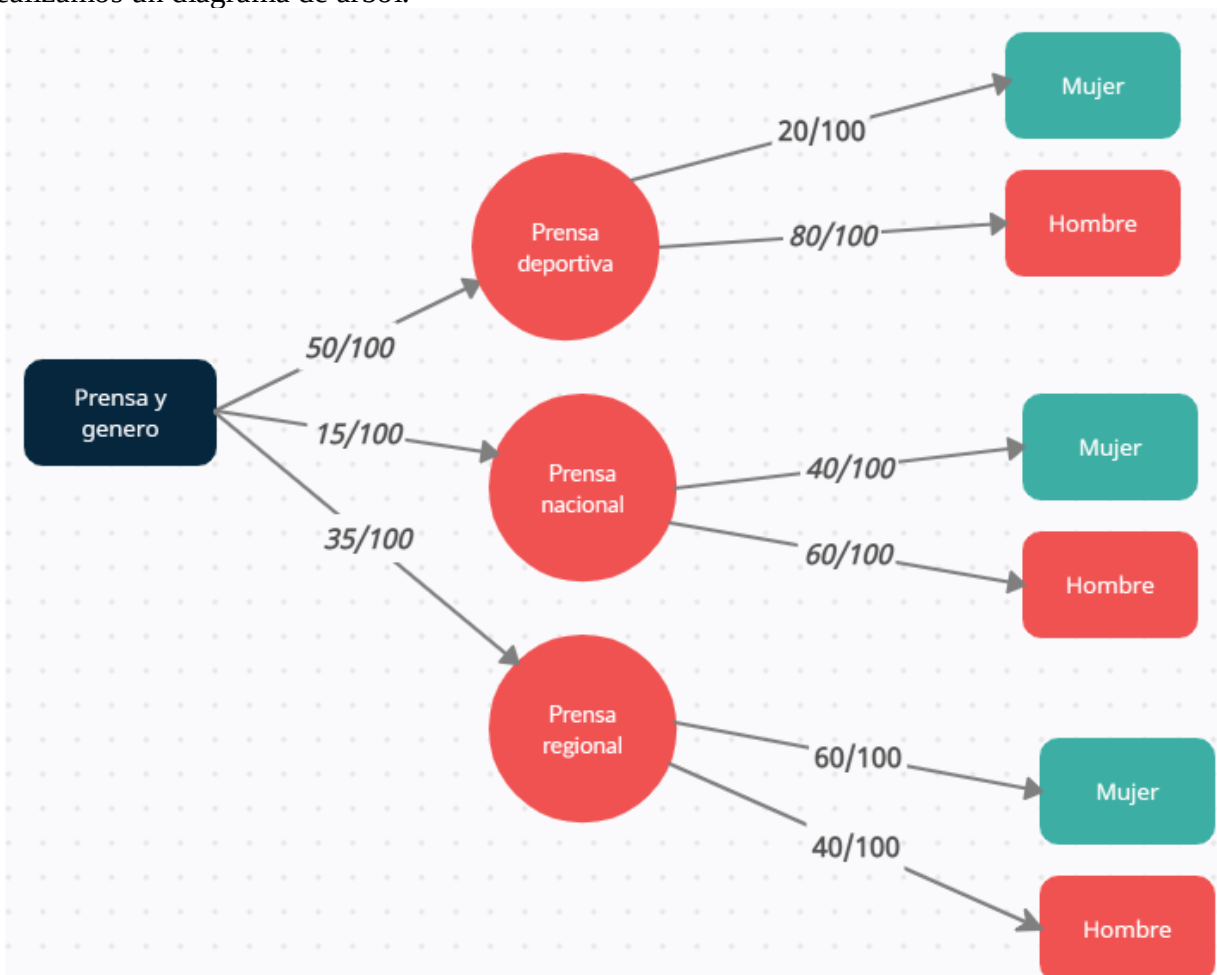
PROBLEMA 8 (2 puntos)

En un quiosco de prensa, el 50% de los clientes compra prensa deportiva, el 15% prensa nacional y el resto prensa regional. El 20% de los clientes de prensa deportiva, el 40% de los de prensa nacional y el 60% de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es un hombre, compre prensa regional. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos D = “Leer prensa Deportiva”, N = “Leer prensa Nacional”, R = “Leer prensa Regional”, M = “Ser mujer” y $\bar{M}$ = “Ser hombre”

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(D) \cdot P(M/D) + P(N) \cdot P(M/N) + P(R) \cdot P(M/R) = \\
 &= \frac{50}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{15}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{37}{100} = \boxed{0.37}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/\bar{M}) = \frac{P(R \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(R)P(\bar{M}/R)}{1 - P(M)} = \frac{\frac{35}{100} \cdot \frac{40}{100}}{1 - 0.37} = \frac{2}{9} \approx 0.22$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré.

Razona la respuesta.

Sea X = Contenido de verdura en los botes de purés (gramos). $X = N(\mu, 23)$

El tamaño de la muestra es $n = 121$ y la media de la muestra es $\bar{x} = 143 \text{ gramos}$

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{23}{\sqrt{121}} = 4.0982$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (146 - 4.0982, 146 + 4.0982) = (141.9018, 150.0982).$$

Con un nivel de confianza del 95 % la cantidad media de verduras que contienen los botes está entre 141.9018 gramos y 150.0982 gramos.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3000 cajeros, 4000 reponedores y 1000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

- a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta? **(1,5 puntos)**
- b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo. **(0,5 puntos)**

- a) En total son 8000 trabajadores.

$$\text{Debe elegir } \frac{3000}{8000} \cdot 200 = \frac{600}{8} = 75 \text{ cajeros, } \frac{4000}{8000} \cdot 200 = \frac{800}{8} = 100 \text{ reponedores y } \frac{1000}{8000} \cdot 200 = \frac{200}{8} = 25 \text{ transportistas.}$$

- b) 30 de 75 cajeros están satisfechos, es una proporción $\frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0.40$.

2 de cada 5 cajeros están satisfechos con su trabajo. Un 40 % de los cajeros están satisfechos. Serían $0.4 \cdot 3000 = 1200$ cajeros satisfechos.

EBAU Extraordinaria 2021



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el Acceso a la Universidad (EBAU)**
Universidad de Extremadura
Curso 2020-2021

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar para qué valores de x existe la inversa de A .
- Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(1 punto)**(1 punto).****PROBLEMA 3 (2 puntos)**

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m² de tela de forro y 120 m² de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m² de tela de forro y 3 m² de tela de paño y una cazadora requiere 2 m² de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 € y en cada cazadora 70 €, calcular, justificando las respuestas:

- El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios. **(1,5 puntos)**
- El valor de dichos beneficios máximos. **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos del tiempo de crianza, x , viene dada por la función

$$G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \quad 1 \leq x \leq 4$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se le paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x , de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \quad 2 \leq x \leq 5$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas

PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje

OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

(1 punto)

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

(1 punto)

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2 + 4x - 5}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

En una fábrica de vidrios el 25% de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1% de las botellas grandes, el 2% de las medianas y el 3% de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

(1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

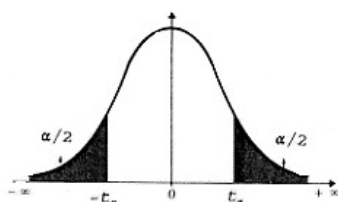
(1 punto)

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica de 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95%, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES**PROBLEMA 1 (2 puntos)**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Para resolver la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$ hallamos primero la inversa de A y la traspuesta de B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación y determinamos X .

$$A \cdot X - B^t = 2C \Rightarrow A \cdot X = 2C + B^t \Rightarrow X = A^{-1} [2C + B^t]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3$$

$$X = \begin{pmatrix} 3-2 & -2-9 & -1 \\ -3+4 & 2+18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

(1 punto)b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.**(1 punto)**

a) Existe la inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 4 + 0 + 3x + 0 + 0 = 4x - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de x distinto de 1.

b) Para $x = 2$ existe la inversa y la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 6 = 4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \hline 2x \quad -3y \quad +z \quad = -1 \\ -2x \quad -2y \quad -2z \quad = -12 \\ \hline 0 \quad -5y \quad -z \quad = -13 \\ \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \hline -3x \quad +2y \quad -z \quad = -2 \\ 3x \quad +3y \quad +3z \quad = 18 \\ \hline 0 \quad 5y \quad +2z \quad = 16 \\ \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -5y - z = -13 \\ 5y + 2z = 16 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ \hline 5y \quad +2z \quad = 16 \\ -5y \quad -z \quad = -13 \\ \hline 0 \quad +z \quad = 3 \\ \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -5y - z = -13 \\ \boxed{z = 3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 3 = 6 \\ -5y - 3 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -5y = -10 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 2, z = 3$.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 € y en cada cazadora 70 € , calcular, justificando las respuestas:

a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios. **(1,5 puntos)**

b) El valor de dichos beneficios máximos. **(0,5 puntos)**

a) Llamamos “x” al número de abrigos a confeccionar semanalmente e “y” al número de cazadoras. Realizamos una tabla para ordenar la información.

	M ² de tela de forro	M ² de paño	Ganancias
Número de abrigos (x)	x	3x	80x
Número de cazadoras (y)	2y	2y	70y
Totales	$x + 2y$	$3x + 2y$	$80x + 70y$

Queremos maximizar las ganancias que vienen dadas por la expresión $G(x, y) = 80x + 70y$.

Las restricciones son:

“Dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño” $\rightarrow$
 $x + 2y \leq 80$; $3x + 2y \leq 120$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Las restricciones que definen la región factible son:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 80$$

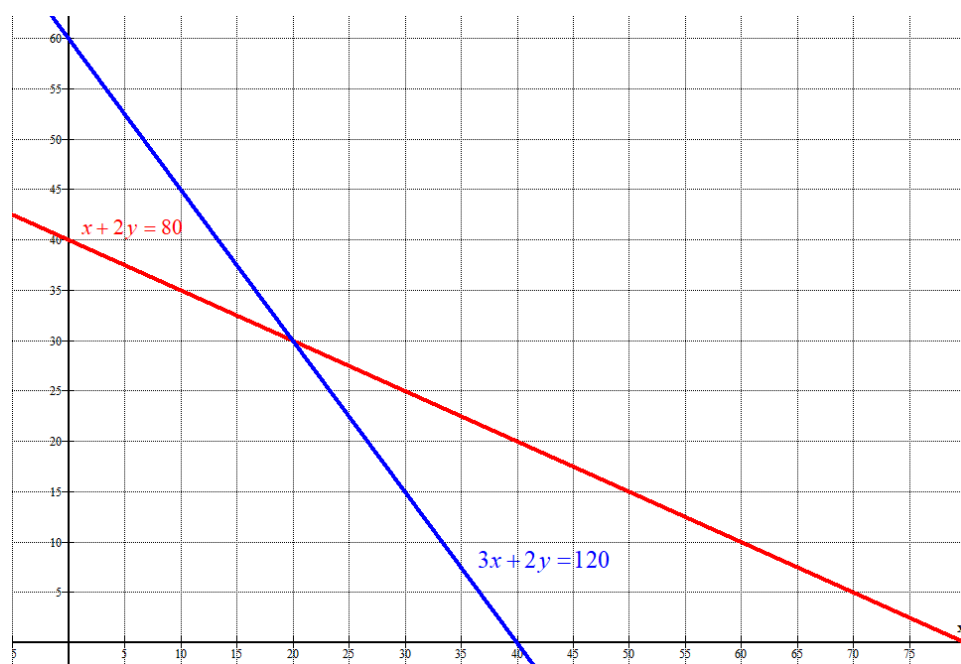
x	$y = \frac{80 - x}{2}$
0	40
20	30

$$3x + 2y = 120$$

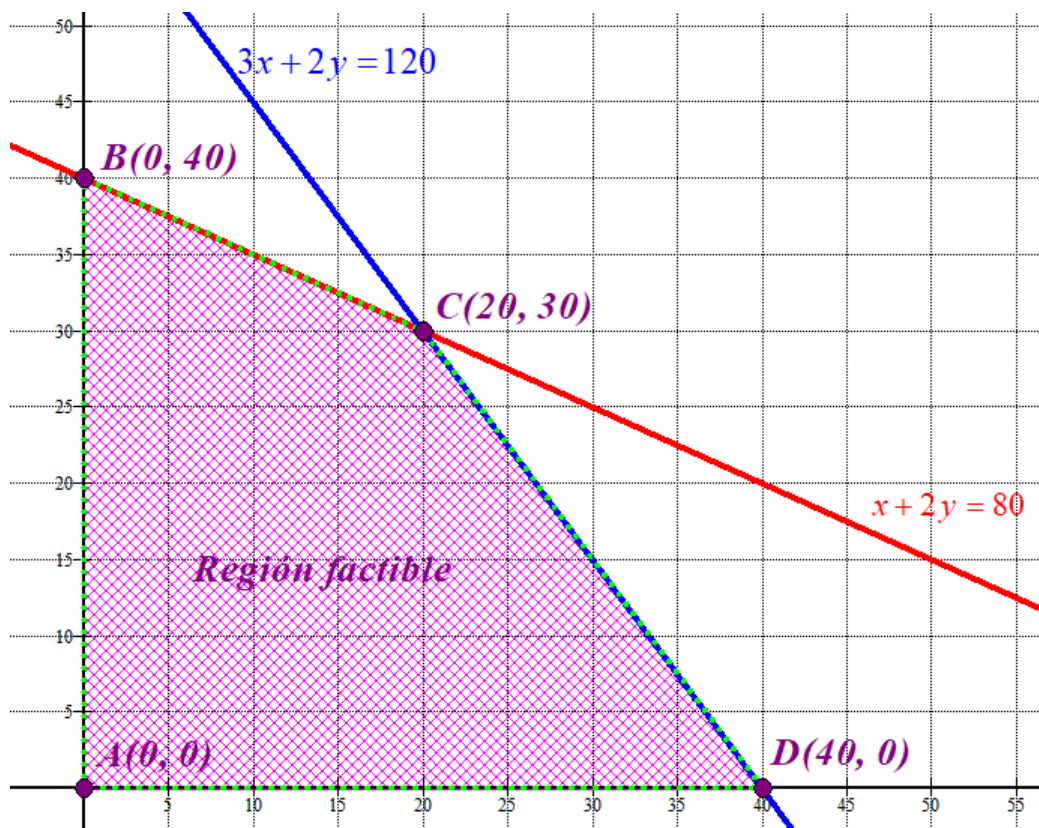
x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$
0	60
20	30

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$
 situada por debajo de las rectas roja y azul.
 La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función de las ganancias $G(x, y) = 80x + 70y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow G(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow G(0, 40) = 2800$$

$$C(20, 30) \rightarrow G(20, 30) = 1600 + 2100 = 3700$$

$$D(40, 0) \rightarrow G(40, 0) = 3200$$

Las ganancias son máximas en el vértice $C(20, 30)$, es decir, confeccionando 20 abrigo y 30 cazadoras.

b) Como se ha obtenido en el apartado anterior los beneficios máximos son de 3700 €.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos del tiempo de crianza, x , viene dada por la función

$$G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \quad 1 \leq x \leq 4$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Nos dicen que el máximo de la función $G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2$ se produce en $x = 2$, siendo este valor máximo de la graduación $G(2) = 22$.

En $x = 2$ hay un máximo implica que la derivada se anula en dicho valor $\rightarrow G'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \\ G'(x) = 3x^2 - 2Ax + 6B \\ G(2) = 22 \\ G'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 22 = 2^3 - A \cdot 2^2 + 6B \cdot 2 + 2 \\ 3 \cdot 2^2 - 2A \cdot 2 + 6B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 22 = 8 - 4A + 12B + 2 \\ 12 - 4A + 6B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4A - 12B = -12 \\ -4A + 6B = -12 \end{array} \right\}$$

$$\frac{-6B = -24}{-6B = -24} \Rightarrow \boxed{B = 4} \Rightarrow 4A - 48 = -12 \Rightarrow 4A = 36 \Rightarrow \boxed{A = 9}$$

Los valores necesarios de A y B para que se cumpla lo pedido en el ejercicio son $A = 9$ y $B = 4$.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se le paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x , de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \quad 2 \leq x \leq 5$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas

Derivamos e igualamos a cero la función $P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \quad 2 \leq x \leq 5$.

$$P'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 30x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} = \begin{cases} \frac{5-3}{2} = 1 \\ \frac{5+3}{2} = 4 \end{cases}$$

El valor $x = 1$ no pertenece al intervalo $[2, 5]$, dominio de definición de la función.

Por lo que solo comprobamos si $x = 4$ es máximo o mínimo sustituyendo en la derivada segunda.

$$P'(x) = -6x^2 + 30x - 24 \Rightarrow P''(x) = -12x + 30 \Rightarrow P''(4) = -48 + 30 = -18 < 0$$

La función posee un máximo relativo en $x = 4$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[2, 5]$ y decidimos con que diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo.

$$P(2) = -2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 30 = 26 \rightarrow \text{¡¡Mínimo!!}$$

$$P(4) = -2 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 30 = 46 \rightarrow \text{¡¡Máximo!!}$$

$$P(5) = -2 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 30 = 35$$

El precio máximo es 0.46 € que se obtiene con un diámetro de 4 cm.

El precio mínimo es 0.26 € que se obtiene con un diámetro de 2 cm.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

- a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**
- b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2 + 4x - 5}$$

- a) La función es una parábola. Vemos si corta al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 4x - 5 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 20}}{2} = \begin{cases} \frac{-4-6}{2} = -5 \\ \frac{-4+6}{2} = 1 \end{cases}$$

Como $x = 1$ está en el intervalo $(0, 2)$ el área pedida la calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas, una entre 0 y 1 y otra entre 1 y 2.

$$\int_0^1 x^2 + 4x - 5 dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 5 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0 - 0 \right] = -\frac{8}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 + 4x - 5 dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 10 \right] - \left[\frac{1^3}{3} + 2 - 5 \right] = \frac{10}{3}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^2 + 4x - 5 dx \right| + \left| \int_1^2 x^2 + 4x - 5 dx \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| + \left| \frac{10}{3} \right| = \frac{18}{3} = \boxed{6 u^2}$$

- b) El dominio de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2 + 4x - 5}$ son todos los números reales salvo los que anulan el denominador.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 20}}{2} = \begin{cases} \frac{-4-6}{2} = -5 \\ \frac{-4+6}{2} = 1 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-5, 1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -5$?

$$\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{-4}{0} = \infty$$

La recta $x = -5$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{2}{0} = \infty$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+4x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene pues tiene asíntota horizontal.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -5$ y $x = 1$. Y una asíntota horizontal: $y = 0$.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

En una fábrica de vidrios el 25% de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1% de las botellas grandes, el 2% de las medianas y el 3% de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

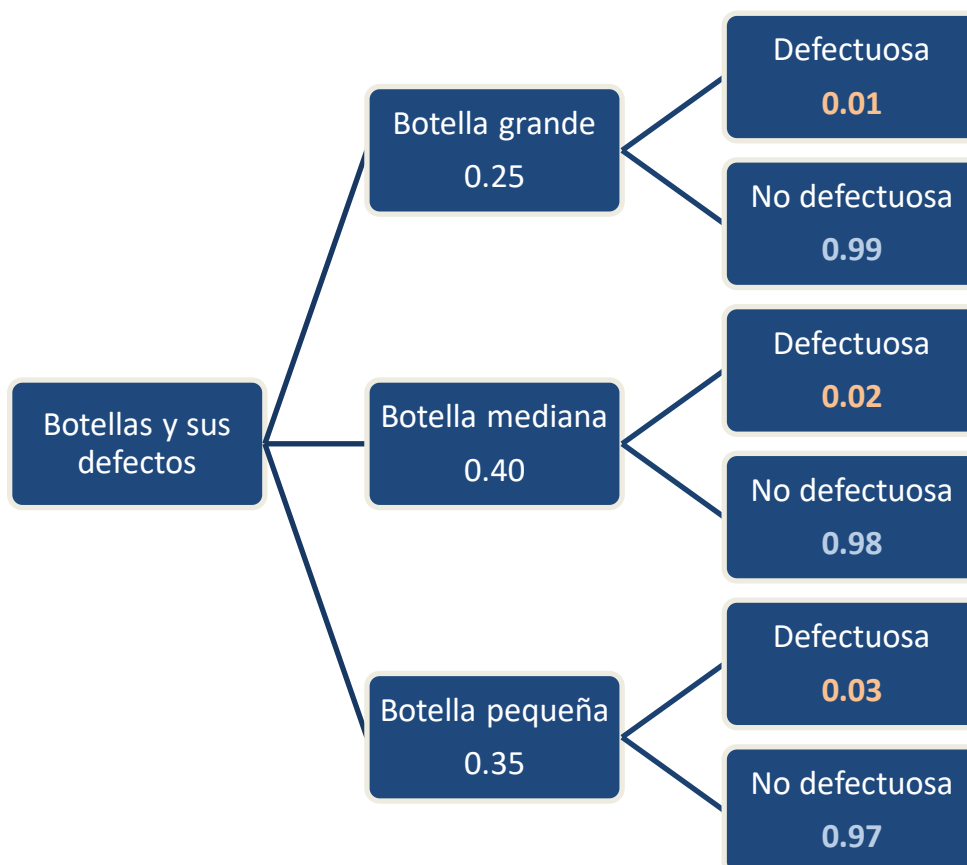
a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

(1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

(1 punto)

Construimos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Elegir botella grande, B = Elegir botella mediana, C = Elegir botella pequeña.

D = La botella es defectuosa $\bar{D}$ = La botella no es defectuosa.

a) Observando el diagrama obtenemos la probabilidad pedida.

$$P(B \cap D) = P(B)P(D/B) = 0.4 \cdot 0.02 = \boxed{0.008}$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\ &= 0.25 \cdot 0.01 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.35 \cdot 0.03 = \boxed{0.021} \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

La proporción muestral es $p = \frac{60}{300} = 0.2$ con $n = 300$.

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{300}} \approx 0.045$$

El intervalo de confianza para la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.2 - 0.045, 0.2 + 0.045) = (0.155, 0.245)$$

El intervalo de confianza es (0.155, 0.245)

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica de 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95%, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

Sea X = Longitud de una barra de pan en centímetros. $X = N(\mu, 3)$

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $\rightarrow \text{Error} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ cm}$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{3}{0.5} \Rightarrow n = \left(1,96 \cdot \frac{3}{0.5} \right)^2 \approx 138.29$$

El tamaño de la muestra debe ser entero y mayor de 138.29.

El tamaño mínimo es de 139 barras de pan.



EBAU Ordinaria 2021
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Universidad de Extremadura
 Curso 2020-2021

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

- a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A .
 b) Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$.

(0,5 puntos)**(1,5 puntos).****PROBLEMA 3 (2 puntos)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x , y , z para que se verifique que $A^t \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m² de tela con un beneficio de 40 €, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m² de tela con un beneficio de 100 €. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m² de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.

Calcular, justificando la respuesta:

- a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.
 b) El valor de dichos beneficios máximos.

(1,5 puntos)**(0,5 puntos)**

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x , viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \leq t \leq 6$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

- a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. **(1,5 puntos)**
 b) Representar gráficamente la función $V(t)$. **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

- a) Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

(1 punto)

- b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

(1 punto)

$$g(x) = \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50%), mármol (40%) y artificial (10%). El 10% del granito, el 5% del mármol y el 1% de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

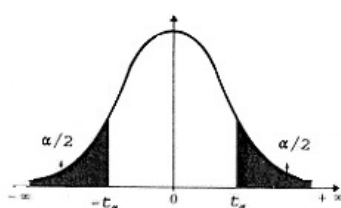
- a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas. **(1 punto)**
 b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

(1 punto)**PROBLEMA 9 (2 puntos)**

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionarse para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \\ -2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 1^a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6X - 4Y = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \\ 6X - 9Y = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -30 & 36 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a\} \Rightarrow -13Y = \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -26 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{-1}{13} \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -26 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Sustituimos en ecuación } 1^a\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A .

(0,5 puntos)

b) Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$.

(1,5 puntos).

a) Vemos para qué valores de x se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

No existe la inversa de A para $x = 1$.

b) Para $x = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos de la ecuación.

$$A \cdot X - B = C \Rightarrow A \cdot X = B + C \Rightarrow X = A^{-1}(B + C)$$

Sustituimos el valor de las matrices.

$$X = A^{-1}(B + C) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1+8 & 5-6 \\ -1+16 & 5-12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \\ 15 & -7 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^t \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A^t \cdot B = C - z \cdot I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2x+4y & x-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & 1 \\ 0 & -8-z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = -z \\ 1 = 1 \\ -2x + 4y = 0 \\ x - 12 = -8 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 2} \\ x - 2y = 0 \\ x = -8 + 12 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ \boxed{x = 4 - 2 = 2} \end{cases} \Rightarrow 2 - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Los valores buscados son $x = 2, y = 1, z = 2$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 €, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 de tela con un beneficio de 100 €. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.

Calcular, justificando la respuesta:

- a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos. **(1,5 puntos)**
 b) El valor de dichos beneficios máximos. **(0,5 puntos)**

Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de butacas a tapizar diariamente, y = número de sillones a tapizar diariamente.

Se desea maximizar los beneficios, siendo estos de 40 € por butaca y 100 € por sillón la expresión de los beneficios es $B(x, y) = 40x + 100y$.

“Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela y 4 m^2 para tapizar un sillón. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela” $\rightarrow 2x + 4y \leq 100$

“No puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones” $\rightarrow x \leq 40; y \leq 20$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas estas ecuaciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 100 \\ x \leq 40; y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ x \leq 40; y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 50$$

$$y = 20$$

$$x = 40$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{50-x}{2}$
0	25
10	20

x	$y = 20$
0	20
10	20

Recta
vertical

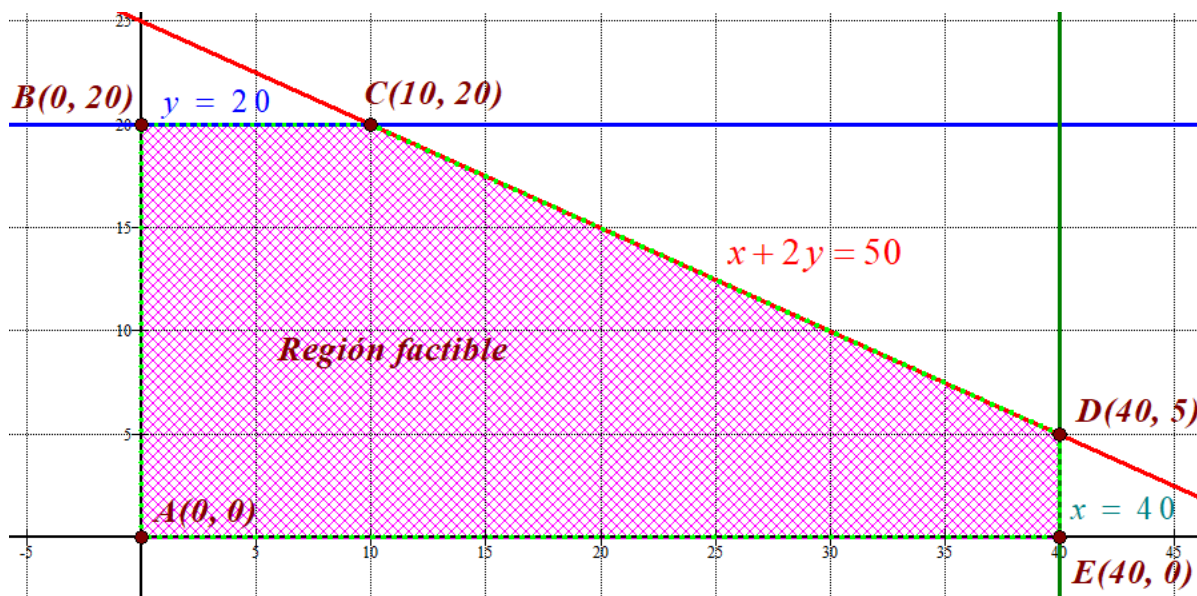
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ x \leq 40; \quad y \leq 20 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

que está por debajo de la recta roja y azul y a la izquierda de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x, y) = 40x + 100y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 0 + 2000 = 2000$$

$$C(10, 20) \rightarrow B(10, 20) = 400 + 2000 = 2400$$

$$D(40, 5) \rightarrow B(40, 5) = 1600 + 500 = 2100$$

$$E(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 1600 + 0 = 1600$$

El valor máximo es 2400 y se obtiene en el vértice $C(10, 20)$.

- El beneficio máximo se obtiene tapizando 10 butacas y 20 sillones.
- El beneficio máximo que se puede conseguir sometido a las restricciones es 2400 €

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x , viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Si alcanza su mínimo en $x = 3$ se debe cumplir que $C'(3) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \Rightarrow C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B \\ C'(3) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3A + B = 0 \Rightarrow \boxed{54 - 6A + B = 0}$$

También se cumple que $C(3) = 8$.

$$\left. \begin{aligned} C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \\ C(3) = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3^3 - A \cdot 3^2 + 3B + 35 = 8 \Rightarrow 54 - 9A + 3B = -27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9A + 3B = -81 \Rightarrow \boxed{3A - B = 27}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} -6A + B = -54 \\ 3A - B = 27 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\text{Sumo las dos ecuaciones}\} \Rightarrow -3A = -27 \Rightarrow \boxed{A = 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 - B = 27 \Rightarrow \boxed{B = 27 - 27 = 0}$$

Comprobamos que con $A = 9$ y $B = 0$ la función tiene un mínimo en $x = 3$. Para ello vemos que la derivada segunda es positiva.

$$C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 35 \Rightarrow C'(x) = 6x^2 - 18x \Rightarrow C''(x) = 12x - 18 \Rightarrow C''(3) = 36 - 18 = 18 > 0$$

Se cumple que para $A = 9$ y $B = 0$ la función tiene un mínimo en $x = 3$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \leq t \leq 6$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

- a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. **(1,5 puntos)**
 b) Representar gráficamente la función $V(t)$. **(0,5 puntos)**

a) Analizamos la evolución del signo de la derivada.

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \Rightarrow V'(t) = 12t^2 - 48t + 36$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 48t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

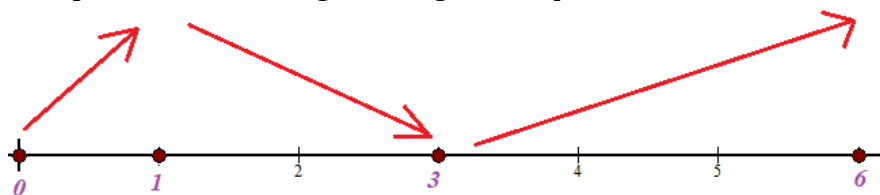
Los puntos críticos de la función son $x = 1$ y $x = 3$.

Estudiamos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $V'(0.5) = 12 \cdot 0.5^2 - 24 + 36 = 15 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.
- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $V'(2) = 12 \cdot 2^2 - 96 + 36 = -12 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En $(3, 6)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $V'(4) = 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 36 = 36 > 0$. La función crece en $(3, 6)$.

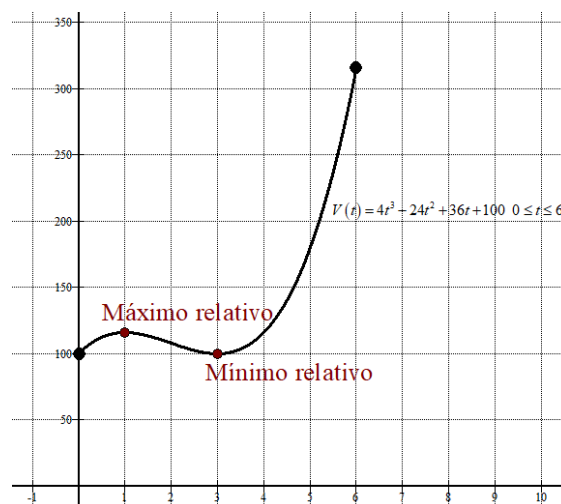
Las ventas crecen durante el primer año y del tercero al sexto. Decrecen las ventas entre el primer y tercer año.

b) Por lo visto en el apartado anterior la gráfica sigue el esquema:



Por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$. Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100$
0	100
1	116
3	100
6	316



PROBLEMA 7 (2 puntos)a) Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.**(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

(1 punto)

$$g(x) = \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$$

a) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{7-5}{2} = 1 \\ \frac{7+5}{2} = 6 \end{cases}$$

El único punto de corte situado entre $x = 0$ y $x = 5$ es $x = 1$.

Para calcular el área hacemos dos integrales definidas y luego sumamos el valor absoluto de ambas integrales.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 - 7x + 6 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{7}{2}1^2 + 6 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{7}{2}0^2 + 0 \right] = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 6 = \boxed{\frac{17}{6}}$$

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 x^2 - 7x + 6 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x \right]_1^5 = \left[\frac{5^3}{3} - \frac{7}{2}5^2 + 30 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{7}{2}1^2 + 6 \right] = \boxed{-\frac{56}{3}}$$

El área total es la suma del valor absoluto de lo obtenido:

$$\left| \frac{17}{6} \right| + \left| -\frac{56}{3} \right| = \frac{17}{6} + \frac{112}{6} = \frac{129}{6} = \boxed{21.5 u^2}$$

b) Averiguamos primero el dominio de la función $g(x) = \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$.

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{7-5}{2} = 1 \\ \frac{7+5}{2} = 6 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{1, 6\}$ **Asíntotas verticales.** $x = a$ ¿ $x = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)} = \frac{5}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical

¿ $x = 6$?

$$\lim_{x \rightarrow 6} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)} = \frac{145}{0} = \infty$$

$x = 6$ es asíntota vertical

Tiene dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 6$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2 - 14x + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{14x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{14}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{4 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{14}{\infty} + \frac{12}{\infty}} = \frac{4 + 0}{2 - 0 + 0} = 2$$

La asíntota horizontal es $y = 2$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe, pues hay asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 6$ y una horizontal: $y = 2$.

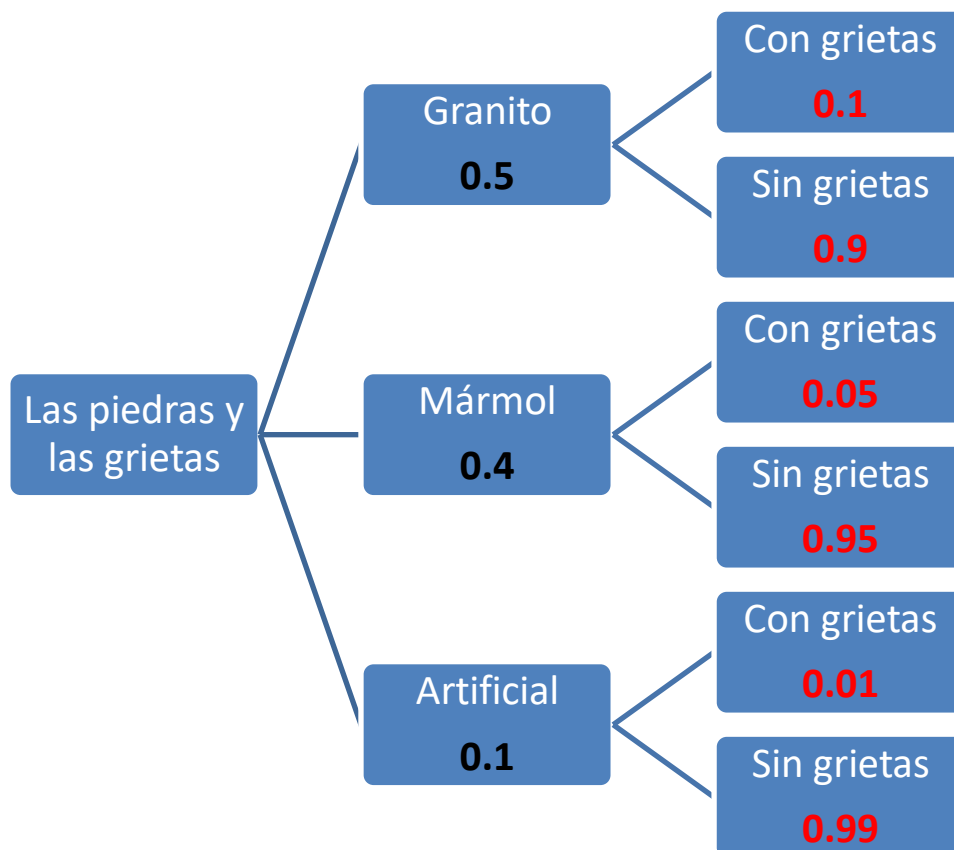
PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50%), mármol (40%) y artificial (10%). El 10% del granito, el 5% del mármol y el 1% de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos G = “La piedra es de granito”, M = “La piedra es de mármol”, A = “La piedra es artificial”. B = “La piedra tiene grietas”, $\bar{B}$ = “La piedra no tiene grietas”.

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(G \cap B) + P(M \cap B) + P(A \cap B) = \\
 &= P(G)P(B/G) + P(M)P(B/M) + P(A)P(B/A) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.05 + 0.02 + 0.001 = \boxed{0.071}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M)P(B/M)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.071} = \frac{20}{71} \approx 0.282$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

La proporción muestral es $pr = \frac{120}{150} = \frac{4}{5} = 0.8$ con $n = 150$.

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{150}} \approx 0.064$$

El intervalo de confianza para la proporción de practicantes de deporte es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.8 - 0.064, 0.8 + 0.064) = (0.736, 0.864)$$

El intervalo de confianza es (0.736, 0.864)

PROBLEMA 10 (2 puntos)

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionarse para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

Sea X = Puntuación en una oposición. $X = N(\mu, 1.2)$

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es la mitad de la longitud del intervalo de confianza $\rightarrow \text{Error} = 0.5/2 = 0.25$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.25 = 1,96 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{1.2}{0.25} = 9,408 \Rightarrow n = 9,408^2 = 88.51$$

El tamaño de la muestra debe ser entero y mayor de 88.51.

El tamaño mínimo es de 89 opositores.



EBAU Extraordinaria 2020
**Prueba de Evaluación de Bachillerato
 para el acceso a la Universidad (EBAU)**
 Universidad de Extremadura
 Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m² de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m² de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m² de piel. ¿Cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A , B e I las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea X , I y O las matrices siguientes:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R , expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t , expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momento se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x , entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x=1$ y $x=3$.

(1 punto)

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$ **(1 punto)**

PROBLEMA 8 (2 puntos)

En Portugal, el 40% del café consumido es de marca Delta, el 50% de marca Sical y el 10% restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70% de sus envases y la variedad robusta para el 30% restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40% de sus envases y la robusta en el 60%. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50% de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta. **(1 punto)**

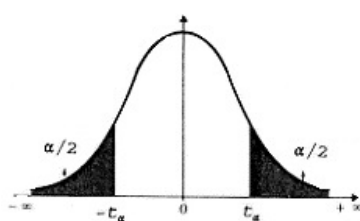
PROBLEMA 9 (2 puntos)

Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

Llamemos “x” al número de envases del tipo A e “y” al número de envases del tipo B. Realizamos una tabla.

	Kg de abono de nitrógeno	Kg de abono de potasio	Beneficio
Nº envases tipo A (x)	3x	x	100x
Nº envases tipo B (y)	6y	y	120y
	3x + 6y	x + y	100x + 120y

Obtenemos el conjunto de restricciones en forma de inecuaciones.

“Dispone de 300 kg de abono de nitrógeno” $\rightarrow 3x + 6y \leq 300$

“Dispone de 80 kg de abono de potasio” $\rightarrow x + y \leq 80$

Las cifras deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Ponemos todas estas restricciones formando un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 300 \\ x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 100 \\ x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Deseamos obtener un valor máximo de la función beneficio $B(x, y) = 100x + 120y$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + 2y = 100$

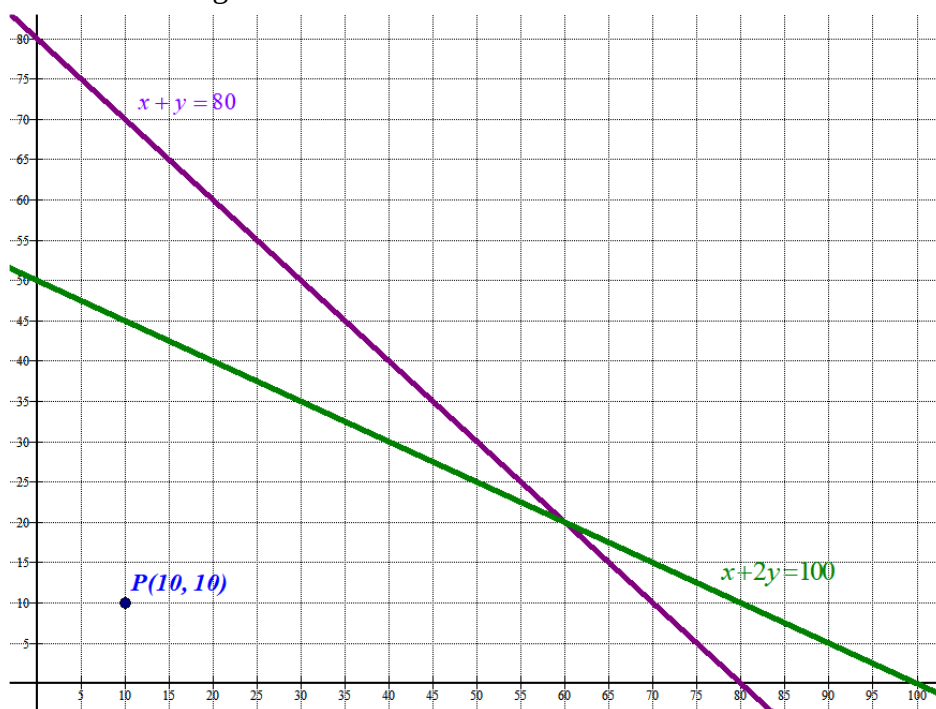
x	y = $\frac{100 - x}{2}$
0	50
100	0

$x + y = 80$

x	y = $80 - x$
0	80
80	0

$x \geq 0; y \geq 0$

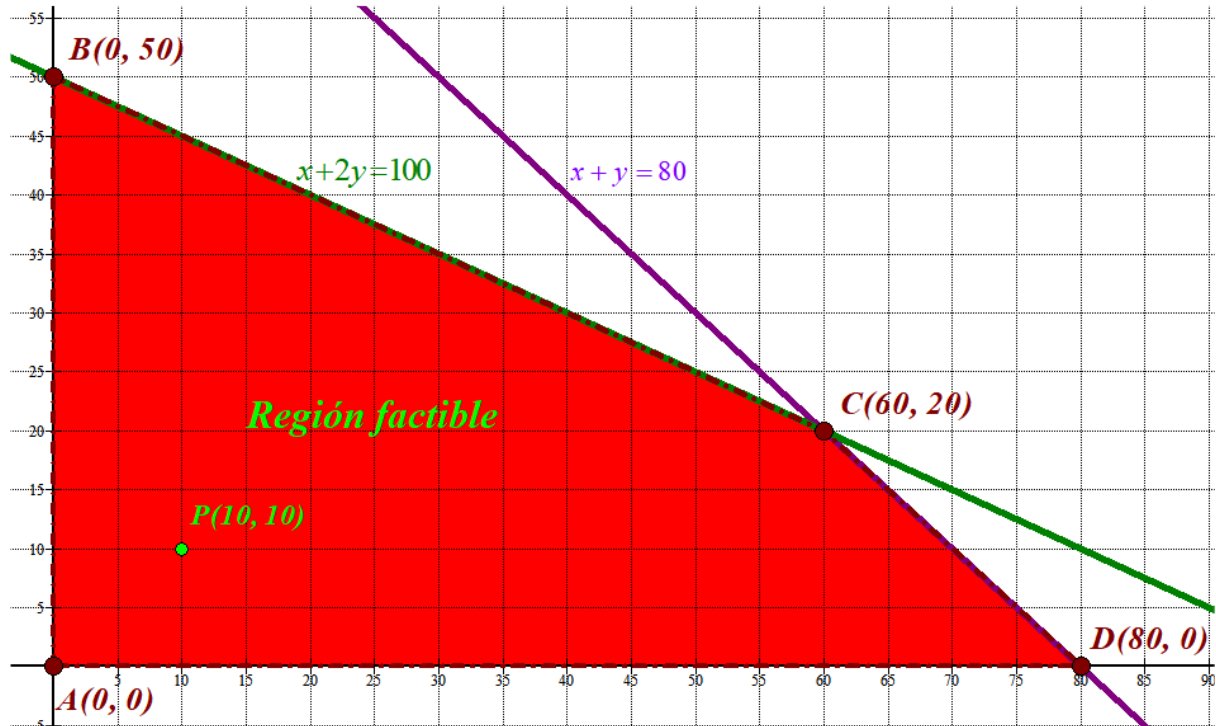
Primer cuadrante



Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 100 \\ 10 + 10 \leq 80 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen.}$$

La región factible es la región del plano pintada de rojo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 100x + 120y$ en cada uno de los vértices.

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 6000$
- $C(60, 20) \rightarrow B(60, 20) = 6000 + 2400 = 8400$
- $D(80, 0) \rightarrow B(80, 0) = 8000$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(60, 20)$.

Se obtiene un beneficio máximo de 8400 € fabricando 60 envases del tipo A y 20 del tipo B.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel. ¿Cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Llamemos “x” al número de pares de zapatos fabricados e “y” al número de pares de botas. Realizamos una tabla para facilitar la tarea.

	Horas de trabajo	M^2 de piel	Beneficio
Nº de pares de zapatos (x)	x	$0.5x$	$70x$
Nº de pares de botas (y)	y	y	$80y$
	$x + y$	$0.5x + y$	$70x + 80y$

Obtenemos el conjunto de restricciones en forma de inecuaciones.

“Solo dispone de 50 horas de trabajo” $\rightarrow x + y \leq 50$

“Solo dispone de 35 m^2 de piel” $\rightarrow 0.5x + y \leq 35$

El número de pares debe ser positivo y entero $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Ponemos todas estas restricciones formando un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ 0.5x + y \leq 35 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ x + 2y \leq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Deseamos obtener un valor máximo de la función beneficio $B(x, y) = 70x + 80y$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 50$

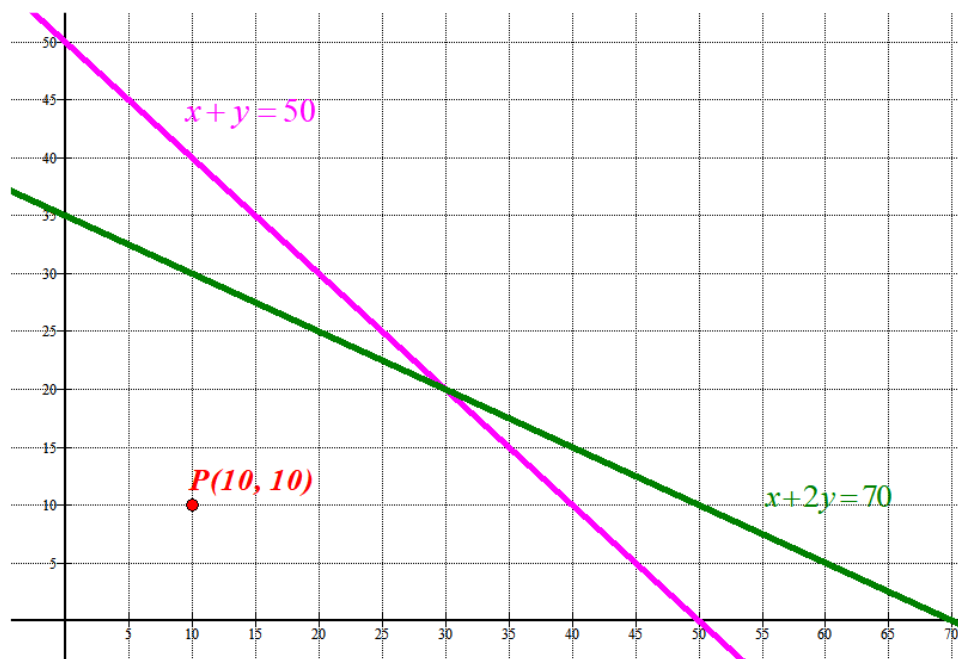
x	$y = 50 - x$
0	50
50	0

$x + 2y = 70$

x	$y = \frac{70 - x}{2}$
0	35
70	0

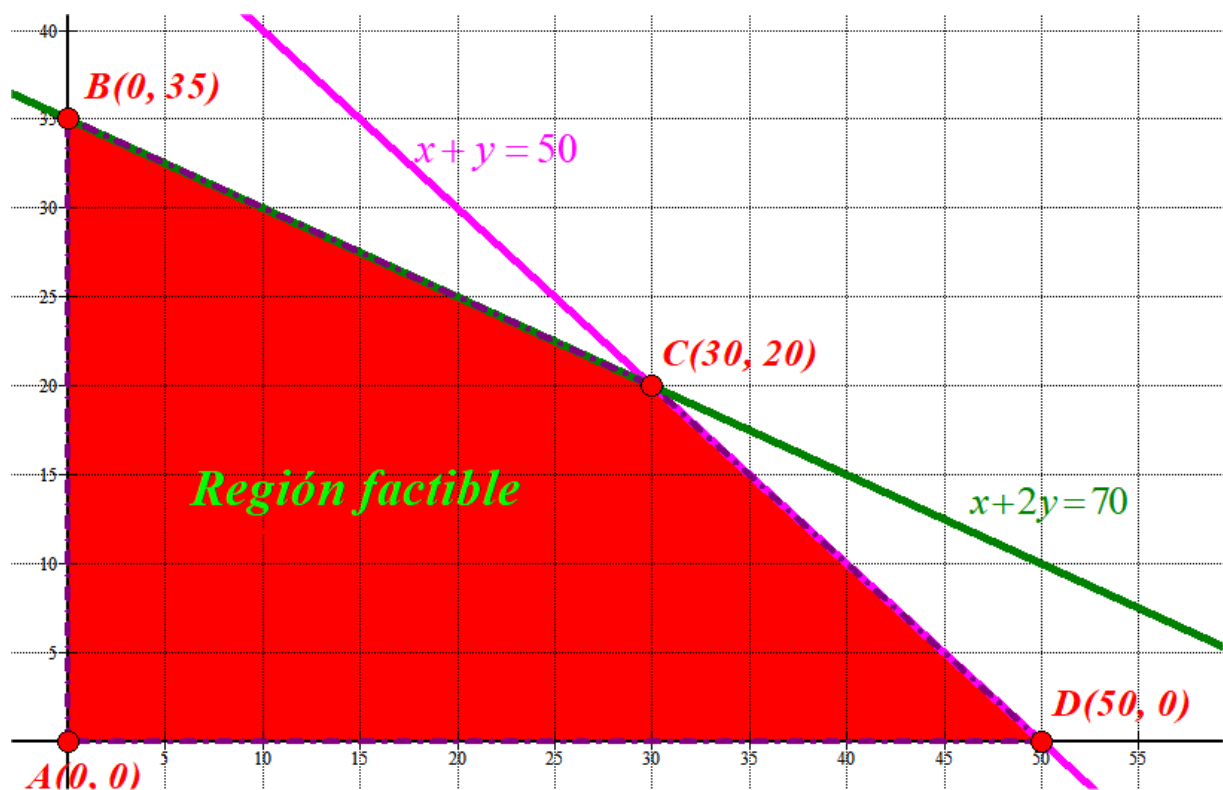
$x \geq 0; y \geq 0$

El primer cuadrante



Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \leq 50 \\ 10 + 20 \leq 70 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$ Se cumplen y la región factible es la región del plano pintada de rojo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 70x + 80y$ en cada uno de los vértices.

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 35) \rightarrow B(0, 35) = 2800$
- $C(30, 20) \rightarrow B(30, 20) = 2100 + 1600 = 3700$
- $D(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 3500$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(30, 20)$.

Se obtiene un beneficio máximo de 3700 € fabricando 30 pares de zapatos y 20 pares de botas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A , B e I las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

Despejo X en la ecuación matricial.

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} A \cdot B \cdot X = (A \cdot B)^{-1} (A \cdot B + I) \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} (A \cdot B + I)$$

Veamos si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa y podemos realizar lo indicado arriba.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -6 \\ 2+1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 18 = 10 \neq 0$$

Existe la inversa de $A \cdot B$ y la calculamos.

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Seguimos resolviendo la ecuación matricial.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B + I &= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B)^{-1} &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = (A \cdot B)^{-1} (A \cdot B + I) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -10+18 & 12-6 \\ -15+12 & 18-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/10 & 7/5 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea X , I y O las matrices siguientes:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

Sustituimos y realizamos las operaciones indicadas.

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - 4a + 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=a} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=a} \end{cases}$$

Los valores del parámetro “a” son 1 y 3.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R , expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t , expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momento se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero, buscando sus puntos críticos.

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \rightarrow R'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = 6 = t \\ \frac{8-4}{2} = 2 = t \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos estos valores para averiguar si son máximos o mínimos relativos.

$$R'(t) = 3t^2 - 24t + 36 \rightarrow R''(t) = 6t - 24$$

$$t = 2 \Rightarrow R''(2) = 12 - 24 = -12 < 0 \rightarrow \text{Es máximo relativo}$$

$$t = 6 \Rightarrow R''(6) = 36 - 24 = 12 > 0 \rightarrow \text{Es mínimo relativo}$$

Calculamos el ruido que se produce en los extremos del intervalo de definición y el ruido en el máximo y mínimo relativo.

$$R(1) = 1^3 - 12 + 36 + 60 = 85$$

$$\text{Máximo relativo} \rightarrow R(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 72 + 60 = 92$$

$$\text{Mínimo relativo} \rightarrow R(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 60 = 60$$

$$R(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 + 60 = 67$$

El máximo ruido se produce en $t = 2$ con un valor de 92 decibelios.

El mínimo ruido se produce en $t = 6$ con un valor de 60 decibelios.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x , entre 1 y 5 gramos, El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Se sabe que $F(2) = 2 \rightarrow F(2) = 2B + 2A = 2 \Rightarrow A + B = 1$.

Además, la función es continua, por lo que en $t = 3$ lo es y debe cumplirse que:

- Existe $F(3) = 3^2 + 3A - B = 9 + 3A - B$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} Bx + 2A = 3B + 2A \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 + Ax - B = 3^2 + 3A - B \end{array} \right\} \Rightarrow 3B + 2A = 9 + 3A - B \Rightarrow 4B - A = 9$
- Deben ser iguales

Es continua si $4B - A = 9$.

Unimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 4B - A = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 - B \\ 4B - A = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 4B - 1 + B = 9 \Rightarrow 5B = 10 \Rightarrow \boxed{B = 2} \Rightarrow \boxed{A = 1 - 2 = -1}$$

El valor de las constantes es $A = -1$ y $B = 2$

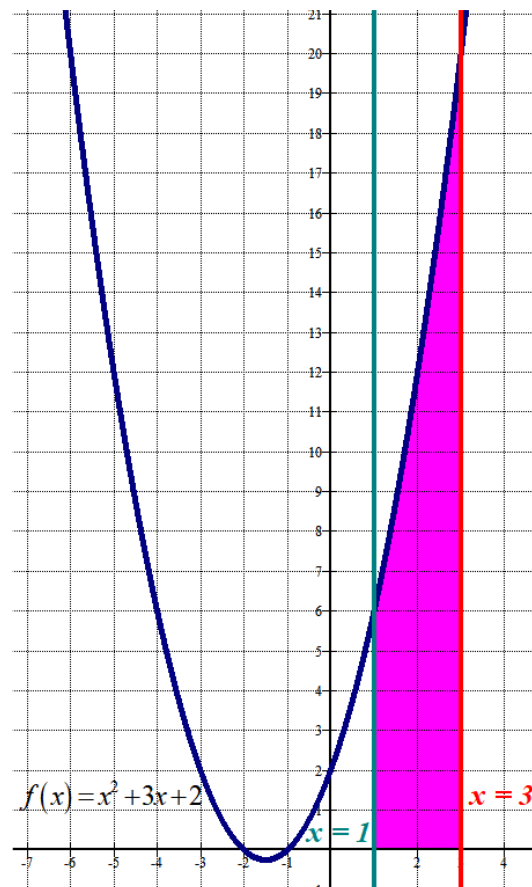
PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x=1$ y $x=3$.**(1 punto)**(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$ **(1 punto)**

(a) Dibujamos la región del plano limitada por la parábola y las dos rectas verticales.

x	$y = x^2 + 3x + 2$
0	2
1	6
2	12
3	20
4	30



El área es la integral definida entre 1 y 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 x^2 + 3x + 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} + 6 \right] - \left[\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} + 2 \right] = \\ &= 9 + \frac{27}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{74}{3} = \boxed{24.66 u^2} \end{aligned}$$

(b) Igualamos a cero el denominador de la función.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 8}}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 = x \\ \frac{-3-1}{2} = -2 = x \end{cases}$$

El dominio de la función $g(x) = \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$ es $\mathbb{R} - \{-1, -2\}$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \frac{-5}{0} = \infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{-2} \cancel{x^2}}{\cancel{2} (\cancel{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} -1 = -1$$

La asíntota horizontal es $y = -1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

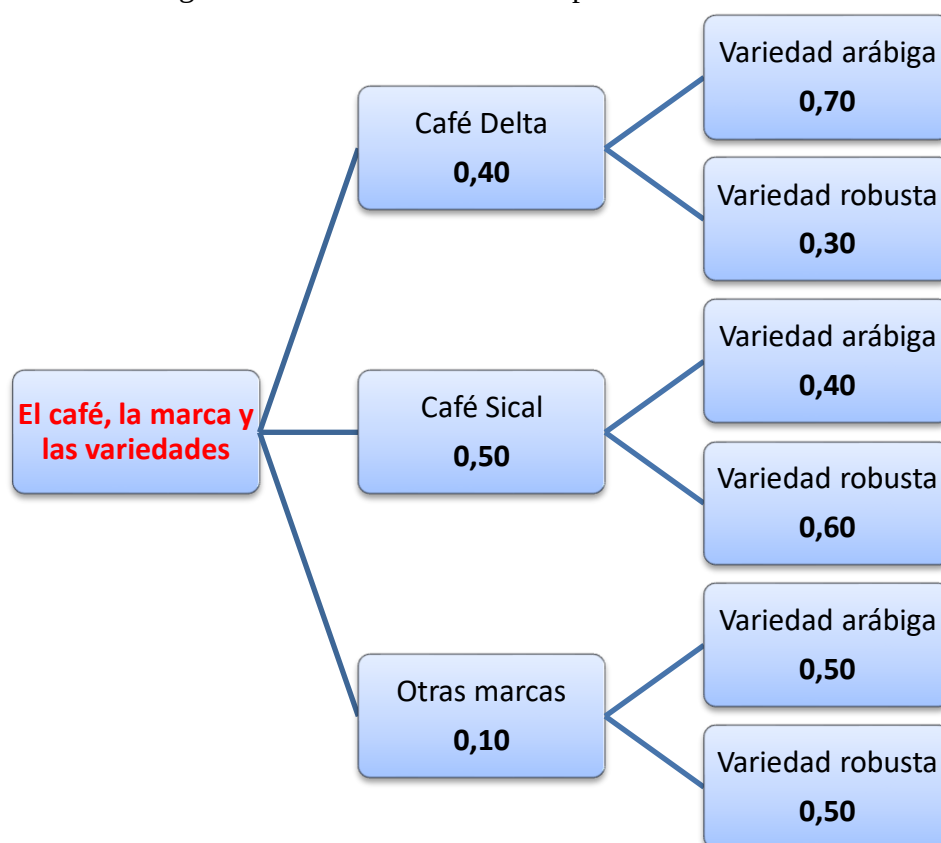
PROBLEMA 8 (2 puntos)

En Portugal, el 40% del café consumido es de marca Delta, el 50% de marca Sical y el 10% restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70% de sus envases y la variedad robusta para el 30% restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40% de sus envases y la robusta en el 60%. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50% de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



(a) Utilizamos la información del diagrama de árbol.

$$\begin{aligned}
 P(\text{sea Sical y de variedad arábica}) &= \\
 &= P(\text{Sea Sical}) P(\text{Sea variedad arábica} / \text{Es Sical}) = 0,50 \cdot 0,40 = \boxed{0,2}
 \end{aligned}$$

(b) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea de variedad robusta}) &= P(\text{Sea Delta}) P(\text{Sea de variedad robusta} / \text{Es Delta}) + \\
 &+ P(\text{Sea Sical}) P(\text{Sea de variedad robusta} / \text{Es Sical}) + \\
 &+ P(\text{Sea "Otras marcas"}) P(\text{Sea de variedad robusta} / \text{Es de "Otras marcas"}) = \\
 &= 0,40 \cdot 0,30 + 0,50 \cdot 0,60 + 0,10 \cdot 0,50 = 0,12 + 0,30 + 0,05 = \boxed{0,47}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

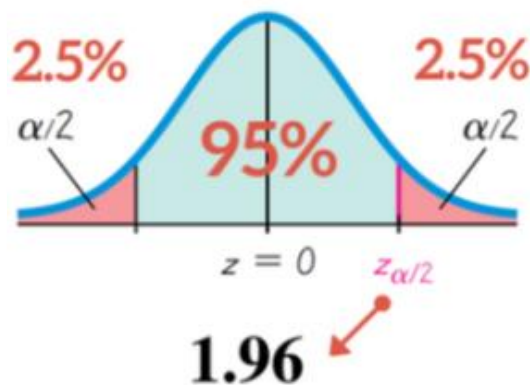
Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

Sea X = Diámetro de una galleta (en cm). $X = N(\mu, 2)$

Los datos de la muestra son: $\bar{x} = 8 \text{ cm}$; $n = 100$

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0.392 \text{ cm}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (8 - 0.392, 8 + 0.392)$$

El intervalo de confianza es $(7.608, 8.392)$

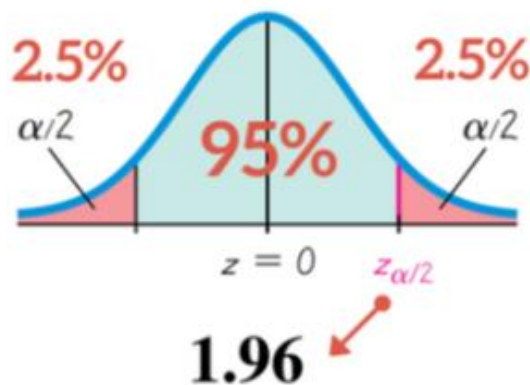
PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Sea X = Precio de una barra de pan en céntimos. $X = N(\mu, 20)$

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



Si el intervalo tiene una amplitud de 10 céntimos, el error es la mitad de dicha longitud.

$$\text{Error} = 10/2 = 5 \text{ céntimos}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{20}{5} = 7,84 \Rightarrow n = 7,84^2 = 61,4656$$

El tamaño de la muestra debe ser de un mínimo de 62 tiendas.



EBAU Ordinaria 2020
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x , ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

(1 punto)

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$

(1 punto)**PROBLEMA 8 (2 puntos)**

Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

(1 punto)

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.

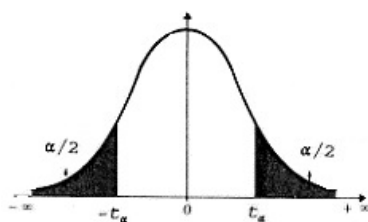
(1 punto)**PROBLEMA 9 (2 puntos)**

El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los libros de texto.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

Llamemos x al número de días que abre la fábrica A e y al número de días que abre la fábrica B. Hagamos una tabla para establecer las restricciones.

	Turismos	Furgonetas	Coste
Fábrica A (x días)	$6x$	$2x$	$30000x$
Fábrica B (y días)	$2y$	$2y$	$20000y$
TOTAL	$6x+2y$	$2x+2y$	$30000x+20000y$

El número de turismos debe ser mayor de 180 $\rightarrow 6x + 2y \geq 180$

El número de furgonetas debe ser mayor de 140 $\rightarrow 2x + 2y \geq 140$

Las cantidades x e y deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y \geq 180 \\ 2x + 2y \geq 140 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 90 \\ x + y \geq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el coste que viene dado por la expresión: $C(x, y) = 30000x + 20000y$.

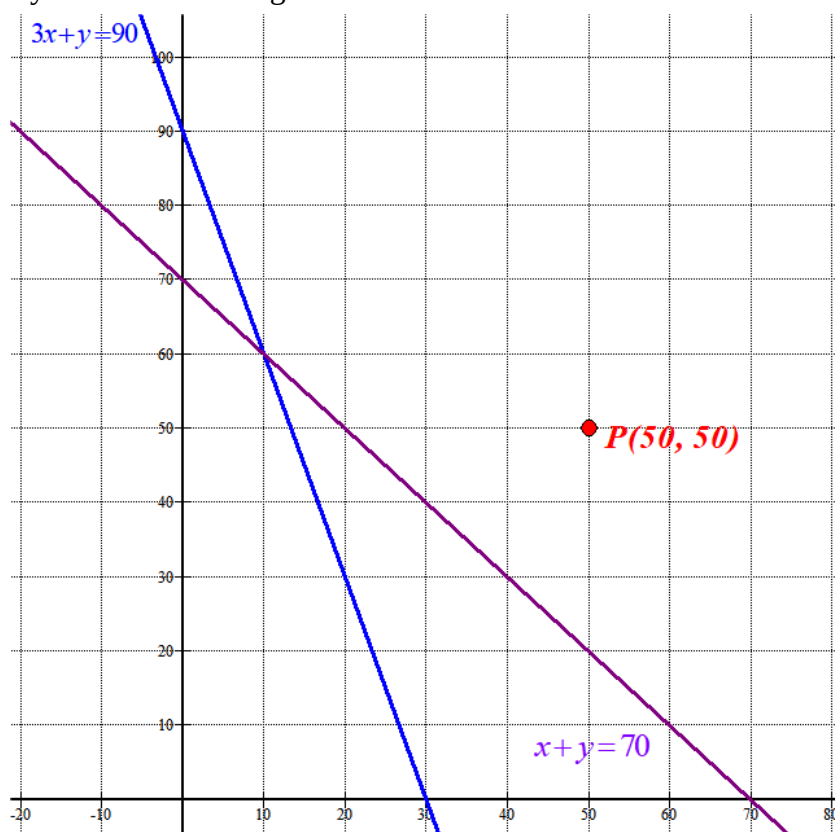
Representamos las restricciones y localizamos la región factible.

$$x + y = 70$$

x	$y = 70 - x$
0	70
70	0

$$3x + y = 90$$

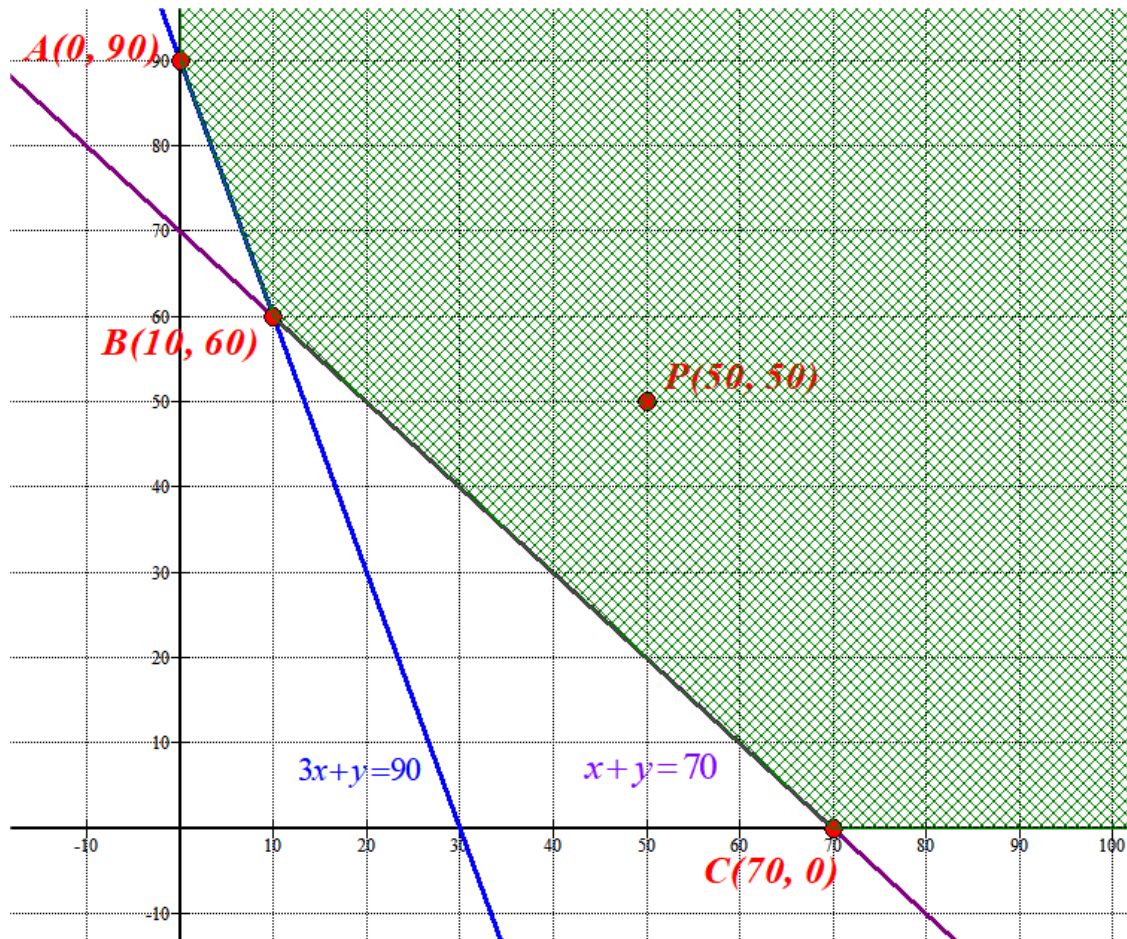
x	$y = 90 - 3x$
30	0
0	90



Probamos si el punto $P(50, 50)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 150 + 50 \geq 90 \\ 50 + 50 \geq 70 \\ 50 \geq 0 \\ 50 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Si se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo.



Buscamos las coordenadas de los vértices de la región factible y valoramos la función en cada uno de ellos en busca de un coste mínimo.

- $A(0, 90) \rightarrow C(0, 90) = 1800000$
- $B(10, 60) \rightarrow C(10, 60) = 300000 + 1200000 = 1500000 \text{ €}$
- $C(70, 0) \rightarrow C(70, 0) = 2100000 + 0 = 2100000$

El coste mínimo se localiza en el vértice $B(10, 60)$ lo que significa 10 días de trabajo en la fábrica A y 60 en la fábrica B.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Es un problema de programación lineal. Llamo x al número de lotes A e y al número de lotes B. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Botes de miel	Botes de polen	Beneficio
Lotes A (x)	$2x$	$2x$	$15x$
Lotes B (y)	$3y$	y	$12y$
TOTALES	$2x+3y$	$2x+y$	$15x+12y$

“Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen” $\rightarrow$

$$2x + 3y \leq 900; \quad 2x + y \leq 500$$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones quedarían:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 900 \\ 2x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio, que deseamos maximizar: $B(x, y) = 15x + 12y$

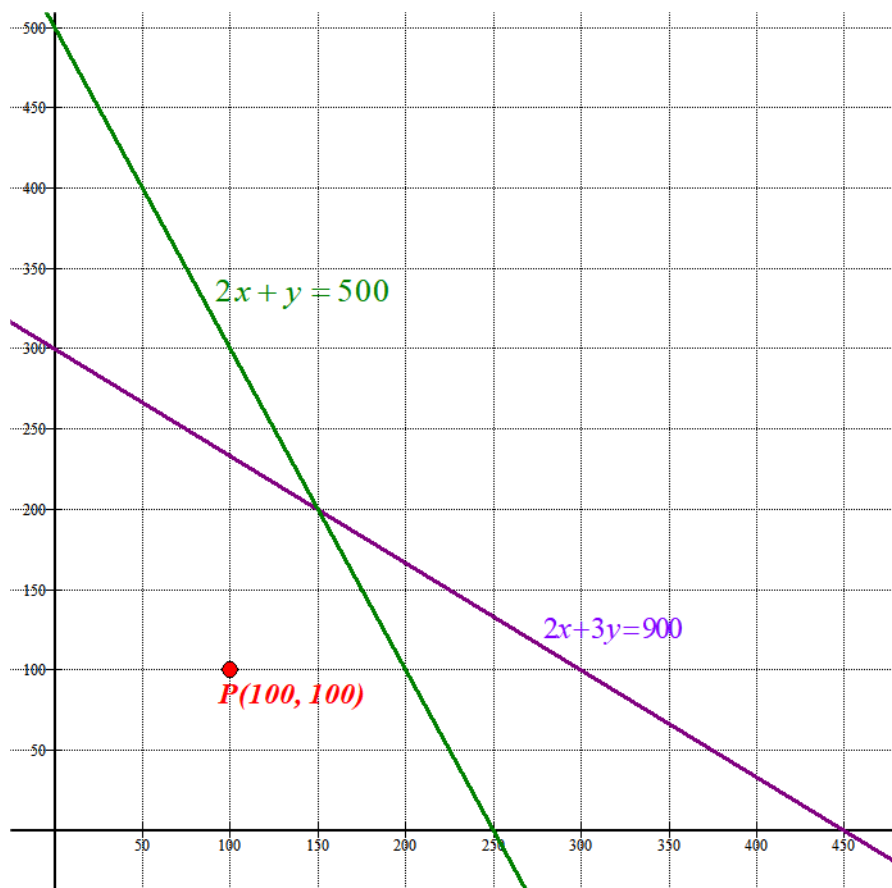
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones buscando la región factible.

$$2x + 3y = 900$$

x	$y = \frac{900 - 2x}{3}$
0	300
150	200
300	0

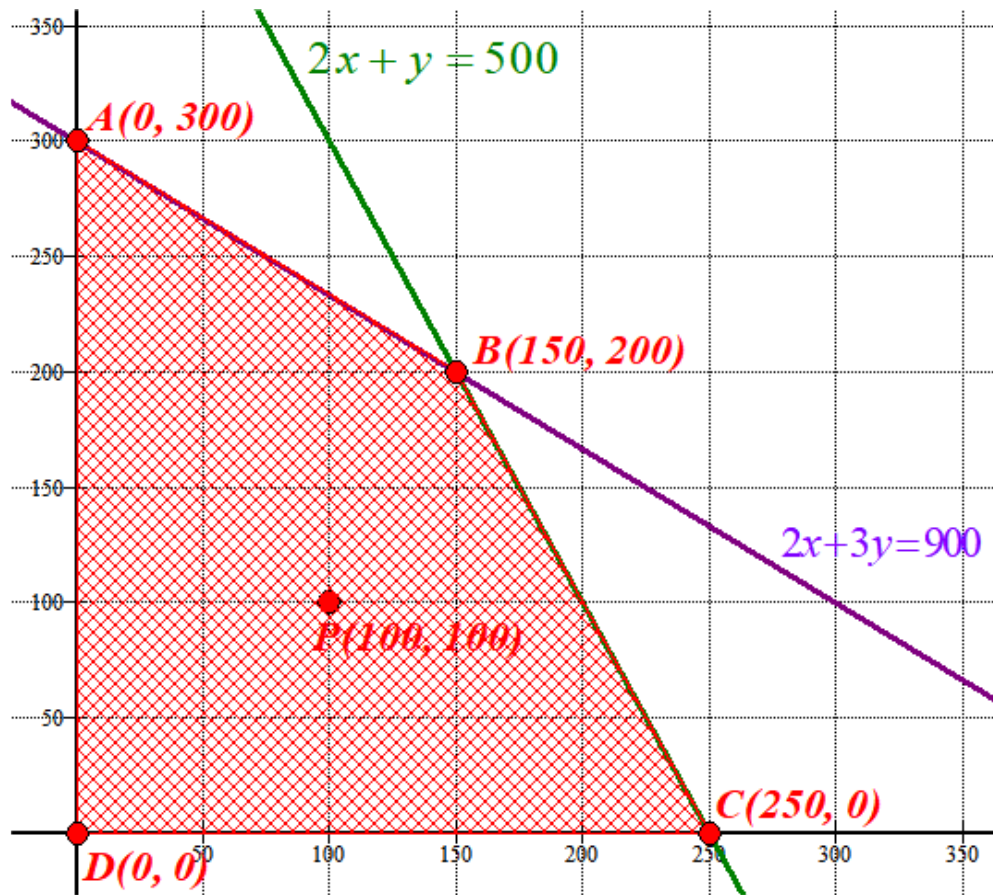
$$2x + y = 500$$

x	$y = 500 - 2x$
0	500
150	200
250	0



Veamos si el punto $P(100, 100)$ cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 300 \leq 900 \\ 200 + 100 \leq 500 \\ 100 \geq 0 \\ 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas las restricciones y la zona objetivo es la zona rayada.}$$



Valoramos el beneficio obtenido en cada vértice en busca del beneficio máximo.

- $A(0, 300) \rightarrow B(0, 300) = 0 + 3600 = 3600$
- $B(150, 200) \rightarrow B(150, 200) = 2250 + 2400 = 4650 \text{ €}$
- $C(250, 0) \rightarrow B(250, 0) = 3750 + 0 = 3750$
- $D(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$

El beneficio máximo con las restricciones del ejercicio se obtiene en el vértice $B(150, 200)$. Esto significa la realización de 150 lotes A y 200 lotes B. Con un beneficio máximo de 4650 €.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

Resolvamos el sistema y luego sustituimos las matrices A y B .

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 5X + Y = A - 2B \\ 2X - Y = -A - B \\ \hline 7X = -3B \end{array} \right\} \Rightarrow 7X = -3B \Rightarrow X = \frac{-3}{7}B$$

$$\Rightarrow -2\frac{-3}{7}B + Y = A + B \Rightarrow \frac{6}{7}B + Y = A + B \Rightarrow Y = A + B - \frac{6}{7}B = A + \frac{1}{7}B$$

Sustituimos $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en las expresiones obtenidas.

$$X = \frac{-3}{7}B = \frac{-3}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$Y = A + \frac{1}{7}B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1/7 & 5+1/7 \\ 0 & -3-1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 6/7 & 36/7 \\ 0 & -22/7 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema son $X = \begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 6/7 & 36/7 \\ 0 & -22/7 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A .

Si $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$.

Si esta matriz es la inversa debe cumplir que $A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I_2$.

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & -x + x \\ -x + x & 1 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El valor buscado es $x = 0$.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

Buscamos los puntos críticos de $G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$. Hacemos la derivada y la igualamos a cero.

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \Rightarrow G'(t) = 6t^2 - 54t + 84$$

$$G'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0 \Rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{9+5}{2} = 7 = t \\ \frac{9-5}{2} = 2 = t \end{cases}$$

Estos dos valores están entre 0 y 8.

Son puntos críticos de la función.

Valoramos estos puntos y los extremos del intervalo y vemos cuando y cuanto es el gasto máximo y mínimo.

- $t = 0 \rightarrow G(0) = 60$
- $t = 2 \rightarrow G(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 + 60 = 136$
- $t = 7 \rightarrow G(7) = 2 \cdot 7^3 - 27 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 + 60 = 11$
- $t = 8 \rightarrow G(8) = 2 \cdot 8^3 - 27 \cdot 8^2 + 84 \cdot 8 + 60 = 28$

El máximo gasto se produce a las 2 horas (136 €) y el mínimo a las 7 horas (11 €).

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x , ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Se sabe que $F(4) = 12$, esto implica:

$$F(4) = 4^2 - 12A + 8B = 12 \Rightarrow -12A + 8B = -4 \Rightarrow \boxed{-3A + 2B = -1}$$

Además, la función es continua, por lo que debe cumplirse $F(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x)$.

$$F(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) \Rightarrow 6B + 2A = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3Ax + 8B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6B + 2A = 9 - 9A + 8B \Rightarrow \boxed{11A - 2B = 9}$$

Juntamos las dos condiciones en un sistema y lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} -3A + 2B = -1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ecuación 1}^a + \text{ecuación 2}^a \\ -3A + 2B = -1 \\ 11A - 2B = 9 \\ \hline 8A = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8A = 8 \Rightarrow \boxed{A = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 2B = -1 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

Los valores buscados son $\boxed{A = B = 1}$.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

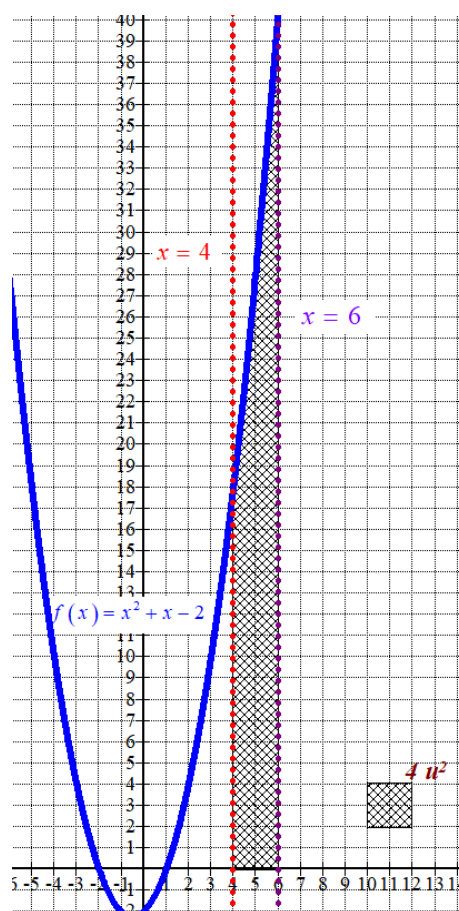
(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$ (a) Determinamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX ($y = 0$)

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

Estos dos valores están fuera del intervalo (4, 6) por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 6 de $f(x) = x^2 + x - 2$.

$$\text{Área} = \left| \int_4^6 x^2 + x - 2 dx \right| = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_4^6 = \left[\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6 \right] - \left[\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 \right] =$$

$$= 72 + 18 - 12 - \frac{64}{3} - 8 + 8 = \boxed{\frac{170}{3} = 56,66 \text{ u}^2}$$



(b) Averiguamos el dominio de la función $g(x) = \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

Asíntota vertical. $x = a$.

Como el dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ comprobamos el valor de los límites de la función cuando se acerca a cada uno de ellos.

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-9}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \frac{-3}{0} = \infty$$

Hay dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

La asíntota horizontal es $y = \frac{-2}{3}$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No hay pues existe asíntota horizontal.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

(1 punto)

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.

(1 punto)

Construimos una tabla de contingencia para aclarar la situación y tener todos los números disponibles. Colocamos en ella los datos proporcionados por el enunciado del ejercicio.

	Jóvenes	Adultos	Mayores	
A favor	210	300	125	
En contra				
	350	400	250	1000

Completamos la tabla.

	Jóvenes	Adultos	Mayores	
A favor	210	300	125	635
En contra	140	100	125	365
	350	400	250	1000

(a) Aplicamos la regla de Laplace. Hay 400 adultos y 100 están en contra del servicio.

$$P(\text{Un adulto esté en contra del servicio}) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$

(b) Aplicamos la regla de Laplace. Hay 1000 socios y de ellos hay 635 están a favor del servicio.

$$P(\text{Un socio esté en contra del servicio}) = \frac{365}{1000} = \boxed{0,365}$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el peso medio de los libros de texto.

Sea X = Peso en gramos de un libro de texto. $X = N(\mu, 72)$. $\bar{x} = 800$ gramos; $n = 36$

Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}} = 23,52 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (800 - 23,52, 800 + 23,52)$$

El intervalo de confianza es (776.48, 823.52)

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Sea X = Renta mensual de una familia. $X = N(\mu, 400)$

Obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es la mitad del intervalo de confianza $\rightarrow$ Error = $160/2 = 80$.

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 80 = 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{400}{80} = 9,8 \Rightarrow n = 9,8^2 = 96,04$$

El tamaño de la muestra debe ser de un mínimo de 97 familias.



EBAU Extraordinaria 2019
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A**PROBLEMA 1**

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

- (a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**
 (b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

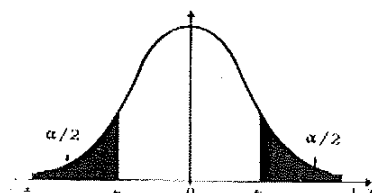
Donde t es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilovatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar a qué horas se produce el máximo y el mínimo de esta potencia. **(1.5 puntos)**
 (b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t = 1$ y $t = 5$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 conductores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

- (a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra? **(1 punto)**
 (b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de reacción de estos conductores. **(2.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A .**(1.5 puntos)**(b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - I$.**(2 puntos)****PROBLEMA 2**

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \quad 1 \leq t \leq 6$$

donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta.**(2 puntos)**(b) Calcular las asíntotas de la función $S(t)/(t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$.**(1 punto)****PROBLEMA 3**

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado. Mediante muestreo estratificado con afijación proporcional

(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

(1 punto)

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

(1 punto)

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

(1.5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

- (a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**
 (b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

Llamamos x = número de motores A; y = número de motores B.

Las restricciones de la situación son:

- x e y son positivos y números enteros $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$
- Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje. Cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje $\rightarrow 2x + 3y \leq 300$; $x + 0,5y \leq 120$
- El número de motores de la clase B no puede ser superior a 80 $\rightarrow y \leq 80$.

Resumimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 120 \Rightarrow 2x + y \leq 240 \end{array} \right\}$$

La función que buscamos maximizar es el beneficio. Como cada motor de clase A tiene un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B tiene un beneficio de 280 euros $\rightarrow$

$$B(x, y) = 220x + 280y.$$

Dibujamos las rectas correspondientes a estas restricciones:

x	$y = \frac{300 - 2x}{3}$
0	100
150	0
105	30

x	$y = 240 - 2x$
0	240
120	0
105	30



Comprobamos que el punto (20,20) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \geq 0 \\ 20 \geq 0 \\ 20 \leq 80 \\ 40 + 60 \leq 300 \\ 20 + 20 \leq 240 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona rayada. Siendo los candidatos a maximizar la función beneficio los vértices de la región A, B, C, D y E.



El vértice C es el punto de corte de las rectas $y = 240 - 2x$ e $y = \frac{300 - 2x}{3}$.

$$\frac{300 - 2x}{3} = 240 - 2x \Rightarrow 300 - 2x = 720 - 6x \Rightarrow 4x = 420 \Rightarrow \boxed{x = 105} \Rightarrow \boxed{y = 240 - 210 = 30}$$

El punto C tiene coordenadas (105, 30).

El resto de puntos son A(0, 0), B(120, 0), D(30, 80) y E(0, 80).

Valoramos la función $B(x, y) = 220x + 280y$ en cada uno de estos puntos.

A(0, 0) da un beneficio de $A(0, 0) = 0$

B(120, 0) da un beneficio de $B(120, 0) = 220 \cdot 120 = 26400$

C(105, 30) da un beneficio de $C(105, 30) = 23100 + 8400 = 31500$

D(30, 80) da un beneficio de $D(30, 80) = 6600 + 22400 = 29000$

E(0, 80) da un beneficio de $E(0, 80) = 22000$

a) El valor máximo se alcanza en C(105, 30).

El máximo beneficio se obtiene con la fabricación de 105 motores del tipo A y 30 motores del tipo B.

b) El beneficio máximo obtenido es de 31500 €

PROBLEMA 2

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

Donde t es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilowatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar a qué horas se produce el máximo y el mínimo de esta potencia. **(1.5 puntos)**
 (b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t = 1$ y $t = 5$. **(1 punto)**

(a) Para averiguar los extremos relativos derivamos la función e igualamos a cero.

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \Rightarrow P'(t) = -3t^2 + 30t - 48$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 30t - 48 = 0 \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-2} = \frac{-10 \pm 6}{-2} = \begin{cases} = \frac{-10 + 6}{-2} = 2 \\ = \frac{-10 - 6}{-2} = 8 \end{cases}$$

Los dos valores $t = 2$ y $t = 8$ pertenecen al intervalo $(0 \leq t \leq 10)$ de definición de la función.

Veamos si es máximo o mínimo utilizando la segunda derivada.

$$P'(t) = -3t^2 + 30t - 48 \Rightarrow P''(t) = -6t + 30$$

$$x = 2 \Rightarrow P''(2) = -12 + 30 = 18 > 0 \text{ Es un mínimo.}$$

$$x = 8 \Rightarrow P''(8) = -48 + 30 = -18 < 0 \text{ Es un máximo.}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[0, 10]$ y en estos dos extremos relativos encontrados en este intervalo.

$$t = 0 \Rightarrow P(0) = 50$$

$$t = 2 \Rightarrow P(2) = -8 + 60 - 96 + 50 = 6$$

$$t = 8 \Rightarrow P(8) = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 50 = 114$$

$$t = 10 \Rightarrow P(10) = -1000 + 1500 - 480 + 50 = 70$$

A las 2 horas se produce la mínima potencia y a las 8 horas se produce la máxima potencia.

(b) El valor máximo es $P(8) = 114$ y el mínimo es $P(2) = 6$.

(c) Estudiemos si la función corta el eje OX entre 1 y 5.

La función es continua, su valor mínimo es positivo ($P(2) = 6$) y en los extremos es también

positiva: $P(1) = -1^3 + 15 - 48 + 50 = 16 > 0$; $P(5) = -125 + 15 \cdot 25 - 48 \cdot 5 + 50 = 60 > 0$

La función siempre es positiva.

El área encerrada entre la función y el eje OX es la integral definida siguiente.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^5 -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 dt = \left[-\frac{t^4}{4} + 15\frac{t^3}{3} - 48\frac{t^2}{2} + 50t \right]_1^5 = \left[-\frac{t^4}{4} + 5t^3 - 24t^2 + 50t \right]_1^5 \\ &= \left[-\frac{625}{4} + 625 - 600 + 250 \right] - \left[-\frac{1}{4} + 5 - 24 + 50 \right] = -\frac{624}{4} + 244 = \boxed{88 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 conductores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

- (a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra? **(1 punto)**
- (b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de reacción de estos conductores. **(2.5 puntos)**

- (a) Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Antigüedad superior a 10 años	Antigüedad entre 3 y 10 años	Antigüedad inferior a 3 años	TOTAL
Población	5000	3000	2000	10000
Muestra	x	y	z	500

Expresamos la proporcionalidad:

$$\frac{5000}{x} = \frac{3000}{y} = \frac{2000}{z} = \frac{10000}{500} = 20$$

Para calcular cualquiera de las incógnitas, buscamos una proporción:

$$\frac{5000}{x} = 20 \Rightarrow x = \frac{5000}{20} = 250$$

$$\frac{3000}{y} = 20 \Rightarrow y = \frac{3000}{20} = 150$$

$$\frac{2000}{z} = 20 \Rightarrow z = \frac{2000}{20} = 100$$

La muestra debe estar compuesta de 250 conductores con antigüedad superior a 10 años, 150 entre 3 y 10 años y 100 con antigüedad inferior a 3 años.

- (b) En los 100 conductores con menos de 3 años de antigüedad se tiene una media de tiempo de reacción de 1.2 segundos.

X = Tiempo de reacción. $X = N(\mu, 0.3)$.

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0588$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (1,2 - 0,0588, 1,2 + 0,0588)$$

El intervalo de confianza es (1,1412, 1,2588).

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A .**(1.5 puntos)**(b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - I$.**(2 puntos)**(a) Para que A no tenga inversa el determinante de la matriz A debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2b$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3 - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

(b) Para $b = 1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Esta matriz tiene inversa, ya que su determinante vale $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$

Por lo que podemos despejar en la ecuación.

$$AX = A^3 - I \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A^3 - I) \Rightarrow X = A^{-1}(A^3 - I)$$

Necesitamos calcular A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+2 & 1+3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+6 & 4 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+8 & 6+4 & 3+12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8+22 & 16+4 & 8+33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

También necesitamos calcular la inversa de A :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{3-2} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos resolviendo la ecuación matricial:

$$X = A^{-1}(A^3 - I) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-30 & 30-20 & 45-40 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20+30 & -20+20 & -30+40 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO (b)

Seguir despejando en $X = A^{-1}(A^3 - I) = A^{-1}A^3 - A^{-1}I = A^2 - A^{-1}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^2 - A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \quad 1 \leq t \leq 6$$

donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta.

(2 puntos)

(b) Calcular las asíntotas de la función $S(t)/(t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$.

(1 punto)

(a) La función tiene un mínimo en $t = 5$, esto significa que la derivada se anula.

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t \Rightarrow S'(t) = 3At^2 - 4Bt + 5$$

$$S'(5) = 0 \Rightarrow 75A - 20B + 5 = 0 \Rightarrow 15A - 4B + 1 = 0$$

Además, la producción es 0 en $t = 5$.

$$S(5) = 0 \Rightarrow A \cdot 5^3 - 2B \cdot 5^2 + 25 = 0 \Rightarrow 125A - 50B + 25 = 0 \Rightarrow 5A - 2B + 1 = 0$$

Juntamos las dos condiciones halladas y resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 15A - 4B + 1 = 0 \\ 5A - 2B + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ \hline -15A + 6B - 3 = 0 \\ 15A - 4B + 1 = 0 \\ \hline 2B - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15A - 4B + 1 = 0 \\ 2B - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15A - 4B + 1 = 0 \\ B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 15A - 4 + 1 = 0 \Rightarrow 15A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(b) Según los datos del apartado anterior la función $S(t)$ queda como $S(t) = \frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t$.

Y la función de la que queremos hallar las asíntotas es:

$$f(t) = \frac{S(t)}{t^2(t-2)} = \frac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^2(t-2)} = \frac{t^3 - 10t^2 + 25t}{5t^2(t-2)} = \frac{t(t^2 - 10t + 25)}{5t^2(t-2)} = \frac{t^2 - 10t + 25}{5t(t-2)}$$

- **Asíntota vertical.** $t = a$.

Como el dominio de la función $f(t)$ es $(1, \infty)$ la asíntota es $t = 2$.

$t = 0$ no pertenece al intervalo de definición $(1, \infty)$.

- **Asíntota horizontal.** $y = b$.

$$b = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - 10t + 25}{5t(t-2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{5t(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cancel{t^2}}{5\cancel{t}t} = \frac{1}{5}$$

La asíntota horizontal es $y = \frac{1}{5}$

- **Asíntota oblicua.** $y = mt + n$

No hay por existir una asíntota horizontal.

PROBLEMA 3

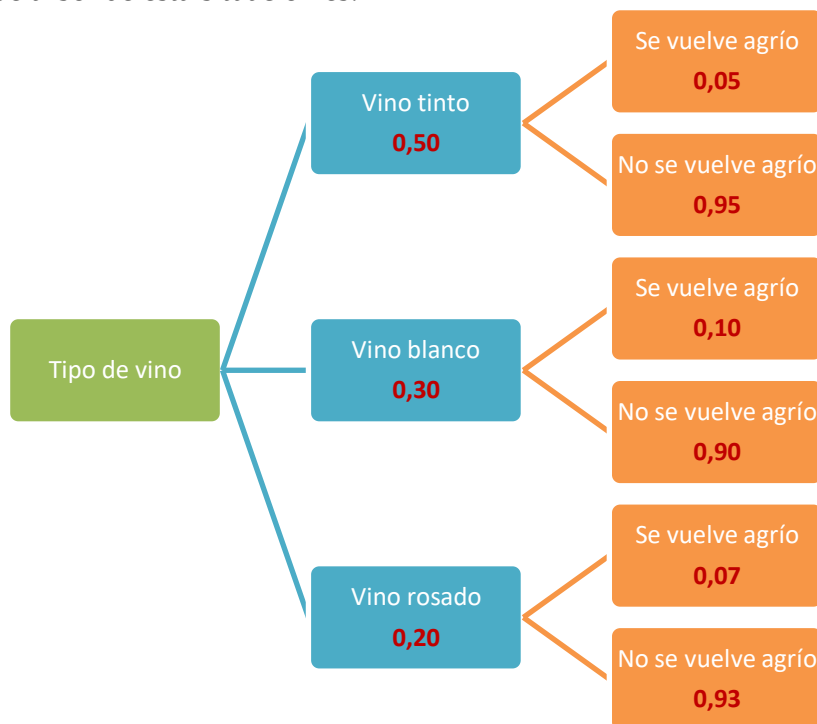
En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado. Mediante muestreo estratificado con afijación proporcional

(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto? **(1.5 puntos)**

El diagrama de árbol de esta situación es:



A partir de este resumen de datos, respondemos a las preguntas.

(a) Esta probabilidad aparece reflejada en la rama central del diagrama de árbol.

$$P(\text{Sea vino blanco y agrio}) = P(\text{Sea vino blanco}) \cdot P(\text{Sea vino agrio/ blanco}) = \\ = 0,3 \cdot 0,1 = \boxed{0,03}$$

(b) Como se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, queda en buen estado el 95 %. La probabilidad pedida vale 0,95.

(c) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Vino tinto /Vino agrio}) = \frac{P(\text{Vino tinto y sea vino agrio})}{P(\text{Vino agrio})} = \\ = \frac{0,50 \cdot 0,05}{0,50 \cdot 0,05 + 0,30 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,07} = \frac{250}{250 + 300 + 140} = \frac{250}{690} = \frac{25}{69} = \boxed{0,36}$$



EBAU Ordinaria 2019
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m³/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

(c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$. (2 puntos)
- (b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$. (1.5 puntos)

PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \leq 8 \end{cases}$$

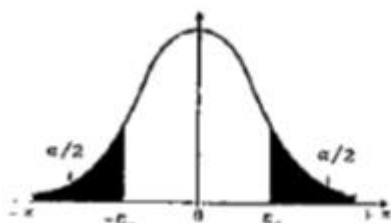
siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las constantes A y B . (2 puntos)
- (b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$. (1 punto)

PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. (2.5 puntos)
- (b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? (1 punto)



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	"	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.475	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.859
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

Llamemos x = número de cocinas vitrocerámicas; y = número de cocinas inducción.

Las restricciones de la situación son:

- El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas $\rightarrow x + y \leq 20$
- El número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12 $\rightarrow y \leq 12$
- Dispone de 3000 € para comprar las cocinas: vitro cuesta 100 € e inducción 200 € $\rightarrow 100x + 200y \leq 3000$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 20 \\ y \leq 12 \\ 100x + 200y \leq 3000 \Rightarrow x + 2y \leq 30 \end{array} \right\}$$

Por cada vitrocerámica obtiene un beneficio del 30% de 100 €, es decir, 30 €. Con “ x ” vitrocerámicas obtendrá un beneficio de $30x$.

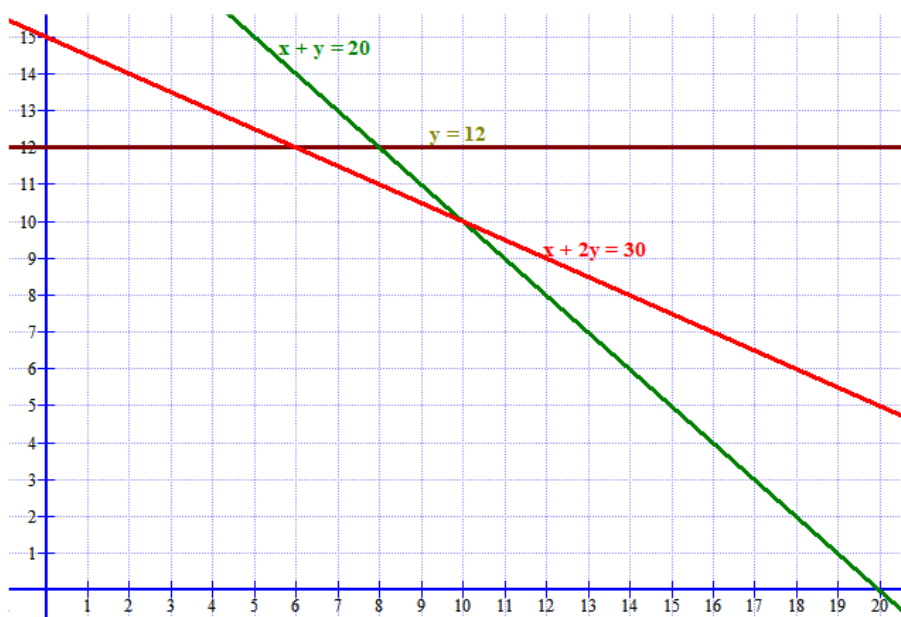
Por cada cocina de inducción obtiene un beneficio del 25 % de 200 €, es decir, 50 €. Con “ y ” cocinas de inducción obtendrá un beneficio de $50y$.

La función a maximizar es el beneficio $\rightarrow B(x, y) = 30x + 50y$

Dibujemos las rectas asociadas a cada restricción:

x	$y = 20 - x$
0	20
20	0

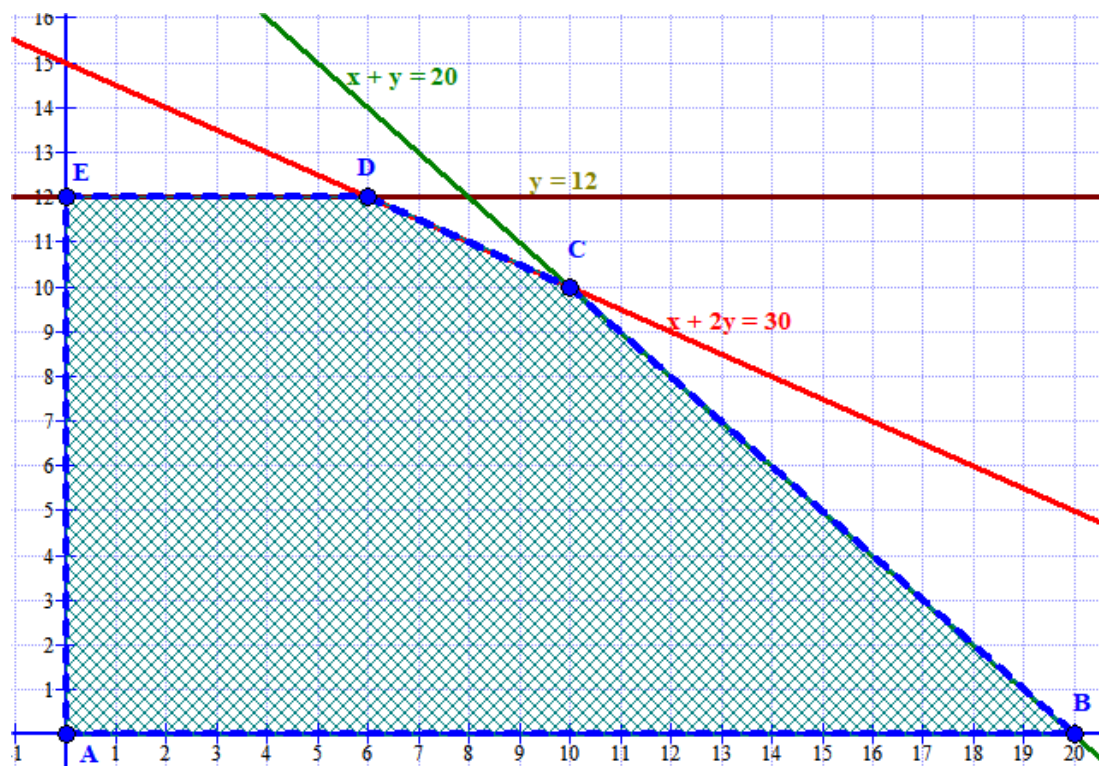
x	$y = (30 - x) / 2$
0	15
30	0



El punto (5,5) cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \geq 0; 5 \geq 0 \\ 5 + 5 \leq 20 \\ y \leq 12 \\ 5 + 2 \cdot 5 \leq 30 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona coloreada del dibujo.



Los vértices candidatos a maximizar el beneficio son $A(0,0)$, $B(20,0)$, $E(0,12)$. D y C los hallamos resolviendo sendos sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} y = 12 \\ x + 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 24 = 30 \Rightarrow x = 6 \text{ El punto } D(6, 12)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 20 - y \\ x + 2y = 30 \end{array} \Rightarrow 20 - y + 2y = 30 \Rightarrow y = 30 - 20 = 10 \Rightarrow x = 20 - 10 = 10$$

El punto $C(10,10)$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 30x + 50y$ en cada uno de los vértices.

$$A(0,0) \Rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(20,0) \Rightarrow B(x, y) = 600 + 0 = 600$$

$$C(10,10) \Rightarrow B(x, y) = 300 + 500 = 800$$

$$D(6,12) \Rightarrow B(x, y) = 180 + 600 = 780$$

$$E(0,12) \Rightarrow B(x, y) = 600$$

El máximo beneficio se produce en el vértice $C(10, 10)$. Con 10 cocinas vitrocerámicas y 10 cocinas de inducción obtenemos un beneficio máximo de 800 €.

PROBLEMA 2

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tago ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**
 (b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

- (a) Derivamos la función y buscamos cuando se anula.

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \Rightarrow C'(t) = 6t^2 - 42t + 60$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 \\ \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

Veamos cual es máximo y cual mínimo estudiando el signo de la derivada antes de 2, entre 2 y 5 y después de 5.

En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 6 - 42 + 60 = 22 > 0$ la función crece.

En $(2, 5)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $C'(3) = 54 - 126 + 60 = -12 < 0$ la función decrece.

En $(5, 6)$ tomamos $x = 5,5$ y la derivada vale $C'(5,5) = 6 \cdot 30,25 - 231 + 60 = 10,5 > 0$ la función crece.



Valoramos el caudal a las 0 horas y 6 horas: $C(0) = 20$; $C(6) = 432 - 21 \cdot 36 + 360 + 20 = 56$.

El máximo relativo en caudal se produce a las 2 horas y el mínimo relativo a las 5 horas.

Veamos el caudal en esas horas.

$$C(2) = 16 - 84 + 120 + 20 = 72 \quad C(5) = 250 - 525 + 300 + 20 = 45$$

La hora de mínimo caudal es la hora 0 y la de máximo caudal es a las 2 horas.

- (b) El caudal máximo es de 72 y el mínimo es de 20.
 (c) La función no corta el eje de abscisas en ningún momento entre 3 y 5 ya que toma valores positivos. En 3 vale $C(3) = 54 - 188 + 180 + 20 = 66$ y luego baja hasta los 45 del mínimo y vuelve a subir hasta los 56 que vale el caudal en 6.

$$\begin{aligned} \int_3^5 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 dt &= \left[2 \frac{t^4}{4} - 21 \frac{t^3}{3} + 60 \frac{t^2}{2} + 20t \right]_3^5 = \left[\frac{t^4}{2} - 7t^3 + 30t^2 + 20t \right]_3^5 = \\ &= \left[\frac{5^4}{2} - 7 \cdot 5^3 + 30 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \right] - \left[\frac{3^4}{2} - 7 \cdot 3^3 + 30 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 \right] = \\ &= \frac{625}{2} - 875 + 750 + 100 - \frac{81}{2} + 189 - 270 - 60 = 106 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de 106 unidades cuadradas.

PROBLEMA 3

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**
 (b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**
 (c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**

Aplicamos la regla de Laplace en cada uno de los apartados del ejercicio.

$$(a) \quad P(\text{Un pino elegido al azar esté infectado por la oruga}) = \frac{48}{120} = \boxed{0,4}$$

$$(b) \quad P(\text{Sea elegido un árbol y esté infectado}) = \frac{25+9+48}{50+30+120} = \frac{82}{200} = \boxed{0,41}$$

$$(c) \quad P(\text{Sea un pino, sabiendo que está infectado}) = \frac{\text{número de pinos infectados}}{\text{número de árboles infectados}} = \frac{48}{25+9+48} = \frac{48}{82} = \boxed{0,585}$$

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$.**(2 puntos)**(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.**(1.5 puntos)**(a) Para que no exista la inversa $(A \cdot B)^{-1}$ debe ser su determinante nulo $|A \cdot B| = 0$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+2x & 1+0+2 \\ 0+0-x & 2+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2}$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1+2x+3x = 0 \Rightarrow -1+5x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

No existe inversa para $x = \frac{1}{5}$ (b) Para $x = 1$ el producto $A \cdot B$ queda $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1+2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto tiene matriz inversa.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+3 = 4 \neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^t)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \leq 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las constantes A y B . **(2 puntos)**
 (b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$. **(1 punto)**

- (a) Como para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros, esto significa

que $F(5) = 13 \Rightarrow 3 + 5A = 13 \Rightarrow 5A = 10 \Rightarrow A = \frac{10}{5} = 2$

Para que la función sea continua en $x = 5$ debe cumplirse:

- Existe $F(5) = 13$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 5^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 3 + 2 \cdot 5 = 13$
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} 53 + 2x + Bx^2 = 53 + 10 + 25B = 25B + 63$

- Los tres valores deben ser iguales. $25B + 63 = 13 \Rightarrow 25B = -50 \Rightarrow B = -\frac{50}{25} = -2$

Los valores buscados son $A = 2$ y $B = -2$.

- (b) Buscamos las asíntotas de la función $f(x) = \frac{F(x)}{x^2 - 3x - 4} = \frac{3 + 2x}{x^2 - 3x - 4}$.

Hallamos primero el dominio, que son todos los números reales del intervalo $[2, 5]$ menos los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \\ = \frac{3 - 5}{2} = -1 \end{cases}$$

De estos dos valores solo incluimos el $x = 4$, ya que $x = -1$ no está en el intervalo $[2, 5]$.

$$\text{Dominio} = [2, 4) \cup (4, 5]$$

Asíntotas verticales. $x = a$.

La asíntota vertical es $x = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3 + 2x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3 + 2x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**
 (b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**

Sea X = Tiempo en horas que tarda en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono.

$$X = N(\mu, 24)$$

- (a) $\bar{x} = 36$ h; $n = 100$

Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0						1.960	1.881	1.802	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.441	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}} = 4,704$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (36 - 4,704, 36 + 4,704)$$

El intervalo de confianza es (31'296, 40'704)

- (b) Como la amplitud del intervalo es 5 el error es la mitad, es decir, 2,5 h entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,5 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{24}{\sqrt{n}} = 2,5 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{24}{2,5} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1,96 \cdot \frac{24}{2,5} \right)^2 = 354,04$$

El tamaño mínimo de la muestra es 355 individuos.



EBAU Extraordinaria 2018
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A lo produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:

- (a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**
(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0,5 puntos)**

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la disminución del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1900 es la siguiente:

$$E(t) = \begin{cases} -1,6t^2 + At + 9656 & \text{si } 0 \leq t \leq 60 \\ 16400 - Bt & \text{si } 60 < t \leq 110 \end{cases}$$

donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de km^2 y t el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1937 ($t=37$).

- (a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta. **(2 puntos)**
(b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Onedrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: 'Retratos' o 'Paisajes'. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Onedrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

- (a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato? **(1 punto)**
(b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box? **(1 punto)**
(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Onedrive? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = 2A$. **(2 puntos)**
 (b) Hallar la matriz inversa de A . **(1.5 puntos)**
 Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la función:

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400, \quad 14 \leq t \leq 21$$

Siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de realización del control.

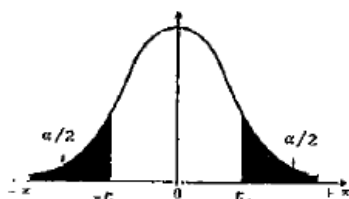
Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua. **(1.5 puntos)**
 (b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2000, 1200 y 1000 hogares respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

- (a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra? **(0.5 puntos)**
 (b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio? **(0.5 puntos)**
 (c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. **(2.5 puntos)**
 Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.475	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A lo produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:

- (a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**
 (b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0,5 puntos)**

Justificar las respuestas.

- (a) Llamemos x = número de lotes A e y = número de lotes B.

La función a maximizar es el beneficio: $B(x, y) = 30x + 40y$

Las restricciones de la situación planteada son:

$$x \geq 0; y \geq 0$$

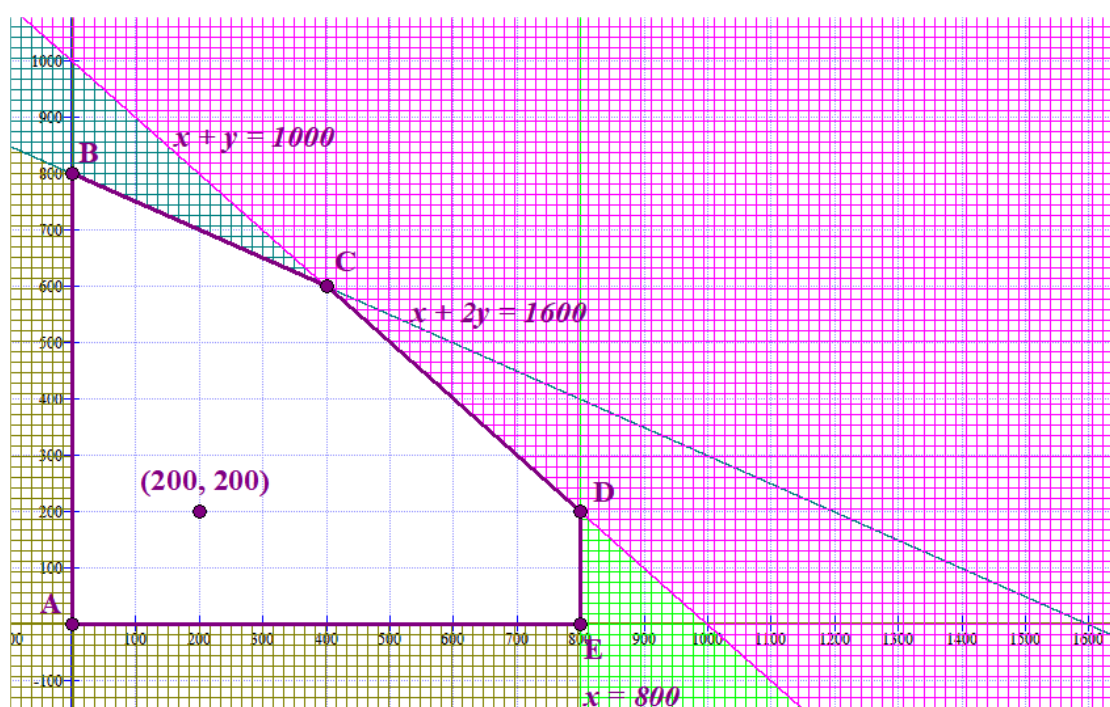
$$\text{Dispone como máximo de 1600 limoneros} \rightarrow x + 2y \leq 1600$$

$$\text{Dispone como máximo de 800 naranjos} \rightarrow x \leq 800$$

$$\text{Dispone como máximo de 1000 manzanos} \rightarrow x + y \leq 1000$$

Hacemos una tabla de valores para cada recta asociada a las restricciones y dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

x	$y = \frac{1600 - x}{2}$	x	$y = 1000 - x$
0	800	0	1000
1600	0	1000	0
400	600	400	600



La región factible es la zona blanca del dibujo. Ya que el punto (200, 200) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 \geq 0 \\ 200 \geq 0 \\ 200 + 400 \leq 1600 \\ 200 \leq 800 \\ 200 + 200 \leq 1000 \end{array} \right\}$$

Los vértices de esta región tienen coordenadas:

$$A(0,0); B(0, 800); C(400, 600); D(800, 200); E(800, 0)$$

Valoramos el beneficio $B(x, y) = 30x + 40y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0, 800) \rightarrow B(0,800) = 0 + 32000 = 32000$$

$$C(400, 600) \rightarrow B(400,600) = 12000 + 24000 = 36000$$

$$D(800, 200) \rightarrow B(800,200) = 24000 + 8000 = 32000$$

$$E(800, 0) \rightarrow B(800,0) = 24000$$

El máximo beneficio es 36000 € en el punto C, que se obtiene con 400 lotes A y 600 lotes B.

(b) Es de 36000 €.

PROBLEMA 2

En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la disminución del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1900 es la siguiente:

$$E(t) = \begin{cases} -1,6t^2 + At + 9656 & \text{si } 0 \leq t \leq 60 \\ 16400 - Bt & \text{si } 60 < t \leq 110 \end{cases}$$

donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de km^2 y t el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1937 ($t=37$).

(a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta.

(2 puntos)

(b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo.

(1 punto)

(a) La función $E(t)$ tiene un máximo en $t = 37$. La derivada primera se anula en $t = 37$ y es negativa la derivada segunda.

$$E(t) = -1,6t^2 + At + 9656 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 60$$

$$E'(t) = -3,2t + A$$

$$E'(37) = 0 \Rightarrow -3,2 \cdot 37 + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 118,4}$$

También se cumple: $E''(t) = -3,2 < 0$

La función es continua en $t = 60$, se debe cumplir:

- Existe $E(60) = -1,6 \cdot 60^2 + 118,4 \cdot 60 + 9656 = 11000$
- Existe $\lim_{t \rightarrow 60^-} E(t) = \lim_{t \rightarrow 60^-} -1,6t^2 + 118,4t + 9656 = 11000$
- Existe $\lim_{t \rightarrow 60^+} E(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} 16400 - Bt = 16400 - 60B$

$$\bullet \text{ Debe ser iguales } \rightarrow 16400 - 60B = 11000 \Rightarrow -60B = -5400 \Rightarrow \boxed{B = \frac{5400}{60} = 90}$$

Los valores buscados son $A = 118,4$ y $B = 90$.

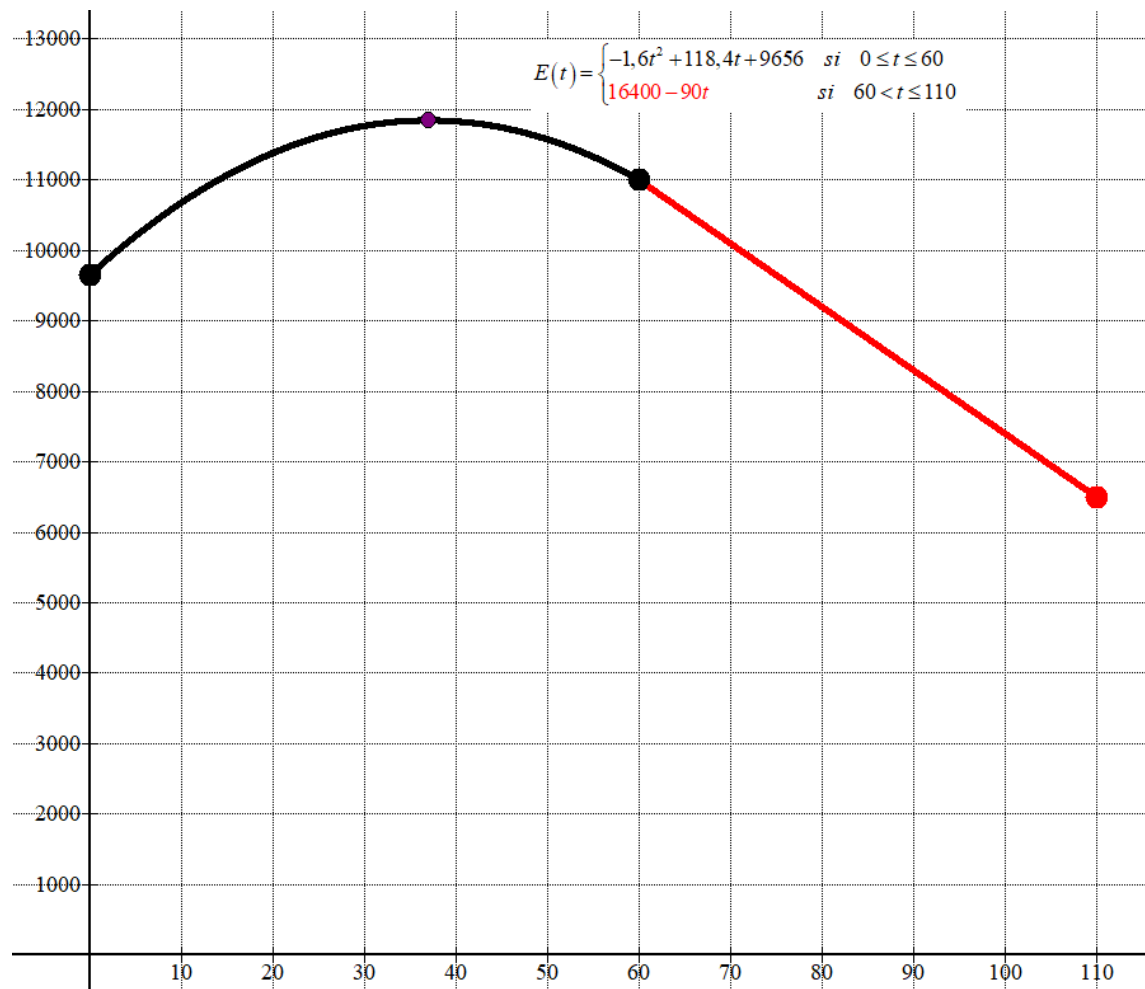
$$\text{La función queda } E(t) = \begin{cases} -1,6t^2 + 118,4t + 9656 & \text{si } 0 \leq t \leq 60 \\ 16400 - 90t & \text{si } 60 < t \leq 110 \end{cases}$$

$$(b) \text{ La función es } E(t) = \begin{cases} -1,6t^2 + 118,4t + 9656 & \text{si } 0 \leq t \leq 60 \\ 16400 - 90t & \text{si } 60 < t \leq 110 \end{cases}$$

Esta es una función a trozos que es un trozo de parábola y un trozo de recta. Obtenemos una tabla de valores.

$0 \leq t \leq 60$		$60 < t \leq 110$	
t	$E(t) = -1,6t^2 + 118,4t + 9656$	t	$E(t) = 16400 - 90t$
0	9656	70	10100
10	10680	110	6500
37	11847,4	60	11000
60	11000		

El vértice de la parábola está en $t = 37$. Y la función es continua.



PROBLEMA 3

Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Onedrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: 'Retratos' o 'Paisajes'. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Onedrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

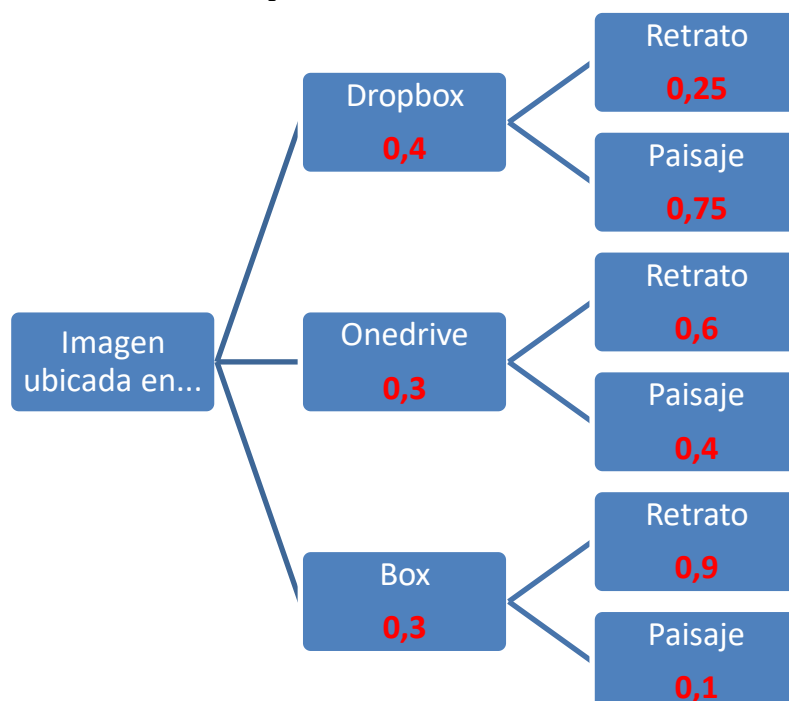
(a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato? **(1 punto)**

(b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box? **(1 punto)**

(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Onedrive? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

El diagrama de árbol asociado al problema es:



(a)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Retrato}) &= P(\text{Esté en Dropbox y sea retrato}) + P(\text{Esté en Onedrive y sea retrato}) + \\
 &+ P(\text{Esté en Box y sea retrato}) = P(\text{Esté en Dropbox})P(\text{Sea retrato} / \text{Esta en Dropbox}) + \\
 &+ P(\text{Esté en Onedrive})P(\text{Sea retrato} / \text{Esta en Onedrive}) + \\
 &+ P(\text{Esté en Box})P(\text{Sea retrato} / \text{Esta en Box}) = \\
 &= 0,4 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,1 + 0,18 + 0,27 = \boxed{0,55}
 \end{aligned}$$

(b)

$$P(\text{Sea paisaje y esté en Box}) = P(\text{Esté en Box})P(\text{Sea paisaje} / \text{Está en Box}) = 0,3 \cdot 0,1 = \boxed{0,03}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Esté en Onedrive} / \text{Es paisaje}) &= \frac{P(\text{Esté en Onedrive y es paisaje})}{P(\text{Es paisaje})} = \\
 &= \frac{0,3 \cdot 0,4}{1 - P(\text{Es retrato})} = \frac{0,12}{1 - 0,55} = \frac{0,12}{0,45} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15} = \boxed{0,266}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = 2A$. **(2 puntos)**
 (b) Hallar la matriz inversa de A . **(1.5 puntos)**
 Justificar las respuestas.

- (a) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - (0 + 0 - 2) = -2 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero existe A^{-1} .

Despejamos X en la ecuación planteada.

$$A \cdot X + A^2 = 2A \Rightarrow A^{-1}A \cdot X + A^{-1}A \cdot A = A^{-1}2A \Rightarrow X + A = 2Id$$

$$X = 2Id - A$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Como el determinante de A es distinto de cero, sabemos que existe la inversa.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la función:

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400, \quad 14 \leq t \leq 21$$

Siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de realización del control.

Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua. **(1.5 puntos)**
 (b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas. **(1 punto)**

- (a) Utilizamos la derivada de $C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400$, $14 \leq t \leq 21$ para determinar los puntos críticos.

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400 \Rightarrow C'(t) = -12t^2 + 420t - 3600$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -12t^2 + 420t - 3600 = 0 \Rightarrow -t^2 + 35t - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{-2} = \frac{-35 \pm 5}{-2} = \begin{cases} t_1 = \frac{-35+5}{-2} = 15 \\ t_2 = \frac{-35-5}{-2} = 20 \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la derivada segunda.

$$C'(t) = -12t^2 + 420t - 3600 \Rightarrow C''(t) = -24t + 420$$

$$\begin{cases} t_1 = 15 \rightarrow C''(15) = -360 + 420 = 60 > 0 \Rightarrow t_1 = 15 \text{ es un mínimo} \\ t_2 = 20 \rightarrow C''(20) = -480 + 420 = -60 < 0 \Rightarrow t_2 = 20 \text{ es un máximo} \end{cases}$$

Se alcanza un consumo mínimo de agua a las 15 horas y máximo consumo a las 20 horas.

- (b) Sustituimos en la función $C(t)$

$$t_1 = 15 \rightarrow C(15) = -4 \cdot 15^3 + 210 \cdot 15^2 - 3600 \cdot 15 + 20400 = 150 \text{ es el consumo mínimo}$$

$$t_2 = 20 \rightarrow C(20) = -4 \cdot 20^3 + 210 \cdot 20^2 - 3600 \cdot 20 + 20400 = 400 \text{ es el consumo máximo}$$

- (c) La función no corta el eje OX entre 15 y 20. El área pedida es una integral definida.

$$\text{Área} = \int_{15}^{20} (-4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400) dt = \left[-t^4 + 70t^3 - 1800t^2 + 20400t \right]_{15}^{20} =$$

$$= \left[-20^4 + 70 \cdot 20^3 - 1800 \cdot 20^2 + 20400 \cdot 20 \right] - \left[-15^4 + 70 \cdot 15^3 - 1800 \cdot 15^2 + 20400 \cdot 15 \right] = \boxed{1375 u^2}$$

PROBLEMA 3

En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2000, 1200 y 1000 hogares respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

- (a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra? **(0.5 puntos)**
- (b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio? **(0.5 puntos)**
- (c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. **(2.5 puntos)**

- (a) Expresamos en una tabla todos los datos

	Barrio A	Barrio B	Barrio C	Barrio D	TOTAL
Hogares	800	2000	1200	1000	5000
Muestra	a	b	c	d	400

Expresamos la proporcionalidad:

$$\frac{800}{a} = \frac{2000}{b} = \frac{1200}{c} = \frac{1000}{d} = \frac{5000}{400}$$

Para calcular cualquiera de las incógnitas, buscamos una proporción donde conozcamos 3 de los 4 datos:

$$\begin{aligned}\frac{800}{a} &= \frac{5000}{400} \Rightarrow 320000 = 5000a \Rightarrow a = \frac{320000}{5000} = 64 \\ \frac{2000}{b} &= \frac{5000}{400} \Rightarrow 800000 = 5000b \Rightarrow b = \frac{800000}{5000} = 160 \\ \frac{1200}{c} &= \frac{5000}{400} \Rightarrow 480000 = 5000c \Rightarrow c = \frac{480000}{5000} = 96 \\ \frac{1000}{d} &= \frac{5000}{400} \Rightarrow 400000 = 5000d \Rightarrow d = \frac{400000}{5000} = 80\end{aligned}$$

Por tanto, en la muestra tomaríamos 64 hogares del barrio A, 160 del barrio B, 96 del barrio C y 80 del barrio D.

- (b) $\frac{64}{160} = 0,4 = 40\%$. Reciclan unos $0,4 \cdot 2000 = 800$ hogares

- (c) Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95 %

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\text{El Error es } z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{64}} = 0,12$$

$$\text{El intervalo de confianza es } (p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,4 - 0,12, 0,4 + 0,12) = (0,28, 0,52)$$

Reciclan entre $0,28 \cdot 2000 = 560$ y $0,52 \cdot 2000 = 1040$ hogares.



EBAU Ordinaria 2018
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

(a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

El consumo medio anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1960 a 2000 se modeliza con la función

$$F(t) = 0,025t^3 - At^2 + Bt + 654, \quad 0 \leq t \leq 40$$

donde $F(t)$ es el número de litros y t el tiempo desde el año 1960. Se sabe que en el año 1970 ($t = 10$) el consumo fue 711.5 litros y en 1990 ($t = 30$) el consumo fue 526.5 litros.

(a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 tn por hectárea. Se sabe que el número de tn por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95%. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0.5? **(1 punto)**

.Justificar la respuesta



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X - B = B \cdot X + A$. Justificar la respuesta. **(3,5 puntos)**

PROBLEMA 2

Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente:

$$I(t) = -3t^2 + 62t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$G(t) = t^2 - 10t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10$$

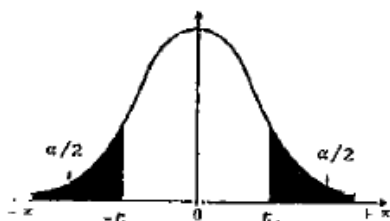
donde I representa los ingresos y G , los gastos. Se pide, razonando las respuestas:

- (a) La función que expresa el beneficio de la empresa. **(0.5 puntos)**
 (b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende? **(1.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $G(t)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,5]$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

- (a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana? **(1 punto)**
 (b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(1 punto)**
 (c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea? **(1.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

- (a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**
 (b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

- (a) Es un problema de programación lineal, donde las variables son x = número de botellas de vino blanco e y = número de botellas de vino tinto.

La función que deseamos maximizar es el beneficio obtenida por la venta de toda la producción.

$$B(x, y) = 3x + 2,5y$$

Las restricciones son:

$$x \geq 0; y \geq 0$$

El número de botellas de vino blanco debe ser inferior al de vino tinto $\rightarrow x < y$

El máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000 $\rightarrow x + y \leq 60000$

No pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto $\rightarrow y \leq 40000$

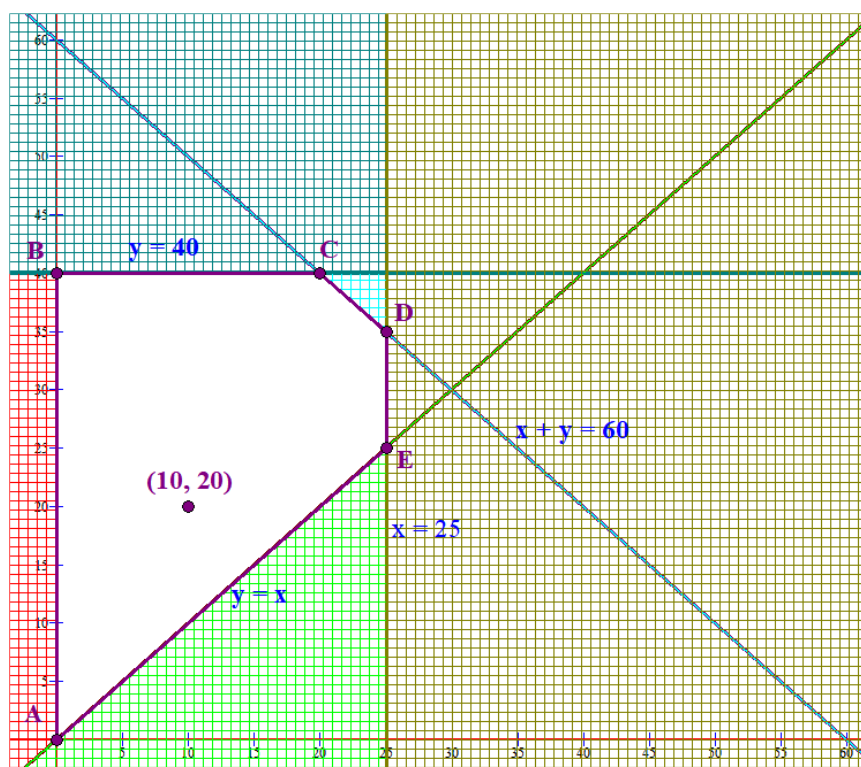
No pueden producirse más de 25000 de vino blanco $\rightarrow x \leq 25000$

Si expresamos las restricciones en miles de botellas serian:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x < y \\ x + y \leq 60 \\ y \leq 40 \\ x \leq 25 \end{array} \right\}$$

Hacemos una tabla para dibujar cada una de las rectas y determinamos sus puntos de corte.

x	$y = x$	x	$y = 60 - x$	x	$y = 40$
0	0	0	60	0	40
25	25	30	30	40	40
30	30	25	35		
40	40	20	40		



El punto $(10, 20)$ cumple todas las restricciones.

$$10 \geq 0$$

$$20 \geq 0$$

$$10 < 20$$

$$10 + 20 \leq 60$$

$$20 \leq 40$$

$$10 \leq 25$$

Por lo que la región factible es la zona blanca del dibujo.

Las coordenadas de los vértices son: $A(0, 0)$; $B(40, 0)$; $C(20, 40)$; $D(25, 35)$ y $E(25, 25)$.

Valorando los beneficios en cada uno de ellos podremos encontrar el máximo beneficio de todos los puntos de la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 120$$

$$C(20, 40) \rightarrow B(20, 40) = 60 + 100 = 160$$

$$D(25, 35) \rightarrow B(25, 35) = 75 + 87,5 = 162,5$$

$$E(25, 25) \rightarrow B(25, 25) = 75 + 62,5 = 137,5$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $B(25, 35)$. Con la venta de 25000 botellas de vino blanco y 35000 de vino tinto.

(b) El beneficio máximo es $B(25, 35) = 75 + 87,5 = 162,5$.

Lo que significa un beneficio de 162500 €, dado que 25 y 35 se refiere a 25000 y 35000 botellas de vino blanco y tinto, respectivamente.

PROBLEMA 2

El consumo medio anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1960 a 2000 se modeliza con la función

$$F(t) = 0,025t^3 - At^2 + Bt + 654, \quad 0 \leq t \leq 40$$

donde $F(t)$ es el número de litros y t el tiempo desde el año 1960. Se sabe que en el año 1970 ($t = 10$) el consumo fue 711.5 litros y en 1990 ($t = 30$) el consumo fue 526.5 litros.

- (a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta. **(2 puntos)**
 (b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo. **(1 punto)**

(a) Los datos proporcionados son:

Para $t = 10$ la función vale $F(10)=711.5 \rightarrow$

$$F(10) = 711.5 \Rightarrow 0,025 \cdot 1000 - A \cdot 100 + B \cdot 10 + 654 = 711.5 \Rightarrow 25 - 100A + 10B + 654 = 711.5 \\ -100A + 10B = 32.5$$

Para $t = 30$ la función vale $F(30)=526.5 \rightarrow$

$$F(30) = 526.5 \Rightarrow 0,025 \cdot 27000 - A \cdot 900 + B \cdot 30 + 654 = 526.5 \Rightarrow 675 - 900A + 30B + 654 = 526.5 \\ -900A + 30B = -802.5$$

Resolvamos el sistema formado por estas dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} -900A + 30B = -802.5 \\ -100A + 10B = 32.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -9 \cdot 2^{\text{a}} \text{ ecuación} + 1^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ 900A \quad -90B = -292.5 \\ -900A \quad +30B = -802.5 \\ \hline -60B = -1095 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow -60B = -1095 \Rightarrow B = \frac{1095}{60} = 18.25$$

$$\Rightarrow -100A + 182.5 = 32.5 \Rightarrow -100A = -150 \Rightarrow A = \frac{150}{100} = 1.5$$

Los valores buscados son $A = 1,5$ y $B = 18,25$

(b) Determinemos los puntos críticos de esta función.

$$F(t) = 0,025t^3 - 1,5t^2 + 18,25t + 654 \Rightarrow F'(t) = 0,075t^2 - 3t + 18,25$$

$$F'(t) = 0 \Rightarrow 0,075t^2 - 3t + 18,25 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 5,475}}{0,15} = \frac{3 \pm 1,877}{0,15} = \begin{cases} = \frac{3+1,877}{0,15} = 32,5 \\ = \frac{3-1,877}{0,15} = 7,5 \end{cases}$$

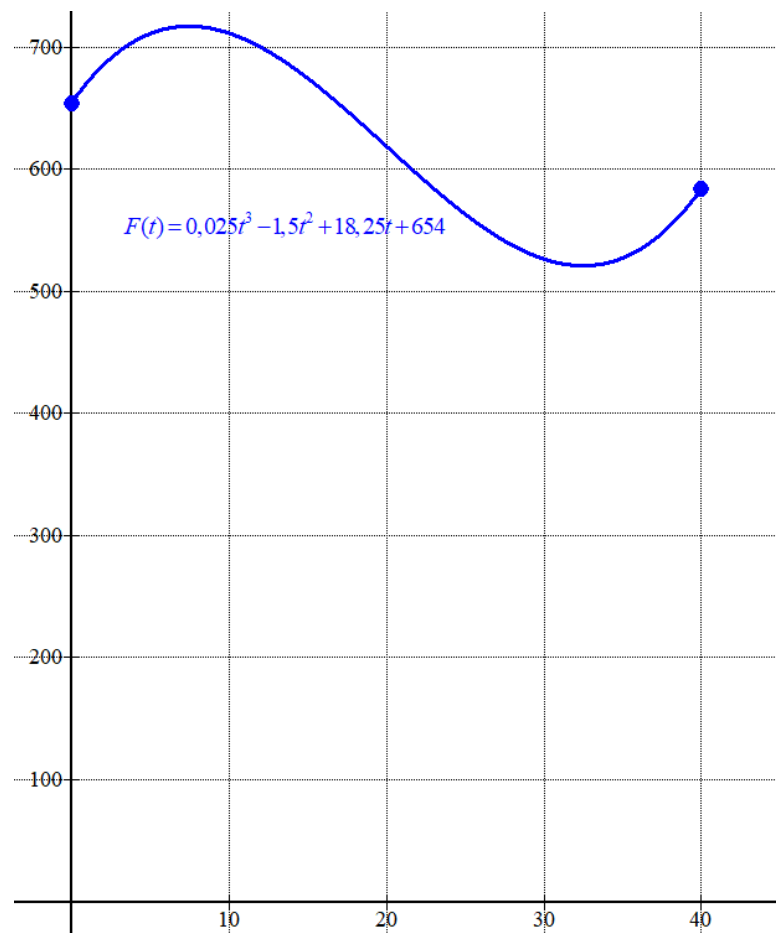
La derivada segunda es $F'(t) = 0,075t^2 - 3t + 18,25 \Rightarrow F''(t) = 0,15t - 3$

En $t = 32,5$ tenemos que $F''(32,5) = 4,875 - 3 > 0$ la función presenta un mínimo en $(32,5, 521)$

En $t = 7,5$ tenemos que $F''(7,5) = 1,125 - 3 < 0$ la función presenta un máximo en $(7,5, 713)$

Hacemos una tabla de valores de la función y representamos su gráfica.

t	$F(t) = 0,025t^3 - 1,5t^2 + 18,25t + 654$
0	654
7,5	713,04
32,5	520,95
40	584



PROBLEMA 3

Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 tn por hectárea. Se sabe que el número de tn por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95%. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0.5? **(1 punto)**

Justificar la respuesta

(a) $X =$ Toneladas de tomate producido por hectárea. $X = N(\mu, 2)$

El tamaño de la muestra es $n = 37$ y la media obtenida en la muestra es $\bar{x} = 78$.

Si el nivel de confianza es del 95% hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\text{El error es } z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{37}} = 0,644...$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (78 - 0,644, 78 + 0,644) = (77,356, 78,644)$$

(b) La longitud del intervalo es el doble del Error, por lo que el error debe ser 0,25.

Si el nivel de confianza es el mismo sabemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{3,92}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{3,92}{\sqrt{n}} = 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3,92}{0,25} \Rightarrow n = \left(\frac{3,92}{0,25} \right)^2 = 245,86$$

El tamaño de la muestra debe ser un mínimo de 246 personas.

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X - B = B \cdot X + A$. Justificar la respuesta. **(3,5 puntos)**Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X - B = B \cdot X + A \Rightarrow AX - BX = A + B \Rightarrow (A - B)X = A + B$$

Veamos si la matriz $A - B$ tiene inversa y podemos hallar la matriz X utilizando la inversa.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con determinante } |A - B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Existe su inversa, la calculamos.

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - B)^t}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{-3}$$

Terminamos de despejar X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$(A - B)X = A + B \Rightarrow (A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}(A + B) \Rightarrow X = (A - B)^{-1}(A + B)$$

$$X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE HACERLOConsideramos que la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sustituimos en la ecuación matricial y la resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c-1 & 2b+d-2 \\ -a+c-2 & -b+d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c+2 & b+2d+1 \\ 2a+c-1 & 2b+d+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c-1=a+2c+2 \\ 2b+d-2=b+2d+1 \\ -a+c-2=2a+c-1 \\ -b+d-1=2b+d+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=3 \\ b-d=3 \\ -3a=1 \\ -3b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}-c=3 \\ -\frac{2}{3}-d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}-3=c \\ -\frac{2}{3}-3=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\frac{10}{3} \\ d=-\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente:

$$I(t) = -3t^2 + 62t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$G(t) = t^2 - 10t + 120, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde I representa los ingresos y G , los gastos. Se pide, razonando las respuestas:

- (a) La función que expresa el beneficio de la empresa. **(0.5 puntos)**
 (b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende? **(1.5 puntos)**
 (c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $G(t)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,5]$. **(1 punto)**

(a) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) = (-3t^2 + 62t) - (t^2 - 10t + 120) = -3t^2 + 62t - t^2 + 10t - 120$$

$$B(t) = -4t^2 + 72t - 120, \quad 0 \leq t \leq 10$$

(b) Determinamos su derivada y la igualamos a cero.

$$B(t) = -4t^2 + 72t - 120 \Rightarrow B'(t) = -8t + 72$$

$$B(t) = 0 \Rightarrow -8t + 72 = 0 \Rightarrow -8t = -72 \Rightarrow t = \frac{72}{8} = 9$$

$t = 9$ es un posible máximo. Sustituimos este valor en la segunda derivada

$$B'(t) = -8t + 72 \Rightarrow B''(t) = -8, \text{ por lo que } B''(9) = -8 < 0.$$

Como la segunda derivada es negativa el beneficio presenta un máximo en $t = 9$. Su beneficio es $B(9) = -4 \cdot 81 + 72 \cdot 9 - 120 = -324 + 648 - 120 = 204$

Al cabo de 9 años se obtiene un beneficio máximo de 204000 €

(c) La función $G(t) = t^2 - 10t + 120$ es una parábola. La dibujamos, y para ello hallo varios puntos de la misma, incluyendo los posibles puntos de corte con los ejes.

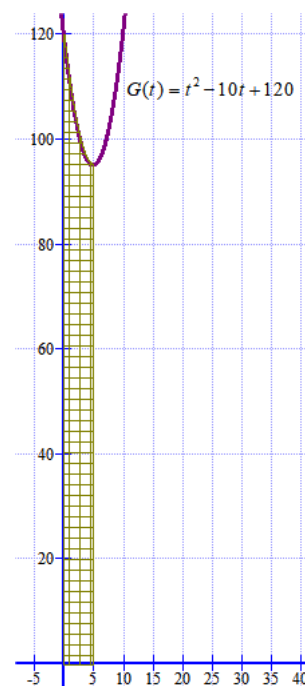
$$G(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 120 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 480}}{2} = \text{No existe}$$

No hay puntos de corte con el eje OX.

t	$G(t) = t^2 - 10t + 120$
0	120
2	104
3	99
5	95

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^5 t^2 - 10t + 120 dt = \left[\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 120t \right]_0^5 = \\ &= \left[\frac{5^3}{3} - 125 + 600 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 + 0 \right] = \frac{1550}{3} = \boxed{516,67 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



PROBLEMA 3

Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

- (a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana? **(1 punto)**
- (b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(1 punto)**
- (c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea? **(1.5 puntos)**

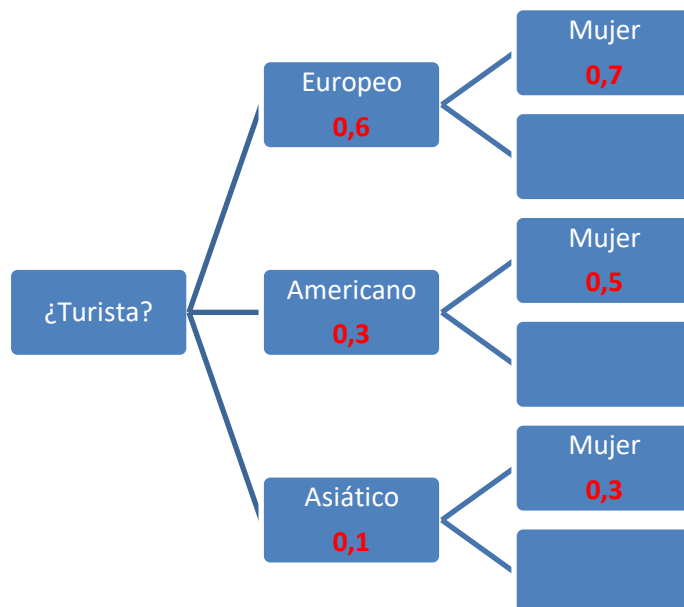
(a) El 50% del 30 % de los turistas son mujeres americanas. La probabilidad de seleccionar una mujer americana es $0,5 \cdot 0,3 = 0,15$.

(b) Mujeres son: el 50% del 30% (mujeres americanas) más el 70% del 60% (mujeres europeas) más el 30% del 10% (mujeres asiáticas).
La probabilidad pedida es $0,5 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,15 + 0,42 + 0,03 = 0,6$

(c) Siendo 100 los turistas habrían 60 que serían mujeres y de ellas 42 serían europeas ($0,7 \cdot 0,6$).
La probabilidad pedida es $42/60 = 0,7$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construyamos el diagrama de árbol.



$$(a) P(\text{Mujer americana}) = P(\text{Americano}) \cdot P(\text{Mujer} / \text{Americano}) = 0,3 \cdot 0,5 = \boxed{0,15}$$

$$(b) P(\text{Mujer}) = P(\text{Mujer americana}) + P(\text{Mujer europea}) + P(\text{Mujer asiática}) = \\ = P(\text{Americano}) \cdot P(\text{Mujer} / \text{Americano}) + P(\text{Europeo}) \cdot P(\text{Mujer} / \text{Europeo}) + \\ + P(\text{Asiático}) \cdot P(\text{Mujer} / \text{Asiático}) = \\ = 0,3 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,15 + 0,42 + 0,03 = \boxed{0,6}$$

$$(c) P(\text{Europea} / \text{Mujer}) = \frac{P(\text{Mujer y Europea})}{P(\text{Mujer})} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,6} = \boxed{0,7}$$



EBAU Extraordinaria 2017
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2016-2017

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A**PROBLEMA 1**

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, se pide:

(a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

(3 puntos)

(b) El valor de dicho beneficio máximo.

(0.5 puntos)

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

En el estudio en un laboratorio del tratamiento con antibióticos frente a una bacteria patógena durante 7 días, se ha encontrado que el número de bacterias vivas (en miles) a lo largo de estos 7 días ha variado de acuerdo con la función:

$$B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80, \quad 1 \leq t \leq 7$$

Siendo B el número de bacterias vivas (en miles) y t el día de realización del estudio. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar los días del estudio en los que se ha observado el número máximo y mínimo de bacterias vivas.

(1.5 puntos)

(b) Hallar los valores de dichos valores máximo y mínimo.

(0.5 puntos)(c) Representar de forma aproximada la función $B(t)$ a lo largo de los 7 días del estudio. **(1 punto)****PROBLEMA 3**

Para realizar el control de calidad en la fabricación de protectores de pantallas de dispositivos móviles se utiliza el intervalo de confianza al 99 % del grosor de los mismos. Se sabe que la distribución del grosor es una normal de desviación típica conocida de 0.1 mm. Una empresa quiere crear su intervalo de confianza y muestrea diez protectores con los siguientes grosores (en mm):

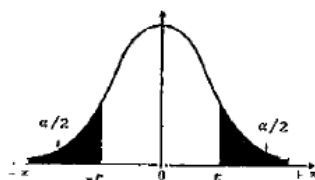
0.50 0.43 0.37 0.27 0.60 0.32 0.31 0.27 0.40 0.36

(a) Calcular el intervalo de confianza al 99% del grosor medio de los protectores. **(2.5 puntos)**

(b) Para que el intervalo de confianza sea útil, su longitud debe ser 0.1. ¿Cuántos protectores necesita muestrear la empresa para obtener esa precisión?

(1 punto)

Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.859
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2016-2017

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B . En caso afirmativo, calcularlas. **(2 puntos)**(b) Resolver la ecuación matricial $AX + B = I$ **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

La demanda de un producto es función de su precio según la expresión

$$D(x) = \begin{cases} Ax - x^2 & \text{si } 20 \leq x \leq 30 \\ 600 - Bx & \text{si } 30 < x \leq 60 \end{cases}$$

donde D denota la demanda en unidades y x el precio en euros. Se sabe que la demanda para $x = 30$ es de 300 unidades y que la función es continua.(a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta. **(1.5 puntos)**(b) Representar gráficamente la demanda en función de x . **(1 punto)**(b) Comprobar si la función $D(x)/(x - 25)$ tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo.Justificar la respuesta. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3

Una región de bosques está dividida en 3 zonas A, B y C. Para el próximo verano la probabilidad de incendio en cada zona es de 0.1, 0.2 y 0.05 respectivamente. En cada zona sólo puede producirse, como máximo, un incendio. Si consideramos que los incendios se producen de forma independiente entre las zonas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio? **(1 punto)**(b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios? **(1 punto)**(c) Si se sabe que ha habido sólo un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, se pide:

(a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

(3 puntos)

(b) El valor de dicho beneficio máximo.

(0.5 puntos)

Justificar las respuestas.

(a) Llamemos x al número de trajes de señora fabricados en 1 día e y al número de trajes de caballero fabricados en 1 día.

Deseamos maximizar los beneficios, que se expresan con la función: $B(x, y) = 150x + 200y$.

Las restricciones son:

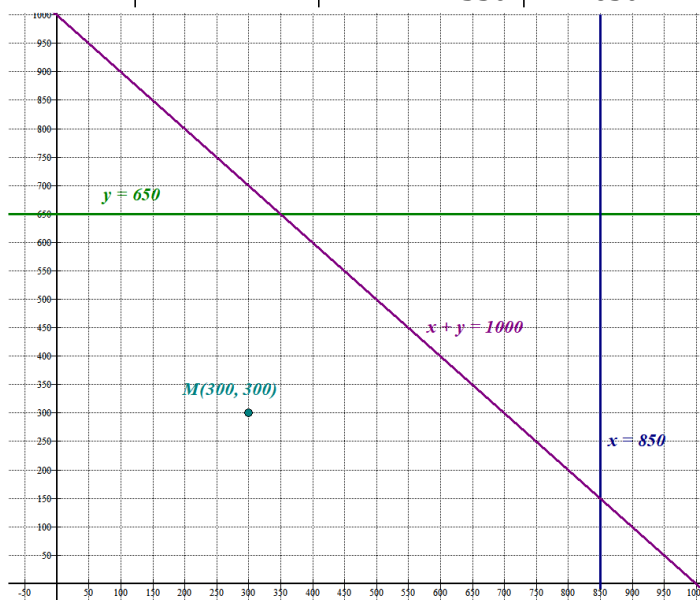
- “Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de caballero” $\rightarrow x \leq 850 \quad y \leq 650$
- “Tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales” $\rightarrow x + y \leq 1000$

Añadimos la restricción de que el número de trajes no puede ser negativo y se resumen en:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 850 \\ y \leq 650 \\ x + y \leq 1000 \end{array} \right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones.

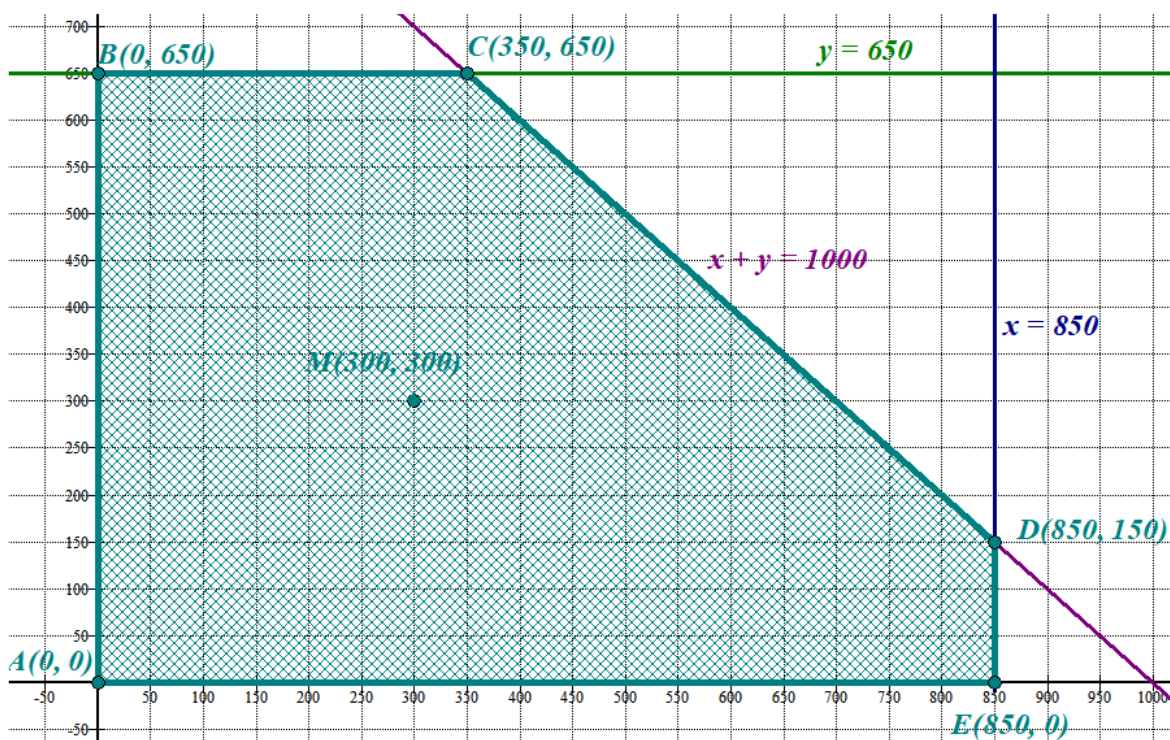
$x = 850$	y	x	$y = 650$	x	$y = 1000 - x$
850	0	0	650	0	1000
850	150	350	650	850	150
				350	650



Probamos si el punto $M(300, 300)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 300 \geq 0 \\ 300 \geq 0 \\ 300 \leq 850 \\ 300 \leq 650 \\ 300 + 300 \leq 1000 \end{array} \right\}$$

Las cumple todas, por lo que la región factible es la limitada por los ejes de coordenadas X e Y, las 3 rectas dibujadas y que contiene al punto $M(300, 300)$.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 150x + 200y$ en cada uno de los vértices y determinamos donde se alcanza el máximo beneficio.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 650) \rightarrow B(0, 650) = 0 + 130000 = 130000$$

$$C(350, 650) \rightarrow B(350, 650) = 52500 + 130000 = 182500$$

$$D(850, 150) \rightarrow B(850, 150) = 127500 + 30000 = 157500$$

$$E(850, 0) \rightarrow B(850, 0) = 127500 + 0 = 127500$$

Los máximos beneficios se obtienen en el punto $C(350, 650)$. Significa fabricar 350 trajes de señora y 650 de caballero.

(b) El máximo beneficio se ha calculado en el apartado anterior y es de 182500 €.

PROBLEMA 2

En el estudio en un laboratorio del tratamiento con antibióticos frente a una bacteria patógena durante 7 días, se ha encontrado que el número de bacterias vivas (en miles) a lo largo de estos 7 días ha variado de acuerdo con la función:

$$B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80, \quad 1 \leq t \leq 7$$

Siendo B el número de bacterias vivas (en miles) y t el día de realización del estudio. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar los días del estudio en los que se ha observado el número máximo y mínimo de bacterias vivas. **(1.5 puntos)**
 (b) Hallar los valores de dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
 (c) Representar de forma aproximada la función $B(t)$ a lo largo de los 7 días del estudio. **(1 punto)**

- (a) Utilicemos la derivada para obtener los puntos máximos y mínimos.

$$B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80 \Rightarrow B'(t) = -3t^2 + 24t - 36$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0 \Rightarrow -t^2 + 8t - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-8 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-8+4}{-2} = 2 \\ \frac{-8-4}{-2} = 6 \end{cases}$$

Con la segunda derivada determinamos si es máximo o mínimo cada uno de los valores hallados.

$$B'(t) = -3t^2 + 24t - 36 \Rightarrow B''(t) = -6t + 24$$

$$B''(2) = -12 + 24 = 12 > 0 \text{ Hay un mínimo en } x = 2$$

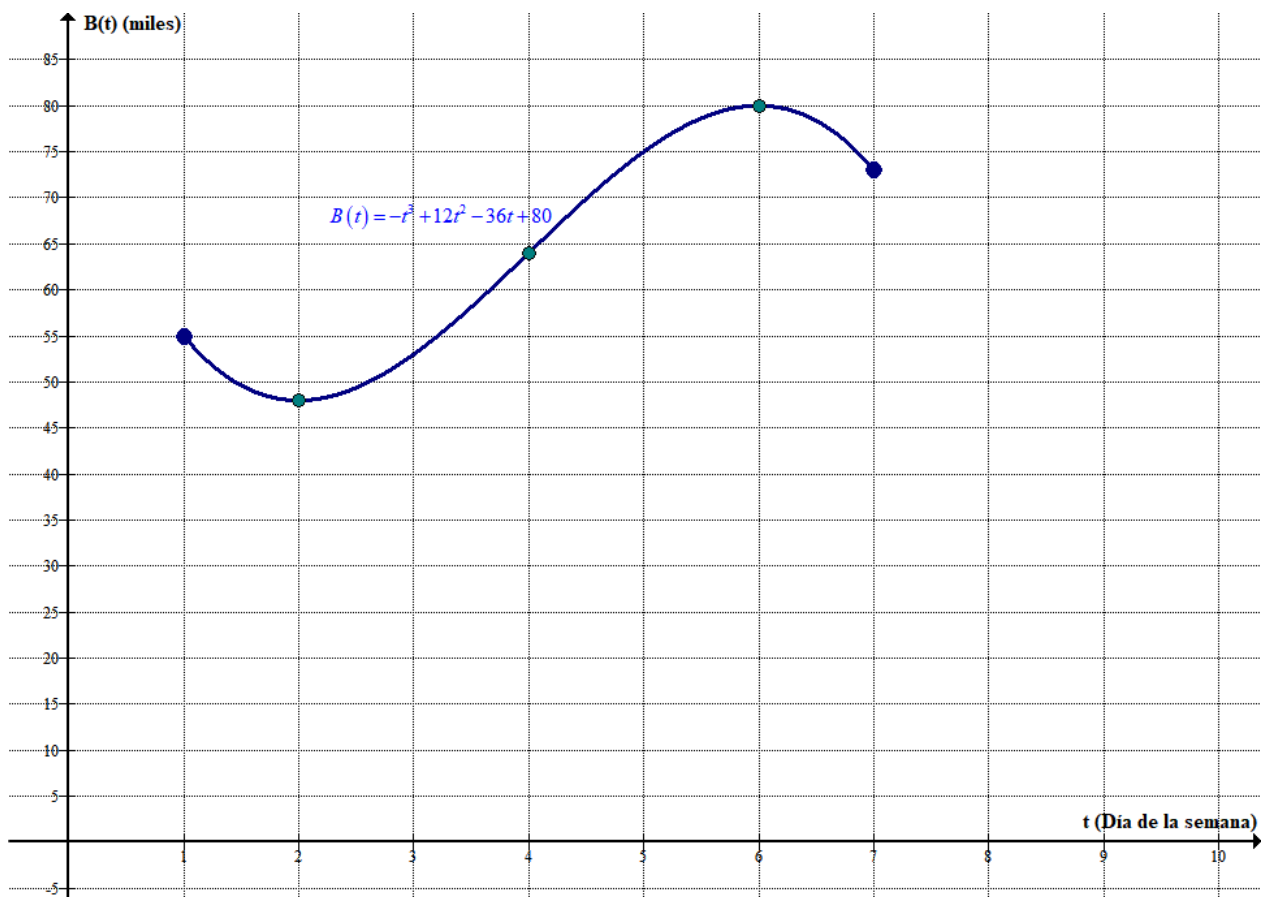
$$B''(6) = -36 + 24 = -12 < 0 \text{ Hay un máximo en } x = 6$$

Se observa un número máximo de bacterias ($B(6) = 80$) el sábado (6) y un número mínimo relativo ($B(2) = 48$) el martes (2).

Como los valores de bacterias el lunes y domingo son 55 y 78, estos valores son máximos y mínimos absolutos.

- (b) El valor máximo es $B(6) = -6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 + 80 = 80$. El sábado hay 80000 bacterias
 El valor mínimo es $B(2) = -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 80 = -8 + 48 - 72 + 80 = 48$. El martes hay 48000 bacterias.
- (c) Hacemos una tabla de valores y representamos.

t	$B(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 80$
1	$-1 + 12 - 36 + 80 = 55$
2	48 Mínimo
4	$-64 + 192 - 144 + 80 = 64$
6	80 Máximo
7	$-7^3 + 12 \cdot 7^2 - 36 \cdot 7 + 80 = 73$



PROBLEMA 3

Para realizar el control de calidad en la fabricación de protectores de pantallas de dispositivos móviles se utiliza el intervalo de confianza al 99 % del grosor de los mismos. Se sabe que la distribución del grosor es una normal de desviación típica conocida de 0.1 mm. Una empresa quiere crear su intervalo de confianza y muestrea diez protectores con los siguientes grosores (en mm):

0.50 0.43 0.37 0.27 0.60 0.32 0.31 0.27 0.40 0.36

- (a) Calcular el intervalo de confianza al 99% del grosor medio de los protectores. **(2.5 puntos)**
 (b) Para que el intervalo de confianza sea útil, su longitud debe ser 0.1. ¿Cuántos protectores necesita muestrear la empresa para obtener esa precisión? **(1 punto)**
 Justificar las respuestas.

Llamemos X = Grosor de un protector de pantalla en mm. $X = N(\mu, 0.1)$

- (a) Necesitamos calcular la media muestral para los 10 datos obtenidos.

$$\bar{x} = \frac{0.5 + 0.42 + 0.37 + 0.27 + 0.60 + 0.32 + 0.31 + 0.27 + 0.40 + 0.36}{10} = \frac{3.82}{10} = 0.382 \text{ mm}$$

Con el nivel de confianza del 99% buscamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.576$$

$$\text{El error es } z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.576 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{10}} = 0.081$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (0.382 - 0.081, 0.382 + 0.081) = (0.301, 0.463)$$

El intervalo de confianza al 99% es $(0.301, 0.463)$

- (b) Para un nivel de confianza del 99% hemos calculado $z_{\alpha/2} = 2.576$.

Como la longitud del intervalo debe ser 0.10, el error debe ser la mitad, 0.05.

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.05 \Rightarrow 2.576 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} = 0.05 \Rightarrow 2.576 \cdot \frac{0.1}{0.05} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2.576 \cdot \frac{0.1}{0.05} \right)^2 = 26.54$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 27 protectores de pantallas.

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B. En caso afirmativo, calcularlas. **(2 puntos)**(b) Resolver la ecuación matricial $AX + B = I$ **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

(a) Para que existan deben de tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de la matriz A.}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 9 + 1 = 0. \text{ No existe la inversa de la matriz B}$$

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Despejamos la matriz X usando la inversa de A.

$$AX + B = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot I \Rightarrow X + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \Rightarrow$$

$$X = A^{-1} - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3-8 & 2 & 1-6 \\ 1-6+20 & -1-5 & 2-2+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \\ 15 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -14 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

La demanda de un producto es función de su precio según la expresión

$$D(x) = \begin{cases} Ax - x^2 & \text{si } 20 \leq x \leq 30 \\ 600 - Bx & \text{si } 30 < x \leq 60 \end{cases}$$

donde D denota la demanda en unidades y x el precio en euros. Se sabe que la demanda para $x = 30$ es de 300 unidades y que la función es continua.

- (a) Determinar las constantes A y B . Justificar la respuesta. **(1.5 puntos)**
 (b) Representar gráficamente la demanda en función de x . **(1 punto)**
 (c) Comprobar si la función $D(x)/(x - 25)$ tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo. Justificar la respuesta. **(0.5 puntos)**

- (a) La demanda para $x = 30$ es de 300 unidades $\rightarrow D(30) = 300$

$$D(30) = 300 \Rightarrow 30A - 30^2 = 300 \Rightarrow 30A = 300 + 900$$

$$A = \frac{1200}{30} = 40$$

La función $D(x)$ es continua. Eso significa que:

- Existe $D(30) = 300$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 30^-} D(x) = \lim_{x \rightarrow 30^-} (40x - x^2) = 300$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 30^+} D(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} (600 - Bx) = 600 - 30B$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow 600 - 30B = 300 \Rightarrow -30B = -300 \Rightarrow B = 10$

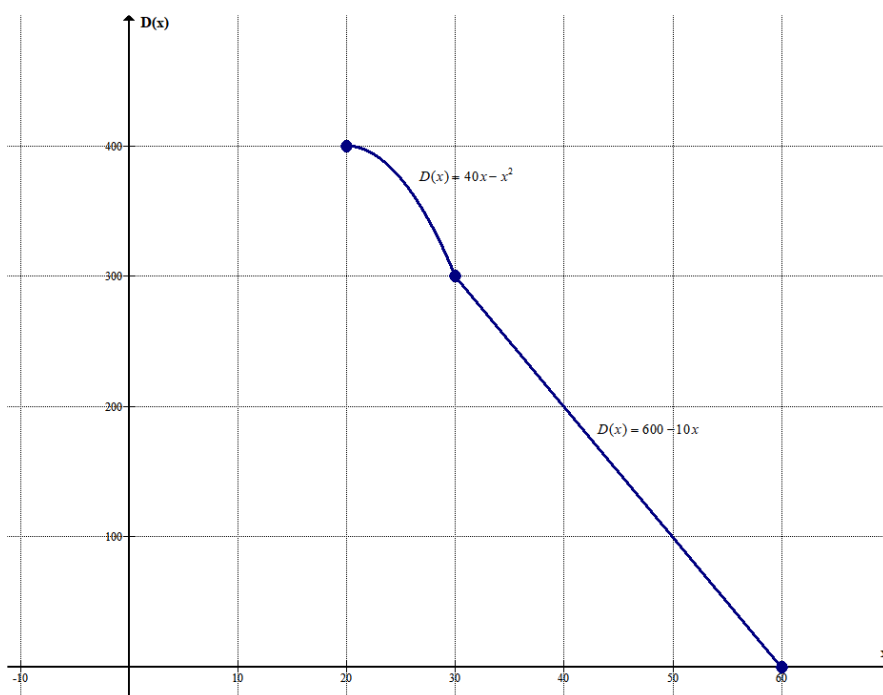
Los valores buscados son $A = 40$ y $B = 10$.

- (b) La función demanda es $D(x) = \begin{cases} 40x - x^2 & \text{si } 20 \leq x \leq 30 \\ 600 - 10x & \text{si } 30 < x \leq 60 \end{cases}$

Es una función a trozos, hacemos dos tablas de valores y representamos.

x	$D(x) = 40x - x^2$
20	400
25	375
30	300

x	$D(x) = 600 - 10x$
30	300
40	200
60	0



(c) Llamemos a la función $f(x) = \frac{D(x)}{x-25} = \begin{cases} \frac{40x-x^2}{x-25} & \text{si } 20 \leq x \leq 30 \\ \frac{600-10x}{x-25} & \text{si } 30 < x \leq 60 \end{cases}$

Esta función no existe para el valor $x = 25$. La definición correcta es:

$$f(x) = \frac{D(x)}{x-25} = \begin{cases} \frac{40x-x^2}{x-25} & \text{si } 20 \leq x < 25; 25 < x < 30 \\ \frac{600-10x}{x-25} & \text{si } 30 < x \leq 60 \end{cases}$$

- **Asíntota vertical.** $x = a$.

Esta asíntota se produce en los valores que anulan el denominador de la función, esto ocurre en $x = 25$ que pertenece al primer intervalo de definición $(20, 30)$.

Calculo el límite y compruebo que $x = 25$ es asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow 25} f(x) = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{40x-x^2}{x-25} = \frac{375}{0} = \infty$$

$x = 25$ es asíntota vertical de $f(x)$.

- **Asíntota horizontal.** $y = b$

No existe pues no puedo calcular el límite cuando x tiende a infinito, pues el dominio de definición de la función es $[20, 60]$.

- **Asíntota oblicua.** Tampoco existe por el mismo motivo.

PROBLEMA 3

Una región de bosques está dividida en 3 zonas A, B y C. Para el próximo verano la probabilidad de incendio en cada zona es de 0.1, 0.2 y 0.05 respectivamente. En cada zona sólo puede producirse, como máximo, un incendio. Si consideramos que los incendios se producen de forma independiente entre las zonas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio? **(1 punto)**

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios? **(1 punto)**

(c) Si se sabe que ha habido sólo un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(\text{No haya ningun incendio}) &= \\ &= P(\text{No haya incendio en zona A})P(\text{No haya incendio en B})P(\text{No haya incendio en C}) = \\ &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.95 = \boxed{0.684} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P(\text{Haya exactamente 2 incendios}) &= \\ &= P(\text{Haya incendio en A, en B y no en C}) + P(\text{Haya incendio en A, no en B y si en C}) + \\ &\quad + P(\text{No haya incendio en A, si en B y si en C}) = \\ &= P(\text{Haya incendio en A})P(\text{Haya incendio en B})P(\text{No haya incendio en C}) + \\ &\quad + P(\text{Haya incendio en A})P(\text{No haya incendio en B})P(\text{Haya incendio en C}) + \\ &\quad + P(\text{No haya incendio en A})P(\text{Haya incendio en B})P(\text{Haya incendio en C}) = \\ &= 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.05 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.05 = 0.019 + 0.004 + 0.009 = \boxed{0.032} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad P(\text{Haya sido en A / Ha habido solo 1 incendio}) &= \\ &= \frac{P(\text{Ha habido solo 1 incendio y haya sido en A})}{P(\text{Ha habido solo 1 incendio})} = \dots \end{aligned}$$

Debemos calcular la probabilidad de que haya solo 1 incendio. Como tenemos las probabilidades de 0 incendios, de solo 2 incendios, si calculamos la probabilidad de 3 incendios (es fácil) hallaremos de forma cómoda la que buscamos.

$$P(\text{Hayan 3 incendios}) = P(\text{Haya incendio en A}) \cdot P(\text{Haya incendio en B}) \cdot$$

$$P(\text{Haya incendio en C}) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.05 = 0.001$$

Así calculamos la probabilidad buscada haciendo uso del suceso contrario, se calcularía como sigue:

$$\begin{aligned} P(\text{Haya solo 1 incendio}) &= \\ &= 1 - (P(\text{Haya 0 incendios}) + P(\text{Haya solo 2 incendios}) + P(\text{Haya solo 3 incendios})) = \\ &= 1 - (0.684 + 0.032 + 0.001) = 1 - 0.717 = 0.283 \end{aligned}$$

Seguimos calculando la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned} P(\text{Haya sido en A / Ha habido solo 1 incendio}) &= \frac{P(\text{Ha habido solo 1 incendio y haya sido en A})}{P(\text{Ha habido solo 1 incendio})} = \\ &= \frac{P(\text{Ha habido incendio en A})P(\text{No ha habido incendio en B})P(\text{No ha habido incendio en C})}{0.283} = \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.95}{0.283} = \boxed{0.269} \end{aligned}$$

EBAU Ordinaria 2017



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2016-2017

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**
- (b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3, \quad 8 \leq t \leq 13,$$

donde $V(t)$ denota el número de visitantes y t la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para $t = 11$ horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480. Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las constantes A y B . **(2 puntos)**
- (b) Encontrar el número máximo de visitantes. **(0.5 puntos)**
- (c) Determinar si la función $V(t)/(t-10)$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3

En la exposición de la Facultad de Ciencias "Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

- (a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original? **(1 punto)**
- (b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica? **(1 punto)**
- (c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar las matrices inversas de A y de B.

(1 punto)

(b) Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(1 punto)

(c) Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = B$

(1.5 puntos)

PROBLEMA 2

El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función:

$$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000, \quad 1 \leq t \leq 12$$

Siendo N el número de empleados y t los distintos meses del año.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿En qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados?

(1 punto)

(b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo.

(1 punto)

(c) Representa de forma aproximada la función $N(t)$ en dicho periodo.

(1 punto)

PROBLEMA 3

Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realiza un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

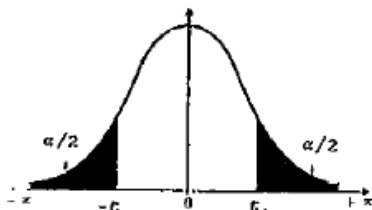
(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas mal gestionadas.

(2.5 puntos)

(b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0.1, ¿cuántas tiendas debería muestrear?

(1 punto)

Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.475	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios?

(3 puntos)

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

(0.5 puntos)

(a) Denominamos x al número de envases pequeños de 100g = 0,1 kg e y al número de envases grandes de 300 g = 0,3 kg.

Las restricciones serían:

“Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar” →

$$0,1x + 0,3y \leq 2400$$

“Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos” →

$$x \leq 15000 \quad x \geq y$$

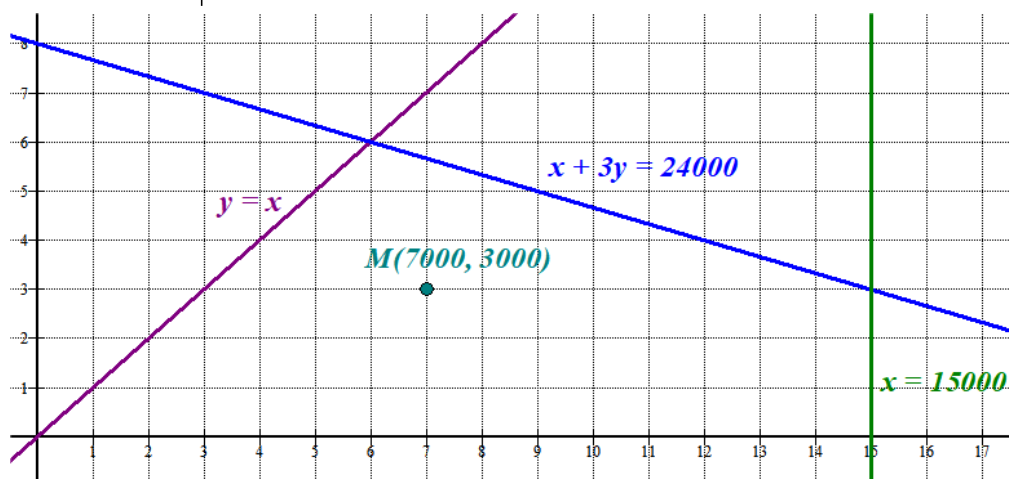
Estas restricciones, junto con la de que deben ser cantidades positivas conforman:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,1x + 0,3y \leq 2400 \\ x \leq 15000 \\ x \geq y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 24000 \\ x \leq 15000 \\ x \geq y \end{array} \right\}$$

Y deseamos maximizar la función beneficio que es $B(x, y) = 0,5x + 1,4y$.

Dibujamos las rectas asociadas a estas restricciones.

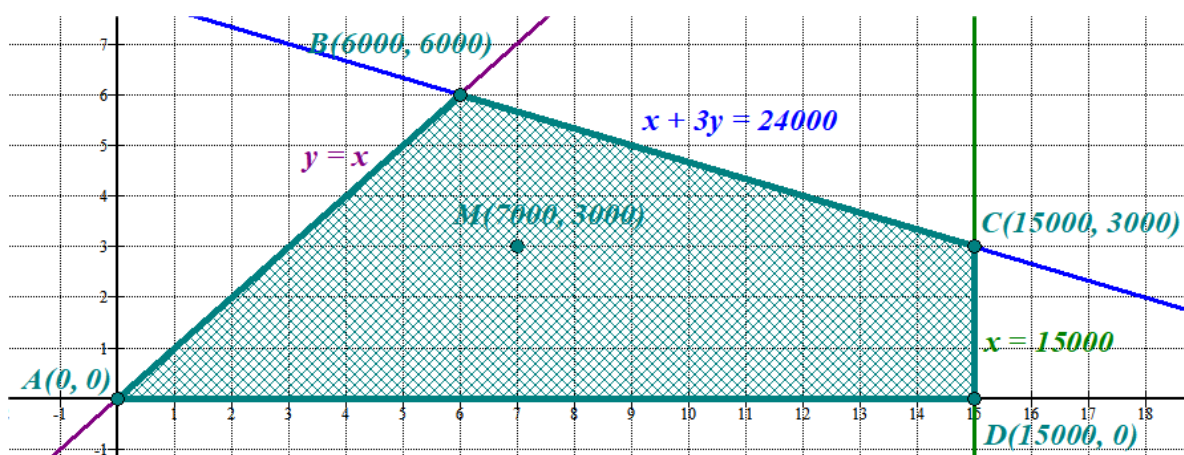
x	$y = \frac{24000 - x}{3}$	$x = 15000$	y	x	$y = x$
0	8000	15000	8000	6000	6000
6000	6000	15000	6000	15000	15000
24000	0	15000	0		



Pruebo si el punto $M(7000, 3000)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 7000 \geq 0 \\ 3000 \geq 0 \\ 7000 + 9000 \leq 24000 \\ 7000 \leq 15000 \\ 7000 \geq 3000 \end{array} \right\}$$

Cumple todas las restricciones. La región factible es la región delimitada por las tres rectas dibujadas y el eje OX, que contiene el punto $M(7000, 3000)$. La región factible es la zona rayada del dibujo.



Deseamos maximizar la función beneficio que es $B(x, y) = 0,5x + 1,4y$. Para ello valoramos esta función en cada uno de los vértices de la región factible y averiguo donde se consigue el valor máximo y cuanto es dicho valor.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(6000, 6000) \rightarrow B(6000, 6000) = 3000 + 8400 = 11400$$

$$C(15000, 3000) \rightarrow B(15000, 3000) = 7500 + 4200 = 11700$$

$$D(15000, 0) \rightarrow B(15000, 0) = 7500$$

El máximo beneficio se obtiene en el punto $C(15000, 3000)$. El beneficio máximo es de 11700 € y se obtiene con 15000 envases pequeños y 3000 grandes.

(b) El beneficio máximo es de 11700 €.

PROBLEMA 2

El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3, \quad 8 \leq t \leq 13,$$

donde $V(t)$ denota el número de visitantes y t la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para $t = 11$ horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480.

Se pide, justificando las respuestas:

- (a) Determinar las constantes A y B . (2 puntos)
 (b) Encontrar el número máximo de visitantes. (0.5 puntos)
 (c) Determinar si la función $V(t)/(t-10)$ tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determinarla. (0.5 puntos)

- (a) A las 11 horas hay un máximo, lo que supone que se anula la derivada.

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2 - 10t^3 \Rightarrow V'(t) = -2310 + 2Bt - 30t^2$$

$$V'(11) = 0 \Rightarrow -2310 + 22B - 30 \cdot 121 = 0 \Rightarrow 22B = 5940 \Rightarrow B = \frac{5940}{22} = 270$$

Además, la función $V(t) = A - 2310t + 270t^2 - 10t^3$ pasa por el punto $(12, 480)$ por lo que:

$$V(12) = 480 \Rightarrow A - 27720 + 38880 - 17280 = 480$$

$$A = 6600$$

Los valores buscados son $A = 6600$ y $B = 270$.

La función es $V(t) = 6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3$, $8 \leq t \leq 13$,

- (b) El enunciado del problema dice que se alcanza un máximo de visitantes a las 11 horas, luego el número de visitantes en el momento de máxima afluencia es de

$$V(11) = 6600 - 2310 \cdot 11 + 270 \cdot 11^2 - 10 \cdot 11^3 = 550.$$

- (c) Llamemos $f(t) = \frac{V(t)}{t-10} = \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10}$, $8 \leq t \leq 13$,

Como es una función racional, la asíntota vertical estará en los valores que anulen el denominador, es decir, en $t = 10$. Comprobamos que es una asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(t) = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{V(t)}{t-10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10} = \frac{33600 - 33100}{0} = \frac{500}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal ni oblicua, ya que su dominio es $(8, 13)$ y no se puede calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito.

La función $f(t) = \frac{V(t)}{t-10} = \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t-10}$, $8 \leq t \leq 13$, tiene una asíntota vertical en $x = 10$.

PROBLEMA 3

En la exposición de la Facultad de Ciencias "Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

- (a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal original? **(1 punto)**
- (b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea réplica? **(1 punto)**
- (c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

Hay un total de 106 piezas y 40 son originales.

- (a) De las 106 piezas solo hay 20 metales originales, como la elección de cualquiera de las piezas es equiprobable podemos aplicar la regla de Laplace y

$$P(\text{La pieza sea un metal original}) = \frac{20}{106} = 0,189$$

- (b) De las 106 piezas hay 66 piezas que son réplicas, volvemos a aplicar la regla de Laplace.

$$P(\text{La pieza sea réplica}) = \frac{66}{106} = 0,623$$

- (c) Si es una réplica, sabemos que solo puede ser una de las 66 que lo son. De ellas solo hay 36 que son réplicas de fósil, aplicando la regla de Laplace, tenemos que

$$P(\text{Sea un fósil / Es una réplica}) = \frac{36}{66} = 0,545$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$P(\text{Sea un fósil / Es una réplica}) = \frac{P(\text{Sea un fósil y Es una réplica})}{P(\text{Es una réplica})} = \frac{\frac{36}{106}}{\frac{66}{106}} = \frac{36}{66} = 0,545$$

OPCIÓN B**PROBLEMA 1**

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar las matrices inversas de A y de B.

(1 punto)(b) Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ **(1 punto)**(c) Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = B$ **(1.5 puntos)**

(a) Veo si sus determinantes son no nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \quad y \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

Al ser no nulos existen las matrices inversas tanto de A como de B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos la matriz resultado de cada miembro de la igualdad y compruebo que se obtiene el mismo resultado.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B| = -56 + 55 = -1 \neq 0$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^t)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$$

Queda demostrada la igualdad $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.**OTRA FORMA DE HACERLO**

Para que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ debe cumplirse que la matriz $A \cdot B$ al multiplicarla por $B^{-1} \cdot A^{-1}$ nos de la matriz Identidad.

$$(A.B)^{-1} \cdot A.B = Id$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A.B = B^{-1} \cdot Id.B = B^{-1} \cdot B = Id$$

Y también que

$$A.B \cdot (A.B)^{-1} = Id$$

$$A.B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A.Id.A^{-1} = A.A^{-1} = Id$$

Queda demostrado que la matriz inversa del producto AB es $B^{-1} \cdot A^{-1}$

(c) Despejando en la ecuación $A.X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A.X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función:

$$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000, \quad 1 \leq t \leq 12$$

Siendo N el número de empleados y t los distintos meses del año.

Se pide, justificando las respuestas:

- (a) ¿En qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados? **(1 punto)**
 (b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo. **(1 punto)**
 (c) Representa de forma aproximada la función $N(t)$ en dicho periodo. **(1 punto)**

- (a) Derivamos e igualamos a cero la derivada buscando los máximos y mínimos locales. Luego lo comparamos con los valores en los extremos del intervalo ($t = 1$, $t = 12$)

$$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000 \Rightarrow N'(t) = 3t^2 - 42t + 99$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 42t + 99 = 0 \Rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 132}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = \begin{cases} = \frac{14+8}{2} = 11 \\ = \frac{14-8}{2} = 3 \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función se producen en $t = 3$ y en $t = 11$. Basta con calcular el número de empleados en estos puntos para obtener el momento donde se produce ese máximo y ese mínimo.

$$N(1) = 1 - 21 + 99 + 1000 = 1079$$

$$N(3) = 27 - 189 + 297 + 1000 = 1135$$

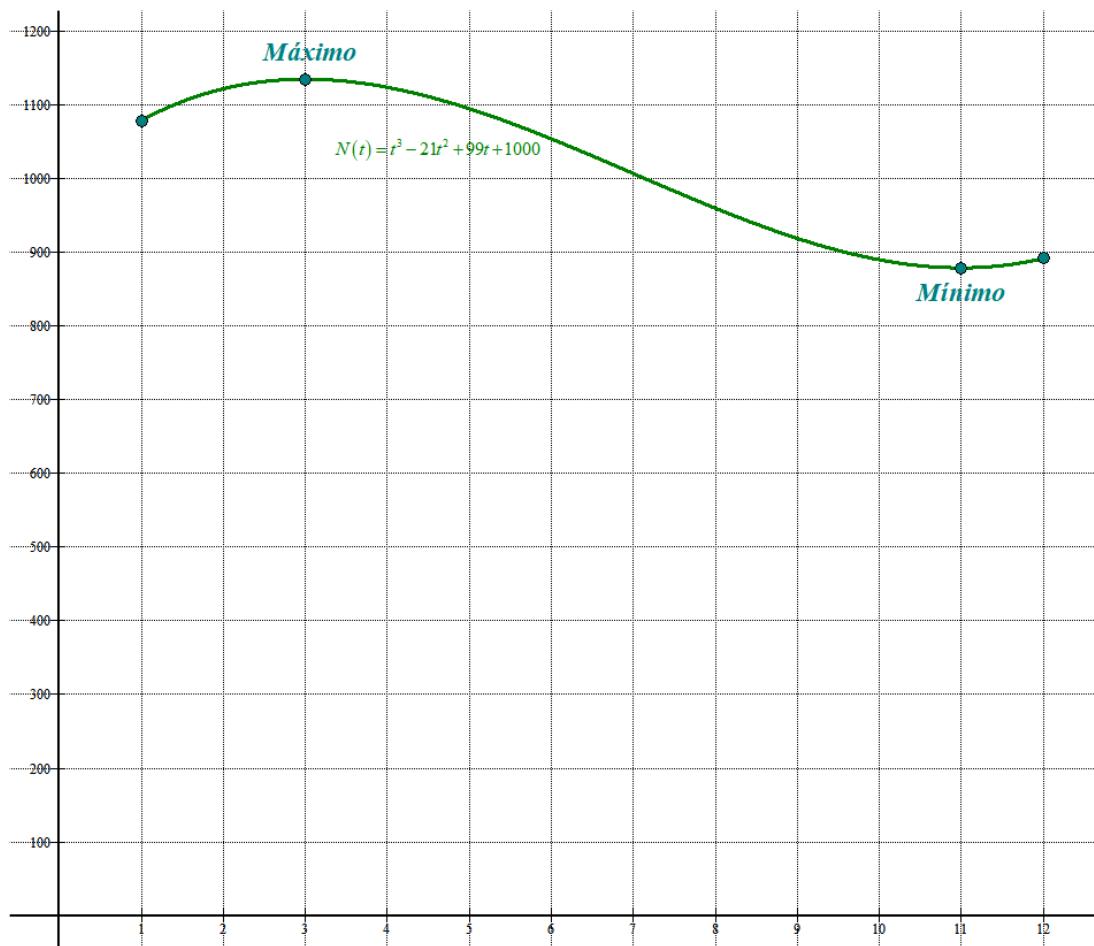
$$N(11) = 11^3 - 21 \cdot 11^2 + 99 \cdot 11 + 1000 = 879$$

$$N(12) = 12^3 - 21 \cdot 12^2 + 99 \cdot 12 + 1000 = 892$$

El mínimo de empleados es 879 y se produce en el mes 11. El máximo de empleados es 1135 y se produce en el mes 3.

- (b) El máximo es 1135 y el mínimo es 879.
 (c) Obtengo una tabla de valores. He visto que el mínimo relativo se produce en $t = 11$ y el máximo en $t = 3$.

t	$N(t) = t^3 - 21t^2 + 99t + 1000$
1	1079
3	1135 Máximo
11	879 Mínimo
12	892



PROBLEMA 3

Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realiza un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas mal gestionadas.

(2.5 puntos)

(b) Si la empresa, quiere que la longitud del intervalo sea 0.1, ¿cuántas tiendas debería muestrear?

(1 punto)

Justificar las respuestas.

(a) Los datos son $p = \frac{28}{95} = 0,295$; $n = 95$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$\text{El error es } Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,295(0,705)}{95}} = 0,0917$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que utilizan el tranvía es:

$$(p - Error, p + Error) = (0,295 - 0,0917, 0,295 + 0,0917) = (0,2033, 0,3867)$$

El intervalo de confianza al 95% es entre 20% y 39% de tiendas mal gestionadas.

(b) Si la longitud del intervalo es 0.1 entonces el error debe ser la mitad, 0.05. Sustituyendo en la fórmula:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,05 \Rightarrow 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,295 \cdot 0,705}{n}} = 0,05 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,295 \cdot 0,705}{n}} = \frac{0,05}{1,96}$$

$$\frac{0,295 \cdot 0,705}{n} = \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 \Rightarrow n \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 = 0,295 \cdot 0,705 \Rightarrow n = \frac{0,295 \cdot 0,705}{\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2} = 319,6$$

Debería muestrear 320 tiendas