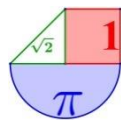


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en La Rioja
Años 2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EBAU de La Rioja desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	17
EBAU Extraordinaria 2024.....	35
EBAU Ordinaria 2024	52
EBAU Extraordinaria 2023.....	67
EBAU Ordinaria 2023	84
EBAU Extraordinaria 2022	102
EBAU Ordinaria 2022	116
EBAU Extraordinaria 2021	135
EBAU Ordinaria 2021	150
EBAU Extraordinaria 2020.....	166
EBAU Ordinaria 2020	181
EBAU Julio 2019.....	194
EBAU Junio 2019.....	211
EBAU Julio 2018.....	228
EBAU Junio 2018.....	248
EBAU Julio 2017.....	267
EBAU Junio 2017.....	285

PAU Extraordinaria 2025



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Curso Académico 2024/2025

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES

Tiempo de realización: 1 HORA Y 30 MINUTOS

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$$A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) **(1 PUNTO)** Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$. Calcula

la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Opción 2)

2.2. Dadas las matrices $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$
(A^T representa la matriz traspuesta de A)

PARTE 2. ANÁLISIS**EJERCICIO 3**

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a: número real). Se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “a” para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$.

b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “a” para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$.

c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar “a” para que se verifique la igualdad:

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$$

(Opción 2)

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \text{ con } 0 \leq t \leq 6 \text{ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)}$$

Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$, e indica cuándo se han alcanzado.

b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.

c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.

d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**EJERCICIO 4**

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?

b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina”?

- c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

- A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$.
($\bar{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

- B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ .

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

SOLUCIONES

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:
- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

- a) Llamamos “x” al número de armarios A producidos e “y” al número de armarios B. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de construcción	Horas de pintura	Beneficio
Armarios A (x)	3x	4x	200x
Armarios B (y)	6y	2y	300y
TOTAL	3x + 6y	4x + 2y	200x + 300y

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 200x + 300y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

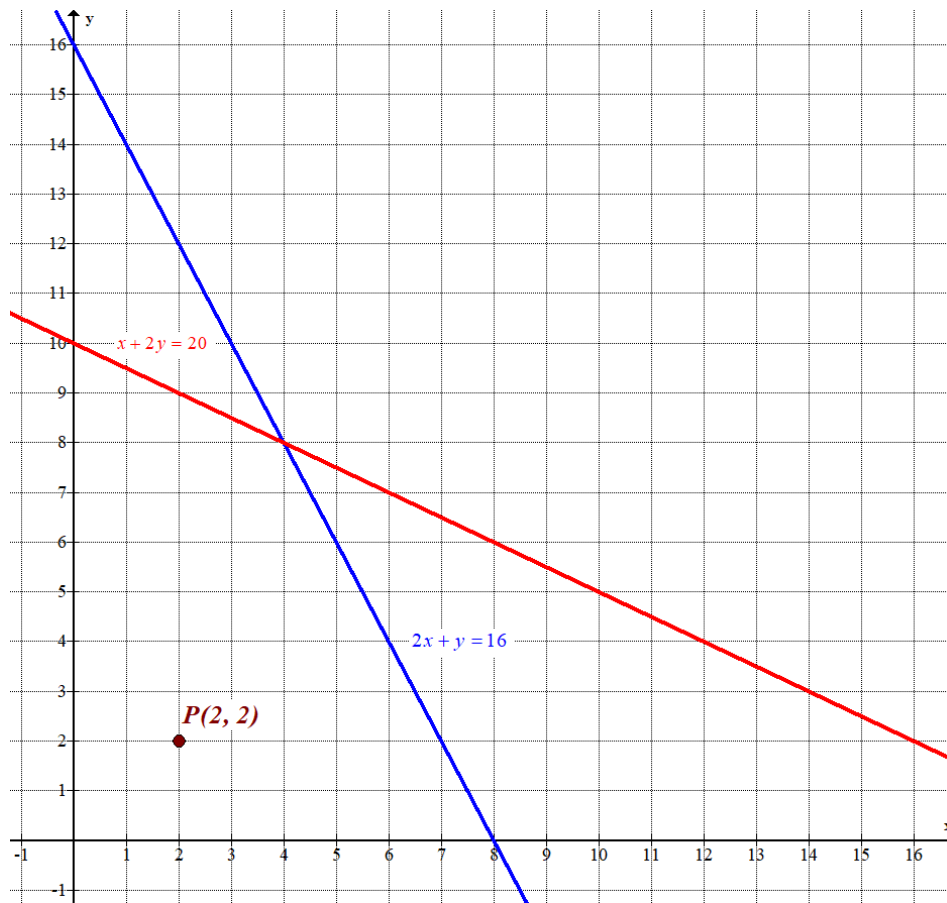
La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura $\rightarrow 3x + 6y \leq 60; 4x + 2y \leq 32$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 3x + 6y \leq 60 \\ 4x + 2y \leq 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

	$x + 2y = 20$	$2x + y = 16$
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \quad y = \frac{20-x}{2}$	$x \quad y = 16 - 2x$
<i>El primer cuadrante</i>	010 48 200	016 48 80



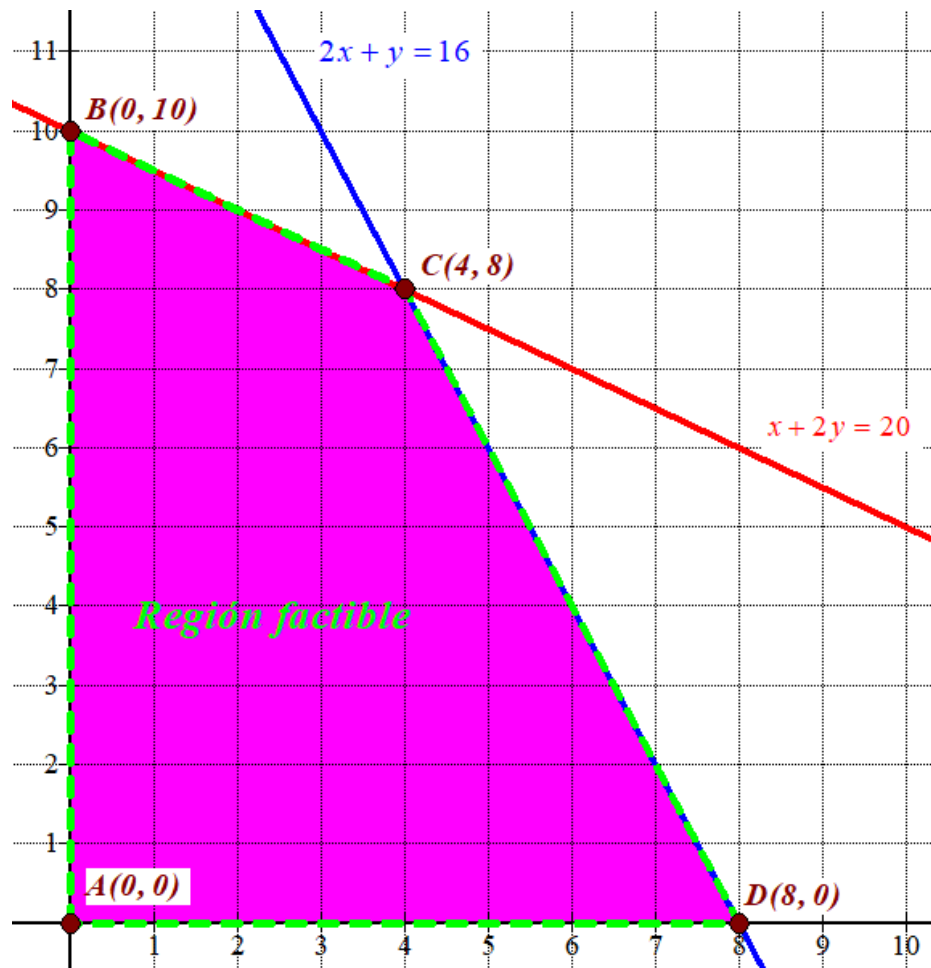
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada

por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq 0; 2 \geq 0 \\ 2 + 2 \cdot 2 \leq 20 \\ 2 \cdot 2 + 2 \leq 16 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 10)$, $C(4, 8)$ y $D(8, 0)$.

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 200x + 300y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$$

$$C(4, 8) \rightarrow B(4, 8) = 200 \cdot 4 + 300 \cdot 8 = 3200 \text{ Máximo}$$

$$D(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600$$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto $C(4, 8)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación y venta de 4 armarios tipo A y 8 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 3200 €.

2.1. a) (1 PUNTO) Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$$A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (1 PUNTO) Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$. Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+3k & 15-15 \\ 5k-5k & 3k+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+3k & 0 \\ 0 & 3k+25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3k+25=1 \Rightarrow 3k=-24 \Rightarrow \boxed{k=-8} \end{aligned}$$

Para $k = -8$ se cumple que $A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Comprobamos que la matriz B cumple la igualdad $B^2 = I_2$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-15 & 12-12 \\ -20+20 & -15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matriz B cumple que $B^2 = I_2 \rightarrow B \cdot B = I_2$.

Resolvemos la ecuación matricial $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} BX &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow BBX = B \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{B^2 = I\} \Rightarrow I \cdot X = B \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+3 & 28+6 \\ -15-4 & -35-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix}$.

2.2. Dadas las matrices $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$
(A^T representa la matriz traspuesta de A)

a) Comprobamos que se cumple la igualdad.

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 & 12-12 \\ 12-12 & 16+9 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) Por el apartado anterior sabemos que la matriz A tiene inversa y que $A^{-1} = A^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la igualdad.

$$XA + B = BA \Rightarrow XA = BA - B \Rightarrow X = (BA - B)A^{-1} = BAA^{-1} - BA^{-1} = B - BA^{-1}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$X = B - BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15-40 & 20+30 \\ -80 & 60 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -25 & 50 \\ -80 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$.

3.1. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a : número real). Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$.
- b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$.
- c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar “ a ” para que se verifique la igualdad:

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$$

- a) Si la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 2$ es $y = 37$, esto quiere decir dos cosas: la primera es que $f(2) = 37$ y la segunda que $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 37 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 37 = 2^3 + a \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 5 \Rightarrow 37 = 8 + 4a + 72 + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a = -48 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-48}{4} = -12}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36 \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2a + 36 \Rightarrow 0 = 12 + 4a + 36 \Rightarrow \boxed{a = -12}$$

El valor necesario para que se cumpla lo pedido es $a = -12$.

Al ser $f'(2) = 0$ la función tiene un extremo relativo en $x = 2$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x - 24 \Rightarrow f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

- b) Para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$ la función tiene que tener un punto de inflexión en dicho valor y para ello la derivada segunda debe anularse para $x = 5$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(5) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 5 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -30 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-30}{2} = -15}$$

Para $a = -15$ se cumple lo pedido.

- c) Calculamos el valor de la integral definida planteada.

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = \left[x^3 + ax^2 + 36x \right]_2^4 = \left[4^3 + a \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 \right] - \left[2^3 + a \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 \right] =$$

$$= 64 + 16a + 144 - 8 - 4a - 72 = 12a + 128$$

Determinamos el valor de “ a ” para que esta integral valga 152.

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152 \Rightarrow 12a + 128 = 152 \Rightarrow 12a = 24 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \text{ con } 0 \leq t \leq 6 \text{ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)}$$

Se pide:

- a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$, e indica cuándo se han alcanzado.
- b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.
- c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$.
- d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función ingresos.

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{1} = 1}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 3 = -2.25 < 0. \text{ La función decrece en } [0,1).$$

- En el intervalo $(1,6]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 3 = 72 > 0$. La función crece en $(1,6]$.

La función decrece en $[0,1)$ y crece en $(1,6]$.

La función presenta un mínimo relativo en $t = 1$.

Valoramos los ingresos en este punto crítico y en los extremos del intervalo para determinar el máximo y mínimo absoluto de los ingresos.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 10 = 10 \\ f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 10 = 8 \text{ Mínimo} \\ f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6 + 10 = 208 \text{ Máximo} \end{array} \right\}$$

El ingreso mínimo es de 8000 € y se produce transcurrido 1 mes desde el comienzo del estudio.

El ingreso máximo es de 208000 € y se consigue transcurridos 6 meses desde el inicio del estudio.

b) Averiguamos el valor de “t” para el que $f(t) = 12$.

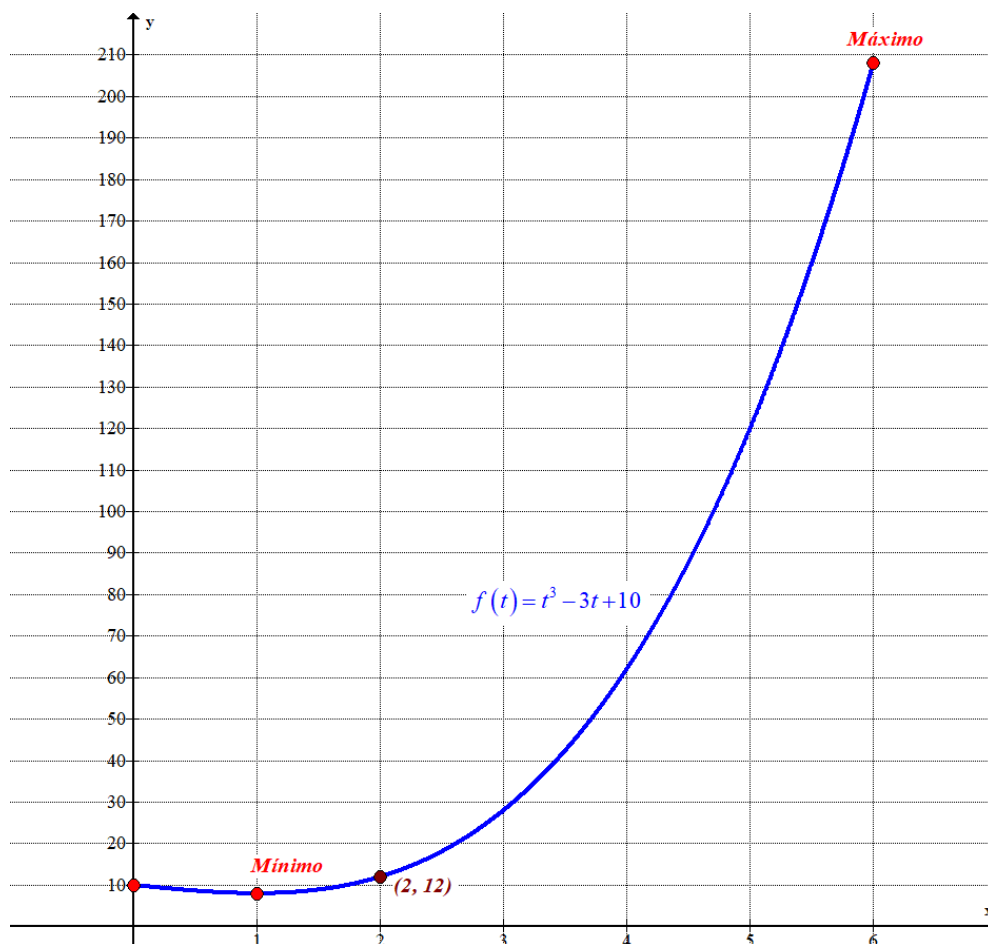
$$f(t) = 12 \Rightarrow t^3 - 3t + 10 = 12 \Rightarrow t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow t^3 - 3t - 2 = (t+1)(t^2 - t - 2)$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=t} \\ \frac{1-3}{2} = -1 \notin [0,6] \end{cases}$$

Transcurridos 2 meses desde el inicio del estudio los ingresos son de 12000 €.

c) Dibujamos la gráfica de la función.



d) Para que la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto sea igual a 9 la derivada de la función debe valer 9 $\Rightarrow f'(t) = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = 9 \\ f'(t) = 3t^2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 = 3t^2 - 3 \Rightarrow 3t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

En $t = 2$ la pendiente de la recta tangente vale 9. Hallamos la expresión de esta recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 12 \\ f'(2) = 9 \\ y - f(2) = f'(2)(t - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 12 = 9(t - 2) \Rightarrow y - 12 = 9t - 18 \Rightarrow \boxed{y = 9t - 6}$$

La recta tangente en $t = 2$ tiene ecuación $y = 9t - 6$.

- 4.1.** Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:
- a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?
- b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina”?
- c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

Llamamos A, B y C a los sucesos “la moto está fabricada en la planta A, B y C respectivamente” y G a “la moto es de gasolina”.

Al elegir una moto al azar tenemos que $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.40$,

$P(G/B) = 0.65$, $P(\bar{G}/C) = 0.65$ y $P(G) = 0.60$.

- a) Calculamos $P(G/A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.60 = 0.35 \cdot P(G/A) + 0.25 \cdot 0.65 + 0.4(1 - 0.65) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6 = 0.35 \cdot P(G/A) + 0.3025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.35 \cdot P(G/A) = 0.2975 \Rightarrow P(G/A) = \frac{0.2975}{0.35} = \boxed{0.85}$$

El 85% de las motos fabricadas en la planta A son de gasolina.

- b) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(G/B) = P(G)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(G/B) = 0.65 \\ P(G) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow P(G/B) = 0.65 \neq 0.6 = P(G)$$

Los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina” no son independientes.

- c) Nos piden calcular $P(B/\bar{G})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{G}) = \frac{P(B \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{P(B)P(\bar{G}/B)}{1 - P(G)} = \frac{0.25 \cdot (1 - 0.65)}{1 - 0.6} = \frac{7}{32} = \boxed{0.21875}$$

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$.

($\bar{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ .

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

A) Como A y B son independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{4}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para calcular $P(A \cup B)$ utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Para calcular $P(A/B)$ utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Para calcular $P(\bar{A}/B)$ utilizamos la probabilidad del suceso contrario.

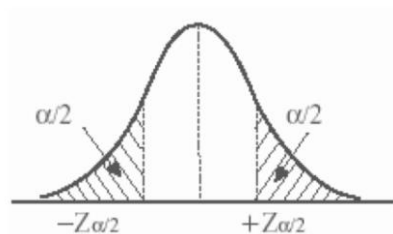
$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

B) Sea X = La duración, en horas, de un tipo de bombilla. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 250)$.

B.1) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 100$ y la media $= \bar{x} = 2000$ horas.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 49 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (2000 - 49, 2000 + 49) = (1951, 2049)$$

B.2) Sabemos que $X = N(\mu, 250)$ y que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n con un error de 20 horas.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = \frac{490}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{490}{20} \Rightarrow \boxed{n = 24.5^2 = 600.25}$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 20 horas la muestra debe ser de un mínimo de 601 bombillas.

PAU Ordinaria 2025

 UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) Curso 2024/2025 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES Tiempo: 1 HORA Y 30 MINUTOS
---	---

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA**EJERCICIO 1**

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 350 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

- (1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “k” la matriz A posee rango 3.

- (1 PUNTO)** Para $k=1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

(Opción 2)

2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanés, bolas y llaveros) que han vendido.

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 21x + b$ (a y b: números reales), se pide:

- a) **(0.75 PUNTOS)** Calcula qué valores deben tomar “a” y “b” para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=1$ y la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, 3)$.
- b) **(1.25 PUNTOS)** Para $a = -12$ y $b = 100$; calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 8]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor que debe tomar “a” para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx = 30$$

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8, \quad 0 \leq t \leq 6$$

siendo t: número de meses transcurridos

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$ y cuál es el valor de dicho beneficio.
- b) **(1 PUNTO)** Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el área limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Resuelve los apartados A) y B)

- A) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes; una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:
 - A1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.
 - A2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

B) **(2 PUNTOS)** El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.

B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ .

B.2) Supongamos que $\mu = 250$ gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.

A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) **(2 PUNTOS)** El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ .

B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

SOLUCIONES

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

a) Llamamos “x” al número de joyas A producidas e “y” al número de joyas B.

Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Beneficio
número de joyas A (x)	2x	4x	60x
número de joyas B (y)	4y	2y	80y
TOTAL	2x + 4y	4x + 2y	60x + 80y

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 60x + 80y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

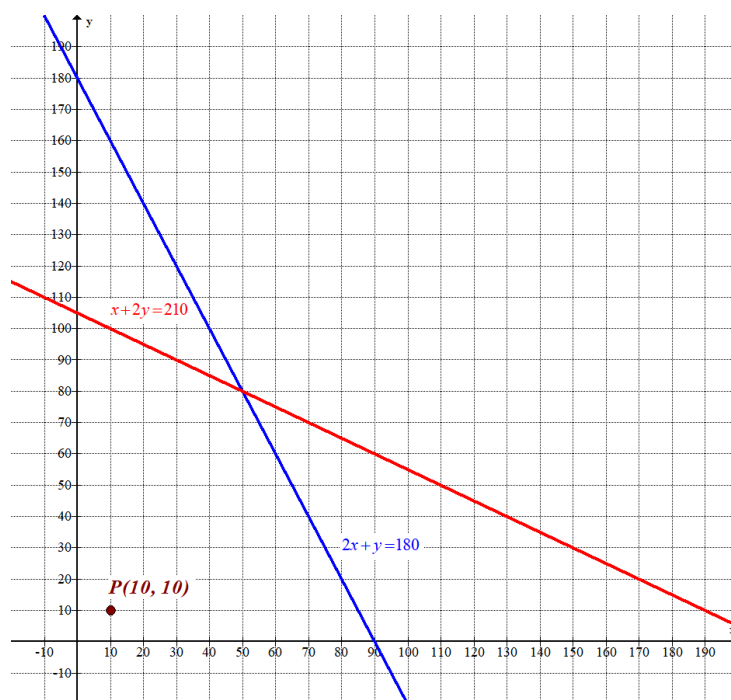
La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata $\rightarrow 2x + 4y \leq 420; 4x + 2y \leq 360$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 4y \leq 420 \\ 4x + 2y \leq 360 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 210 \\ 2x + y \leq 180 \end{array} \right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

	$x + 2y = 210$	$2x + y = 180$
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \quad \left \quad y = \frac{210 - x}{2}$	$x \quad \left \quad y = 180 - 2x$
El primer cuadrante	0 105 50 80 210 0	0 180 50 80 90 0

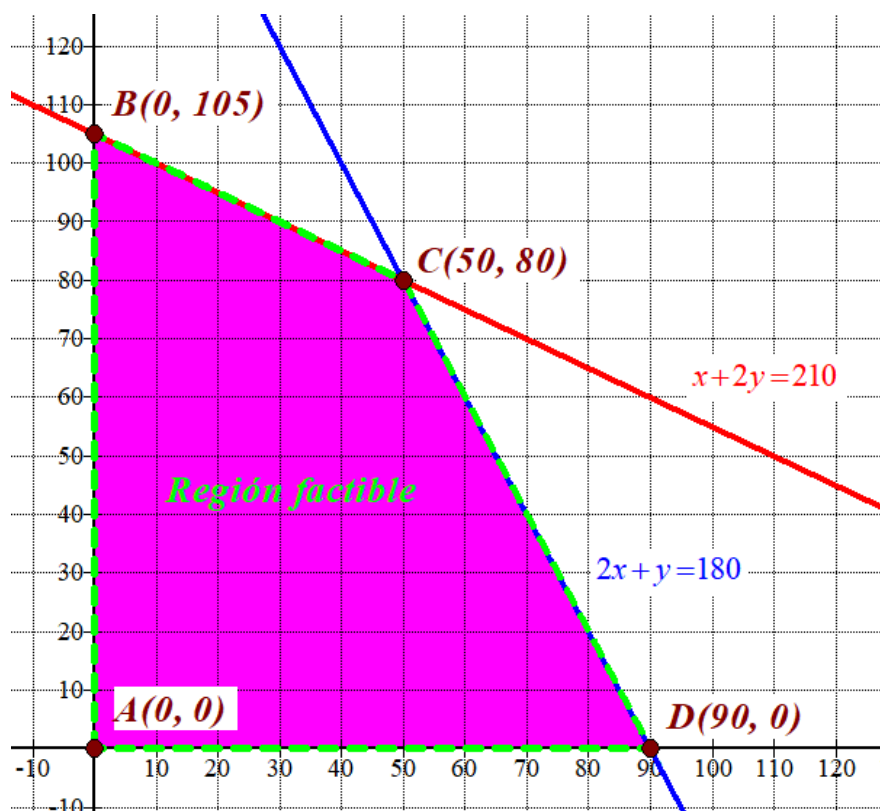


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 210 \\ 2x + y \leq 180 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 + 20 \leq 210 \\ 20 + 10 \leq 180 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 105)$, $C(50, 80)$ y $D(90, 0)$.

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 60x + 80y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 105) \rightarrow B(0, 105) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 105 = 8400$$

$$C(50, 80) \rightarrow B(50, 80) = 60 \cdot 50 + 80 \cdot 80 = 9400 \text{ Máximo}$$

$$D(90, 0) \rightarrow B(90, 0) = 60 \cdot 90 + 80 \cdot 0 = 5400$$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto $C(50, 80)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación de 50 joyas tipo A y 80 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 9400 €.

EJERCICIO 2**Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)****(Opción 1)**

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “k” la matriz A posee rango 3.

b) **(1 PUNTO)** Para $k=1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

a) Para que la matriz A tenga rango 3 su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 4k^2 + 12(k+3) - 12 - 32k = 4k^2 + 12k + 36 - 12 - 32k = 4k^2 - 20k + 24$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4k^2 - 20k + 24 = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3=k} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2=k} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para $k=2$ y $k=3$. La matriz A tiene rango 3 para cualquier valor de “k” distinto de 2 y de 3.

b) Para $k=1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 48 - 12 - 32 = 8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -28 & -12 & 12 \\ 12 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación y calculamos la expresión de la matriz X.

$$AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & -3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -77/2 - 27/2 + 54 \\ 33/2 + 9/2 - 18 \\ 11/2 + 9/2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Opción 2)

2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanés, bolas y llaveros) que han vendido.

Llamamos “x” al número de imanes, “y” al número de bolas y “z” al número de llaveros.

“Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €” $\rightarrow x + 1.5y + 2z = 87$

“El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes” $\rightarrow y = 0.80 \cdot x$

“Con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2 € menos que con la venta de los llaveros” $\rightarrow 1.5y = 2z - 2$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y + 2z = 87 \\ y = 0.80 \cdot x \\ 1.5y = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1.5 \cdot 0.8x + 2z = 87 \\ 1.5 \cdot 0.8x = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 1.2x = 2z - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 0.6x = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.2x + 2z = 87 \\ 0.6x + 1 = z \end{array} \right\} \Rightarrow 2.2x + 2(1 + 0.6x) = 87 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.2x + 2 + 1.2x = 87 \Rightarrow 3.4x = 85 \Rightarrow \boxed{x = \frac{85}{3.4} = 25} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 1 + 0.6 \cdot 25 = 16} \\ \boxed{y = 0.8 \cdot 25 = 20} \end{array} \right.$$

Se han vendido 25 imanes, 20 bolas navideñas y 16 llaveros.

PARTE 2. ANÁLISIS**EJERCICIO 3****Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)****(Opción 1)****3.1.** Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 21x + b$ (a y b : números reales), se pide:

- a) **(0.75 PUNTOS)** Calcula qué valores deben tomar “ a ” y “ b ” para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=1$ y la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, 3)$.
- b) **(1.25 PUNTOS)** Para $a = -12$ y $b = 100$; calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 8]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor que debe tomar “ a ” para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx = 30$$

- a) Si la función tiene un extremo relativo en $x=1$ la derivada de la función debe anularse para este valor: $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + 21x + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 21 \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 2a + 24 \Rightarrow 2a = -24 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-24}{2} = -12}$$

Tenemos que $a = -12$. La función queda $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + b$.

También sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 3)$, por lo que $f(0) = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(x) &= x^3 - 12x^2 + 21x + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = -12$ y $b = 3$.

- b) Para $a = -12$ y $b = 100$ la función queda $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 100 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 24x + 21$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 21 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = \boxed{7=x} \\ \frac{8-6}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

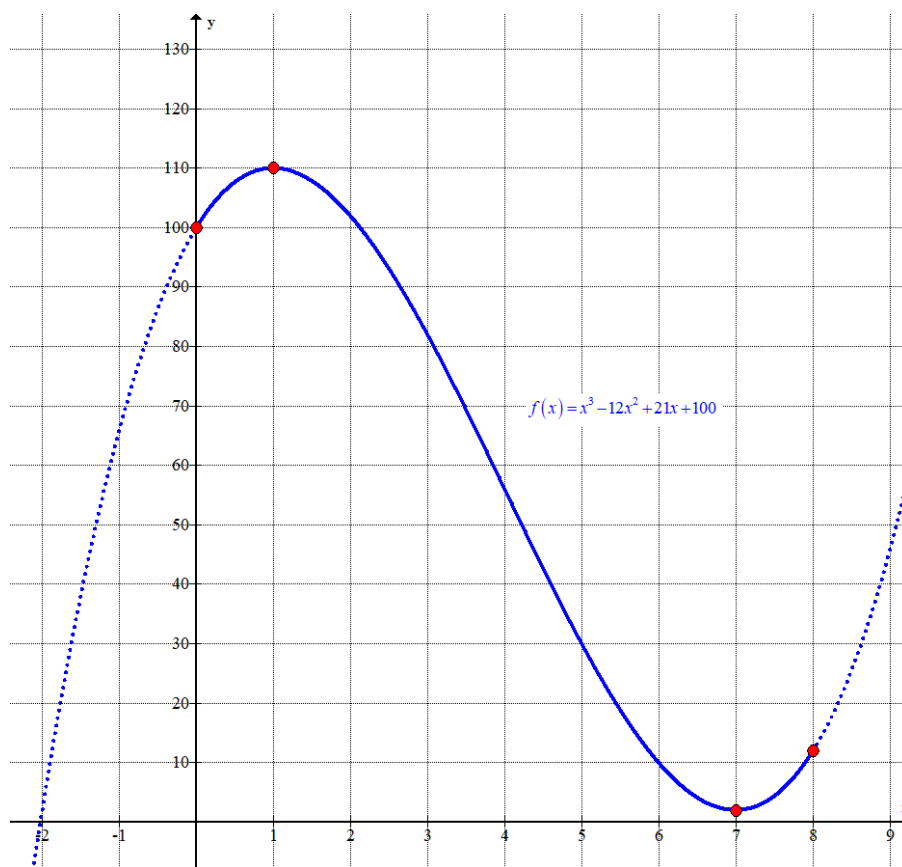
Ambos valores pertenecen al intervalo $[0,8]$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale
 $f'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 24 \cdot 0.5 + 21 = 9.75 > 0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,7)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale
 $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 21 = -15 < 0$. La función decrece en $(1,7)$.
- En el intervalo $(7,8)$ tomamos $x=7.5$ y la derivada vale
 $f'(7.5) = 3 \cdot 7.5^2 - 24 \cdot 7.5 + 21 = 9.75 > 0$. La función crece en $(7,8)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=7$.
 Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los dos puntos críticos obtenidos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 + 100 = 100 \\ f(1) &= 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 100 = 110 \text{ Máximo} \\ f(7) &= 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 21 \cdot 7 + 100 = 2 \text{ Mínimo} \\ f(8) &= 8^3 - 12 \cdot 8^2 + 21 \cdot 8 + 100 = 12 \end{aligned} \right\}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=1$, siendo también máximo absoluto.
 La función presenta un mínimo relativo en $x=7$. Siendo también mínimo absoluto.



c) Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^2 + 2ax + 21) dx &= \left[x^3 + ax^2 + 21x \right]_0^2 = \\ &= \left[2^3 + a \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 \right] - \left[0^3 + a \cdot 0^2 + 21 \cdot 0 \right] = 8 + 4a + 42 = \boxed{4a + 50}\end{aligned}$$

Averiguamos cuando este resultado vale 30.

$$4a + 50 = 30 \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-20}{4} = -5}$$

Se cumple lo pedido para $a = -5$.

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8, \quad 0 \leq t \leq 6$$

siendo t : número de meses transcurridos

- a) **(1 PUNTO)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$ y cuál es el valor de dicho beneficio.
- b) **(1 PUNTO)** Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada del beneficio.

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 = t \\ \frac{6-2}{2} = 2 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[0, 2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, 6]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4, 6]$.

La función crece en $[0, 2) \cup (4, 6]$ y decrece en $(2, 4)$.

La función presenta un máximo relativo en $t = 2$ y un mínimo relativo en $t = 4$.

Valoramos el beneficio en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo para determinar el máximo absoluto del beneficio.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 8 = 8 \\ f(2) &= 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 8 = 28 \\ f(4) &= 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 8 = 24 \\ f(6) &= 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 + 8 = 44 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el sexto mes siendo este beneficio máximo de 44000 €.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda (candidatos a puntos de inflexión).

$$f'(t) = 3t^2 - 18t + 24 \Rightarrow f''(t) = 6t - 18$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow 6t - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 3}$$

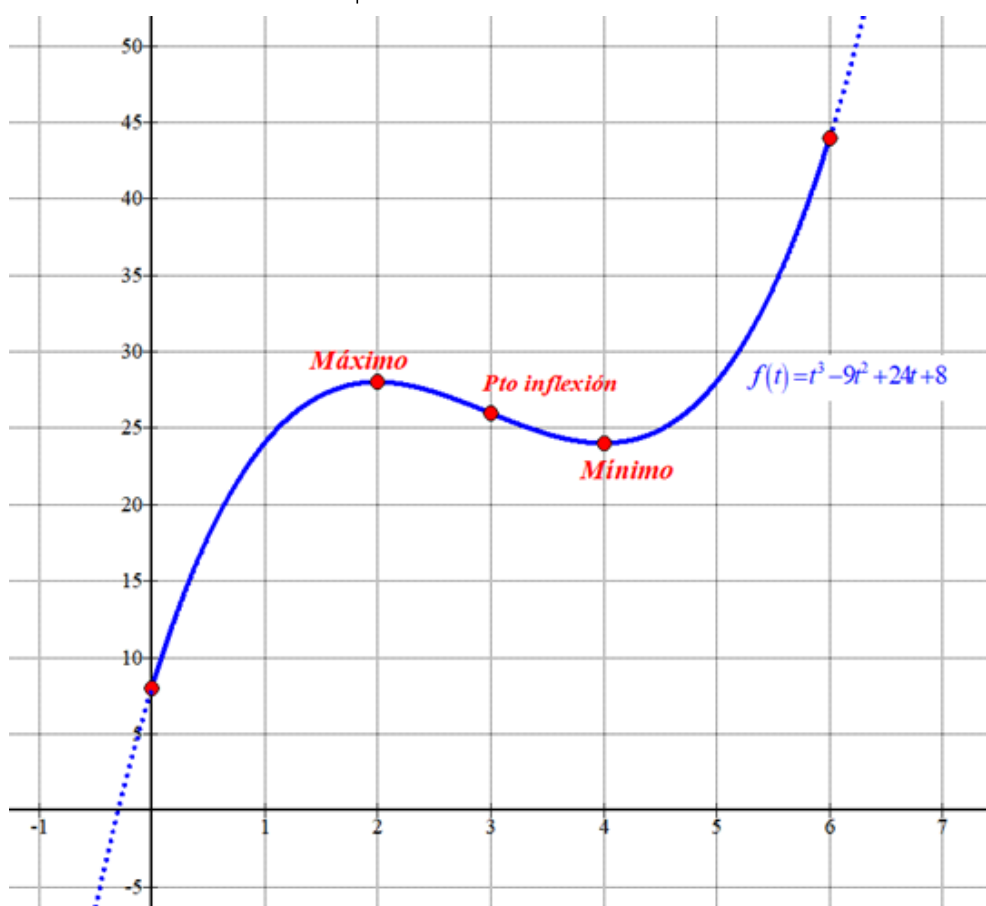
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $t = 3$.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 \cdot 1 - 18 = -12 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $[0, 3)$.
- En el intervalo $(3, 6]$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale $f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(3, 6]$.

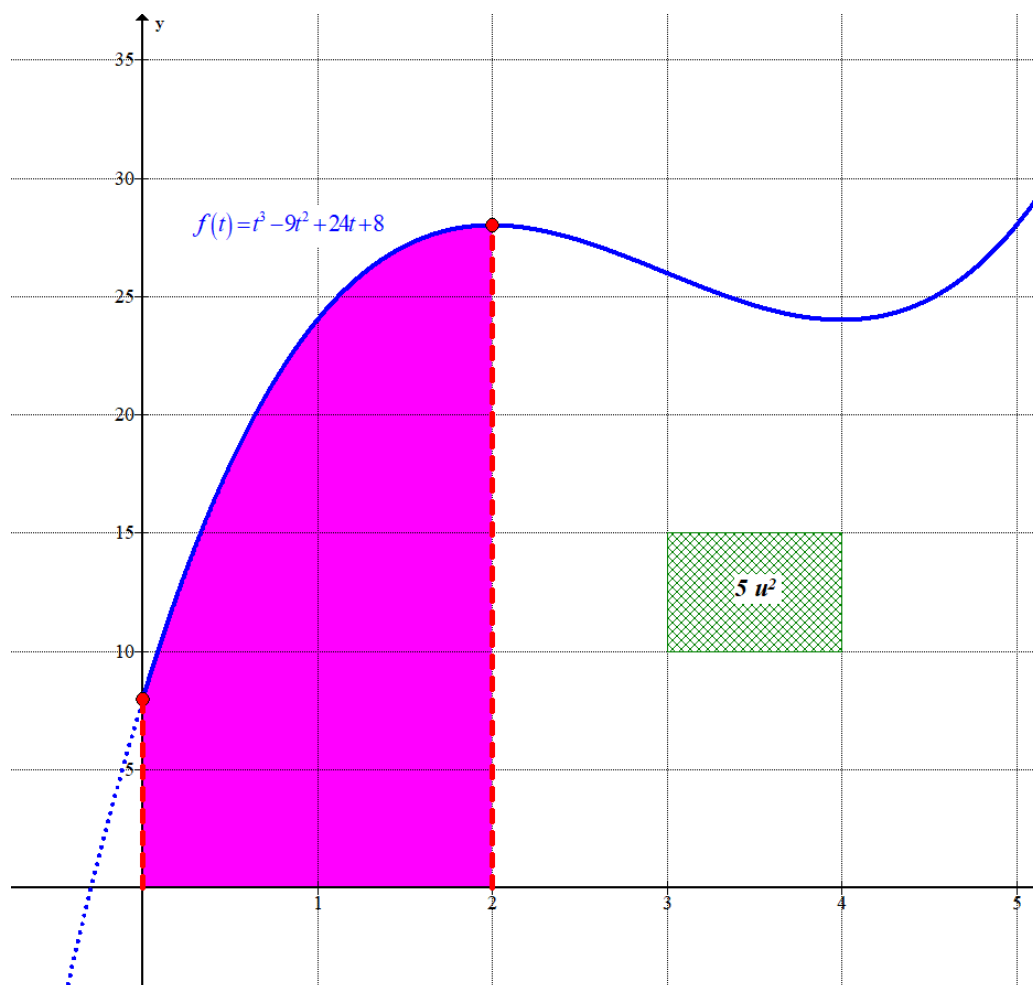
La función presenta un punto de inflexión en $t = 3$. Como $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + 8 = 26$ las coordenadas del punto de inflexión son $(3, 26)$.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8$
0	8
2	28
3	26
4	24
6	44



c) Vemos en el dibujo la región de la cual queremos hallar el área. Su valor está situado entre 40 y 50 unidades cuadradas (contando cuadraditos de 5 unidades cuadradas cada uno).



Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 t^3 - 9t^2 + 24t + 8 dt = \left[\frac{t^4}{4} - 3t^3 + 12t^2 + 8t \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 3 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 \right] = 4 - 24 + 48 + 16 = 44 \end{aligned}$$

El área limitada por la gráfica de f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 44 unidades cuadradas.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**EJERCICIO 4****Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)****(Opción 1)****4.1.** Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes; una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

A1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.

A2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

B) **(2 PUNTOS)** El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.

B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ .

B.2) Supongamos que $\mu = 250$ gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

A) Realizamos una tabla de contingencia.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20		70
Suspenden teórica			
	40		100

Completamos la tabla.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20	50	70
Suspenden teórica	20	10	30
	40	60	100

A.1) La parte teórica la han aprobado el 70% y el 20% han aprobado la parte teórica y la práctica. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un alumno que ha aprobado la parte teórica

apruebe la parte práctica es de $\frac{20}{70} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$.

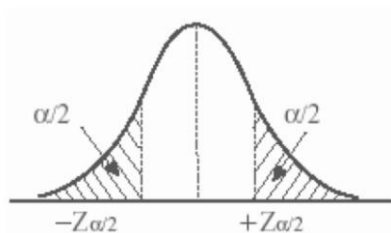
A.2) Los alumnos que aprueban solo la parte práctica son el 20 %, hay otro 50 % que solo aprueba la parte teórica y un 20% que aprueban las dos partes. Por lo tanto, la probabilidad de que al elegir un alumno al azar este apruebe alguna de las dos partes vale $\frac{20 + 50 + 20}{100} = 0.9$.

B) Sea X = El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 100)$.

B.1) Tenemos que tamaño muestra $n = 100$ y Media = $\bar{x} = 255$ gramos.

Con un nivel de confianza del 93 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.81 + 1.82}{2} = 1.815$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51196
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70195
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79672
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87075
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94844
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818
1.8	0.96405	0.96485	0.96562	0.96638

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.815 \cdot \frac{100}{\sqrt{100}} = 18.15 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (255 - 18.15, 255 + 18.15) = (236.85, 273.15)$$

B.2) $X = N(250, 100)$. La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (250) y con desviación típica $\sigma = \frac{100}{\sqrt{25}} = 20$ gramos.

$$\bar{X}_{25} = N(250, 20)$$

Nos piden calcular $P(230 \leq \bar{X}_{25} \leq 280)$.

$$\begin{aligned} P(230 \leq \bar{X}_{25} \leq 280) &= \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(\frac{230 - 250}{20} \leq Z \leq \frac{280 - 250}{20}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = \\ &= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \geq 1) = \\ &= P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \\ &= 0.93319 - [1 - 0.84134] = 0.77453 \end{aligned}$$

z	+0.00	+0.01
0.0	0.50000	0.503
0.1	0.53983	0.543
0.2	0.57926	0.583
0.3	0.61791	0.621
0.4	0.65542	0.659
0.5	0.69146	0.694
0.6	0.72575	0.729
0.7	0.75804	0.761
0.8	0.78814	0.791
0.9	0.81594	0.818
1.0	0.84134	0.843
1.1	0.86433	0.866
1.2	0.88493	0.886
1.3	0.90320	0.904
1.4	0.91924	0.920
1.5	0.93319	0.934

La probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos es de 0.77453.

(Opción 2)**4.2.** Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.

A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) **(2 PUNTOS)** El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ .

B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

A) Aplicamos la regla de Laplace utilizando los datos ofrecidos en la tabla.

A.1) Se fabrican un total de 500 piezas y la máquina 1 fabrica 150. La probabilidad de que al elegir una pieza esta no haya sido fabricada por la máquina 1 vale $\frac{500-150}{500} = 0.7$.

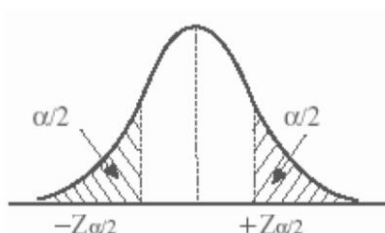
A.2) Del tipo B se fabrican 200 piezas y la máquina 2 ha fabricado 75 de estas piezas. La probabilidad de que una pieza de tipo B haya sido fabricada por la máquina 2 vale $\frac{75}{200} = 0.375$.

B) Sea X = El peso en kg de las mujeres estudiantes de cierta universidad. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 6)$.

B.1) Tenemos que tamaño muestra $n = 64$ y Media = $\bar{x} = 66$ kg.

Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56759	0.57142
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85770	0.85993
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87890	0.88090
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.93125 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (66 - 1.93125, 66 + 1.93125) = (64.06875, 67.93125)$$

B.2) Sabemos que $X = N(\mu, 6)$ y que $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n con un error de 2 kg.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{15.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{15.45}{2} \Rightarrow n = 7.725^2 \approx 59.675$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 2 kg la muestra debe ser de un mínimo de 60 mujeres estudiantes de cierta universidad.

EBAU Extraordinaria 2024

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la
Universidad (EBAU)****Curso 2023 - 2024****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Para contestar a algunas preguntas se puede usar la tabla de la distribución normal que se adjunta al final del cuestionario.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \quad [1.75 \text{ puntos}]$$

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.

Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.

Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? [0.25 puntos]
 ¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. [0.75 puntos]

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente. [1.5 puntos]

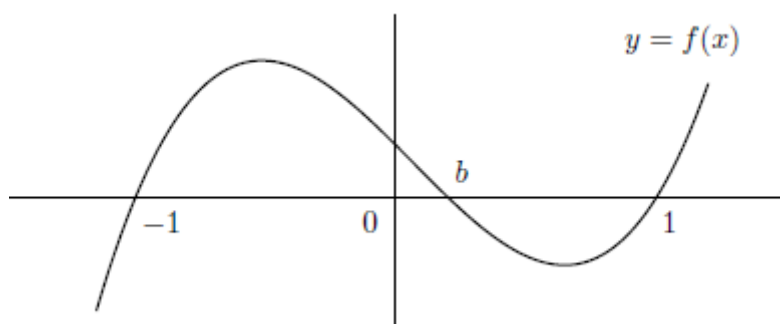
2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0) , e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a , x_0 e y_0 ? [2.5 puntos]

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^b f(x) dx$ y $\int_b^1 f(x) dx$? [0.25 puntos]

Sabemos que $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b . [2.25 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? [1.25 puntos]

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso “Santi saca par”? ¿Y la de “gana Milena” condicionada a “Santi saca par”? ¿Cuál es entonces la probabilidad de “Santi saca par” condicionada a “gana Milena”? [1.25 puntos]

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? [1.75 puntos]

Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? [0.75 puntos]

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.

Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? [1.25 puntos]

¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? [1.25 puntos]

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64802	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98958	0.98988	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

[1.75 puntos]

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones?

[0.75 puntos]

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 2x - 3y + z = 8 \\ -2x - 2y - 6z = -8 \\ \hline -5y - 5z = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 3x - y - 2z = 5 \\ -3x - 3y - 9z = -12 \\ \hline -4y - 11z = -7 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ 4y + 4z = 0 \\ -4y - 11z = -7 \\ \hline -7z = -7 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ -7z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ \boxed{z = \frac{7}{7} = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2 = 5 \\ -4y - 11 = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ \boxed{y = \frac{4}{-4} = -1} \end{cases} \Rightarrow 3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{3} = 2}$$

La solución del sistema es $x = 2$; $y = -1$; $z = 1$

Consideramos el sistema $\begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$ y buscamos el valor de a que lo hace incompatible.

$$\begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 2x \quad -3y \quad +z \quad = 8 \\ -2x \quad -2y \quad -6z \quad = -8 \\ \hline -5y \quad -5z \quad = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + z - 2z = 5 \\ x - z + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - z = 5 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - z = 5 \\ x = 4 - 2z \end{cases} \Rightarrow a(4 - 2z) - z = 5 \Rightarrow 4a - 2az - z = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2a - 1)z = 5 - 4a \Rightarrow \dots$$

Para que sea incompatible debe ser $-2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$.

Para este valor de a la ecuación queda:

$$(-2a - 1)z = 5 - 4a \Rightarrow \left\{ a = \frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow 0z = 5 + \frac{4}{2} = 7 \Rightarrow 0 = 7 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Debemos sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación por $\frac{-1}{2}$ para que resulte un sistema sin soluciones.

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ b(a + d) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a + d = 0 \end{cases} \\ c(a + d) = 0 \rightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a + d = 0 \end{cases} \\ bc + d^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ a + d = 0 \rightarrow \boxed{a = -d} \\ bc + d^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-d)^2 + bc = -1 \\ bc + d^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{bc + d^2 = -1}$$

Como nos piden encontrar una matriz elegimos un valor para a y d . A partir de estos valores determinamos los valores de b y c .

$$a = 1; d = -1 \Rightarrow bc + 1 = -1 \Rightarrow bc = -2 \Rightarrow \text{Tomamos } b = 1; c = -2.$$

Comprobamos que con los valores $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ y $d = -1$ se cumple lo pedido.

Para estos valores la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-1 \\ -2+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cumple lo pedido y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices que cumple $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B. Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles. Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Llamamos “x” al número de pasteles A e “y” al número de pasteles B.
Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Cuencos de masa	Cuencos de chocolate	Beneficio
Nº pasteles A (x)	2x	2x	5x
Nº pasteles B (y)	y	2y	4y
TOTAL	2x + y	2x + 2y	5x + 4y

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 5x + 4y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.
Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B $\rightarrow y \leq 30$

Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles $\rightarrow 2x + y \leq 60; 2x + 2y \leq 80$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x + y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x + y \leq 60 \\ x + y \leq 40 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$$x + y = 40$$

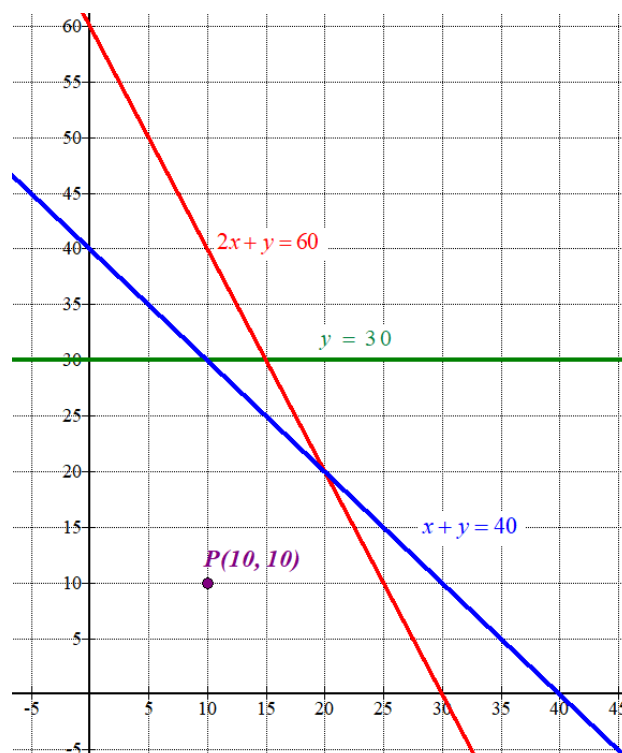
x	y = 40 - x
0	40
20	20
40	0

$$y = 30$$

x	y = 30
0	30
20	30
30	30

$$2x + y = 60$$

x	y = 60 - 2x
0	60
20	20
30	0



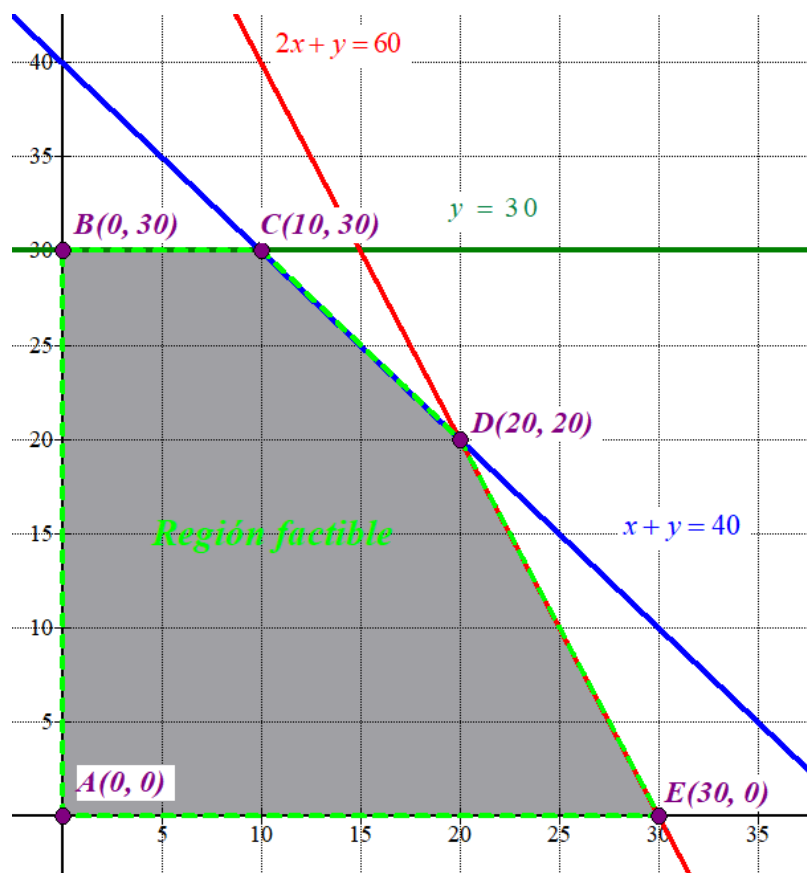
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x + y \leq 60 \\ x + y \leq 40 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 \leq 30 \\ 20 + 10 \leq 60 \\ 10 + 10 \leq 40 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 30 = 120$$

$$C(10, 30) \rightarrow B(10, 30) = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 170$$

$$D(20, 20) \rightarrow B(20, 20) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = 180 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(30, 0) \rightarrow B(30, 0) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 0 = 150$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 180 € y se consigue en el punto $D(20, 20)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue cocinando 20 pasteles de cada clase.

Bloque 2. Análisis.**2.1.- Definimos la función**

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? **[0.25 puntos]**
 ¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{0(0-2)} = \frac{2}{0} = \infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{2(2-2)} = \frac{2}{0} = \infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Hallamos los extremos relativos.

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(x^2 - 2x) - (2x - 2) \cdot 2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-4x + 4}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Tenemos un punto crítico: $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-4(-1) + 4}{((-1)^2 - 2(-1))^2} = \frac{8}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-4(0.5)+4}{((0.5)^2 - 2(0.5))^2} = \frac{32}{9} > 0. \text{ La función crece en } (0,1).$$

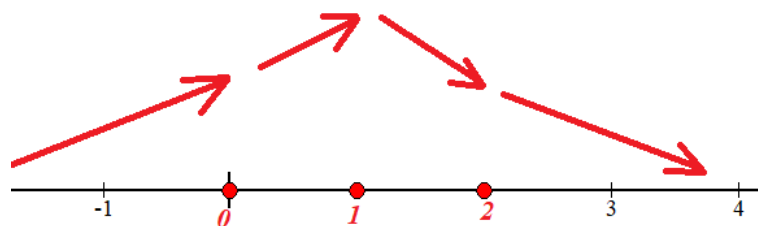
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-4(1.5)+4}{((1.5)^2 - 2(1.5))^2} = \frac{-32}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (1,2).$$

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-4(3)+4}{(3^2 - 2(3))^2} = \frac{-8}{9} < 0.$

La función decrece en $(2,+\infty)$.

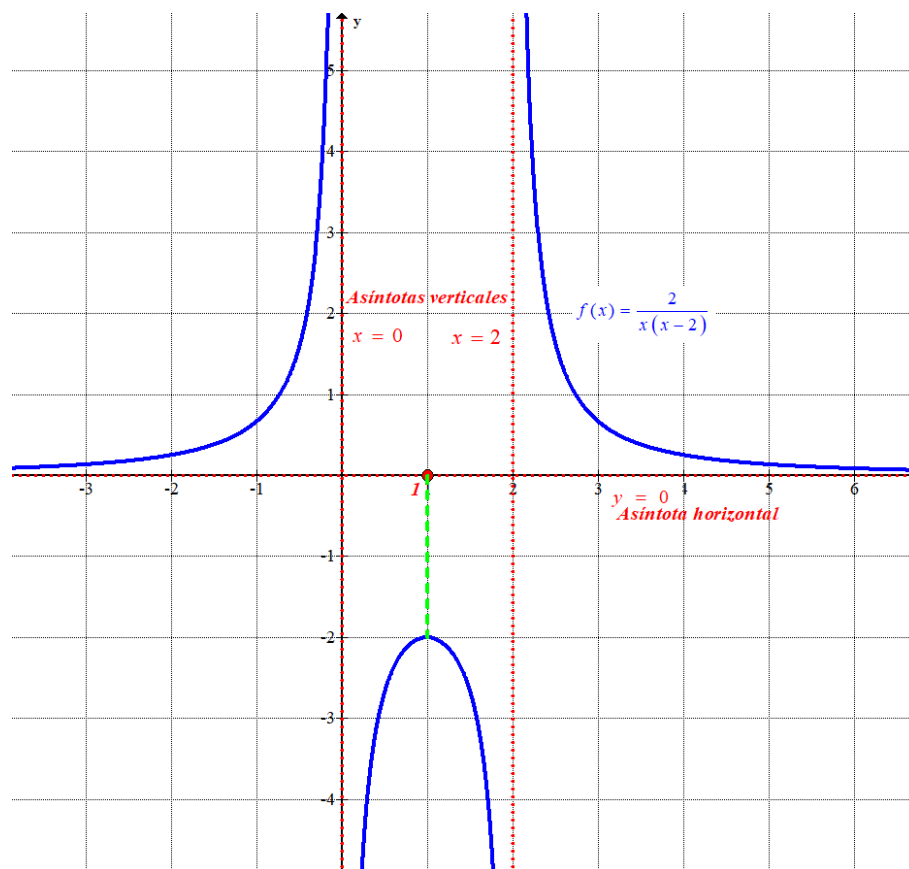
La función sigue el esquema siguiente.



Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$
-2	0.25
0.5	-2.66
1	-2 <i>máximo</i>
1.5	-2,66
3	0.66
4	0.25



2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0) , e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a , x_0 e y_0 ?

[2.5 puntos]

La recta es tangente a la parábola por lo que la pendiente de la recta debe ser igual a la derivada de la parábola en el punto de tangencia.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Parábola} \rightarrow y' = 5 - 2x \\ \text{Recta} \rightarrow y' = a \end{array} \right\} \Rightarrow 5 - 2x_0 = a \Rightarrow -2x_0 = a - 5 \Rightarrow x_0 = \frac{5-a}{2}$$

La recta y la parábola coinciden en el punto (x_0, y_0) .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Parábola} \rightarrow y_0 = 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 \\ \text{Recta} \rightarrow y_0 = a\frac{5-a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 = a\frac{5-a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25-5a}{2} - \frac{25+a^2-10a}{4} - 4 = \frac{5a-a^2}{2} \Rightarrow 2(25-5a) - (25+a^2-10a) - 16 = 2(5a-a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 - 10a - 25 - a^2 + 10a - 16 = 10a - 2a^2 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10-8}{2} = 1 = a \\ \frac{10+8}{2} = 9 = a \end{cases}$$

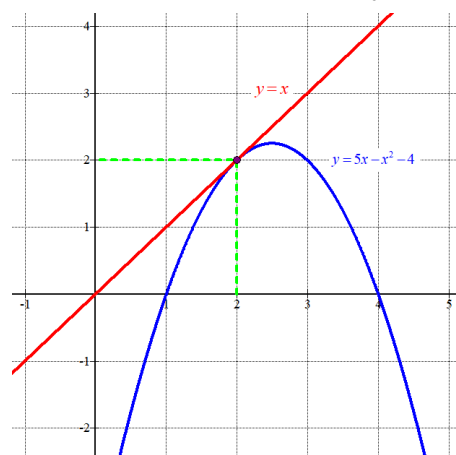
De los dos valores obtenidos elegimos el que nos dé un valor máximo de y_0 .

Si $a = 1$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot 2 = 4$.

Si $a = 9$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-9}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot (-2) = -4$.

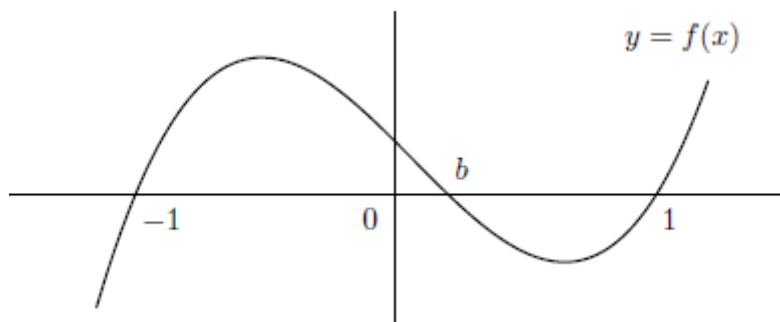
Como el valor máximo de y_0 es 4, podemos decir que los valores buscados son $a = 1$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.

Dibujamos las gráficas y comprobamos la solución obtenida.



2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^b f(x) dx$ y $\int_b^1 f(x) dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b . **[2.25 puntos]**

Como la función es positiva en el intervalo $(-1, b)$ la integral definida $\int_{-1}^b f(x) dx$ es positiva.

Como la función es negativa en el intervalo $(b, 1)$ la integral definida $\int_b^1 f(x) dx$ es negativa.

Calculamos la integral definida $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x - b) dx = \int_{-1}^1 x^3 - bx^2 - x + b dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - \frac{b \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + b \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{b \cdot (-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + b(-1) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{b}{3} - \frac{1}{2} + b - \left[\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{1}{2} - b \right] = 2b - \frac{2b}{3} = \frac{4b}{3}$$

Aplicamos la condición $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}}$$

El valor buscado es $b = \frac{1}{4}$.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

[1.25 puntos]

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso “Santi saca par”? ¿Y la de “gana Milena” condicionada a “Santi saca par”? ¿Cuál es entonces la probabilidad de “Santi saca par” condicionada a “gana Milena”?

[1.25 puntos]

(i) El experimento consiste en lanzar un dado Milena y otro Santi. Suponemos que el primero en lanzar es Milena. Los posibles resultados son:

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
 (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
 (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
 (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
 (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
 (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),

De los 36 posibles resultados del experimento marcamos los que hacen que gane Milena.

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
 (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
 (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
 (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
 (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
 (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),

Milena gana en 21 de los 36 posibles resultados. Aplicando la regla de Laplace.

$$P(\text{Gana Milena}) = \frac{21}{36} = \boxed{\frac{7}{12} \approx 0.5833}$$

Santi gana en los restantes 15 resultados.

$$P(\text{Gane Santi}) = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

(ii) Santi saca par al lanzar el dado en la mitad de las ocasiones.

$$P(\text{Santi saca par}) = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

Santi saca par en 18 de los 36 posibles resultados. En esas 18 formas en las que Santi saca par están incluidos los resultados $(6,2)$, $(6,4)$ y $(6,6)$ que son los resultados en los que gana Milena.

$$P(\text{Gane Milena} / \text{Santi saca par}) = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.1667}$$

Milena gana en 21 de los 36 resultados posibles. De esos resultados favorables a que gane Milena están los resultados $(6,2)$, $(6,4)$ y $(6,6)$ en los que Santi saca par.

$$P(\text{Santi saca par} / \text{Gane Milena}) = \frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7} \approx 0.1429}$$

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**

Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

X = La estatura de las niñas de 3 años en España (en cm). $X = N(95, \sigma)$

Sabemos que $P(X < 102) = 0.97$.

$$P(X < 102) = 0.97 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 95}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z < \frac{102 - 95}{\sigma}\right) = 0.97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = \frac{7}{1.88} = 3.72$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96713	0.96784	0.96855	0.96925	0.96995

La desviación típica tiene un valor aproximado de 3.72 cm.

La distribución de las medias de estatura en muestras de tamaño 25 es una distribución normal con la misma media (95 cm) y con la desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3.72}{\sqrt{25}} = 0.744$ cm.

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.

Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**

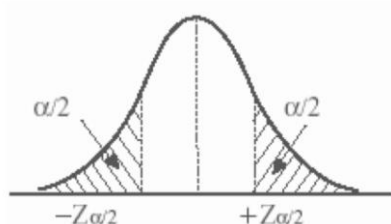
¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

X = Perímetro de un cráneo en centímetros. $X = N(\mu, 1.5)$

Tenemos como dato que $\bar{x} = 56.2 \text{ cm}$ y que el tamaño de la muestra es $n = 36$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.5
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56357	0.5
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.6
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.6
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.6
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.7
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.7
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.8
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.8
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.8
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.8
1.2	0.88493	0.88688	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.8
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.9
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.9
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.9
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.9
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.9
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.9
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.9
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.9

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{36}} = 0.49 \text{ cm}$$

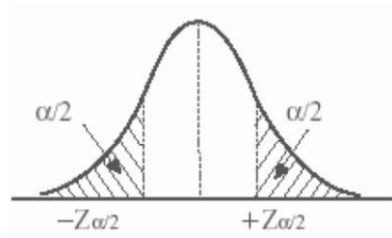
El error es de 0.49 centímetros.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (56.2 - 0.49, 56.2 + 0.49) = (55.71, 56.69)$$

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943
1.6	0.94520	0.94633	0.94744	0.94853	0.94950	0.95053
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994

Como queremos obtener el mismo intervalo de confianza el error debe ser el mismo (0.49 cm).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.49 = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \frac{0.49 \cdot 6}{1.645} = \sigma \Rightarrow \sigma \approx 1.7872$$

La desviación típica debe tener un valor aproximado de 1.7872 cm.

EBAU Ordinaria 2024

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la
Universidad (EBAU)****Curso 2023 - 2024****MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Para contestar a algunas preguntas se puede usar la tabla de la distribución normal que se adjunta al final del cuestionario.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale -1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X? **[2.5 puntos]**

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función f mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?

Representa la gráfica de f , de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

- (i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
- (ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

[1.75 puntos]

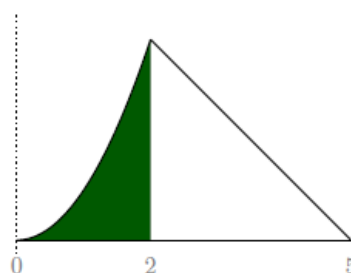
¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1?

¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ?

[0.75 puntos]

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



(i) Determina el valor de a .

[0.75 puntos]

(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo.

[1.75 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.

Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades?

[2.5 puntos]

3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ . El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que $\mu = 6$?

[0.75 puntos]

(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ ?

[0.75 puntos]

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones?

[1 punto]

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese $\mu = 650$ gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr?

[1.25 puntos]

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ .

[1.25 puntos]

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados. ¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

Llamamos “x” a los ducados que dan por un cordero, “y” a los que dan por un puerco y “z” a los que dan por un ternero.

Nos dicen que “por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados” $\rightarrow 5x + y = 26$.

Nos dicen que “por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados” $\rightarrow 3x + 3y + z = 38$.

Y por último, nos dicen que “si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados” $\rightarrow 2x + 2y + 2z = 36$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + z = 38 \\ 2x + 2y + 2z = 36 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + z = 38 \\ x + y + z = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + z = 38 \\ z = 18 - x - y \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ 3x + 3y + 18 - x - y = 38 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ 2x + 2y = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ x + y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + y = 26 \\ y = 10 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 10 - x = 26 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow \boxed{x = \frac{16}{4} = 4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{y = 10 - 4 = 6} \Rightarrow \boxed{z = 18 - 4 - 6 = 8} \end{aligned}$$

Nos dan 4 ducados por cada cordero, 6 por cada puerco y 8 por cada ternero.

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale -1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X?

[2.5 puntos]

Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como su determinante es -2 distinto de cero tiene matriz inversa, la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y sustituimos el valor de las matrices para determinar X.

$$AX = M \Rightarrow X = A^{-1}M \Rightarrow X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0-2 & -2+0 \\ 0+2 & -2+0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A lo hemos calculado y vale -2. Calculamos el determinante de X.

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas. ¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Llamamos “x” a los metros de algodón ecológico e “y” a los metros de hilo de lino de alta calidad. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de trabajo	Coste de fabricación	Beneficio
Metros de algodón ecológico (x)	x	2x	3x
Metros de lino de alta calidad (y)	3y	y	5y
TOTAL	$x + 3y$	$2x + y$	$3x + 5y$

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 3x + 5y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

No quiere emplear más de 21 horas en su tarea $\rightarrow x + 3y \leq 21$

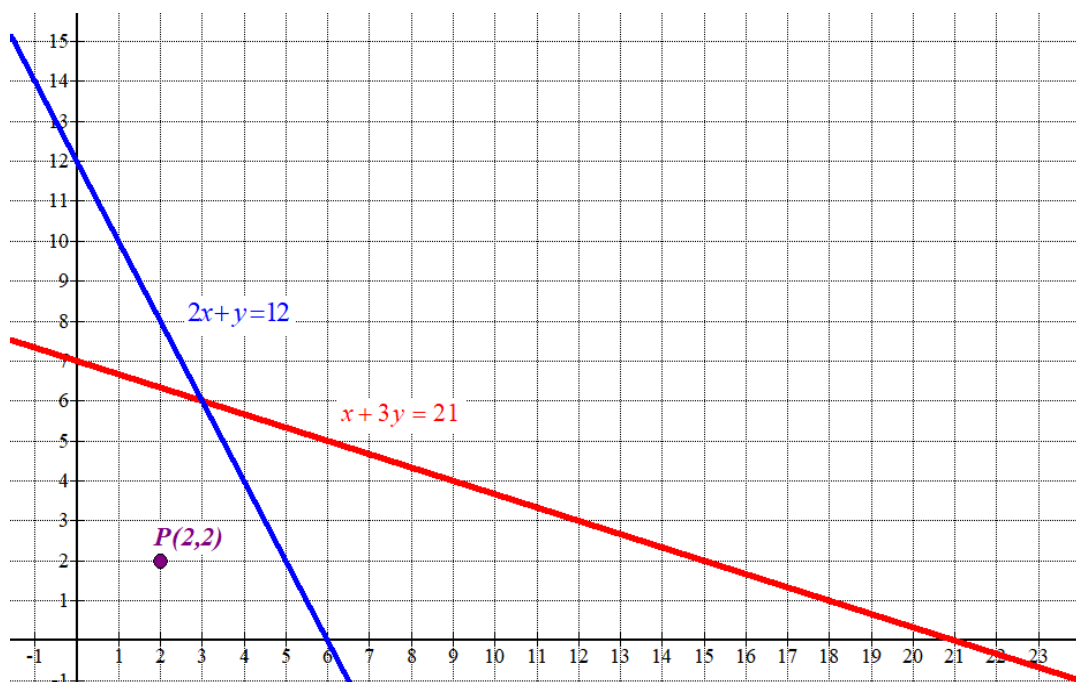
No puede gastar más de 12 monedas en la tarea $\rightarrow 2x + y \leq 12$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 3y \leq 21 \\ 2x + y \leq 12 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

	$x + 3y = 21$	$2x + y = 12$												
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \mid y = \frac{21-x}{3}$	$x \mid y = 12 - 2x$												
El primer cuadrante	<table> <tr><td>0</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>21</td><td>0</td></tr> </table>	0	7	3	6	21	0	<table> <tr><td>0</td><td>12</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>0</td></tr> </table>	0	12	3	6	6	0
0	7													
3	6													
21	0													
0	12													
3	6													
6	0													

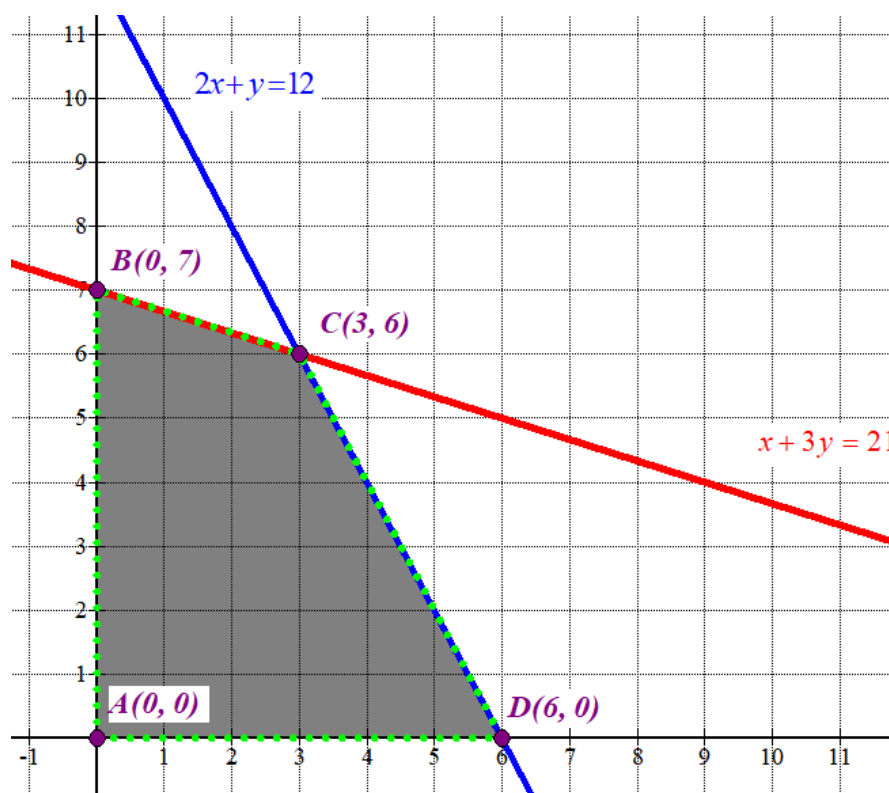


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 3y \leq 21 \\ 2x + y \leq 12 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq 0; 2 \geq 0 \\ 2 + 3 \cdot 2 \leq 21 \\ 2 \cdot 2 + 2 \leq 12 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 3x + 5y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 7) \rightarrow B(0, 7) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 35$$

$$C(3, 6) \rightarrow B(3, 6) = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 39 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(6, 0) \rightarrow B(6, 0) = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 18$$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto $C(3, 6)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con 3 metros de algodón ecológico y 6 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 39 monedas.

Si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes entonces sería de 10 monedas por metro y la nueva función beneficio sería $f(x, y) = 3x + 10y$.

Valoramos la nueva función beneficio en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 7) \rightarrow f(0, 7) = 3 \cdot 0 + 10 \cdot 7 = 70 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(3, 6) \rightarrow f(3, 6) = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 69$$

$$D(6, 0) \rightarrow f(6, 0) = 3 \cdot 6 + 10 \cdot 0 = 18$$

El beneficio máximo se obtiene en el punto $B(0, 7)$.

El objetivo de maximizar el beneficio con las nuevas condiciones se consigue con 0 metros de algodón ecológico y 7 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 70 monedas.

Bloque 2. Análisis.**2.1.-** Definimos la función f mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?Representa la gráfica de f , de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asíntotas verticales. $x = a$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 1}{2 - 2} = \frac{1}{0} = \infty$ la función tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{0 - 2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{-1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

Hallamos los extremos relativos.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 2) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - \cancel{2x} + 4 - x^2 + \cancel{2x} - 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos que averiguamos de qué tipo son viendo el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores. Añadimos el valor $x = 2$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{(0-2)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La

función crece.

- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{1.5^2 - 4 \cdot 1.5 + 3}{(1.5-2)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En el intervalo $(2, 3)$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada vale

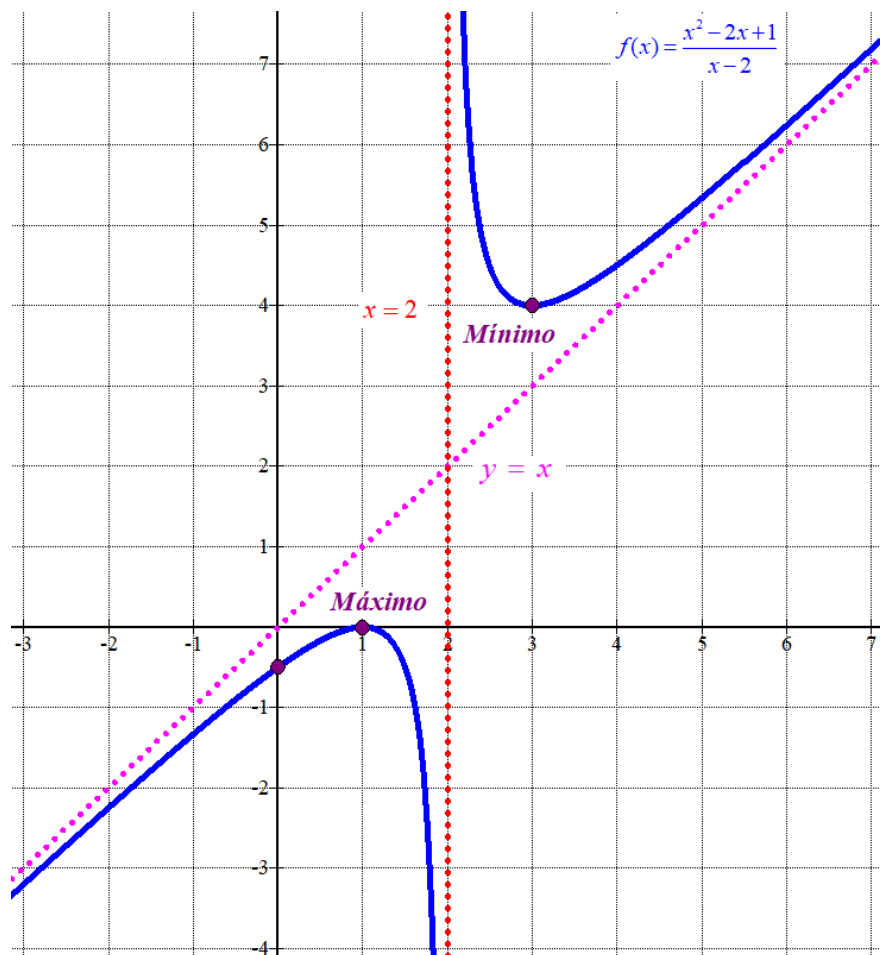
$$f'(2.5) = \frac{2.5^2 - 4 \cdot 2.5 + 3}{(2.5-2)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2 - 4 \cdot 4 + 3}{(4-2)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La

función crece.

Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$. Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$
0	-0.5
1	0 <i>máximo</i>
3	4 <i>mínimo</i>
6	6.25



2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1?

¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ?

[0.75 puntos]

Si su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1 \Rightarrow f'(0) = f'(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \\ f'(0) = f'(1) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 - b = 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 - b \Rightarrow -b = 3 - 2a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 2a = 0 \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

La función queda $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - bx + 1$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3x - b \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-1)^2 - 3(-1) - b = 0 \Leftrightarrow 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \boxed{6 = b}$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{2}$ y $b = 6$

En los puntos de abscisa 0 y 1 hemos visto que las derivadas en dichos puntos son iguales por lo que las rectas tangentes serán paralelas.

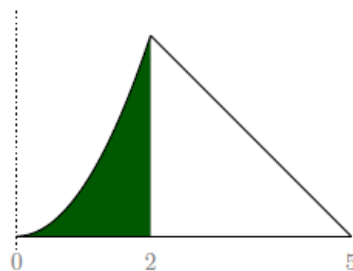
Calculamos la segunda derivada y la valoramos para $x = -1$ dependiendo de su signo tendremos un mínimo o un máximo en $x = -1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda derivada tomar un valor negativo la función tiene un máximo relativo en $x = -1$.

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 5-x & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



(i) Determina el valor de a .

[0.75 puntos]

(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo.

[1.75 puntos]

(i) La función es continua, por lo que debe serlo en $x = 2$. Deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 = a \cdot 2^2 = 4a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 5 - x = 5 - 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

El valor de a buscado es $a = \frac{3}{4}$.

(ii) Hallamos primero el área bajo la parábola entre 0 y 2.

$$\text{Área 1} = \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 dx = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{4} \right]_0^2 = \frac{2^3}{4} - \frac{0^3}{4} = 2 \text{ u}^2$$

Hallamos el área bajo la recta entre 2 y 5.

$$\text{Área 2} = \int_2^5 5 - x dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_2^5 = \left[5 \cdot 5 - \frac{5^2}{2} \right] - \left[5 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right] = 25 - \frac{25}{2} - 10 + 2 = 4.5 \text{ u}^2$$

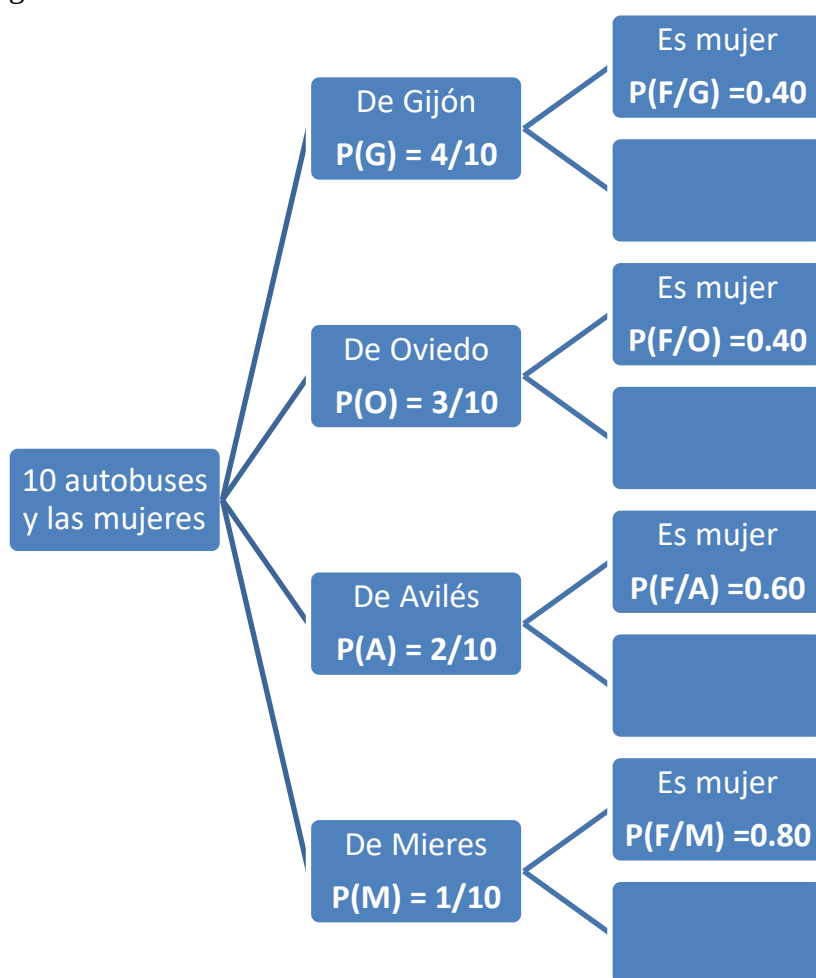
Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.

Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades? **[2.5 puntos]**

Llamamos G a “el autobús viene de Gijón”, O a “el autobús viene de Oviedo”, A a “el autobús viene de Avilés”, M a “el autobús viene de Mieres” y $\bar{F}$ a “La persona elegida es mujer”.

Por los datos del ejercicio sabemos que $P(G) = 4/10 = 0.4$, $P(O) = 3/10 = 0.3$, $P(A) = 2/10 = 0.2$, $P(M) = 1/10 = 0.1$. También que $P(F/G) = 0.4$, $P(F/O) = 0.4$, $P(F/A) = 0.6$ y que $P(F/M) = 0.8$. Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular las probabilidades $P(G/F)$, $P(O/F)$, $P(A/F)$ y $P(M/F)$. Son probabilidades a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{P(G)P(F/G)}{P(G)P(F/G) + P(O)P(F/O) + P(A)P(F/A) + P(M)P(F/M)} =$$

$$= \frac{0.4 \cdot 0.4}{0.4 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{0.16}{0.48} = \frac{16}{48} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

$$P(O/F) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{P(O)P(F/O)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.48} = \frac{0.12}{0.48} = \frac{12}{48} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)P(F/A)}{P(F)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.48} = \frac{0.12}{0.48} = \frac{12}{48} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M)P(F/M)}{P(F)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.48} = \frac{0.08}{0.48} = \frac{8}{48} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.166}$$

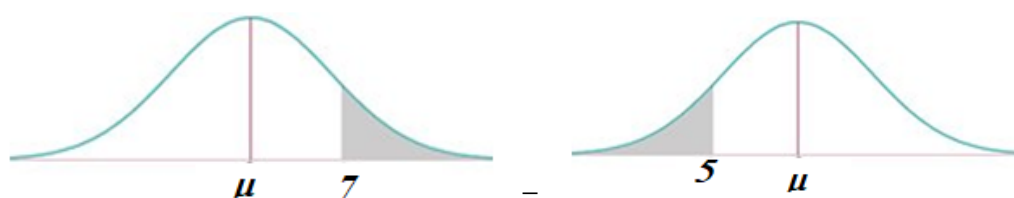
3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ . El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que $\mu = 6$? **[0.75 puntos]**

(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ ? **[0.75 puntos]**

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones? **[1 punto]**

(i) X = la valoración de un producto en una macroencuesta. $X = N(\mu, \sigma)$



(ii) Si $P(X > 7) = P(X < 5) = 0.15866$ determinamos el valor de la desviación típica.

$$P(X > 7) = 0.15866 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{7 - 6}{\sigma}\right) = 0.15866 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 0.15866 = 0.84134 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 1}$$

z	+0.00	+0.01
0.0	0.52440	0.50399
0.1	0.53983	0.54380
0.2	0.57926	0.58317
0.3	0.61791	0.62172
0.4	0.65542	0.65910
0.5	0.69146	0.69497
0.6	0.72575	0.72907
0.7	0.75804	0.76115
0.8	0.78814	0.79103
0.9	0.81594	0.81858
1.0	0.84134	0.84375
1.1	0.86433	0.86650

El valor de σ es 1.

(iii) Nos piden hallar “a” tal que $P(X > a) = 0.025$.

$$P(X > a) = 0.025 \Rightarrow P(X \leq a) = 1 - 0.025 = 0.975 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 6}{1}\right) = 0.975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow a - 6 = 1.96 \Rightarrow \boxed{a = 7.96}$$

Una valoración de 7.96 es superada solamente por el 2.5% de las valoraciones.

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese $\mu = 650$ gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr? **[1.25 puntos]**

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ . **[1.25 puntos]**

X = Peso de una sandía de nuestra huerta expresado en gramos. $X = N(\mu, 40)$

(a) $X = N(650, 40)$. La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (650) y con desviación típica $\sigma = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8$ gramos.

$$\overline{X}_{25} = N(650, 8)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{25} > 666)$.

$$P(\overline{X}_{25} > 666) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{666 - 650}{8}\right) = P(Z > 2) =$$

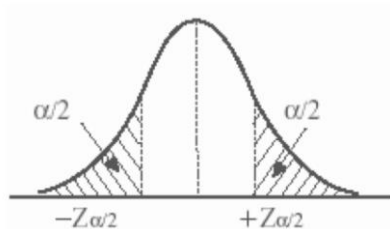
$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

La probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr es de 0.02275.

(b) Tenemos como dato que $\bar{x} = 700$ gramos y que el tamaño de la muestra es $n = 25$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{25}} = 15.68 \text{ gramos}$$

El error es de 15.68 gramos.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (700 - 15.68, 700 + 15.68) = (684.32, 715.68)$$

EBAU Extraordinaria 2023



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la
Universidad (EBAU)**

Curso 2022 - 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota? **[2.5 puntos]**

1.2.- Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{[2 puntos]}$$

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa? **[0.5 puntos]**

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 4,$$

$$x + 2y \leq 6, y$$

$$x \leq 3.$$

[1 punto]

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones:

$$\text{i) } x + \frac{1}{2}y \quad \text{ii) } x + \frac{3}{2}y \quad \text{iii) } x + 3y \quad \text{[1.5 puntos]}$$

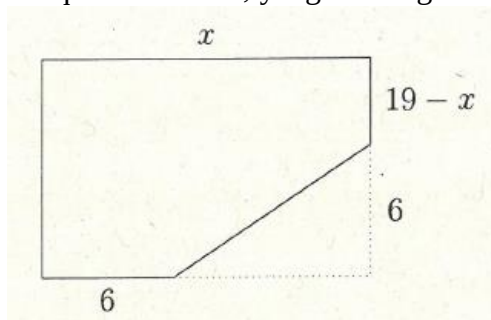
Bloque 2. Análisis.

2.1.- La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta de usuario una cantidad dada por

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a , b , c y d .
[2.5 puntos]

2.2.- En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica.



Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por

$$A(x) = 18 + 22x - x^2$$

¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.
[2.5 puntos]

2.3.- La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas, Calcula sus vértices. [0.5 puntos]

La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas. [2 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos

A = “le gusta pasar sus vacaciones en la playa”;

B = “le gusta pasar sus vacaciones en la montaña”; y

C = “no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones”

Tienen probabilidades

$$P(A) = 0.75, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(C) = 0.1.$$

Se entiende que “le gusta” y “no le gusta” son en cada caso complementarios: cualquier persona respondería o bien “sí” o bien “no” a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

- (i) ¿Cuánto valen $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?
- (ii) ¿son A y B sucesos independientes?
- (iii) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C? **[2.5 puntos]**

3.2.- Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\bar{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\bar{X} < 11).$$

- (i) ¿Cuánto vale dicha probabilidad? **[1 punto]**
- (ii) ¿Qué número es n ? **[1.25 puntos]**
- (iii) ¿Hay algún valor a para el que $P(\bar{X} < a)$ no dependa de n ? **[0.25 puntos]**

3.3.- Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17.26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo:

“Qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17.26 m. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6.93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medio 100 árboles para calcularlo”.

¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto? **[2.5 puntos]**

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

[2.5 puntos]

Llamamos “x” a los puntos que se dan por cada victoria, “y” a los puntos que se dan por empate y “z” a los puntos que se dan por derrota.

“5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas” $\rightarrow 5y = 2x + 2z$

“1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto” $\rightarrow x = 3z + 1$

“1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate” $\rightarrow z + 5 = x + y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5y = 2x + 2z \\ x = 3z + 1 \\ z + 5 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 2(3z + 1) + 2z \\ z + 5 = 3z + 1 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 6z + 2 + 2z \\ 4 = 2z + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = 8z + 2 \\ 4 - 2z = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(4 - 2z) = 8z + 2 \Rightarrow 20 - 10z = 8z + 2 \Rightarrow 18 = 18z \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 3 \cdot 1 + 1 = 4} \\ \boxed{y = 4 - 2 \cdot 1 = 2} \end{cases}$$

Se deben dar 4 puntos por victoria, 2 por empate y 1 por derrota.

1.2.- Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [2 \text{ puntos}]$$

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

[0.5 puntos]

Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \rightarrow A \text{ tiene matriz inversa.}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 1 = 0 \rightarrow B \text{ no tiene matriz inversa.}$$

Calculamos la inversa de la matriz A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A⁻¹ es la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

La matriz B no tiene inversa pues su determinante vale 0.

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 4,$$

$$x + 2y \leq 6, y$$

$$x \leq 3.$$

[1 punto]

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones:

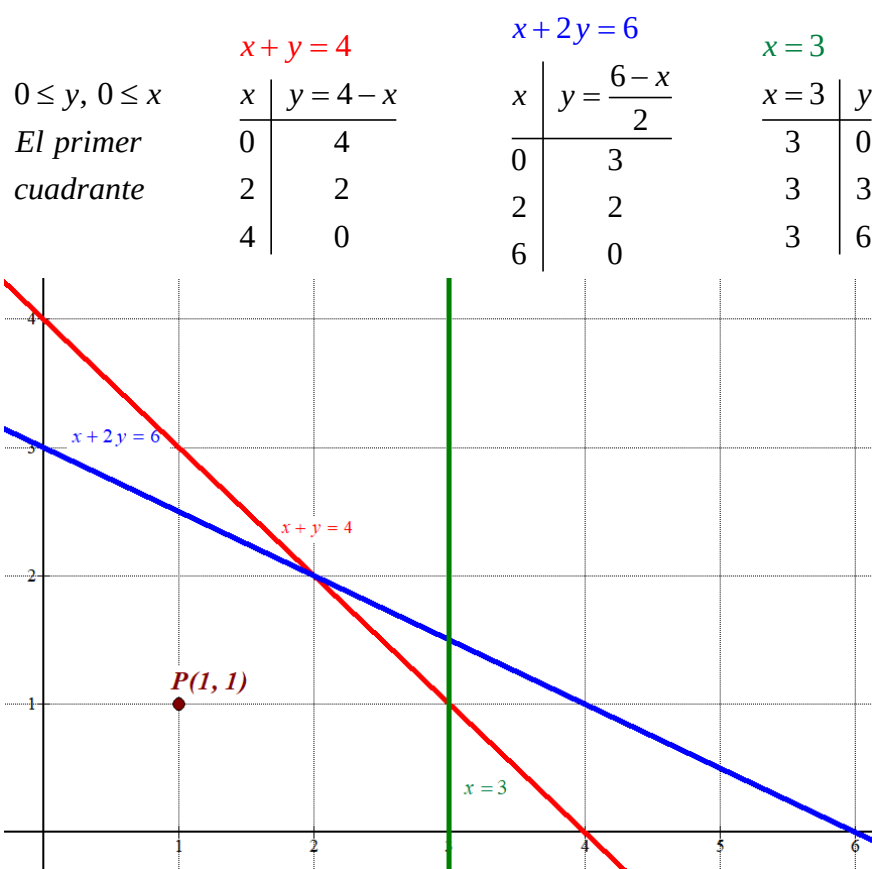
i) $x + \frac{1}{2}y$

ii) $x + \frac{3}{2}y$

iii) $x + 3y$

[1.5 puntos]

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 0 \leq y, 0 \leq x, \\ x + y \leq 4, \\ x + 2y \leq 6, y \\ x \leq 3. \end{array} \right\}$ la región es la zona del primer cuadrante situada por

debajo de las rectas roja y azul, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple las condiciones.

$$0 \leq 1, 0 \leq 1,$$

$$1 + 1 \leq 4,$$

$$1 + 2 \cdot 1 \leq 6, y$$

$$1 \leq 3.$$

¡Se cumplen!

Coloreamos de gris la región.



Para determinar en qué punto de la región se alcanza un valor máximo valoramos cada función en cada uno de los vértices de la región.

i) $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow f(0, 3) = 0 + \frac{1}{2}3 = 1.5$$

$$C(2, 2) \rightarrow f(2, 2) = 2 + \frac{1}{2}2 = 3$$

$$D(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = 3 + \frac{1}{2}1 = 3.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 3 + \frac{1}{2}0 = 3$$

El valor máximo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ se obtiene en el punto D(3, 1).

ii) $g(x, y) = x + \frac{3}{2}y$

$$A(0, 0) \rightarrow g(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow g(0, 3) = 0 + \frac{3}{2}3 = 4.5$$

$$C(2, 2) \rightarrow g(2, 2) = 2 + \frac{3}{2}2 = 5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(3, 1) \rightarrow g(3, 1) = 3 + \frac{3}{2}1 = 4.5$$

$$E(3, 0) \rightarrow g(3, 0) = 3 + \frac{3}{2}0 = 3$$

El valor máximo de la función $g(x, y) = x + \frac{3}{2}y$ se obtiene en el punto C(2, 2)

iii) $h(x, y) = x + 3y$

$$A(0, 0) \rightarrow h(0, 0) = 0$$

$$B(0, 3) \rightarrow h(0, 3) = 0 + 3 \cdot 3 = 9 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(2, 2) \rightarrow h(2, 2) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$D(3, 1) \rightarrow h(3, 1) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$E(3, 0) \rightarrow h(3, 0) = 3 + 3 \cdot 0 = 3$$

El valor máximo de la función $h(x, y) = x + 3y$ se obtiene en el punto B(0, 3).

Bloque 2. Análisis.

2.1.- La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta de usuario una cantidad dada por

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a , b , c y d .

[2.5 puntos]

Averiguamos los valores de a , b , c y d que hacen continua la función $r(t)$.

La función es continua en $t = 10$.

Corregimos la expresión de la función para que sea posible su continuidad en este valor.

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ at + b & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ ct + d & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} r(10) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 10^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^-} 0 = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 10^+} at + b = 10a + b \\ r(10) &= \lim_{t \rightarrow 10^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -10a}$$

La función es continua en $t = 20$.

$$\left. \begin{aligned} r(20) &= L/2 \\ \lim_{t \rightarrow 20^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 20^-} at - 10a = 10a \\ \lim_{t \rightarrow 20^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 20^+} ct + d = 20c + d \\ r(20) &= \lim_{t \rightarrow 20^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 20^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 10a &= \frac{L}{2} \\ 20c + d &= \frac{L}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= \frac{L}{20} \rightarrow b = -10 \frac{L}{20} = \frac{-L}{2} \\ 20c + d &= \frac{L}{2} \end{aligned} \right\}$$

La función es continua en $t = 60$.

$$\left. \begin{aligned} r(60) &= L \\ \lim_{t \rightarrow 60^-} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 60^-} ct + d = 60c + d \\ \lim_{t \rightarrow 60^+} r(t) &= \lim_{t \rightarrow 60^+} L = L \\ r(60) &= \lim_{t \rightarrow 60^-} r(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} r(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{L = 60c + d}$$

Sabemos que $a = \frac{L}{20}$, $b = \frac{-L}{2}$. Reunimos el resto de ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 60c + d = L \\ 20c + d = \frac{L}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 60c + d = L \\ -20c - d = -\frac{L}{2} \end{array} \right\}$$

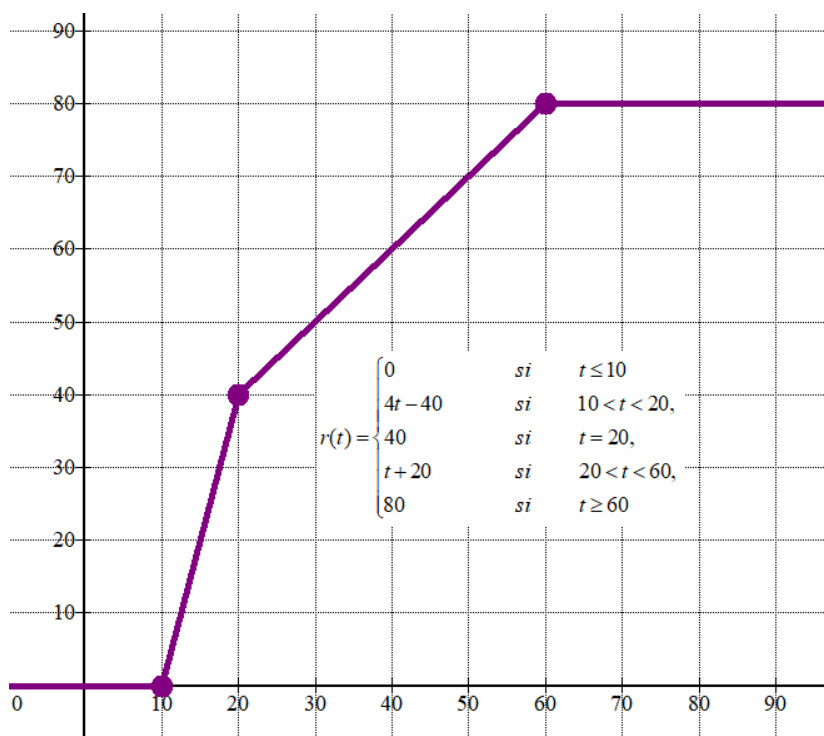
$$\overline{40c = \frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{c = \frac{L}{80}} \Rightarrow 20 \frac{L}{80} + d = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{4} + d = \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{L}{20}$, $b = -\frac{L}{2}$, $c = \frac{L}{80}$ y $d = \frac{L}{4}$

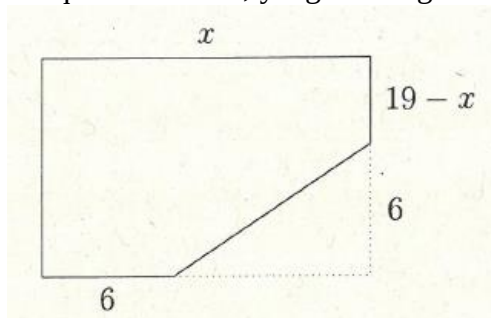
Para estos valores la función queda $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ \frac{L}{20}t - \frac{L}{2} & \text{si } 10 < t < 20, \\ L/2 & \text{si } t = 20, \\ \frac{L}{80}t + \frac{L}{4} & \text{si } 20 < t < 60, \\ L & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$

Para poder dibujar su gráfica fijamos un valor para L, por ejemplo $L = 80$.

La función que vamos a representar queda $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 10 \\ 4t - 40 & \text{si } 10 < t < 20, \\ 40 & \text{si } t = 20, \\ t + 20 & \text{si } 20 < t < 60, \\ 80 & \text{si } t \geq 60 \end{cases}$



2.2.- En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica.

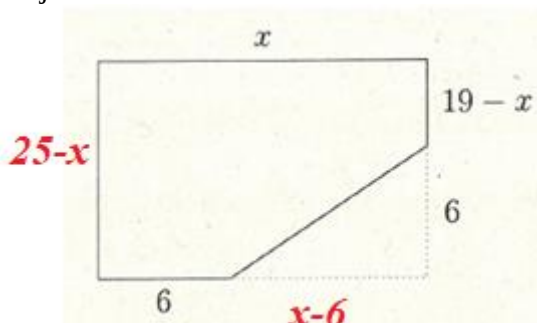


Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por

$$A(x) = 18 + 22x - x^2$$

¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima. **[2.5 puntos]**

Completamos los datos del dibujo.



El área del polígono dibujado es el área del rectángulo de lados x y $25 - x$ menos el área del triángulo de la esquina inferior derecha, que tiene de base $x - 6$ y de altura 6.

$$\text{Área polígono} = \text{Área rectángulo} - \text{Área triángulo} =$$

$$= x(25 - x) - \frac{(x - 6)6}{2} = 25x - x^2 - \frac{6x - 36}{2} = 25x - x^2 - 3x + 18 = \boxed{18 + 22x - x^2 = A(x)}$$

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} A'(x) = 22 - 2x \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 22 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

Sustituimos en la derivada segunda y comprobamos si es máximo o mínimo.

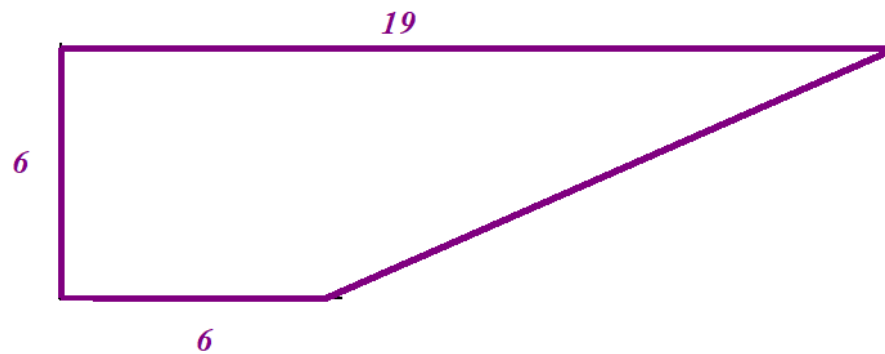
$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(11) = -2 < 0$$

En $x = 11$ hay un máximo relativo del área.

Para decidir el valor máximo y mínimo de la función área valoramos la función en los extremos del intervalo de definición y en el punto crítico: 6, 11 y 19.

$$\left. \begin{aligned} A(6) &= 18 + 22 \cdot 6 - 6^2 = 114 \\ A(11) &= 18 + 22 \cdot 11 - 11^2 = 139 \text{ ¡Máximo!} \\ A(19) &= 18 + 22 \cdot 19 - 19^2 = 75 \text{ ¡Mínimo!} \end{aligned} \right\}$$

La función área toma su valor máximo en $x = 11$ y su valor mínimo en $x = 19$.
Dibujamos la figura para $x = 19$.



2.3.- La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas, Calcula sus vértices. **[0.5 puntos]**

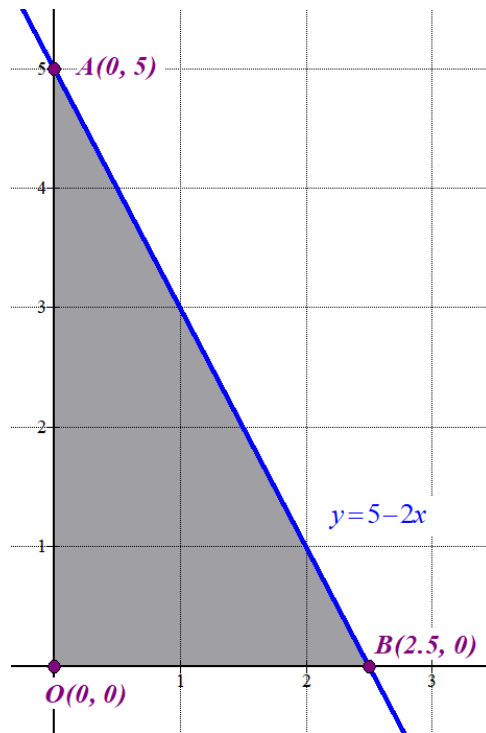
La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas. **[2 puntos]**

Uno de los vértices del triángulo es el origen de coordenadas $O(0, 0)$. Hallamos las coordenadas de los otros dos vértices.

$$\left. \begin{array}{l} y = 5 - 2x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 5 - 0 = 5 \Rightarrow A(0, 5)$$

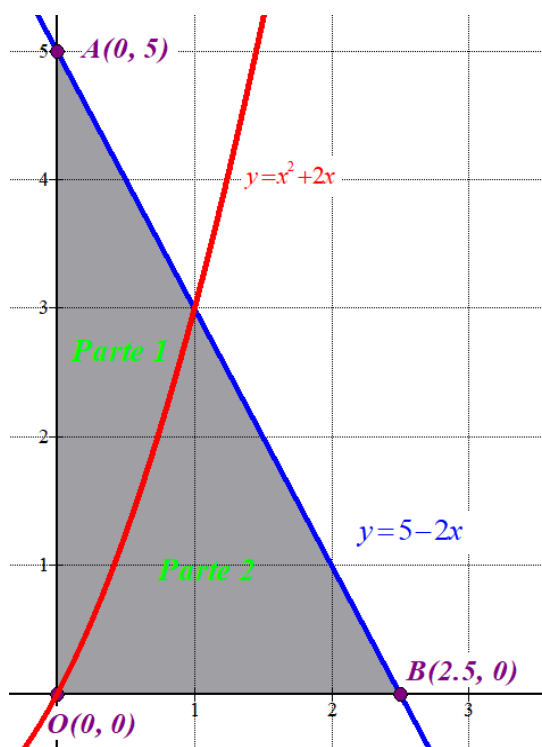
$$\left. \begin{array}{l} y = 5 - 2x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 5 - 2x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow B(2.5, 0)$$

Lo dibujamos.



Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la parábola.

x	$y = x^2 + 2x$
0	0
1	3
2	8
3	15



La gráfica de la parábola divide el triángulo AOB en dos partes: La parte 1 y la parte 2.
El área de la parte 1 es la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

$$\begin{aligned}\text{Área parte 1} &= \int_0^1 (5 - 2x - (x^2 + 2x)) dx = \int_0^1 (5 - 2x - x^2 - 2x) dx = \int_0^1 (-x^2 - 4x + 5) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right] = -\frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{8}{3} u^2}\end{aligned}$$

El área del triángulo AOB es $\frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2.5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{4} u^2$.

El área de la parte 2 es la diferencia entre el área del triángulo y el área de la parte 1.

$$\text{Área parte 2} = \text{Área triángulo AOB} - \text{Área parte 1} = \frac{25}{4} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{43}{12} u^2}$$

Los vértices del triángulo son los puntos O(0, 0), A(0, 5), B(2.5, 0). Los puntos de corte de los lados del triángulo y la parábola son O(0, 0) y P(1, 3).

El área del triángulo son 6.25 unidades cuadradas. Cada una de las partes en las que divide el triángulo la parábola son $\frac{8}{3} u^2$ y $\frac{43}{12} u^2$.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos

A = “le gusta pasar sus vacaciones en la playa”;

B = “le gusta pasar sus vacaciones en la montaña”; y

C = “no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones”

Tienen probabilidades

$$P(A) = 0.75, \quad P(B) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(C) = 0.1.$$

Se entiende que “le gusta” y “no le gusta” son en cada caso complementarios: cualquier persona respondería o bien “sí” o bien “no” a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

(i) ¿Cuánto valen $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$?

(ii) ¿son A y B sucesos independientes?

(iii) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C ? **[2.5 puntos]**

(i) El suceso C es $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

$$P(C) = 0.1 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0.1 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0.1 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.9}$$

Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.9 = 0.75 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.75 + 0.5 - 0.9 = 0.35}$$

(ii) Para que A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.75 \\ P(B) = 0.5 \end{array} \right\} \rightarrow P(A)P(B) = 0.75 \cdot 0.5 = 0.375 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.350 \neq 0.375 = P(A)P(B) \\ P(A \cap B) = 0.35 \end{array} \right.$$

Los sucesos A y B no son independientes.

(iii) Nos piden calcular $P(B/\bar{C})$.

Si el suceso C es $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ entonces el suceso $\bar{C} = A \cup B$.

Así $B \cap \bar{C} = B \cap (A \cup B) = B$.

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B/\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(B)}{1 - P(C)} = \frac{0.5}{1 - 0.1} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

3.2.- Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X , y llamaremos $\bar{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que

$$P(X < 15) = P(\bar{X} < 11).$$

- (i) ¿Cuánto vale dicha probabilidad? **[1 punto]**
 (ii) ¿Qué número es n ? **[1.25 puntos]**
 (iii) ¿Hay algún valor a para el que $P(\bar{X} < a)$ no dependa de n ? **[0.25 puntos]**

$X = N(10, 4)$. La distribución de las medias muestrales es una normal de la misma media (10) y de desviación típica $\frac{4}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{X} = N\left(10, \frac{4}{\sqrt{n}}\right)$

(i) Calculamos $P(X < 15)$.

$$P(X < 15) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{15-10}{4}\right) = P(Z < 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.89436}$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52391
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56357
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60259
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64059
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71227
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89436	0.89619
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308

(ii) Aplicamos la igualdad $P(\bar{X} < 11) = P(X < 15) = 0.89436$

$$P(\bar{X} < 11) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{11-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.89436 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = 1.25 \Rightarrow \sqrt{n} = 5 \Rightarrow \boxed{n = 25}$$

(iii) Tenemos que $P(\bar{X} < a) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{a-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z < \frac{(a-10)\sqrt{n}}{4}\right)$

Para que no dependa del valor de n debe ser $a = 10$, así tenemos que:

$$P(\bar{X} < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{10-10}{4/\sqrt{n}}\right) = P(Z < 0) = 0.5$$

Y este valor no depende del valor de n .

3.3.- Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17.26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo:

“Qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17.26 m. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6.93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medio 100 árboles para calcularlo”.

¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto? **[2.5 puntos]**

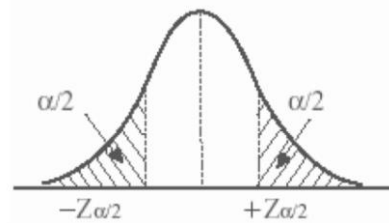
X = Altura de los árboles de un bosque en metros. $X = N(\mu, 6.93)$

Tamaño de la muestra = $n = 100$.

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943
1.6	0.94520	0.94633	0.94744	0.94853	0.94950	0.95053
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95816	0.95907	0.95994



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6.93}{\sqrt{100}} \approx 1.14$$

El error es de 1.14 metros.

El intervalo de confianza es $(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error)$ y cómo nos dicen que el extremo superior es

$$17.26 \text{ tenemos que } \bar{x} + Error = 17.26 \Rightarrow \bar{x} + 1.14 = 17.26 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 16.12 \text{ metros}}$$

El promedio de la altura de los pinos de la muestra es 16.12 metros.

Con este dato tenemos que el intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (16.12 - 1.14, 17.26) = (14.98, 17.26)$$

EBAU Ordinaria 2023



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2022 - 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver a las preguntas es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase?

[2 puntos]

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total?

[0.5 puntos]

1.2.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlela:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC

[2.5 puntos]

1.3.- Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x , y después usaremos la segunda durante un tiempo y .

Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel.

Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.

¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

[2.5 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

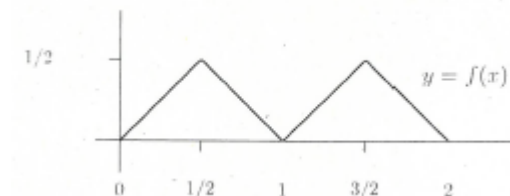
en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio?

[0.25 puntos]

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

2.2.- Una función f , definida en el intervalo $[0, 2]$, tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

2.3.- Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. **[1 punto]**

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos:

A = “la primera bola es 0”

B = “la primera bola es 5”

C = “la segunda bola es mayor que la primera”

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) $P(A)$

(ii) $P(B)$

(iii) $P(C)$

(iv) $P(A/C)$

(v) $P(B/C)$

[2.5 puntos]

3.2.- La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica de 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X . **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

3.3.- Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene un valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\bar{X} = 38.6$ cm.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

SOLUCIONES**Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.**

1.1.- Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase?

[2 puntos]

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total?

[0.5 puntos]

Llamamos “x” al número de botellas de vino joven, “y” al número de botellas de crianza y “z” al número de botellas de reserva.

“Ha comprado cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas” $\rightarrow 12z = 4x + 8y$

“si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más” $\rightarrow 4x + 8z + 12y = 20 + 4x + 8y + 12z \Rightarrow 4y - 4z = 20 \Rightarrow y - z = 5$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 12z = 4x + 8y \\ y - z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ y = 5 + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 5 + z + z = 100 \\ 3z = x + 2(5 + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 95 \\ 3z = x + 10 + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 95 \\ z = x + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2(x + 10) = 95 \Rightarrow x + 2x + 20 = 95 \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 25 + 10 = 35 \Rightarrow y = 5 + 35 = 40$$

(i) Ha comprado 25 botellas de vino joven, 40 de vino de crianza y 35 de vino reserva.

(ii) Ha gastado $25 \cdot 4 = 100$ € en el vino joven, $40 \cdot 8 = 320$ € en el de crianza y $35 \cdot 12 = 420$ € en el de reserva. En total $100 + 320 + 420 = 840$ €.

1.2.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúla:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC **[2.5 puntos]**

(i) Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Al ser el determinante nulo no existe la inversa de la matriz A.

(ii) Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo, la inversa existe y es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(iii) Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo, existe la inversa y es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(iv) Determinamos la expresión de la matriz ABC.

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3+3 \\ -12 & -6-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+6 & -6+6 \\ -12-12 & 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobamos si el determinante es nulo o no.

$$|ABC| = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

No existe la inversa de la matriz ABC .

(v) Determinamos la expresión de la matriz BC .

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2+1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si el determinante es nulo o no. De no serlo existe la inversa y la calculamos.

$$|BC| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12 \neq 0$$

$$(BC)^{-1} = \frac{Adj(BC)^T}{|BC|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

El determinante es no nulo y la inversa es $(BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

1.3.- Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x , y después usaremos la segunda durante un tiempo y . Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel. ¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible? **[2.5 puntos]**

Llamamos “ x ” al número de horas con la primera técnica e “ y ” al número de horas con la segunda técnica.

Hacemos una tabla para establecer las condiciones del problema.

	g de cobre	g de zinc	g de níquel	Tiempo
Nº horas 1ª técnica (x)	$8x$	$3x$	x	x
Nº horas 2ª técnica (y)	$4y$	$6y$	$12y$	y
TOTAL	$8x + 4y$	$3x + 6y$	$x + 12y$	$x + y$

La función objetivo es el tiempo total $f(x, y) = x + y$. Nuestro objetivo es minimizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

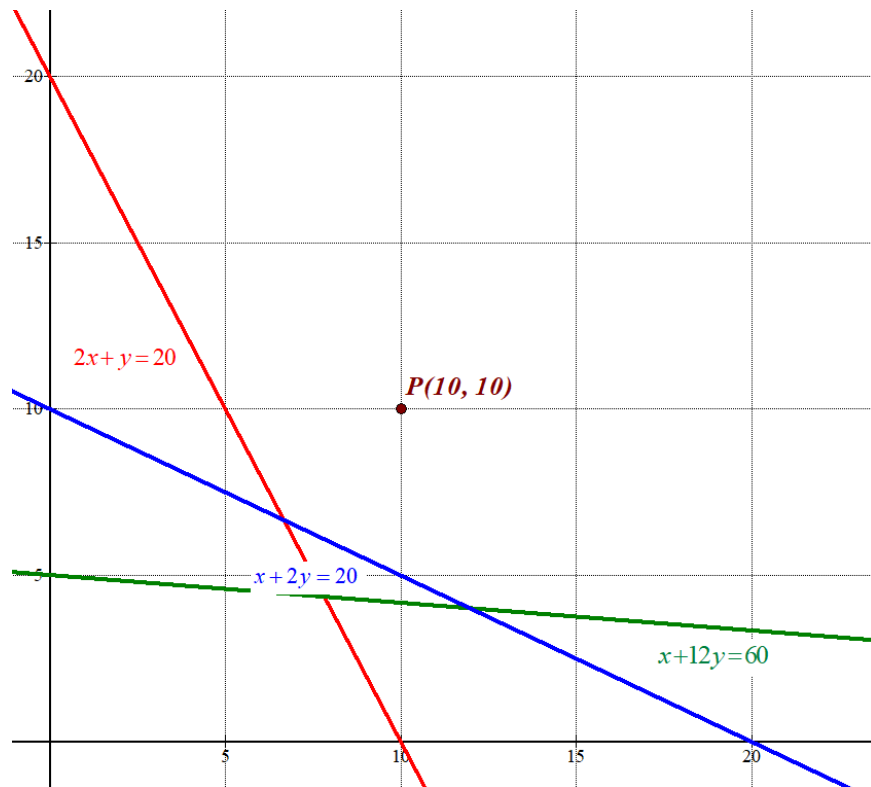
Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel $\rightarrow$
 $8x + 4y \geq 80; 3x + 6y \geq 60; x + 12y \geq 60$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 8x + 4y \geq 80 \\ 3x + 6y \geq 60 \\ x + 12y \geq 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y \geq 20 \\ x + 2y \geq 20 \\ x + 12y \geq 60 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

	$2x + y = 20$	$x + 2y = 20$	$x + 12y = 60$
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \mid y = 20 - 2x$	$x \mid y = \frac{20 - x}{2}$	$x \mid y = \frac{60 - x}{12}$
El primer cuadrante	0 20 5 10 10 0	0 10 10 5 20 0	0 5 12 4 36 2



Como las restricciones son

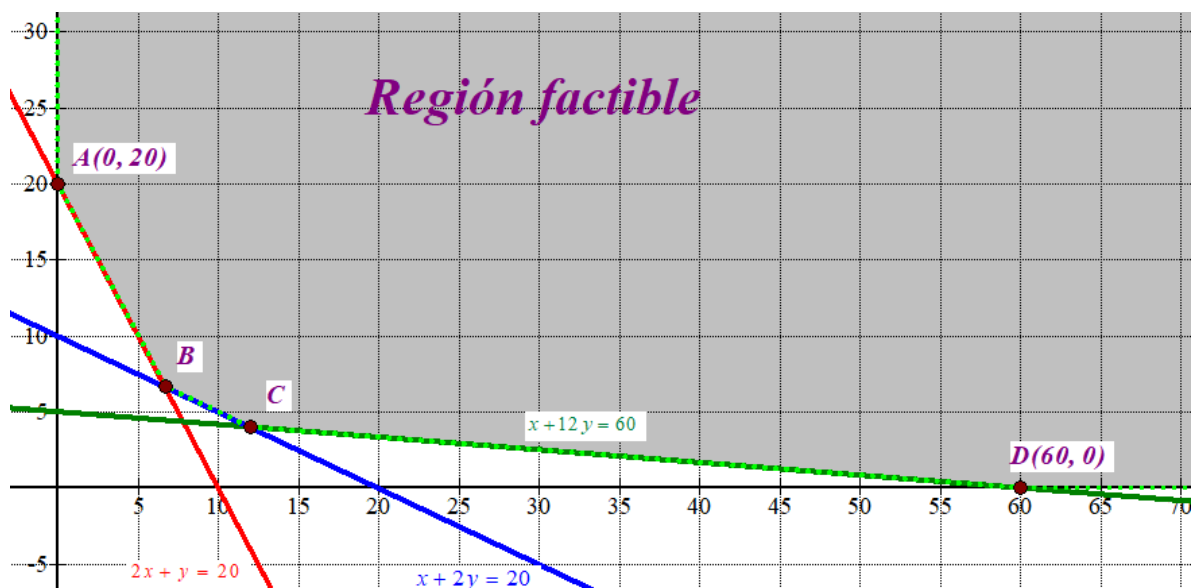
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y \geq 20 \\ x + 2y \geq 20 \\ x + 12y \geq 60 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante situada}$$

por encima de las tres rectas: roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 20 + 10 \geq 20 \\ 10 + 20 \geq 20 \\ 10 + 120 \geq 60 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Hallamos las coordenadas de los puntos B y C.

$$B \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x = 20 - 2y \end{cases} \Rightarrow 2(20 - 2y) + y = 20 \Rightarrow 40 - 4y + y = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y = -20 \Rightarrow \boxed{y = \frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{x = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)}$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x + 12y = 60 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 12y = 60 \\ x = 20 - 2y \end{cases} \Rightarrow 20 - 2y + 12y = 60 \Rightarrow 10y = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{40}{10} = 4} \Rightarrow \boxed{x = 20 - 2 \cdot 4 = 12} \Rightarrow \boxed{C(12, 4)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x, y) = x + y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 20) \rightarrow f(0, 20) = 0 + 20 = 20$$

$$B\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right) \rightarrow f\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3} \approx 13.33 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(12, 4) \rightarrow f(12, 4) = 12 + 4 = 16$$

$$D(60, 0) \rightarrow f(60, 0) = 60 + 0 = 60$$

El tiempo mínimo se obtiene en el punto $B\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

El objetivo de minimizar el tiempo necesario para realizar lo pedido en el ejercicio se logra dedicando $20/3$ a la primera técnica y lo mismo a la segunda. El tiempo total es de $40/3$. Si son horas dedicaríamos 6 horas y 40 minutos a cada técnica.

Bloque 2. Análisis.**2.1.- Definimos la función**

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio?

[0.25 puntos]

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f , que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Dominio.

El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

Asíntotas.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} = \frac{(-2)^2 - 2}{(-2)^2 - 2 - 2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} = \frac{1^2 + 1}{1^2 + 1 - 2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 - 0} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 0}{0^2 + 0 - 2} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow B(-1,0) \end{cases}$$

Extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2 + x - 2) - (2x+1)(x^2 + x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{(2x+1)(x^2 + x - 2 - (x^2 + x))}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(-2)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{-4x-2}{(x^2 + x - 2)^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-4x-2}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \Rightarrow -4x-2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

Estudiamos el comportamiento del signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-4(-3)-2}{((-3)^2 - 3 - 2)^2} = \frac{10}{9} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-4(-1)-2}{((-1)^2 - 1 - 2)^2} = \frac{2}{4} > 0. \text{ La función crece en } \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$$

- En el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0-2}{(0^2 + 0 - 2)^2} = \frac{-2}{4} < 0.$

La función decrece en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-4(2) - 2}{(2^2 + 2 - 2)^2} = \frac{-10}{16} < 0$.

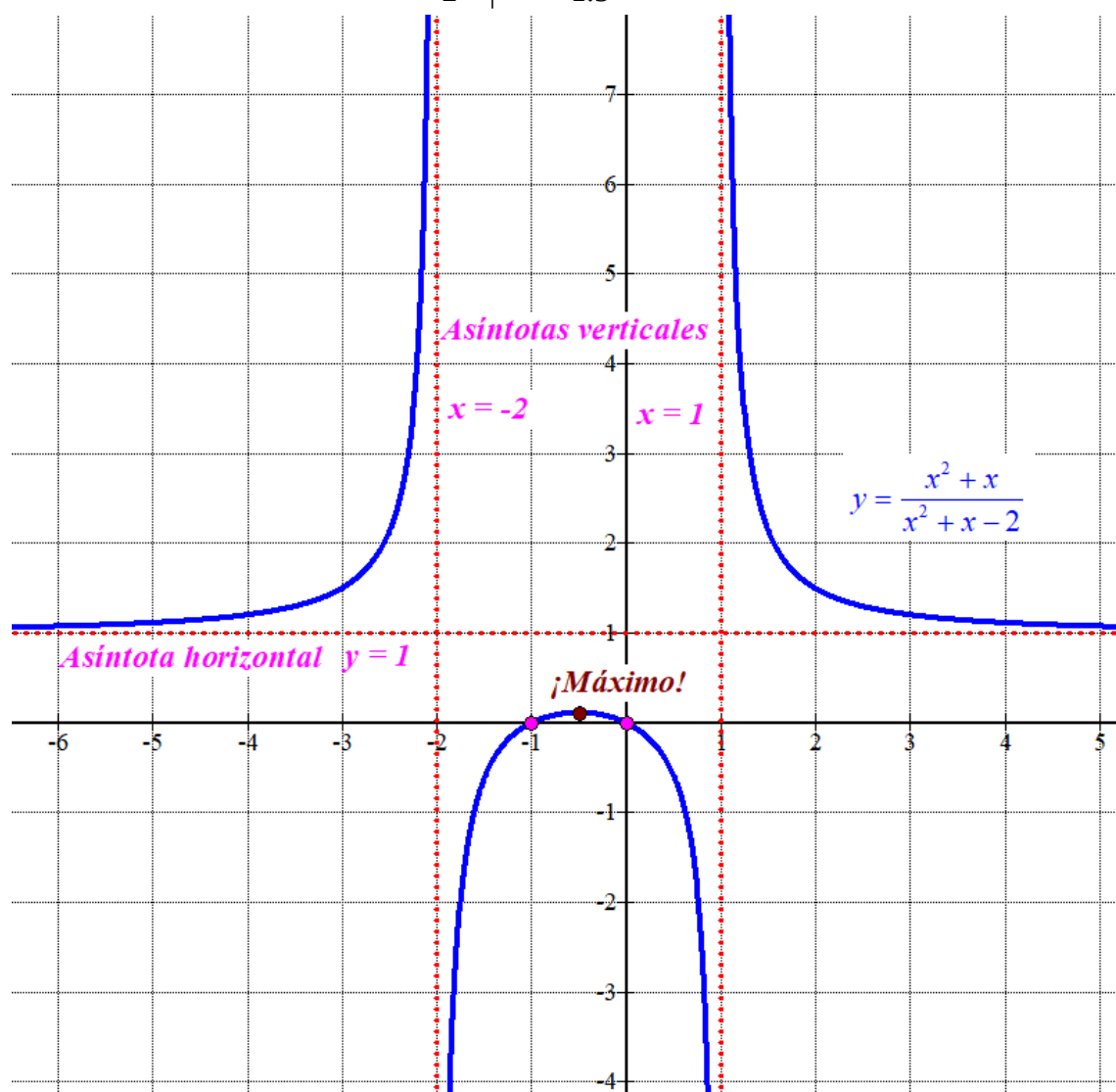
La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

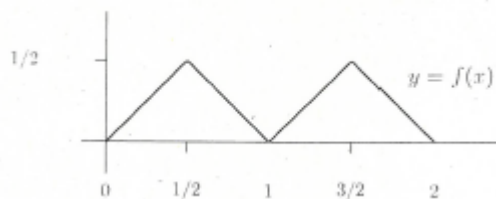
La función presenta un máximo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$
-3	1.5
-1	0
-0.5	0.11
0	0
2	1.5



2.2.- Una función f , definida en el intervalo $[0, 2]$, tiene la gráfica siguiente:



- (i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**
 (ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

(i) La gráfica entre $x = 0$ y $x = 1/2$ es una recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1/2, 1/2)$. Este segmento tiene por ecuación $y = x$.

La gráfica entre $x = 1/2$ y $x = 1$ es una recta que pasa por los puntos $(1/2, 1/2)$ y $(1, 0)$. Este segmento tiene por ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{0 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -1 \\ \text{Pasa por } (1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1.$$

La gráfica entre $x = 1$ y $x = 3/2$ es una recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3/2, 1/2)$. Este segmento tiene por ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{3}{2} - 1} = 1 \\ \text{Pasa por } (1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1.$$

La gráfica entre $x = 3/2$ y $x = 2$ es una recta que pasa por los puntos $(3/2, 1/2)$ y $(2, 0)$. Este segmento tiene por ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{0 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = -1 \\ \text{Pasa por } (2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2.$$

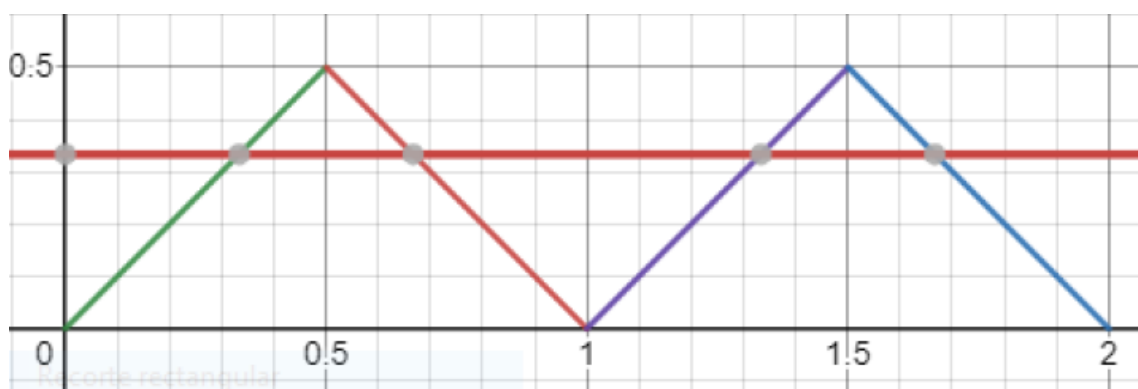
Reunimos las cuatro rectas en una función en el intervalo $[0, 2]$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -x + 1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3/2 \\ -x + 2 & \text{si } 3/2 < x \leq 2 \end{cases}$$

- (ii) Se pueden averiguar a través de la gráfica, pero serían valores inexactos. Si sabemos que hay cuatro valores posibles. Los determinamos usando la definición de la función.

$$f(x) = 1/3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -x + 1 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{2}{3} & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \\ x - 1 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3} & \text{si } 1 < x \leq 3/2 \\ -x + 2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3} & \text{si } 3/2 < x \leq 2 \end{cases}$$

Los valores de x tales que $f(x) = 1/3$ son $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{2}{3}$; $x = \frac{4}{3}$; $x = \frac{5}{3}$.



2.3.- Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. **[1 punto]**

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

(i) Utilizamos la función derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver si son máximos o mínimos relativos (dependiendo del signo obtenido).

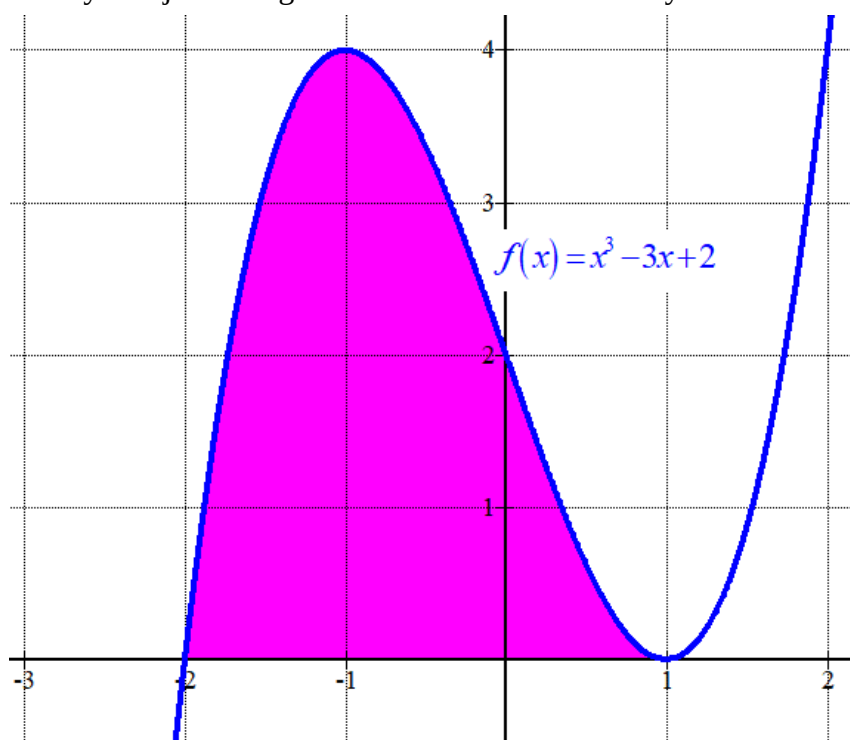
$$f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow x = -1 \text{ es máximo} \\ f''(1) = 6 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo} \end{cases}$$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$. La función tiene un máximo relativo en el punto A(-1, 4).

$f(1) = 1^3 - 3 + 2 = 0$. La función tiene un mínimo relativo en el punto B(1, 0).

(ii) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función entre -2 y 1.

x	$y = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0



Por el dibujo podemos adelantar que el área tendrá un valor entre 6 y 7 unidades cuadradas (contando cuadraditos).

Calculamos el área de la región como la integral definida entre -2 y 1 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^1 x^3 - 3x + 2 dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} - 3\frac{1^2}{2} + 2(1) \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 3\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \frac{27}{4} = \boxed{6.75 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área de la región pedida es de 6.75 unidades cuadradas.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos:

A = “la primera bola es 0”

B = “la primera bola es 5”

C = “la segunda bola es mayor que la primera”

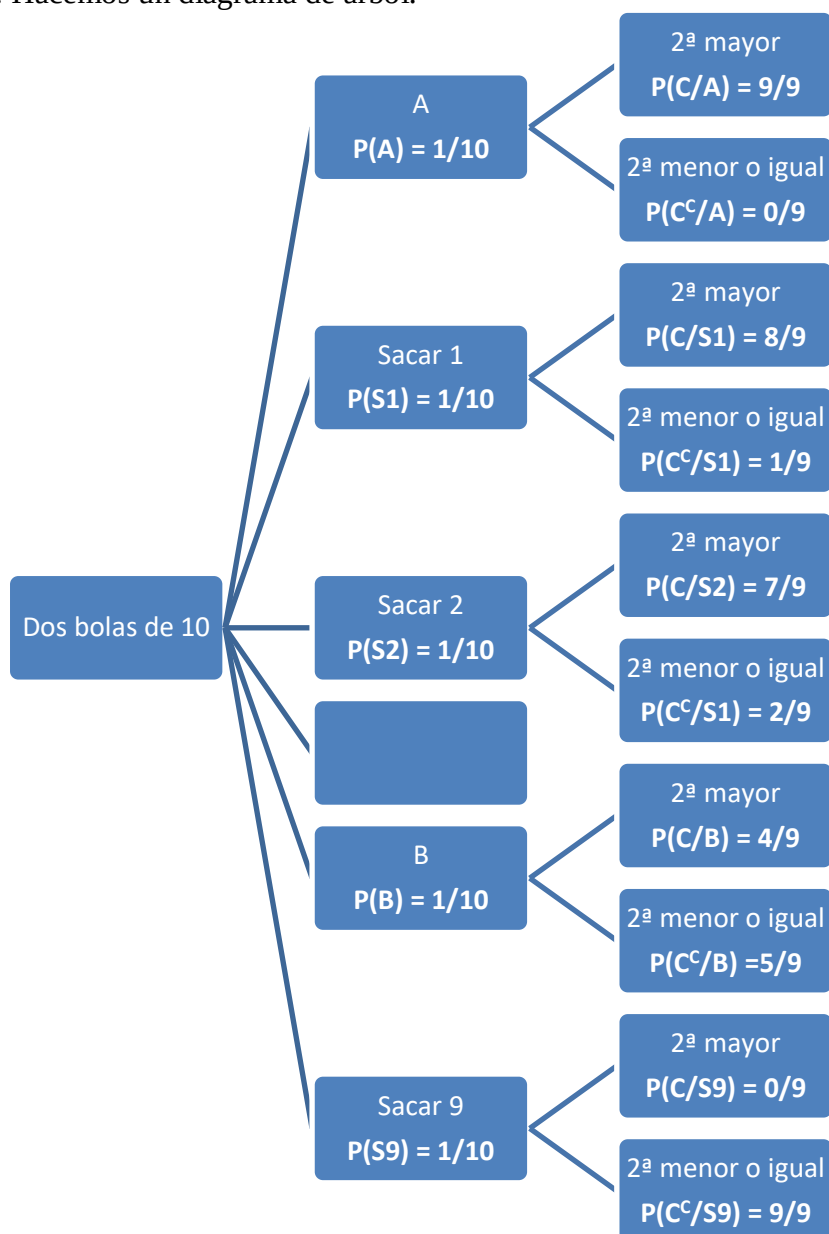
Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) $P(A)$ (ii) $P(B)$ (iii) $P(C)$ (iv) $P(A/C)$ (v) $P(B/C)$ **[2.5 puntos]**

(i) Hay 10 bolas y solo una forma de sacar 0. Aplicamos la regla de Laplace $\rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$

(ii) Aplicamos la regla de Laplace $\rightarrow P(B) = \frac{1}{10}$

(iii) Llamamos S1, S2, S3, S4, S6, S7, S8, S9 a sacar bola 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 o 9 en primera extracción. Hacemos un diagrama de árbol.



$$P(C) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{0}{9} =$$

$$= \frac{1}{90} (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = \frac{45}{90} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(iv) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

(v) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{4}{45} \approx 0.0889}$$

3.2.- La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica de 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X . **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

X = la estatura de los (y las) policías de Francia. $X = N(\mu, 6.5)$

(i) Como nos dicen que $P(X \geq 183) = 0.11507$. Despejamos y hallamos el valor de la media μ .

$$P(X \geq 183) = 0.11507 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{183 - \mu}{6.5}\right) = 0.11507 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{183 - \mu}{6.5}\right) = 0.11507 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{183 - \mu}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{183 - \mu}{6.5} = 1.2 \Rightarrow 183 - \mu = 1.2 \cdot 6.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 183 - 1.2 \cdot 6.5 = 175.2$$

La media de las estaturas es de 175.2 cm.

(ii) Averiguamos el valor de “a” tal que $P(X \geq a) = 0.88493$.

$$P(X \geq a) = 0.88493 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 175.2}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 175.2}{6.5}\right) = 0.88493 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 175.2}{6.5} = 1.2 \Rightarrow \boxed{a = -1.2 \cdot 6.5 + 175.2 = 167.4 \text{ cm}}$$

La estatura que superan el 88.493 % de los policías de Francia es 167.4 cm.

3.3.- Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene un valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\bar{X} = 38.6 \text{ cm}$.

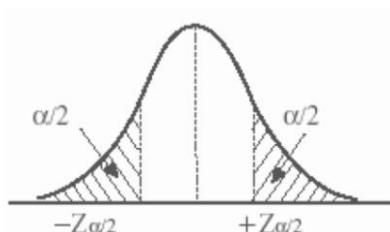
(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

X = longitud de la cola de un ejemplar adulto de lémur barbado. $X = N(\mu, 4.2)$

(i) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{20}} \approx 1.84$$

El error es de 1.84 centímetros.

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (38.6 - 1.84, 38.6 + 1.84) = (36.76, 40.44)$$

(ii) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{4.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.96 \cdot 4.2 \Rightarrow n = (1.96 \cdot 4.2)^2 \approx 67.7658$$

El tamaño de la muestra debe ser entero y superior al valor obtenido.

El tamaño mínimo es de 68 lémures.

EBAU Extraordinaria 2022



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021 - 2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

(i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;

(ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;

(iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? **[1.75 puntos]**

Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? **[0.75 puntos]**

1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b . **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022} . **[0.5 puntos]**

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 6,$$

$$2x + y \leq 10, y$$

$$x + 2y \leq 10.$$

[1 punto]

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x, y) = 4x + 3y. \quad \mathbf{[1 \text{ punto}]}$$

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0) , ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0) ? **[0.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Consideramos la función f dada (en los valores reales x donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

- (i) ¿Cuál es el dominio de dicha función? **[0.3 puntos]**
 (ii) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene extremos relativos? **[1.1 puntos]**
 (iii) Dibuja la gráfica de f , señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales. **[1.1 puntos]**

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:

- (i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
 (ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

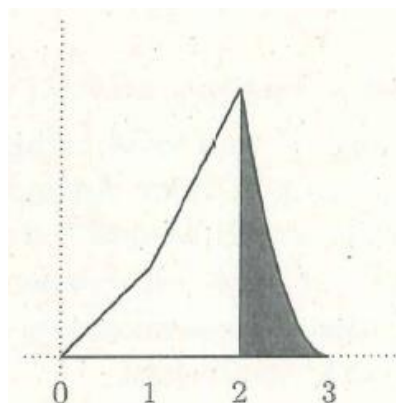
[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1?

¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ? **[0.75 puntos]**

2.3.- El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2x + a & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ b(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



- (i) Calcula los valores de a y b . **[1 punto]**
 (ii) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las pruebas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte? **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

A = "hay lluvia entre las 8 y las 9";

B = "hay lluvia entre las 8 y las 10"

C = "hay lluvia entre las 10 y las 14".

Nos ha dicho que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(C) = 0.7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D = \text{“hay lluvia entre las 9 y las 10”}$. No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0.35$

(i) ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10? **[1.5 puntos]**

(ii) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

[1 punto]

3.2.- Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas es $1/120$.

Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino? **[2.5 puntos]**

3.3.- En los poblados marubas utiliza el punde como media de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74.864, 77.496)$.

(i) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra? **[0.5 puntos]**

(ii) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(iii) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza? **[0.5 puntos]**

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

- (i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;
- (ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;
- (iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? **[1.75 puntos]**

Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? **[0.75 puntos]**

Llamamos “x” al peso de cada pieza A, “y” al peso de cada pieza B, “z” al peso de cada pieza C.

“La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas” $\rightarrow 13 = z + 2y$

“tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B” $\rightarrow 3x = 2y$

“una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B” $\rightarrow z = 2x + y$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 13 = z + 2y \\ 3x = 2y \\ z = 2x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = 2x + y + 2y \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = 2x + 3y \\ 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = 2x + 3y \\ x = \frac{2y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 = 2 \frac{2y}{3} + 3y \Rightarrow 39 = 4y + 9y \Rightarrow 39 = 13y \Rightarrow \boxed{y = \frac{39}{13} = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{3} = 2} \Rightarrow \boxed{z = 4 + 3 = 7}$$

Cada pieza A pesa 2 gramos, cada pieza B pesa 3 gramos y cada pieza C pesa 7 gramos.

Si cambiamos la tercera ecuación por la nueva condición:

“una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C” $\rightarrow y = 2x + z$ nos queda el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 13 = z + 2y \\ 3x = 2y \\ y = 2x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = z + 2(2x + z) \\ 3x = 2(2x + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = z + 4x + 2z \\ 3x = 4x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = 4x + 3z \\ 0 = x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 13 = 4x + 3z \\ -2z = x \end{array} \right\} \Rightarrow 13 = 4(-2z) + 3z \Rightarrow 13 = -8z + 3z \Rightarrow 13 = -5z \Rightarrow \boxed{z = \frac{-13}{5}}$$

No es posible pues sale un peso **negativo** para la pieza C. Alguna de las afirmaciones debe ser errónea pues nos lleva a una solución ilógica.

1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices *idempotentes* 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b . **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022} . **[0.5 puntos]**

(i) Comprobamos si hay matrices *idempotentes* 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+a=2 \\ 2+b=1 \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=-2} \\ \boxed{b=-1} \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-2)+(-2)(-1)=-2 \\ -2+(-1)^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+2=-2 \\ -2+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Se cumplen!}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

En el primer tipo de matriz si es posible y los valores son $a = -2$ y $b = -1$.

Repetimos este razonamiento para el segundo tipo de matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+ab=2 \\ 3b=b \\ 3a=a \\ ab+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+ab=2 \\ 2b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \\ 2a=0 \rightarrow \boxed{a=0} \\ ab+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+0 \cdot 0=2 \\ 0 \cdot 0+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+0=2 \\ 0+1=1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

En este segundo caso no es posible que una matriz de esa forma sea idempotente.

(ii) Calculamos las potencias sucesivas de una matriz A idempotente.

$$A^2 = A$$

$$A^3 = A^2 A = A \cdot A = A^2 = A$$

$$A^4 = A^3 A = A \cdot A = A^2 = A$$

$$A^5 = A^4 A = A \cdot A = A^2 = A$$

...

...

$$A^{2022} = A^{2021} A = A \cdot A = A^2 = A$$

Se cumple que $A^{2022} = A$.

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 6,$$

$$2x + y \leq 10, y$$

$$x + 2y \leq 10.$$

[1 punto]

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x, y) = 4x + 3y.$$

[1 punto]

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0) , ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0) ? **[0.5 puntos]**

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos (x, y) que satisfacen las inecuaciones.

$x + y = 6$

$x \geq 0; y \geq 0$

El primer cuadrante

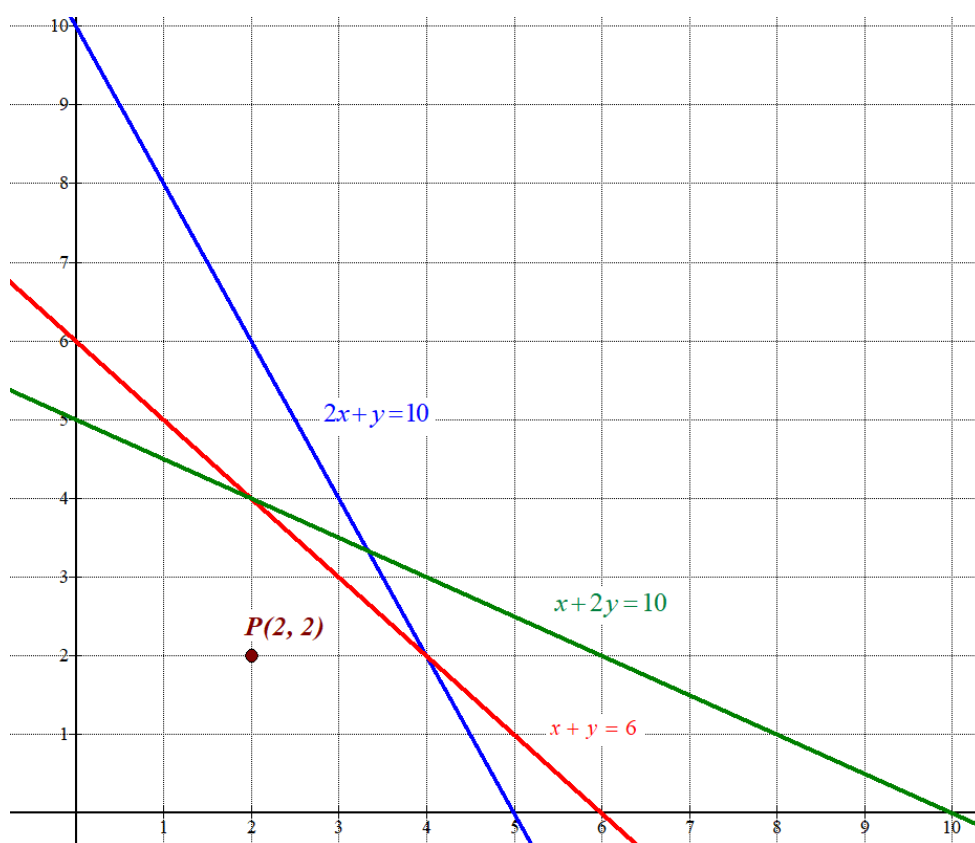
x	$y = 6 - x$
0	6
6	0

$2x + y = 10$

x	$y = 10 - 2x$
0	10
5	0

$x + 2y = 10$

x	$y = \frac{10 - x}{2}$
0	5
10	0



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 0 \leq y, 0 \leq x, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 10, \\ x + 2y \leq 10. \end{array} \right\}$ la región del plano que cumple las inecuaciones es la región

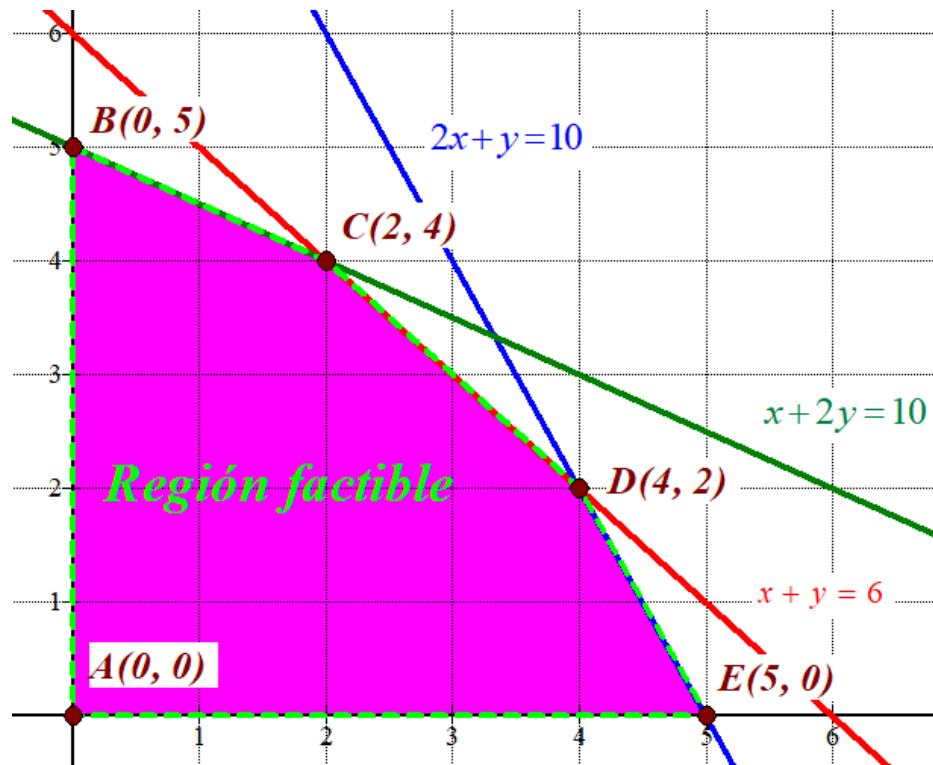
del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq 2, \quad 0 \leq 2, \\
 2 + 2 &\leq 6, \\
 2 \cdot 2 + 2 &\leq 10, \\
 2 + 2 \cdot 2 &\leq 10.
 \end{aligned}$$

¡Se cumplen!

Coloreamos de rosa la región factible.



Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 4x + 3y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$\begin{aligned}
 A(0, 0) &\rightarrow f(0, 0) = 0 \\
 B(0, 5) &\rightarrow f(0, 5) = 15 \\
 C(2, 4) &\rightarrow f(2, 4) = 8 + 12 = 20 \\
 D(4, 2) &\rightarrow f(4, 2) = 16 + 6 = 22 \text{ ¡Máximo!} \\
 E(5, 0) &\rightarrow f(5, 0) = 20 + 0 = 20
 \end{aligned}$$

El máximo valor de $f(x, y) = 4x + 3y$ en la región factible es 22.

Si deseamos que el máximo pase de ser (x_0, y_0) a ser (y_0, x_0) debemos de cambiar el papel de la “x” y la “y” en la función objetivo. Podría ser la función $g(x, y) = 4y + 3x$. Esta función tendrá el máximo valor en C(2, 4) en lugar de D(4, 2) que es donde se alcanza el máximo valor de $f(x, y) = 4x + 3y$.

Lo comprobamos: $g(0, 0) = 0$, $g(0, 5) = 20$, $g(2, 4) = 16 + 6 = 22$ ¡Máximo!, $g(4, 2) = 8 + 12 = 20$, $g(5, 0) = 15$.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Consideramos la función f dada (en los valores reales x donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

(i) ¿Cuál es el dominio de dicha función? **[0.3 puntos]**

(ii) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene extremos relativos? **[1.1 puntos]**

(iii) Dibuja la gráfica de f , señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales. **[1.1 puntos]**

(i) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \boxed{\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}}$$

(ii) Calculamos la derivada de la función y comprobamos lo pedido.

$$f'(x) = \frac{3(x-1) - 1 \cdot (3x-2)}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x+2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}}$$

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow 1 = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x-1=-1 \rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow -1 = (x-1)^2 \Rightarrow \text{¡No es posible!}$$

Para que tenga extremos relativos debe ser $f'(x) = 0$. Esto no es posible pues $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

La derivada de la función tiene un valor siempre negativo. La función siempre es decreciente. No tiene extremos relativos.

(iii) Puntos de corte con los ejes.

$$x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0 - 2}{0 - 1} = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{3x-2}{x-1} = 0 \Rightarrow 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

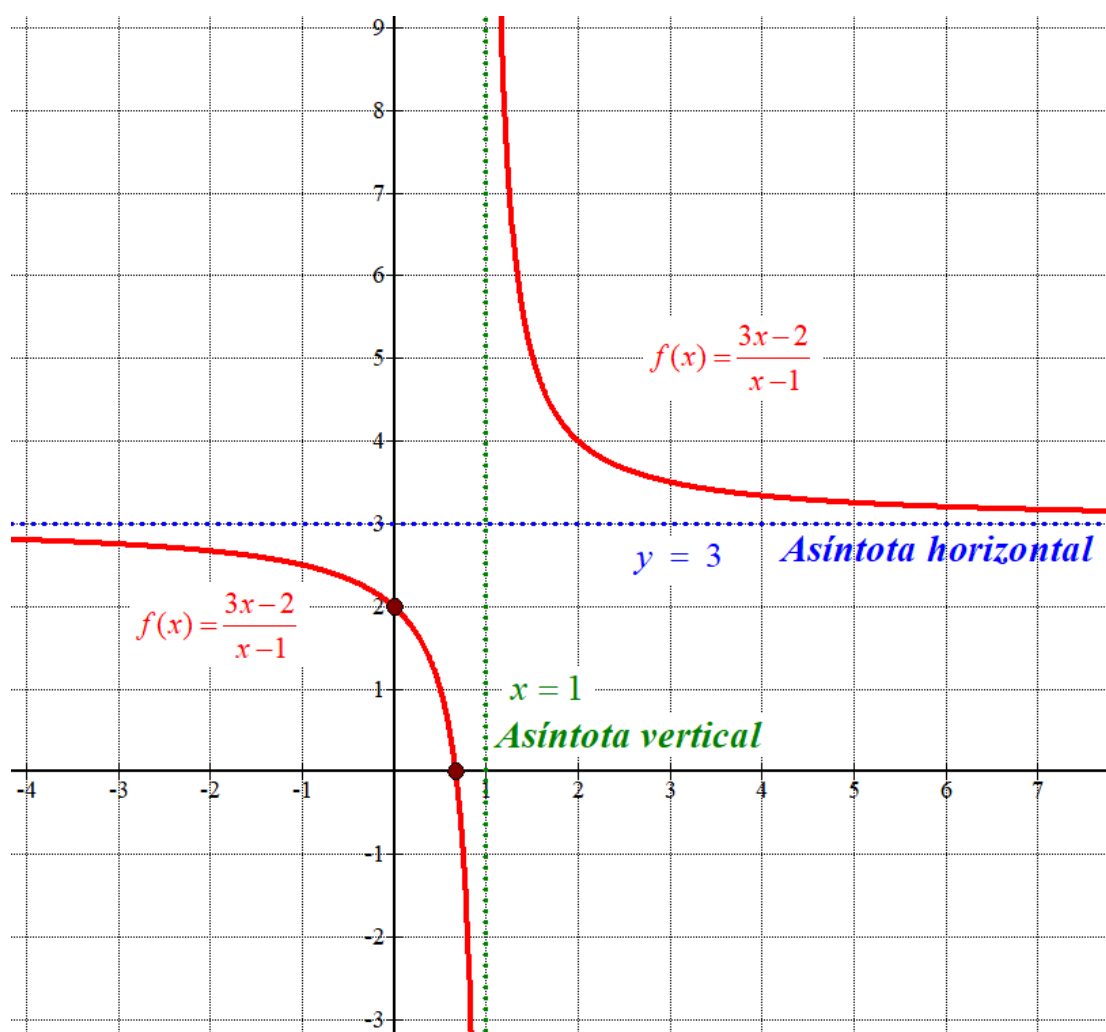
Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$$

$y = 3$ es asíntota horizontal.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y = \frac{3x-2}{x-1}$
-1	-2.5
0	2
2/3	0
2	4
3	3.5



2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:

- (i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
- (ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1?

¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ? **[0.75 puntos]**

Si su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$ tenemos que:

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 - b = 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 - b \Rightarrow \\ f'(0) = f'(1) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -b = 3 - 2a - b \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

Si tiene un extremo relativo en $x = -1$ significa que la derivada se anula en $x = -1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - b \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 3(-1)^2 - 3(-1) - b = 0 \Rightarrow 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6} \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{2}$ y $b = 6$.

Las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1 son paralelas pues tienen el mismo valor de derivada (pendiente de la recta tangente).

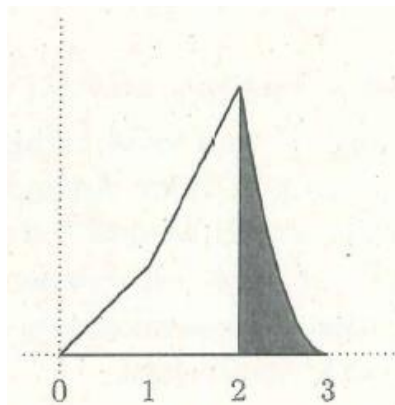
Para ver qué tipo de extremo hay en -1 hallamos la derivada segunda y vemos el signo de la misma en dicho valor.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$.

2.3.- El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2x + a & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ b(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



- (i) Calcula los valores de a y b . **[1 punto]**
 (ii) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las pruebas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte? **[1.5 puntos]**

La función debe ser continua.

En $x = 1$ es continua.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + a = 2 + a \\ f(1) = 2 + a \\ \text{Continua en } x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 2 + a \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

En $x = 2$ es continua.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} b(x-3)^2 = b \\ f(2) = b(2-3)^2 = b \\ \text{Continua en } x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 3$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 3(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Entre 2 y 3 la función es $f(x) = 3(x-3)^2 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3x^2 - 18x + 27$

El área de la región indicada es la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^3 3x^2 - 18x + 27 dx = \left[x^3 - 9x^2 + 27x \right]_2^3 = \left[3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 \right] - \left[2^3 - 9 \cdot 2^2 + 27 \cdot 2 \right] = \\ &= 27 - 81 + 81 - 8 + 36 - 54 = \boxed{1u^2} \end{aligned}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

$A =$ "hay lluvia entre las 8 y las 9";

$B =$ "hay lluvia entre las 8 y las 10"

$C =$ "hay lluvia entre las 10 y las 14".

Nos ha dicho que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(C) = 0.7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D =$ "hay lluvia entre las 9 y las 10". No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0.35$

(i) ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10? **[1.5 puntos]**

(ii) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

[1 punto]

(i) $P(B) - P(A)$ es la probabilidad de que llueva entre las 9 y las 10, pero no entre las 8 y las 9. El suceso A está contenido en B por lo que $A \cap B = A$.

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)$$

Calculamos $P(D)$.

$$\left. \begin{aligned} B = A \cup D \Rightarrow P(B) &= P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) \\ P(A) &= 0.4 \\ P(B) &= 0.5 \\ P(A \cap D) &= 0.35 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 = 0.4 + P(D) - 0.35 \Rightarrow \boxed{P(D) = 0.5 - 0.4 + 0.35 = 0.45}$$

Que "no llueva entre las 9 y las 10" es el suceso contrario de D.

$$P(\text{No llueva entre las 9 y las 10}) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.45 = \boxed{0.55}$$

(ii) B y C son independientes implica que $P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$.

Que llueva entre las 8 y las 14 es el suceso $B \cup C$.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.5 + 0.7 - 0.35 = \boxed{0.85}$$

3.2.- Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas es 1/120.

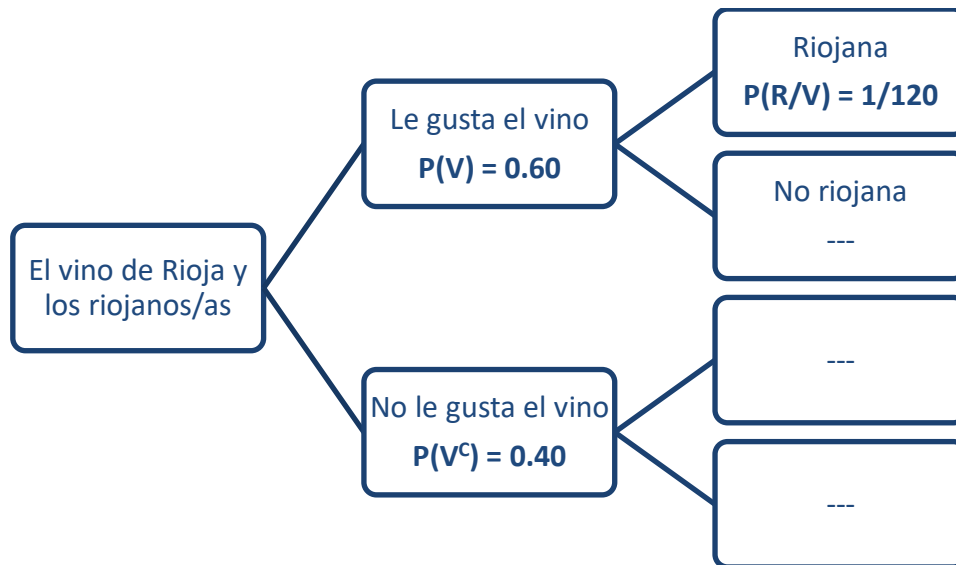
Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino?

[2.5 puntos]

Llamamos R = “ser riojano” y V = “le gusta el vino”.

Los datos del ejercicio son $P(V^c) = 0.40$, $P(R) = 7/1000$, $P(V/R) = 1/120$

Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/R) = \frac{P(R \cap V)}{P(R)} = \frac{P(V)P(R/V)}{P(R)} = \frac{0.60 \cdot \frac{1}{120}}{\frac{7}{1000}} = \frac{5}{7} \approx 0.71$$

3.3.- En los poblados maruba utiliza el punde como media de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo (74.864, 77.496).

(i) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra? **[0.5 puntos]**

(ii) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(iii) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza? **[0.5 puntos]**

$X = \text{"medida en metros del punde"}$. $X = N(\mu, 4)$. Tamaño de la muestra = $n = 25$.

(i) El promedio muestral es el valor central del intervalo de confianza:

$$\bar{x} = \frac{74.864 + 77.496}{2} = 76.18 \text{ metros}$$

(ii) Calculamos el error del intervalo de confianza como la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{77.496 - 74.864}{2} = 1.316 \text{ metros}$$

Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.316 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{25}} \Rightarrow 1.316 = z_{\alpha/2} \cdot 0.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.316}{0.8} = 1.645$$

Averiguamos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2} = 1.645$.

$$z_{\alpha/2} = 1.645 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos} \\ \text{en la tabla} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0.9495 + 0.9505}{2} \approx 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.90$$

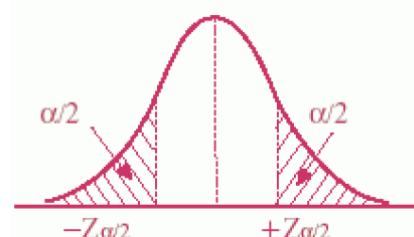
El nivel de confianza es del 90 %.

iii) Para que el error sea de la mitad debería ser de $\frac{1.316}{2} = 0.658$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.658 = 1.645 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.658 \sqrt{n} = 1.645 \cdot 4 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 4}{0.658} = 10 \Rightarrow \boxed{n = 100}$$

Para reducir el error a la mitad necesitamos tomar una muestra de 100 pundes.



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.5
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.6
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.7
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.8
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.9
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	1.0
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	1.1
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	1.2
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	1.3
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	1.4
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	1.5
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	1.6
1.2	0.88493	0.88688	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	1.7
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	1.8
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	1.9
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93821	0.93943	2.0
1.6	0.94520	0.94633	0.94744	0.94853	0.94960	0.95065	2.1
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	2.2

EBAU Ordinaria 2022



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2021 - 2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- ¿Para qué valores de a tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + az = 12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]

Resuelve el sistema en el caso $a = 0$. **[1.25 puntos]**

Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes (12,12,12) por (12,12,24), ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?

[0.5 puntos]

1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.

Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? **[1.75 puntos]**

¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

[0.75 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 + 2x \quad \text{y} \quad g(x) = 5 - 2x \quad \text{[1.5 puntos]}$$

¿Qué punto a hace que sea continua la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -2 \leq x < a, \\ g(x) & \text{si } a \leq x \leq 3 \end{cases} ?$$

Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$? **[1 punto]**

2.2.- La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t , desde que arrancó en $t = 0$, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t = 1$ y $t = 4$:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

(i) Calcula el valor de C , considerando que $e(t)$ define una función continua.

[0.75 puntos]

(ii) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir, $v(t) = e'(t)$.

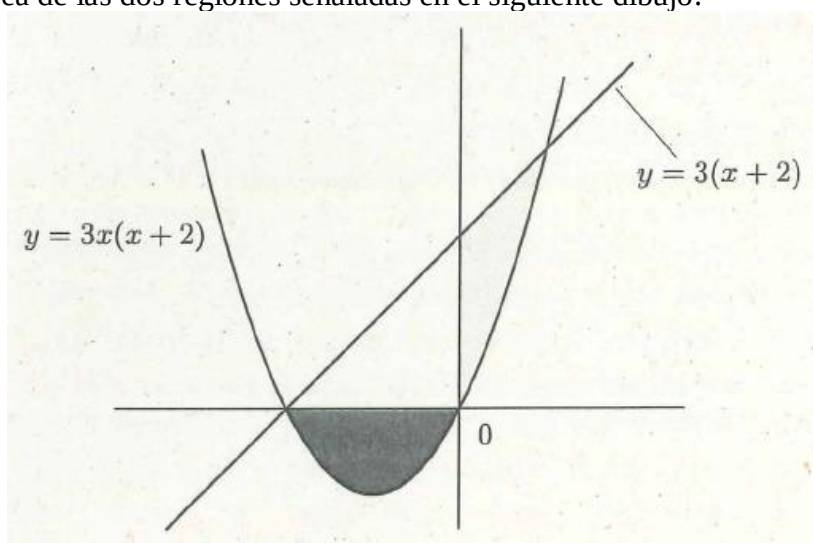
Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$? **[1 punto]**

(iii) Calcula la distancia recorrida entre $t = 3$ y $t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a

$$\int_3^4 v(t) dt ?$$

[0.75 puntos]

2.3.- Calcula el área de las dos regiones señaladas en el siguiente dibujo:



[2.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- En una casa hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

- (i) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero. **[1.25 puntos]**
- (ii) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A. **[1.25 puntos]**

3.2.- Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

- (i) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor? **[1 punto]**
- (ii) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\bar{X}$. Calcula $P(\bar{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$? **[1 punto]**
- (iii) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas? **[0.5 puntos]**

3.3.- Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

- (i) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99%? **[1.5 puntos]**
- (ii) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99%? **[1 punto]**

SOLUCIONES**Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.****1.1.-** ¿Para qué valores de a tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + az = 12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]Resuelve el sistema en el caso $a = 0$. **[1.25 puntos]**Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante? **[0.5 puntos]**Tomamos la matriz de coeficientes asociada al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 2 + 8 - (-4 + 2a - 2) = -a - 2 + 8 + 4 - 2a + 2 = -3a + 12$$

Comprobamos cuando se anula (su rango no es 3)

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a + 12 = 0 \Rightarrow -3a = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{-3} = 4$$

Estudiamos que ocurre cuando $a = 4$ y cuando $a \neq 4$.**CASO 1.** Si $a \neq 4$ el determinante de la matriz de coeficientes A no vale 0 y por tanto su rango es3, al igual que el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & a & 12 \end{pmatrix}$ y al igual que el número de incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rango de } A = 3 \\ \text{Rango de } A/B = 3 \\ \text{Número de incógnitas} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El sistema tiene una única solución.}$$

CASO 2. Si $a = 4$ el determinante de la matriz A es nulo, por lo que el rango de A no es 3.La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de ambas matrices.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 12 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 12 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

El sistema será incompatible pues el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.

El sistema tiene solución para los valores de a distintos de 4.

Resolvemos el sistema para $a = 0$.

Ya sabemos que este valor se corresponde con el caso 1 y por tanto tiene solución única. La obtenemos usando el método de Gauss.

Para $a = 0$ la matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 12 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 0 \quad 12 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -4 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema equivalente obtenido

$$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ -3y - 5z = -12 \\ -4z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ -3y - 5z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2 \cdot 3 = 12 \\ -3y - 5 \cdot 3 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 6 = 12 \\ -3y - 15 = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{z = \frac{-12}{-4} = 3}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ -3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ y = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases} \Rightarrow x + (-1) = 6 \Rightarrow \boxed{x = 6 + 1 = 7}$$

Para $a = 0$ la solución es $x = 7, y = -1, z = 3$.

Sabemos que para $a = 4$ el sistema es incompatible:

$$a = 4 \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + 4z = 12 \end{cases}.$$

Cambiamos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24) \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + 4z = 24 \end{cases}$

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de ambas matrices y la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 12 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -5 \quad -12 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 24 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -24 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema será compatible indeterminado pues el rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema tiene infinitas soluciones.

1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

Calculamos su determinante y vemos si es nulo o no. Para ser regular debe ser no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 - (1 + 1 + 1) = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

La matriz es regular.

Calculamos la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.

Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? **[1.75 puntos]**

¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes? **[0.75 puntos]**

Llamamos “x” al número de anillos que se fabrican a la semana e “y” al número de brazaletes. Hacemos una tabla para establecer las condiciones del problema.

	Horas de trabajo semanal	Coste del material necesario	Beneficio
Nº anillos (x)	2x	40x	10x
Nº brazaletes (y)	3y	320y	90y
TOTAL	2x+3y	40x+320y	10x+90y

La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x, y) = 10x + 90y$.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal $\rightarrow 2x + 3y \leq 50$

Si no puede gastar en material más de 2560 € $\rightarrow 40x + 320y \leq 2560$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ 40x + 320y \leq 2560 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x + 8y \leq 64 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$$x \geq 0; y \geq 0$$

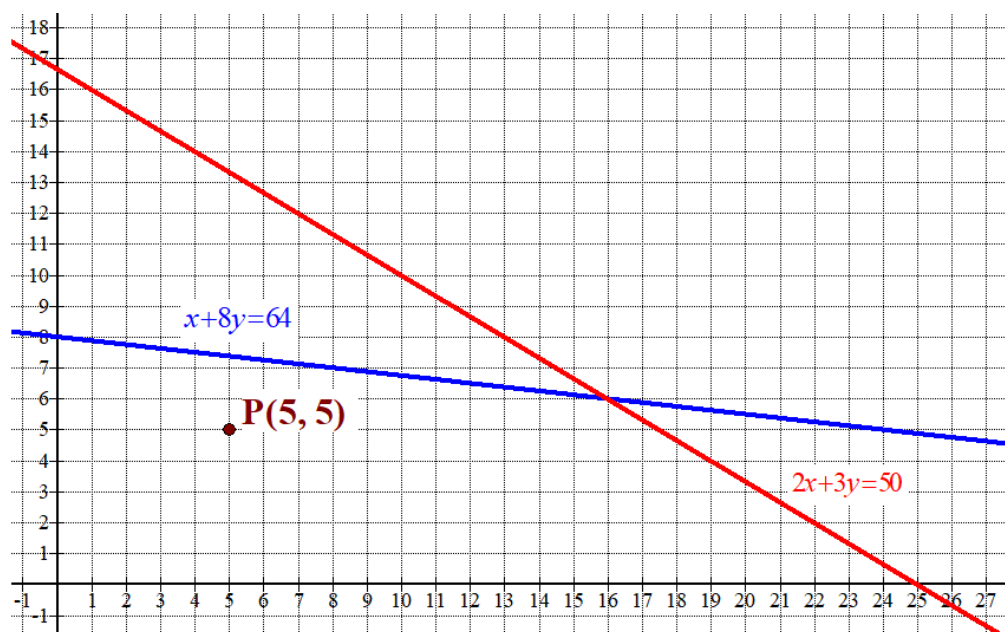
El primer cuadrante

$$2x + 3y = 50$$

x	$y = \frac{50 - 2x}{3}$
25	0
16	6
10	10

$$x + 8y = 64$$

x	$y = \frac{64 - x}{8}$
64	0
16	6
8	7



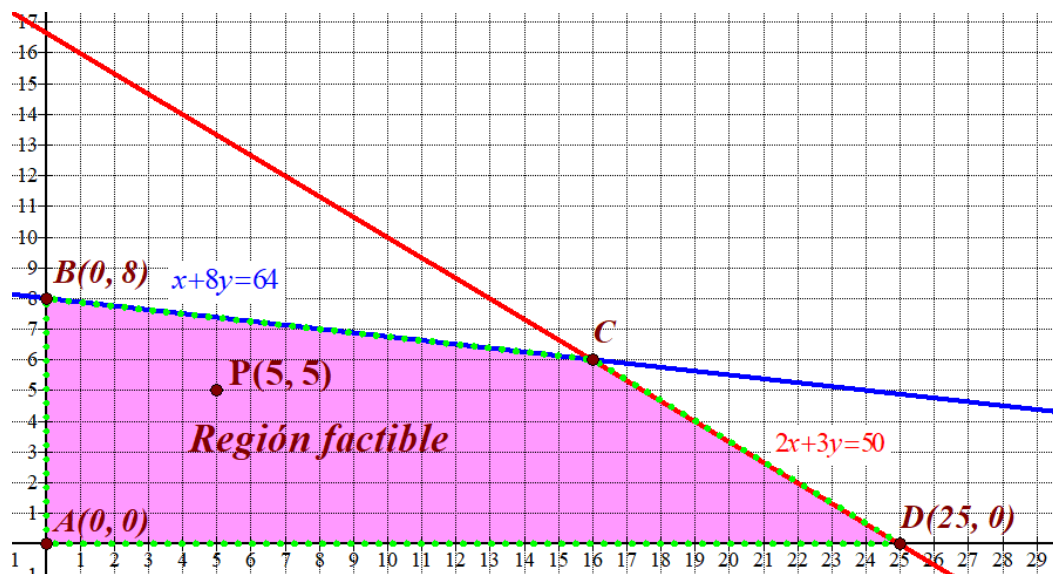
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x + 8y \leq 64 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada

por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \geq 0; 5 \geq 0 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \leq 50 \\ 5 + 8 \cdot 5 \leq 64 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 50 \\ x + 8y = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 50 \\ x = 64 - 8y \end{array} \right\} \Rightarrow 2(64 - 8y) + 3y = 50 \Rightarrow 128 - 16y + 3y = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -13y = -78 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-78}{-13} = 6} \Rightarrow \boxed{x = 64 - 48 = 16} \Rightarrow \boxed{C(16, 6)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 10x + 90y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow B(0, 8) = 0 + 720 = 720$$

$$C(16, 6) \rightarrow B(16, 6) = 160 + 540 = 700$$

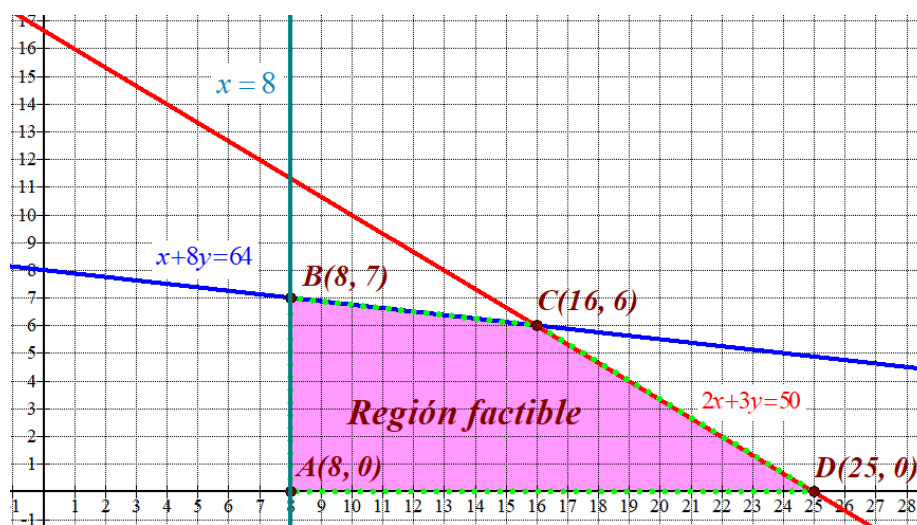
$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 250 + 0 = 250$$

El beneficio máximo se obtiene elaborando 8 brazaletes a la semana y ningún anillo.

Si tuviese apalabrados 8 anillos cambiaría la respuesta, pues la solución óptima es no hacer ninguno. Añadimos la nueva restricción y el sistema de restricciones quedaría

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 8; y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 50 \\ x + 8y \leq 64 \end{array} \right\}$$

Siendo la región factible con esta nueva situación la zona rosa del dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 10x + 90y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 80$$

$$B(8, 7) \rightarrow B(8, 7) = 80 + 630 = 710$$

$$C(16, 6) \rightarrow B(16, 6) = 160 + 540 = 700$$

$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 250 + 0 = 250$$

El máximo beneficio se obtendría con la elaboración de 8 anillos y 7 brazaletes.

Las horas de trabajo semanales se obtienen con la expresión $2x + 3y$, por lo que en la primera situación (sin apalabrar nada) con 8 brazaletes emplearía $8 \cdot 3 = 24$ horas. En la segunda situación (apalabrados 8 anillos) emplearía $2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 = 16 + 21 = 37$ horas semanales.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones f y g dadas por

$$f(x) = x^2 + 2x \quad \text{y} \quad g(x) = 5 - 2x \quad [1.5 \text{ puntos}]$$

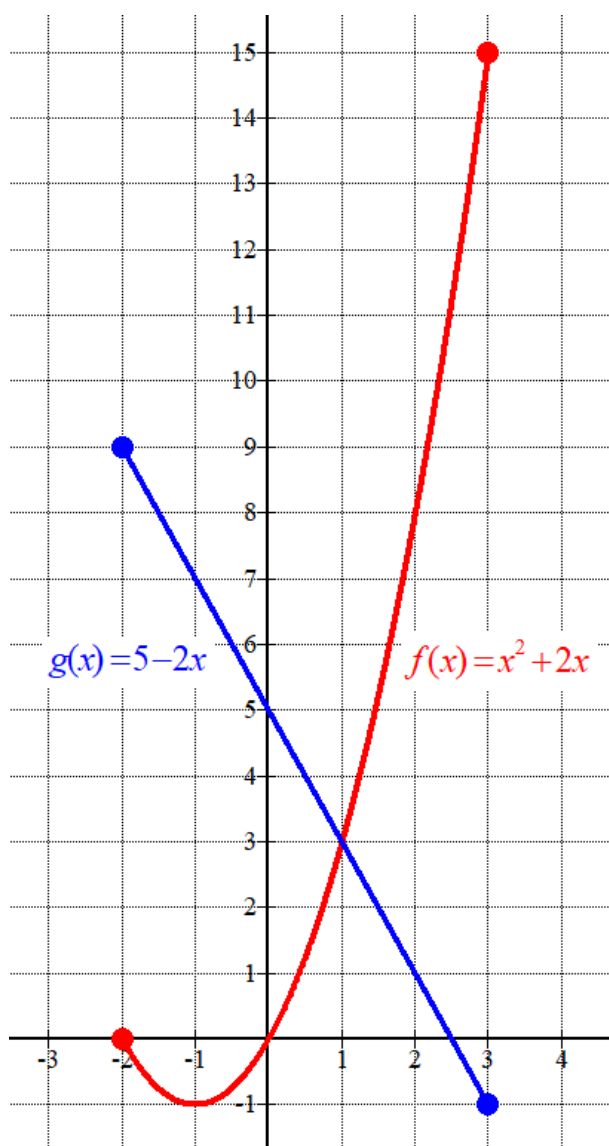
¿Qué punto a hace que sea continua la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -2 \leq x < a, \\ g(x) & \text{si } a \leq x \leq 3 \end{cases} ?$$

Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$? [1 punto]

La función $f(x) = x^2 + 2x$ es una parábola y la función $g(x) = 5 - 2x$ una recta. Hacemos una tabla de valores para cada una de ellas.

x	$y = x^2 + 2x$	x	$y = 5 - 2x$
-2	0	-2	9
-1	-1	-1	7
0	0	0	5
1	3	1	3
3	15	3	-1



Para que la función h sea continua debe cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = h(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = h(a)$$

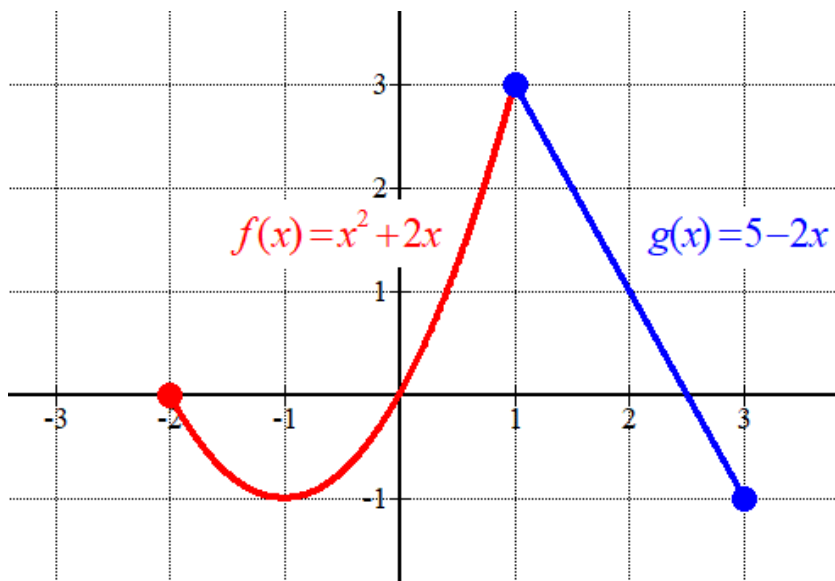
Y mirando la gráfica solo ocurre en $a = 1$.

Con cálculos se comprobaría de la forma siguiente.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = h(a) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = h(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a = 5 - 2a \Rightarrow a^2 + 4a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-4+6}{2} = 1 = a \\ \frac{-4-6}{2} = -5 \notin [-2, 3] \end{cases}$$

La gráfica de la función h quedaría:



El valor máximo de la función h en el intervalo $[-2, 3]$ es 3 y el valor mínimo es -1.

2.2.- La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t , desde que arrancó en $t = 0$, viene dada por la siguiente función $e(t)$ entre $t = 1$ y $t = 4$:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

(i) Calcula el valor de C , considerando que $e(t)$ define una función continua.

[0.75 puntos]

(ii) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir, $v(t) = e'(t)$.

Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$

. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$?

[1 punto]

(iii) Calcula la distancia recorrida entre $t = 3$ y $t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a

$$\int_3^4 v(t) dt ?$$

[0.75 puntos]

(i) Para que sea continua debe serlo en $t = 3$ y debe cumplirse $\lim_{t \rightarrow 3^-} e(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} e(t) = e(3)$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3^-} e(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 120t + 90 = 360 + 90 = 450 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} e(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} C - 240t + 150t^2 - 20t^3 = C - 240 \cdot 3 + 150 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3^3 = C + 90 \\ e(3) &= C + 90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 450 = C + 90 \Rightarrow \boxed{C = 360}$$

(ii) La función $e(t)$ en el intervalo $[1, 5]$ tiene la expresión:

$$e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \\ e(4) = 520 & \text{si } 4 < t \leq 5 \end{cases}$$

Derivamos esta función:

$$v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & \text{si } 3 < t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 < t \leq 5 \end{cases}$$

Falta ver si existe la derivada de $e(t)$ en $t = 3$ y en $t = 4$ y por tanto la función $v(t)$ en dichos valores.

$$\left. \begin{aligned} e'(3^-) &= 120 \\ e'(3^+) &= -240 + 300 \cdot 3 - 60 \cdot 3^2 = 120 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(3) = e'(3) = 120$$

$$\left. \begin{aligned} e'(4^-) &= -240 + 300 \cdot 4 - 60 \cdot 4^2 = 0 \\ e'(4^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(4) = e'(4) = 0$$

La función $v(t)$ es continua.

Que la función espacio recorrido sea una recta significa que la derivada no cambia de valor, es decir, que la velocidad permanece constante.

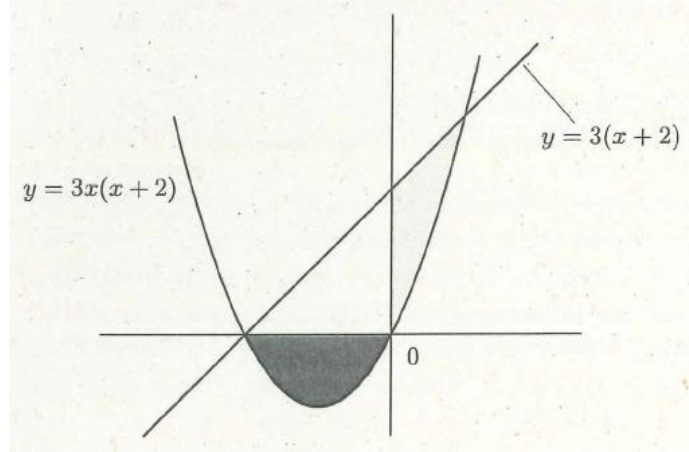
$$(iii) \quad e(4) - e(3) = 520 - (120 \cdot 3 + 90) = 70$$

Sabemos que $\int f'(t) dt = f(t)$, por lo que $\int v(t) dt = \int e'(t) dt = e(t)$ y aplicando la regla de Barrow tenemos que $\int_3^4 v(t) dt = [e(t)]_3^4 = e(4) - e(3)$.

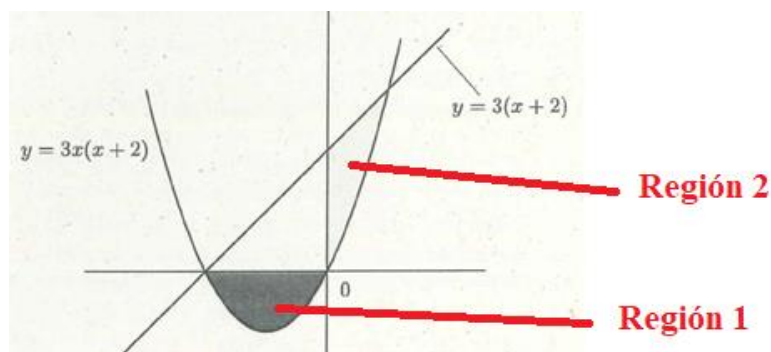
Lo comprobamos:

$$\begin{aligned} \int_3^4 v(t) dt &= \int_3^4 -240 + 300t - 60t^2 dt = [-240t + 150t^2 - 20t^3]_3^4 = \\ &= [-240 \cdot 4 + 150 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4^3] - [-240 \cdot 3 + 150 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3^3] = \boxed{70} = e(4) - e(3) \end{aligned}$$

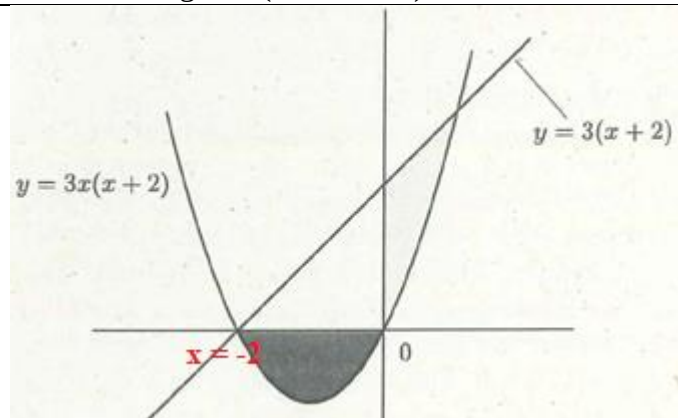
2.3.- Calcula el área de las dos regiones señaladas en el siguiente dibujo:



[2.5 puntos]



Calculamos primero el área de la región 1(más oscura):



Necesitamos los puntos de corte de la parábola $y = 3x(x+2)$ con el eje de abscisas.

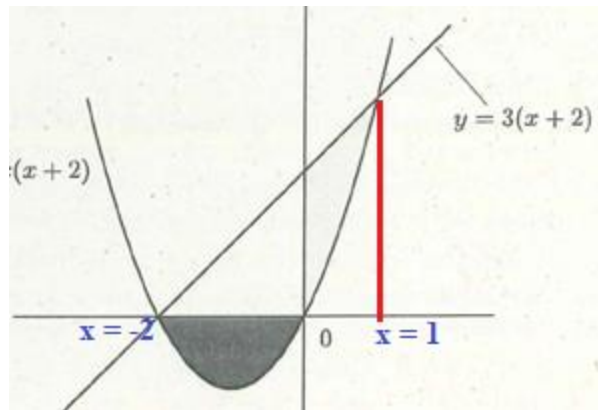
$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3x(x+2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Calculamos el área con el valor absoluto de la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^0 3x(x+2) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 (3x^2 + 6x) dx \right| = \left| \left[x^3 + 3x^2 \right]_{-2}^0 \right| = \\ &= \left| \left[0^3 + 3 \cdot 0^2 \right] - \left[(-2)^3 + 3(-2)^2 \right] \right| = |-4| = \boxed{4} \end{aligned}$$

Calculamos ahora el área de la región 2 (menos oscura):

Necesitamos averiguar el punto de corte de ambas gráficas en el primer cuadrante.



$$\left. \begin{array}{l} y = 3(x+2) \\ y = 3x(x+2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3x(x+2) = 3(x+2) \Rightarrow 3x^2 + 6x = 3x + 6 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Calculamos el área con el valor de la integral definida.

$$\text{Área} = \int_0^1 3(x+2) - 3x(x+2) dx = \int_0^1 -3x^2 - 3x + 6 dx =$$

$$= \left[-x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^1 = \left[-1^3 - 3\frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right] - \left[-0^3 - 3\frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0 \right] = -1 - \frac{3}{2} + 6 = \boxed{3.5u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

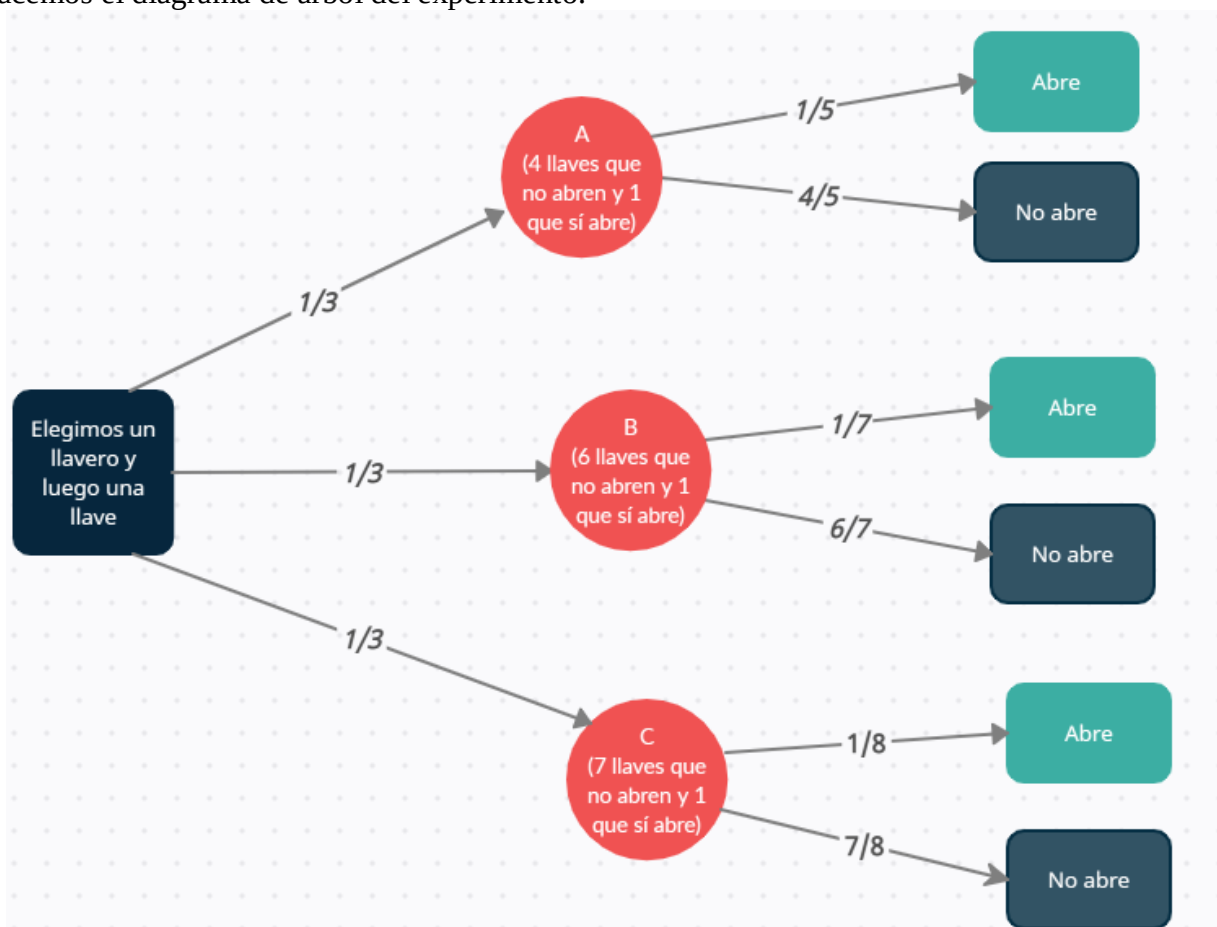
3.1.- En una casa hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

(i) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero. **[1.25 puntos]**

(ii) Si resulta que lo abre, la probabilidad de que sea del llavero A. **[1.25 puntos]**

Llamamos A al suceso “Coge el llavero A”, B al suceso “Coge el llavero B” y C al suceso “Coge el llavero C”.

Hacemos el diagrama de árbol del experimento.



(i) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Abra}) = P(A) \cdot P(\text{Abra} / A) + P(B) \cdot P(\text{Abra} / B) + P(C) \cdot P(\text{Abra} / C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{131}{840} \approx 0.16 = 16\%$$

(ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / \text{Abre}) = \frac{P(A \cap \text{Abre})}{P(\text{Abre})} = \frac{P(A)P(\text{Abre} / A)}{P(\text{Abre})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{56}{131} \approx 0.43 = 43\%$$

3.2.- Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

(i) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor? **[1 punto]**

(ii) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\bar{X}$. Calcula $P(\bar{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$? **[1 punto]**

(iii) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de (ii) con el de (i), sin recurrir a fórmulas?

[0.5 puntos]

(i) Calculamos las probabilidades pedidas

$$X = N(25, 5) \Rightarrow P(X > 30) = P\left(\frac{X - 25}{5} > \frac{30 - 25}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos} \\ \text{en la tabla} \end{array} \right\} = 1 - 0.84134 = \boxed{0.15866}$$

$$Y = N(28, 1) \Rightarrow P(Y > 30) = P\left(\frac{Y - 28}{1} > \frac{30 - 28}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos} \\ \text{en la tabla} \end{array} \right\} = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

Por lo que es mayor $P(X > 30)$

(ii) Si tomamos una muestra de tamaño 4 tenemos que

$$\text{Si } X = N(25, 5) \Rightarrow \bar{X}_4 = N\left(25, \frac{5}{\sqrt{4}}\right) \Rightarrow \bar{X}_4 = N\left(25, \frac{5}{2}\right)$$

$$P(\bar{X}_4 > 30) = P\left(\frac{\bar{X}_4 - 25}{2.5} > \frac{30 - 25}{2.5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \boxed{0.02275}$$

Si tomamos una muestra de tamaño 9 tenemos que

$$\text{Si } X = N(25, 5) \Rightarrow \bar{X}_9 = N\left(25, \frac{5}{\sqrt{9}}\right) \Rightarrow \bar{X}_9 = N\left(25, \frac{5}{3}\right)$$

$$P(\bar{X}_9 > 30) = P\left(\frac{\bar{X}_9 - 25}{5/3} > \frac{30 - 25}{5/3}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.99865 = \boxed{0.00135}$$

(iii) La distribución de las medias muestrales tiene la misma media y una desviación típica $\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ que va siendo menor conforme aumenta el valor de n , pues al tomar varios elementos su valor medio va siendo más próximo a la media. Por ello se cumple:

$$P(X > 30) > P(\bar{X}_4 > 30) > P(\bar{X}_9 > 30)$$

3.3.- Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

(i) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99%?

[1.5 puntos]

(ii) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99%? **[1 punto]**

(i) $X = \text{"Duración de la ofrenda floral en horas"}$. $X = N\left(8, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

Calculamos la probabilidad de que la ofrenda floral dure menos de 8,5 horas.

$$P(X < 8.5) = P\left(\frac{X-8}{\sqrt{2}/5} < \frac{8.5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = P\left(Z < \frac{2.5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z < 1.77) = 0.96164$$

Luego $P(X < 8.5) = 0.96164 > 0.95$ y por tanto si se puede realizar la primera afirmación:

“Puedes afirmar, con al menos un 95% de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media”

Luego $P(X < 8.5) = 0.96164 < 0.99$ y por tanto NO se puede realizar la segunda afirmación:

“Podemos afirmarlo con probabilidad mayor del 99%”

(ii) $X = N(8, \sigma)$

$$P(X < 8.5) = 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{X-8}{\sigma} < \frac{8.5-8}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.99$$

Como se cumple que $P(Z \leq 2.3263) = 0.99$ entonces tenemos que:

$$\frac{0.5}{\sigma} = 2.3263 \Rightarrow \sigma = \frac{0.5}{2.3263} \approx 0.2149$$

EBAU Extraordinaria 2021



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020 - 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? **[2 puntos]**

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? **[0.5 puntos]**.

1.2.- Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) **[0.75 puntos]**

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[1.75 puntos]**

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$x + y \leq 3, \quad y$$

$$x + 3y \leq 6$$

[1.25 puntos]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \quad y \quad g(x, y) = x + 5y$$

[1.25 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

[2.5 puntos].

2.2.- Consideremos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos [1.25 puntos].

(b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$? [0.75 puntos]

(c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f ? [0.5 puntos]

2.3.- Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos. [0.75 puntos]

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$ [1.75 puntos].

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? [1 punto]

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? [1 punto]

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era “como Dios manda” si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? [0.5 puntos]

3.2.- Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? [0.5 puntos]

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? [1.5 puntos]

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545. ¿cuántos meses habrían formado la muestra? [0.5 puntos]

3.3.- Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? [1.75 puntos] Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? [0.75 puntos].

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? **[2 puntos]**

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? **[0.5 puntos]**.

(a) De los 3 números llamamos “x” al mayor, “y” al intermedio, “z” al menor.

“La suma de los tres números es 73” $\rightarrow x + y + z = 73$

“Si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos” $\rightarrow x - 3 = y + z$

“El doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades” $\rightarrow 2z + x = 3y + 8$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 73 \\ x - 3 = y + z \\ 2z + x = 3y + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 73 \\ x = y + z + 3 \\ 2z + x = 3y + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + 3 + y + z = 73 \\ 2z + y + z + 3 = 3y + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 70 \\ 3z - 2y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 35 \\ 3z - 2y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 35 - z \\ 3z - 2(35 - z) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3z - 70 + 2z = 5 \Rightarrow 5z = 75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{75}{5} = 15} \Rightarrow \boxed{y = 35 - 15 = 20} \Rightarrow \boxed{x = 20 + 15 + 3 = 38}$$

Los números son 38, 20 y 15.

(b) Si llamamos “t” al cuarto número tenemos que $t = \frac{38 + 20}{2} = 29$.

El cuarto número es el 29

1.2.- Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) **[0.75 puntos]**

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[1.75 puntos]**

(i) Resolvemos el sistema matricial dejando la solución en función de la matriz A.

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = I - AX \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow I - AX = AX \Rightarrow 2AX = I \Rightarrow AX = \frac{1}{2}I \Rightarrow X = \frac{1}{2}A^{-1}I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2}A^{-1}} \Rightarrow Y = AX = A \frac{1}{2}A^{-1} = \frac{1}{2}AA^{-1} = \frac{1}{2}I \Rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{2}I}$$

(ii) Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\boxed{X = \frac{1}{2}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Y = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$x + y \leq 3, \quad y$$

[1.25 puntos]

$$x + 3y \leq 6$$

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \quad y \quad g(x, y) = x + 5y$$

[1.25 puntos]

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región.

$$y = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x + y = 3$$

$$x + 3y = 6$$

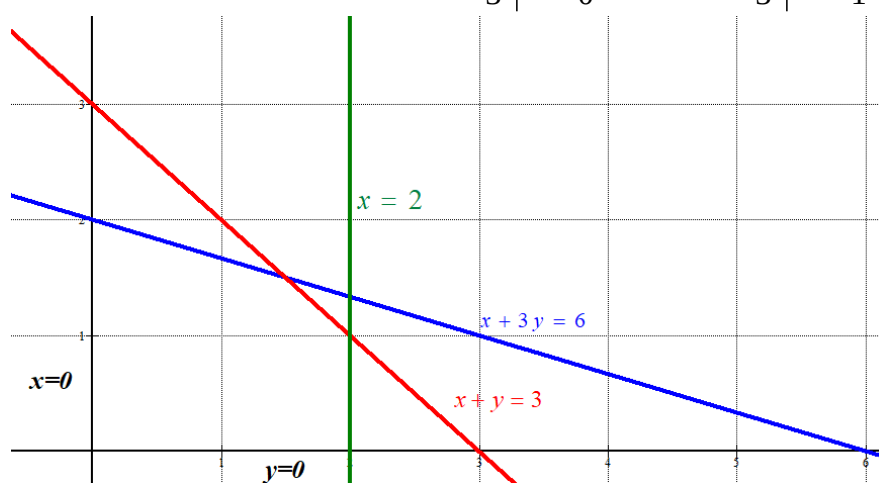
Eje OX

Eje OY

Recta
vertical

x	$y = 3 - x$
0	3
3	0

x	$y = \frac{6-x}{3}$
0	2
3	1

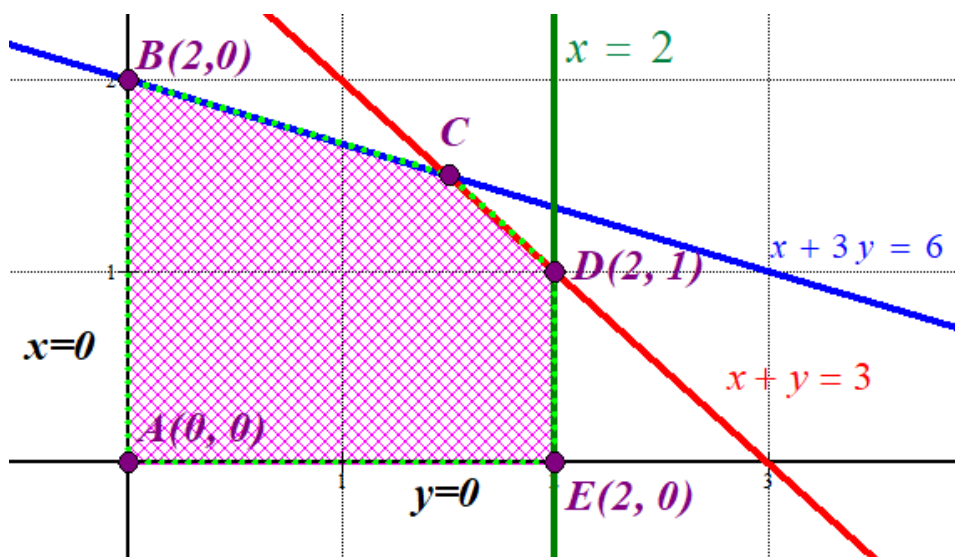


$$0 \leq y, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

Como las inecuaciones son $x + y \leq 3$, y la región del plano que cumple las inecuaciones es la
 $x + 3y \leq 6$

región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 - y \\ x + 3y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - y + 3y = 6 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.5 \Rightarrow x = 1.5 \Rightarrow \boxed{C(1.5, 1.5)}$$

Para averiguar el máximo valor de cada función las valoramos en cada vértice de la región.

Valoramos $f(x, y) = 7x + 5y$ en los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 2) \rightarrow f(0, 2) = 10$$

$$C(1.5, 1.5) \rightarrow f(1.5, 1.5) = 18$$

$$D(2, 1) \rightarrow f(2, 1) = 19$$

$$E(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 14$$

El valor máximo de $f(x, y) = 7x + 5y$ en la región es 19 y se alcanza en el punto D(2,1).

Valoramos $g(x, y) = x + 5y$ en los vértices.

$$A(0, 0) \rightarrow g(0, 0) = 0$$

$$B(0, 2) \rightarrow g(0, 2) = 10$$

$$C(1.5, 1.5) \rightarrow g(1.5, 1.5) = 9$$

$$D(2, 1) \rightarrow g(2, 1) = 7$$

$$E(2, 0) \rightarrow g(2, 0) = 2$$

El valor máximo de $g(x, y) = x + 5y$ en la región es 10 y se alcanza en el punto B(0,2).

Bloque 2. Análisis.**2.1.-** Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

[2.5 puntos].Dominio.

El dominio son todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntotas**Asíntota vertical.** $x = a$ ¿ $x = -1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal

Puntos de corte con los ejes.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 0}{0^2 + 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$. El punto de corte con el eje OY es P(0, 0).

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Los puntos de corte con el eje OX

son P(0, 0) y Q(2, 0).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(x^2 - 2x)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{4x^2} + 2x - \cancel{2x^2} - \cancel{4x} - 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x}}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

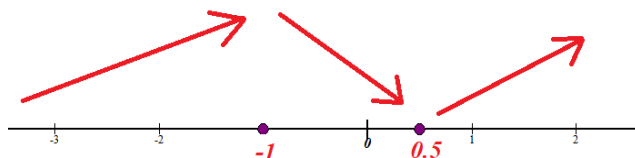
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 2x - 2}{(x^2 + 2x + 1)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{4} = -1 \notin \text{Dominio } f(x) \end{cases}$$

Hay un punto crítico: $x = 0.5$. Y un valor excluido del dominio: $x = -1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(-2) = \frac{4(-2)^2 - 4 - 2}{((-2)^2 - 4 + 1)^2} = \frac{8}{+} > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(0) = \frac{0 + 0 - 2}{(0^2 + 0 + 1)^2} = -2 < 0$. La función decrece en $(-1, 0.5)$.
- En $(0.5, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(2) = \frac{4 \cdot 2^2 + 4 - 2}{(2^2 + 4 + 1)^2} = \frac{18}{+} > 0$. La función crece en $(0.5, +\infty)$.

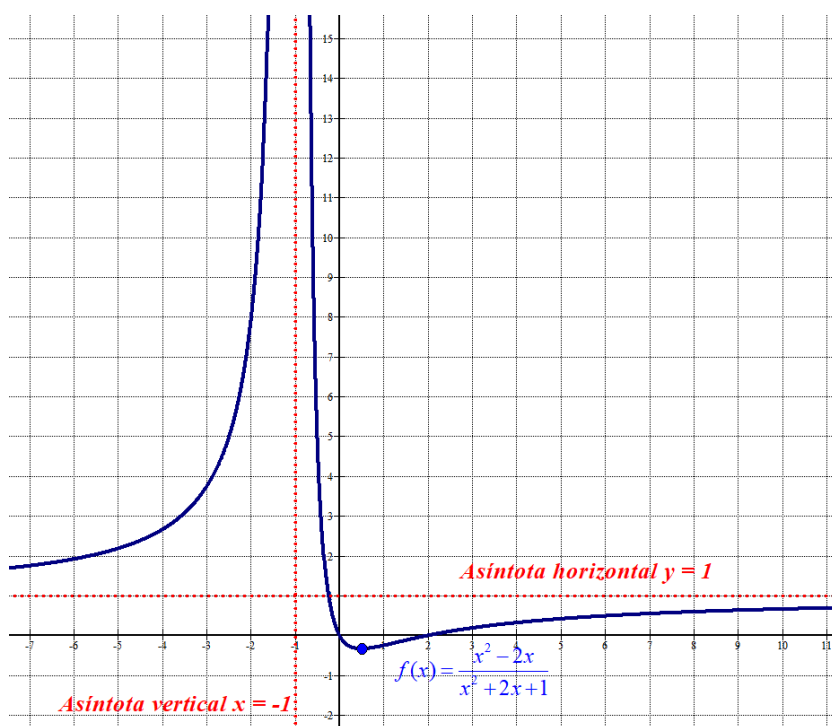
La función sigue el esquema del dibujo.



Como en $x = -1$ es discontinua solo presenta un mínimo relativo en $x = 0.5$.

Como $f(0.5) = \frac{0.5^2 - 1}{0.5^2 + 1 + 1} = -\frac{1}{3}$ el punto mínimo relativo tiene coordenadas $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0.5, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0.5)$.



2.2.- Consideremos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos **[1.25 puntos]**.

(b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$? **[0.75 puntos]**

(c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f ? **[0.5 puntos]**

(a) Derivamos e igualamos a cero en busca de sus extremos relativos.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en cada uno de los puntos críticos obtenidos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow x = -1 \text{ es máximo relativo} \\ f''(1) = 6 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo relativo} \end{cases}$$

$$\text{Como } f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2 \text{ y } f(1) = 1^3 - 3 = -2$$

el máximo relativo tiene coordenadas $M(-1, 2)$ y el mínimo relativo $P(1, -2)$.

(b) $f'(1) = 0$ pues en $x = 1$ hay un extremo relativo.

Hallamos la recta tangente en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = 0(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

La recta tangente en $x = -1$ es una recta horizontal con ecuación $y = -2$.

(c) Resolvemos el sistema formado por la función y la tangente.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = x^3 - 3x \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Función y recta tangente se cortan en el punto de tangencia $x = 1$ y además en otro punto más, en $x = -2$.

Como $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -2$ el otro punto de corte tiene coordenadas $Q(-2, -2)$.

2.3.- Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos **[0.75 puntos]**.

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$ **[1.75 puntos]**.

La gráfica de esta función es una parábola, por lo que tendrá un máximo o un mínimo.

$$f(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(2.5) = 2 > 0$$

En $x = 2.5$ hay un mínimo.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = x^2 - 5x + 4$
0	4
1	0
2.5	-2.25
4	0
5	4

Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.
Vemos donde se cortan.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 5x + 4 \\ y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-6)}}{2} \Rightarrow$$

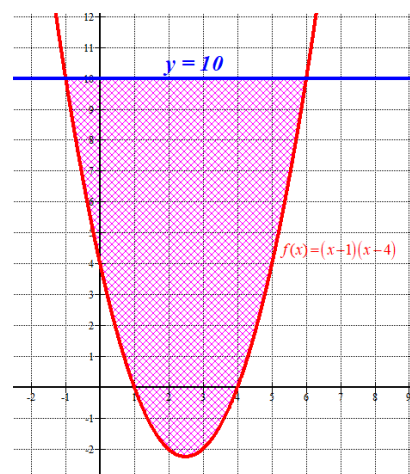
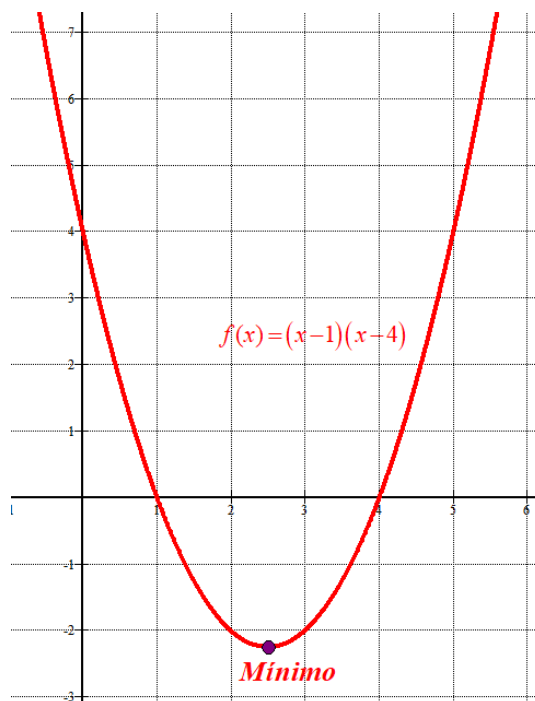
$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{5+7}{2} = 6 \\ \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

Su área es la integral definida entre $x = -1$ y $x = 6$ de $10 - f(x)$.

$$\int_{-1}^6 10 - (x^2 - 5x + 4) dx = \int_{-1}^6 -x^2 + 5x + 6 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^6 =$$

$$= \left[-\frac{6^3}{3} + 5\frac{6^2}{2} + 36 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + 5\frac{(-1)^2}{2} - 6 \right] =$$

$$= -72 + 90 + 36 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 = \boxed{\frac{343}{6} = 57.16 u^2}$$



Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

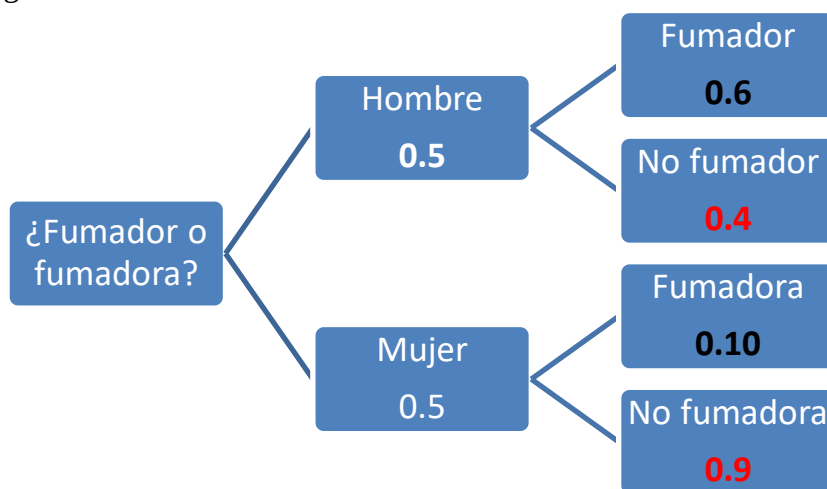
3.1.- Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? **[1 punto]**

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? **[1 punto]**

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era “como Dios manda” si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? **[0.5 puntos]**

(i) Hacemos un diagrama de árbol.



$$P(\text{Fumar}) = P(\text{Hombre})P(\text{Fumar} / \text{Hombre}) + P(\text{Mujer})P(\text{Fumar} / \text{Mujer}) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.1 = \boxed{0.35 = 35 \%}$$

(ii) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Mujer} / \text{Fumador}(a)) = \frac{P(\text{Mujer y fumadora})}{P(\text{Fumador}(a))} =$$

$$= \frac{P(\text{Mujer})P(\text{Fumadora} / \text{Mujer})}{P(\text{Fumador}(a))} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.35} = \frac{1}{7} \approx \boxed{14 \%}$$

(iii) $P(\text{Hombre y fumador o Mujer y no fumadora}) =$

$$= P(\text{Hombre y fumador}) + P(\text{Mujer y no fumadora}) =$$

$$= P(\text{Hombre})P(\text{Fumador} / \text{Hombre}) + P(\text{Mujer})P(\text{No fumadora} / \text{Mujer}) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.9 = 0.75 = \boxed{75 \%}$$

El 75 % de personas adultas son como Dios manda.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL EJERCICIO

Si consideramos que hay 100 personas, de ellas 50 son hombres y 50 mujeres.

De los hombres el 60 % fuman, es decir $0.60 \cdot 50 = 30$ son fumadores.

De las mujeres el 10 % fuman, es decir, $0.10 \cdot 50 = 5$ son fumadoras.

Hay un total de $30 + 5 = 35$ personas que fuman.

(i) $P(\text{ser fumador}) = \frac{30+5}{100} = 0.35 = \boxed{35\%}$

(ii) Es el cociente entre mujeres fumadoras (5) y personas fumadoras (30 + 5).

Las mujeres son el $\frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx \boxed{14\%}$ de las personas que fuman.

(iii) Hombres que fumen son 30 y mujeres que no fuman son $50 - 5 = 45$. Por lo que hay $30 + 45 = 75$ personas “como Dios manda” de un total de 100 individuos.

El porcentaje de personas “como Dios manda” son $\frac{75}{100} = 0.75 = \boxed{75\%}$

3.2.- Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? **[0.5 puntos]**

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545. ¿cuántos meses habrían formado la muestra? **[0.5 puntos]**

X = Ingresos mensuales por ventas de un establecimiento en euros. $X = N(\mu, 900)$

(a) Tamaño de la muestra: $n = 9$

El intervalo de confianza es (4663, 5839)

La media muestral es el valor central del intervalo: $\bar{x} = \frac{4663 + 5839}{2} = 5251 \text{ €}$

El promedio de ventas en los 9 meses es de 5251 €

(b) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = \frac{5839 - 4663}{2} = 588 \text{ €}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{9}} \Rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot 300 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{588}{300} = 1.96$$



$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = P(Z \leq 1.96) = 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza es del 95 %.

(c) Si el intervalo de confianza es (4957, 5545) el

error es $\frac{5545 - 4957}{2} = 294 \text{ €}$.

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño de la muestra “n”.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 294 = 1.96 \cdot \frac{900}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 900}{294} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 900}{294} \right)^2 = 36$$

El tamaño de la muestra es 36 meses.

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.0
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.527
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.567
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.606
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.644
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.680
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.715
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.748
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.779
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.807
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.833
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.857
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.879
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.897
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.914
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.929
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.941
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.952
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.961
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96855	0.969
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97440	0.97500	0.975
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.980

3.3.- Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[1.25 puntos]**.

X = Estatura de un adulto español en cm. $X = N(174, 8)$

$$P(X \geq 190) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{190-174}{8}\right) = P(Z \geq 2) = \dots$$



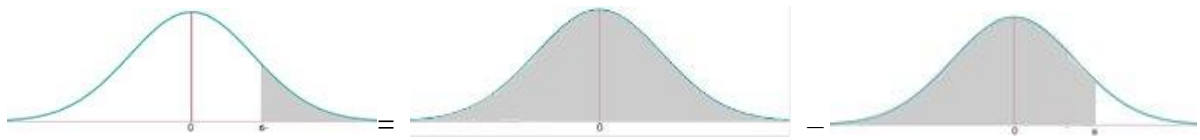
z	+0.00	+0.01
0.0	0.50000	0.50399
0.1	0.53983	0.54380
0.2	0.57926	0.58311
0.3	0.61791	0.62176
0.4	0.65542	0.65910
0.5	0.69146	0.69495
0.6	0.72575	0.72906
0.7	0.75804	0.76115
0.8	0.78814	0.79103
0.9	0.81594	0.81858
1.0	0.84134	0.84375
1.1	0.86433	0.86650
1.2	0.88493	0.88686
1.3	0.90320	0.90495
1.4	0.91924	0.92077
1.5	0.93319	0.93448
1.6	0.94520	0.94633
1.7	0.95543	0.95638
1.8	0.96407	0.96485
1.9	0.97128	0.97196
2.0	0.97725	0.97779
2.1	0.98214	0.98254
2.2	0.98610	0.98641

$$\dots = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

En Holanda si X = Estatura de un adulto holandés en cm. $X = N(\mu, 8)$

Nos dicen que $P(X \geq 190) = 0.15866$. Intentamos averiguar la media de estatura en Holanda.

$$P(X \geq 190) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{190 - \mu}{8}\right) = 0.15866 \Rightarrow \dots$$



$$\dots \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{190 - \mu}{8}\right) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{190 - \mu}{8}\right) = 1 - 0.15866 = 0.84134 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{190 - \mu}{8} = 1 \Rightarrow 190 - \mu = 8 \Rightarrow \boxed{\mu = 190 - 8 = 182 \text{ cm}}$$

La media poblacional en Holanda es de 182 cm.

z	+0.00	+0.
0.0	0.50000	0.50
0.1	0.53983	0.54
0.2	0.57926	0.58
0.3	0.61791	0.62
0.4	0.65542	0.65
0.5	0.69146	0.69
0.6	0.72575	0.72
0.7	0.75804	0.76
0.8	0.78814	0.79
0.9	0.81594	0.81
1.0	0.84134	0.84
1.1	0.86433	0.86

EBAU Ordinaria 2021



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020 - 2021
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Discute el siguiente sistema en función del parámetro a [1.25 puntos]:

$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\2x - ay + 2az &= 5 \\x + 3y - z &= 0\end{aligned}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$ [1.25 puntos].

1.2.- Consideramos la ecuación matricial $X^2 - X = 2I$

Donde I es la matriz identidad.

(i) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación? [2 puntos]

(ii) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices? [0.25 puntos]

(iii) Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango? [0.25 puntos]

1.3.- En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad x de polvo sintético con una cantidad y de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones

$$\begin{aligned}x + 2y &\leq 6 && \text{(para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),} \\5x + 4y &\leq 20 && \text{(para mantener la gama de color adecuada),} \\y &\leq x && \text{(para que la viscosidad no sea excesiva).}\end{aligned}$$

(a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones. [0.75 puntos]

(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar? [0.75 puntos]

(c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo ($x + y$) que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo? [1 punto]

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma

$$f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$$

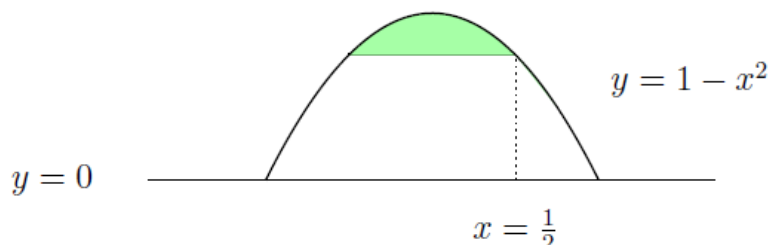
- (i) ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical? **[1 punto]**
 (ii) Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$ **[1.5 puntos]**.

2.2.- Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2, 2]$ según

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{si } x \in [-2, a) \\ x+4, & \text{si } x \in [a, b) \\ 5/x, & \text{si } x \in [b, 2] \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua **[1.25 puntos]**, y representa la función gráficamente **[1.25 puntos]**.

2.3.- Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura:



[2.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura? **[1.25 puntos]**
 (b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6? **[1.25 puntos]**

3.2.- Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35% de vino blanco, un 40% de vino de crianza y un 25% de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5% para el vino blanco, 4% para el crianza y 2% para el reserva.

- (i) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado? **[1.75 puntos]**
 (ii) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado? **[0.75 puntos]**

3.3.- Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

- (a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr? **[1.25 puntos]**
 (b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95% de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina **[1.25 puntos]**.

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Discute el siguiente sistema en función del parámetro a [1.25 puntos]:

$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\2x - ay + 2az &= 5 \\x + 3y - z &= 0\end{aligned}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$ [1.25 puntos].

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Iguálamos a cero el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a + 2a^2 + 0 - 0 + 2a - 6a = 2a^2 - 3a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(2a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a - 3 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Establecemos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

CASO 2. $a = 0$

Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{aligned}x &= 1 \\2x &= 5 \\x + 3y - z &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}x &= 1 \\x &= \frac{5}{2} \\x + 3y - z &= 0\end{aligned} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es **incompatible** (no tiene solución)

CASO 3. $a = \frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss y estudiamos el rango de A y A/B con más facilidad.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 & 1 \\ 2 & -1.5 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad -1.5 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1.5 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1.5 \quad 3 \quad 5 \\ -2 \quad -3 \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -4.5 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & -4.5 & 3 & 3 \\ 0 & 1.5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4.5 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad -4.5 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1.5 \quad 0 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -4.5 \quad 3 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El rango de las matrices A y A/B es 2. Tienen el mismo valor del rango, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resolvemos el sistema para $a = 1$. Estamos en el caso 1 y por tanto el sistema es compatible determinado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -y \quad +2z = 5 \\ -2x \quad -2y \quad = -2 \\ \hline -3y \quad +2z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad +3y \quad -z = 0 \\ -x \quad -y \quad = -1 \\ \hline 2y \quad -z = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -3y + 2z = 3 \\ 2y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ -6y \quad +4z = 6 \\ 6y \quad -3z = -3 \\ \hline z = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -3y + 2z = 3 \\ \boxed{z = 3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -3y + 6 = 3 \rightarrow -3y = 3 - 6 \rightarrow \boxed{y = \frac{-3}{-3} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución del sistema cuando $a = 1$ es $x = 0$; $y = 1$; $z = 3$.

1.2.- Consideramos la ecuación matricial

$$X^2 - X = 2I$$

Donde I es la matriz identidad.

(i) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación? **[2 puntos]**

(ii) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices? **[0.25 puntos]**

(iii) Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango? **[0.25 puntos]**

(i) Sustituimos en la ecuación matricial y la resolvemos.

$$X^2 - X = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-a & ab-b-b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a=2 \\ ab-2b=0 \\ 0=0 \\ 2=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ 0 \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases} \\ (a-2)b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ 0 \\ b=0 \end{cases} \end{cases}$$

Como deben cumplirse las dos condiciones, esto solo ocurre con $a = 2$ y el valor de b cualquiera. O bien $a = -1$ y $b = 0$.

Las matrices serían $X = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$ o bien $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $X^2 - X = X \cdot X - X \cdot I = X(X - I)$. Esta es la expresión buscada.

(iii) Si X cumple la ecuación $X^2 - X = 2I$ entonces:

$$X^2 - X = 2I \Rightarrow X(X - I) = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}X(X - I) = \frac{1}{2}2I \Rightarrow X\left(\frac{1}{2}(X - I)\right) = I$$

Entonces la matriz X tiene inversa $X^{-1} = \frac{1}{2}(X - I)$. Lo que implica que el determinante de X es no nulo. Y por tanto su rango es máximo (n).

Si la matriz X es cuadrada de orden n cumple la ecuación entonces el rango de X es n .

1.3.- En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad x de polvo sintético con una cantidad y de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones

$$x + 2y \leq 6$$

(para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),

$$5x + 4y \leq 20$$

(para mantener la gama de color adecuada),

$$y \leq x$$

(para que la viscosidad no sea excesiva).

(a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones. **[0.75 puntos]**

(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar? **[0.75 puntos]**

(c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo ($x + y$) que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo? **[1 punto]**

(a) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$$x + 2y = 6$$

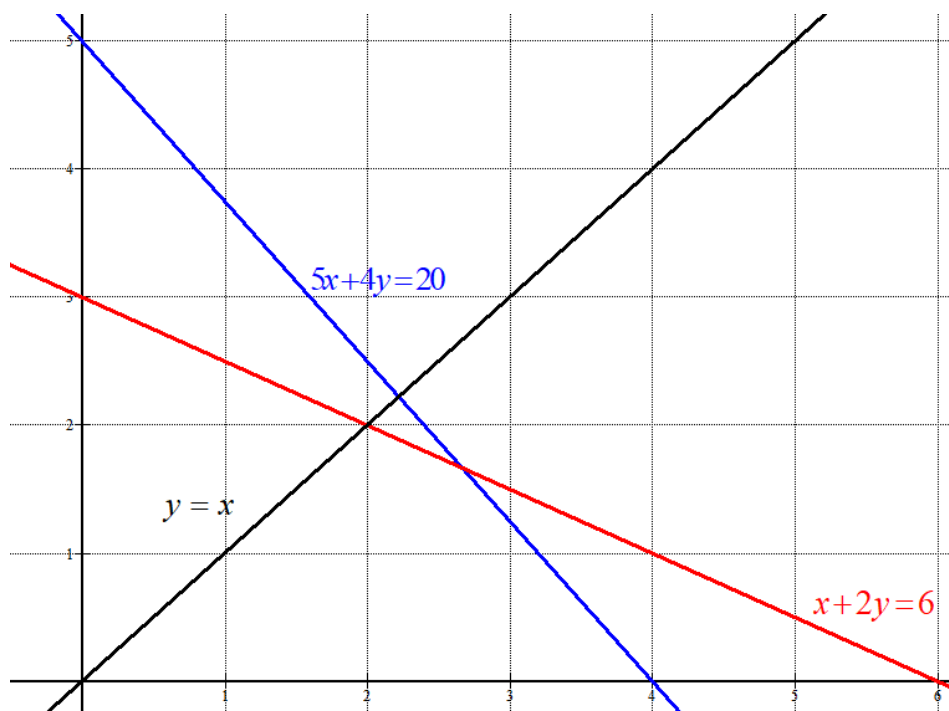
x	$y = \frac{6-x}{2}$
0	3
2	2
6	0

$$5x + 4y = 20$$

x	$y = \frac{20-5x}{4}$
0	5
4	0
2	2.5

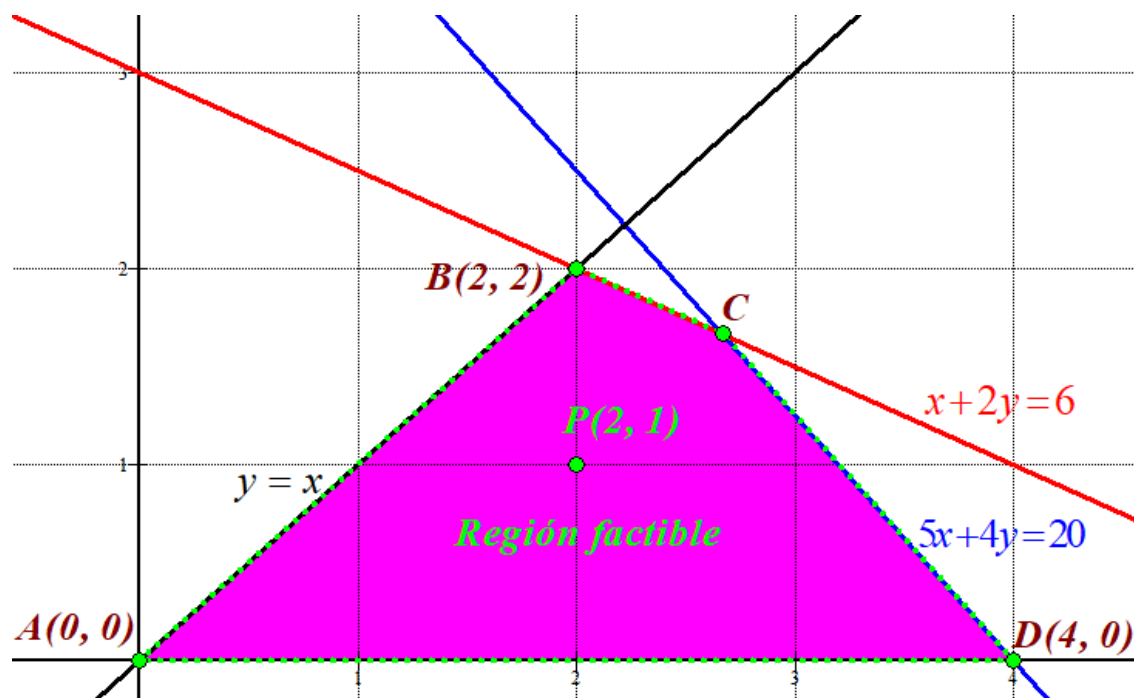
$$y = x$$

x	$y = x$
0	0
2	2
4	4



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ y \leq x \end{array} \right\}$ la región factible está por debajo de las rectas roja, azul y negra y por encima del eje, pues las cantidades de polvo se suponen positivas.

Coloreamos de rosa la región factible y elegimos un punto de ella para comprobar que es la región factible.



¿P(2, 1) cumple las restricciones?

$$\left. \begin{array}{l} 2+2 \leq 6 \\ 10+4 \leq 20 \\ 1 \leq 2 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! La región factible es correcta.}$$

Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=6 \\ 5x+4y=20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=6-2y \\ 5x+4y=20 \end{array} \right\} \Rightarrow 5(6-2y)+4y=20 \Rightarrow 30-10y+4y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6y = -10 \Rightarrow \boxed{y = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{x = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}} \Rightarrow C\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

(b) Mirando la región factible el mayor valor de y es 2.

(c) Tomamos como función objetivo $f(x, y) = x + y$. Buscamos su valor máximo en el seno de la región factible. Para ello valoramos esta función en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0 + 0 = 0$$

$$B(2, 2) \rightarrow f(2, 2) = 2 + 2 = 4$$

$$C\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) \rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3} \approx 4.33$$

$$D(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = 4 + 0 = 4$$

La cantidad máxima de polvo es $13/3$ que contiene $8/3$ de polvo sintético y $5/3$ de polvo mineral.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma

$$f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$$

(i) ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical? **[1 punto]**

(ii) Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$ **[1.5 puntos]**.

(i) La función $f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$ tiene como presuntas asíntotas verticales los valores excluidos del dominio, que son los que anulan el denominador. Pero además, los límites laterales deben ser infinito.

Los valores excluidos del dominio son $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Pero al calcular el límite de la función cuando tiende a $+1$ o a -1 puede ocurrir que no dé infinito. Para ello debe poderse simplificar la fracción, es decir, b debe ser 1 o -1 .

Lo comprobamos.

Si $b = +1$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \cancel{(x+1)}}{(x-1) \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \boxed{\infty}$$

Solo tiene como asíntota vertical la recta $x = 1$

Si $b = -1$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x}{x+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Solo tiene como asíntota vertical la recta $x = -1$

Conclusión: Para $b = +1$ o $b = -1$ la función tiene una única asíntota vertical. En el resto de casos tiene dos asíntotas verticales.

(ii) Si $b = -2$ la función queda $f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-1}$.

Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-1} = \frac{x^2-2x}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1) - 2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \text{¡ No existe !}$$

Esta función no presenta puntos críticos y no tendrá ningún extremo relativo.

La expresión de la derivada $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 1)^2}$ tiene tres factores que son siempre positivos. Por lo que la derivada siempre es positiva y la función siempre es creciente.

$$\left. \begin{array}{l} 2 > 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \text{ siendo } x \neq \pm 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

2.2.- Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2, 2]$ según

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{si } x \in [-2, a) \\ x+4, & \text{si } x \in [a, b) \\ 5/x, & \text{si } x \in [b, 2] \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua **[1.25 puntos]**, y representa la función gráficamente **[1.25 puntos]**.

Para que f sea continua debe serlo en $x = a$ y para ello:

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= a+4 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} 3-2x = 3-2a \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a+4 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a+4 = 3-2a \Rightarrow a+2a = 3-4 \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Para que f sea continua debe serlo en $x = b$ y para ello:

$$\left. \begin{aligned} f(b) &= \frac{5}{b} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^-} x+4 = b+4 \\ \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{5}{x} = \frac{5}{b} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b+4 = \frac{5}{b} \Rightarrow b^2+4b = 5 \Rightarrow b^2+4b-5 = 0 \Rightarrow$$

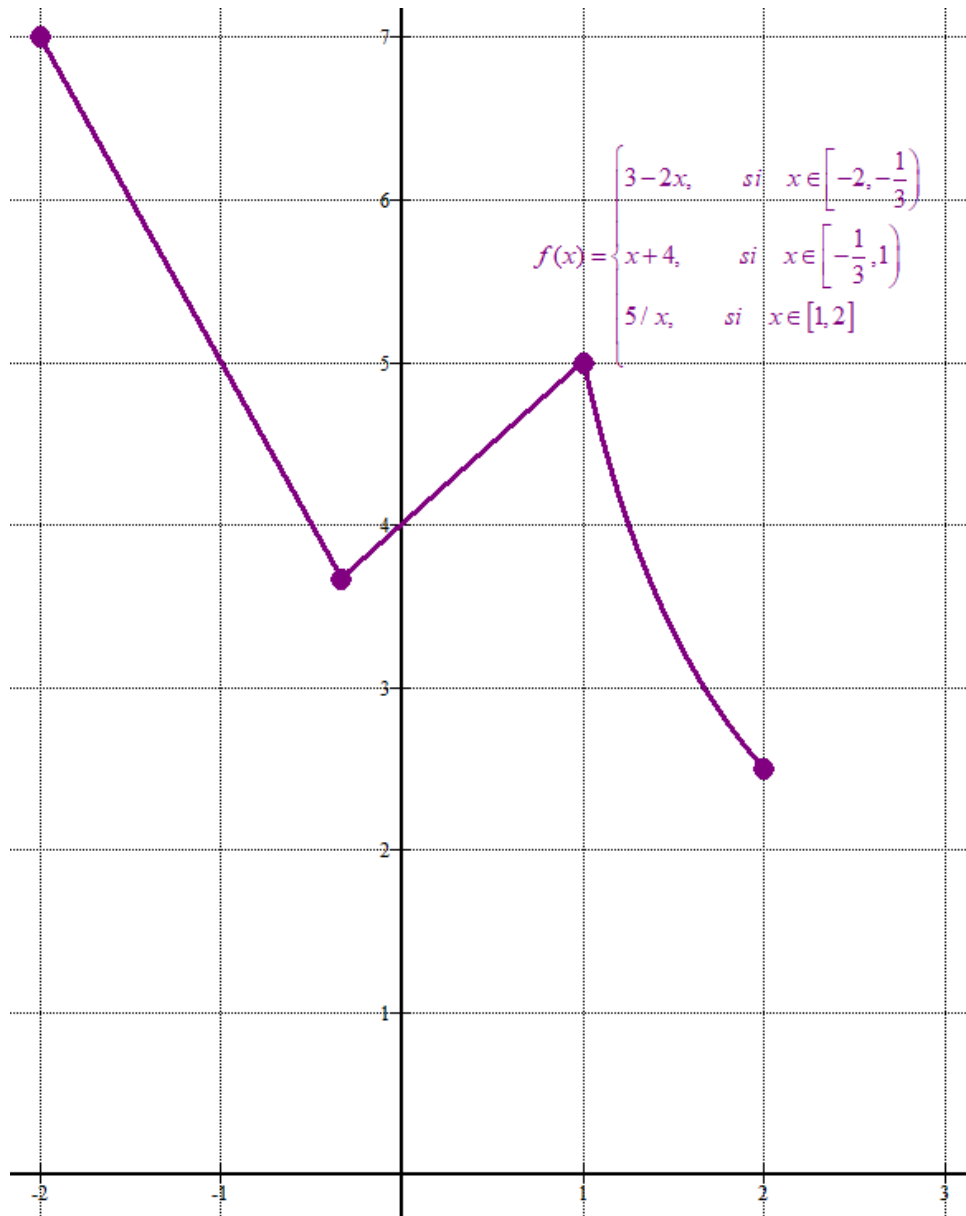
$$\Rightarrow b = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-4+6}{2} = 1 = b, & \text{Es mayor que } a = -\frac{1}{3} \text{ y menor que } 2 \\ \frac{-4-6}{2} = -5, & \text{No vale pues debe estar entre } -2 \text{ y } 2 \end{cases}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = -\frac{1}{3}$ y $b = 1$.

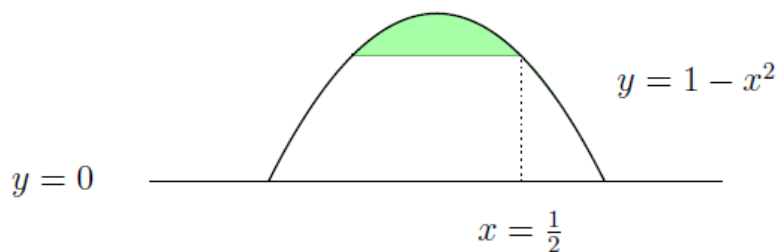
Para $a = -\frac{1}{3}$ y $b = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{si } x \in \left[-2, -\frac{1}{3}\right) \\ x+4, & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \\ 5/x, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$.

La función es un trozo de recta, otro trozo de recta y un trozo de curva.
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica,

x	$y = 3 - 2x$	x	$y = x + 4$	x	$y = \frac{5}{x}$
-2	7	-1/3	11/3	1	5
-1	5	0	4	1.5	3.33
-1/3	11/3 no se incluye	1	5 no se incluye	2	2.5



2.3.- Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura:



[2.5 puntos]

Hallamos las coordenadas del punto de la gráfica de la parábola para $x = \frac{1}{2}$.

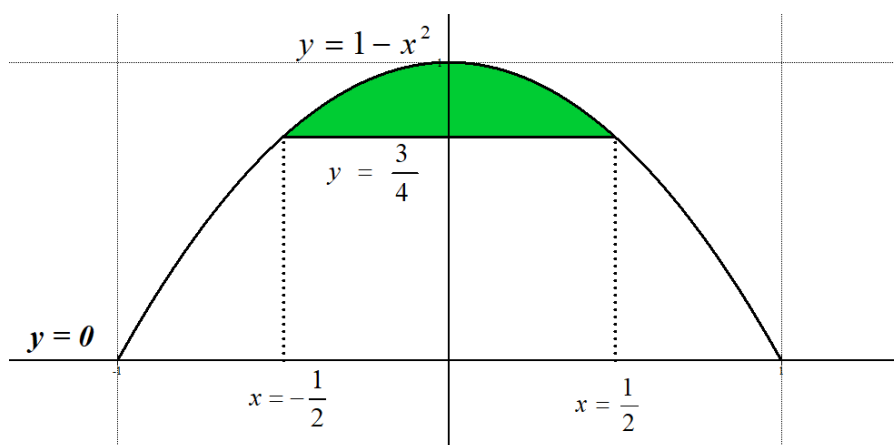
$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La recta horizontal es $y = \frac{3}{4}$.

Averiguamos los dos puntos donde se cortan la recta $y = \frac{3}{4}$ y la parábola $y = 1 - x^2$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Completamos el dibujo trazando los ejes de coordenadas y determinando la ecuación de la recta horizontal que limita la región por la parte inferior.



El área es la integral definida de $y = 1 - x^2$ menos $y = \frac{3}{4}$ entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

$$\text{Área} = \int_{-0.5}^{0.5} (1 - x^2) - \frac{3}{4} dx = \int_{-0.5}^{0.5} 1 - x^2 - \frac{3}{4} dx = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{4} - x^2 dx = \left[\frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3} \right]_{-0.5}^{0.5}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{1}{4} \cdot 0.5 - \frac{0.5^3}{3} \right] - \left[\frac{1}{4}(-0.5) - \frac{(-0.5)^3}{3} \right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{2}{8} - \frac{2}{24} = \frac{6-2}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} u^2$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura? **[1.25 puntos]**

(b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6? **[1.25 puntos]**

(a) Lo calculamos con el suceso contrario. Vemos cuando gana Jorge. Gana cuando la diferencia es 1 o 0. Es decir cuando sacan la misma puntuación: 11, 22, 33, 44, 55, 66 o bien cuando hay una diferencia de 1: 12, 21, 32, 23, 43, 34, 54, 45, 65, 56.

En el total de los 36 resultados posibles ($6 \cdot 6$) solo favorecen a Jorge $6 + 10 = 16$ y a Laura los 20 restantes.

$$P(\text{Gane Laura}) = \frac{20}{36} = \boxed{\frac{5}{9} \approx 0.56}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori.

Se da por hecho que ha ganado Laura, por lo que ha salido uno de los 20 resultados que la favorecen. Estos son el número de casos posibles suponiendo cierto el éxito de Laura.

De todos ellos si Jorge ha sacado un 6 ella debe haber sacado o un 4, o un 3 o un 2 o un 1. Esos son los 4 resultados favorables al suceso “Jorge saca un 6 condicionado a que gana Laura”.

Aplicando la regla de Laplace.

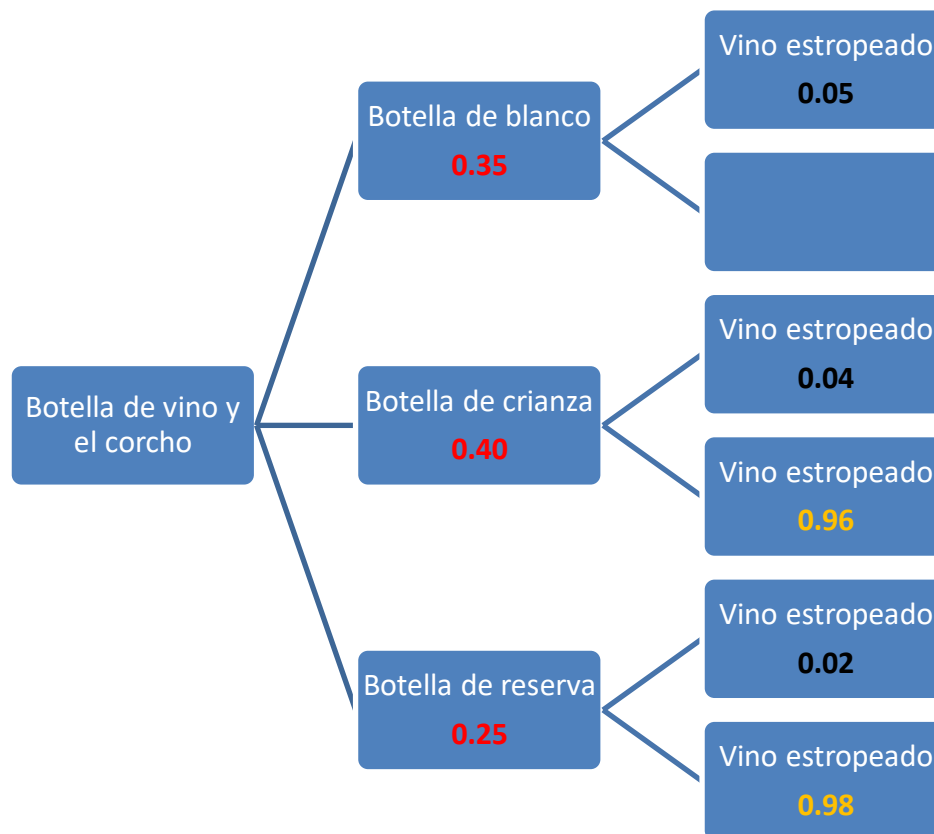
$$P(\text{Jorge saque 6 / Gana Laura}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

3.2.- Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35% de vino blanco, un 40% de vino de crianza y un 25% de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5% para el vino blanco, 4% para el crianza y 2% para el reserva.

(i) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado? **[1.75 puntos]**

(ii) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado? **[0.75 puntos]**

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B = “Elegir botella de vino blanco”, C = “Elegir botella de vino crianza” y R = “Elegir botella de vino reserva”.

Llamamos E = “La botella de vino está estropeada”, por lo que $\bar{E}$ = “La botella de vino NO está estropeada”

(i) Aplicamos el teorema de probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(R \cap E) = P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) + P(R)P(E/R) = \\
 &= 0.35 \cdot 0.05 + 0.40 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = \boxed{0.0385}
 \end{aligned}$$

(ii) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{E} / (C \cup R)) = \frac{P(\bar{E} \cap (C \cup R))}{P(C \cup R)} = \frac{P(C \cap \bar{E}) + P(R \cap \bar{E})}{P(C \cup R)} =$$

$$= \frac{P(C)P(\bar{E}/C) + P(R)P(\bar{E}/R)}{P(C \cup R)} = \frac{0.4 \cdot 0.96 + 0.25 \cdot 0.98}{0.40 + 0.25} = \boxed{\frac{629}{650} \approx 0.968}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO (ii)

Este último apartado se puede hacer utilizando la regla de Laplace y contando botellas de vino.

Suponiendo que hay 100 botellas en la bodega habrían $40 + 25 = 65$ botellas entre crianza y reserva.

Hay estropeadas el 4 % de las de crianza $\rightarrow \frac{4}{100} \cdot 40 = \frac{160}{100} = 1.6$ botellas estropeadas. De las 40 botellas de crianza hay $40 - 1.6 = 38.4$ NO estropeadas.

Hay estropeadas el 2 % de las de reserva $\rightarrow \frac{2}{100} \cdot 25 = \frac{50}{100} = 0.5$ botellas estropeadas. De las 25 botellas de reserva hay $25 - 0.5 = 24.5$ NO estropeadas.

Aplicamos la regla de Laplace y tenemos que:

$$P(\bar{E}/(C \cup R)) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{38.4 + 24.5}{40 + 25} = \frac{62.9}{65} = \boxed{\frac{629}{650} \approx 0.968}$$

3.3.- Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

- (a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr? **[1.25 puntos]**
- (b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95% de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina **[1.25 puntos]**.

X = Peso de una bola de billar en gramos. $X = N(\mu, 20)$

- (a) Si X = Peso de una bola de billar en gramos. $X = N(165, 20)$

El peso medio de 100 bolas sigue una distribución normal con la misma media y con desviación típica $\frac{20}{\sqrt{100}} = 2$ gramos. $\bar{X}_{100} = N(165, 2)$. Nos piden calcular $P(\bar{X}_{100} > 168)$.

$$P(\bar{X}_{100} > 168) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{168-165}{2}\right) =$$

$$= P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.93319 = \boxed{0.06681}$$

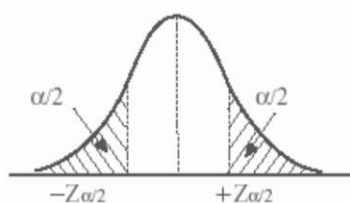


z	+0.00	+0.1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5080	0.5120
0.2	0.5160	0.5200
0.3	0.5240	0.5280
0.4	0.5320	0.5360
0.5	0.5400	0.5440
0.6	0.5480	0.5520
0.7	0.5560	0.5600
0.8	0.5640	0.5680
0.9	0.5720	0.5760
1.0	0.5800	0.5840
1.1	0.5880	0.5920
1.2	0.5960	0.6000
1.3	0.6040	0.6080
1.4	0.6120	0.6160
1.5	0.93319	0.93746
1.6	0.94520	0.94944

- (b) $n = 100$. $\bar{x} = 165$ gr

Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3.92$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (165 - 3.92, 165 + 3.92) = (161.08, 168.92)$$

EBAU Extraordinaria 2020



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2019 - 2020

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.- De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

(I) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo? **(2 puntos)**

(II) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía? **(0,5 puntos)**

1.2.- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30} . **(1 punto)**

(III) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

1.3.- Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil euros y la de viura 3 mil euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

(I) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos. **(1,25 puntos)**

(II) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.- Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 3t - 1, & 1 \leq t < 2 \\ -5t + 15, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

(I) Estudia razonadamente su continuidad. **(0,75 puntos)**

(II) Haz una representación gráfica de la función f . **(1 punto)**

(III) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿en qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?. **(0,75 puntos)**

2.2.- Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

(I) Determina a , b y c sabiendo que el punto $(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f . **(1,25 puntos)**

(II) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$. **(1,25 puntos)**

NOTA: Si no has conseguido determinar a , b y c en el apartado anterior, toma $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$ en este segundo apartado.

2.3.- La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en la que x indica la temperatura en grados Celsius.

$$f(x) = (x + 3)^2 (36 - x) \quad (0 \leq x \leq 36)$$

(I) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción? **(1,5 puntos)**

(II) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada? **(0,5 puntos)**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

3.1.- En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

(I) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés? **(0,75 puntos)**

(II) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco? **(0,75 puntos)**

(III) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín? **(1 punto)**

3.2.- La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

(I) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días? **(1,25 puntos)**

(II) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90% para la media de la producción. **(1,25 puntos)**

3.3.- Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

(I) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A? **(0,5 puntos)**

(II) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿Cuál es la probabilidad de que María vea LA? **(0,5 puntos)**

(III) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO? **(0,75 puntos)**

(IV) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA? **(0,75 puntos)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

(I) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo? **(2 puntos)**

(II) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía? **(0,5 puntos)**

Llamemos “a” al número de bebés que se inscriben con el nombre de Alba, “l” a los que se inscriben con el nombre de Lucía, “p” a los que se inscriben con el nombre de Pedro y “m” a los que lo hacen con el nombre de Mateo.

- “63 se inscriben con estos nombres” $\rightarrow a + l + p + m = 63$
- “48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo” $\rightarrow a + p + m = 48$
- “El número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo” $\rightarrow p = a + m$
- “Se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo” $\rightarrow a = \frac{p}{2} + m$

Juntamos todas las ecuaciones formando un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} a + l + p + m = 63 \\ a + p + m = 48 \\ a = \frac{p}{2} + m \\ p = a + m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + l + a + m + m = 63 \\ a + a + m + m = 48 \\ a = \frac{a + m}{2} + m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + l + 2m = 63 \\ 2a + 2m = 48 \\ 2a = a + m + 2m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + l + 2m = 63 \\ a + m = 24 \\ a = 3m \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6m + l + 2m = 63 \\ 3m + m = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8m + l = 63 \\ 4m = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8m + l = 63 \\ m = \frac{24}{4} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 48 + l = 63 \Rightarrow \boxed{l = 63 - 48 = 15} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{a = 3 \cdot 6 = 18} \Rightarrow \boxed{p = 18 + 6 = 24}
 \end{array}$$

(I) 18 bebés se llaman Alba, 24 se llaman Pedro y 6 se llaman Mateo.

(II) 15 Se llaman Lucía.

1.2.- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30} . **(1 punto)**

(III) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

$$(I) A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$(II) A^{15} = A^2 A^2 A^2 A^2 A^2 A^2 A^2 A = I_2 I_2 I_2 I_2 I_2 I_2 I_2 A = A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{30} = A^{15} A^{15} = AA = A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(III) Despejamos X de la ecuación multiplicando por la matriz A a ambos lados de la igualdad.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AAX = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 X = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I_2 X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -2+3 \\ -1+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.- Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil euros y la de viura 3 mil euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

(I) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos. **(1,25 puntos)**

(II) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo. **(1,25 puntos)**

(I) Llamamos “x” al número de hectáreas de uva tempranillo e “y” a las hectáreas de uva viura. Realizamos una tabla para ordenar los datos.

	Kg de fitosanitarios	Horas de vendimia	Beneficio (en miles de €)
Nº de hectáreas de tempranillo (x)	10x	20x	2x
Nº de hectáreas de viura (y)	20y	10y	3y
TOTALES	10x + 20y	20x + 10y	2x + 3y

Julián dispone de 10 hectáreas $\rightarrow x + y \leq 10$

Como solo dispone de 180 kg de fitosanitarios $\rightarrow 10x + 20y \leq 180$

Como solo dispone de 160 horas de trabajo de vendimiadores $\rightarrow 20x + 10y \leq 160$

El número de hectáreas debe ser un valor mayor o igual que cero $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ 10x + 20y \leq 180 \\ 20x + 10y \leq 160 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible, empezando con las rectas que delimitan dicha región.

$$x + y = 10$$

$$x + 2y = 18$$

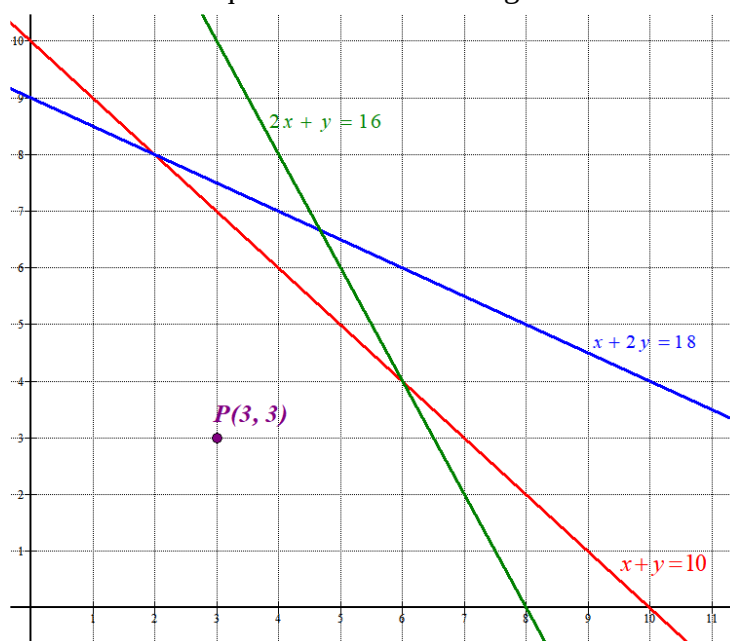
x	y = 10 - x
0	10
10	0

x	y = $\frac{18-x}{2}$
0	9
18	0

$$2x + y = 16$$

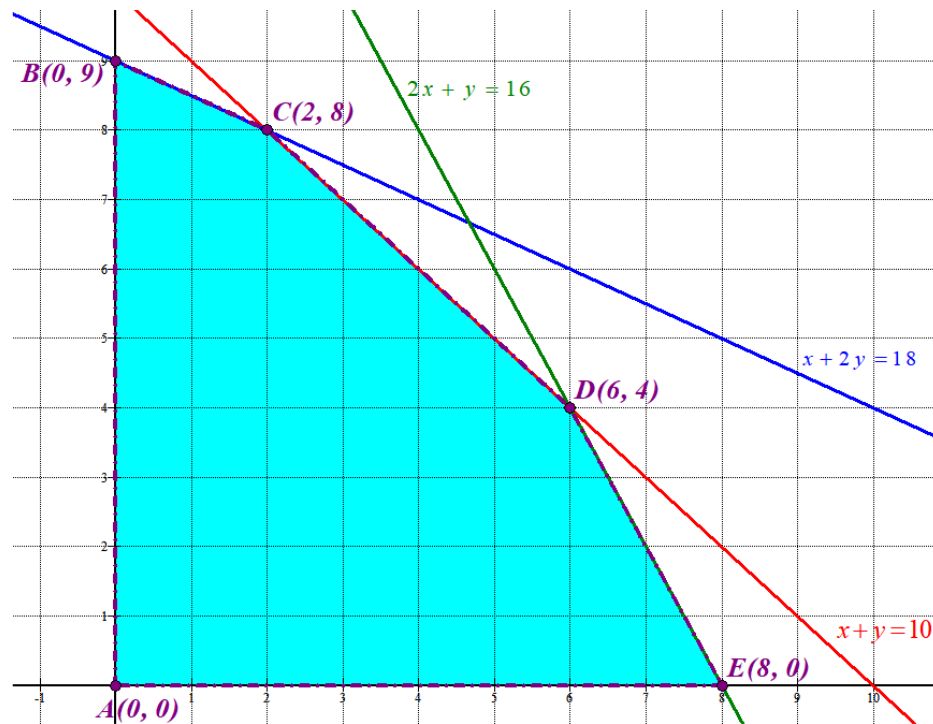
x	y = 16 - 2x
0	16
8	0

$$x \geq 0; y \geq 0 \quad \text{El primer cuadrante}$$



Comprobamos que el punto $P(3, 3)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3+3 \leq 10 \\ 3+6 \leq 18 \\ 6+3 \leq 16 \\ 3 \geq 0; 3 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen y la región factible es la zona de color azul claro del dibujo.}$$



(II) Para determinar el máximo beneficio, valoramos la función beneficio $B(x, y) = 2x + 3y$ en cada vértice:

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 9) \rightarrow B(0, 9) = 27$
- $C(2, 8) \rightarrow B(2, 8) = 4 + 24 = 28$ ¡Máximo!
- $D(6, 4) \rightarrow B(6, 4) = 12 + 12 = 24$
- $E(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 16$

El máximo beneficio se obtiene en el punto $C(2, 8)$.

Con 2 hectáreas de tempranillo y 8 de viura se cumplen las restricciones del problema y se obtiene un beneficio máximo de 28 mil euros.

Bloque 2. Análisis.**2.1.-** Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 3t - 1, & 1 \leq t < 2 \\ -5t + 15, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

(I) Estudia razonadamente su continuidad. **(0,75 puntos)**(II) Haz una representación gráfica de la función f . **(1 punto)**(III) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento? **(0,75 puntos)**(I) La función es continua en cada intervalo de definición pues son trozos de funciones polinómicas. Falta comprobar la continuidad en $t = 1$ y en $t = 2$.¿Es continua en $t = 1$?

- $f(1) = 3 - 1 = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(t) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2t^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3t - 1 = 3 - 1 = 2 \end{cases} = 2$

- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(t) = 2$

Se cumplen las tres condiciones y la función es continua en $t = 1$.¿Es continua en $t = 2$?

- $f(2) = -10 + 15 = 5$

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(t) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3t - 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -5t + 15 = 5 \end{cases} = 5$

- $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(t) = 5$

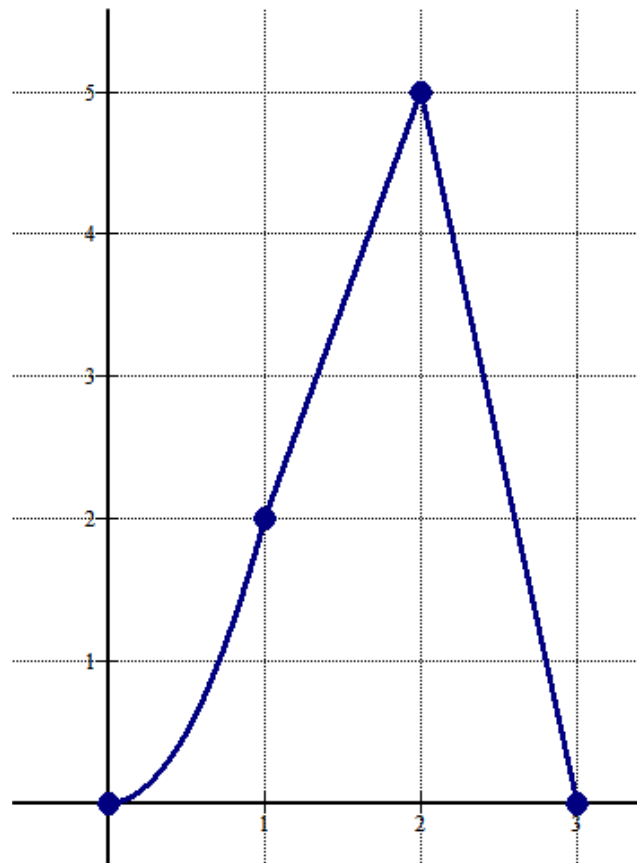
Se cumplen las tres condiciones y la función es continua en $t = 2$.La función es continua en todo su dominio de definición $[0, 3]$

(II) Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica. La gráfica es un trozo de parábola, y dos trozos de recta.

t	$f(t) = 2t^2, \quad 0 \leq t < 1$
0	2
0.5	0.5
1	2 No se incluye

t	$f(t) = 3t - 1, \quad 1 \leq t < 2$
1	2
2	5 No se incluye

t	$f(t) = -5t + 15, \quad 2 \leq t \leq 3$
2	5
3	-5



(III) Observando la gráfica el momento de mayor asistencia fue en $t = 2$, al cabo de 2 horas. Con una afluencia de 5000 personas.

2.2.- Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$

(I) Determina a , b y c sabiendo que el punto $(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f . **(1,25 puntos)**

(II) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$. **(1,25 puntos)**

NOTA: Si no has conseguido determinar a , b y c en el apartado anterior, toma $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$ en este segundo apartado.

(I) El punto $(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ por lo que se cumple

$$f(-2) = 1 \Rightarrow a(-2)^2 - 2b + c = 1 \Rightarrow 4a - 2b + c = 1.$$

El punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f y por lo tanto es un punto de su gráfica. Por lo que se cumple $f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^2 - b + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$.

El punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f y esto implica que la derivada de la función se anula para $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &\Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(-1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2a + b = 0$$

Juntamos las tres ecuaciones y resolvemos el sistema que forman.

$$\left. \begin{aligned} 4a - 2b + c &= 1 \\ a - b + c &= 0 \\ -2a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a - 2b + c &= 1 \\ a - b + c &= 0 \\ b &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a - 4a + c &= 1 \\ a - 2a + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c &= 1 \\ -a + c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = c = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 2 \cdot (1) = 2}$$

Los valores buscados son $a = 1$; $b = 2$ y $c = 1$.

(II) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

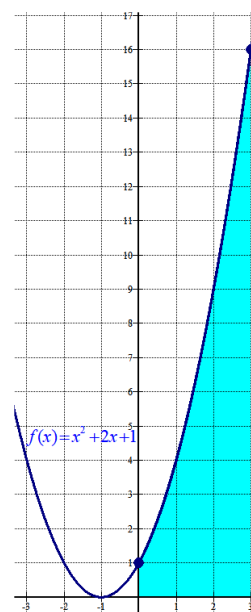
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = -1$$

para establecer mejor los límites de integración para el cálculo del área.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 x^2 + 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 0^2 + 0 \right] = \boxed{21 u^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de 21 unidades cuadradas.

x	$f(x) = x^2 + 2x + 1$
0	1
1	4
2	9
3	16



2.3.- La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en la que x indica la temperatura en grados Celsius.

$$f(x) = (x+3)^2 (36-x) \quad (0 \leq x \leq 36)$$

(I) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción? **(1,5 puntos)**

(II) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada? **(0,5 puntos)**

(I) Calculamos la derivada.

$$f(x) = (x+3)^2 (36-x) \Rightarrow f'(x) = 2(x+3)(36-x) - (x+3)^2$$

$$f'(x) = 2(36x - x^2 + 108 - 3x) - x^2 - 6x - 9 = 72x - 2x^2 + 216 - 6x - x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = -3x^2 + 60x + 207$$

Igualamos a cero

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 60x + 207 = 0 \Rightarrow -x^2 + 20x + 69 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 276}}{-2} = \frac{-20 \pm 26}{-2} = \begin{cases} \frac{-20 + 26}{-2} = -3 \\ \frac{-20 - 26}{-2} = 23 \end{cases}$$

Solo el valor $x = 23$ pertenece al intervalo de definición de la función $[0, 36]$.

Volvemos a derivar y comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo.

$$f'(x) = -3x^2 + 60x + 207 \Rightarrow f''(x) = -6x + 60 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f''(23) = -138 + 60 = -78 < 0 \\ x = 23 \end{array} \right.$$

En $x = 23$ existe un máximo que significa un momento de máxima producción.

Valoramos la función en este punto y en los extremos del intervalo, para comprobar si este máximo es absoluto.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = (0+3)^2 (36-0) = 324 \\ f(23) = (23+3)^2 (36-23) = 8788 \\ f(36) = (36+3)^2 (36-36) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{La máxima producción se obtiene con } 23^\circ$$

(II) A la temperatura de 23 hay una producción máxima de 8788 toneladas de verduras.

(III) ¿Cuándo se anula la función?

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+3)^2 (36-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 36-x = 0 \Rightarrow x = 36 \end{cases}$$

Como esta función solo está definida para temperaturas de 0 a 36 grados no se contempla la posibilidad de -3° , por lo que la temperatura a la que no se produce nada es 36° .

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

3.1.- En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

(I) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés? **(0,75 puntos)**

(II) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco? **(0,75 puntos)**

(III) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín? **(1 punto)**

Completamos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Negros	Blancos	TOTALES
Pastores alemanes	35	5	40
Pekineses	18	12	30
Mastines	42	8	50
TOTALES	95	25	120

(I) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No sea pekinés}) = \frac{\text{Nº de perros mastines o pastores alemanes}}{\text{Nº de perros}} = \frac{40 + 50}{120} = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} = \boxed{0,75}$$

(II) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea blanco}) = \frac{\text{Nº de perros blancos}}{\text{Nº de perros}} = \frac{25}{120} = \frac{5}{24} = \boxed{0,208}$$

(III) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea mastín / Es blanco}) = \frac{\text{Nº de mastines blancos}}{\text{Nº de perros blancos}} = \frac{8}{25} = \frac{32}{100} = \boxed{0,32}$$

3.2.- La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

(I) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días? **(1,25 puntos)**

(II) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90% para la media de la producción. **(1,25 puntos)**

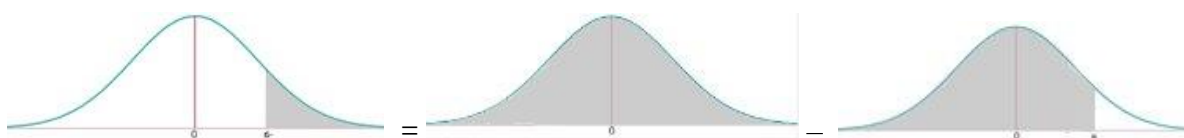
X = Número de días de vida de una grapadora. $X = N(\mu, 60)$

(I) Si $X = N(950, 60)$

La media de la vida en una muestra de 100 grapadoras sigue una distribución normal:

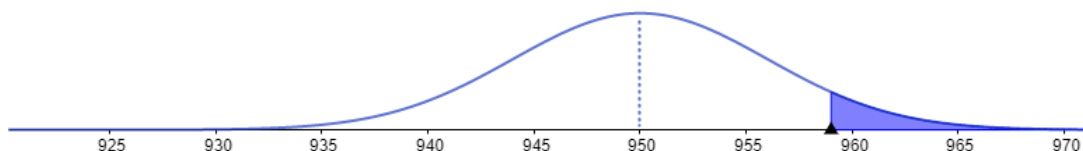
$$\overline{X}_{100} = N\left(950, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{100} = N(950, 6)$$

$$P(\overline{X}_{100} > 959) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{959 - 950}{6}\right) = P(Z > 1,5) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z < 1,5) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}$$

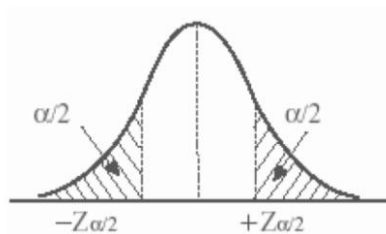
$\mu = 950 \quad \sigma = 6$



(II) El tamaño de la muestra es $n = 64$ y la media muestral es $\bar{x} = 980$.

Con un nivel de confianza del 90%

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,645}$$



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}} = 12,3375$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (980 - 12,3375, 980 + 12,3375) = (967,6625, 992,3375)$$

3.3.- Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

(I) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A? **(0,5 puntos)**

(II) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿Cuál es la probabilidad de que María vea LA? **(0,5 puntos)**

(III) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO? **(0,75 puntos)**

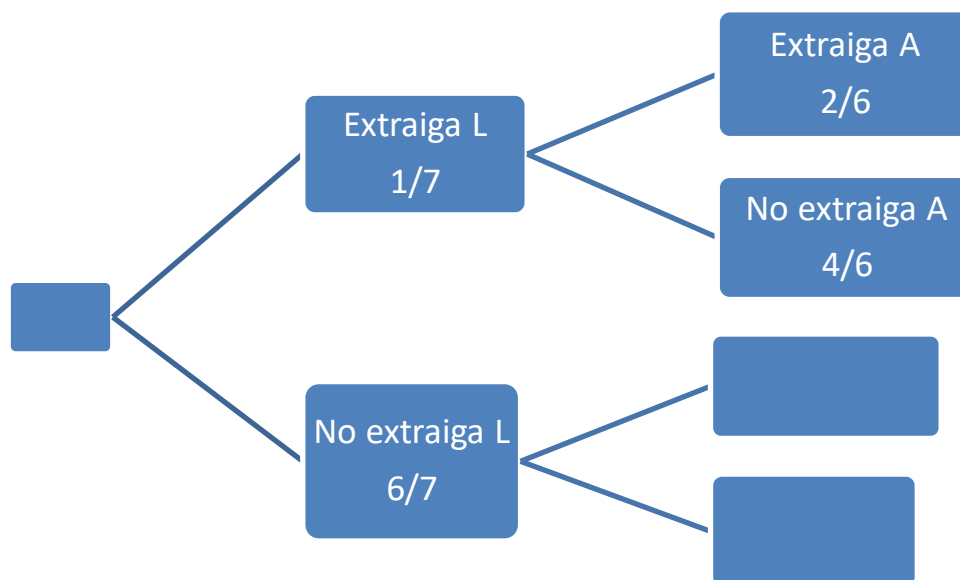
(IV) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA? **(0,75 puntos)**

Hay 7 cartulinas: 1 con la letra L, 2 con la letra A, 1 con la letra R, 1 con la letra I, 1 con la letra O y 1 con la letra J.

Todas las cartulinas tienen la misma posibilidad de ser extraídas.

$$(I) P(\text{Extraiga la R}) = \frac{1}{7} = \boxed{0,143} \quad P(\text{No se extraiga la A}) = \frac{7-2}{7} = \frac{5}{7} = \boxed{0,714}$$

(II) Realizamos un diagrama de árbol. Sin reposición, por lo que la probabilidad en la segunda extracción depende de lo ocurrido en la primera.



$$P(\text{Lea LA}) = P(\text{Sacar L en 1ª extracción y A en 2ª}) =$$

$$= P(\text{Sacar L en 1ª extracción}) P(\text{Sacar A en 2ª / Haber sacado L en 1ª extracción}) =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21} = \boxed{0,048}$$

(III) El diagrama de árbol se hace complicado para lo pedido en este apartado. Lo resolvemos sin él. Suponemos que para poder formar LA se puede hacer sacando L en 1ª y A en 2ª o A en 1ª y L en 2ª.

Igual para poder formar LO.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Formar LA}) &= P(\text{Sacar L en 1ª extracción y A en 2ª}) + \\
 &+ P(\text{Sacar A en 1ª extracción y L en 2ª}) = \\
 &= P(\text{Sacar L en 1ª extracción})P(\text{Sacar A en 2ª / Haber sacado L en 1ª extracción}) + \\
 &+ P(\text{Sacar A en 1ª extracción})P(\text{Sacar L en 2ª / Haber sacado A en 1ª extracción}) = \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{42} = \boxed{0,095}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{Formar LO}) &= P(\text{Sacar L en 1ª extracción y O en 2ª}) + \\
 &+ P(\text{Sacar O en 1ª extracción y L en 2ª}) = \\
 &= P(\text{Sacar L en 1ª extracción})P(\text{Sacar O en 2ª / Haber sacado L en 1ª extracción}) + \\
 &+ P(\text{Sacar O en 1ª extracción})P(\text{Sacar L en 2ª / Haber sacado O en 1ª extracción}) = \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42} = \boxed{0,048}
 \end{aligned}$$

(IV) Aplicamos lo mismo de los apartados anteriores.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Lea RIO}) &= P(\text{Sacar R en 1ª extracción, I en 2ª y O en 3ª}) = \\
 &= P(\text{R en 1ª})P(\text{I en 2ª / R en 1ª})P(\text{O en 3ª / R en 1ª e I en 2ª}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210} = \boxed{0,0048} \\
 P(\text{Lea RIA}) &= P(\text{Sacar R en 1ª extracción, I en 2ª y A en 3ª}) = \\
 &= P(\text{R en 1ª})P(\text{I en 2ª / R en 1ª})P(\text{A en 3ª / R en 1ª e I en 2ª}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{210} = \boxed{0,0095}
 \end{aligned}$$

EBAU Ordinaria 2020



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2019 - 2020

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CCSS II**

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.- Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$ay + az = 0$$

$$y + z = 0$$

$$4x - 2y + az = a$$

(I) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado? **(0.75 puntos)**

(II) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones? **(0.5 puntos)**

(III) Resuelve el sistema si $a = 0$. **(1.25 puntos)**

1.2.- Dada una matriz cuadrada A

(I) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo? **(0.5 puntos)**

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la inversa de A . **(0.75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$3X + 2Y = A$$

$$X + Y = 2A$$

(1.25 puntos)

1.3.- Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8 \quad 3x - 2y \leq 12 \quad x + 5y \leq 21 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1.25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1.25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.- Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$?

(1 punto)

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$ **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0.5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) y (III).

2.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valor de a la función es continua? **(0.75 puntos)**

(II) Utilizando el valor de a del apartado (I), esboza una gráfica de la función f . **(0.75 puntos)**

(III) Con el valor de a del apartado (I), calcula el área encerrada por la gráfica de la función f , el eje OX y la recta $x = 3$. **(1 punto)**

NOTA: Si no has conseguido determinar a , toma $a = 3$ en los apartados (II) y (III).

2.3.- La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

(I) Haz un esbozo de la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

(II) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad? **(1 punto)**

(III) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo? **(1 punto)**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

3.1.- El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

(I) Si la media de usuarios diarios fuese 1700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1678? **(1.25 puntos)**

(II) En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido 1750, determina un intervalo de confianza del 95% para la media de viajeros. **(1.25 puntos)**

3.2.- En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés? **(0.75 puntos)**

(II) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas? **(0.75 puntos)**

(III) ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés? **(1 punto)**

3.3.- Un hospital está especializado en el tratamiento de 3 enfermedades A, B, C. El 40% de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35% con la enfermedad B y el 25% con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es el 80%, de la B el 60% y de la C el 90%.

(I) José ingresa en el hospital (no sabemos cual de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure? **(1 punto)**

(II) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B? **(1 punto)**

(III) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B? **(0.5 puntos)**

SOLUCIONES**Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.**

1.1.- Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$ay + az = 0$$

$$y + z = 0$$

$$4x - 2y + az = a$$

(I) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado? **(0.75 puntos)**

(II) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones? **(0.5 puntos)**

(III) Resuelve el sistema si $a = 0$. **(1.25 puntos)**

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a - 4a = 0$. El rango de A no es 3.

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. El rango de A es 2, independientemente del valor de a .

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix}$

Si quitamos la columna 3ª tenemos un menor de orden 3 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} = 0$, por lo que el rango de A/B no es 3.

El rango de A/B y el rango de A es 2 menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema siempre es compatible indeterminado, independientemente del valor de a .

(I) Nunca es compatible y determinado.

(II) El sistema siempre tiene solución.

(III) Para $a = 0$ resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x + 2z = 0 \Rightarrow 4x = -2z \Rightarrow x = \frac{-2z}{4} = -\frac{1}{2}z$$

La solución es $\boxed{x = -\frac{1}{2}t; \quad y = -t; \quad z = t}$

1.2.- Dada una matriz cuadrada A

(I) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo? **(0.5 puntos)**

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la inversa de A. **(0.75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned} \quad \textbf{(1.25 puntos)}$$

(I) Sí. Calculando su determinante. Si es distinto de cero la matriz tiene inversa.

(II) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. La matriz A tiene inversa.

La calculamos utilizando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(III) Despejamos primero los valores de X e Y en el sistema.

$$\left. \begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X &= 2A - Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3(2A - Y) + 2Y = A \Rightarrow 6A - 3Y + 2Y = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Y = -5A \Rightarrow \boxed{Y = 5A} \Rightarrow \boxed{X = 2A - 5A = -3A}$$

Por lo que las matrices buscadas son $X = -3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$; $Y = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$

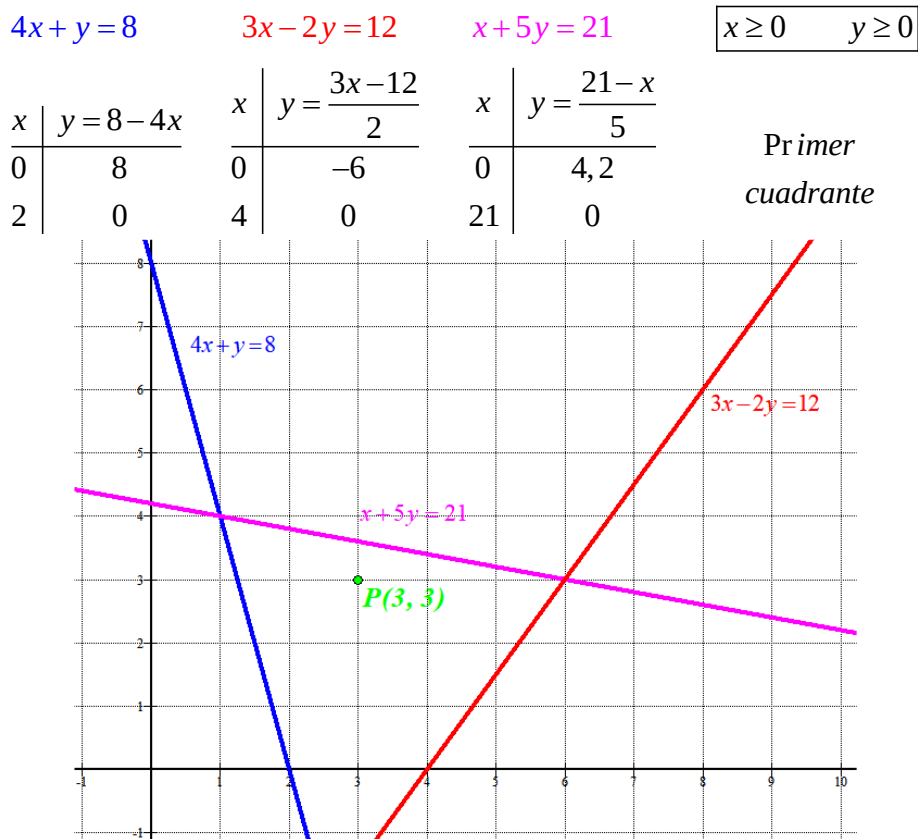
1.3.- Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8 \quad 3x - 2y \leq 12 \quad x + 5y \leq 21 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1.25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1.25 puntos)**

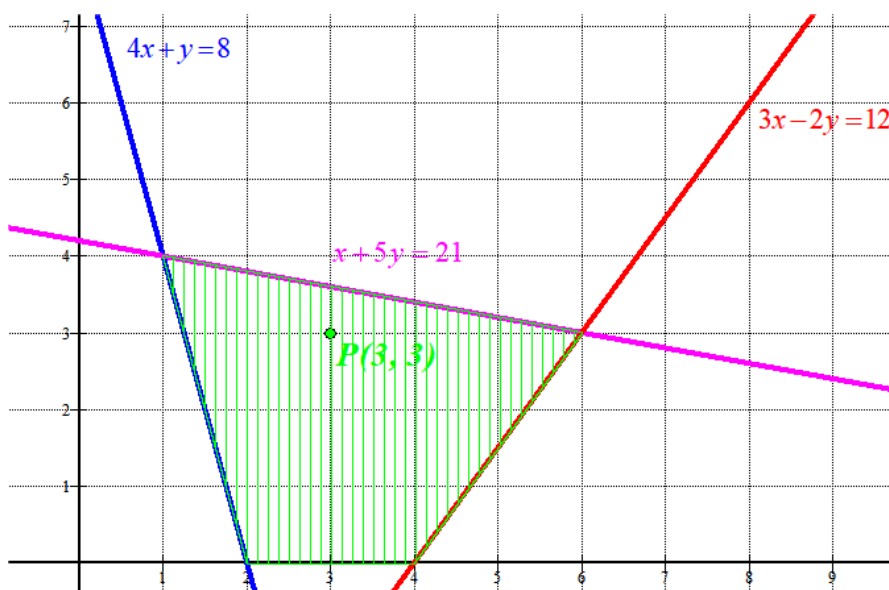
(I) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.



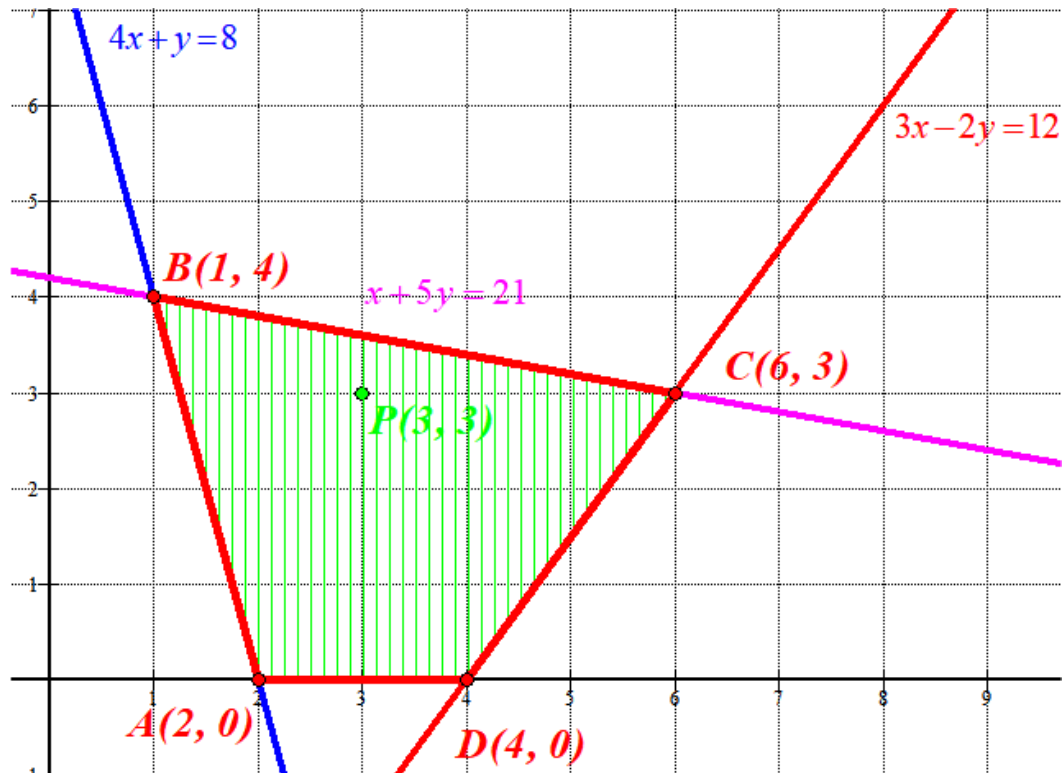
Probamos si el punto $P(3, 3)$ cumple todas las restricciones.

$$12 + 3 \geq 8 \quad 9 - 6 \leq 12 \quad 3 + 15 \leq 21 \quad 3 \geq 0 \quad 3 \geq 0$$

Si las cumple, por lo que la región factible es la zona rayada del siguiente dibujo.



(II) Determinamos los vértices de la región factible.



En el dibujo se determinan los vértices, no es necesario resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

Valoramos la función $f(x, y) = x + y + 1$ en cada vértice buscando su valor máximo.

$$A(2, 0) \rightarrow f(2, 0) = 2 + 0 + 1 = 3$$

$$B(1, 4) \rightarrow f(1, 4) = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$C(6, 3) \rightarrow f(6, 3) = 6 + 3 + 1 = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = 4 + 0 + 1 = 5$$

El máximo beneficio es 10 y se obtiene en el punto $C(6, 3)$, para $x = 6$ e $y = 3$.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$?

(1 punto)

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$ **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0.5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) y (III).

(I) Si la función tiene un mínimo en $(1, 0)$ la derivada se anula en $x = 1$ y además la función vale 0 en $x = 1$.

$$f(x) = x^4 - ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2ax \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

La función queda como $f(x) = x^4 - 2x^2 + b$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - 2 \cdot 1^2 + b = 0 \Rightarrow 1 - 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

(II) La función queda $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Si la tangente es paralela a la recta horizontal $y = 1$ tiene pendiente cero, es decir, la derivada debe ser cero.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Como } f(0) = 1; \quad f(-1) = 1 - 2 + 1 = 0; \quad f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

En los puntos $(0, 1)$; $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$ la función $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$.

(III) En $x = 1$ la recta tangente es horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^4 - 2 + 1 = 0 \\ f'(x) = 4 - 4 = 0 \rightarrow f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 0(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

2.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valor de a la función es continua? **(0.75 puntos)**

(II) Utilizando el valor de a del apartado (I), esboza una gráfica de la función f . **(0.75 puntos)**

(III) Con el valor de a del apartado (I), calcula el área encerrada por la gráfica de la función f , el eje OX y la recta $x = 3$. **(1 punto)**

NOTA: Si no has conseguido determinar a , toma $a = 3$ en los apartados (II) y (III).

(I) La función es continua en $x = 0$ cuando los límites laterales coincide con el valor de la función.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

La función es continua en $x = 1$ cuando los límites laterales coincide con el valor de la función.

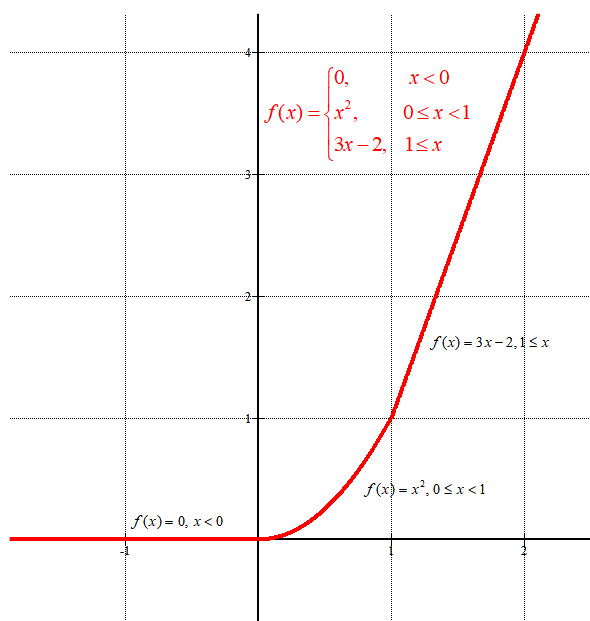
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} ax - 2 = a - 2 \end{cases} \Rightarrow 1 = a - 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

La función es continua para $a = 3$.

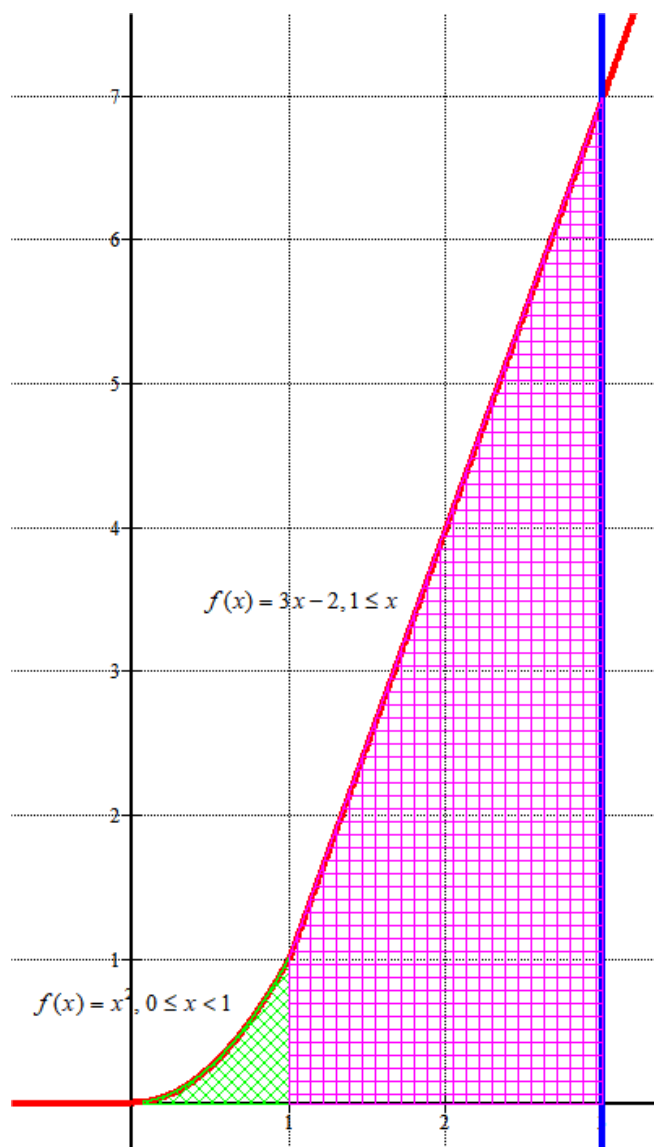
(II) Para $a = 3$ la función es $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 3x - 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Es una función definida a trozos, un trozo de línea horizontal, un trozo de parábola y un trozo de recta oblicua. Hacemos una tabla de valores para cada trozo.

$f(x) = 0, x < 0$	$f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$	$f(x) = 3x - 2, 1 \leq x$
$x \mid y = 0$	$x \mid y = x^2$	$x \mid y = 3x - 2$
-1 0	0 0	1 1
-2 0	1 1 No se incluye	2 4



(III) El recinto del que nos piden calcular el área aparece rayado en el dibujo. Lo dividimos en dos partes.



El área de la zona de la izquierda es pequeña. La calculamos con la integral definida entre 0 y 1 de $f(x) = x^2$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

El área de la zona de la derecha es grande (entre 8 y 9 unidades cuadradas) y la calculamos con la integral definida entre 1 y 3 de la función $f(x) = 3x - 2$.

$$\int_1^3 3x - 2 dx = \left[3 \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^3 = \left[3 \frac{3^2}{2} - 6 \right] - \left[3 \frac{1^2}{2} - 2 \right] = \frac{27}{2} - 6 - \frac{3}{2} + 2 = 8$$

$$\text{El área total es } 8 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{25}{3} = 8,33 u^2}$$

2.3.- La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

(I) Haz un esbozo de la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

(II) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad? **(1 punto)**

(III) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo? **(1 punto)**

(I) La función $f(t) = -2t^2 + 16t$ es una función parabólica. Determinamos su punto crítico y con una tabla de valores podemos esbozar su gráfica.

$$f(t) = -2t^2 + 16t \Rightarrow f'(t) = -4t + 16$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -4t + 16 = 0 \Rightarrow 4t = 16 \Rightarrow$$

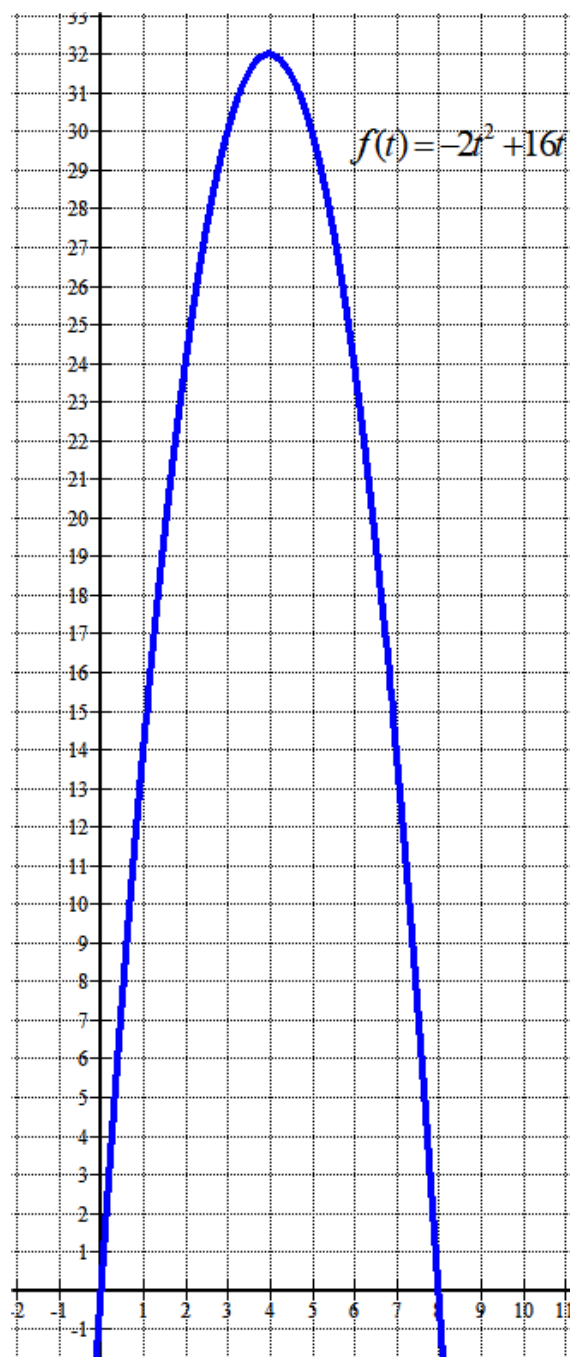
$$\Rightarrow t = 4 \Rightarrow f(4) = -2 \cdot 4^2 + 64 = 32$$

$P(4, 32)$ es el máximo

x	$f(x) = -2x^2 + 16x$
0	0
2	$-8 + 32 = 24$
4	32
6	24
8	0

(II) 8 días.

(III) El día 4 la función toma el valor más alto.



Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

(I) Si la media de usuarios diarios fuese 1700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1678? **(1.25 puntos)**

(II) En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido 1750, determina un intervalo de confianza del 95% para la media de viajeros. **(1.25 puntos)**

X = Número de usuarios del transporte metropolitano. $X = N(\mu, 108)$

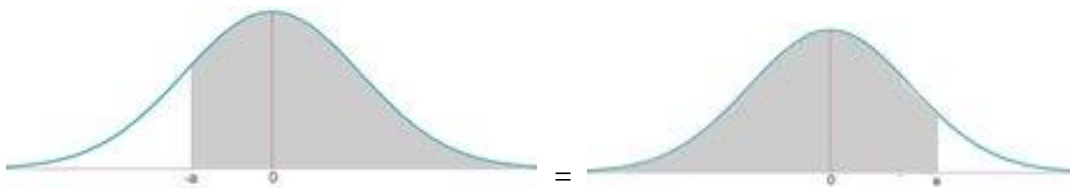
(I) Si X = Número de usuarios del transporte metropolitano. $X = N(1700, 108)$

La media de usuarios en 36 días sigue una distribución normal:

$$\overline{X}_{36} = N\left(1700, \frac{108}{\sqrt{36}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{36} = N(1700, 18)$$

$$P(\overline{X}_{36} > 1678) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1678 - 1700}{18}\right) =$$

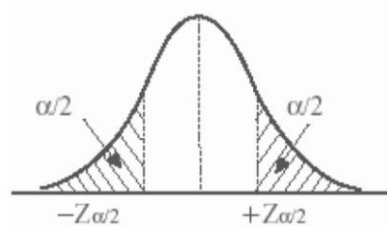
$$= P(Z > -1,22) = P(Z < 1,22) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = \boxed{0,8888}$$



(II) Tamaño de la muestra $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 1750$

Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$



Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}} = 21,168$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (1750 - 21,168, 1750 + 21,168) = (1728,832, 1771,168)$$

3.2.- En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés? **(0.75 puntos)**

(II) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas? **(0.75 puntos)**

(III) ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés? **(1 punto)**

Realizamos una tabla de contingencia para completar los datos que no nos proporciona el enunciado.

	Aprueba inglés	No aprueba inglés	
Aprueba matemáticas			16
No aprueba matemáticas		4	
	12		24

Completamos la tabla.

	Aprueba inglés	No aprueba inglés	
Aprueba matemáticas	8	8	16
No aprueba matemáticas	4	4	8
	12	12	24

(I) De los 24 alumnos hay 8 que aprueban matemáticas y suspenden inglés. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{Apruebe matemáticas y suspenda inglés}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0.33$$

(II) De los 24 alumnos hay 8 que han aprobado las dos asignaturas. Aplico Laplace:

$$P(\text{Apruebe matemáticas y aprueba inglés}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0.33$$

(III)

$$P(\text{Apruebe matemáticas y aprueba inglés}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 0.33$$

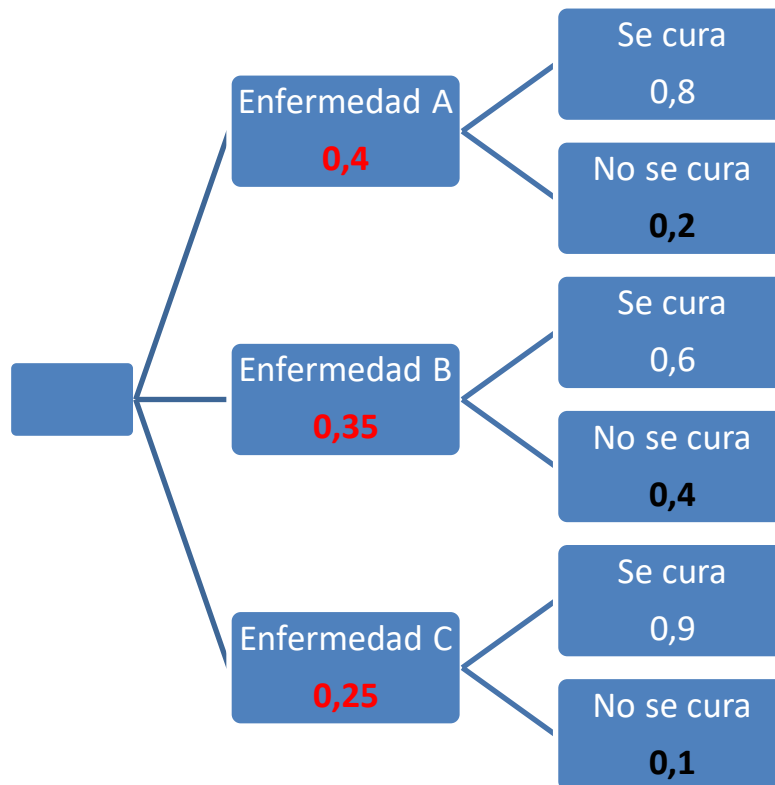
$$P(\text{Apruebe matemáticas})P(\text{Apruebe inglés}) = \frac{16}{24} \cdot \frac{12}{24} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Son independientes pues:

$$P(\text{Apruebe matemáticas y aprueba inglés}) = P(\text{Apruebe matemáticas})P(\text{Apruebe inglés})$$

- 3.3.-** Un hospital está especializado en el tratamiento de 3 enfermedades A, B, C. El 40% de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35% con la enfermedad B y el 25% con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es el 80%, de la B el 60% y de la C el 90%.
- (I) José ingresa en el hospital (no sabemos cual de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure? **(1 punto)**
- (II) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B? **(1 punto)**
- (III) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B? **(0.5 puntos)**

Realizamos un diagrama de árbol.



$$(I) P(\text{Se cura}) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,35 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,9 = 0,32 + 0,21 + 0,225 = \boxed{0,755}$$

(II) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(\text{Padecía la enfermedad B} / \text{Se cura}) = \frac{P(\text{Padecía la enfermedad B} \cap \text{Se cura})}{P(\text{Se cura})} =$$

$$= \frac{0,35 \cdot 0,6}{0,755} = \frac{0,210}{0,755} = \frac{210}{755} = \boxed{0,278}$$

(III) Es el contrario del suceso anterior, por lo que:

$$P(\text{No padecía la enfermedad B} / \text{Se cura}) = 1 - P(\text{Padecía la enfermedad B} / \text{Se cura}) =$$

$$= 1 - 0,278 = \boxed{0,722}$$

EBAU Julio 2019



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2018 - 2019

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CCSS II**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Al.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Al.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Al.3.- La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0,5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} . **(0,5 puntos)**

(III) ¿Existe alguna matriz X , (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? **(1 punto)**

A2.2.- Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

A2.3.- Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

(I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? **(1 punto)**

(II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? **(1 punto)**

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

BL.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

BL.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

BL.3.- La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de WhatsApp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.- Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). **(1 punto)**

(II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. **(1 punto)**

B2.2.- Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2}.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

B2.3.- El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

(I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. **(1 punto)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

<i>z</i>	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

Al. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Al.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Llamamos a = goles marcados por Alba, b = goles marcados por Blanca, n = goles marcados por Naia.

- Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles $\rightarrow a + b + n = 65$
- Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca $\rightarrow$

$$a = b + \frac{50b}{100} \Rightarrow a = b + \frac{b}{2} \Rightarrow 2a = 2b + b \Rightarrow 2a = 3b$$

- Naia ha marcado la mitad de goles que Alba $\rightarrow n = \frac{a}{2} \Rightarrow 2n = a$

Juntamos las ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + n = 65 \\ 2a = 3b \\ 2n = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2n + b + n = 65 \\ 4n = 3b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + 3n = 65 \\ 4n = 3b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 65 - 3n \\ 4n = 3b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n = 3(65 - 3n) \Rightarrow 4n = 195 - 9n \Rightarrow 13n = 195 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{195}{13} = 15 \text{ goles}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{b = 65 - 45 = 20 \text{ goles}} \\ \boxed{a = 30 \text{ goles}} \end{array} \right.$$

Alba ha marcado 30 goles, Blanca ha marcado 20 y Naia 15.

Al.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

(I) La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en $x = 1$ tiene como ecuación:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\text{Como } f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0 \\ f'(1) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

(II) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

La asíntota es $x = -1$

Asíntota horizontal. $y = b$

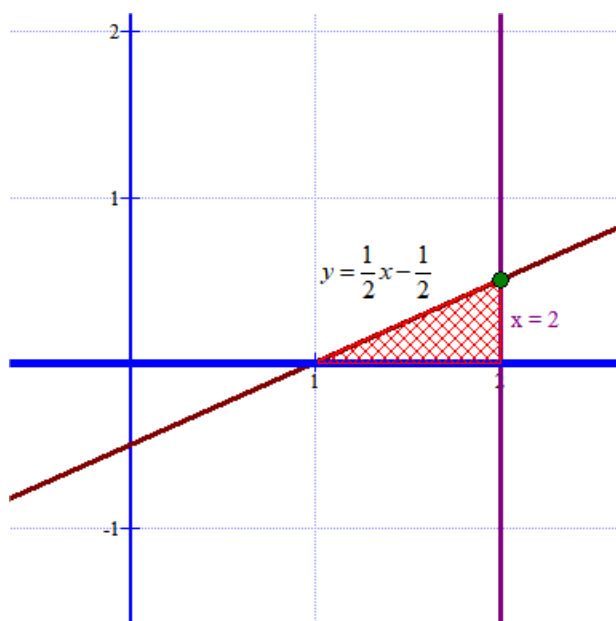
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no puede haber asíntota oblicua.

(III) Nos piden el área encerrada entre el eje OX , la recta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y la recta $x = 2$. Esta zona del plano la dibujamos para calcular su área con fórmulas de geometría.



El punto de corte de la tangente y la recta $x = 2$ es el punto de coordenadas $(2, 0{,}5)$.

El área que debemos hallar es el área de un triángulo de base 1 y altura 0{,}5.

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{1 \cdot 0{,}5}{2} = \boxed{0,25 u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Haciendo uso de integrales.

Averiguamos el punto de corte de la tangente con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Entonces el área es la integral entre 1 y 2 de la función $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$\text{Área} = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x \right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2 \right] - \left[\frac{1^2}{4} - \frac{1}{2} \right] = 1 - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4} u^2}$$

Al.3.- La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de WhatsApp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

(I) $P(\text{Conteste a los 3 mensajes}) =$

$$= P(\text{Conteste al mensaje 1}) \cdot P(\text{Conteste al mensaje 2}) \cdot P(\text{Conteste al mensaje 3}) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.001}$$

(II) $P(\text{Conteste exactamente a 1 de los 3 mensajes}) =$

$$= P(\text{Conteste al mensaje 1 y no conteste a los otros 2}) +$$

$$+ P(\text{Conteste al mensaje 2 y no conteste a los otros 2}) +$$

$$+ P(\text{Conteste al mensaje 3 y no conteste a los otros 2}) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.081 + 0.081 + 0.081 = \boxed{0.243}$$

(III) Lo calculamos haciendo uso del suceso contrario.

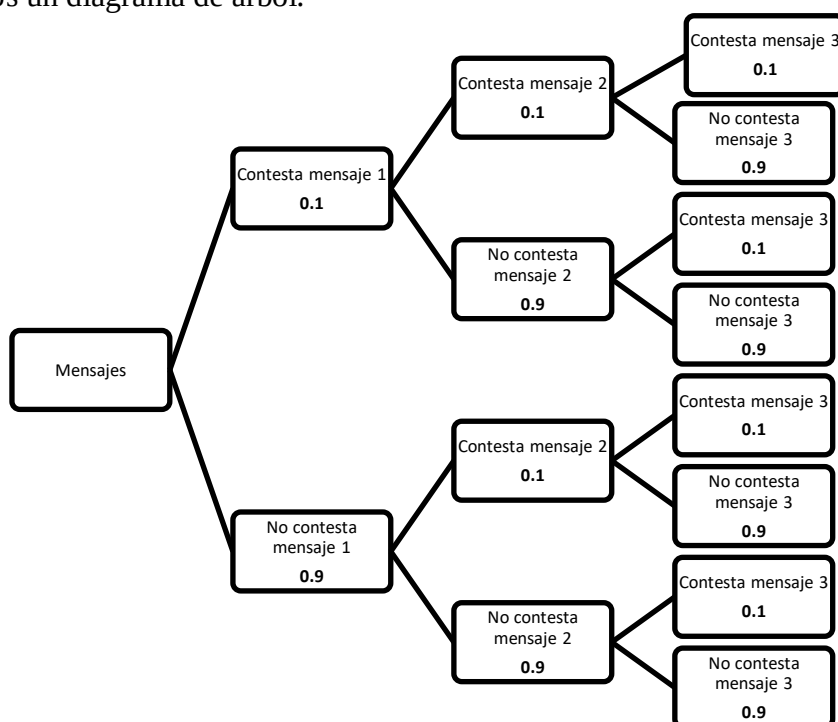
$$P(\text{Conteste al menos a uno de los mensajes}) = 1 - P(\text{No conteste a ninguno de los mensajes}) =$$

$$= 1 - 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 1 - 0.729 = \boxed{0.271}$$

$$(IV) P(\text{No conteste a ninguno de los mensajes}) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = \boxed{0.729}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos un diagrama de árbol.



(I) Mirando el árbol, solo es válida la primera rama. $P = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,001$

(II) Mirando el árbol, solo son válidas tres ramas, sumamos las probabilidades de cada rama.

$$P = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,243$$

(III) Mirando el árbol, son todas las ramas, menos la inferior. O bien sumamos las válidas o a 1 le restamos la probabilidad de esa última rama.

$$P = 1 - 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 1 - 0,729 = 0,271$$

(IV) Mirando el árbol, solo es válida la última rama y su probabilidad la hemos calculado en el apartado anterior. $P = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,729$

A2.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} . **(0.5 puntos)**

(III) ¿Existe alguna matriz X , (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? **(1 punto)**

$$(I) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(II) A^{15} = A^{14} = A^{13} = \dots = A^3 = A^2 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(III) La matriz A no tiene inversa ya que su determinante es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

Para que exista esa matriz X que cumple $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ la matriz } X \text{ debe ser de dimensión } 2 \times 2.$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -2a-c & -2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \\ -2a-c=0 \\ -2b-d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=0 \\ 2b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2a \\ d=-2b \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}}$$

Existen infinitas matrices que cumplen lo pedido. Por ejemplo, si tomamos $a=1$ y $b=1$

tenemos una de las posibles soluciones: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

A2.2.- Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

(I) Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

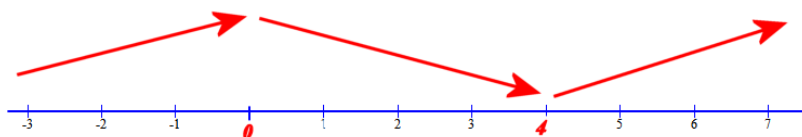
$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} - 6x = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Veamos como varía el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 4 y después de 4.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ la derivada vale $f'(-1) = \frac{3(-1)^2}{2} - 6(-1) = \frac{3}{2} + 6 > 0$. La función crece.
- En $(0, 4)$ tomamos $x = 1$ la derivada vale $f'(1) = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2} < 0$. La función decrece.
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 6$ la derivada vale $f'(6) = \frac{3(6)^2}{2} - 36 = 18 > 0$. La función crece.

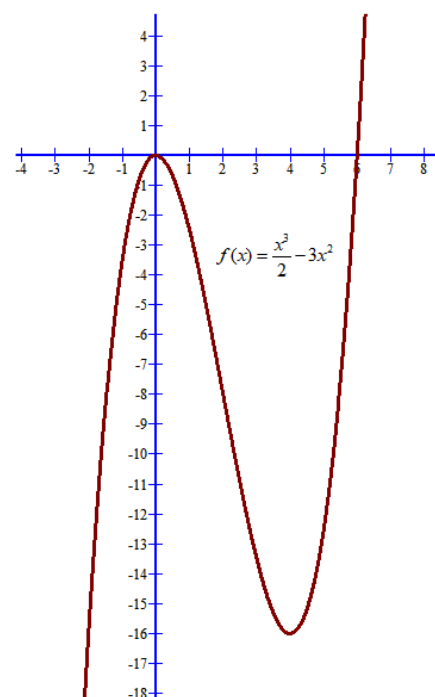
La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 4)$.

(II) Observando el esquema del apartado anterior podemos afirmar que la función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 4$. Hacemos una tabla para dibujar su gráfica.

x	$y = \frac{x^3}{2} - 3x^2$
-2	-16
-1	-3,5
0	0
1	-2,5
2	-8
4	-12



A2.3.- Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

(I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? **(1 punto)**

(II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? **(1 punto)**

X = Peso de la bolsa de café en gramos. $X = N(500, 30)$

(I) Si $X = N(500, 30)$ entonces el peso medio de un paquete de 100 bolsas es una normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{100}} = 3 \text{ gramos}$. $\overline{X}_{100} = N(500, 3)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} < 495)$.

$$P(\overline{X}_{100} < 495) = P\left(\frac{\overline{X}_{100} - 500}{3} < \frac{495 - 500}{3}\right) = P(Z < -1,666) = P(Z > 1,666) =$$

$$= 1 - P(Z < 1,66) = 1 - \frac{0,9515 + 0,9525}{2} = 1 - 0,952 = \boxed{0,048}$$

(II) $X = N(\mu, 30)$. $n = 100$. $\bar{x} = 505$

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 5,88 \text{ gramos.}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (505 - 5,88, 505 + 5,88)$$

El intervalo de confianza es (499'12, 510'88).

PROPUESTA B:

Bl.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Igual que en propuesta A

Bl.2.- Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X , la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Igual que en propuesta A

Bl.3.- La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

Igual que en propuesta A

B2.1.- Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). **(1 punto)**

(II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. **(1 punto)**

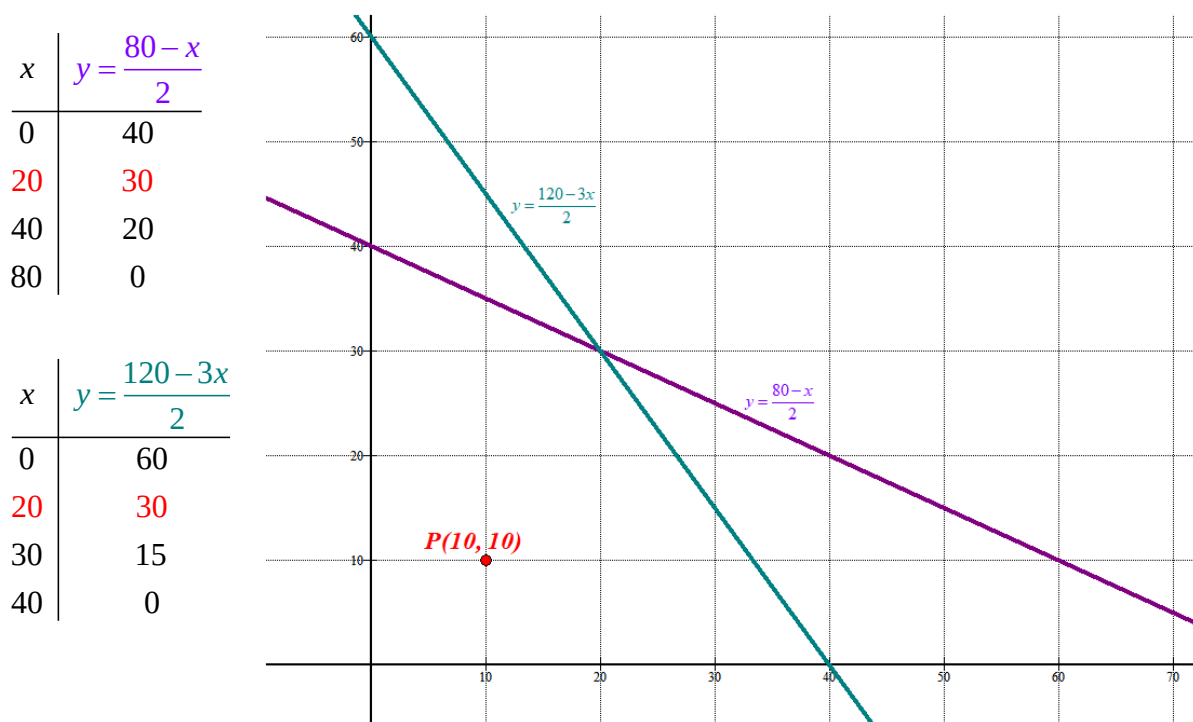
Llamamos x = número de coches que se pueden fabricar e y = número de cunas que se pueden fabricar. Las ecuaciones que surgen del enunciado son:

- Los valores son positivos y enteros. $x \geq 0$; $y \geq 0$
- Es necesario 1 kg de acero para un coche y 2 para la cuna. Solo se dispone de 80 kg de acero $\rightarrow x + 2y \leq 80$
- Es necesario 3 kg de aluminio para un coche y 2 para una cuna. Solo se dispone de 120 kg $\rightarrow 3x + 2y \leq 120$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{array} \right\}$$

(I) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

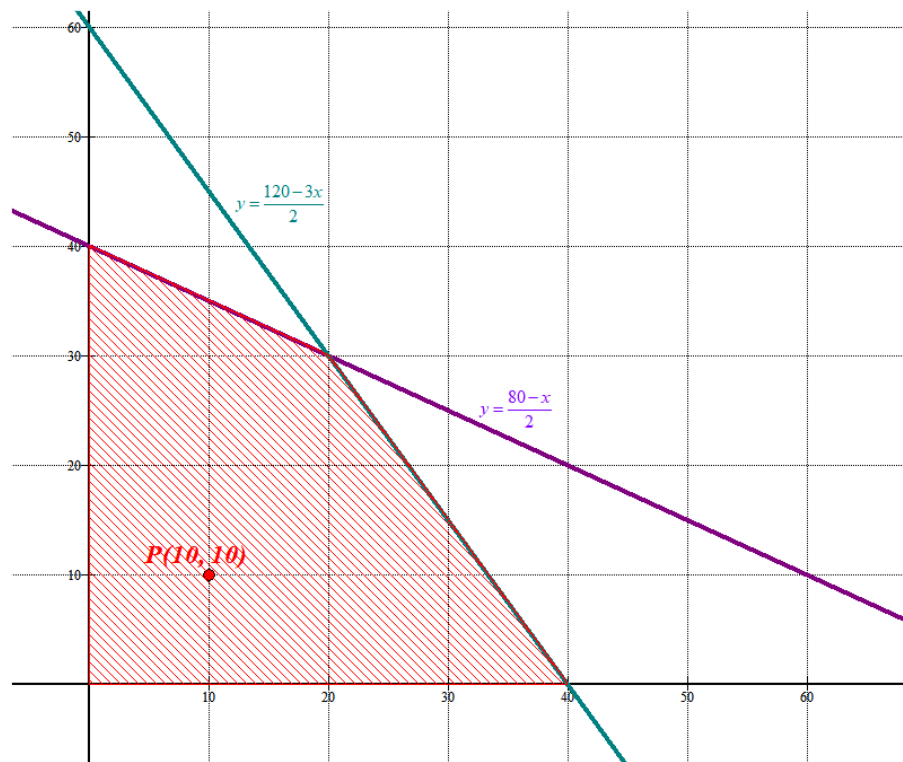


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas violeta y verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10 + 20 \leq 80 \\ 30 + 20 \leq 120 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



(II) Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros $\rightarrow \text{Ingresos}(x, y) = 200x + 150y$

Los vértices de la región factible y candidatos a dar unos ingresos máximos son:

$A(0,0)$, $B(40, 0)$, $C(0, 40)$ y $D(20, 30)$.

Valoramos los ingresos que se producen en cada vértice.

$$A(0,0) \rightarrow \text{Ingresos}(0,0) = 0$$

$$B(40, 0) \rightarrow \text{Ingresos}(40,0) = 8000$$

$$C(0, 40) \rightarrow \text{Ingresos}(0,40) = 6000$$

$$D(20, 30) \rightarrow \text{Ingresos}(20,30) = 4000 + 4500 = 8500 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo ingreso se produce en el punto D, que significa producir 20 coches y 30 cunas. Con un beneficio de 8500 €.

B2.2.- Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2}.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

(I) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen a partir de su derivada.

$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(4-x^2) - (-2x)2x}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{8+2x^2}{(4-x^2)^2}$$

Si igualamos a cero la derivada

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8+2x^2}{(4-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 8+2x^2 = 0 \Rightarrow 4+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} = \nexists$$

No tiene solución y por tanto no hay puntos críticos.

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos siguientes:

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$, la derivada vale $f'(-3) = \frac{8+2(-3)^2}{(4-(-3)^2)^2} = \frac{+}{+} > 0$. La función crece.
- En $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$, la derivada vale $f'(0) = \frac{8}{(4)^2} > 0$. La función crece.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$, la derivada vale $f'(3) = \frac{8+18}{(4-9)^2} = \frac{26}{25} > 0$. La función crece.

La función crece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

También se podía haber comprobado viendo que la expresión de la derivada es una función que siempre es positiva.

(II) El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

Hay dos asíntotas $x = -2$ y $x = 2$. Estudiemos el comportamiento de la función en torno a los puntos de discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{-4}{0} = +\infty; \left\{ x = -2,1 \rightarrow \frac{-4,2}{4-(-2,1)^2} = \frac{-}{-} = +\infty \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{-4}{0} = -\infty; \left\{ x = -1,9 \rightarrow \frac{-3,8}{4-(-1,9)^2} = \frac{-}{+} = -\infty \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{4}{0} = +\infty; \left\{ x = 1,9 \rightarrow \frac{+3,8}{4-(1,9)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{4}{0} = -\infty; \left\{ x = 2,1 \rightarrow \frac{4,2}{4-(2,1)^2} = \frac{+}{-} = -\infty \right\}$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{-x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

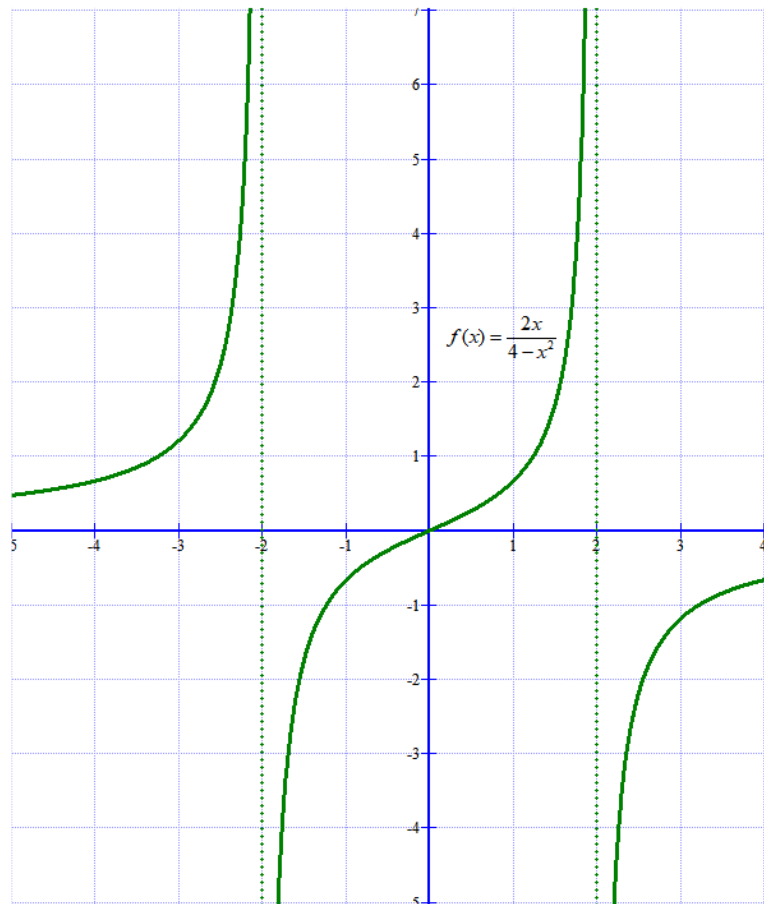
No hay, ya que hay una asíntota horizontal.

Para esbozar la gráfica obtenemos una tabla de valores de la función.

x	$y = \frac{2x}{4-x^2}$
-4	0,66
-3	1,2
-2,5	2,22

x	$y = \frac{2x}{4-x^2}$
-1	-0,66
0	0
1	0,66

x	$y = \frac{2x}{4-x^2}$
3	-1,2
4	-0,66
5	-0,47



B2.3.- El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

(I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. **(1 punto)**

X = Peso de un estudiante en Kg. $X = N(\mu, 15)$

(I) El tamaño de la muestra es $n = 100$.

Si $X = N(70, 15)$ entonces la distribución de las medias muestrales de tamaño 100 sigue una normal con la misma media y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{100}} = 1.5$. $\overline{X}_{100} = N(70, 1.5)$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} > 72)$.

$$P(\overline{X}_{100} > 72) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{100} - 70}{1.5} > \frac{72 - 70}{1.5}\right) = P(Z > 1.33) =$$

$$= 1 - P(Z < 1.33) = 1 - 0.9082 = \boxed{0.0918}$$

(II) $n = 225$. $\bar{x} = 72$. $X = N(\mu, 15)$

Obtenemos par un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}} = 1.96$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (72 - 1.96, 72 + 1.96)$$

El intervalo de confianza es $(70.04, 73.96)$.

EBAU Junio 2019



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)**

Curso 2018 - 2019

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A
LAS CCSS II**

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Al. 1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A? **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

Al.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(-x+4) & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Al.3.- El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.- Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? **(1 punto)**

(II) Si la herencia fuese de 99000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? **(1 punto)**

A2.2.- El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12 - t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

(I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? **(1 punto)**

(II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? **(1 punto)**

A2.3.- Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

(I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? **(1 punto)**

(II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas, pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? **(1 punto)**

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Bl.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A . **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A . **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

B1.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Bl.3.- El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. (1 punto)

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.- Las restricciones de un problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. (1 punto)

(II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? (1 punto)

B2.2.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

(I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. (1 punto)

(II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. (1 punto)

B2.3.- Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo.

El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

(I) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? (1 punto)

(II) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. (1 punto)

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

Al. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Al. 1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A? **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

$$(I) |A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot a + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot a \cdot (-1) - 2 \cdot a^2 \cdot (a+1) + 1 = -a^2(a+1) + 1 = -a^2(a+1)$$

(II) La matriz A tiene inversa cuando el determinante es no nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando a es distinto de 0 y de -1 .

(III) Para $a = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema que nos proponen resolver es
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x & -y & = 0 \\ -x & -y & -2z = 0 \\ \hline & -2y & -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow x - z = -2z \Rightarrow \boxed{x = -z}$$

La solución es $x = -t$; $y = -t$; $z = t$.

Al.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

(I) Para ser continua debe serlo en $x = 1$ y en $x = 2$.

En $x = 1$ debe cumplirse

- Existe $f(1) = 1^2 + a = 1 + a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + a = 1 + a$
- Los tres valores deben ser iguales. $1 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

Siendo $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

En $x = 2$ debe ser continua y debe cumplirse

- Existe $f(2) = b(-2 + 4) = 2b$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} b(-x + 4) = 2b$
- Los tres valores deben ser iguales. $2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

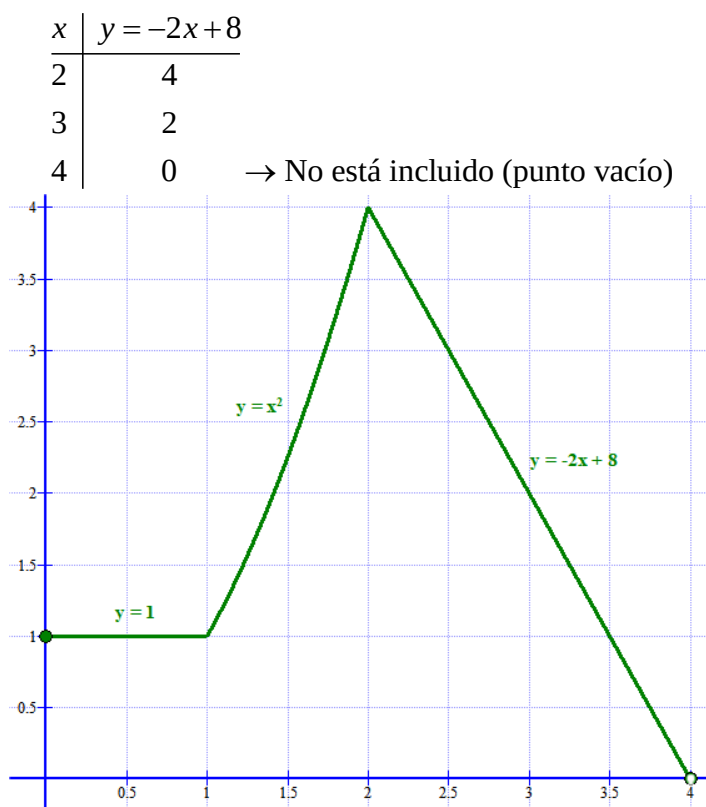
Los valores buscados son $a = 0$ y $b = 2$.

(II) Para estos valores la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2(-x + 4) = -2x + 8 & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

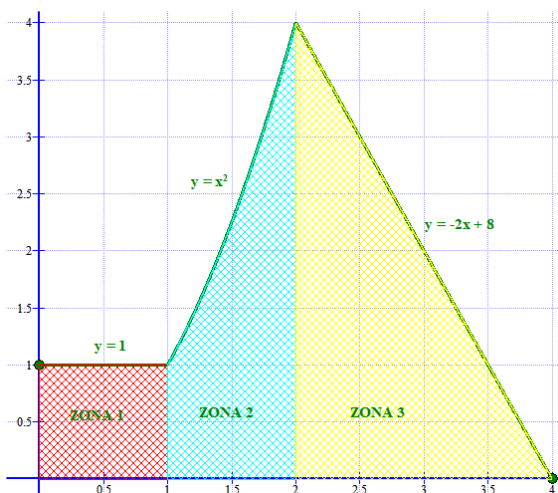
La gráfica de esta función a trozos es un trozo de recta horizontal, un trozo de parábola y otro trozo de recta oblicua (decreciente).

Obtenemos una tabla de valores para cada intervalo del dominio de definición.

x	$y = 1$		x	$y = x^2$
0	1	$\rightarrow$ Si está incluido (punto lleno)	1	1
0,5	1		1,5	2,25
0,9	1		1,9	3,61



(III) Esta área pedida, se puede dividir en tres zonas, que dibujamos con color distinto.



El área de la zona 1 es el área de un cuadrado de lado 1. Es decir, $1 u^2$

El área de la zona 3 es el área de un triángulo de base 2 y altura 4. Es decir, su área es

$$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4 u^2.$$

El área de la zona 2 la limita una curva y hay que hallarla con una integral:

$$\text{Área} = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} \right] - \left[\frac{1^3}{3} \right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} u^2.$$

El área de toda la región es la suma del área de estas tres zonas:

$$\text{Área} = 1 + 4 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{22}{3} = 7,33 u^2}$$

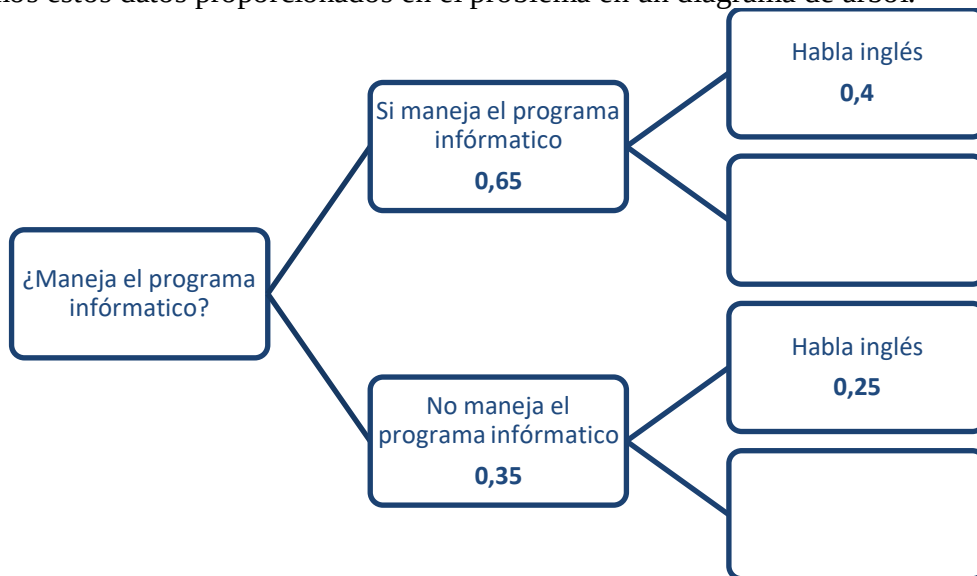
Al.3.- El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

Reflejemos estos datos proporcionados en el problema en un diagrama de árbol.



(I)

$$P(\text{Maneje el programa y hable inglés}) =$$

$$= P(\text{Maneje el programa}) \cdot P(\text{Hable inglés} / \text{Maneje el programa}) = 0,65 \cdot 0,4 = \boxed{0,26}$$

(II) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Hable inglés}) &= P(\text{Maneje el programa y hable inglés}) + \\
 &+ P(\text{No maneje el programa y hable inglés}) = \\
 &= P(\text{Maneje el programa}) \cdot P(\text{Hable inglés} / \text{Maneje el programa}) + \\
 &+ P(\text{No maneje el programa}) \cdot P(\text{Hable inglés} / \text{No maneje el programa}) = \\
 &= 0,65 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,25 = \boxed{0,3475}
 \end{aligned}$$

(III) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Maneje el programa} / \text{Habla inglés}) &= \frac{P(\text{Maneje el programa y habla inglés})}{P(\text{Habla inglés})} = \\
 &= \frac{0,26}{0,3475} = \boxed{0,748}
 \end{aligned}$$

A2.1.- Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? **(1 punto)**

(II) Si la herencia fuese de 99000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? **(1 punto)**

(I) Llamamos a al dinero que debe recibir Alba, b al dinero que debe recibir Blanca y n al dinero de Naia.

Planteamos las ecuaciones que surgen de los datos del enunciado del problema.

- Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia $\rightarrow a + b + n = \text{herencia}$
- Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros $\rightarrow$

$$a = \frac{b+n}{2} + 3000$$

- Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia $\rightarrow b = \frac{a+n}{2}$

- Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros $\rightarrow$

$$n = \frac{a+b}{2} - 3000$$

Si juntamos las tres condiciones que relacionan entre sí el dinero de las tres mujeres nos queda el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{b+n}{2} + 3000 \\ b = \frac{a+n}{2} \\ n = \frac{a+b}{2} - 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a = b+n+6000 \\ 2b = a+n \\ 2n = a+b-6000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ -a + 2b - n = 0 \\ -a - b + 2n = -6000 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ -a + 2b - n = 0 \\ -a - b + 2n = -6000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ -2a \quad +4b \quad -2n \quad = 0 \\ 2a \quad -b \quad -n \quad = 6000 \\ \hline 3b \quad -3n \quad = 6000 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 1^a \\ -2a \quad -2b \quad +4n \quad = -12000 \\ 2a \quad -b \quad -n \quad = 6000 \\ \hline -3b \quad +3n \quad = -6000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ 3b - 3n = 6000 \\ -3b + 3n = -6000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ 3b - 3n = 6000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ b - n = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a - b - n = 6000 \\ \boxed{b = n + 2000} \end{array} \right\} \Rightarrow 2a - n - 2000 - n = 6000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 2n + 8000 \Rightarrow \boxed{a = n + 4000}$$

Alba recibe 4000 euros más que Naia y Blanca recibe 2000 más que Naia. Por lo tanto, Alba recibe 2000 euros más que Blanca.

(II) Añadimos la ecuación $a + b + c = herencia = 99000$ al sistema anterior.

$$\text{El nuevo sistema queda } \left. \begin{array}{l} a + b + n = 99000 \\ 2a - b - n = 6000 \\ -a + 2b - n = 0 \\ -a - b + 2n = -6000 \end{array} \right\} . \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + n = 99000 \\ 2a - b - n = 6000 \\ -a + 2b - n = 0 \\ -a - b + 2n = -6000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + n = 99000 \\ b = n + 2000 \\ a = n + 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow n + 4000 + n + 2000 + n = 99000$$

$$3n + 6000 = 99000 \Rightarrow 3n = 93000 \Rightarrow n = \frac{93000}{3} = 31000 \text{ €} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 31000 + 2000 = 33000 \text{ €} \\ a = 31000 + 4000 = 35000 \text{ €} \end{array} \right.$$

Alba recibe 35000 €, Blanca recibe 33000 € y Naia recibe 31000 €.

A2.2.- El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12 - t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

(I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? **(1 punto)**

(II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? **(1 punto)**

(I) Buscamos el máximo de la función $e(t) = 100t(12 - t)$. Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$e(t) = 100t(12 - t) = 1200t - 100t^2 \Rightarrow e'(t) = 1200 - 200t$$

$$e'(t) = 0 \Rightarrow 1200 - 200t = 0 \Rightarrow -200t = -1200 \Rightarrow t = \frac{1200}{200} = 6$$

Sustituimos $t = 6$ en la derivada segunda.

$$e'(t) = 1200 - 200t \Rightarrow e''(t) = -200 \Rightarrow e''(6) = -200 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función $e(t) = 100t(12 - t)$ tiene un máximo relativo en $t = 6$.

El efecto máximo del medicamento se alcanza a los 6 meses.

(II) Veamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $e(t) = 100t(12 - t)$.

Como la función tiene un máximo relativo en $t = 6$, aumenta el efecto antes de los 6 meses y disminuye después de los 6 meses.

A2.3.- Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

(I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? **(1 punto)**

(II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas, pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? **(1 punto)**

X = Peso de una bolsa de naranjas. $X = N(6, 0,55)$

(I) Si $X = N(6, 0,55)$ entonces la distribución de la media de 400 bolsas sigue una normal con la misma media y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,55}{\sqrt{400}} = 0,0275$. $\overline{X}_{400} = N(6, 0,0275)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{400} < 5,95)$.

$$P(\overline{X}_{400} < 5,95) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{400} - 6}{0,0275} < \frac{5,95 - 6}{0,0275}\right) = P(Z < -1,82) =$$

$$= P(Z > 1,82) = 1 - P(Z < 1,82) = 1 - 0,9656 = \boxed{0,0344}$$

(II) Nos piden un intervalo de confianza al 90% para una muestra de 400 bolsas con media muestral de 6,030 Kg. $X = N(\mu, 0,55)$

Para un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

Obtenemos el error.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,645 \cdot \frac{0,55}{\sqrt{400}} = 0,045. \text{ Es de 45 gramos.}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (6,03 - 0,045, 6,03 + 0,045)$$

El intervalo de confianza es (5,985, 6,075).

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

Bl.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A? **(0,5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

Igual que en propuesta A

B1.2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ b(-x + 4) & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Igual que en propuesta A

Bl.3.- El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

Igual que en propuesta A

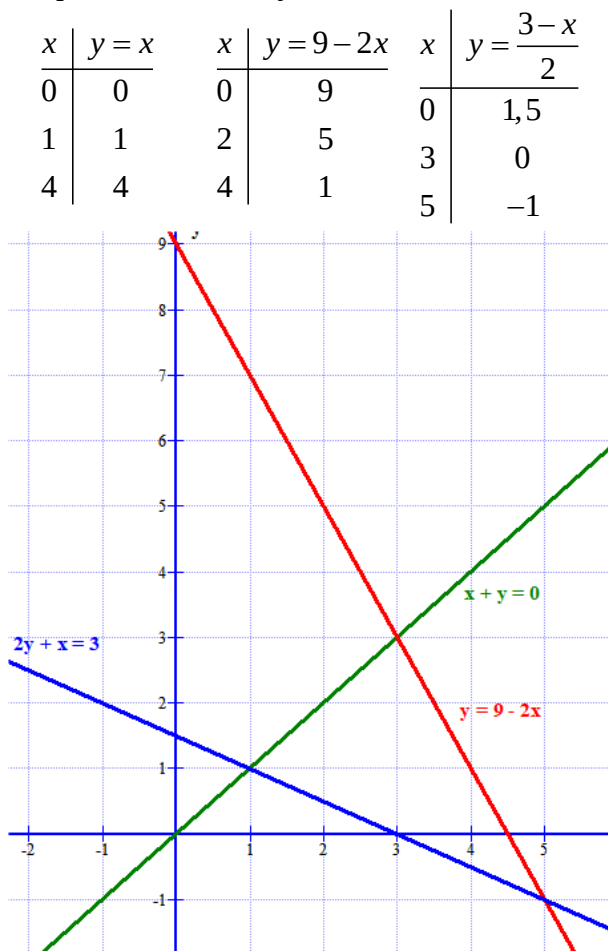
B2.1.- Las restricciones de un problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. **(1 punto)**

(II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? **(1 punto)**

Para dibujar la región factible previamente dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

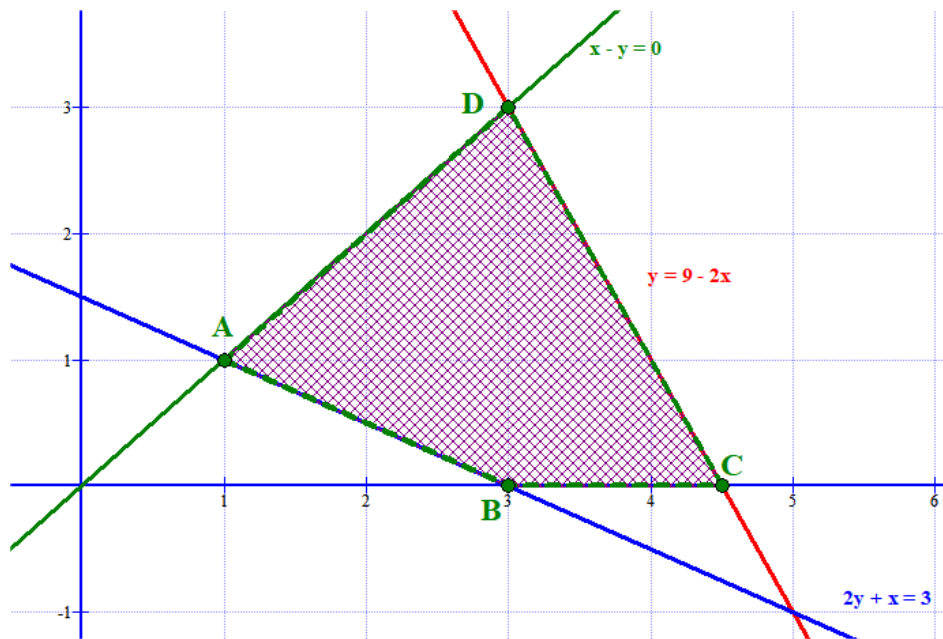


Como las restricciones son $x - y \geq 0$; $y + 2x \leq 9$; $2y + x \geq 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y roja y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $(3, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$3 - 1 \geq 0; \quad 1 + 6 \leq 9; \quad 2 + 3 \geq 3; \quad 3 \geq 0; \quad 1 \geq 0.$$

Cumple todas las restricciones y la región factible es la región del primer cuadrante que lo contiene. La coloreamos en el siguiente dibujo.



(II) Las coordenadas de los vértices de la región factible son $A(1, 1)$, $B(3, 0)$, $C(4, 0)$ y $D(3, 3)$. Estos puntos son los candidatos a maximizar la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$. Valoramos la función en cada uno de estos puntos.

$$A(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = 2 - 2 + 7 = 7$$

$$B(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = -6 + 7 = 1$$

$$C(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = -8 + 7 = -1$$

$$D(3, 3) \rightarrow f(3, 3) = 6 - 6 + 7 = 7$$

La función ingresos tiene el mismo valor máximo en $A(1, 1)$ que en $D(3, 3)$. También lo tendrá en $E(2, 2)$. Cualquiera de estos 3 puntos da un máximo ingreso. También cualquier punto del segmento AD .

B2.2.- Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

- (I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. **(1 punto)**
 (II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. **(1 punto)**

- (I) Para que la recta tangente sea paralela a la recta $y = x + 3$ deben tener la misma pendiente, es decir, su pendiente debe ser 1. La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es la derivada de la función en $x = 0$. Debe cumplirse que $f'(0) = 1$.

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(x-1)^2 - a(x+1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{a\cancel{(x-1)}[(x-1) - 2(x+1)]}{(x-1)^{4-1}}$$

$$f'(x) = \frac{a[x-1-2x-2]}{(x-1)^3} = \frac{a(-x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{a(-0-3)}{(0-1)^3} = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

- (II) Para $a = 1$ la función es $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$

El dominio de esta función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

Como $x = 1$ no pertenece al dominio la asíntota es $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe, pues existe una asíntota horizontal.

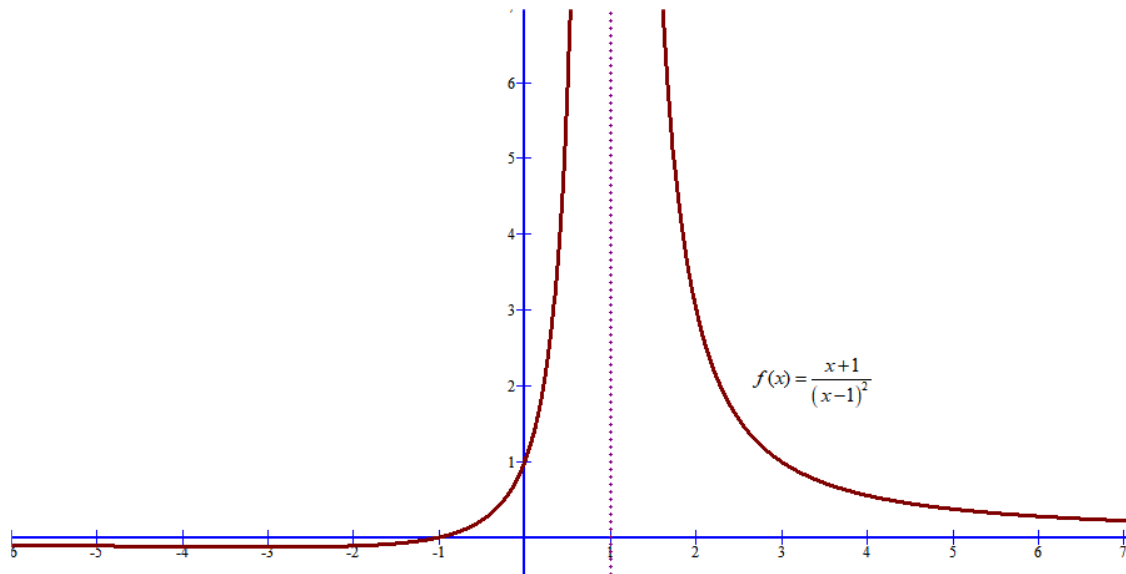
Hallamos los extremos de la función utilizando su derivada, calculada anteriormente.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x-3}{(x-1)^3} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-x-3}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -x-3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

En $x = -3$ hay un extremo relativo.

Para esbozar la gráfica de la función realizamos una tabla de valores.

x	$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$	x	$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$
-5	-0,11	1	No existe
-4	-0,12	2	3
-3	-0,125	3	1
-2	-0,11	4	0,55
-1	0	5	0,375
0	1	6	0,28



B2.3.- Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo.

El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

(I) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. **(1 punto)**

X = Peso de un balón de baloncesto en gramos. $X = N(\mu, 25)$

(I) Si $X = N(605, 25)$ entonces el peso medio de los balones que van en cajones de 100 unidades sigue una distribución normal de la misma media, pero desviación típica más pequeña

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{100}} = 2,5 \text{ gramos. } \overline{X}_{100} = N(605, 2,5)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} > 603)$.

$$P(\overline{X}_{100} > 603) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{100} - 605}{2,5} > \frac{603 - 605}{2,5}\right) = P(Z > -0,8) =$$

$$= P(Z < 0,8) = \boxed{0,7881}$$

(II) El tamaño de la muestra es $n = 400$. La media muestral es $\bar{x} = 610$ $\sigma = 25$.

Para un nivel de confianza del 95% determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \frac{25}{\sqrt{400}} = 2,45$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (610 - 2,45, 610 + 2,45)$$

El intervalo de confianza es $(607,55, 612,45)$.

EBAU Julio 2018



UNIVERSIDAD DE
LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la
Universidad (EBAU)

Curso Académico: 2017 - 2018

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS

INSTRUCCIONES

- a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A/ OPCIÓN B).
b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

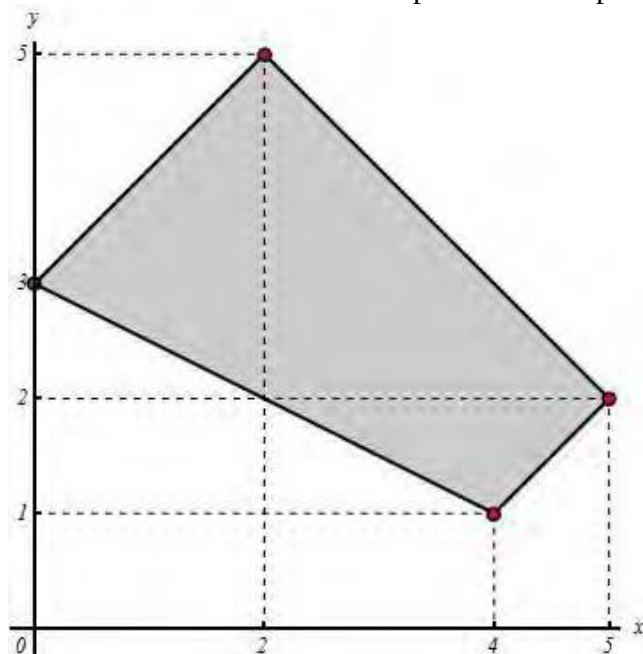
OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
b) Determina los extremos relativos de la función.
c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

Pregunta A1.2. (1+1 puntos) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



- a) Determina el citado conjunto de restricciones.
b) Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

Pregunta A1.3. (1+1 puntos) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención en el servicio de cirugía vascular sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 días. **(Ver tabla de la normal tipificada al final del examen)**

- a) Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85% para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

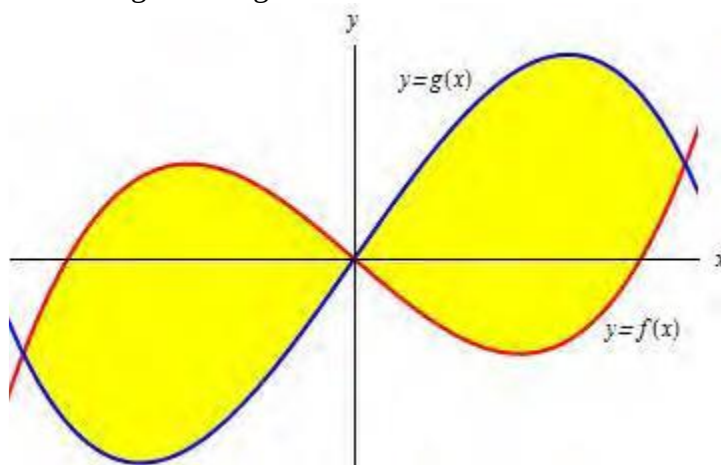
- b) Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a (41,45) como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

Parte A2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta A2.1. (1+1 puntos) Consideramos las funciones

$$f(x) = x(x^2 - 3) \text{ y } g(x) = -x(x^2 - 5) .$$

- a) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Dicha región aparece en amarillo en la siguiente figura.



- b) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 9x + 2018$?
Determina la recta tangente en los puntos obtenidos.

Pregunta A2.2. (1+1 puntos) Consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2(a-1)x - y + 2z = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + y + 2(a+1)z = 4 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real.

- a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
b) Resuelve el sistema para $a = 0$. ¿Es posible resolver el sistema para $a = 1$?

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) Durante las fiestas de San Bernabé del pasado año, seis de cada diez personas que acudieron a la degustación del pan, el pez y el vino adquirieron la tradicional jarra de barro para tomar el vino. Una de cada cuatro personas que adquirió la jarra no consumió vino y cuatro de cada cinco personas que no la compraron tampoco lo tomaron.

- a) Calcula el porcentaje de personas que bebieron vino en la degustación.
b) Un amigo mío no tomó vino el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que mi amigo comprase la jarra?

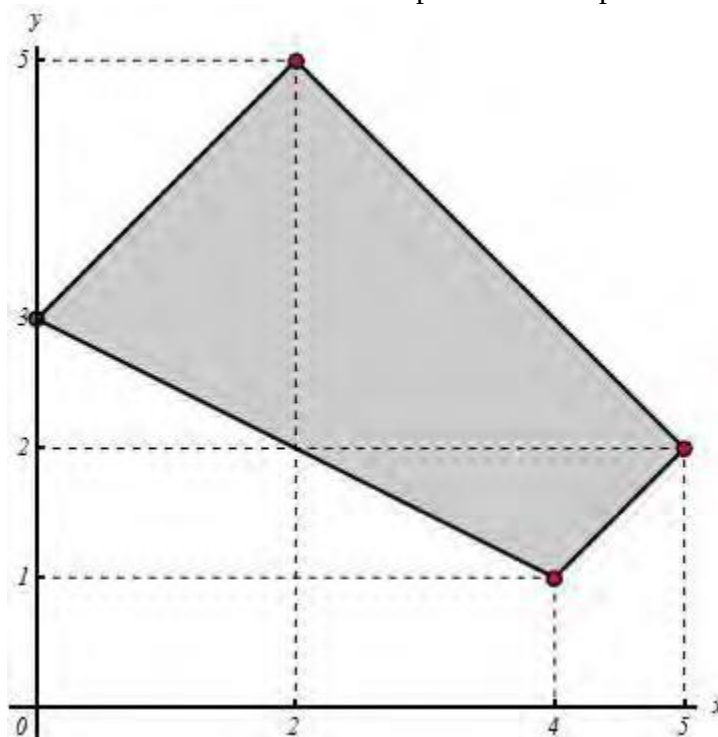
OPCIÓN B

Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta B1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
- Determina los extremos relativos de la función.
- Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$

Pregunta B1.2. (1+1 puntos) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



- Determina el citado conjunto de restricciones.
- Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

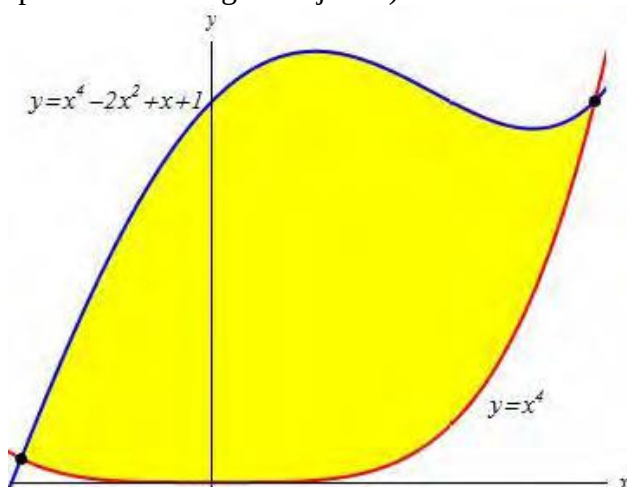
Pregunta B1.3. (1+1 puntos) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención en el servicio de cirugía vascular sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 días. **(Ver tabla de la normal tipificada al final del examen)**

- Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85% para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.
- Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a (41,45) como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

Parte B2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta B2.1. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$.

- a) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 2018$?
- b) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = x^4$. (La región cuya área se solicita aparece representada en la figura adjunta.)



Pregunta B2.2. (1+1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a - 7 & -6 \\ 6 & 3a + 6 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- b) Tomando $a = 1/3$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X + 6 \cdot I_2 = A^3 + A \cdot A^t$.
- (Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En una caja tenemos inicialmente una bola negra y otra roja. Cada vez que extraemos una bola, introducimos tres bolas del color de la extraída. Sacamos una primera bola y procedemos a hacer la reposición, sacamos una segunda bola y reponemos y sacamos una tercera bola.

- a) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado bolas del mismo color.
- b) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado dos bolas del mismo color y otra de color distinto.

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

Pregunta A1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

b) Determina los extremos relativos de la función.

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

La función presenta tres puntos críticos: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

Comprobamos si la función crece o decrece en cada uno de los intervalos y semirrectas en que se divide la recta real al marcar estos puntos críticos.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = 12(-3)^3 + 12(-3)^2 - 24(-3) = -144 < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 12(-1)^3 + 12(-1)^2 - 24(-1) = 24 > 0. \text{ La función crece.}$$

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0,5$ y la derivada vale

$$f'(0,5) = 12(0,5)^3 + 12(0,5)^2 - 24(0,5) = -\frac{33}{4} < 0. \text{ La función decrece.}$$

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12(2)^3 + 12(2)^2 - 48 = 96 > 0$. La función crece.

La función crece en $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

b) Ya tenemos los puntos críticos de la función: $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$.

Obtenemos la segunda derivada y comprobamos si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$$

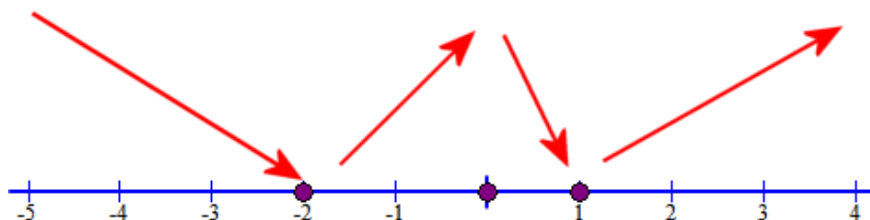
$$x = -2 \rightarrow f''(-2) = 36(-2)^2 - 48 - 24 = 144 - 72 = 72 > 0 \text{ Hay un mínimo en } x = -2$$

$$x = 0 \rightarrow f''(0) = -24 < 0 \text{ Hay un máximo relativo en } x = 0$$

$$x = 1 \rightarrow f''(1) = 36 + 24 - 24 = 36 > 0 \text{ Hay un mínimo relativo en } x = 1$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como se ha estudiado en el apartado a) el crecimiento y decrecimiento de la función, podemos realizar un esquema de evolución de la función con el gráfico:



Se observa que en $x = -2$ hay un mínimo relativo, en $x = 0$ hay un máximo relativo y en $x = 1$ hay otro mínimo relativo.

c) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32}{x-2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}$$

Utilizamos el método de división de Ruffini para factorizar el numerador.

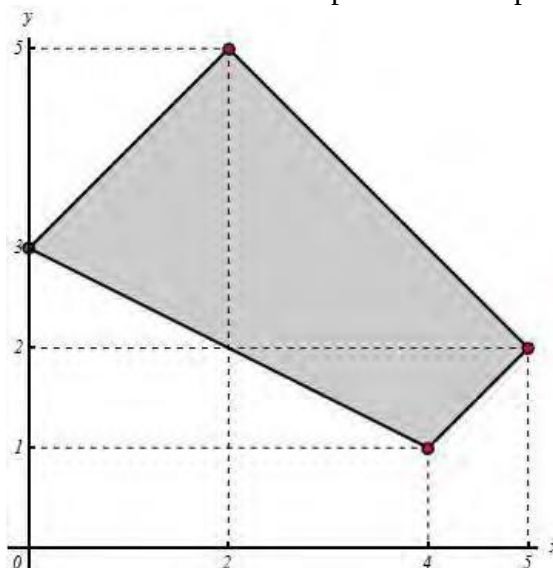
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 4 & -12 & 0 & -32 \\ 2 & & 6 & 20 & 16 & 32 \\ \hline & 3 & 10 & 8 & 16 & \underline{0} \end{array}$$

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32 = (x-2)(3x^3 + 10x^2 + 8x + 16)$$

Sustituimos el numerador y simplificamos la expresión, resolviendo así la indeterminación.

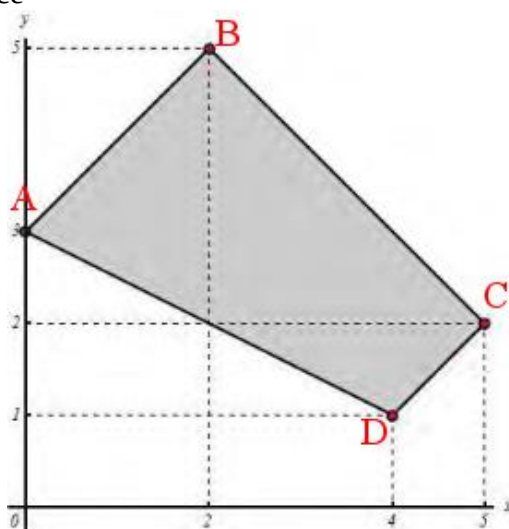
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(3x^3 + 10x^2 + 8x + 16)}{\cancel{x-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 3x^3 + 10x^2 + 8x + 16 = 24 + 40 + 16 + 16 = \boxed{96} \end{aligned}$$

Pregunta A1.2. (1+1 puntos) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



- a) Determina el citado conjunto de restricciones.
 b) Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

- a) Averiguemos las ecuaciones de las rectas que delimitan la región factible.
 Damos nombre a cada vértice



La recta que pasa por los puntos A y B tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} A(0,3) \\ B(2,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,3) \\ m = \text{pendiente} = \frac{5-3}{2-0} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3 = 1(x-0) \Rightarrow r_1: y = x+3$$

La región factible está por debajo de la recta, la restricción es $y \leq x+3$ o bien $y - x \leq 3$

La recta que pasa por los puntos A y D tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} A(0,3) \\ D(4,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,3) \\ m = \text{pendiente} = \frac{1-3}{4-0} = -0,5 \end{array} \right\} \Rightarrow y-3 = -0,5(x-0) \Rightarrow r_2: y = -0,5x+3$$

La región factible está por encima de la recta, la restricción es $y \geq -0,5x+3$ o bien $2y + x \geq 6$

La recta que pasa por los puntos C y D tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} C(5,2) \\ D(4,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C(5,2) \\ m = \text{pendiente} = \frac{1-2}{4-5} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-2 = 1(x-5) \Rightarrow r_3 : y = x-3$$

La región factible está por encima de la recta, la restricción es $y \geq x-3$ o bien $y-x \geq -3$

La recta que pasa por los puntos C y B tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} C(5,2) \\ B(2,5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C(5,2) \\ m = \text{pendiente} = \frac{5-2}{2-5} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y-2 = -1(x-5) \Rightarrow r_4 : y = -x+7$$

La región factible está por debajo de la recta, la restricción es $y \leq -x+7$ o bien $y+x \leq 7$

Juntamos todo lo obtenido. Las restricciones serían:

$$\left. \begin{array}{l} y-x \leq 3 \\ 2y+x \geq 6 \\ y-x \geq -3 \\ y+x \leq 7 \end{array} \right\}$$

b) Valoramos la función $f(x,y) = 5y - x + 12$ en cada uno de los vértices.

$$A(0,3) \rightarrow f(0,3) = 15 - 0 + 12 = 27$$

$$B(2,5) \rightarrow f(2,5) = 25 - 2 + 12 = 35$$

$$C(5,2) \rightarrow f(5,2) = 10 - 5 + 12 = 17$$

$$D(4,1) \rightarrow f(4,1) = 5 - 4 + 12 = 13$$

El máximo se alcanza en el punto B(2,5).

Pregunta A1.3. (1+1 puntos) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención en el servicio de cirugía vascular sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 días. **(Ver tabla de la normal tipificada al final del examen)**

a) Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85% para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

b) Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a (41,45) como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

X = Tiempo de espera para una intervención. $X = N(\mu, 15)$

a) $n = 100$. $\bar{x} = 43$

Si el nivel de confianza es 85% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 0,15 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,075 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,925 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,44 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 2,16$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (43 - 2,16, 43 + 2,16) = (40,84, 45,16)$$

b) Si el intervalo de confianza es (41,45) la media muestral es el valor central de dicho intervalo:

$$\frac{41 + 45}{2} = 43$$

El error sería de $45 - 43 = 2$ días.

Sustituimos en la fórmula del error y obtenemos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{20}{15} = 1,33$$

Localizamos este valor en la tabla de la $N(0,1)$ y encontramos que corresponde a 0,9082.

Hacemos lo inverso del apartado anterior y encontramos el nivel de confianza.

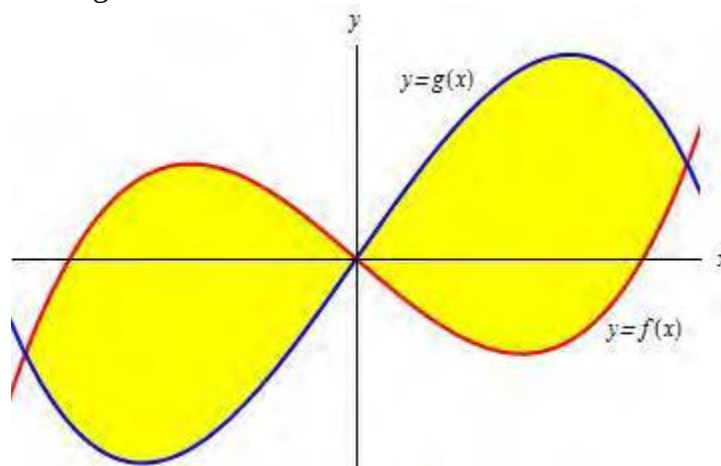
$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,33 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9082 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0918 \rightarrow \alpha = 0,1836 \rightarrow 1 - \alpha = 0,8164$$

El nivel de confianza debe ser del 81,64%

Pregunta A2.1. (1+1 puntos) Consideramos las funciones

$$f(x) = x(x^2 - 3) \text{ y } g(x) = -x(x^2 - 5).$$

a) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Dicha región aparece en amarillo en la siguiente figura.



b) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 9x + 2018$?
Determina la recta tangente en los puntos obtenidos.

a) Averiguamos los puntos de corte de ambas funciones para establecer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x(x^2 - 5) = x(x^2 - 3) \Rightarrow -x^3 + 5x = x^3 - 3x$$

$$-2x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(-x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

El área total se divide en dos áreas que se obtienen de la suma del valor absoluto de dos integrales definidas:

De $x = -2$ a $x = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 x^3 - 3x - (-x^3 + 5x) dx &= \int_{-2}^0 x^3 - 3x + x^3 - 5x dx = \int_{-2}^0 2x^3 - 8x dx = \\ &= \left[2 \frac{x^4}{4} - 8 \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 = \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2 \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^4}{2} - 0 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{2} - 4(-2)^2 \right] = -8 + 16 = 8 \end{aligned}$$

Y de $x = 0$ a $x = 2$

$$\begin{aligned} \int_0^2 -x^3 + 5x - (x^3 - 3x) dx &= \int_0^2 -2x^3 + 8x dx = \left[-2 \frac{x^4}{4} + 8 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[-\frac{x^4}{2} + 4x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{2^4}{2} + 4 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 0 \right] = -8 + 16 = 8 \end{aligned}$$

El área total es $8 + 8 = 16$ unidades cuadradas.

- b) Para que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 9x + 2018$ debe tener la misma pendiente, es decir, debe ser 9. Como la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en ese punto, debe cumplirse que la derivada en el punto de tangencia valga 9.

$$f(x) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 9 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Ocurre en $x = -2$ y en $x = 2$.

Las ecuaciones de las rectas tangentes serán:

$$x = -2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(-2) = -2((-2)^2 - 3) = -2 \\ f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = 9(x - (-2)) \Rightarrow y + 2 = 9x + 18$$

La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ tiene ecuación $y = 9x + 16$.

$$x = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(2) = 2(2^2 - 3) = 2 \\ f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 9(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 9x - 18$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ tiene ecuación $y = 9x - 16$.

Pregunta A2.2. (1+1 puntos) Consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2(a-1)x - y + 2z = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + y + 2(a+1)z = 4 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?

b) Resuelve el sistema para $a = 0$. ¿Es posible resolver el sistema para $a = 1$?

a) Estudiemos el sistema en función del parámetro a .

Su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} -2(a-1) & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2(a+1) \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} -2(a-1) & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2(a+1) \end{vmatrix} = -4a(a-1)(a+1) - 2 + 2 - (4a - 2(a+1) - 2(a-1))$$

$$|A| = -4a(a-1)(a+1) - \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{4a} + \cancel{2a} + \cancel{2a} - \cancel{2} = -4a(a-1)(a+1)$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -4a(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Distinguiremos cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo y por tanto su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3 e igual al número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución. **Es compatible determinado.**

En el resto de casos no es compatible determinado. No es necesario seguir. Hacemos el resto del estudio, para completarlo y utilizarlo en el apartado b) si fuera necesario.

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Si tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 1ª (que es igual que la 3ª).

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 0 - (4 + 0 - 4) = 0. \text{ El rango de A/B no es 3}$$

¿El rango de A/B es 2?

Tomamos el mismo menor que hemos tomado para estudiar el rango de A y determinamos que el rango de A/B es 2.

Como rango de A y A/B son iguales a 2 pero menores que el número de incógnitas el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema es Compatible Indeterminado.

CASO 3. $a = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -y + 2z = 4 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Si tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 16 - (4 + 8 - 8) = 12 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3}$$

Como rango de A es 2 y el de A/B es 3, son diferentes y el sistema no tiene solución.

El sistema es Incompatible.

CASO 4. $a = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} -4x - y + 2z = 4 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Si tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 0 - (4 - 8 + 0) = 4 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3}$$

Como rango de A es 2 y el de A/B es 3, son diferentes y el sistema no tiene solución.

El sistema es Incompatible.

El sistema es compatible y determinado solo para valores de a distintos de 0, 1 y -1.

Para a = 0 es compatible indeterminado y para a = -1 o a = 1 es incompatible.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado, estudiado en el apartado a).

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}. \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ \boxed{x = 2 - z} \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2z - y + 2z = 4 \\ 4 - 2z + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ \boxed{y = 0} \end{cases}$$

La solución es $x = 2 - t$; $y = 0$; $z = t$

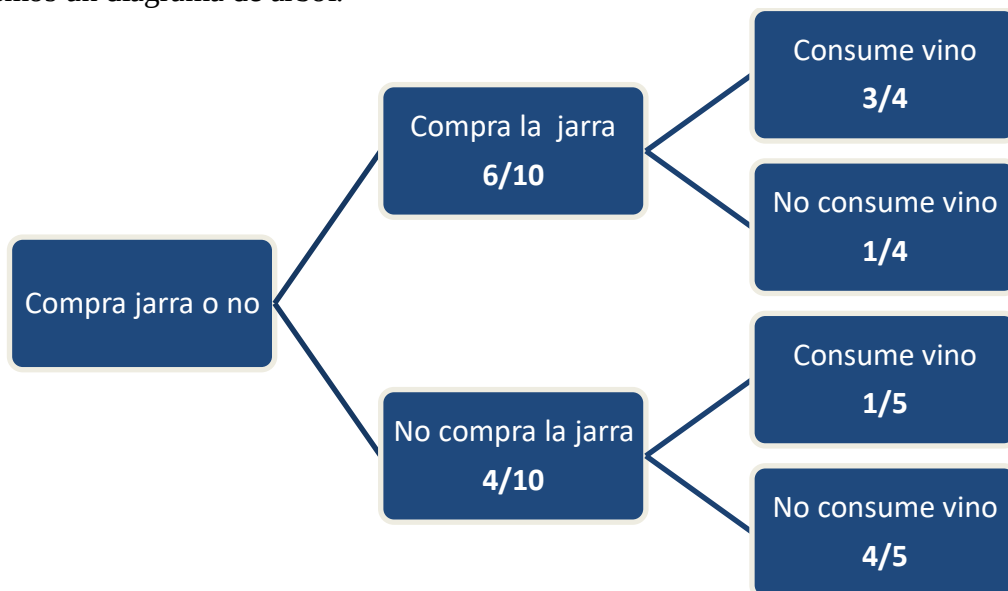
Para $a = 1$ el sistema es incompatible, estudiado en el apartado a), por lo que no se puede resolver.

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) Durante las fiestas de San Bernabé del pasado año, seis de cada diez personas que acudieron a la degustación del pan, el pez y el vino adquirieron la tradicional jarra de barro para tomar el vino. Una de cada cuatro personas que adquirió la jarra no consumió vino y cuatro de cada cinco personas que no la compraron tampoco lo tomaron.

a) Calcula el porcentaje de personas que bebieron vino en la degustación.

b) Un amigo mío no tomó vino el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que mi amigo comprase la jarra?

Realicemos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\text{Porcentaje de personas que bebieron vino} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} =$$

$$= \frac{18}{40} + \frac{4}{50} = \frac{90+16}{200} = \frac{106}{200} = \frac{53}{100} = \boxed{53\%}$$

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Comprase la jarra} / \text{No consume vino}) = \frac{P(\text{Comprase la jarra y No consuma vino})}{P(\text{No consume vino})} =$$

$$= \frac{P(\text{Compra la jarra})P(\text{No consume vino} / \text{Compra la jarra})}{1 - P(\text{Consume vino})} = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4}}{1 - 0,53} = \frac{0,15}{0,47} = \boxed{0,32}$$

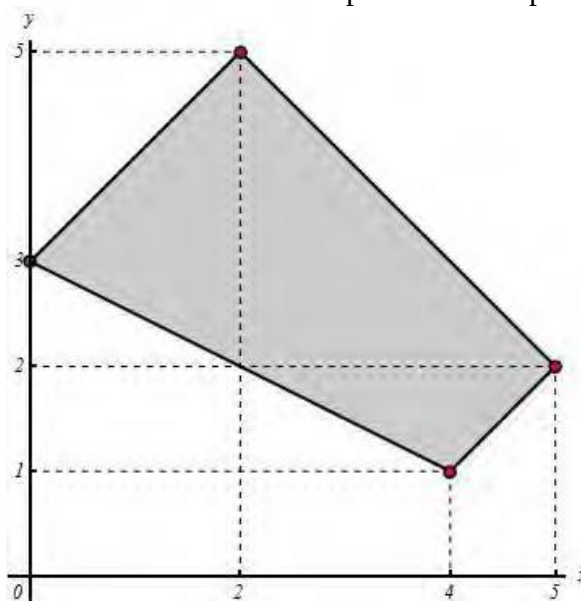
OPCIÓN B

Pregunta B1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
- Determina los extremos relativos de la función.
- Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$.

Igual que A1.1

Pregunta B1.2. (1+1 puntos) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



- Determina el citado conjunto de restricciones.
- Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

Igual que A1.2

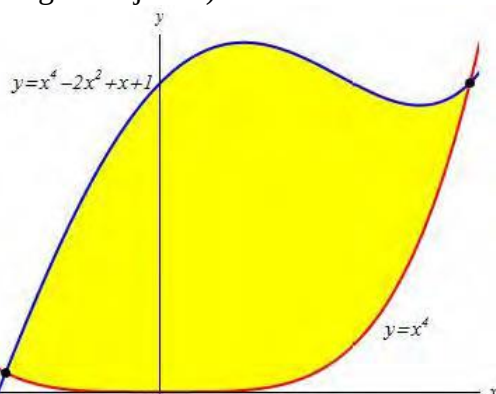
Pregunta B1.3. (1+1 puntos) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención en el servicio de cirugía vascular sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 días. **(Ver tabla de la normal tipificada al final del examen)**

- Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85% para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.
- Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a (41,45) como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

Igual que A1.3

Pregunta B2.1. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$.

- a) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 2018$?
- b) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = x^4$. (La región cuya área se solicita aparece representada en la figura adjunta.)



- a) La recta tangente a la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$ es paralela a $y = x + 2018$ cuando tienen la misma pendiente. Como la pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada y la pendiente de la recta $y = x + 2018$ es 1, igualamos y resolvemos la ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 1 \\ \text{pendiente} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

En $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$ es paralela a $y = x + 2018$.

- b) Averigüemos las coordenadas de los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^4 - 2x^2 + x + 1 \\ y = x^4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + x + 1 = x^4 \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2} = x \\ = \frac{-1-3}{-4} = 1 = x \end{cases}$$

En el dibujo del enunciado se observa que $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$ toma valores superiores a $y = x^4$ en el intervalo $(-0.5, 1)$.

El área del recinto limitado por las dos gráficas es el valor de la integral definida entre -0.5 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned}
 \int_{-0,5}^1 x^4 - 2x^2 + x + 1 - x^4 dx &= \int_{-0,5}^1 -2x^2 + x + 1 dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-0,5}^1 = \\
 &= \left[-2\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[-2\frac{(-0,5)^3}{3} + \frac{(-0,5)^2}{2} - 0,5 \right] = \\
 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{0,25}{3} - \frac{0,25}{2} + 0,5 = \boxed{1,125 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El área de la región tiene un valor de 1.125 unidades cuadradas.

Pregunta B2.2. (1+1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a-7 & -6 \\ 6 & 3a+6 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = 1/3$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X + 6 \cdot I_2 = A^3 + A \cdot A^t$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

a) Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3a-7 & -6 \\ 6 & 3a+6 \end{vmatrix} = (3a-7)(3a+6) + 36 = 9a^2 + 18a - 21a - 42 + 36 = 9a^2 - 3a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9a^2 - 3a - 6 = 0 \Rightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \begin{cases} \frac{1+5}{6} = 1 \\ \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Existe la matriz inversa de A cuando su determinante es no nulo y eso ocurre cuando a es distinto de 1 y de $-2/3$.

b) Si $a = 1/3$ entonces $A = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, como $|A| = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -42 + 36 = -6 \neq 0$, existe A^{-1} .

Despejamos X en la ecuación.

$$A \cdot X + 6 \cdot I_2 = A^3 + A \cdot A^t \Rightarrow A \cdot X = A^3 + A \cdot A^t - 6 \cdot I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^3 + A^{-1} \cdot A \cdot A^t - 6 \cdot A^{-1} \cdot I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A^2 + A^t - 6 \cdot A^{-1}$$

Calculamos A^2 , A^t y A^{-1} .

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-36 & 36-42 \\ -36+42 & -36+49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}}{-6} = \begin{pmatrix} -7/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = A^2 + A^t - 6 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} -7/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

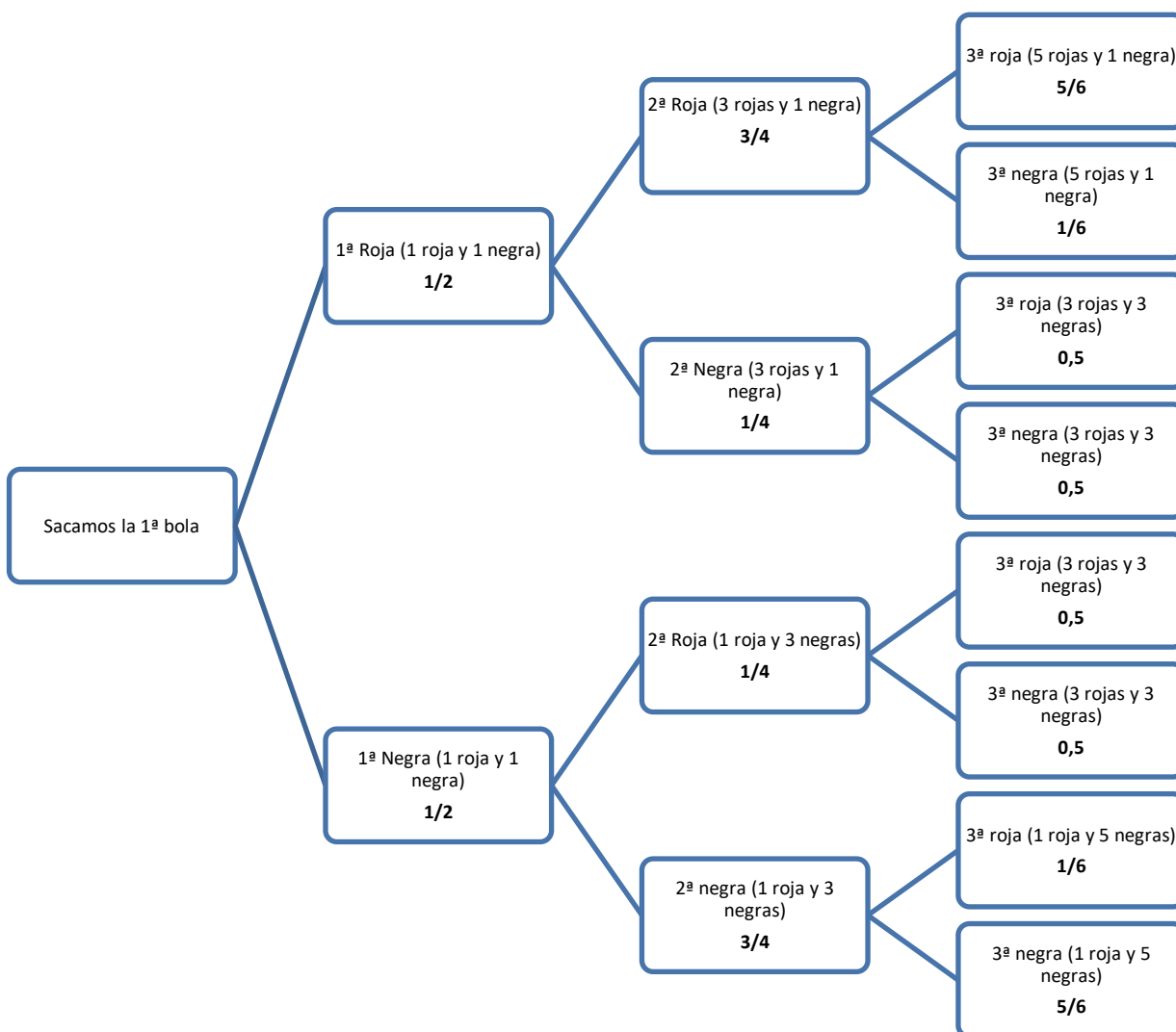
$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$$

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En una caja tenemos inicialmente una bola negra y otra roja. Cada vez que extraemos una bola, introducimos tres bolas del color de la extraída.

Sacamos una primera bola y procedemos a hacer la reposición, sacamos una segunda bola y reponemos y sacamos una tercera bola.

- a) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado bolas del mismo color.
 b) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado dos bolas del mismo color y otra de color distinto.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(3 \text{ bolas del mismo color}) = P(3 \text{ bolas rojas}) + P(3 \text{ bolas negras}) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8} = \boxed{0,625}$$

- b) Este suceso es el complementario del apartado a), pues después de sacar las tres bolas solo nos podemos encontrar con tres bolas del mismo color (3 rojas o 3 negras) o bien con dos de un color y otra del otro color (2 rojas y 1 negra o 2 negras y 1 roja).

$$P(2 \text{ bolas de un color y otra de color distinto}) = 1 - 0,625 = \boxed{0,375}$$

También se podría calcular sumando las probabilidades de las ramas donde se cumple esto, que son todas menos la superior y la inferior, que las hemos utilizado para determinar la probabilidad del apartado a).

EBAU Junio 2018

	UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) Curso Académico: 2017 - 2018 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS
---	------------------------------------	--

INSTRUCCIONES

- a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A / OPCIÓN B).
b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

- a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a .
b) Tomando en $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta A1.2. (0.5+1+0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
b) Determina dichos honorarios.
c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

- a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte A2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos) Consideramos un rectángulo cuyos lados miden x e y .

- Encontrar el rectángulo de perímetro mínimo, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $xy^2 = 4$.
- Encontrar el rectángulo de área máxima, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x + 3y^2 = 1$.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}.$$

- Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2$

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.

- Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?
- Luis, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

OPCIÓN B

Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

- Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a .
- Tomando en $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta B1.2. (0.5+1+0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

- Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
- Determina dichos honorarios.
- Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

- Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
- Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte B2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta B2.1. (1+1 puntos) Sean a y b dos parámetros reales. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} -ax^3 + 6bx^2 - 3x, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 1 \\ -ax^3 - 4bx^2 - 3x, & x > 1 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función dada?
- b) Tomando $a = 1$ y $b = -1$, calcular la integral definida $\int_0^3 f(x) dx$.

Pregunta B2.2. (1+0.5+0.5 puntos) Sean

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \leq 6-y \end{cases},$$

las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

- a) Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.
- b) ¿Cuál es máximo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región factible?
- c) Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x, y) = ax + 3y$ en la región factible es quince, ¿cuál es el valor de a ?

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En la Escuela Oficial de Idiomas de mi ciudad, hay tres aulas de primer curso de inglés. La distribución de chicos y chicas en cada aula es como se muestra en la tabla adjunta.

	Aula 1	Aula 2	Aula 3
Chicos	21	16	16
Chicas	18	16	24

- a) Determina la probabilidad de que al elegir un estudiante de primer curso sea chica.
- b) Si elegimos una chica de primer curso al azar, ¿a qué aula es más probable que pertenezca?

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

- a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a .
 b) Tomando en $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

- a) Si la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$, entonces tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en ese punto $f'(0)$ y el valor de la pendiente de la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$ es $\frac{1}{4}$. Debe cumplirse que $f'(0) = \frac{1}{4}$.

$$f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4} = \frac{x^2+ax}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2-4) - 2x(x^2+ax)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(0+a)(0^2-4) - 2 \cdot 0 \cdot (0^2+a \cdot 0)}{(0^2-4)^2} = \frac{-4a}{16} = \frac{-a}{4} \left. \begin{array}{l} \\ f'(0) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Para $a = -1$ la función es $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2-4}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

Para $x = 0$ tenemos que $f(0) = \frac{0(0-1)}{0^2-4} = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{4}$.

$y - 0 = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{4}$ es la ecuación de la recta tangente pedida.

- b) Si $a = 2$ la función es $f(x) = \frac{x(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$, se excluyen estos dos valores ya que anulan el denominador.

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{x^2-4} = \frac{8}{0} = \infty$$

$x = 2$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x \cancel{(x+2)}}{(x-2) \cancel{(x+2)}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{(x-2)} = \frac{-2}{-4} = 0,5.$$

$x = -2$ no es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$. No existe, pues hay una asíntota horizontal.

Pregunta A1.2. (0.5+ 1 +0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
 b) Determina dichos honorarios.
 c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

- a) Si llamamos “x” al sueldo por día de un actor, “y” al sueldo por día de una actriz y “z” al sueldo por día de un intérprete infantil, la tabla anterior se queda:

	Película uno	Película dos	Película tres
Sueldo de los actores	$2x$	$4x$	$2x$
Sueldo de las actrices	y	$4y$	$3y$
Sueldo de los intérpretes infantiles	tz	$(3t-2)z$	$(2t-1)z$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

Y las ecuaciones formarían un sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + tz &= 17 \\ 4x + 4y + (3t-2)z &= 40 \\ 2x + 3y + (2t-1)z &= 27 \end{aligned} \right\}$$

- b) Resolvamos el sistema anterior utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + tz &= 17 \\ 4x + 4y + (3t-2)z &= 40 \\ 2x + 3y + (2t-1)z &= 27 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 4x + 4y + (3t-2)z = 40 \\ -4x - 2y - 2tz = -34 \\ \hline 2y + (t-2)z = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + 3y + (2t-1)z = 27 \\ -2x - y - tz = -17 \\ \hline 2y + (t-1)z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + tz = 17 \\ 2y + (t-2)z = 6 \\ 2y + (t-1)z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ 2y + (t-1)z = 10 \\ -2y - (t-2)z = -6 \\ \hline z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + tz = 17 \\ 2y + (t-2)z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = 4}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 4t = 17 \\ 2y + 4(t-2) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 17 - 4t \\ 2y = 6 - 4t + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 17 - 4t \\ 2y = 14 - 4t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = 7 - 2t}$$

$$\Rightarrow 2x + 7 - 2t = 17 - 4t \Rightarrow 2x = 10 - 2t \Rightarrow \boxed{x = 5 - t}$$

La solución es $x = 5 - t$; $y = 7 - 2t$; $z = 4$.

c) Como $x = y$, la solución anteriormente obtenida quedaría:

$$x = y \Rightarrow 5 - t = 7 - 2t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 = 3 \\ y = 7 - 4 = 3 \end{cases}$$

Los sueldos se fijarían en 3000 € por día para actores y actrices y de 4000 € por día para cada interprete infantil.

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

- a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
 b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
 (Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

X = Producción diaria de pares de zapatos. $X = N(\mu, 200)$.

- a) X = Producción diaria de pares de zapatos. $X = N(1200, 200)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 es una normal con la misma media (1200) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{200}{\sqrt{36}} = \frac{100}{3}$. $\bar{X}_{36} = N\left(1200, \frac{100}{3}\right)$.

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{36} > 1255)$.

$$P(\bar{X}_{36} > 1255) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\bar{X}_{36} - 1200}{\frac{100}{3}} > \frac{1255 - 1200}{\frac{100}{3}}\right) =$$

$$= P(Z > 1,65) = 1 - P(Z < 1,65) = 1 - 0,9505 = \boxed{0,0495}$$

- b) X = Producción diaria de pares de zapatos. $X = N(\mu, 200)$.

Tamaño de la muestra $n = 100$ días. La media muestral es $\bar{x} = 1180$ pares de zapatos.

Si el nivel de confianza es 85% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 0,15 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,075 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,925 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44$$

Determinamos el error.

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,44 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} = 28,8$$

El intervalo de confianza es:

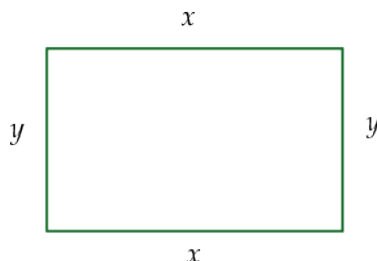
$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (1180 - 28,8, 1180 + 28,8) = (1151,2, 1208,8)$$

Con un nivel de confianza del 85% la producción media diaria de pares de zapatos estaría entre 1151,2 y 1208,8 pares.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos) Consideramos un rectángulo cuyos lados miden x e y .

- a) Encontrar el rectángulo de perímetro mínimo, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $xy^2 = 4$.
- b) Encontrar el rectángulo de área máxima, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x + 3y^2 = 1$.

- a) Tenemos que minimizar el perímetro del rectángulo: $P(x, y) = 2x + 2y$.



Como se cumple $xy^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{y^2}$, que sustituyendo en la función a minimizar solo queda dependiente de una variable (y).

$$P(y) = 2 \cdot \frac{4}{y^2} + 2y = \frac{8}{y^2} + 2y$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de su mínimo.

$$P(y) = \frac{8}{y^2} + 2y \Rightarrow P'(y) = \frac{8(-2y)}{y^4} + 2 = \frac{-16}{y^3} + 2 = \frac{-16 + 2y^3}{y^3}$$

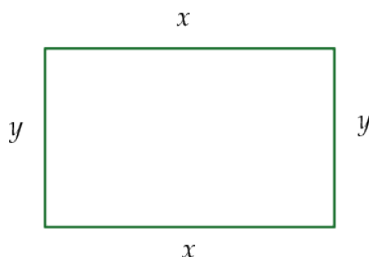
$$P'(y) = 0 \Rightarrow \frac{-16 + 2y^3}{y^3} = 0 \Rightarrow -16 + 2y^3 = 0 \Rightarrow y^3 = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Calculamos la derivada segunda y la valoramos para $y = 2$.

$$P'(y) = \frac{-16}{y^3} + 2 \Rightarrow P''(y) = \frac{-(-16) \cdot 3y^2}{y^6} = \frac{48}{y^4} \Rightarrow P''(2) = \frac{48}{2^4} = 3 > 0$$

Como la derivada segunda es positiva podemos decir que en $y = 2$ hay un mínimo. Los lados deben medir $y = 2$; $x = \frac{4}{2^2} = 1$

- b) Tenemos que maximizar el área del rectángulo: $A(x, y) = xy$.



Se cumple $x + 3y^2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 3y^2$, que sustituyendo en la función a maximizar solo queda dependiente de una variable (y).

$$A(y) = (1 - 3y^2)y = y - 3y^3$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de su máximo.

$$A(y) = y - 3y^3 \Rightarrow A'(y) = 1 - 9y^2$$

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 1 - 9y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Calculamos la derivada segunda y la valoramos para $y = 1/3$.

$$A'(y) = 1 - 9y^2 \Rightarrow A''(y) = -18y \Rightarrow A''\left(\frac{1}{3}\right) = -18 \cdot \frac{1}{3} = -6 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el área es máxima para $y = 1/3$. El lado x lo obtenemos sustituyendo $x = 1 - 3 \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima sometido a la relación entre los lados $x + 3y^2 = 1$ son $1/3$ y $2/3$.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2$

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

a) Para que exista la matriz inversa debe tener determinante no nulo.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{vmatrix} = -3a-2+2(a+1)(a+1) = -3a-2+2(a^2+2a+1) = \\ &= -3a-2+2a^2+4a+2 = 2a^2+a \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + a = 0 \Rightarrow a(2a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ 2a+1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Existe la matriz inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de $-\frac{1}{2}$.

b) Si $a = 1$ la matriz A tiene inversa, la calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5+8=3$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = 3 \cdot A^{-1} \cdot A^t + A^{-1} \cdot A - 3 \cdot A^{-1} \cdot I_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = 3 \cdot A^{-1} \cdot A^t + I_2 - 3 \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X &= 3 \cdot A^{-1} \cdot A^t + I_2 - 3 \cdot A^{-1} = 3 \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-16 & 2+4 \\ 10+20 & -4-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -21 & 6 \\ 30 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ 28 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}$

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.

a) Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?

b) Luis, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

Construyamos una tabla de contingencia que nos ayude a aclarar la situación planteada. El 75 % han visitado San Sebastián, el 60% han visitado Zaragoza y el 40% han visitado las dos ciudades.

	Han visitado San Sebastián	No han visitado San Sebastián	
Han visitado Zaragoza	40		60
No han visitado Zaragoza			
	75		100

Completamos la tabla.

	Han visitado San Sebastián	No han visitado San Sebastián	
Han visitado Zaragoza	40	20	60
No han visitado Zaragoza	35	5	40
	75	25	100

Respondemos a las preguntas.

- a) Hay 75 personas que han visitado San Sebastián y de ellas 40 han visitado Zaragoza. Aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P(\text{Haya visitado Zaragoza} / \text{Ha visitado San Sebastián}) = \frac{40}{75} = \boxed{0,533}$$

- b) De 100 personas solo 5 no han visitado ni Zaragoza ni San Sebastián. Aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P(\text{No haya visitado ninguna de las dos ciudades}) = \frac{5}{100} = 0,05$$

OPCIÓN B

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$ donde a es un cierto parámetro real.

- a) Determinar el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = \frac{x}{4} + 2018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a .
- b) Tomando en $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

Igual que A1.1

Pregunta B1.2. (0.5+ 1 +0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
- b) Determina dichos honorarios.
- c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

Igual que A1.2

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) En una fábrica de calzado de Amedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

- a) Si la media de la producción fuese de 1200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1255 pares de zapatos?
- b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media de la producción.
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Igual que A1.3

Pregunta B2.1. (1+1 puntos) Sean a y b dos parámetros reales. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} -ax^3 + 6bx^2 - 3x, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 1 \\ -ax^3 - 4bx^2 - 3x, & x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función dada?

b) Tomando $a = 1$ y $b = -1$, calcular la integral definida $\int_0^3 f(x)dx$.

a) Para que sea continua la función debe de serlo en $x = -1$ y en $x = 1$.

Para que sea continua en $x = -1$ debe cumplirse:

- Existe $f(-1) = -a + b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -ax^3 + 6bx^2 - 3x = a + 6b + 3$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b$
- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow a + 6b + 3 = -a + b \Rightarrow 2a = -5b - 3$

Para que sea continua en $x = -1$ debe cumplirse $2a = -5b - 3$

Para que sea continua en $x = 1$ debe cumplirse:

- Existe $f(1) = a + b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -ax^3 - 4bx^2 - 3x = -a - 4b - 3$
- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow -a - 4b - 3 = a + b \Rightarrow 2a = -5b - 3$

Para que sea continua en $x = 1$ debe cumplirse $2a = -5b - 3$

Para que sea continua la función debe cumplirse $2a = -5b - 3$

b) Si $a = 1$ y $b = -1$ la función es continua, pues $2 \cdot 1 = -5(-1) - 3$, y la función es:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6x^2 - 3x, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 4x^2 - 3x, & x > 1 \end{cases}$$

Por el cambio de definición de la función la integral pedida la calculamos como la suma de dos integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^1 x - 1 dx + \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \\ &= \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right] - \left[\frac{0^2}{2} - 0 \right] + \left[-\frac{3^4}{4} + 4\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{1^4}{4} + 4\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} - 1 - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{23}{2} - \frac{80}{4} - \frac{4}{3} + 35 = -\frac{23}{2} - \frac{4}{3} + 15 = \boxed{\frac{13}{6}} \end{aligned}$$

Pregunta B2.2. (1+0.5+0.5 puntos) Sean

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \leq 6-y \end{cases},$$

las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

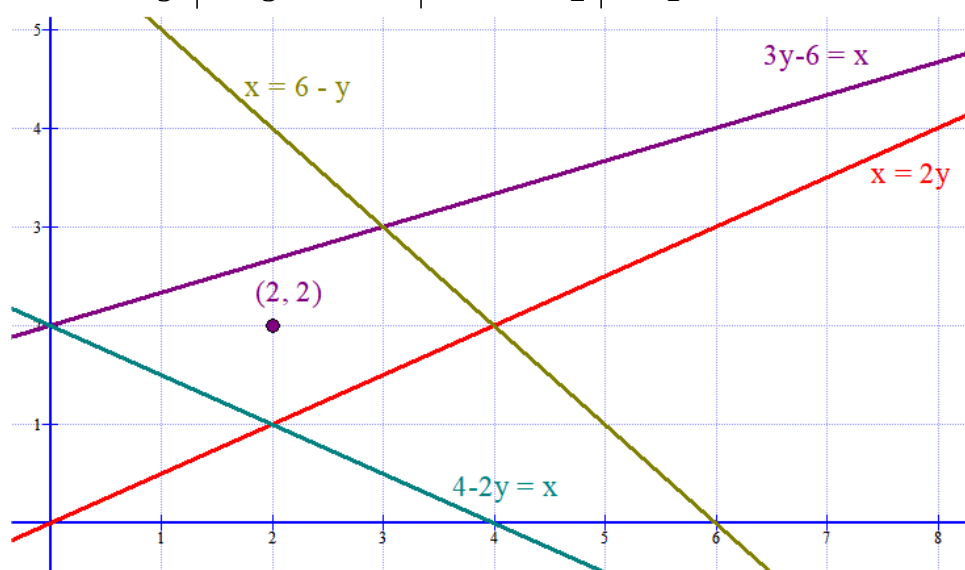
- a) Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.
- b) ¿Cuál es máximo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región factible?
- c) Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x, y) = ax + 3y$ en la región factible es quince, ¿cuál es el valor de a ?

a) Las restricciones las podemos separar en cuatro:

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \\ x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \\ x \leq 6-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-6 \leq x \\ x \leq 2y \\ 4-2y \leq x \\ x \leq 6-y \end{cases}$$

Dibujamos las rectas asociadas:

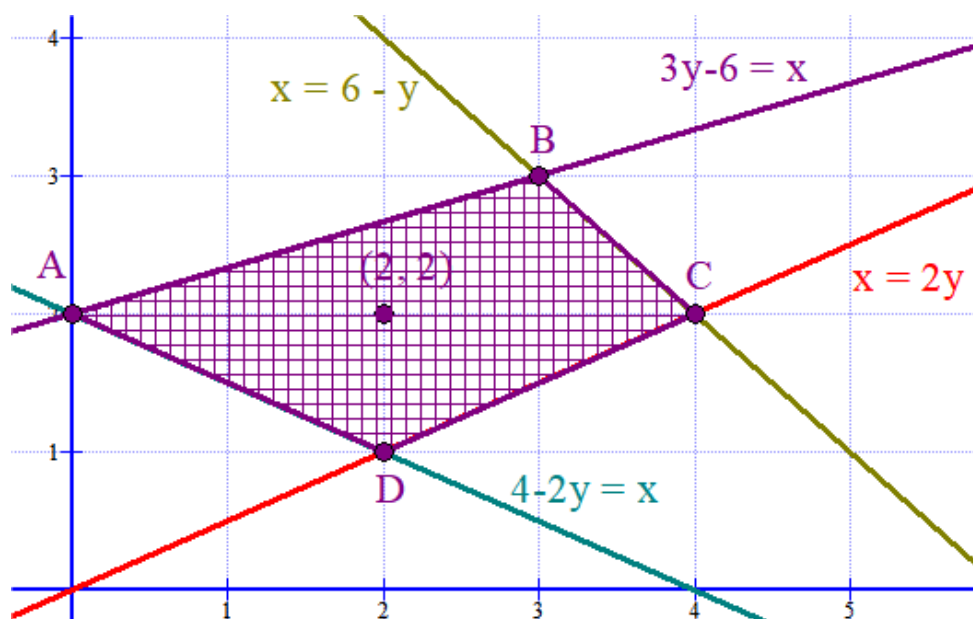
	x	$y = \frac{x+6}{3}$	x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = \frac{4-x}{2}$	x	$y = 6-x$
$3y-6 = x$	0	2	0	0	0	2	0	6
$x = 2y$	-6	0	2	1	4	0	6	0
$4-2y = x$	3	3	2	1	2	1	3	3
$x = 6-y$								



Compruebo que el punto $(2, 2)$ cumple todas las restricciones.

$$\begin{cases} 6-6 \leq 2 \\ 2 \leq 4 \\ 4-4 \leq 2 \\ 2 \leq 6-2 \end{cases}$$

Como cumple todas las restricciones la zona a la que el pertenece es la región factible. Es la zona rayada del siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices las obtenemos resolviendo los sistemas siguientes:

El punto A se obtiene

$$\begin{cases} 4 - 2y = x \\ 3y - 6 = x \end{cases} \Rightarrow 4 - 2y = 3y - 6 \Rightarrow 10 = 5y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4 - 4 = 0 \Rightarrow A(0, 2)$$

El punto B se obtiene

$$\begin{cases} 6 - y = x \\ 3y - 6 = x \end{cases} \Rightarrow 6 - y = 3y - 6 \Rightarrow 12 = 4y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6 - 3 = 3 \Rightarrow B(3, 3)$$

El punto C se obtiene

$$\begin{cases} 6 - y = x \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - y = 2y \Rightarrow 6 = 3y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 6 - 2 = 4 \Rightarrow C(4, 2)$$

El punto D se obtiene

$$\begin{cases} 4 - 2y = x \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow 4 - 2y = 2y \Rightarrow 4 = 4y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2 \Rightarrow D(2, 1)$$

b) Valoremos la función $f(x, y) = 3x + y$ en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 2) \rightarrow f(0, 2) = 2$$

$$B(3, 3) \rightarrow f(3, 3) = 9 + 3 = 12$$

$$C(4, 2) \rightarrow f(4, 2) = 12 + 2 = 14$$

$$D(2, 1) \rightarrow f(2, 1) = 6 + 1 = 7$$

El máximo se alcanza en el punto C(4, 2).

c) Valoremos la función $g(x, y) = ax + 3y$ en cada vértice de la región factible.

$$A(0, 2) \rightarrow g(0, 2) = 6$$

$$B(3, 3) \rightarrow g(3, 3) = 3a + 9$$

$$C(4,2) \rightarrow g(4,2) = 4a + 6$$

$$D(2,1) \rightarrow g(2,1) = 2a + 3$$

No es el punto A ya que el máximo es 15.

Si a es un valor positivo, el valor máximo de la función se alcanza en el punto B o en C, ya que $2a + 3$ es más pequeño que $3a + 9$ y $4a + 6$.

Si en el punto B se alcanza el valor máximo (15) tendríamos que $3a + 9 = 15 \rightarrow a = 2$. Entonces los valores serían:

$$A(2,0) \rightarrow g(2,0) = 2a = 4$$

$$B(3,3) \rightarrow g(3,3) = 3a + 9 = 6 + 9 = 15$$

$$C(4,2) \rightarrow g(4,2) = 4a + 6 = 8 + 6 = 14$$

$$D(2,1) \rightarrow g(2,1) = 2a + 3 = 4 + 3 = 7$$

Se cumpliría lo pedido.

Si en el punto C se alcanza el valor máximo (15) tendríamos que $4a + 6 = 15 \rightarrow a = 2,25$. Entonces los valores serían:

$$A(2,0) \rightarrow g(2,0) = 2a = 4,5$$

$$B(3,3) \rightarrow g(3,3) = 3a + 9 = 6,75 + 9 = 15,75$$

$$C(4,2) \rightarrow g(4,2) = 4a + 6 = 9 + 6 = 15$$

$$D(2,1) \rightarrow g(2,1) = 2a + 3 = 4,5 + 3 = 7,5$$

El punto B alcanza un valor más alto que el C. No se cumpliría lo pedido.

El máximo está en B. El valor de a es 2.

Pregunta B2.3. (1+1 puntos) En la Escuela Oficial de Idiomas de mi ciudad, hay tres aulas de primer curso de inglés. La distribución de chicos y chicas en cada aula es como se muestra en la tabla adjunta.

	Aula 1	Aula 2	Aula 3
Chicos	21	16	16
Chicas	18	16	24

- a) Determina la probabilidad de que al elegir un estudiante de primer curso sea chica.
 b) Si elegimos una chica de primer curso al azar, ¿a qué aula es más probable que pertenezca?

Completemos la tabla de datos con las sumas parciales y globales.

	Aula 1	Aula 2	Aula 3	
Chicos	21	16	16	53
Chicas	18	16	24	58
	39	32	40	111

- a) Hay 111 alumnos entre chicos y chicas. En total hay 58 chicas. Aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P(\text{Elegir chica}) = \frac{58}{111} = \boxed{0,522}$$

- b) Calculamos la probabilidad de que al elegir una chica esta sea de cada una de las aulas.

$$P(\text{Sea del aula 1} / \text{Es chica}) = \frac{18}{58} = 0,31$$

$$P(\text{Sea del aula 2} / \text{Es chica}) = \frac{16}{58} = 0,275$$

$$P(\text{Sea del aula 3} / \text{Es chica}) = \frac{24}{58} = 0,413$$

El valor 0.413 es el más alto. Es más probable que sea del aula 3

OTRA FORMA DE HACERLO

Hay 58 chicas en primer curso, de ellas 18 en aula 1, 16 en aula 2 y 24 en aula 3. Es más probable que sea del aula 3, ya que esa aula tiene más chicas.

EBAU Julio 2017

	UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) Curso Académico: 2016 - 2017 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS
---	------------------------------------	--

INSTRUCCIONES

- a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A / OPCIÓN B).
b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
b) Determina los extremos relativos de la función.
c) Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
b) Calcular la solución para $a = 1$.

Pregunta A1.3. (1+1 puntos) Durante la pasada Semana Santa el 40% de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60% de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40% de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

- a) Calcula el porcentaje de turistas nacionales que visitó una bodega.
b) Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.

Parte A2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta A2.1. (1+1 puntos) Cierta empresa fabrica puertas y ventanas. Las instalaciones de la empresa imponen las siguientes restricciones sobre la producción diaria:

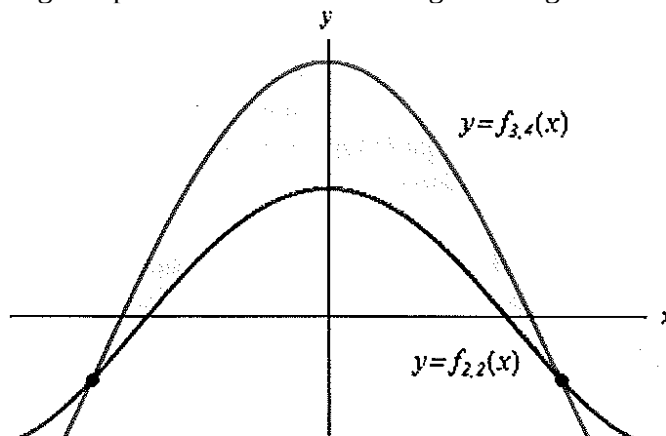
1. El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble.
2. La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades.

Con estos datos, se pide:

- a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.
- b) Si precio de venta de las puertas es de cien euros la unidad y el de las ventanas es de ciento veinte euros, ¿cómo debe ser la producción de la empresa para maximizar los ingresos diarios?

Pregunta A2.2. (1+ 1 puntos) Sea la función $f_{a,b}(x) = x^2(x^2 - 2a) + b$, donde a y b son parámetros reales.

- a) Consideramos las curvas $y = f_{3,4}(x)$ e $y = f_{2,2}(x)$. Determinar el área de la región limitada por ambas curvas. Dicha región aparece sombreada en la siguiente figura.



- b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f_{8,0}(x)}{x - 4}$,

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) Andoni, el cocinero jefe del afamado restaurante *El Caracol Vertiginoso*, tiene a su disposición diez botellas de aceite indistinguibles en una estantería. Hay dos botellas que contienen aceite elaborado con aceitunas de la variedad arbequina, tres con aceite hecho a partir de la variedad picual y cinco cuyo aceite se ha obtenido mezclando aceitunas de distintas variedades. Esta mañana Andoni ha elaborado tres platos en cuya elaboración era necesaria aceite. Para hacer cada uno de ellos ha tomado una botella de la estantería de manera aleatoria e inmediatamente la ha devuelto.

- a) Determinar la probabilidad de que en algún plato haya usado aceite elaborado con aceitunas de la variedad picual.
- b) Determinar la probabilidad de que para elaborar los tres platos haya usado los tres tipos de aceite disponibles.

OPCIÓN B

Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta B1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

- Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
- Determina los extremos relativos de la función.
- Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
- Calcular la solución para $a = 1$.

Pregunta B1.3. (1+1 puntos) Durante la pasada Semana Santa el 40% de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60% de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40% de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

- Calcula el porcentaje de turistas nacionales que visitó una bodega.
- Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.

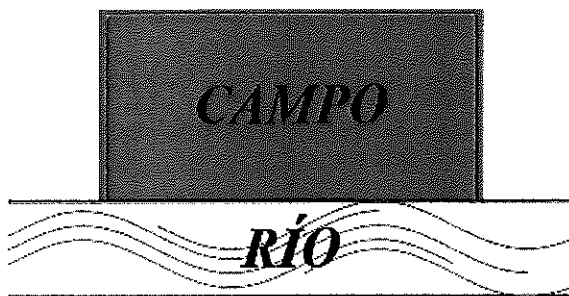
Parte B2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5-3a & 2-a \\ 2(2-a) & 1-a \end{pmatrix}.$$

- Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
 - Tomando $a = -2$, determinar una matriz X tal que $4 \cdot X \cdot A = A^t + A^2$.
- (Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A .)

Pregunta B2.2. (1.5+0.5 puntos) Deseamos construir un campo rectangular que debe tener un área de 3200 m^2 . Dicho campo está ubicado a lo largo de un río y no es necesario cercar el lado situado a lo largo de la orilla. (Los lados que se deben cercar aparecen en rojo en la figura adjunta.)



- a) ¿Cuáles habrán de ser las dimensiones del campo para que se necesite el mínimo posible de metros de cerca?
- b) Determinar el coste de construcción del cercado si cada metro construido perpendicular al río tiene un coste de quinientos euros y cada metro paralelo al río cuesta cuatrocientos euros.

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos) Se conoce como grado de la uva al vendimiar el contenido en azúcares de la misma. Durante la última vendimia en Rioja Alta se ha detectado que el grado de la uva de los viñedos de la zona sigue una distribución normal con una desviación típica de 1.5 grados.

- a) Si al tomar una muestra de 64 viñedos se ha obtenido una media de 13 grados, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media del grado alcohólico,
- b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra cuyo intervalo de confianza al 90% para la media del grado alcohólico ha sido (12.225,12.775)?

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

Pregunta A1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
 b) Determina los extremos relativos de la función.
 c) Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

a) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Dividimos la recta real en tres partes: antes de -1 , entre -1 y 2 y después de 2 .

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

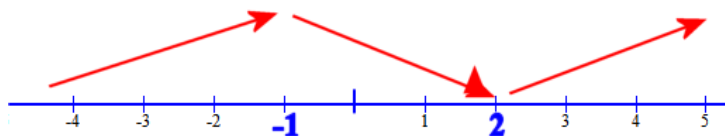
$$f'(-2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12 = 24 + 12 - 12 = 24 > 0. \text{ La función crece.}$$

- En $(-1, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -12 < 0$. La función decrece.

- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = 6(3)^2 - 6(3) - 12 = 54 - 18 - 12 = 24 > 0. \text{ La función crece.}$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$.

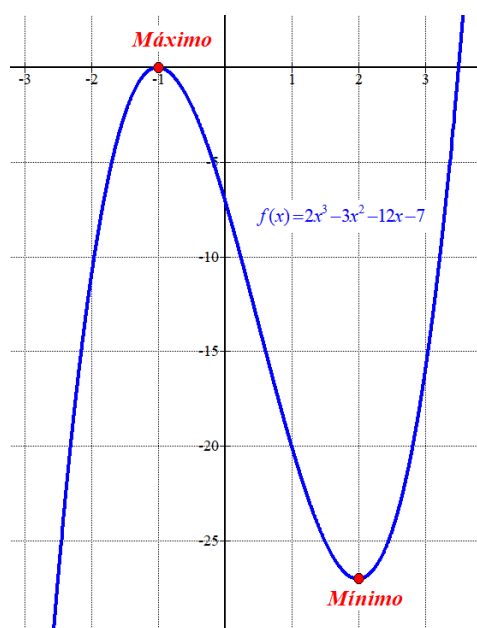
- b) Observando el esquema de crecimiento y decrecimiento se aprecia que tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(-1) = -2 - 3 + 12 - 7 = 0$ y

$f(2) = 16 - 12 - 24 - 7 = -27$ el máximo relativo es el punto $(-1, 0)$ y el mínimo relativo es el punto $(2, -27)$

- c) Hacemos una tabla de valores.

x	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$
-2	$-16 - 12 + 24 - 7 = -11$
-1	$-2 - 3 + 12 - 7 = 0$ "máximo"
0	-7
2	$16 - 12 - 24 - 7 = -27$ "mínimo"



Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
b) Calcular la solución para $a = 1$.

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 2a - (2a^2 + 1 + a) = a^2 + 1 + 2a - 2a^2 - 1 - a = -a^2 + a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + a = 0 \Rightarrow a(-a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \\ -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos, los analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda $\begin{cases} y = 1, \\ x + z = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Es tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} y = 1, \\ x + z = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1, \\ x + 1 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1, \\ x + z = -1 \end{cases}$$

La expresión $x + z$ no puede tomar dos valores distintos. Este sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + y + z = 1 \\ -x - y - 2z = -1 \\ \hline -z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$$

El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 0$.

Conclusión: El sistema solo es compatible y determinado para los valores de a distintos de 0 y de 1.

- b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y se ha resuelto en el caso 3 del apartado anterior. La solución es $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 0$.

Pregunta A1.3. (1+1 puntos) Durante la pasada Semana Santa el 40% de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60% de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40% de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

- a) Calcula el porcentaje de turistas nacionales que visitó una bodega.
 b) Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.

- a) De los catalanes, que son el 40% de los visitantes, el 60% visitó una bodega, esto es el 60% del 40%.

$$\frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{2400}{10000} = \frac{24}{100} = 24\% \text{ del total de visitantes.}$$

Del resto de comunidades visitan una bodega el 40%, esto es el 40% del 60%.

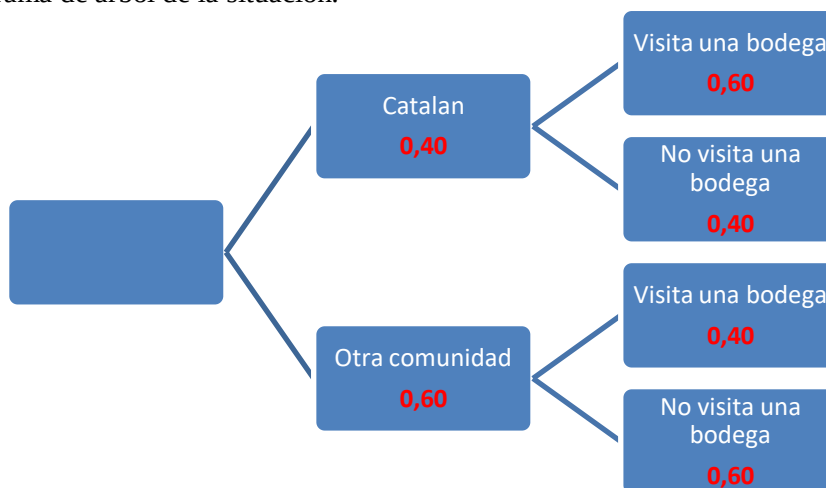
$$\frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{2400}{10000} = \frac{24}{100} = 24\% \text{ del total de visitantes}$$

Lo sumamos y obtenemos que el 48% de los turistas visitan una bodega.

- b) Si no visitó una bodega, fue parte del 52% del total que no lo hizo. Como el 40% de los catalanes (40% del total) no visitaron una bodega, es decir el $40 \cdot 40 = 16\%$ del total. La probabilidad es $16/52 = 0,307$.

OTRA FORMA DE HACERLO.

Hacemos un diagrama de árbol de la situación.



$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Visita una bodega}) &= P(\text{Es catalan})P(\text{Visita una bodega/Es catalan}) + \\ &+ P(\text{Es de otra comunidad})P(\text{Visita una bodega/Es de otra comunidad}) = \\ &= 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48 \end{aligned}$$

El porcentaje de turistas que visitaron una bodega es del 48%

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{Es catalan} / \text{No ha visitado una bodega}) &= \frac{P(\text{Es catalan y No ha visitado una bodega})}{P(\text{No ha visitado una bodega})} = \\ &= \frac{P(\text{Es catalan})P(\text{No ha visitado una bodega/Es catalan})}{1 - P(\text{Ha visitado una bodega})} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,4}{1 - 0,48} = \frac{0,16}{0,52} = \frac{16}{52} = \boxed{\frac{4}{13} = 0,307} \end{aligned}$$

Pregunta A2.1. (1+1 puntos) Cierta empresa fabrica puertas y ventanas. Las instalaciones de la empresa imponen las siguientes restricciones sobre la producción diaria:

1. El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble.
2. La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades.

Con estos datos, se pide:

- a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.
- b) Si el precio de venta de las puertas es de cien euros la unidad y el de las ventanas es de ciento veinte euros, ¿cómo debe ser la producción de la empresa para maximizar los ingresos diarios?

a) Llamamos x al número de puertas a fabricar e y al número de ventanas.

1. El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble. $\rightarrow x \geq y \quad x \leq 2y$

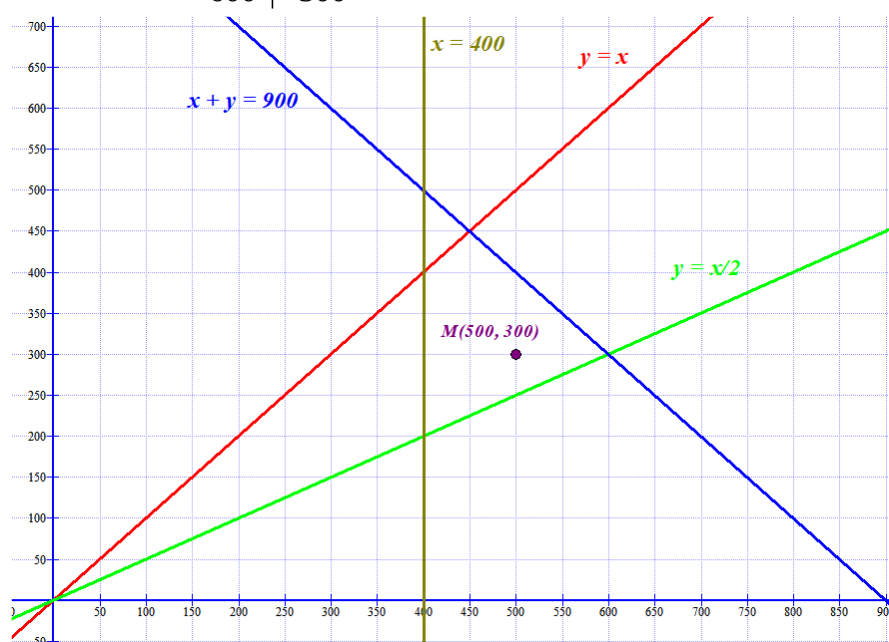
2. La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades. $\rightarrow x + y \leq 900 \quad x \geq 400$

Ponemos todas estas restricciones juntas, añadiendo que el número de ventanas debe ser positivo.

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x \geq y \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 900 \\ x \geq 400 \end{array} \right\}$$

Para dibujar esta región del plano, dibujo primero las rectas asociadas a cada restricción.

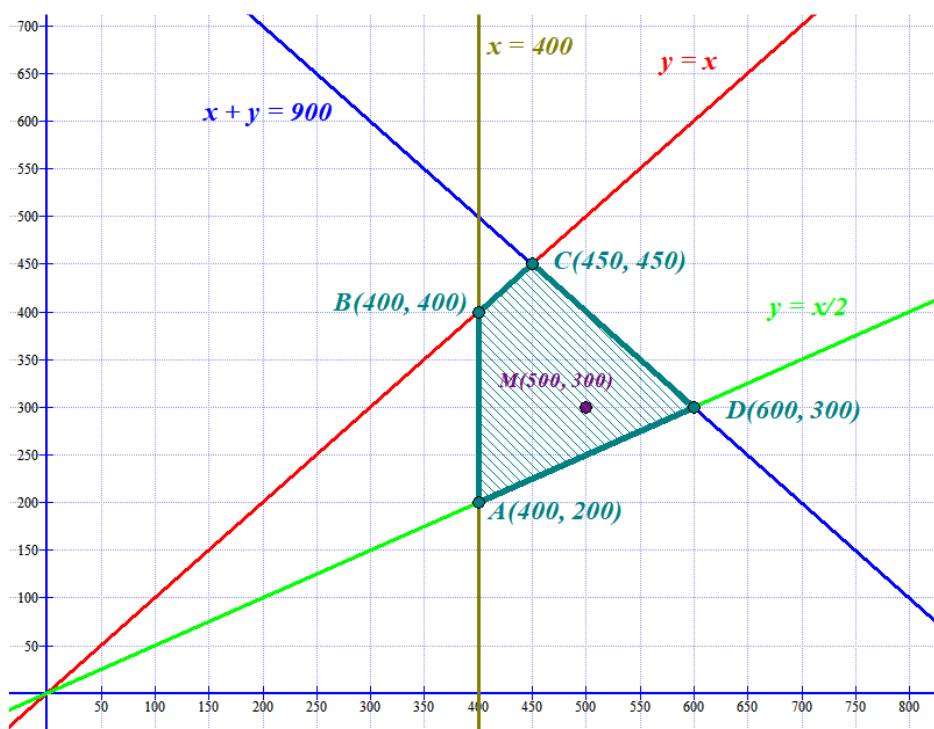
x	$y = x$	x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = 900 - x$	$x = 400$	y
100	100	100	50	100	800	400	100
400	400	400	200	450	450	400	200
450	450	600	300	600	300	400	400



Veamos si el punto $M(500, 300)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 300 \geq 0 \\ 500 \geq 300 \\ 500 \leq 600 \\ 500 + 300 \leq 900 \\ 500 \geq 400 \end{array} \right\} \text{Cumple todas las restricciones.}$$

La región factible es la limitada por las rectas dibujadas que contiene al punto $M(500, 300)$.



b) Deseamos maximizar los ingresos $f(x, y) = 100x + 120y$.

Determinamos las coordenadas de los vértices resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left. \begin{array}{l} x = 400 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 400 = 2y \Rightarrow y = 200 \Rightarrow \boxed{A(400, 200)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 400 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow 400 = y \Rightarrow \boxed{B(400, 400)}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x + y = 900 \end{array} \right\} \Rightarrow x + x = 900 \Rightarrow x = 450 \Rightarrow \boxed{C(450, 450)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + y = 900 \Rightarrow 3y = 900 \Rightarrow y = 300 \Rightarrow x = 600 \Rightarrow \boxed{D(600, 300)}$$

El máximo se encuentra en uno de los vértices de la región factible, valoramos los ingresos en cada uno de ellos y determinamos cual nos proporciona los máximos ingresos.

$$A(400, 200) \rightarrow f(400, 200) = 40000 + 24000 = 64000$$

$$B(400, 400) \rightarrow f(400, 400) = 40000 + 48000 = 88000$$

$$C(450, 450) \rightarrow f(450, 450) = 45000 + 54000 = \mathbf{99000}$$

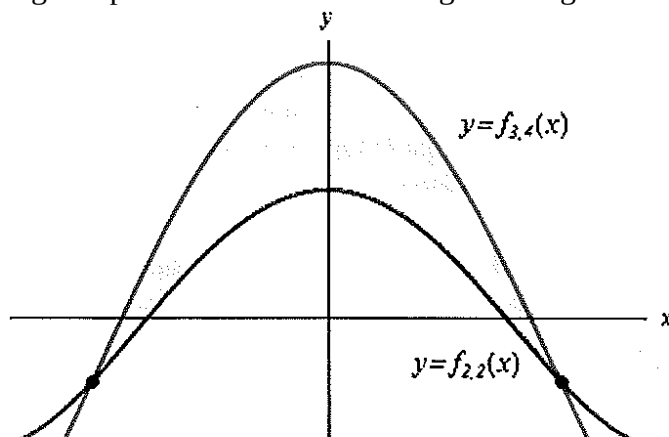
$$D(600, 300) \rightarrow f(600, 300) = 60000 + 36000 = 96000$$

El máximo ingreso se produce en el punto $C(450, 450)$.

Produciendo 450 puertas y 450 ventanas se obtienen unos ingresos máximos de 99000 €.

Pregunta A2.2. (1+ 1 puntos) Sea la función $f_{a,b}(x) = x^2(x^2 - 2a) + b$, donde a y b son parámetros reales.

a) Consideramos las curvas $y = f_{3,4}(x)$ e $y = f_{2,2}(x)$. Determinar el área de la región limitada por ambas curvas. Dicha región aparece sombreada en la siguiente figura.



b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f_{8,0}(x)}{x-4}$,

a) Las funciones quedan:

$$y = f_{3,4}(x) = x^2(x^2 - 6) + 4 = x^4 - 6x^2 + 4$$

$$y = f_{2,2}(x) = x^2(x^2 - 4) + 2 = x^4 - 4x^2 + 2$$

Debemos de encontrar los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = f_{3,4}(x) = x^4 - 6x^2 + 4 \\ y = f_{2,2}(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 2 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Según el dibujo la función $y = f_{3,4}(x)$ toma valores superiores a $y = f_{2,2}(x)$.

El área de la región pedida es la integral definida siguiente:

$$\int_{-1}^1 f_{3,4}(x) - f_{2,2}(x) dx = \int_{-1}^1 x^4 - 6x^2 + 4 - (x^4 - 4x^2 + 2) dx =$$

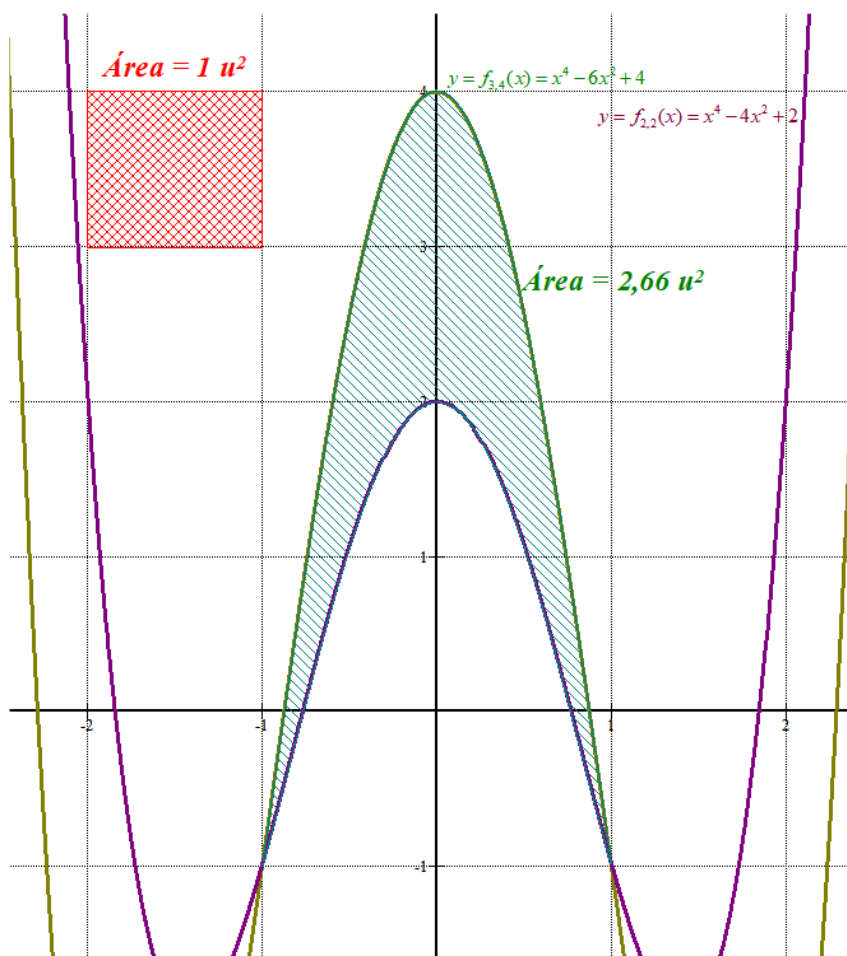
$$= \int_{-1}^1 x^4 - 6x^2 + 4 - x^4 + 4x^2 - 2 dx = \int_{-1}^1 -2x^2 + 2 dx =$$

$$= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left[-2 \frac{1}{3} + 2 \right] - \left[-2 \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right] =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3} = 2,66 u^2}$$

LO QUE SIGUE NO ES NECESARIO REALIZARLO.

El área obtenida con la integral es coherente con la que se observa en la gráfica inferior.



b) Calculamos el valor del límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f_{8,0}(x)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2(x^2-16)}{x-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \dots$$

Factorizo el numerador

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4$$

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$$

Seguimos calculando el límite

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 \cancel{(x-4)} (x+4)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 (x+4) = \boxed{128}$$

Pregunta A2.3. (1+1 puntos) Andoni, el cocinero jefe del afamado restaurante *El Caracol Vertiginoso*, tiene a su disposición diez botellas de aceite indistinguibles en una estantería. Hay dos botellas que contienen aceite elaborado con aceitunas de la variedad arbequina, tres con aceite hecho a partir de la variedad picual y cinco cuyo aceite se ha obtenido mezclando aceitunas de distintas variedades. Esta mañana Andoni ha elaborado tres platos en cuya elaboración era necesaria aceite. Para hacer cada uno de ellos ha tomado una botella de la estantería de manera aleatoria e inmediatamente la ha devuelto.

a) Determinar la probabilidad de que en algún plato haya usado aceite elaborado con aceitunas de la variedad picual.

b) Determinar la probabilidad de que para elaborar los tres platos haya usado los tres tipos de aceite disponibles.

En este ejercicio en la elaboración de los tres platos la probabilidad de utilizar un tipo de aceite es independiente del plato (1º, 2º o 3º) y no depende de lo que haya pasado en el anterior.

Las probabilidades de utilizar (en cualquiera de los platos) los tipos de aceite son:

$$P(\text{Utilizar arbequina}) = \frac{2}{10} \quad P(\text{No utilizar arbequina}) = \frac{8}{10}$$

$$P(\text{Utilizar picual}) = \frac{3}{10} \quad P(\text{No utilizar picual}) = \frac{7}{10}$$

$$P(\text{Utilizar mezcla}) = \frac{5}{10} \quad P(\text{No utilizar mezcla}) = \frac{5}{10}$$

- a) El suceso puede ocurrir de muy variadas maneras por lo que resolvemos la probabilidad usando el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(\text{En algún plato ha utilizado aceite de la variedad picual}) &= \\ &= 1 - P(\text{En ningún plato utiliza el aceite de la variedad picual}) = \\ &= 1 - P(\text{No picual en plato 1})P(\text{No picual en plato 2})P(\text{No picual en plato 3}) = \\ &= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 1 - \frac{343}{1000} = \frac{657}{1000} = \boxed{0,657} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\text{Utilice distinto aceite en los 3 platos}) &= \\ &= P(\text{Utilice arbequina en plato 1})P(\text{Utilice picual en plato 2})P(\text{Utilice mezcla en plato 3}) + \\ &+ P(\text{Utilice arbequina en plato 1})P(\text{Utilice picual en plato 3})P(\text{Utilice mezcla en plato 2}) + \\ &+ P(\text{Utilice arbequina en plato 2})P(\text{Utilice picual en plato 1})P(\text{Utilice mezcla en plato 3}) + \\ &+ P(\text{Utilice arbequina en plato 2})P(\text{Utilice picual en plato 3})P(\text{Utilice mezcla en plato 1}) + \\ &+ P(\text{Utilice arbequina en plato 3})P(\text{Utilice picual en plato 1})P(\text{Utilice mezcla en plato 2}) + \\ &+ P(\text{Utilice arbequina en plato 3})P(\text{Utilice picual en plato 2})P(\text{Utilice mezcla en plato 1}) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \\ &= 6 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{180}{1000} = \boxed{\frac{18}{100}} = 0,18 \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Utilizamos combinatoria. Como los sucesos son independientes podemos utilizar la regla de Laplace para calcular las probabilidades.

¿De cuantas formas distintas se pueden combinar los distintos aceites en los 3 platos?

Son variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

- a) De todas estas combinaciones de aceites, ¿Cuántas han usado el aceite picual en alguno de los 3 platos? Como hay muchas formas de hacerlo, contamos las combinaciones que no tienen aceite picual en ninguno de los platos, que son variaciones con repetición de 7 elementos (quitamos la picual) tomados de 3 en 3.

$$VR_{7,3} = 7^3 = 343$$

Las combinaciones que tienen la picual en alguno de sus platos son $1000 - 343 = 657$.

$$P(\text{En algún plato ha utilizado aceite de la variedad picual}) = \frac{657}{1000} = \boxed{0,657}$$

- b) De todas las combinaciones, ¿Cuántas han utilizado aceite distinto en cada plato?

Llamemos P a la botella de picual (hay 3), A a la botella de arbequina (hay 2) y M a la botella de mezcla (hay 5).

A la combinación picual el plato 1, arbequina el 2 y Mezcla 3 lo llamaremos PAM. Esta combinación es posible $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ formas distintas pues hay 3 botellas de picual, 2 de arbequina y 5 de mezcla. Estas 30 formas distintas se mantiene aunque cambies el orden de uso del tipo de aceite en los platos.

Hagamos lo mismo con los distintos órdenes de uso de los aceites.

PAM $\rightarrow$ 30 combinaciones de las 1000 posibles.

PMA $\rightarrow$ 30 combinaciones

APM $\rightarrow$ 30 combinaciones

AMP $\rightarrow$ 30 combinaciones

MAP $\rightarrow$ 30 combinaciones

MPA $\rightarrow$ 30 combinaciones

En total son $6 \cdot 30 = 180$ combinaciones.

$$P(\text{Utilice distinto aceite en los 3 platos}) = \frac{180}{1000} = \boxed{0,18}$$

OPCIÓN B

Pregunta B1.1. (1+0.5+0.5 puntos) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

- a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.
- b) Determina los extremos relativos de la función.
- c) Utilizando la información de los apartados anteriores, haz una representación gráfica aproximada de la función.

Igual que el A1.1. Resuelto en la opción A

Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos) Sea a un parámetro real. Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
- b) Calcular la solución para $a = 1$.

Igual que el A1.2. Resuelto en la opción A

Pregunta B1.3. (1+1 puntos) Durante la pasada Semana Santa el 40% de los turistas nacionales que visitaron Logroño procedían de Cataluña. El 60% de los turistas catalanes visitó alguna bodega y el 40% de los turistas de otras comunidades también lo hizo.

- a) Calcula el porcentaje de turistas nacionales que visitó una bodega.
- b) Se sabe que un determinado turista no visitó una bodega, calcula la probabilidad de que fuese catalán.

Igual que el A1.3. Resuelto en la opción A

Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5-3a & 2-a \\ 2(2-a) & 1-a \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = -2$, determinar una matriz X tal que $4 \cdot X \cdot A = A^t + A^2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A .)

a) Para que exista la inversa debe de tener determinante no nulo.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 5-3a & 2-a \\ 2(2-a) & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-3a & 2-a \\ 4-2a & 1-a \end{vmatrix} = (5-3a)(1-a) - (2-a)(4-2a) = \\ &= 5 - 5a - 3a + 3a^2 - (8 + 2a^2 - 8a) = 5 - 5a - 3a + 3a^2 - 8 - 2a^2 + 8a = a^2 - 3 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Existe inversa de la matriz A cuando $a \neq \sqrt{3}$ y $a \neq -\sqrt{3}$.

b) Tomando $a = -2$, la matriz A es $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y tiene inversa, pues $-2 \neq \sqrt{3}$ y $-2 \neq -\sqrt{3}$.

Calculamos su inversa para utilizarla en la resolución de la ecuación matricial.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 33 - 32 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X en la ecuación planteada.

$$4 \cdot X \cdot A = A^t + A^2 \Rightarrow 4 \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = (A^t + A^2) \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot X = A^t \cdot A^{-1} + A^2 \cdot A^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{4} (A^t \cdot A^{-1} + A \cdot A \cdot A^{-1}) \Rightarrow X = \frac{1}{4} (A^t \cdot A^{-1} + A)$$

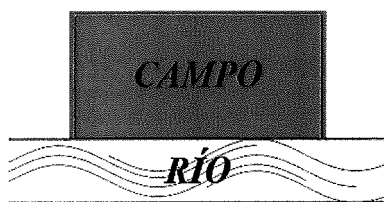
$$X = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 33-64 & -44+88 \\ 12-24 & -16+33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} -31 & 44 \\ -12 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

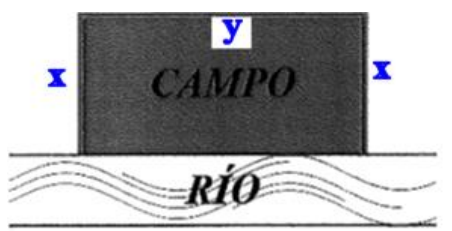
$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -20 & 48 \\ -4 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

Pregunta B2.2. (1.5+0.5 puntos) Deseamos construir un campo rectangular que debe tener un área de 3200 m^2 . Dicho campo está ubicado a lo largo de un río y no es necesario cercar el lado situado a lo largo de la orilla. (Los lados que se deben cercar aparecen en rojo en la figura adjunta.)



- a) ¿Cuáles habrán de ser las dimensiones del campo para que se necesite el mínimo posible de metros de cerca?
 b) Determinar el coste de construcción del cercado si cada metro construido perpendicular al río tiene un coste de quinientos euros y cada metro paralelo al río cuesta cuatrocientos euros.

- a) Llamemos x a los lados del campo perpendiculares al río e y al lado paralelo al río que debemos cercar.



La función que nos da los metros de cerca es $L(x, y) = 2x + y$. Como el área debe ser 3200 m^2 , entonces se cumple $xy = 3200 \Rightarrow y = \frac{3200}{x}$. Sustituyendo en la función $L(x, y) = 2x + y$:

$$L(x) = 2x + \frac{3200}{x} = \frac{2x^2 + 3200}{x}$$

Para encontrar su mínimo derivamos la función e igualamos a cero.

$$L(x) = \frac{2x^2 + 3200}{x} \Rightarrow L'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 + 3200) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 3200}{x^2} = \frac{2x^2 - 3200}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 3200}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 1600 = 0 \Rightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = \sqrt{1600} = 40$$

Se rechaza el valor negativo de la raíz pues se trata de un caso real y no tiene sentido el valor negativo de la longitud.

Utilizo la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$L''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2 - 3200) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cancel{4x^3} - \cancel{4x^3} + 6400x}{x^4} = \frac{6400x}{x^4} = \frac{6400}{x^3}$$

$$L''(40) = \frac{6400}{40^3} = 0,1 > 0$$

El valor de $x = 40 \text{ m}$ e $y = \frac{3200}{40} = 80 \text{ m}$ Es un mínimo en longitud de cerca.

- b) Si cada metro construido perpendicular al río (x) tiene un coste de 500 euros y cada metro paralelo al río (y) cuesta 400 euros el coste total es:

$$\text{Coste}(40, 80) = 2 \cdot 40 \cdot 500 + 80 \cdot 400 = 40000 + 32000 = \boxed{72000 \text{ €}}$$

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos) Se conoce como grado de la uva al vendimiar el contenido en azúcares de la misma. Durante la última vendimia en Rioja Alta se ha detectado que el grado de la uva de los viñedos de la zona sigue una distribución normal con una desviación típica de 1.5 grados.

a) Si al tomar una muestra de 64 viñedos se ha obtenido una media de 13 grados, determinar un intervalo de confianza al 85% para la media del grado alcohólico,

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra cuyo intervalo de confianza al 90% para la media del grado alcohólico ha sido (12.225,12.775)?

Llamamos X = Grado de la uva. $X = N(\mu, 1.5)$

a) $\bar{x} = 13$ grados; $n = 64$

Para un nivel de confianza del 85% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 0,15 \rightarrow \alpha/2 = 0,075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,925 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,44}$$

El error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,44 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{64}} = 0,27$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (13 - 0,27, 13 + 0,27)$$

El intervalo de confianza es (12.73, 13.27)

b) Con el nivel de confianza del 90% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,645}$$

Como el intervalo de confianza es (12.225, 12.775) y la media es el valor central

$$\bar{x} = \frac{12,225 + 12,775}{2} = 12,5 \text{ grados}$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{12,225 - 12,775}{2} = 0,275 \text{ grados}$$

Por la fórmula del error se cumple:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,275 = 1,645 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,645 \cdot \frac{1,5}{0,275} \Rightarrow n = \left(1,645 \cdot \frac{1,5}{0,275} \right)^2 = 80,5$$

La media es 12.5 grados y el tamaño mínimo de la muestra es de 81 viñedos.

EBAU Junio 2017

	UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) Curso Académico: 2016 - 2017 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS
---	------------------------------------	--

INSTRUCCIONES

- a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A / OPCIÓN B).
b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(1,1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando $a = 1/3$ y $b = -1/3$, calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de <i>snacks</i> vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

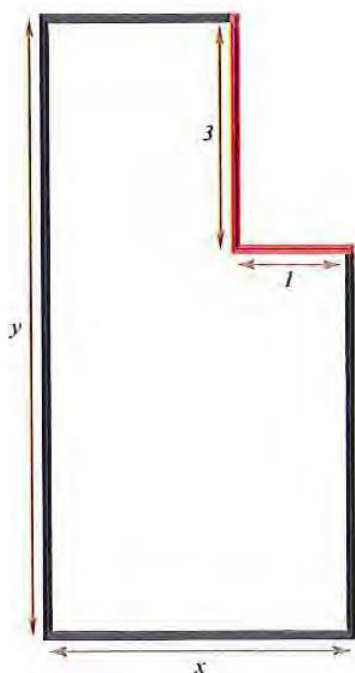
Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

- a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es $(156.4, 163.6)$?

(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte A2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos)



Sobre dos muros formando un ángulo recto de longitudes respectivas 1 y 3 metros (en rojo en la figura de la izquierda) vamos a construir una casa con una planta como la de la figura. Responde a las siguientes cuestiones.

- Si queremos que la planta tenga un área de 22 metros cuadrados, determinar los valores de x e y para que el número de metros de muro que debemos construir sea mínimo.
- Si deseamos cerrar la planta construyendo 36 metros de muro, determinar los valores de x e y para que el área de la planta sea máxima.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
- Tomando $a = -1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = A^t - A + 8 \cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) Nuestro amigo José, reciente ganador de un concurso local de tortillas, elabora la tortilla de su bar usando patatas y huevos. Un 80% de las tortillas las hace exclusivamente con patatas de Santo Domingo de la Calzada y el resto con patatas de otras zonas. Cuando emplea patatas de Santo Domingo, en el 60% de los casos pone únicamente huevos de gallinas camperas y en el 40% restante utiliza huevos de granja avícola. Cuando la patata no es de Santo Domingo invierte los porcentajes a la hora de añadir los huevos.

- Cuando tomamos un pincho en el bar de José, ¿cuál es la probabilidad de que esté hecho con huevos de gallina campera?
- Si la tortilla está hecha con huevos camperos, ¿cuál es la probabilidad de que lleve patatas de Santo Domingo?

OPCIÓN B**Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.****Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos)** Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(1,1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.b) Tomando $a = 1/3$ y $b = -1/3$, calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.**Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos)** En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de <i>snacks</i> vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.

b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es $(156.4, 163.6)$?(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)**Parte B2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.****Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos)** Sea la función $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

a) Determinar las asíntotas de la función dada.

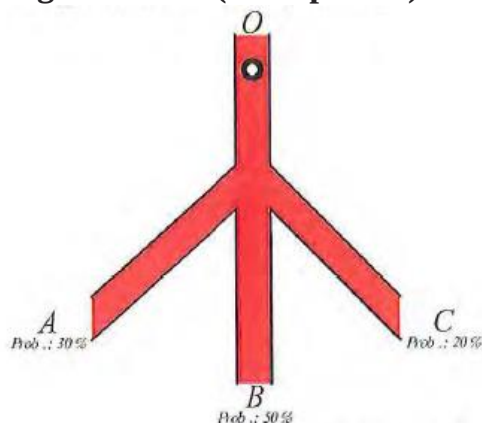
b) Calcular la integral definida $\int_0^2 (2-x) \cdot (f(x) - x) dx$ **Pregunta B2.2. (1 + 1 puntos)** Los productores de las películas de *James Bond* ya se han puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.

Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.
- b) Si cada escena de acción aporta 0.8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1.2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos)



En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por A con una probabilidad del 30%, por B con una probabilidad del 50% y por C con una probabilidad del 20%. Tras tres lanzamientos, calcular:

- a) la probabilidad de que la canica haya salido por C en algún lanzamiento;
- b) la probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(1,1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando $a = 1/3$ y $b = -1/3$, calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

a) Si la función $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$ pasa por $(1, 1)$ entonces $f(1) = 1$.

$$f(1) = 1 = 1^3 - 3a + 3a^2 + b \Rightarrow \boxed{3a^2 - 3a + b = 0}$$

Si la recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente 12, quiere decir que $f'(1) = 12$.

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$$

$$f'(1) = 12 \Rightarrow f'(1) = 12 = 3 - 6a + 3a^2 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Como a es un número real positivo rechazamos la solución $a = -1$.

Sustituimos en la ecuación $3a^2 - 3a + b = 0$ y determinamos el valor de b :

$$\left. \begin{array}{l} 3a^2 - 3a + b = 0 \\ a = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 27 - 9 + b = 0 \Rightarrow b = -18$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -18$.

b) Tomando $a = 1/3$ y $b = -1/3$ la función queda $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \right)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}$$

Factorizo numerador y denominador para resolver la indeterminación.

NUMERADOR $\rightarrow$ Hacemos Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow 3x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x-1)(3x^2 + 1)$$

DENOMINADOR $\rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(3x^2 + 1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{x+1} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuètes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de <i>snacks</i> vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
 b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

- a) Llamemos x al precio de un refresco, y al precio de un bocadillo, z al precio de una bolsa de snacks.

Los ingresos del primer quiosco son 210 € $\rightarrow 20x + 40y + 20z = 210$

Los ingresos del segundo quiosco son 131 € $\rightarrow 12x + 25y + 13z = 131$

Los ingresos del tercer quiosco son 178 € $\rightarrow 15x + 32y + 24z = 178$

Si juntamos las tres ecuaciones obtenemos un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 40y + 20z = 210 \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ 15x + 32y + 24z = 178 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 2z = 21 \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ 15x + 32y + 24z = 178 \end{array} \right\}$$

- b) Resolvamos el sistema planteado aplicando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 2z = 21 \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ 15x + 32y + 24z = 178 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 10,5 \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ 15x + 32y + 24z = 178 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 12 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ -12x - 24y - 12z = -126 \\ \hline y + z = 5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 15 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 15x + 32y + 24z = 178 \\ -15x - 30y - 15z = -157,5 \\ \hline 2y + 9z = 20,5 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 10,5 \\ y + z = 5 \\ 2y + 9z = 20,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 2y + 9z = 20,5 \\ -2y - 2z = -10 \\ \hline 7z = 10,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 10,5 \\ y + z = 5 \\ 7z = 10,5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{10,5}{7} = 1,5} \Rightarrow y + 1,5 = 5 \Rightarrow \boxed{y = 3,5} \Rightarrow x + 7 + 1,5 = 10,5 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

El precio del refresco es 2 €, el del bocadillo es 3,5 € y la bolsa de snacks es 1,5 €.

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de un muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?

(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Llamemos X = Peso de las peras de un agricultor. $X = N(\mu, 25)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 150 \text{ g}$ y el tamaño de la muestra es $n = 121$.

Con un nivel de confianza del 90% hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,645}$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{25}{\sqrt{121}} = 3.739$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (150 - 3.739, 150 + 3.739)$$

El intervalo de confianza es (146.261, 153.739)

b) Para un nivel de confianza del 85% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 0,15 \rightarrow \alpha/2 = 0,075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,925 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,44}$$

Como el intervalo de confianza es (156.4, 163.6) y la media es el valor central

$$\bar{x} = \frac{156,4 + 163,6}{2} = 160 \text{ gramos}$$

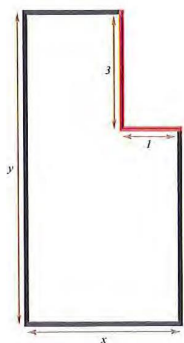
Y el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{163,6 - 156,4}{2} = 3,6 \text{ gramos}$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3,6 = 1,44 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,44 \cdot \frac{25}{3,6} \Rightarrow n = \left(1,44 \cdot \frac{25}{3,6}\right)^2 = 100$$

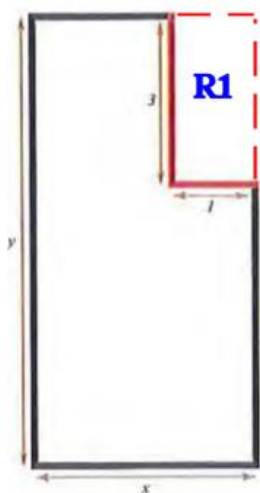
La media es 160 gramos y el tamaño de la muestra es de 100 peras.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos)

Sobre dos muros formando un ángulo recto de longitudes respectivas 1 y 3 metros (en rojo en la figura de la izquierda) vamos a construir una casa con una planta como la de la figura. Responde a las siguientes cuestiones.

- a) Si queremos que la planta tenga un área de 22 metros cuadrados, determinar los valores de x e y para que el número de metros de muro que debemos construir sea mínimo.
 b) Si deseamos cerrar la planta construyendo 36 metros de muro, determinar los valores de x e y para que el área de la planta sea máxima.

- a) El área de la planta se puede calcular como el área del rectángulo de lados x e y (rectángulo completo) menos el área del rectángulo rojo (R1) de lados l y 3 . Ver figura izquierda.

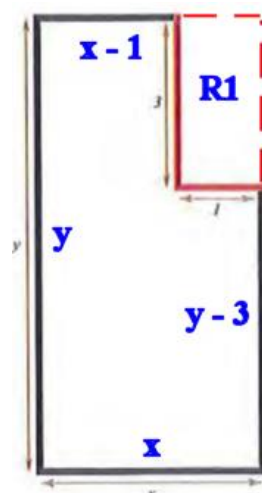


$$\text{Área}(x, y) = xy - 3 \cdot 1 = xy - 3.$$

Como debe ser un área de $22 \text{ m}^2 \rightarrow$

$$\text{Área}(x, y) = xy - 3 = 22 \Rightarrow xy = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{x}$$

Queremos minimizar la longitud del muro. Esta longitud es la suma de los lados de la figura que son negros y cuyo valor indico en azul en la figura de la derecha.



$$\left. \begin{array}{l} L(x, y) = x + y + y - 3 + x - 1 = 2x + 2y - 4 \\ y = \frac{25}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow L(x) = 2x + 2\frac{25}{x} - 4 = 2x + \frac{50}{x} - 4$$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero.

$$L(x) = 2x + \frac{50}{x} - 4 \Rightarrow L'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{50}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

Rechazamos el valor -5 pues carece de sentido al ser una medida de longitud.

Vemos si es un mínimo o no sustituyendo en la derivada segunda.

$$L'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} \Rightarrow L''(x) = \frac{100}{x^3}$$

$$L''(5) = \frac{100}{125} > 0$$

Para $x = 5$ el muro tendrá una longitud mínima.

Los valores buscados son $x = 5$ metros e $y = \frac{25}{5} = 5$ metros

- b) El área de la planta es $\text{Área}(x, y) = xy - 3$ y la longitud de muro es $L(x, y) = 2x + 2y - 4$.

La longitud del muro debe ser 36, por lo que:

$$L(x, y) = 2x + 2y - 4 = 36 \Rightarrow 2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$$

Sustituimos en la expresión del área $\text{Área}(x, y) = xy - 3 = x(20 - x) - 3 = -x^2 + 20x - 3$

Nos queda la función área solo dependiente del valor de “x”.

Derivamos la función Área en busca de sus posibles máximos.

$$\text{Área}(x) = -x^2 + 20x - 3 \Rightarrow \text{Área}'(x) = -2x + 20$$

$$\text{Área}'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 20 = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

Calculamos su segunda derivada, sustituimos el valor $x = 10$ y comprobamos si es un máximo.

$$\text{Área}'(x) = -2x + 20 \Rightarrow \text{Área}''(x) = -2 \Rightarrow \text{Área}''(10) = -2 < 0$$

En $x = 10$ hay un máximo.

El área es máxima para $x = 10$ e $y = 20 - 10 = 10$.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = -1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = A^t - A + 8 \cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

a) Calculamos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{pmatrix}$ y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{vmatrix} = 2a-5-(a-2)(4-a) = 2a-5-4a+a^2+8-2a = a^2-4a+3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Existe la matriz inversa de A para todos los valores de a que no anulen el determinante, es decir, para todo valor de a distinto de 1 y 3.

b) Para $a = -1$ la matriz A tiene inversa.

Esta matriz queda $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $|A| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7+15=8$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{8} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación la matriz X , multiplicando por la inversa de A por la izquierda.

$$A \cdot X = A^t - A + 8 \cdot I_2 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^t - A + 8 \cdot I_2) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot A^t - A^{-1} \cdot A + 8 \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot A^t - I_2 + 8 \cdot A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices y hacemos las operaciones indicadas.

$$X = A^{-1} \cdot A^t - I_2 + 8 \cdot A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 8 \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ 56 & -32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

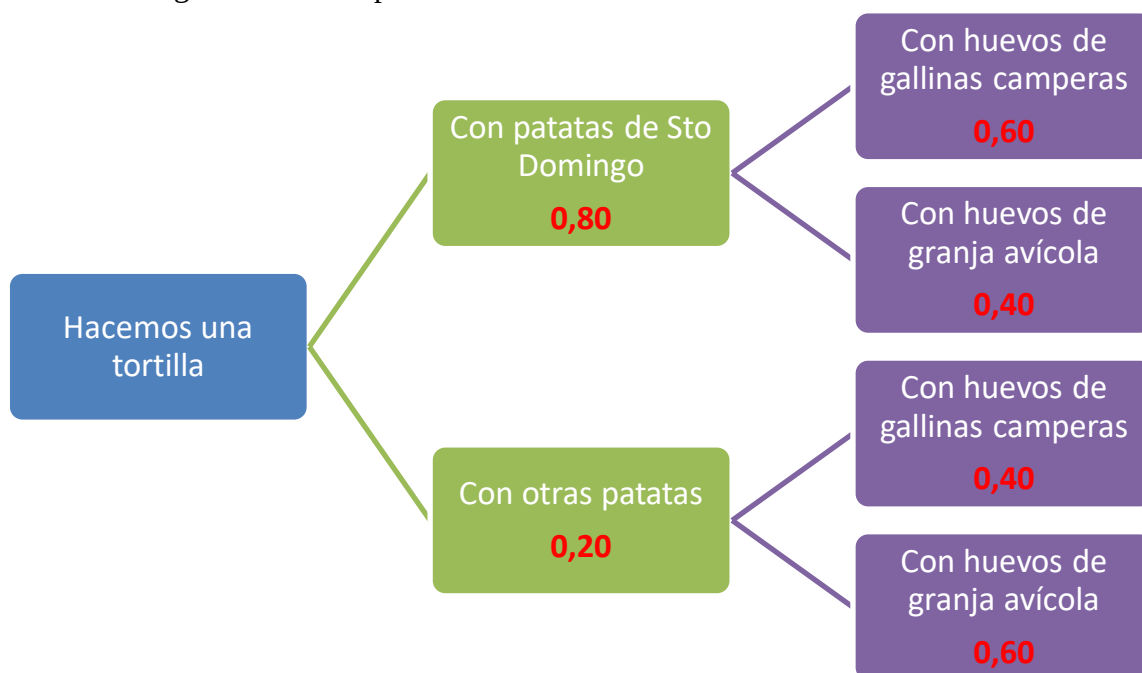
$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$.

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) Nuestro amigo José, reciente ganador de un concurso local de tortillas, elabora la tortilla de su bar usando patatas y huevos. Un 80% de las tortillas las hace exclusivamente con patatas de Santo Domingo de la Calzada y el resto con patatas de otras zonas. Cuando emplea patatas de Santo Domingo, en el 60% de los casos pone únicamente huevos de gallinas camperas y en el 40% restante utiliza huevos de granja avícola. Cuando la patata no es de Santo Domingo invierte los porcentajes a la hora de añadir los huevos.

- a) Cuando tomamos un pincho en el bar de José, ¿cuál es la probabilidad de que esté hecho con huevos de gallina campera?
- b) Si la tortilla está hecha con huevos camperos, ¿cuál es la probabilidad de que lleve patatas de Santo Domingo?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Con huevos de gallina campera}) &= \\
 &= P(\text{Con patatas de Sto Domingo})P(\text{Con huevos camperos} / \text{Con patatas de Sto Domingo}) + \\
 &+ P(\text{Con otras patatas})P(\text{Con huevos de gallina campera} / \text{Con otras patatas}) = \\
 &= 0,80 \cdot 0,60 + 0,20 \cdot 0,40 = 0,48 + 0,08 = \boxed{0,56}
 \end{aligned}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Con patatas de Sto Domingo} / \text{Con huevos camperos}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Con patatas de Sto Domingo y Con huevos camperos})}{P(\text{Con huevos camperos})} = \\
 &= \frac{P(\text{Con patatas de Sto Domingo})P(\text{Con huevos camperos} / \text{Con patatas de Sto Domingo})}{P(\text{Con huevos camperos})} = \\
 &= \frac{0,80 \cdot 0,60}{0,56} = \frac{0,48}{0,56} = \frac{48}{56} = \boxed{\frac{6}{7} = 0,857}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(1,1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando $a = 1/3$ y $b = -1/3$, calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

Igual que el ejercicio A1.1. Hecho en la opción A

Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de <i>snacks</i> vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.

b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Igual que el ejercicio A1.2. Hecho en la opción A

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.

a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.

b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de una muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es $(156.4, 163.6)$?

(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Igual que el ejercicio A1.3. Hecho en la opción A

Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

a) Determinar las asíntotas de la función dada.

b) Calcular la integral definida $\int_0^2 (2-x) \cdot (f(x) - x) dx$

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x}{2-x}$ son todos los reales menos los que anulan el denominador. Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$

- Asíntota vertical. $x = a$

La asíntota vertical es $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2-x} = \frac{2}{0} = \infty$$

- Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -1 = -1$$

La asíntota horizontal es $y = -1$

- Asíntota oblicua. $y = mx + n$. No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^2 (2-x) \cdot (f(x) - x) dx = \int_0^2 (2-x) \cdot \left(\frac{x}{2-x} - x \right) dx = \int_0^2 \cancel{(2-x)} \cdot \left(\frac{x - 2x + x^2}{\cancel{2-x}} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 -x + x^2 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[-\frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} \right] = -2 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Pregunta B2.2. (1 + 1 puntos) Los productores de las películas de *James Bond* ya se han puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.

Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.
- b) Si cada escena de acción aporta 0.8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1.2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

- a) Es un problema de programación lineal en el que las variables son x = número de persecuciones e y = número de escenas de acción.

Expresemos las restricciones en inecuaciones.

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción $\rightarrow$
 $x \geq 1 \quad y \geq 2$
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción
 $\rightarrow x \leq 2y$
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve $\rightarrow$
 $x + y \leq 9$

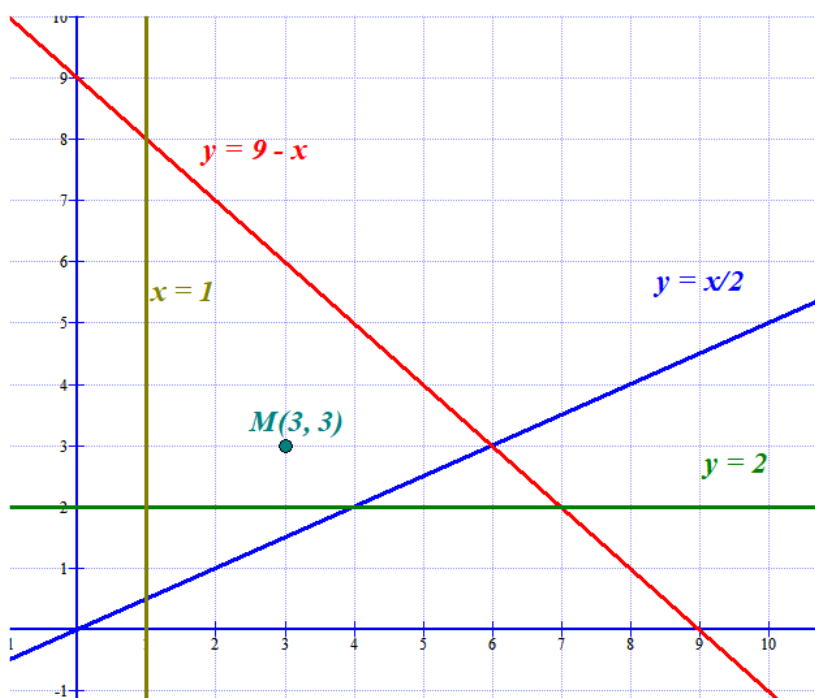
El conjunto de las restricciones es:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 9 - x \end{array} \right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones.

$x = 1$	y	x	$y = 2$
1	0	0	2
1	2	1	2

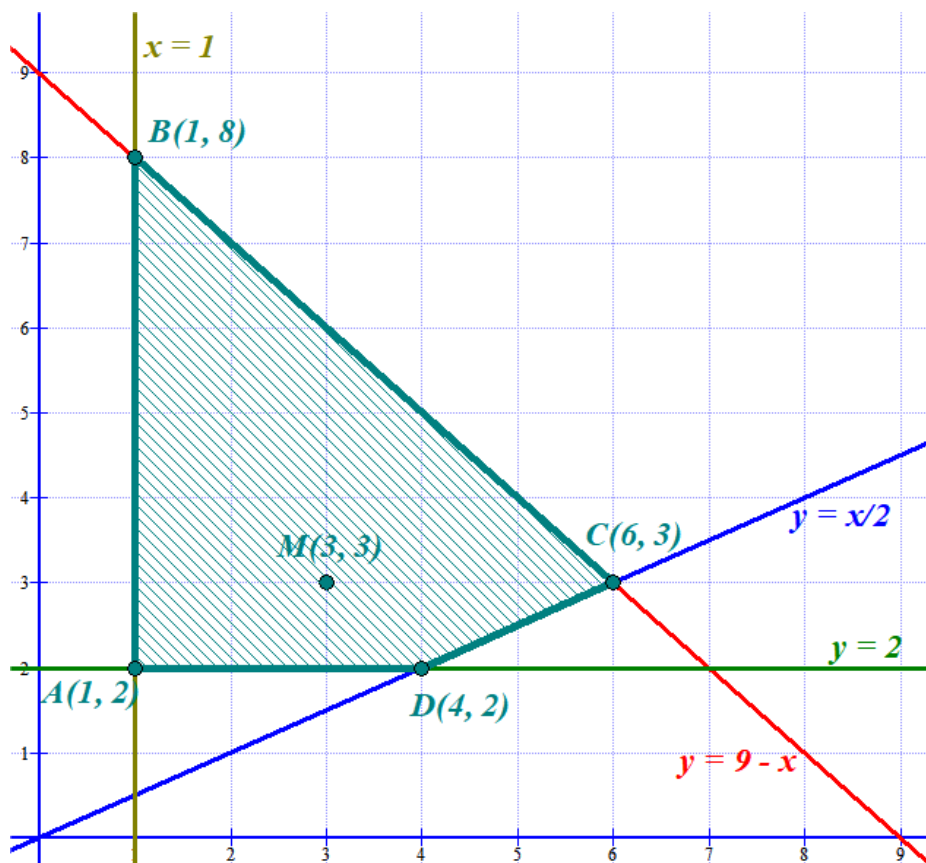
x	$y = \frac{x}{2}$	x	$y = 9 - x$
1	0,5	1	8
2	1	2	7
6	3	7	2



Comprobemos si el punto $M(3, 3)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq 1 \\ 3 \geq 2 \\ 3 \leq 6 \\ 3+3 \leq 9 \end{array} \right\} \text{Se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la delimitada por las cuatro rectas y que incluye el punto $M(3, 3)$.



b) La función que nos da el número de espectadores (en millones) es $f(x, y) = 1,2x + 0,8y$.

Valoramos el número de espectadores que se produce en cada vértice y así averiguamos en que situación este número es máximo.

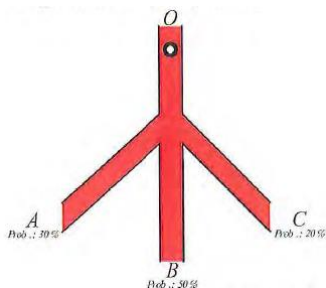
$$A(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = 1,2 + 1,6 = 2,8$$

$$B(1, 8) \rightarrow f(1, 8) = 1,2 + 6,4 = 7,6$$

$$C(6, 3) \rightarrow f(6, 3) = 7,2 + 2,4 = \mathbf{9,6}$$

$$D(4, 2) \rightarrow f(4, 2) = 4,8 + 1,6 = 6,4$$

El máximo se obtiene en el punto $C(6, 3)$, que significa 6 persecuciones y 3 escenas de acción. El número máximo de espectadores es 9,6 millones.

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos)

En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por A con una probabilidad del 30%, por B con una probabilidad del 50% y por C con una probabilidad del 20%. Tras tres lanzamientos, calcular:

- la probabilidad de que la canica haya salido por C en algún lanzamiento;
- la probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.

- a) Utilizaremos el suceso contrario, ya que los casos favorables al suceso directo son muchos y es más fácil con el contrario que solo ocurre de una forma. Utilizamos también que los lanzamientos son independientes y la probabilidad en cada lanzamiento es siempre la misma. Para simplificar la escritura llamamos A1, A2, A3, B1, B2, B3, C1, C2 y C3 a los sucesos “la canica sale por salida A, B o C en el lanzamiento 1, 2 o 3, respectivamente”.

$$P(\text{Salga por C en algún lanzamiento}) = 1 - P(\text{No salga por C en ningún lanzamiento}) =$$

$$= 1 - P(\overline{C1} \cap \overline{C2} \cap \overline{C3}) = 1 - P(\overline{C1})P(\overline{C2})P(\overline{C3}) = 1 - 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = \boxed{0.488}$$

- b) Este suceso ocurre de varias formas, calculamos la probabilidad de cada una de ellas y sumamos dichas probabilidades.

$$P(\text{La canica haya salido una vez por A, otra por B y otra por C}) =$$

$$= P(A1)P(B2)P(C3) + P(A1)P(C2)P(B3) + P(B1)P(A2)P(C3) +$$

$$+ P(B1)P(C2)P(A3) + P(C1)P(A2)P(B3) + P(C1)P(B2)P(A3) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 +$$

$$+ 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 =$$

$$= 6 \cdot 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 = \boxed{0,18}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como los lanzamientos son independientes, calculamos que pasa en una de las posibilidades favorables al suceso del cual estamos calculando su probabilidad y lo multiplicamos por las distintas formas que tienen de cumplirse que salgan por distintas salidas, que son permutaciones de 3, ya que es colocar tres letras (A, B y C) en las tres posiciones 1ª, 2ª y 3ª.

$$P(\text{La canica haya salido una vez por A, otra por B y otra por C}) =$$

$$= 3! \cdot P(\text{Sale por A la 1ª})P(\text{Sale por B la 2ª})P(\text{Sale por C la 3ª}) = 6 \cdot 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 = \boxed{0,18}$$