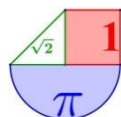


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

Comunidad de MADRID



EvAU 2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

En este cuaderno de ejercicios se recopilan los enunciados de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas de acceso a la universidad de Madrid desde el año 2017 al 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García. Ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

Espero que todo lo que aquí aparece os sea útil para preparar el examen de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II en las PAU de 2026 y os ayude a conseguir buenos resultados.

En la web www.ebaumatematicas.com hay un banco de ejercicios de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas.

PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	3
PAU 2025 Extraordinaria (Coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC. SS. II.....	19
PAU 2025 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	32
PAU 2025 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC. SS. II.....	47
EvAU 2024 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	63
EvAU 2024 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	81
EvAU 2024 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	98
EvAU 2024 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	113
EvAU 2023 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	130
EvAU 2023 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	146
EvAU 2023 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	163
EvAU 2023 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	178
EvAU 2022 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	193
EvAU 2022 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC SS II.....	210
EvAU 2022 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	224
EvAU 2022 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	238
EvAU 2021 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	257
EvAU 2021 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	275
EvAU 2021 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	290
EvAU 2021 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	305
EvAU 2020 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	322
EvAU 2020 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	339
EvAU 2019 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	354
EvAU 2019 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	368
EvAU 2018 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	383
EvAU 2018 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	398
EvAU 2017 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II.....	412
EvAU 2017 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	427

PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettiwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso “El P25 necesita enfriarse para poder usarlo”.

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.

Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de *@solo_reviews*, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.

Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettiwt*:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.

#PearSupport #P25

- 1.a)** (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.
- 1.b)** (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, y \geq 0, -x + y \leq 8, x + 4y \leq 12, x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S . Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A , B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7,$$

$$P(C) = 0.5, P(A \cap B / C) = 0.2$$

donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B .

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B .

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C / A \cap B)$.

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

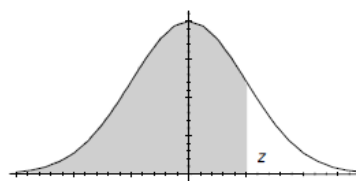
- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.

- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
 - Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.
- 4.2.a)** (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.
- 4.2.b)** (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso “El P25 necesita enfriarse para poder usarlo”.

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.

Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de *@solo_reviews*, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.

Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettwt*:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.

#PearSupport #P25

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

1.a) Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de teléfonos defectuosos de un grupo de 288.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 288$ y $p =$ probabilidad de que un móvil esté defectuoso $= 0.02$. $X = B(288, 0.02)$.

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta binomial a una normal de media $n \cdot p = 288 \cdot 0.02 = 5.76$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{288 \cdot 0.02 \cdot 0.98} \approx 2.376$.

$Y = N(5.76, 2.376)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 5.76 > 5$ y $nq = 288 \cdot 0.98 = 282.24 > 5$

Nos piden calcular $P(X \geq 11)$.

$$P(X \geq 11) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 10.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{10.5 - 5.76}{2.376}\right) = P(Z \geq 1.99) = 1 - P(Z \leq 1.99) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9767 = \boxed{0.0233}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

La probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11 es de 0.0233.

1.b) El tamaño muestral es $n = 288$.

La proporción muestral de teléfonos defectuosos es $\frac{20}{288} \approx 0.069$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2,575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9947	0,9949	0,9951

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{288}} \approx 0.021$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.068 - 0.021, 0.068 + 0.021) = (0.047, 0.089)$$

¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

En el comunicado se dice que el porcentaje de teléfonos defectuosos es del 2% que significa una proporción de 0.02 que no pertenece al intervalo de confianza calculado.

La afirmación del comunicado es cuestionable con una confianza del 99%.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

2.1.a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a + a + 1 + 0 + a + 1 - 2a - 0 = 2 - a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\ -3 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} & A/B \\ \hline 1 & 1 \quad 1 \quad 2 \\ 0 & -3 \quad -1 \quad -1 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_A \end{array}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

2.1.b) Lo resolvemos para $a = 2$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\left(\begin{array}{c|c} & A/B \\ \hline 1 & 1 \quad 1 \quad 2 \\ 0 & -3 \quad -1 \quad -1 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_A \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -3y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 1 - 3y = z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + 1 - 3y = 2 \Rightarrow x - 2y = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = 2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

Pregunta 2.2

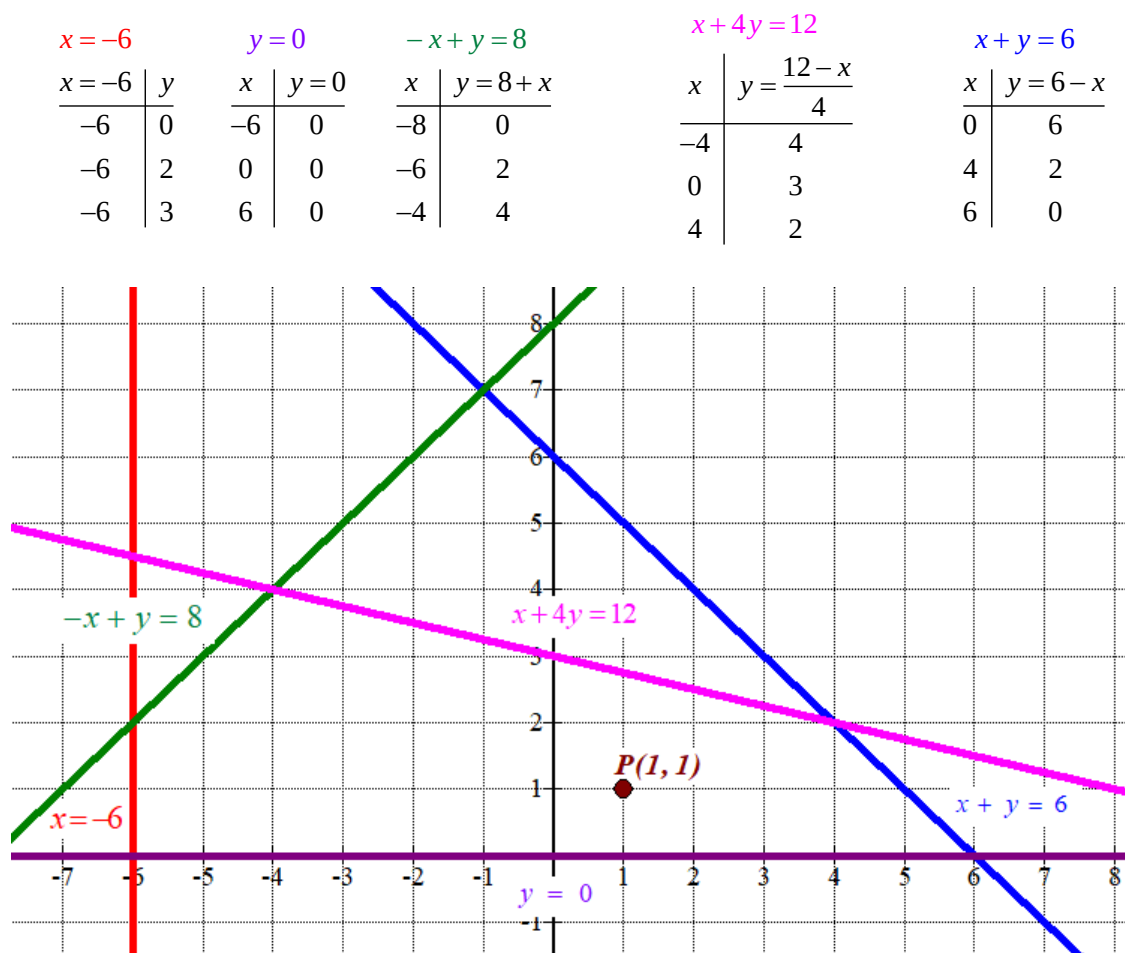
Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, y \geq 0, -x + y \leq 8, x + 4y \leq 12, x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S . Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

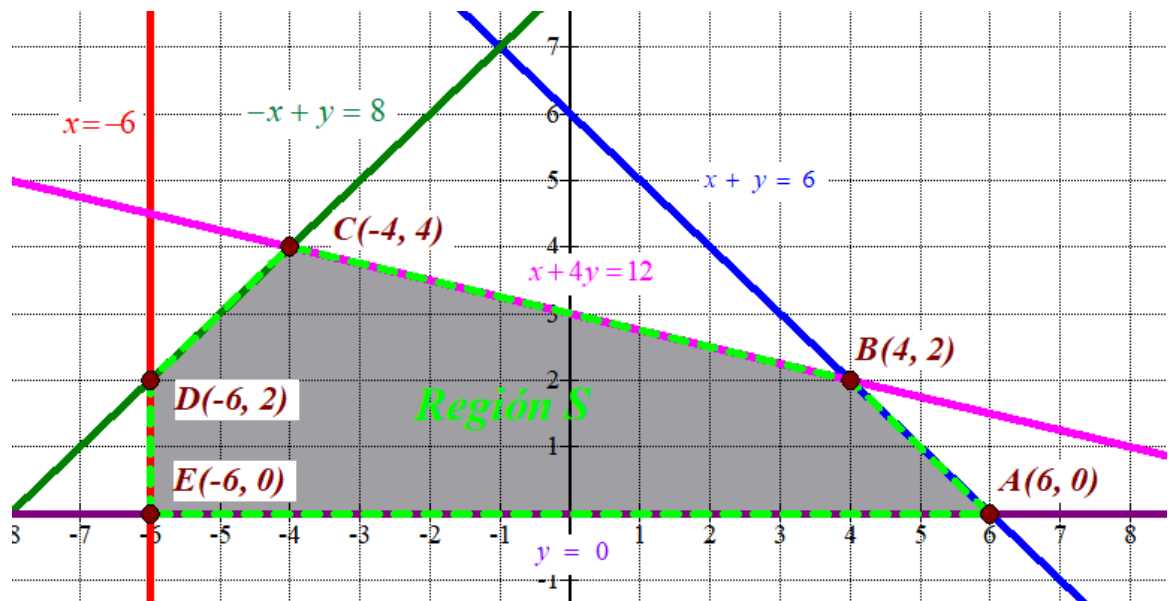
2.2.a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región S .



Como las restricciones son $x \geq -6$, $y \geq 0$, $-x + y \leq 8$, $x + 4y \leq 12$, $x + y \leq 6$ la región S está por debajo de las rectas verde, azul y rosa, por encima de la recta horizontal que coincide con el eje de abscisas y a la derecha de la recta vertical roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$1 \geq -6, 1 \geq 0, -1 + 1 \leq 8, 1 + 4 \leq 12, 1 + 1 \leq 6 \text{ ; Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región S en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de la región S .



Los vértices de la región S son $A(6, 0)$, $B(4, 2)$, $C(-4, 4)$, $D(-6, 2)$ y $E(-6, 0)$.

2.2.b) Valoramos la función $f(x, y) = 2y - 3x$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(6, 0) \rightarrow f(6, 0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 6 = -18$$

$$B(4, 2) \rightarrow f(4, 2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$$

$$C(-4, 4) \rightarrow f(-4, 4) = 2 \cdot 4 - 3(-4) = 20$$

$$D(-6, 2) \rightarrow f(-6, 2) = 2 \cdot 2 - 3(-6) = 22 \text{ Máximo}$$

$$E(-6, 0) \rightarrow f(-6, 0) = 2 \cdot 0 - 3(-6) = 18$$

El valor máximo que alcanza la función en la región S es 22 y se consigue en el vértice $D(-6, 2)$.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.

3.1.a) Hallamos la expresión de la primitiva $F(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x(x^2 + a) dx = \int x^3 + ax dx = \frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + K$$

Determinamos el valor de a y K para que se cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + K \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{0^4}{4} + a \frac{0^2}{2} + K = 0 \\ \frac{1^4}{4} + a \frac{1^2}{2} + K = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{K = 0} \\ \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + K = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + 0 = 1 \Rightarrow 1 + 2a = 4 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

El valor de a buscado es $a = \frac{3}{2}$.

3.1.b) Para $a = \frac{3}{2}$ la función queda $f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$. Determinamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

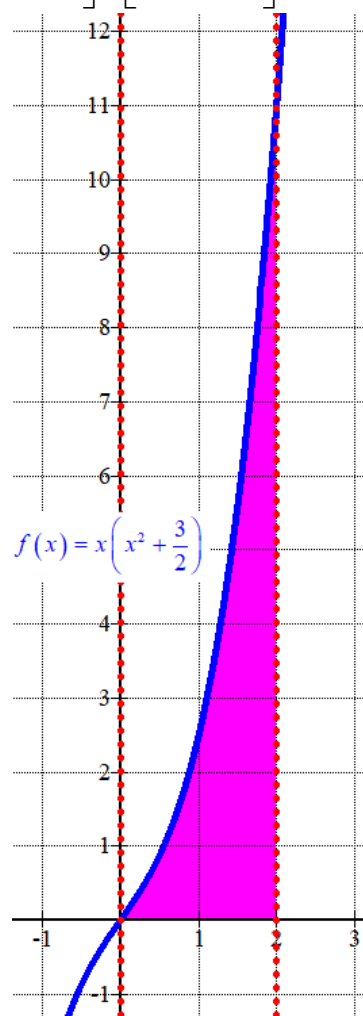
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left\{x^2 + \frac{3}{2} \neq 0\right\} \Rightarrow x = 0$$

El único punto de corte está en $x = 0$. Entre 0 y 2 la función es positiva.

El área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$ se obtiene con la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \int_0^2 x^3 + \frac{3}{2}x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{3 \cdot 0^2}{4} \right] = 4 + 3 = \boxed{7u^2}$$



3.1.c) Si la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=1$ vale 1 entonces la derivada de la función en el punto $x=1$ vale $1 \rightarrow f'(1)=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = 3 \cdot 1^2 + a \Rightarrow \boxed{a = 1 - 3 = -2}$$

El valor buscado es $a = -2$.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

3.2.a) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{x}{2x-1}$. El denominador se anula para $x = 0.5$ que no pertenece al intervalo de definición $(-\infty, 0)$. La función no plantea problemas de definición en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9}$. El denominador se anula para $x = -3$ que no pertenece al intervalo de definición $(0, +\infty)$, también se anula para $x = 3$ que si pertenece al intervalo $(0, +\infty)$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{3\}$.

3.2.b) La función es continua en $(-\infty, 0)$. También es continua en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$. Estudiamos su continuidad en el cambio de definición $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{4 \cdot 0^3 + 0^2}{0^2 - 9} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-1} = \frac{0}{2 \cdot 0 - 1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R} - \{3\}$.

3.2.c) Asíntotas verticales $x = a$

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \frac{4 \cdot 3^3 + 3^2}{3^2 - 9} = \frac{117}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

La recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

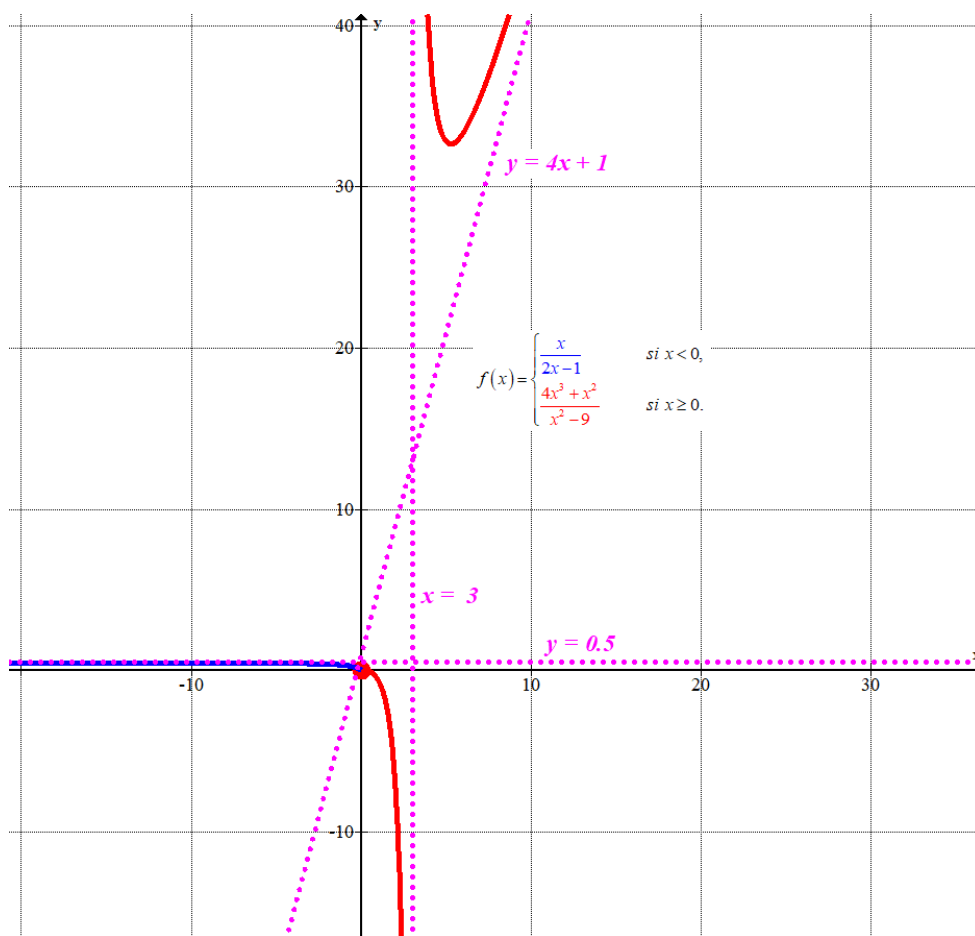
Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2 - 4x^3 + 36x}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 36x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La recta $y = 4x + 1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.



Resumiendo: $x = 3$ es asíntota vertical. La recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$. La recta $y = 4x + 1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7,$$

$$P(C) = 0.5, P(A \cap B / C) = 0.2$$

donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B.

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C / A \cap B)$.

Si A y B son independientes entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)(1 - P(\bar{B})) = 0.4(1 - 0.7) = 0.12$$

Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A \cap B / C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap B \cap C)}{0.5} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

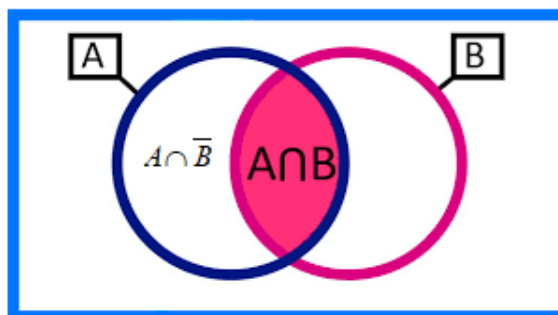
4.1.a) Debemos calcular $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}$$

La probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B vale 0.88.

4.1.b) Nos piden calcular $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.12 = \boxed{0.28}$$



La probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente vale 0.28.

4.1.c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C / A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{0.1}{0.12} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333}$$

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.

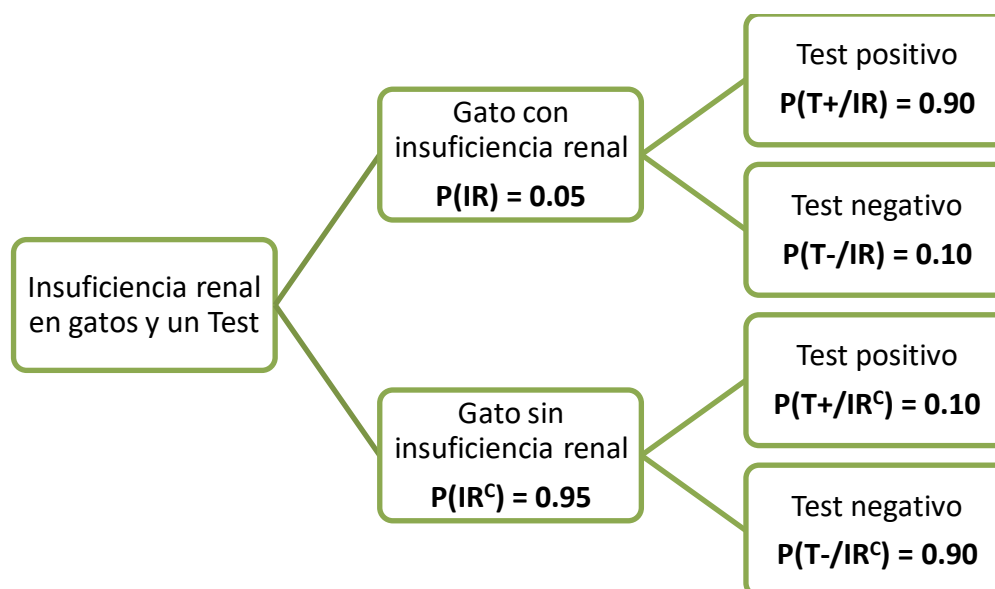
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Llamamos IR al suceso “el gato tiene insuficiencia renal”, T+ a “la prueba da positivo” y T– a “la prueba da negativo”.

Sabemos que $P(IR) = 0.05$, $P(T+/IR) = 0.90$ y $P(T+/IR^C) = 0.10$.

Realizamos un diagrama de árbol.



4.2.a) Nos piden calcular $P(T-)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T-) = P(IR)P(T-/IR) + P(IR^C)P(T-/IR^C) = 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.9 = \boxed{0.86}$$

La probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba tiene un valor de 0.86.

4.2.b) Nos piden calcular $P(IR/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(IR/T+) = \frac{P(IR \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(IR)P(T+/IR)}{1 - P(T-)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{1 - 0.86} = \boxed{\frac{9}{28} \approx 0.3214}$$

La probabilidad de que un gato que ha dado positivo en el test tenga insuficiencia renal tiene un valor de $\frac{9}{28} \approx 0.3214$.

PAU 2025 Extraordinaria (Coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC. SS. II

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	C

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado.

Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

1.a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

1.b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21} .

2.1.b) (1.25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^t A^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B .

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

2.2.a) (1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.1

La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

3.1.a) (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

3.1.b) (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

Pregunta 3.2

Se sabe que el 70% de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

3.2.a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X =$ "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

3.2.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$, siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B .

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(B/\bar{A})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

4.1.b) (0,75 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4.1.c) (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

Pregunta 4.2

Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista

es de 0,6 si la obra se le encarga a Horizon, 0,2 si se le adjudica a Vértice XXI y 0,9 si la realiza CuadraNova.

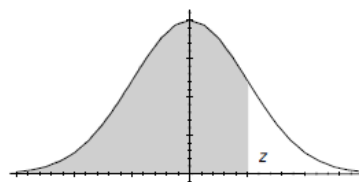
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

4.2.b) (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado.

Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

1.a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

1.b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

1.a) Debemos hallar la función costes $C(x)$ que es la integral de la función costes marginales.

$$C(x) = \int c(x) dx = \int \frac{x+10}{50} dx = \frac{1}{50} \int x+10 dx = \frac{1}{50} \left(\frac{x^2}{2} + 10x \right) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + K$$

Como sabemos que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros entonces $C(1) = 121.21$. Determinamos el valor de K utilizando este dato.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + K \\ C(1) = 121.21 \end{array} \right\} \Rightarrow 121.21 = \frac{1^2}{100} + \frac{1}{5} + K \Rightarrow 12121 = 1 + 20 + 100K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100K = 12121 - 21 = 12100 \Rightarrow K = \frac{12100}{100} = 121$$

La función costes tiene la expresión $C(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + 121, \quad 0 < x < 100$.

1.b) Averiguamos cuando se anula la derivada de los beneficios.

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2} \Rightarrow B'(t) = \frac{-800000 \cdot 2(t-1)}{\left((t-1)^2 + 2\right)^2} = \frac{-1600000(t-1)}{\left((t-1)^2 + 2\right)^2}$$
$$B'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-1600000(t-1)}{\left((t-1)^2 + 2\right)^2} = 0 \Rightarrow -1600000(t-1) = 0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$B'(0.5) = \frac{-1600000(0.5-1)}{\left((0.5-1)^2 + 2\right)^2} = \frac{800000}{81/16} > 0. \text{ La función crece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$B'(2) = \frac{-1600000(2-1)}{\left((2-1)^2 + 2\right)^2} = \frac{-1600000}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

El beneficio crece hasta $t = 1$ y decrece a partir de ese momento.

El máximo beneficio se alcanza en $t = 1$, siendo $B(1) = \frac{800000}{(1-1)^2 + 2} = 400000$ € el importe de dicho beneficio máximo.

Para averiguar que pasa con el beneficio a largo plazo calculamos el límite de la función beneficios cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{800000}{(t-1)^2 + 2} = \frac{800000}{\infty} = 0$$

A largo plazo el beneficio va disminuyendo y acercándose a 0.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21} .

2.1.b) (1.25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^t A^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B .

2.1.a) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{20} = A^{2 \cdot 10} = (A^2)^{10} = (I_2)^{10} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{21} = A^{20} A = I_2 A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos visto que $A^{20} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{21} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.1.b) Sabemos que $A^2 = A \cdot A = I_2$, por lo que la inversa de la matriz A existe y $A^{-1} = A$.
Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA = BB^t A^{-1} \Rightarrow XAA = BB^t A^{-1}A \Rightarrow XA^2 = BB^t I_2 \Rightarrow XI_2 = BB^t \Rightarrow X = BB^t$$

Terminamos de hallar la expresión de la matriz X .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1-1-1 \\ -1-1-1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \quad \cdot \quad 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

2.2.a) (1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

2.2.a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a & 1 & -2a \\ -a & 0 & a & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a.$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Analizamos cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \\ -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 4. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones), para $a = 1$ y $a = 0$ el sistema es incompatible.

2.1.b) Lo resolvemos para $a = -1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 3). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 2 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = -1$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.1

La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

3.1.a) (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

3.1.b) (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

3.1.a) Consideramos X = La cantidad anual (en euros) donada por familia a actividades de interés social. $X = N(\mu, 40)$

El tamaño de la muestra es $n = 64$. La media muestral es 360 euros.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505

Hallamos el error del intervalo de confianza.

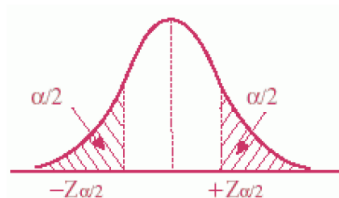
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{40}{\sqrt{64}} = 8.225 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (360 - 8.225, 360 + 8.225) = (351.775, 368.225)$$

3.1.b) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9718	0.9722	0.9726	0.9729	0.9732	0.9735

Igualamos el error a 10 € y despejamos n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10\sqrt{n} = 1.96 \cdot 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 40}{10} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 4)^2 \Rightarrow \boxed{n = 61.47}$$

Para que el error cometido sea menor de 10 €, con un nivel de confianza del 95%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 62 familias.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.2

Se sabe que el 70% de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

3.2.a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria X = "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

3.2.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

3.2.a) Consideramos X = "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social de un grupo de 200". Hay un 70% de las familias del municipio que destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social, por lo que el restante 30% no destina ninguna cantidad a actividades de interés social.

La variable aleatoria X es una binomial de parámetros $n = 200$ y $p = 0.3$. $X = B(200, 0.3)$.

El número esperado de familias con esta propiedad es $np = 200 \cdot 0.3 = 60$ familias.

3.2.b) Que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas es lo mismo que el número de familias que no destinan ningún dinero a actividades de interés social esté comprendido entre $200 - 138 = 62$ y $200 - 145 = 55$ familias.

Nos piden calcular $P(55 \leq X \leq 62)$.

Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximaremos esta variable a una variable Y que sigue una ley normal con media $np = 200 \cdot 0.3 = 60$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = \sqrt{42} \approx 6.481$. $Y = N(60, \sqrt{42})$.

$$P(55 \leq X \leq 62) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(54.5 \leq Y \leq 62.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{54.5 - 60}{\sqrt{42}} \leq Z \leq \frac{62.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = P(-0.85 \leq Z \leq 0.39) =$$

$$= P(Z \leq 0.39) - P(Z \leq -0.85) = P(Z \leq 0.39) - P(Z \geq 0.85) =$$

$$= P(Z \leq 0.39) - [1 - P(Z \leq 0.85)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6517 - 1 + 0.8023 = \boxed{0.454}$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7968	0.7996	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

Pregunta 4.1

Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$, siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(B/\bar{A})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

4.1.b) (0,75 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4.1.c) (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

Calculamos $P(B)$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

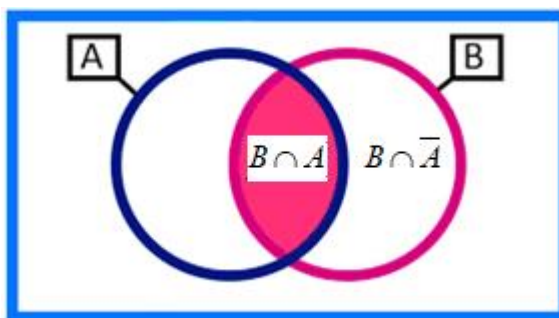
Calculamos $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8 = 0.3$$

4.1.a) Debemos calcular $P(B/\bar{A})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0.6 - 0.3}{1 - 0.5} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$



4.1.b) Aplicamos una de las leyes de Morgan: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = \boxed{0.2}$$

4.1.c) Para que los sucesos sean independientes se debe cumplir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\} P(A \cap B) = 0.3 = P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Pregunta 4.2

Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de 0,6 si la obra se le encarga a Horizon, 0,2 si se le adjudica a Vértice XXI y 0,9 si la realiza CuadraNova.

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

4.2.b) (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Llamamos H, V y C a los sucesos “encargar la obra a Horizon, Vértice XXI o a CuadraNova respectivamente” y T al suceso “Terminar el centro de salud en la fecha prevista”.

Sabemos que $P(H) = 0.5$, $P(V) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(T/H) = 0.6$, $P(T/V) = 0.2$ y $P(T/C) = 0.9$

4.2.a) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(H)P(T/H) + P(V)P(T/V) + P(C)P(T/C) = \\ &= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.54} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista tiene un valor de 0.54.

4.2.b) Nos piden calcular $P(V/\bar{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/\bar{T}) = \frac{P(V \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(V)P(\bar{T}/V)}{1 - P(T)} = \frac{0.3 \cdot (1 - 0.2)}{1 - 0.54} = \boxed{\frac{12}{23} \approx 0.5217}$$

La probabilidad de que la empresa adjudicataria haya sido Vértice XXI si la obra no está terminada en la fecha prevista tiene un valor de $\frac{12}{23} \approx 0.5217$.

PAU 2025 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad. El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo. El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

- 1.a)** (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?
- 1.b)** (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+a}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.

2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.

2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Para poder participar en el concurso “Mejor Jabón Artesano del año” es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90% de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

En un concesionario el 50% de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35% híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Pregunta 4.2

De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.2$ y $P(B \cap C) = 0.05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

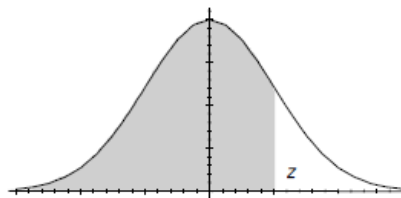
4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B} \cup \overline{C})$.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad. El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.

El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

1.a) Llamamos “x” al número de kilos de sandía verde rayada, “y” a los kilos de sandía negra sin pepitas y “z” a los kilos de sandía negra con pepitas.

“Vende 2700 kilos a la semana” $\rightarrow x + y + z = 2700$

“El número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas” $\rightarrow z = \frac{x + y}{3}$.

“Vende el kilo de sandía rayada a 1,25 euros el kilo, la negra sin pepitas a 2,75 €/kg y la sandía negra con pepitas a 2,25 €/kg. Debe recaudar de la venta 5400 euros” $\rightarrow 1.25x + 2.75y + 2.25z = 5400$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2700 \\ z = \frac{x + y}{3} \\ 1.25x + 2.75y + 2.25z = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2700 - y - z \\ 3z = x + y \\ 1.25x + 2.75y + 2.25z = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3z = 2700 - y - z + y \\ 1.25(2700 - y - z) + 2.75y + 2.25z = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4z = 2700 \rightarrow z = \frac{2700}{4} = 675 \\ 3375 - 1.25y - 1.25z + 2.75y + 2.25z = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 675 \\ 1.5y + z = 2025 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.5y + 675 = 2025 \Rightarrow 1.5y = 1350 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1350}{1.5} = 900} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2700 - 900 - 675 = 1125}$$

Para recaudar el importe de 5400 euros debe vender 1125 kilos de sandía rayada, 900 de sandía negra sin pepitas y 675 de sandía negra con pepitas.

- 1.b) Si de las condiciones del apartado anterior solo cambiamos el precio del kilo de sandía haciendo que los distintos tipos de sandías tengan el mismo precio tendríamos que recaudar 5400 euros vendiendo 2700 kilos de sandía, por lo que el precio del kilo de sandía debe ser $\frac{5400}{2700} = 2$ €/kg.

Cambiamos en el sistema anterior la última ecuación e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2700 \\ z = \frac{x + y}{3} \\ 2x + 2y + 2z = 5400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a = 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \text{Podemos quitar ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2700 \\ z = \frac{x + y}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2700 \\ 3z = x + y \rightarrow 3z - x = y \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3z - x + z = 2700 \Rightarrow 4z = 2700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{2700}{4} = 675} \Rightarrow y = 3 \cdot 675 - x = 2025 - x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2025 - \lambda \\ z = 675 \end{cases}}$$

La solución no es única: debe vender 675 kilos de sandía negra con pepitas, una cantidad de kilos entre 0 y 2025 de sandía rayada y los kilos restantes de sandía negra sin pepitas hasta llegar a completar los 2700 kilos totales.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+a}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.

2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

2.1.a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir los valores de los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0^2+1}{0-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+a}{x+1} = \frac{0+a}{0+1} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Con $a = -1$ la función es continua en $x = 0$.

2.1.b) La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Asíntotas verticales $x = a$

Los denominadores de la expresión de la función se anulan para $x = 1$ y $x = -1$, pero para

estos valores la función está bien definida $f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1-1} = -1$ y $f(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0$.

Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

La función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

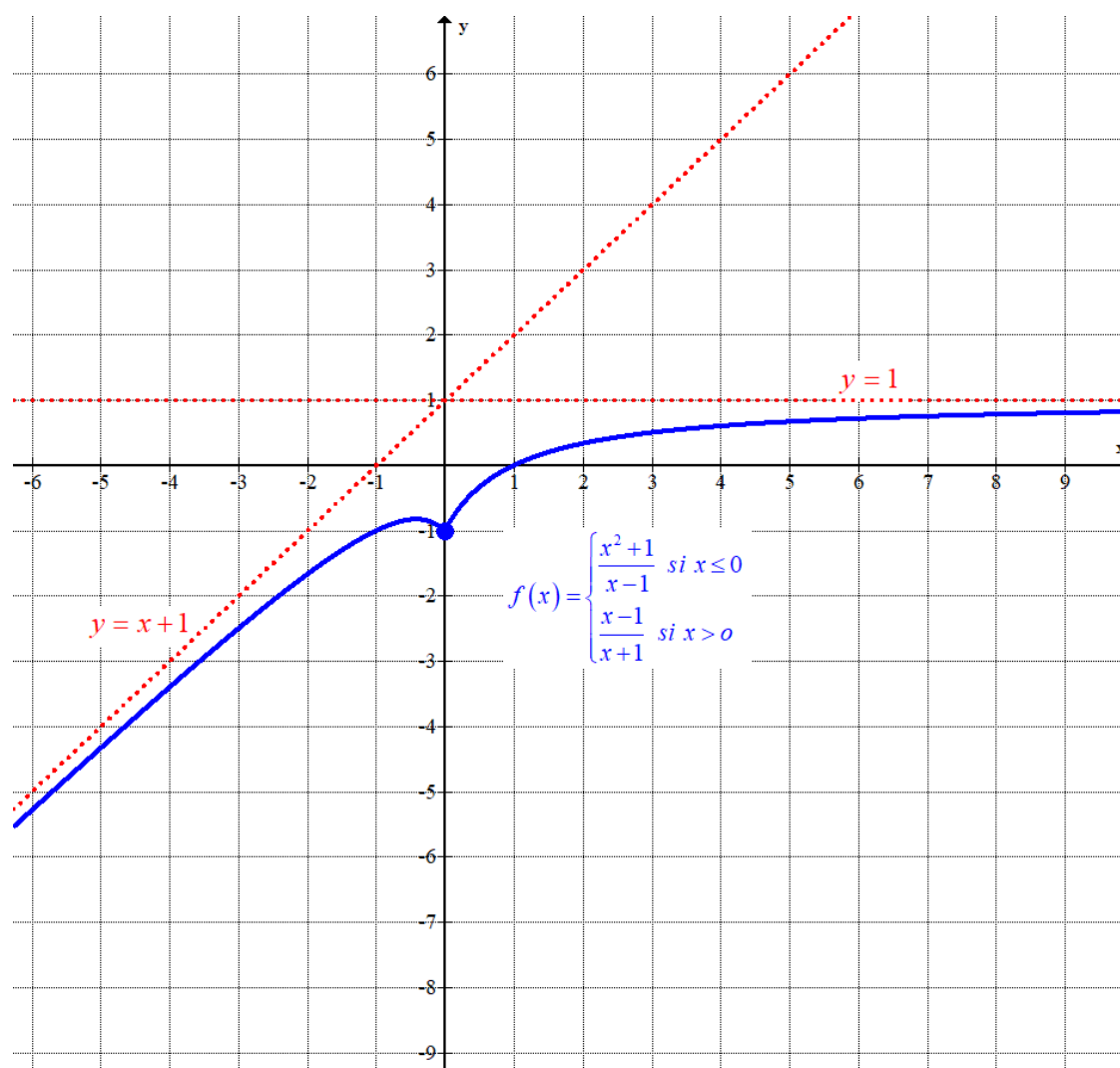
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

La recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

La función tiene asíntota horizontal y no tiene asíntota oblicua.



Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.

2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx$$

2.2.a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = e^x(-x^2 + 3) \Rightarrow f'(x) = e^x(-x^2 + 3) + e^x(-2x) = e^x(-x^2 - 2x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(-x^2 - 2x + 3) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)3}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = \boxed{-3=x} \\ \frac{2-4}{-2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ consideramos $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = e^{-4}(-(-4)^2 - 2(-4) + 3) = -5e^{-4} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, 1)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale

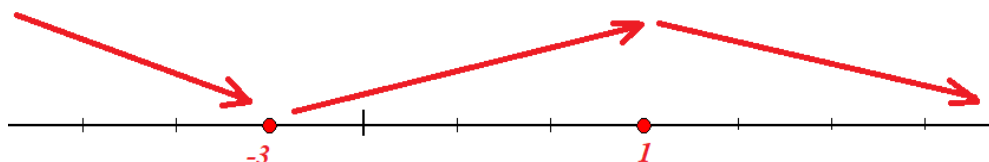
$$f'(0) = e^0(-0^2 - 2 \cdot 0 + 3) = 3 > 0. \text{ La función crece en } (-3, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = e^2(-2^2 - 2 \cdot 2 + 3) = -5e^2 < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-3, 1)$.

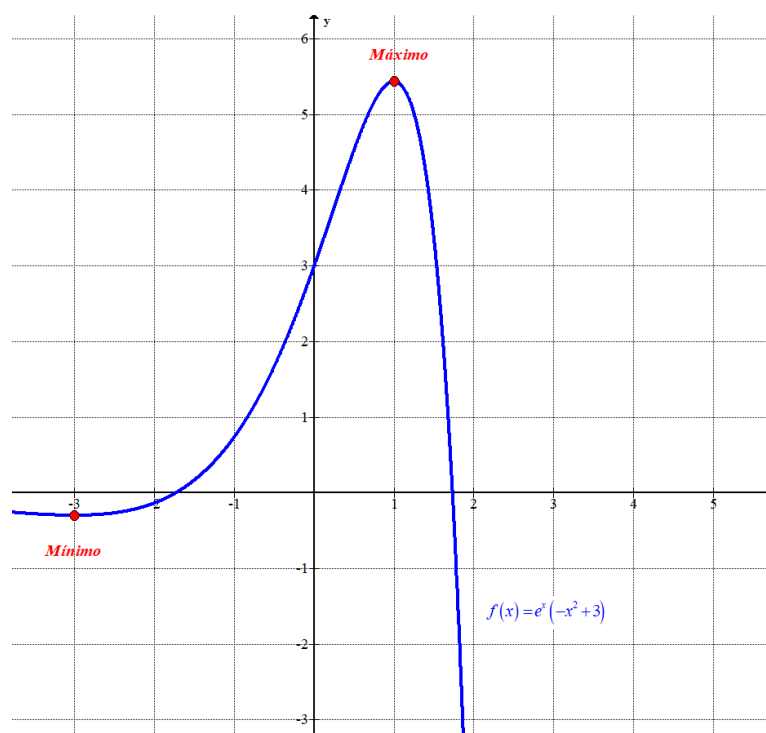
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -3$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Como $f(-3) = e^{-3}(-(-3)^2 + 3) = \frac{-6}{e^3}$ y $f(1) = e^1(-1^2 + 3) = 2e$ las coordenadas del mínimo

relativo son $\left(-3, \frac{-6}{e^3}\right)$ y las del máximo relativo son $(1, 2e)$.



2.2.b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{xe^x} dx &= \int \frac{\cancel{e^x}(-x^2 + 3)}{x\cancel{e^x}} dx = \int \frac{-x^2 + 3}{x} dx = \int \frac{-x^2}{x} dx + \int \frac{3}{x} dx = \\ &= \int -x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = \frac{-x^2}{2} + 3 \ln x + C\end{aligned}$$

Usamos lo obtenido para el cálculo de la integral definida.

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 3 \ln x \right]_1^2 = \left[\frac{-2^2}{2} + 3 \ln 2 \right] - \left[\frac{-1^2}{2} + 3 \ln 1 \right] = -2 + 3 \ln 2 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{2} + 3 \ln 2}$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Para poder participar en el concurso “Mejor Jabón Artesano del año” es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90% de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

3.1.a) El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8341
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = \frac{0.9 \cdot 0.1}{n} \Rightarrow n = \frac{0.9 \cdot 0.1}{\left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2} \approx 138.298$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 139 pastillas de jabón casero.

3.1.b) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 140$, la probabilidad de que una pastilla pase el control de calidad es $p = 0.9$.

Si llamamos X al número de pastilla de jabón que superan el control de calidad de una muestra de 140 pastillas esta distribución es una binomial de parámetros $n = 140$ y $p = 0.9$.

$X = B(140, 0.9)$

Como el tamaño de muestra es muy grande para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media $\mu = np = 140 \cdot 0.9 = 126$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{140 \cdot 0.9 \cdot 0.1} \approx 3.55. \quad Y = N(126, 3.55).$$

Esta aproximación es buena pues $np = 126 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0.1 = 14 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(X \geq 120)$.

$$P(X \geq 120) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 119.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{119.5 - 126}{3.55}\right) = P(Z \geq -1.83) = P(Z \leq 1.83) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9664}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738

La probabilidad de que de una muestra de 140 pastillas al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad tiene un valor de 0.9664.

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

3.2.a) Sea X el peso en gramos de una pastilla de jabón. Esta variable aleatoria sigue una ley normal $N(\mu, 30)$.

Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 140$ y la media muestral es $\bar{x} = \frac{17500}{140} = 125$

gramos.

El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow$

$$1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{30}{\sqrt{140}} \approx 6.5288$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (125 - 6.5288, 125 + 6.5288) = (118.4712, 131.5288)$$

3.2.b) Consideramos que la variable aleatoria es $X = N(100, 30)$. La variable aleatoria que nos indica el peso medio de 64 pastillas es una normal con la misma media pero con desviación

$$\text{típica } \sigma = \frac{30}{\sqrt{64}} = 3.75. \quad \overline{X}_{64} = N(100, 3.75).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} > 110)$.

$$P(\overline{X}_{64} > 110) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{110-100}{3.75}\right) = P(Z > 2.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.67) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9962 = \boxed{0.0038}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972

La probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos tiene un valor de 0.0038.

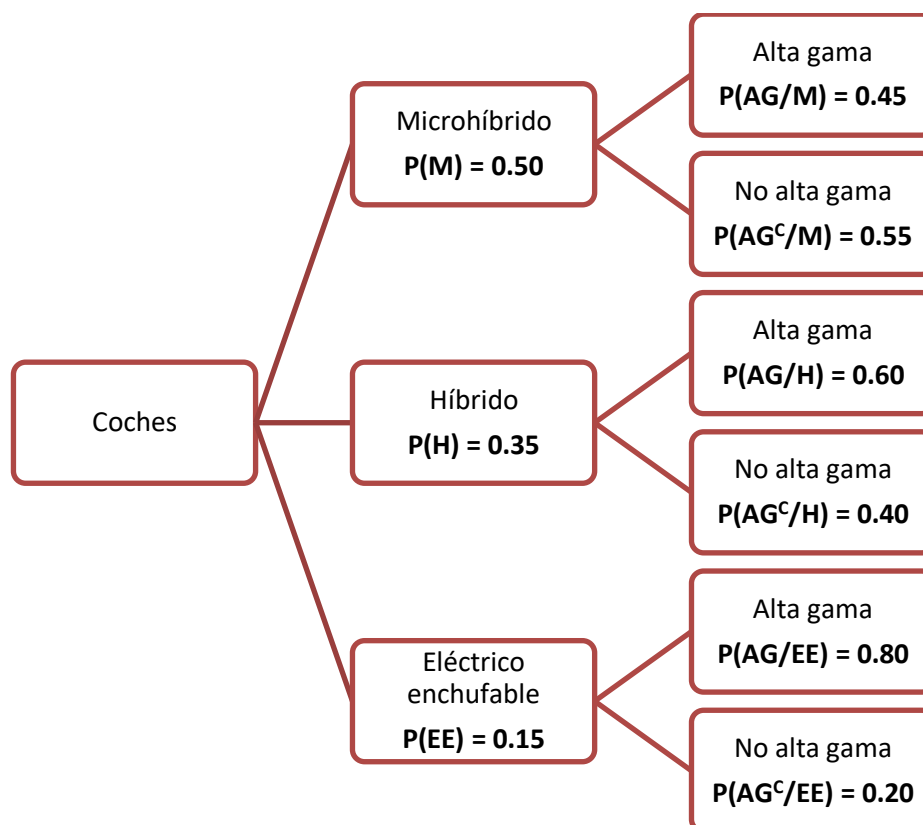
Pregunta 4.1

En un concesionario el 50% de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35% híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Realizamos un diagrama de árbol.



4.1.a) Nos piden calcular $P(AG^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(AG^c) &= P(M)P(AG^c/M) + P(H)P(AG^c/H) + P(E)P(AG^c/E) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.55 + 0.35 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.2 = \boxed{0.445}
 \end{aligned}$$

4.1.b) Nos piden calcular $P(E/AG)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(E/AG) = \frac{P(E \cap AG)}{P(AG)} = \frac{P(E)P(AG/E)}{1 - P(AG^c)} = \frac{0.15 \cdot 0.8}{1 - 0.445} = \frac{8}{37} \approx 0.2162$$

Pregunta 4.2

De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.2$ y $P(B \cap C) = 0.05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B \cap C})$.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

Como A y C son sucesos disjuntos $\rightarrow A \cap C = \emptyset \rightarrow P(A \cap C) = 0$, A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.25 \cdot 0.2 = 0.05$ y $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.05$.

4.2.a) Nos piden calcular $P(A \cup B)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.2 - 0.05 = \boxed{0.4}$$

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B tiene un valor de 0.4.

4.2.b) Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{B \cap C}) = P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - 0.05 = \boxed{0.95}$$

4.2.c) Para que sean independientes se debe cumplir la igualdad $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap C) = 0 \\ P(A)P(C) = 0.25 \cdot P(C) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$$

Son diferentes pues la probabilidad del suceso C es no nula ya que $P(B \cap C) = 0.05 \neq 0$ y se cumple que $P(C) \geq P(B \cap C) = 0.05$.

Los sucesos A y C no son independientes.

PAU 2025 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC. SS. II

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	F

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

1.a) (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?

1.b) (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x - a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$.

2.1.b) (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Para $a = 1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2.1.c) (0.5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.

2.2.b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Pregunta 3.1

3.1.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97%.

3.1.b) (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95% no sea mayor de 1 centímetro?

Pregunta 3.2

3.2.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ , este resulta (168.825, 171.175) a un nivel de confianza del 90%. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

3.2.b) (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

4.1.a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?

4.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.

4.1.c) (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

Pregunta 4.2

Los clientes potenciales de un comercio local, Mitienda, vienen de alguno de los municipios M1, M2 o M3. En M1 el 20% de la población compra en Mitienda, siendo estos porcentajes del 10% en M2 y del 8% en M3. Además se sabe que el 50% de la población vive en M1, el 30% en M2 y el 20% en M3.

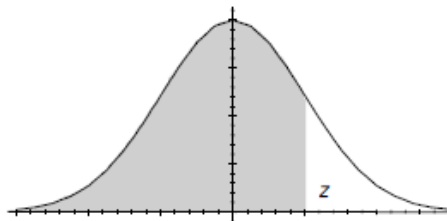
4.2.a) (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en Mitienda.

4.2.b) (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

1.a) (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?

1.b) (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

1.a) Llamemos x = “número de sillas que se fabrican” e y = “número de mesas”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 40x + 100y$.

Las restricciones del problema son:

“Cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo” $\rightarrow x + 4y \leq 24$

“Por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas” $\rightarrow x \geq 2y$

“Entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades” $\rightarrow x + y \leq 15$

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 24 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$x + 4y = 24$$

x	$y = \frac{24-x}{4}$
0	6
12	3
24	0

$$x = 2y$$

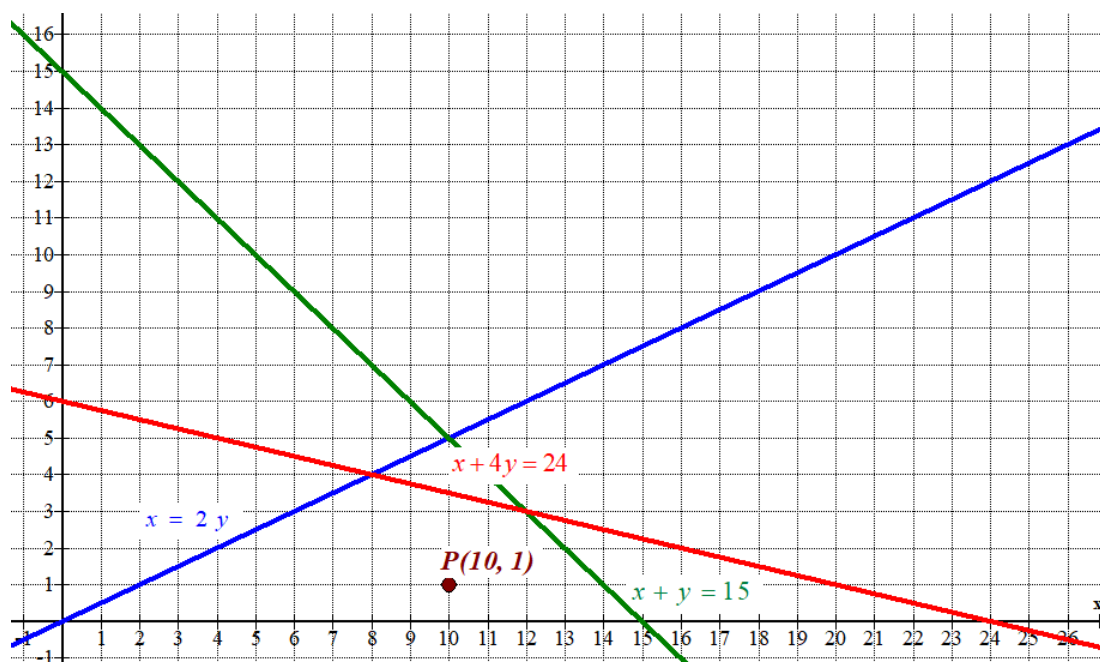
x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
6	3
12	6

$$x + y = 15$$

x	$y = 15 - x$
0	15
5	10
15	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



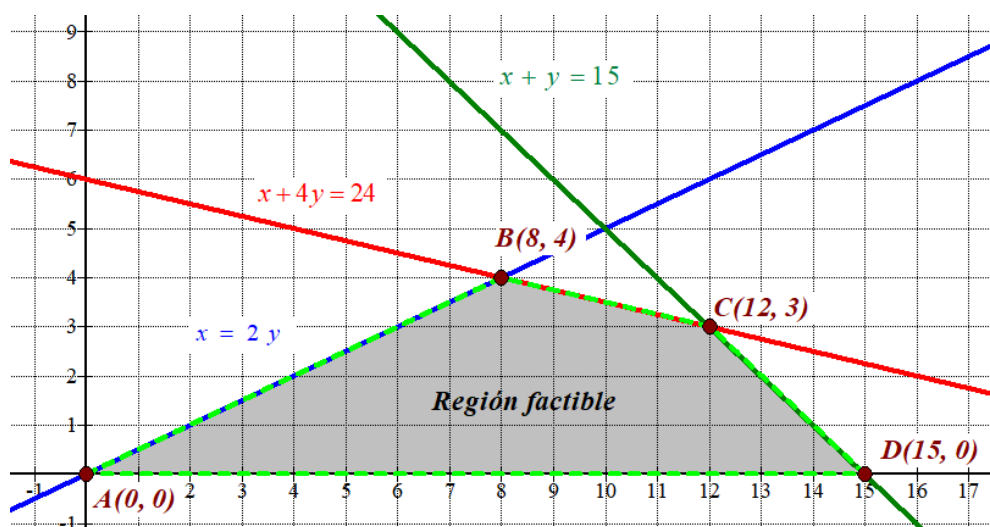
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 24 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está por debajo de las rectas verde, azul y roja.}$$

Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 4 \cdot 1 \leq 24 \\ 10 \geq 2 \cdot 1 \\ 10 + 1 \leq 15 \\ 10 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 40x + 100y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(8, 4) \rightarrow B(8, 4) = 40 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 720$$

$$C(12, 3) \rightarrow B(12, 3) = 40 \cdot 12 + 100 \cdot 3 = \text{780 Máximo}$$

$$D(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 40 \cdot 15 + 100 \cdot 0 = 600$$

El beneficio máximo es de 780 € y se consigue en el vértice C(12, 3). El beneficio máximo se consigue fabricando 12 sillas y 3 mesas.

1.b) Esta nueva situación planteada se resuelve con un sistema de ecuaciones.

Llamemos x = “número de sillas que se fabrican”, y = “número de mesas” y “ z ” al número de estanterías.

“Entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas” $\rightarrow x = 4y$.

“Los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades” $\rightarrow 5y + z = 90$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x = 4y \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + y + z = 100 \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y + z = 100 \\ 5y + z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Al intentar resolver el sistema llegamos a una situación imposible: una expresión ($5y + z$) que nos debe dar dos resultados distintos (90 y 100).

La situación planteada no tiene solución. Es una situación imposible.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x - a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$.

2.1.b) (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Para $a = 1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2.1.c) (0.5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$

2.1.a) Intentamos encontrar el valor de a que cumpla lo pedido. Primero obtenemos la expresión de la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) dx &= \int_2^3 \frac{x^2 - x - a}{2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 x^2 - x - a dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax \right]_2^3 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 3a \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2a \right] = \frac{1}{2} \left[9 - \frac{9}{2} - 3a \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} - 2 - 2a \right] = \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{3a}{2} - \frac{4}{3} + 1 + a = \frac{23}{12} - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Igualemos esta expresión a $\frac{5}{12}$.

$$\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{23}{12} - \frac{a}{2} = \frac{5}{12} \Rightarrow 23 - 6a = 5 \Rightarrow -6a = -18 \Rightarrow a = \frac{-18}{-6} = 3$$

El valor buscado es $a = 3$.

2.1.b) La función tiene una expresión polinómica por lo que es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 1}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x-2) \\ f(2) = \frac{2^2 - 2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \\ f'(2) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$$

Para $a=1$ la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$ tiene ecuación

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}.$$

2.1.c) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x - a}{2}}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - a}{10x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.

2.2.b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$? Justifique la respuesta.

2.2.a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas verticales $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1^3}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

La función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1 - 2x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

2.2.b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos y el valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2(-1-3)}{(-1-1)^3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ consideramos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{0.5^2(0.5-3)}{(0.5-1)^3} = 5 > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ consideramos $x = 2$ y la derivada vale

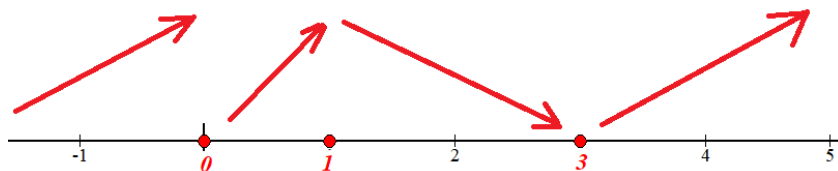
$$f'(2) = \frac{2^2(2-3)}{(2-1)^3} = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ consideramos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = \frac{4^2(4-3)}{(4-1)^3} = \frac{16}{27} > 0. \text{ La función crece en } (3, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

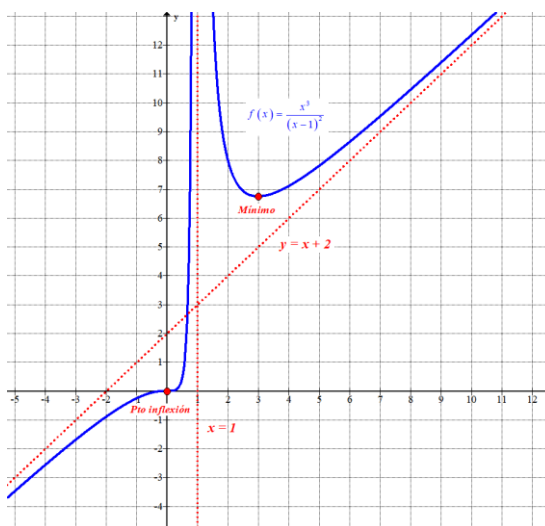
La función sigue el esquema siguiente.



¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$?

Observamos en el esquema superior que la función no presenta un máximo en $x = 0$, pues la función crece en dicho valor. Tampoco en $x = 1$, pues este valor está excluido del dominio.

La función no presenta ningún máximo relativo y solo tiene un mínimo relativo en $x = 3$.



EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Pregunta 3.1

3.1.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97%.

3.1.b) (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95% no sea mayor de 1 centímetro?

3.1.a) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato. Esta variable aleatoria sigue una ley normal $N(\mu, 10)$.

El tamaño de la muestra es $n = 100$ chicas y la media muestral es $\bar{x} = 165$ centímetros.

El nivel de confianza del 97% significa que $1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$.

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 2.17$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (165 - 2.17, 165 + 2.17) = (162.83, 167.17)$$

3.1.b) El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8341
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = \frac{19.6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 19.6 \Rightarrow n = 19.6^2 = 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 385 chicas de segundo de bachillerato.

Pregunta 3.2

3.2.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ , este resulta (168.825, 171.175) a un nivel de confianza del 90%. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

3.2.b) (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

3.2.a) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato.

$$X = N(\mu, 10).$$

La media muestral es el valor central del intervalo: $\bar{x} = \frac{168.825 + 171.175}{2} = 170.$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza:

$$Error = \frac{171.175 - 168.825}{2} = 1.175$$

El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow$

$$1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	z
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0

Utilizamos la fórmula del error para obtener el tamaño de la muestra “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.175 = 1.645 \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.175 = \frac{16.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{16.45}{1.175} \Rightarrow n = \left(\frac{16.45}{1.175} \right)^2 = 196$$

El tamaño de la muestra es de 196 chicas.

3.2.b) Sea X la altura en centímetros de las estudiantes de segundo de Bachillerato.

$$X = N(168, 10).$$

Nos piden calcular $P(165 \leq X \leq 170)$.

$$\begin{aligned}
 P(165 \leq X \leq 170) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{165-168}{10} \leq Z \leq \frac{170-168}{10}\right) = \\
 &= P(-0.3 \leq Z \leq 0.2) = P(Z \leq 0.2) - P(Z \leq -0.3) = P(Z \leq 0.2) - P(Z \geq 0.3) = \\
 &= P(Z \leq 0.2) - [1 - P(Z \leq 0.3)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5793 - [1 - 0.6179] = \boxed{0.1972}
 \end{aligned}$$

z	,00	,0
0,0	0,5000	0,5
0,1	0,5198	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,5
0,4	0,6554	0,5

z	,00	,0
0,0	0,5000	0
0,1	0,5398	0
0,2	0,5793	0
0,3	0,6179	0
0,4	0,6554	0

La probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos) es de 0.1972.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

4.1.a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?

4.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.

4.1.c) (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Voleibol	No voleibol	
Fútbol	100		150
No fútbol			
	200		400

Completamos la tabla.

	Voleibol	No voleibol	
Fútbol	100	50	150
No fútbol	100	150	250
	200	200	400

4.1.a) De los 400 estudiantes hay 150 a los que no les gusta ninguno de los dos deportes. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante no le guste jugar a ninguno de los dos deportes vale $\frac{150}{400} = \frac{3}{8} = 0.375$.

4.1.b) Hay 50 estudiantes que les gusta el fútbol y no les gusta el voleibol y 100 que les gusta el voleibol y no el fútbol. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante le guste jugar solo a uno de los dos deportes vale $\frac{50+100}{400} = \frac{3}{8} = 0.375$.

4.1.c) Hay 250 estudiantes a los que no les gusta el fútbol y de estos a 100 les gusta el voleibol. La probabilidad de que al elegir un estudiante al que no le gusta el fútbol le guste jugar al voleibol vale $\frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0.4$.

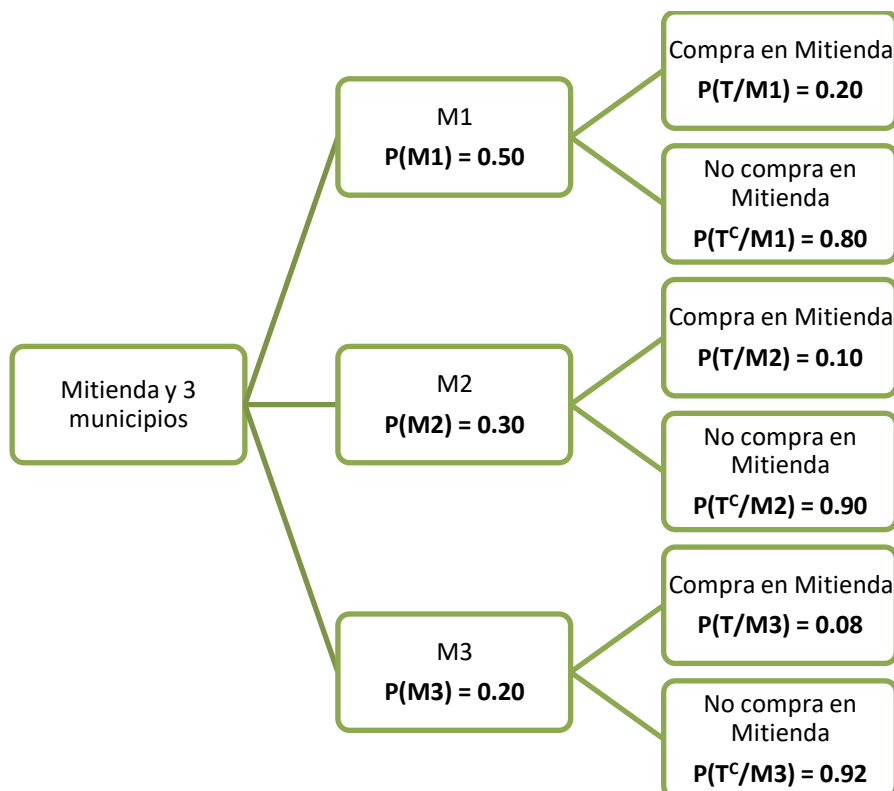
Pregunta 4.2

Los clientes potenciales de un comercio local, Mitienda, vienen de alguno de los municipios M1, M2 o M3. En M1 el 20% de la población compra en Mitienda, siendo estos porcentajes del 10% en M2 y del 8% en M3. Además se sabe que el 50% de la población vive en M1, el 30% en M2 y el 20% en M3.

4.2.a) (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en Mitienda.

4.2.b) (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3.

Realizamos un diagrama de árbol.



4.2.a) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M1)P(T/M1) + P(M2)P(T/M2) + P(M3)P(T/M3) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.08 = \boxed{0.146}
 \end{aligned}$$

4.2.b) Calculamos la probabilidad de que sea del municipio M1: $P(M1/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M1/T) = \frac{P(M1 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M1)P(T/M1)}{P(T)} = \frac{0.5 \cdot 0.2}{0.146} = \frac{50}{73}$$

Si se elige al azar un individuo que ha comprado en Mitienda la probabilidad de que sea de los municipios M2 o M3 vale $1 - P(M1/T) = 1 - \frac{50}{73} = \frac{23}{73} \approx 0.3151$.

EvAU 2024 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	E

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se consideran las matrices M , P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \quad \text{y} \quad (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

- b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

2. (2 puntos)

- a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3}.$$

- b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine para que valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b .

3. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a.$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.
b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

- a) Determine las asíntotas de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

5. (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el

triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

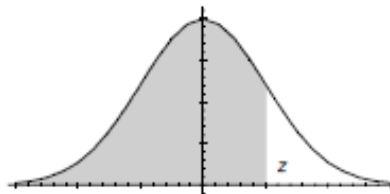
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.
8. (2 puntos) La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50% de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7% de los días. Además, el 35% de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
- a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.
9. (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.
- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .
b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\bar{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.
10. (2 puntos) Según los datos del INE, el 45, 68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23, 98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%.
Elijiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:
- a) Viaje por vacaciones.
b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \quad \text{y} \quad (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

a) Sustituimos en las ecuaciones matriciales y las resolvemos.

$$M \cdot N = 2N \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b = -2 \rightarrow \boxed{2b+2=a} \\ -c+2 = 4 \rightarrow 2-4=c \rightarrow \boxed{c=-2} \end{cases}$$

$$\{c = -2\} \Rightarrow N^t \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-4 & -b+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (N^t \cdot M)^t = \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix}$$

$$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a-3b \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a-3b-4 \\ -b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a-3b-4 = -1 \rightarrow -2a-3b = 3 \\ -b+1 = 2 \rightarrow -b = 1 \rightarrow \boxed{b=-1} \end{cases} \Rightarrow -2a+3 = 3 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Con los valores $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$ también se cumple la primera ecuación obtenida ($2b+2=a$). Los valores buscados son $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$.

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$ la matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$$

Calculamos M^3 .

$$\begin{aligned} M^3 &= M^2 \cdot M = \{M^2 = M + 2I\} = (M + 2I)M = M^2 + 2I \cdot M = \{M^2 = M + 2I\} = \\ &= (M + 2I) + 2M = 3M + 2I = 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos M^{-1} .

$$M^2 = M + 2I \Rightarrow M^2 - M = 2I \Rightarrow M(M - I) = 2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \frac{1}{2}(M - I) = I \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3}.$$

b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine para que valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b .

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (\sqrt{x} - a) dx = \int \sqrt{x} dx - \int a dx = \int x^{1/2} dx - \int a dx = \frac{x^{1/2+1}}{1+\frac{1}{2}} - ax = \frac{2}{3} x^{3/2} - ax + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - ax \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} 1^{3/2} - a \right] - \left[\frac{2}{3} 0^{3/2} - a \cdot 0 \right] = \frac{2}{3} - a$$

Igualamos este resultado a $\frac{2}{3}$ y obtenemos el valor de a .

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Rightarrow -a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

El valor buscado es $a = 0$.b) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$.

- Existe $f(0) = 0 + 2 = 2$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - b = 0 - b = -b$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 2 = 2$.
- Los tres valores son iguales $\rightarrow -b = 2 \rightarrow b = -2$.

El valor del parámetro que hace que la función sea continua es $b = -2$.

Para $b = -2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad de la función.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es $f(x) = x^2 + 2$ y es derivable con derivada $f'(x) = 2x$.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = 3x + 2$ y es derivable con derivada $f'(x) = 3$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$ comprobando si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = 0 \neq 3 = f'(0^+)$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en $x = 0$.La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

3. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a.$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.
- b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

a) La función es la integral de la derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{-1}{x^2} + a dx = \int -x^{-2} + a dx = \frac{-x^{-2+1}}{-2+1} + ax + C = \frac{1}{x} + ax + C$$

La función pasa por $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$, lo que implica que $f(1) = 3$ y $f(2) = \frac{7}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} + ax + C \\ f(1) = 3 \\ f(2) = \frac{7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 = \frac{1}{1} + a + C \\ \frac{7}{2} = \frac{1}{2} + 2a + C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = a + C \\ 3 = 2a + C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - a = C \\ 3 = 2a + C \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2a + 2 - a \Rightarrow \boxed{1 = a} \Rightarrow \boxed{C = 2 - 1 = 1}$$

El parámetro debe tomar el valor $a = 1$. La función queda $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \frac{1}{x} + x + C$ y su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

La derivada es $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1$. Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = -1 \Rightarrow -1 = -x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-1}{(-2)^2} + 1 = \frac{3}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{-1}{(-0.5)^2} + 1 = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

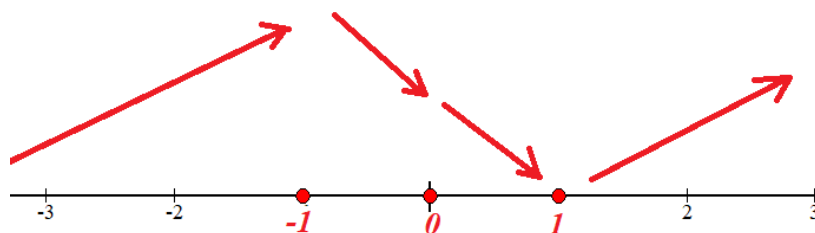
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{-1}{0.5^2} + 1 = -3 < 0$.

La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-1}{2^2} + 1 = \frac{3}{4} > 0$. La

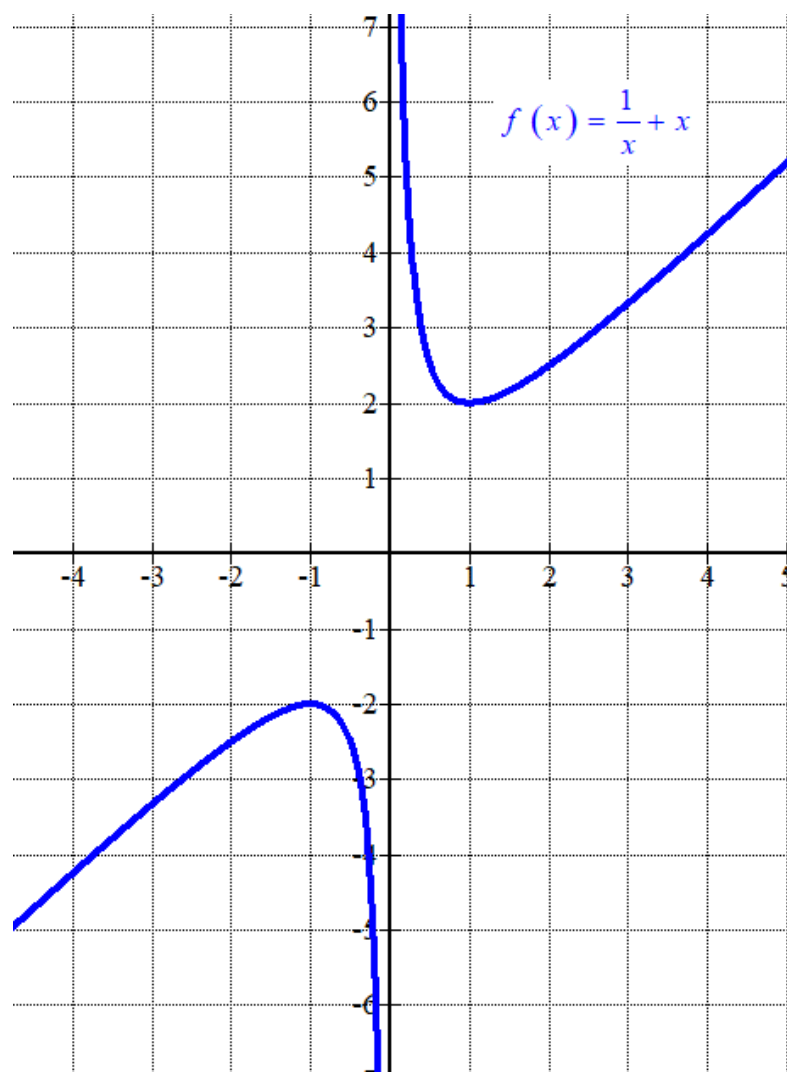
función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{4 + 4}{4 - 4} = \frac{8}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{4 + 4}{2^2 - 4} = \frac{8}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$y = 1$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

b) La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \Rightarrow f(1) = \frac{1 + 4}{1 - 4} = \frac{-5}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - 2x(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 8x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-16}{(1^2 - 4)^2} = \frac{-16}{9}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y + \frac{5}{3} = \frac{-16}{9}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-16}{9}x + \frac{16}{9} - \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-16}{9}x + \frac{1}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = \frac{-16}{9}x + \frac{1}{9}$.

5. (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Llamamos x e y a los números que buscamos.

Las restricciones del problema son:

Sabemos que $0 \leq x, y \leq 10$

“El doble del primero menos el segundo no pase de 10” $\rightarrow 2x - y \leq 10$.

“El triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12” $\rightarrow 3x + 2y \geq 12$.

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \leq 10 \end{array} \right\}$$

Deseamos minimizar el valor de su suma $S(x, y) = x + y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$2x - y = 10$$

$$3x + 2y = 12$$

$$x = 10$$

$$y = 10$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

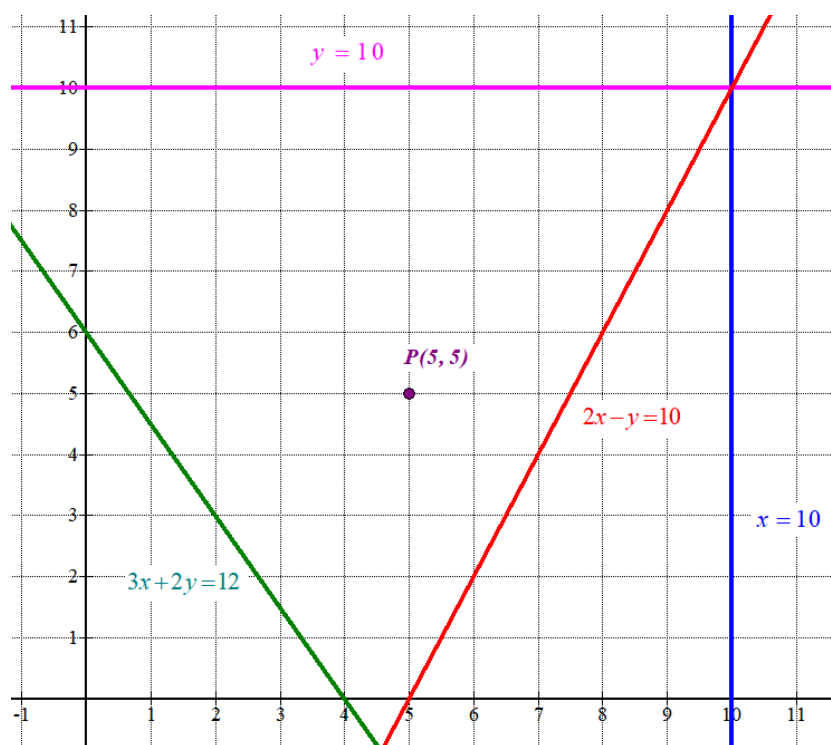
x	$y = 2x - 10$
0	-10
5	0
10	10

x	$y = \frac{12 - 3x}{2}$
0	6
2	3
4	0

$x = 10$	y
10	0
10	5
10	10

x	$y = 10$
0	10
5	10
10	10

Primer
cuadrante



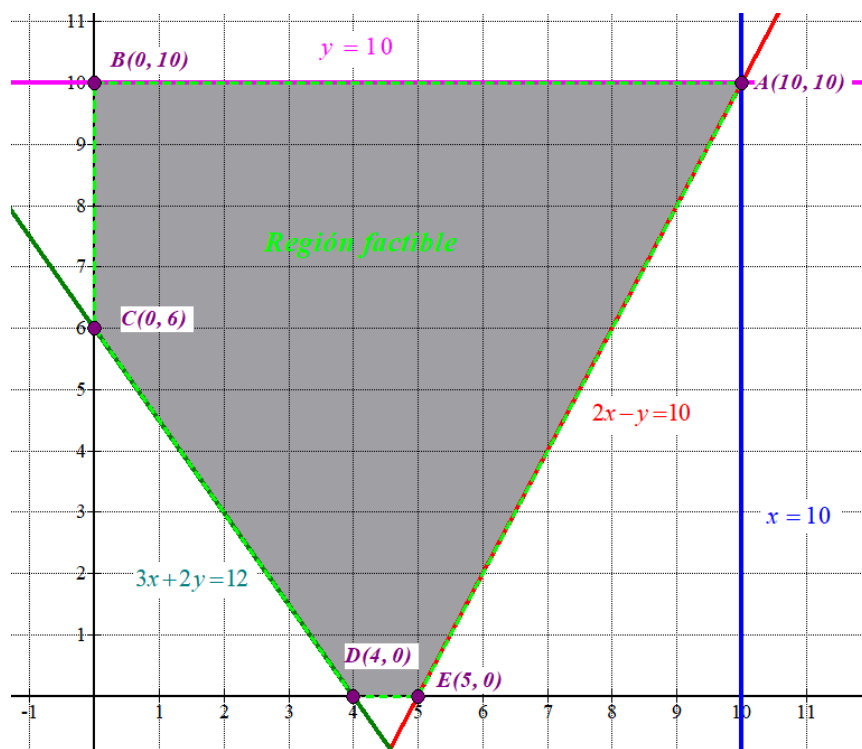
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \leq 10 \end{array} \right\} \text{ la región está situada en el primer cuadrante por}$$

debajo de la recta horizontal **rosa** y por encima de las rectas **verde** y **roja**.

Lo comprobamos viendo si el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 - 5 \leq 10 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \geq 12 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \\ 5 \leq 10 \\ 5 \leq 10 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función suma $S(x, y) = x + y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A(10, 10) \rightarrow S(10, 10) = 10 + 10 = 20$$

$$B(0, 10) \rightarrow S(0, 10) = 0 + 10 = 10$$

$$C(0, 6) \rightarrow S(0, 6) = 0 + 6 = 6$$

$$D(4, 0) \rightarrow S(4, 0) = 4 + 0 = 4 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$E(5, 0) \rightarrow S(5, 0) = 5 + 0 = 5$$

El valor mínimo es 4 y se consigue en el vértice $D(4, 0)$. Los números buscados son 4 y 0. Siendo la suma mínima 4.

6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Llamamos “x” al número de guitarras, “y” al número de pianos y “z” al número de violines.

“En una tienda de música se tienen 70 instrumentos” $\rightarrow x + y + z = 70$

“La cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras” $\rightarrow y + z = x$

“Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} N^{\circ} \text{ violines} = z \\ N^{\circ} \text{ pianos} = 2y \\ N^{\circ} \text{ guitarras} = 4x \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 2y + z = 180$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ y + z = x \\ 4x + 2y + z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + y + z = 70 \\ 4(y + z) + 2y + z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 70 \\ 4y + 4z + 2y + z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 35 \\ 6y + 5z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 35 - y \\ 6y + 5z = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y + 5(35 - y) = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y + 175 - 5y = 180 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{z = 35 - 5 = 30} \Rightarrow \boxed{x = 5 + 30 = 35}$$

En la tienda de música tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 + 9a - 24 - 15 - 2a = 7a - 21.$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 7a - 21 = 0 \Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = \frac{21}{7} = 3$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 6 \quad 3 \quad 9 \quad 6 \\ -6 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 8 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \\ -8 \quad -4 \quad -12 \quad -8 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -7 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -7 \quad -6 \\ 0 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{2 \quad 1 \quad 3 \quad 2}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Resumiendo: Para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 3$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ y + 7z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ \boxed{y = 6 - 7z} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 6 - 7z + 3z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4z = -4 \Rightarrow x - 2z = -2 \Rightarrow \boxed{x = -2 + 2z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = 3$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

- 8.** (2 puntos) La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50% de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7% de los días. Además, el 35% de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
- a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
- b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Llamamos N a “el día está nublado” y B a “la temperatura baja de los 10°”.

Nos proporcionan unos datos que nos permite establecer que $P(N) = 0.5$, $P(B) = 0.07$ y $P(N \cup B) = 0.35$.

Los datos son incoherentes pues tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} P(N \cup B) = 0.35 \\ P(N) = 0.5 \end{array} \right\} \Rightarrow P(N \cup B) = 0.35 < 0.5 = P(N)$$

Absurdo, pues no es posible que el suceso unión tenga probabilidad menor que la probabilidad de uno de los sucesos. De todas formas lo resolvemos

- a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(N \cup B) = 0.35 \\ P(N) = 0.5 \\ P(B) = 0.07 \\ P(N \cup B) = P(N) + P(B) - P(B \cap N) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.35 = 0.5 + 0.07 - P(B \cap N) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap N) = 0.57 - 0.35 = 0.22$$

También es absurdo el resultado pues la probabilidad de la intersección es mayor que la de uno de los sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(B \cap N) = 0.22 \\ P(B) = 0.07 \end{array} \right\} \Rightarrow P(B \cap N) = 0.22 > 0.07 = P(B)$$

La probabilidad de que un día esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados (sin pensar en lo ilógico del resultado) es de 0.22.

- b) Nos piden calcular $P(\overline{N} / \overline{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{N} / \overline{B}) = \frac{P(\overline{N} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{N \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(N \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0.35}{1 - 0.07} = \boxed{\frac{65}{93} \approx 0.699}$$

La probabilidad de que no esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados es de $\frac{65}{93} \approx 0.699$.

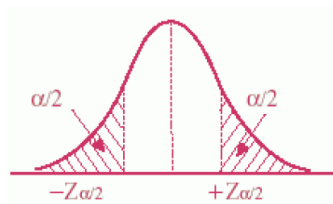
9. (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.
- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .
- b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\bar{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

$X = \text{"El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española"}$
 $X = N(\mu, 8)$

- a) Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 65$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 4.6063$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (65 - 4.6063, 65 + 4.6063) = (60.3937, 69.6063)$$

- b) Suponemos que $X = N(67, 8)$

La distribución de las medias muestrales de tamaño 10 sigue una distribución normal con la

misma media y con desviación típica $\sigma = \frac{8}{\sqrt{10}}$.

$$\bar{X}_{10} = N\left(67, \frac{8}{\sqrt{10}}\right)$$

Nos piden calcular $P(65 \leq \overline{X}_{10} \leq 69)$.

$$P(65 \leq \overline{X}_{10} \leq 69) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\overline{X}_{10} - 67}{8/\sqrt{10}} \end{array} \right\} = P\left(\frac{65-67}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{69-67}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0.79 \leq Z \leq 0.79) =$$

$$= P(Z \leq 0.79) - P(Z \leq -0.79) = P(Z \leq 0.79) - P(Z \geq 0.79) =$$

$$= P(Z \leq 0.79) - [1 - P(Z \leq 0.79)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7852 - 1 + 0.7852 = \boxed{0.5704}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales tiene un valor de 0.5704.

10. (2 puntos) Según los datos del INE, el 45,68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%.

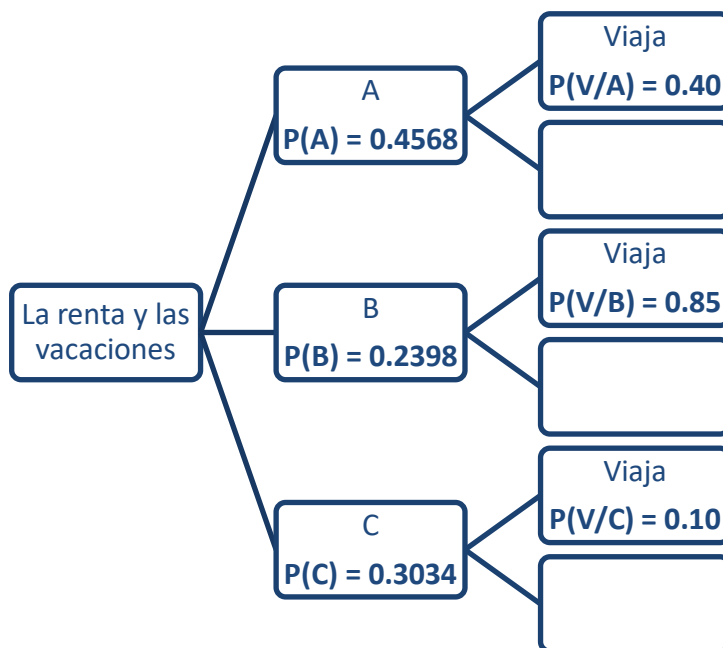
Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Llamamos A al suceso “una familia española tiene una renta mensual de 1500 a 3000 euros”, B a “una familia española tiene una renta mensual superior a 3000 euros”, C a “una familia española tiene una renta mensual inferior a 1500 euros” y V al suceso “la familia viaja por vacaciones”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= 0.4568 \cdot 0.4 + 0.2398 \cdot 0.85 + 0.3034 \cdot 0.1 = \boxed{0.41689}$$

La probabilidad de que una familia elegida al azar viaje por vacaciones es de 0.41689.

b) Nos piden calcular $P((A \cup B)/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cup B)/V) = \frac{P((A \cup B) \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A \cap V) + P(B \cap V)}{P(V)} =$$

$$= \frac{P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B)}{P(V)} = \frac{0.4568 \cdot 0.4 + 0.2398 \cdot 0.85}{0.41689} \approx \boxed{0.9272}$$

La probabilidad de que una familia que viaja por vacaciones tenga una renta mensual superior a 1500 € es de 0.9272.

EvAU 2024 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	F

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

- c) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2 .
- b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , calcule B^2 y B^{10} .
2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:
- $$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2}.$$
- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- b) Para $a = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ k & \text{si } 0 < x < 2. \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.
- b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

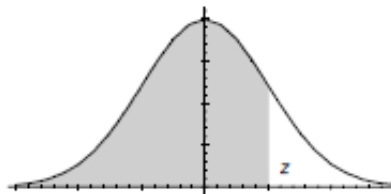
- a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
- b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

5. (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, P1 y P2. Cada kg de P1 contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso P1 le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso P2 de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?
6. (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.
7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a :
- $$\left. \begin{array}{l} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{array} \right\}$$
- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.
8. (2 puntos) El 80% de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35% de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70% de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:
- a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.
9. (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.
- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\bar{X}$, sea menor de 30,5 minutos.
10. (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20% de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5% de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50% de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45% de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50%, 40% y 10%, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:
- a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.
b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2 .
 b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , calcule B^2 y B^{10} .

a) Calculamos la expresión de A^2 e igualamos a O .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -a - b \\ 4a + 4b & -4 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -a - b \\ 4a + 4b & -4 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = \pm 2 \\ -a - b = 0 \rightarrow -a = b \\ 4a + 4b = 0 \rightarrow a + b = 0 \rightarrow b = -a \\ -4 + b^2 = 0 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = -2 \\ a = -2, b = 2 \end{cases}$$

Existen dos soluciones posibles: $a = 2, b = -2$ o bien $a = -2, b = 2$.

b) Para $a = 2$ y $b = -2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de la matriz B.

$$B = A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos las potencias pedidas.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 4 & -3 + 1 \\ 12 - 4 & -4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2 B^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 - 16 & -10 + 6 \\ 40 - 24 & -16 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B^8 = B^4 B^4 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 - 64 & -36 + 28 \\ 144 - 112 & -64 + 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 32 & -15 \end{pmatrix}$$

$$B^{10} = B^8 B^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ 32 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 - 64 & -34 + 24 \\ 160 - 120 & -64 + 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2}.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Para $a = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a) Obtenemos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = a + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = a + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Hacemos que la derivada en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= a + \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2}} = a + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f'(1) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor buscado es $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$.

Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 2} = -\infty + \infty = \text{Indeterminación (conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2})(x - \sqrt{x^2 + 2})}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 2})^2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 2)}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x - \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{-2}{-\infty - \infty} = \frac{-2}{-\infty} = \boxed{0}$$

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ k & \text{si } 0 < x < 2. \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.
- b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$

a) La función es continua en cada intervalo de definición.

Para que la función sea continua en todo su dominio debe serlo en los cambios de definición: $x = 0$ y $x = 2$.

La función debe ser continua en $x = 0$.

- Existe $f(0) = e^0 = 1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} k = k$.
- Los tres valores son iguales $\rightarrow k = 1$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Comprobamos si para este valor la función es continua en $x = 2$.

- Existe $f(2) = -2 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -2x^2 + x + 6 = 0$.
- ¿Los tres valores son iguales?

Esta última condición no se cumple.

No existe ningún valor de k que haga que la función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando $k = 1$ La función queda $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

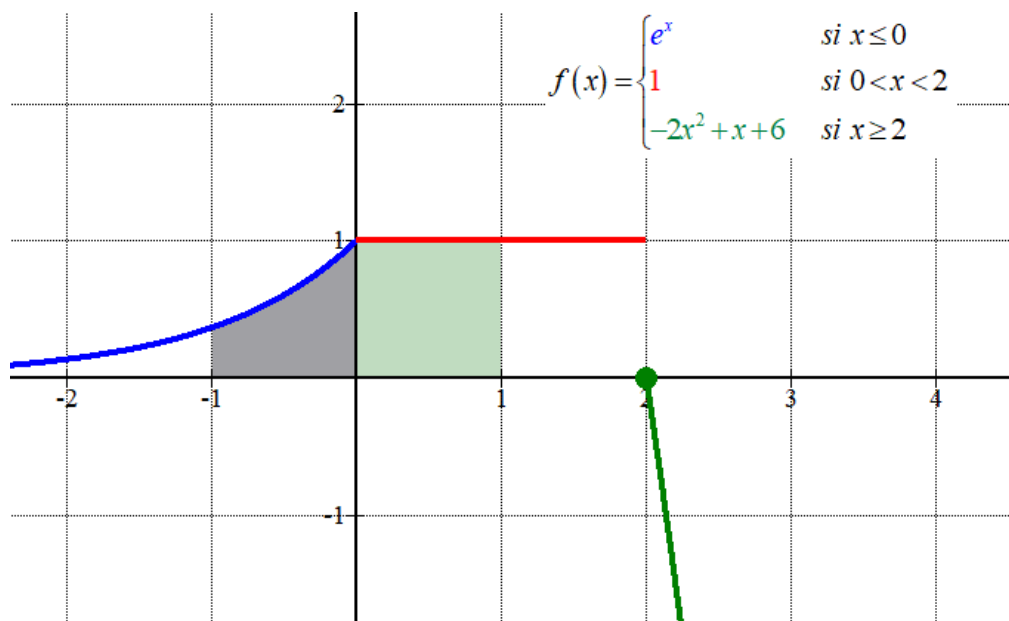
Vemos si la función corta el eje de abscisas entre -1 y 1 .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{¡Imposible!} \\ 1 = 0 & \text{¡Imposible!} \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si } x \geq 2 \text{ No la consideramos} \end{cases}$$

La función no corta el eje de abscisas entre -1 y 1 . El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es el valor de la integral de la función entre -1 y 1 . Como existe un cambio de definición en el intervalo $(-1, 1)$ calculamos el área como la suma de dos integrales definidas.

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 1 dx =$$

$$= \left[e^x \right]_{-1}^0 + \left[x \right]_0^1 = e^0 - e^{-1} + 1 - 0 = 1 - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{1}{e} \approx 1.63 \text{ u}^2$$



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

- a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow x = \sqrt{-3} = \text{No existe}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 3) - 2x(2x^2 - 6)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{\cancel{4x^3} + 12x - \cancel{4x^3} + 12x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{24x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} = 0 \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{24(-1)}{((-1)^2 + 3)^2} = \frac{-24}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{24(1)}{(1^2 + 3)^2} = \frac{24}{16} > 0$. La

función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) La recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3} \Rightarrow f(1) = \frac{2 - 6}{1 + 3} = -1$$

$$f'(x) = \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{24}{(1^2 + 3)^2} = \frac{3}{2}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

5. (2 puntos) Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, P1 y P2. Cada kg de P1 contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso P1 le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso P2 de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

Llamamos x e y a los kilos de pienso de P1 y P2 que se deben fabricar.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Kg de cereales	Kg de leguminosas	Kg de otros componentes	Beneficio
Kg pienso P1 (x)	$0.5x$	$0.3x$	$0.2x$	x
Kg de pienso P2 (y)	$0.6y$	$0.2y$	$0.2y$	$2y$
TOTALES	$0.5x + 0.6y$	$0.3x + 0.2y$	$0.2x + 0.2y$	$x + 2y$

Las restricciones del problema son:

“Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas” $\rightarrow 0.5x + 0.6y \leq 30$,
 $0.3x + 0.2y \leq 12$.

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.5x + 0.6y \leq 30 \\ 0.3x + 0.2y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 6y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Deseamos maximizar el beneficio: $B(x, y) = x + 2y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$5x + 6y = 300$$

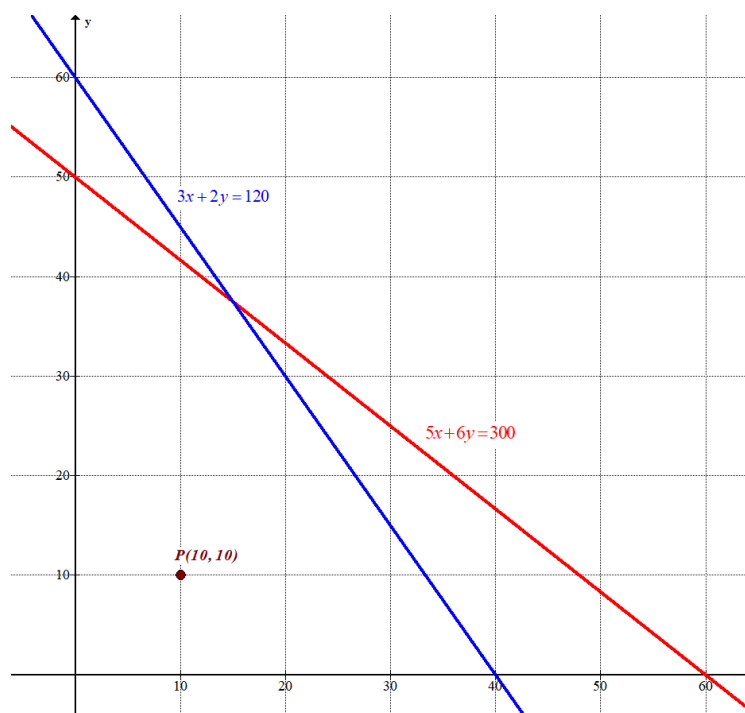
x	$y = \frac{300 - 5x}{6}$
0	50
30	25
60	0

$$3x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$
0	60
30	15
40	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



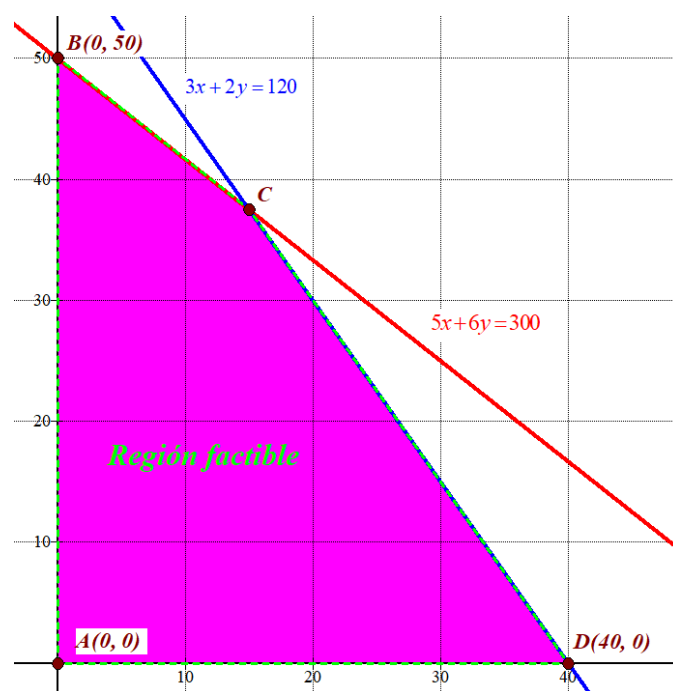
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 5x + 6y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región está situada en el primer cuadrante por

debajo de las rectas azul y roja.

Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 \leq 300 \\ 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 300 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \times(3) \rightarrow 15x + 18y = 900 \\ \times(-5) \rightarrow -15x - 10y = -600 \end{array}$$

$$\hline 8y = 300 \Rightarrow y = \frac{300}{8} = 37.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 6 \cdot \frac{300}{8} = 300 \Rightarrow 5x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{5} = 15 \Rightarrow \boxed{C(15, 37.5)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 0 + 2 \cdot 50 = 100 \text{ ; Máximo!}$$

$$C(15, 37.5) \rightarrow B(15, 37.5) = 15 + 2 \cdot 37.5 = 90$$

$$D(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 40$$

El beneficio máximo es 100 € y se consigue en el vértice D(0, 50). Lo que significa que se deben fabricar 0 kilos del pienso P1 y 50 kilos del pienso P2 para conseguir unos beneficios máximos de 100 €.

6. (2 puntos) De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Llamamos “x” al número de novelas prestadas, “y” al número de biografías prestadas y “z” al número de libros de autoayuda prestados.

“Se prestan 90 libros que son novelas, biografías y libros de autoayuda” $\rightarrow x + y + z = 90$

“Los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas” $\rightarrow z = \frac{x}{2}$

“El número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas” $\rightarrow y = x - 5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ z = \frac{x}{2} \\ y = x - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ y = x - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 90 \\ y = 2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3z + y = 90 \\ y = 2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z + 2z - 5 = 90 \Rightarrow 5z = 95 \Rightarrow \boxed{z = \frac{95}{5} = 19} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2 \cdot 19 - 5 = 33} \\ \boxed{x = 2 \cdot 19 = 38} \end{cases}$$

En la biblioteca se prestan un 90 % de libros entre novelas, biografías y libros de autoayuda. Las novelas son un 38 %, las biografías son un 33 % y los libros de autoayuda un 19 %.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a :

$$\begin{cases} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a+1 \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & -a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a+1 \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & -a & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2a(a+2) - 2a(a+1) - 0 - 0 - a^2 =$$

$$= 2a^2 + 4a - 2a^2 - 2a - a^2 = -a^2 + 2a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 2a = 0 \Rightarrow -a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \\ -2 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\ -2 \quad 4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \\ -2 \quad 4 \quad -6 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -8 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad -2 \quad 0 \quad 4 \\ -4 \quad 8 \quad -12 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -12 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 12 \quad -24 \quad 0 \\ 0 \quad -12 \quad 24 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -2 \quad 3 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 4 \quad -8 \quad 0 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A \quad 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3).

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

Resumiendo: Para $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $a = 0$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = -1$ sabemos que el sistema es compatible determinado (CASO 1).

Obtenemos la solución del sistema.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x = 4 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 - y - 2y = 1 \\ 2(4 - y) + z = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -3y = -3 \rightarrow \boxed{y = 1} \\ 8 - 2y + z = 2 \rightarrow -2y + z = -6 \end{array} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 + z = -6 \Rightarrow \boxed{z = -4} \\ \boxed{x = 4 - 1 = 3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Para $a = -1$ la solución del sistema es $x = 3, y = 1, z = -4$.

8. (2 puntos) El 80% de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35% de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70% de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:

- Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.
- No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Llamamos A a “la prenda ha sido fabricada en Asia” e I a “la prenda ha sido fabricada usando mano de obra infantil”.

Nos proporcionan unos datos que nos permite establecer que $P(A) = 0.60$, $P(I) = 0.35$ y $P(A \cup I) = 0.70$.

- Nos piden calcular $P(A \cap I)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup I) = 0.7 \\ P(A) = 0.6 \\ P(I) = 0.35 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.7 = 0.6 + 0.35 - P(A \cap I) \Rightarrow$$

$$P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I)$$

$$\Rightarrow P(A \cap I) = 0.6 + 0.35 - 0.7 = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que una prenda se haya fabricado en Asia y usando mano de obra infantil es de 0.25.

- Nos piden calcular $P(\bar{A} / \bar{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A} / \bar{I}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(\overline{A \cup I})}{1 - P(I)} = \frac{1 - P(A \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0.7}{1 - 0.35} = \boxed{\frac{6}{13} \approx 0.4615}$$

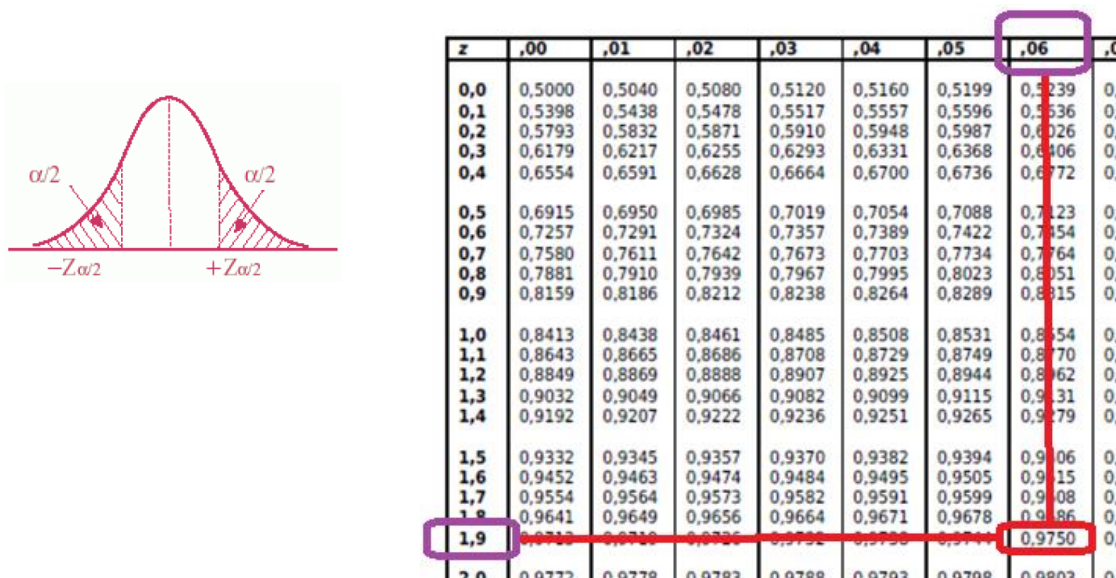
La probabilidad de que una prenda no se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil es de $\frac{6}{13} \approx 0.4615$.

9. (2 puntos) Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.
- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.
- b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\bar{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

$X = \text{"El tiempo que pasa un cliente en su establecimiento (en minutos)"}.$ $X = N(\mu, 3)$

- a) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



El error del intervalo de confianza lo igualamos a 1 y despejamos n .

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 3 \cdot 1.96 \Rightarrow n = (3 \cdot 1.96)^2 = 34.5744$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 35 clientes.

- b) Suponemos que $X = N(32, 3)$

La distribución de las medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media y con desviación típica $\sigma = \frac{3}{\sqrt{16}} = 0.75$. $\bar{X}_{16} = N(32, 0.75)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{16} \leq 30.5)$.

$$P(\bar{X}_{16} \leq 30.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\bar{X}_{16} - 32}{0.75} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

z	.00	.01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5833
0,3	0,6179	0,6218
0,4	0,6554	0,6593
0,5	0,6915	0,6954
0,6	0,7257	0,7296
0,7	0,7580	0,7618
0,8	0,7881	0,7919
0,9	0,8159	0,8196
1,0	0,8413	0,8449
1,1	0,8643	0,8679
1,2	0,8849	0,8885
1,3	0,9032	0,9068
1,4	0,9192	0,9228
1,5	0,9332	0,9368
1,6	0,9452	0,9488
1,7	0,9554	0,9590
1,8	0,9641	0,9677
1,9	0,9713	0,9748
2,0	0,9772	0,9808

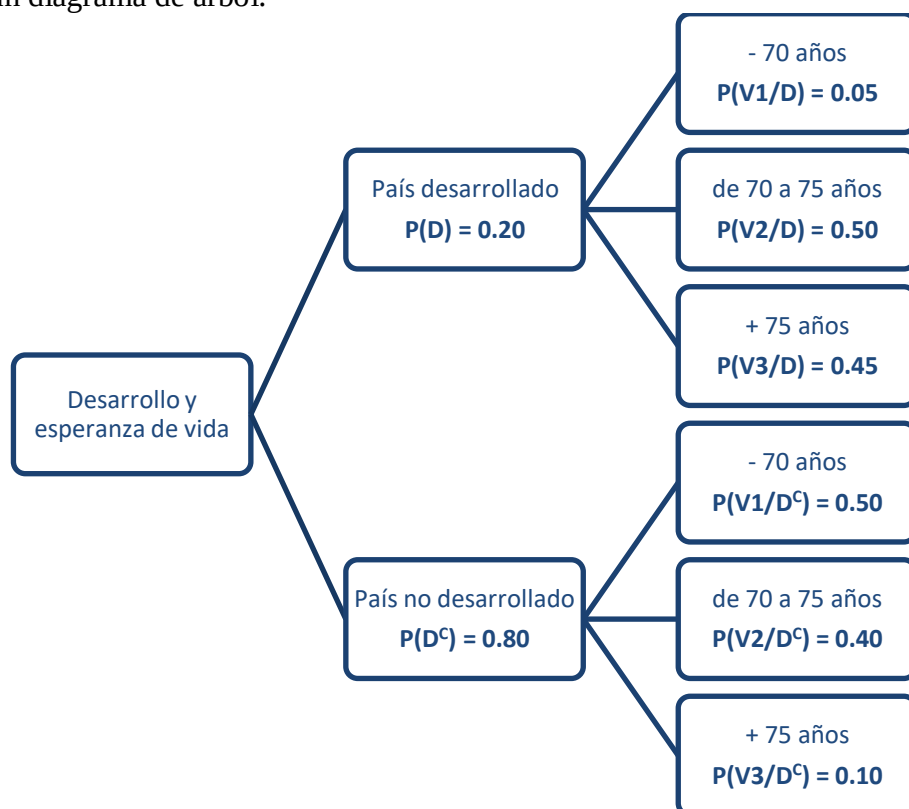
La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\bar{X}$, sea menor de 30,5 minutos tiene un valor de 0.0228.

10. (2 puntos) En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20% de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5% de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50% de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45% de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50%, 40% y 10%, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

- La esperanza de vida sea inferior a 70 años.
- Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Llamamos D al suceso “el país es desarrollado”, V1 a “en el país hay una esperanza de vida inferior a 70 años”, V2 a “en el país hay una esperanza de vida de 70 a 75 años” y V3 al suceso “en el país hay una esperanza de vida superior a los 75 años”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(V1)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V1) = P(D)P(V1/D) + P(D^c)P(V1/D^c) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.8 \cdot 0.5 = \boxed{0.41}$$

La probabilidad de que la esperanza de vida sea inferior a 70 años es de 0.41.

- Nos piden calcular $P(D^c/V1)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(D^c/V1) = \frac{P(D^c \cap V1)}{P(V1)} = \frac{P(D^c)P(V1/D^c)}{P(V1)} = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.41} = \frac{40}{41} \approx 0.9756$$

La probabilidad de que el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados, sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, es de $\frac{40}{41} \approx 0.9756$.

EvAU 2024 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.
b) Para $a = -2$, calcule A^{-1} .

2. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

- a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ ae^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

- a) Determine las asíntotas de esta función.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.
8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:
a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
b) Le guste el techno pero no el pop.
9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.
a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.
10. (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:
a) Mida más de 35 mm.
b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$, calcule A^{-1} .

a) Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = a^2(1-a) - 4 + 2 + 2a + 2a + 2(1-a) =$$

$$= a^2 - a^3 - 2 + 4a + 2 - 2a = -a^3 + a^2 + 2a = -a(a^2 - a - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de -1 , 0 y 2 .

b) Para $a = -2$ existe la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 4 + 2 - 4 - 4 + 6 = 8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

- a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.
 b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

a) La función $f(x)$ es la primitiva de la derivada $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 + x - 2 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Como la función pasa por el punto $(0, 2)$ entonces $f(0) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

La función $f(x)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$.

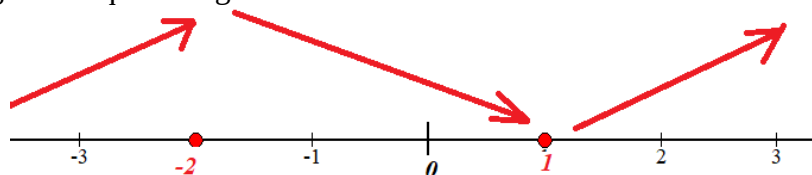
b) Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x^2 + x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = (-3)^2 - 3 - 2 = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 0^2 + 0 - 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(-2, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ ae^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
 b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

- a) La función es continua para $x < 1$ y para $x \geq 1$ pues está definida como una función polinómica y una función exponencial. Para que sea continua debe serlo en $x = 1$. Para ello deben ser iguales el valor de la función en $x = 1$ y los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= ae^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x + e^2 = 1^2 - 1 + e^2 = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{2x} = ae^2 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow ae^2 = e^2 \Rightarrow a = \frac{e^2}{e^2} = 1$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 1$.

- b) Para $a = 1$ la función es continua y su expresión es $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ e^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. En el intervalo $(1, 2)$ donde está la región de la cual deseamos hallar el área la función es $f(x) = e^{2x}$.

Como esta función no corta el eje de abscisas pues siempre es positiva el área de la región es la integral definida entre 1 y 2 de la función.

$$\text{Área} = \int_1^2 f(x) = \int_1^2 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 = \frac{e^4 - e^2}{2} \approx 23.6 \text{ u}^2$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ tiene un valor aproximado de 23.6 unidades cuadradas.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{-3-2}{(-3)^2-9} = \frac{-5}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{3-2}{3^2-9} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2-9} = \{\text{Grado del numerador} < \text{grado del denominador}\} = 0$$

$y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

b) La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9} \Rightarrow f(0) = \frac{0-2}{0^2-9} = \frac{2}{9}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-9) - 2x(x-2)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2-9-2x^2+4x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-0^2+4 \cdot 0-9}{(0^2-9)^2} = \frac{-1}{9}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - \frac{2}{9} = \frac{-1}{9}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{9}x + \frac{2}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = \frac{-1}{9}x + \frac{2}{9}$.

5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Llamemos x = “número de tabletas de 4 gramos”, y = “número de tabletas de 3 gramos”.
Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 1.5x + y$.

Las restricciones del problema son:

“Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente” $\rightarrow 4x + 3y \leq 60$

“Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos” $\rightarrow x \geq 3$

“Se necesitan al menos ocho tabletas de 3 gramos” $\rightarrow y \geq 8$

“Se necesitan al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos” $\rightarrow y \geq 2x$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \\ y \geq 2x \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$4x + 3y = 60$$

x	$y = \frac{60 - 4x}{3}$
0	20
3	16
6	12

$$y = 8$$

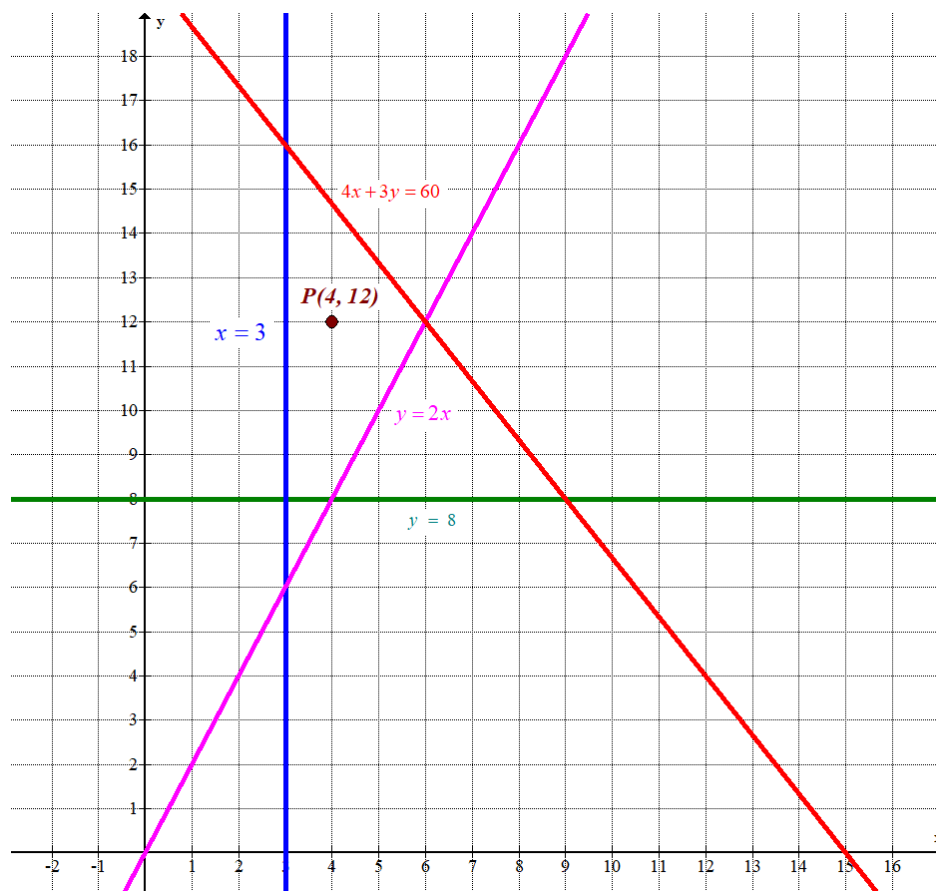
x	$y = 8$
0	8
3	8
4	8

$$x = 3$$

$x = 3$	y
3	0
3	8
3	16

$$y = 2x$$

x	$y = 2x$
0	0
4	8
6	12



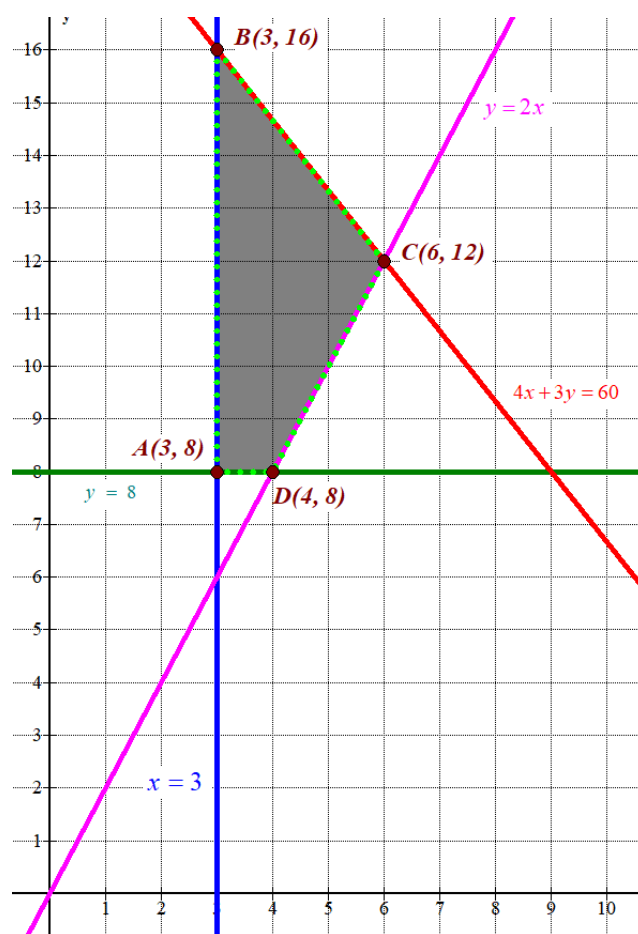
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ x \geq 3 \\ y \geq 8 \\ y \geq 2x \end{array} \right\} \text{ la región está en por encima de la recta horizontal}$$

verde, a la derecha de la recta vertical azul, por encima de la recta rosa y por debajo de la recta roja. Lo comprobamos probando si el punto $P(4, 12)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 4 + 3 \cdot 12 \leq 60 \\ 4 \geq 3 \\ 12 \geq 8 \\ 12 \geq 2 \cdot 4 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 1.5x + y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(3, 8) \rightarrow B(3, 8) = 1.5 \cdot 3 + 8 = 12.5$$

$$B(3, 16) \rightarrow B(3, 16) = 1.5 \cdot 3 + 16 = 20.5$$

$$C(6, 12) \rightarrow B(6, 12) = 1.5 \cdot 6 + 12 = 21 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(4, 8) \rightarrow B(4, 8) = 1.5 \cdot 4 + 8 = 14$$

El beneficio máximo es de 21 € y se consigue en el vértice $C(6, 12)$, que significa fabricar 6 tabletas de 4 gramos y 12 de 3 gramos.

6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Llamamos “x” al número de entradas generales, “y” al número de entradas para estudiantes y “z” al número de entradas infantiles.

“El equipo ha conseguido vender 600 entradas” $\rightarrow x + y + z = 600$

“Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros” $\rightarrow 10x + 8y + 5z = 4900$

“Ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles” $\rightarrow x = 2z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 10x + 8y + 5z = 4900 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 600 \\ 10 \cdot 2z + 8y + 5z = 4900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 600 \\ 8y + 25z = 4900 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 600 - 3z \\ 8y + 25z = 4900 \end{array} \right\} \Rightarrow 8(600 - 3z) + 25z = 4900 \Rightarrow 4800 - 24z + 25z = 4900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 100} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 200} \\ \boxed{y = 600 - 300 = 300} \end{cases}$$

Se han vendido 200 entradas generales, 300 para estudiantes y 100 entradas infantiles.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 1 + 1 - a - a - 2 = 2a^2 - 2a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a = 0 \Rightarrow 2a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad -4 \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{2 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|cccc} & \overbrace{2 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 0$ es incompatible (sin solución) y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Lo resolvemos para $a=1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 3)

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 3^a \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 1 - 2x - y \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x + \cancel{y} + 1 - 2x - \cancel{y} = 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 - 2(-1) - y \Rightarrow z = 3 - y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}}$$

Para $a=1$ las soluciones del sistema son $x = -1$; $y = \lambda$; $z = 3 - \lambda$; siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. (2 puntos) En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:
- Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
 - Le guste el techno pero no el pop.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos que vienen implícitos en los datos proporcionados en el problema.

	Gusta el techno	No le gusta el techno	
Gusta el pop	30		90
No gusta el pop			
	70		200

Completamos la tabla.

	Gusta el techno	No le gusta el techno	
Gusta el pop	30	60	90
No gusta el pop	40	70	110
	70	130	200

Aplicamos la regla de Laplace y respondemos a las preguntas planteadas.

- a) De los 200 asistentes sólo hay 70 personas a las que no les gusta ni el techno ni el pop, por lo que hay $200 - 70 = 130$ que le gusta al menos uno de los dos géneros.

$$P(\text{Guste al menos uno de los géneros}) = \frac{130}{200} = \frac{13}{20} = 0.65$$

- b) De los 200 asistentes hay 40 asistentes que les gusta el techno y no el pop.

$$P(\text{Guste el techno y no el pop}) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5} = 0.2$$

9. (2 puntos) La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.
- a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
- b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90%.

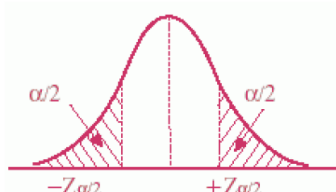
$X =$ “La cantidad de agua absorbida en mililitros por un tipo particular de planta acuática”

$$X = N(\mu, 8)$$

- a) Tamaño de muestra es $n = 25$ y la media muestral es $\bar{x} = 120$ ml

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9716	0.9719	0.9722	0.9725	0.9728	0.9730

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}} = 3.136 \text{ ml}$$

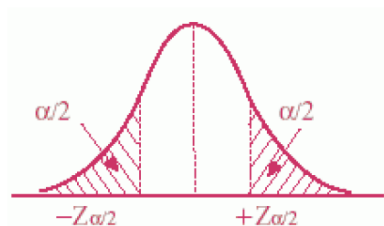
El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (120 - 3.136, 120 + 3.136) = (116.864, 123.136)$$

La cantidad de agua absorbida estará comprendida entre 116.864 ml y 123.136 ml, con una confianza del 95%.

- b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

Igualemos el error a 1 ml y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 8 \Rightarrow n = (1.645 \cdot 8)^2 \Rightarrow \boxed{n = 173.19}$$

Para que el error cometido sea menor de 1 ml, con un nivel de confianza del 90%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 174 plantas.

10. (2 puntos) En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35%, el 20% y el 45% de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15% de los alevines criados en el tanque A, el 30% de los alevines criados en el tanque B y el 25% de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

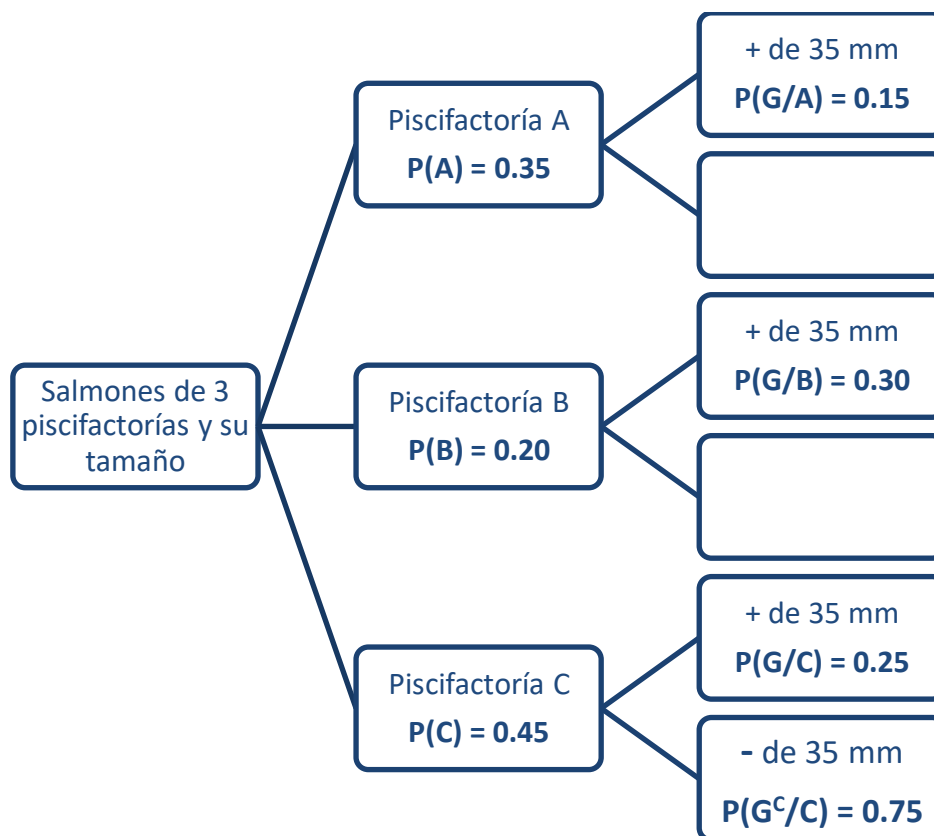
a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Llamamos A, B y C al suceso “el alevín es criado en tanque A, B o C, respectivamente”.

Llamamos G al suceso “el alevín mide más de 35 mm”

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.15 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.25 = \boxed{0.225}$$

b) Nos piden calcular $P(C/\bar{G})$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{G}) = \frac{P(C \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{P(C)P(\bar{G}/C)}{1 - P(G)} = \frac{0.45 \cdot 0.75}{1 - 0.225} = \boxed{\frac{27}{62} \approx 0.436}$$

EvAU 2024 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	H

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.
- b) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3 .
2. (2 puntos) La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right)$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

- a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.
- b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.
3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-x^2}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.
- b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}$$

- a) Determine las asíntotas de la función.
- b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

5. (2 puntos) Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

6. (2 puntos) Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + az = 2 \\ x + y + z = a \\ -2x + 2ay + 8z = -13 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

8. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.7$ y $P(B) = 0.15$. Además, se sabe que $P(\bar{B} / A) = 0.8$ donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

- $P(A \cup B)$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

9. (2 puntos) El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95%.
- Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\bar{X}$, sea mayor de 6 semanas.

10. (2 puntos) En la base de datos de Spotify el 80% de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30% de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20% como música urbana y el 50% restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10%, 50% y 40% respectivamente. Elijiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

- La canción pueda clasificarse como música urbana.
- Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.

b) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3 .

a) Realizamos el producto $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0+1 \\ -1+0+1 \\ -2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto $A^3 \cdot B$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+2 & -2+0-2 & -1+2+0 \\ -1+0+2 & 2+0-2 & 1+0+0 \\ -2-2+0 & 4+0+0 & 2-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4-2 & -10+0+2 & -5+4+0 \\ 1+0-2 & -2+0+2 & -1+0+0 \\ -4-4+0 & 8+0+0 & 4-4+0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0+1 \\ -1+0+1 \\ -8+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz $A - 2I$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \{\text{Columna } 1^a = \text{Columna } 3^a\} = 0$$

Al tener la matriz $A - 2I$ dos columnas iguales su determinante vale 0.

2. (2 puntos) La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right)$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

- a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.
b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

- a) La función $f(t)$ es la primitiva de la derivada $f'(t)$.

$$f(t) = \int f'(t) dt = \int \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) dt = \int \frac{3}{2} t - \frac{3}{4} t^2 dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} + C$$

Como para $t = 0$ la función vale 0 entonces $f(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} + C \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{3 \cdot 0^2}{4} - \frac{0^3}{4} + C \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

La función $f(t)$ tiene la expresión $f(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4}$.

- b) Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \\ f'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) = 0 \Rightarrow t - \frac{1}{2} t^2 = 0 \Rightarrow t \left(1 - \frac{1}{2} t \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{t = 0} \\ 1 - \frac{1}{2} t = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2} \end{array} \right.$$

Tenemos dos puntos críticos. Determinamos si son máximos o mínimos sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Rightarrow f''(t) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2t \right) = \frac{3}{2} (1 - t) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{3}{2} (1 - 0) = \frac{3}{2} > 0 \\ f''(2) = \frac{3}{2} (1 - 2) = -\frac{3}{2} < 0 \end{array} \right.$$

La función tiene un mínimo relativo en $t = 0$ y un máximo relativo en $t = 2$.

La sustancia disuelta es máxima a las 2 horas de la preparación de la disolución.

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-x^2}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.
 b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

- a) En el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es una exponencial y existe. En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene una expresión racional cuyo denominador se anula para $x = 2$.
 El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Para que la función sea continua en $x = 1$ deben ser iguales el valor de la función en $x = 1$ y los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2}{x-2} = \frac{-1^2}{1-2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

La función es continua en $x = 1$.

- b) Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-2x(x-2) - 1(-x^2)}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + x^2}{(x-2)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \rightarrow -x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1, +\infty) \\ x = 4 \in (1, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Hemos encontrado un punto crítico en $x = 4$.

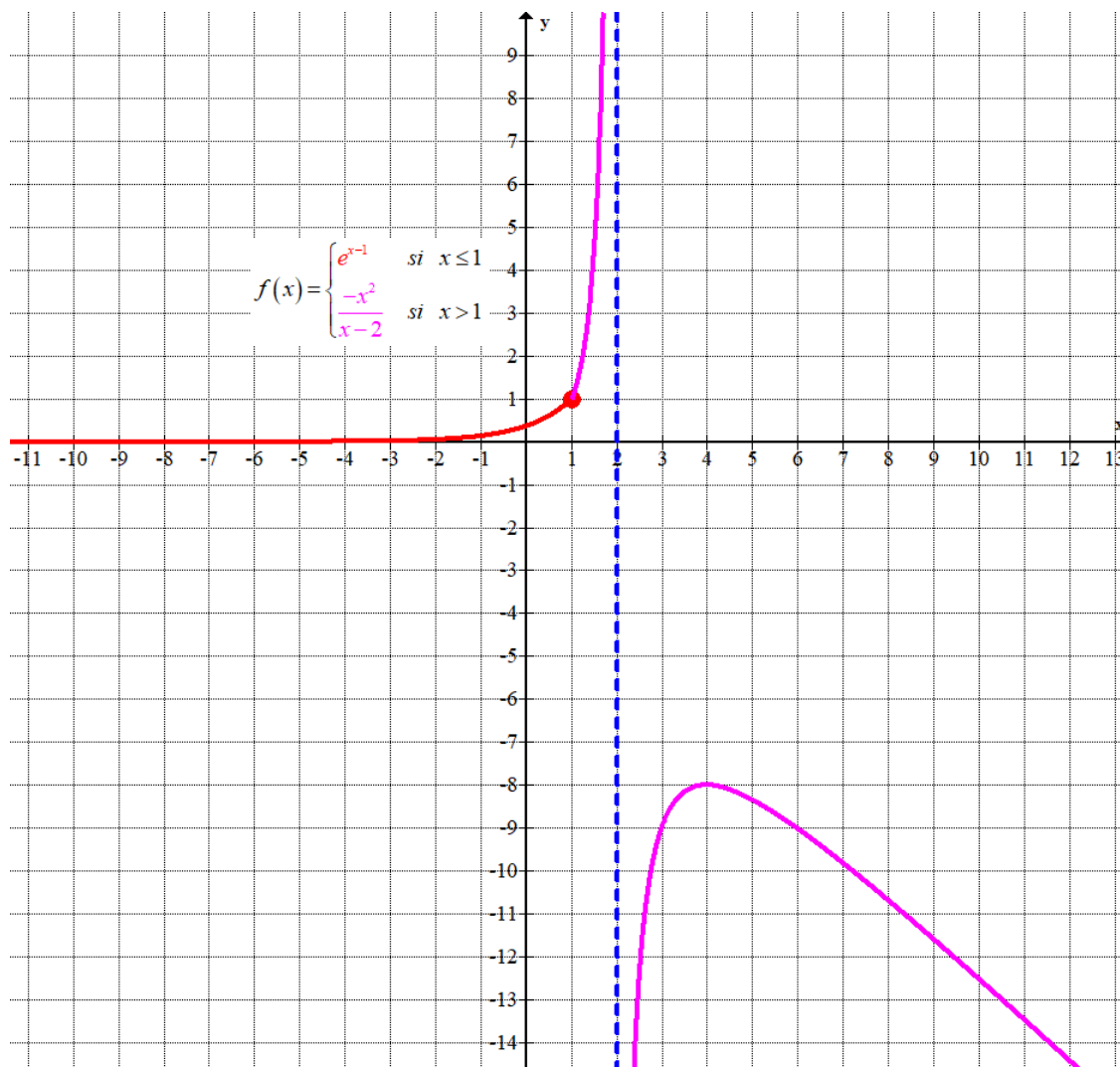
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^{0-1} = e^{-1} > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-1.5^2 + 4 \cdot 1.5}{(1.5-2)^2} = 15 > 0. \text{ La función crece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3^2 + 4 \cdot 3}{(3-2)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{-5^2 + 4 \cdot 5}{(5-2)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(4, +\infty)$.



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \frac{(-2)^5 - 1}{(-2)^4 - 16} = \frac{-33}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \frac{2^5 - 1}{2^4 - 16} = \frac{31}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 1}{x^5 - 16x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^5} - 1 - \cancel{x^5} + 16x}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x - 1}{x^4 - 16} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} < \text{grado del denominador}\} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

b) La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

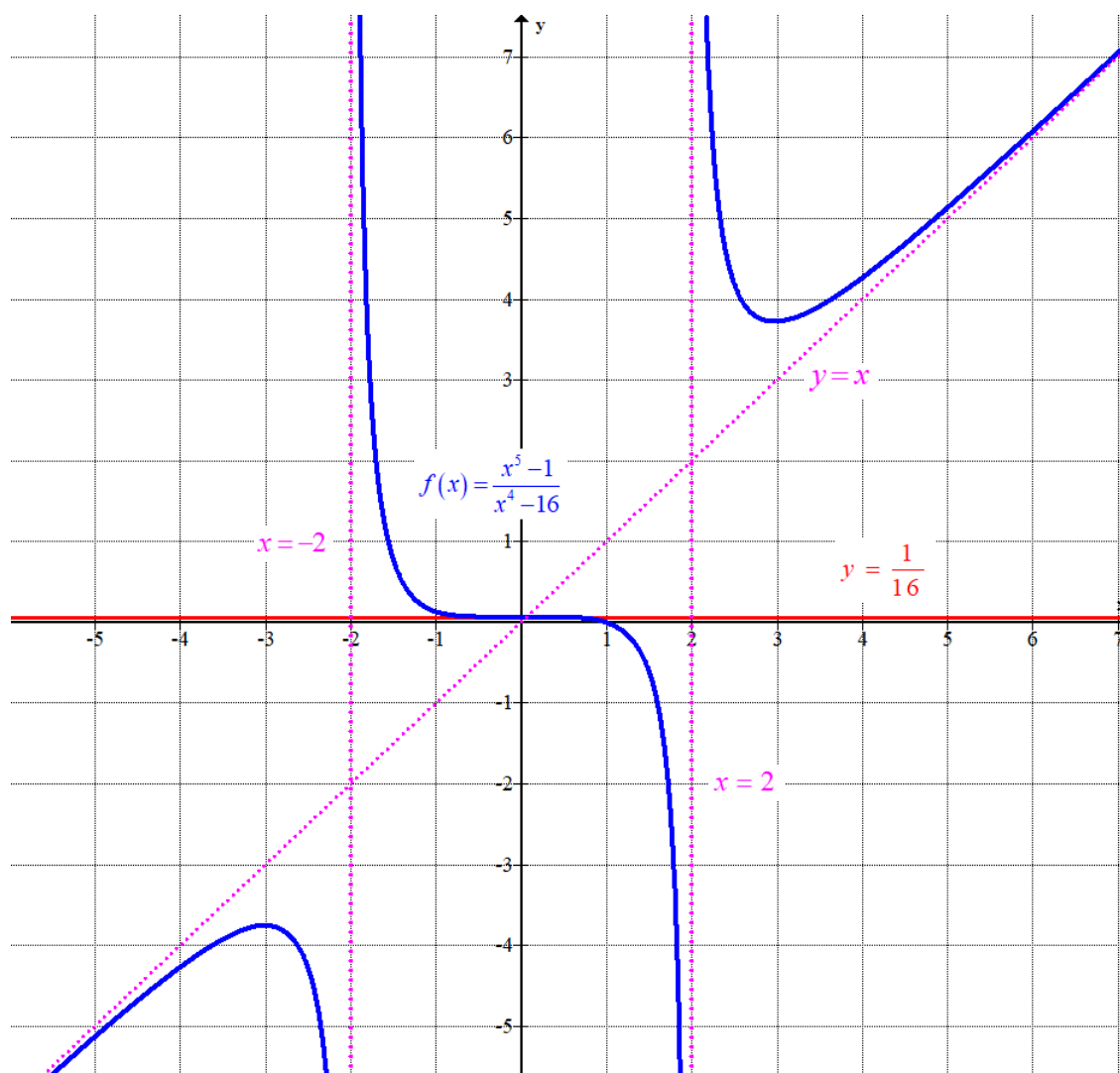
$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} \Rightarrow f(0) = \frac{0^5 - 1}{0^4 - 16} = \frac{1}{16}$$

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^4(x^4 - 16) - 4x^3(x^5 - 1)}{(x^4 - 16)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{5 \cdot 0^4(0^4 - 16) - 4 \cdot 0^3(0^5 - 1)}{(0^4 - 16)^2} = \frac{0}{16^2} = 0$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{16} = 0x \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{16}}$$

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = \frac{1}{16}$.



5. (2 puntos) Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

Llamemos x = “número de litros de limonada”, y = “número de litros de naranjada”.
Hacemos una tabla para organizar la información proporcionada.

	Limones	Naranjas	Gramos de azúcar	Ingresos
Litros de limonada (x)	$4x$		$80x$	$2x$
Litros de naranjada (y)	y	$6y$	$50y$	$2.5y$
	$4x + y$	$6y$	$80x + 50y$	$2x + 2.5y$

Deseamos maximizar los ingresos que vienen expresados como $I(x, y) = 2x + 2.5y$.

Las restricciones del problema son:

“Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración” $\rightarrow$
 $4x + y \leq 80$; $6y \leq 72$; $80x + 50y \leq 1720$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 80 \\ 6y \leq 72 \\ 80x + 50y \leq 1720 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 80 \\ y \leq 12 \\ 8x + 5y \leq 172 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$4x + y = 80$$

$$y = 12$$

x	$y = 80 - 4x$
0	20
19	4
20	0

x	$y = 12$
0	12
14	12
20	12

$$8x + 5y = 172$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{172 - 8x}{5}$
0	$172 / 5 = 34.4$
14	12
19	4

Primer cuadrante

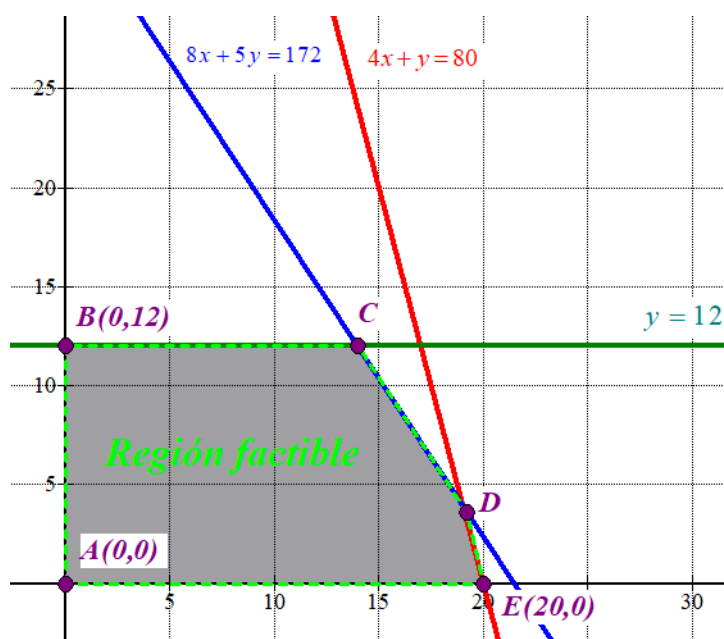


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 80 \\ y \leq 12 \\ 8x + 5y \leq 172 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región es la zona del primer cuadrante situada

por debajo de la recta horizontal **verde** y las rectas **azul** y **roja**. Lo comprobamos viendo que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 5 + 5 \leq 80 \\ 5 \leq 12 \\ 8 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \leq 172 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 172 \\ y = 12 \end{cases} \Rightarrow 8x + 60 = 172 \Rightarrow 8x = 112 \Rightarrow x = \frac{112}{8} = 14 \Rightarrow C(14, 12)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 172 \\ 4x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 4x \end{cases} \Rightarrow 8x + 5(80 - 4x) = 172 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8x + 400 - 20x = 172 \Rightarrow -12x = -228 \Rightarrow x = \frac{228}{12} = 19 \Rightarrow y = 80 - 76 = 4 \Rightarrow D(19, 4)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 2x + 2.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 12) \rightarrow I(0, 12) = 2 \cdot 0 + 2.5 \cdot 12 = 30$$

$$C(14, 12) \rightarrow I(14, 12) = 2 \cdot 14 + 2.5 \cdot 12 = 58 \text{ € ; Máximo!}$$

$$D(19, 4) \rightarrow I(19, 4) = 2 \cdot 19 + 2.5 \cdot 4 = 48$$

$$E(20, 0) \rightarrow I(20, 0) = 2 \cdot 20 + 2.5 \cdot 0 = 40$$

Los máximos ingresos son de 58 € y se consigue en el vértice $C(14, 12)$, que significa elaborar 14 litros de limonada y 12 litros de naranjada.

6. (2 puntos) Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Llamamos “x” al dinero recibido por Alba, “y” al recibido por Benito y “z” al recibido por Charo.

“Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado” $\rightarrow x + y + z = 6200$.

“La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios” $\rightarrow x = y + z + 200$.

“Para que Alba (x) y Benito (y) percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros” $\rightarrow x - 600 = y + 600$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6200 \\ x = y + z + 200 \\ x - 600 = y + 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6200 \\ x = y + z + 200 \\ x = y + 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + 200 + y + z = 6200 \\ y + z + 200 = y + 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 6000 \\ z = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2000 = 6000 \Rightarrow 2y = 4000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[y = \frac{4000}{2} = 2000 \right] \Rightarrow \left[x = 2000 + 1200 = 3200 \right]$$

Alba recibió 3200 €, Benito recibió 2000 € y Charo 1000 €.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + y + az &= 2 \\ x + y + z &= a \\ -2x + 2ay + 8z &= -13 \end{aligned} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2a & 8 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{pmatrix}.$$

$$\text{El determinante de A es } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2a & 8 \end{vmatrix} = \cancel{1} \cdot \cancel{-2} + 2a^2 + \cancel{2a} \cdot \cancel{8} - \cancel{8} \cdot \cancel{2a} = 2a^2 - 2.$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \\ -2 \quad -2 \quad 8 \quad -13 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 6 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 6 \quad -9 \\ 0 \quad 0 \quad -6 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 2 \quad 8 \quad -13 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 10 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{Fila } 2^a \xleftrightarrow{\text{Intercambiamos}} \text{Fila } 3^a \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 4 \quad 10 \quad -9 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

Resumiendo: Para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 1$ es incompatible (sin solución) y para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - y \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - y + y + z = 0 \\ -2(2 - y) + 8z = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{z = -2} \\ -4 + 2y + 8z = -13 \rightarrow 2y + 8z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y - 16 = -9 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 2 - \frac{7}{2} = \frac{-3}{2}}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = \frac{-3}{2}$; $y = \frac{7}{2}$; $z = -2$.

8. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.7$ y $P(B) = 0.15$. Además, se sabe que $P(\bar{B} / A) = 0.8$ donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Utilizamos la regla de Bayes para obtener $P(B \cap A)$.

$$P(\bar{B} / A) = 0.8 \Rightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = 0.8 \Rightarrow \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.7 - P(B \cap A)}{0.7} = 0.8 \Rightarrow 0.7 - P(B \cap A) = 0.8 \cdot 0.7 \Rightarrow \boxed{P(B \cap A) = 0.7 - 0.8 \cdot 0.7 = 0.14}$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.15 - 0.14 = \boxed{0.71}$

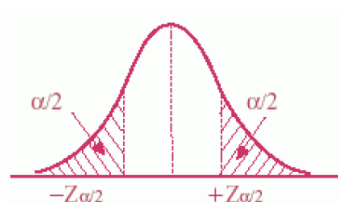
b) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \{\text{Leyes de Morgan}\} = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.14 = \boxed{0.86}$

9. (2 puntos) El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.
- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95%.
- b) Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\bar{X}$, sea mayor de 6 semanas.

X = El tiempo que las películas permanecen en cartelera (en semanas). $X = N(\mu, 2)$

- a) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Utilizamos la fórmula del error y lo igualamos a 1.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.96 \cdot 2 \Rightarrow n = (1.96 \cdot 2)^2 = 15.3664$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al hallado. El tamaño mínimo de la muestra es de 16 películas.

- b) La variable es $X = N(5, 2)$.

La variable de las medias muestrales de tamaño 16 es una normal con la misma media, pero

con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = 0.5$, $\bar{X}_{16} = N(5, 0.5)$.

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{16} > 6)$.

$$P(\overline{X}_{16} > 6) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{6-5}{0.5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

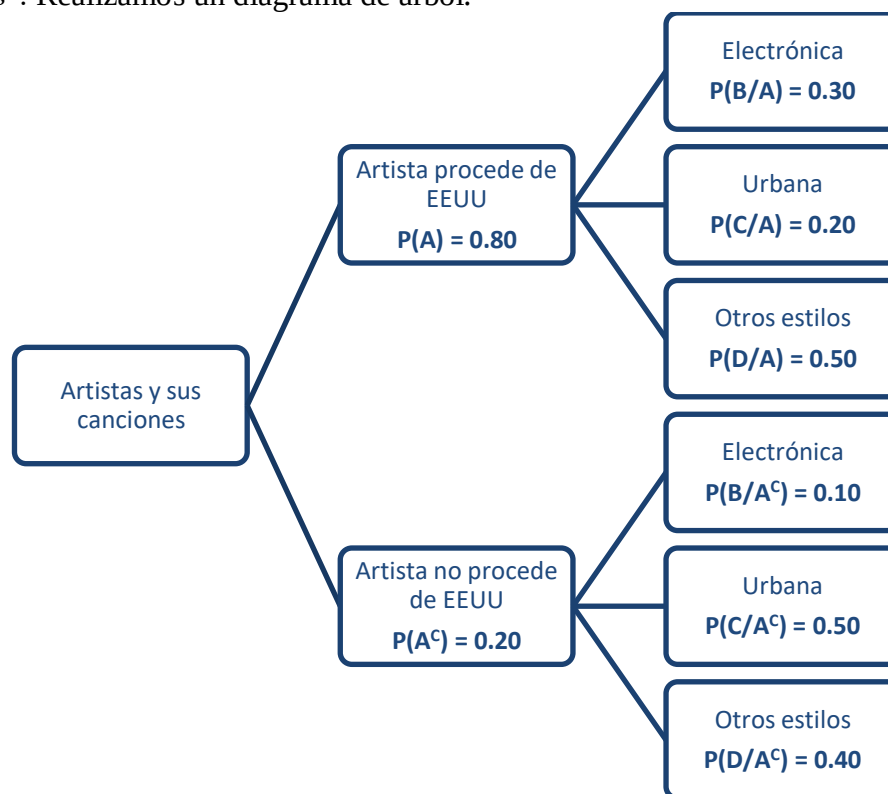
z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5098	0.5138
0.2	0.5193	0.5232
0.3	0.5279	0.5317
0.4	0.5354	0.5391
0.5	0.5415	0.5450
0.6	0.5475	0.5509
0.7	0.5524	0.5558
0.8	0.5578	0.5611
0.9	0.5624	0.5656
1.0	0.5678	0.5709
1.1	0.5724	0.5754
1.2	0.5769	0.5798
1.3	0.5812	0.5841
1.4	0.5854	0.5882
1.5	0.5898	0.5925
1.6	0.5938	0.5964
1.7	0.5978	0.5998
1.8	0.6008	0.6026
1.9	0.6038	0.6055
2.0	0.9772	0.9778
2.1	0.9821	0.9826

La probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas es de 0.0228.

10. (2 puntos) En la base de datos de Spotify el 80% de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30% de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20% como música urbana y el 50% restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10%, 50% y 40% respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

- La canción pueda clasificarse como música urbana.
- Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

Llamamos A al suceso “el artista es procedente de EEUU”, B al suceso “la canción es música electrónica”, C a “la canción es música urbana” y D a “la canción es de otros estilos musicales”. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(A^c)P(C/A^c) = 0.80 \cdot 0.20 + 0.20 \cdot 0.50 = \boxed{0.26}$$

La probabilidad de que la canción pueda clasificarse como música urbana es de 0.26.

- b) Nos piden calcular $P(A^c/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/C) = \frac{P(A^c \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A^c)P(C/A^c)}{P(C)} = \frac{0.20 \cdot 0.5}{0.26} = \boxed{\frac{5}{13} \approx 0.3846}$$

La probabilidad de que sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU es de 0.3846.

EvAU 2023 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determine A^3 y A^{2023} .
- Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si } x < 2 \\ e^x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.
- Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

A.4. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4% de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1% consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3% de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

- Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.
- No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

- Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99, 01%, el margen de error en la estimación no supere el 10%.

- b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

- a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.4. (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramon y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1%, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1%. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

- a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramon y Cajal.
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

B.5. (2 puntos) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

- a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99% para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90%.

SOLUCIONES**A.1.** (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine A^3 y A^{2023} .

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a) Calculamos A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

Tenemos que $A^3 = Id_3$.Calculamos A^{2023} .

$$\begin{array}{r} 2023 \div 3 \\ 22 \quad 674 \\ 13 \\ 1 \end{array}$$

$$2023 = 3 \cdot 674 + 1 \Rightarrow A^{2023} = A^{3 \cdot 674 + 1} = A^{3 \cdot 674} \cdot A = (A^3)^{674} \cdot A = (Id)^{674} \cdot A = Id \cdot A = A$$

Hemos obtenido que $A^{2023} = A$.

b) Comprobamos que el determinante de A es no nulo y por tanto existe la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \frac{6}{6} - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

Calculamos la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
 b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 3 \\ f'(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 = 7 \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = 7(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 7x - 4}$$

b) Buscamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4 = 0 \rightarrow 3x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

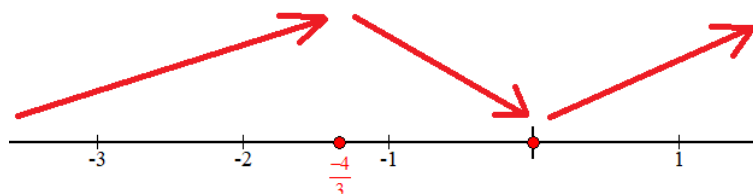
$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 12 - 8 = 4 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 4(-1) = 3 - 4 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\frac{4}{3}, 0\right).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 4 = 7 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función evoluciona como indica el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = -\frac{4}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}; \quad f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 = 0$$

El máximo relativo tiene coordenadas $\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y el mínimo relativo es $(0, 0)$.

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si } x < 2 \\ e^x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.
 b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

a) La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + 3 = a \cdot 2^2 + 3 = 4a + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} e^x = e^2 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^2 = 4a + 3 \Rightarrow 4a = e^2 - 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{e^2 - 3}{4}}$$

Para que sea continua la función $f(x)$ debe ser $a = \frac{e^2 - 3}{4}$.

b) Entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es $f(x) = e^x$.

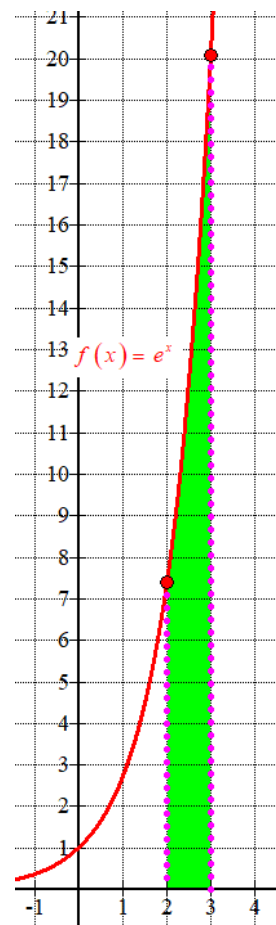
Averiguamos cuando la gráfica de la función $f(x)$ corta el eje de abscisas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^x \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{¡No existe!}$$

La gráfica de la función no corta el eje de abscisas.

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ es el valor de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$\text{Área} = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 e^x dx = \left[e^x \right]_2^3 = \boxed{e^3 - e^2 \approx 12.696 \text{ u}^2}$$



A.4. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4% de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1% consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3% de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

- a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.
 b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Llamamos A al suceso “Mujer española mayor de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos” y B al suceso “Mujer española consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día”.

- a) Sabemos que $P(A) = 0.274$ y que $P(B) = 0.651$.

El 76,3% de las mujeres españolas consume fruta o hace actividad física $\rightarrow$
 $P(A \cup B) = 0.763$

Nos piden calcular $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.763 = 0.274 + 0.651 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0.274 + 0.651 - 0.763 = \boxed{0.162}$$

- b) Nos piden calcular $P(\bar{A} / \bar{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0.763}{1 - 0.651} = \boxed{\frac{237}{349} \approx 0.6791}$$

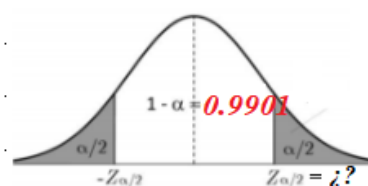
A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01%, el margen de error en la estimación no supere el 10%.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

a) Para un nivel de confianza del 99.01 % hallamos el valor de $Z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,9901 \rightarrow \alpha = 0,0099 \rightarrow \alpha/2 = 0,00495 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99505 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Utilizamos la fórmula del error:

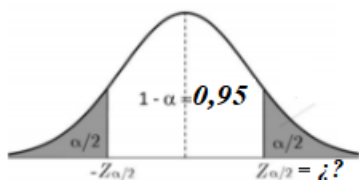
$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.575 \sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{2.575} = \sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.1}{2.575} \right)^2 = \frac{0.55 \cdot 0.45}{n} \Rightarrow n \left(\frac{0.1}{2.575} \right)^2 = 0.55 \cdot 0.45 \Rightarrow n = \frac{0.55 \cdot 0.45}{\left(\frac{0.1}{2.575} \right)^2} \approx 164.1 \end{aligned}$$

Para que el error no supere el 10 % el tamaño mínimo de la muestra debe ser 165 empresas.

b) La proporción de empresas con pérdidas es $p = \frac{70}{100} = 0.7$

Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $Z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{100}} \approx 0.0898$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.7 - 0.0898, 0.7 + 0.0898) = (0.6102, 0.7898)$$

B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 + 4 - 2a - a - 4a = a^3 - 7a + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - 7a + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1) & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ es raíz}$$

$$a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3=a} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para $a = 1$, $a = 2$ y $a = -3$.
Distinguimos 4 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$; $a \neq 2$ y $a \neq -3$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $a = 1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 2 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 2$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -2 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad 2 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad -2 \quad -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al tener rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 4. $a = -3$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y

obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 2 \quad -3 \quad 1 \\ -1 \quad 3 \quad -2 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 5 \quad -5 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ 3 \quad -9 \quad 6 \quad -9 \\ \hline 0 \quad -8 \quad 8 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a + 8 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad -40 \quad 40 \quad -40 \\ 0 \quad 40 \quad -40 \quad 32 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al tener rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a \neq 1$; $a \neq 2$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a = 2$ o $a = -3$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 0$ la situación es la analizada en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ . Lo resolvemos}$$

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2z \\ x = -2z \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow -2z + 2(1 - 2z) = 1 \Rightarrow -2z + 2 - 4z = 1 \Rightarrow -6z = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{6}} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ x = -2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1}{6}$.

B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Llamemos x = “minutos de ejercicios de fuerza”, y = “minutos de ejercicios cardiovasculares”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Una rutina con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares” $\rightarrow 45 \leq x + y \leq 60$

“El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares” $\rightarrow x \leq y$

“El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos” $\rightarrow x \geq 20$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 45 \leq x + y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 45$

$x + y = 60$

$y = x$

$x = 20$

$x \geq 0; y \geq 0$

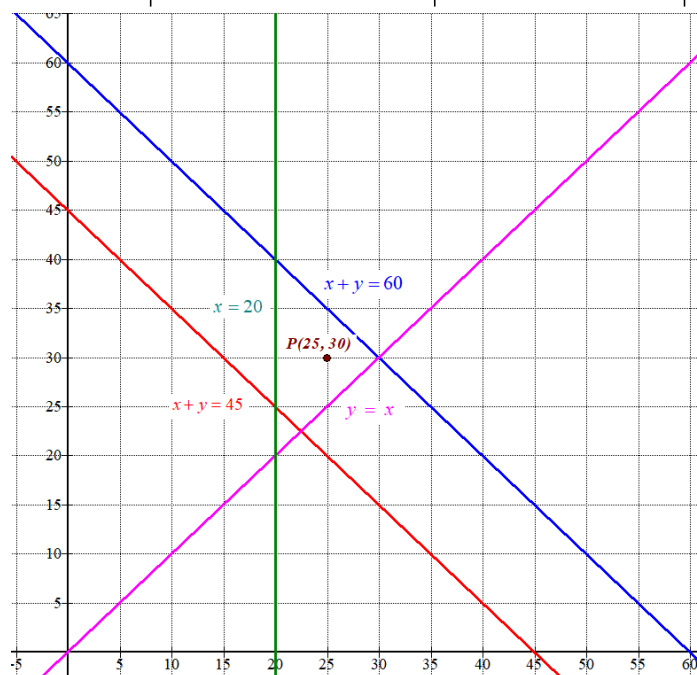
x	$y = 45 - x$
0	45
45	0

x	$y = 60 - x$
0	60
60	0

x	$y = x$
0	0
50	50

$x = 20$	y
20	0
20	20

Primer cuadrante



Como las restricciones son

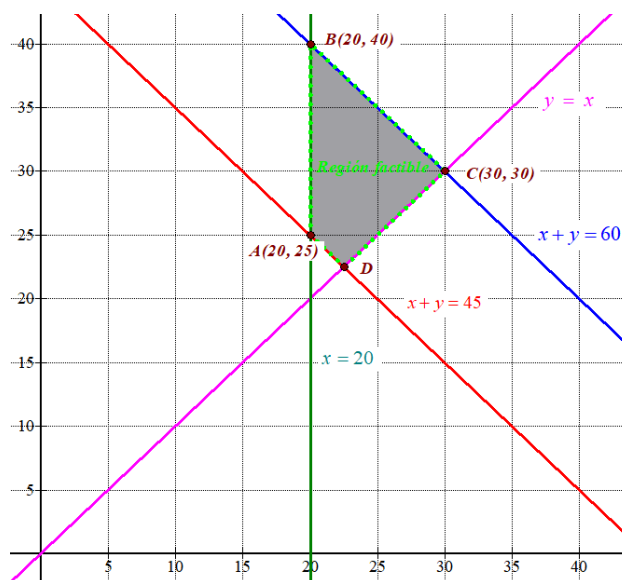
$$\left. \begin{array}{l} 45 \leq x + y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por encima}$$

de la recta **rosa** y **roja**, por debajo de la recta **azul** y a la derecha de la recta vertical **verde** ($x = 20$).

Lo comprobamos viendo si el punto P(25, 30) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 45 \leq 25 + 30 \leq 60 \\ 25 \leq 30 \\ 25 \geq 20 \\ 25 \geq 0; \quad 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x + x = 45 \Rightarrow 2x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{2} = 22.5 \Rightarrow y = 22.5 \Rightarrow \boxed{D(22.5, 22.5)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en cada vértice en busca de los valores máximo y mínimo.

$$A(20, 25) \rightarrow B(20, 25) = 20 + 2 \cdot 25 = 70$$

$$B(20, 40) \rightarrow B(20, 40) = 20 + 2 \cdot 40 = 100 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(30, 30) \rightarrow B(30, 30) = 30 + 2 \cdot 30 = 90$$

$$D(22.5, 22.5) \rightarrow B(22.5, 22.5) = 22.5 + 2 \cdot 22.5 = 67.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

La rutina más beneficiosa consta de 20 minutos de ejercicio de fuerza y 40 de ejercicios cardiovasculares. La menos beneficiosa es la que consta de 22 minutos y medio de cada tipo de ejercicios.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

- a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador de la fracción. Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{2}{x} = 0 + \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{2}{x} = \infty + \frac{1}{\infty} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} + \frac{2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{2}{\infty} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{2}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

- b) Usamos la función derivada para buscar sus puntos críticos.

$$f(x) = x + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 1 - \frac{2}{(-2)^2} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -\sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 1 - \frac{2}{(-1)^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(-\sqrt{2}, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1 - \frac{2}{1^2} = -1 < 0$. La función decrece en $(0, +\sqrt{2})$.
- En el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 1 - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} > 0$. La función crece en $(\sqrt{2}, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2})$ y crece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

B.4. (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramon y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1%, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1%. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

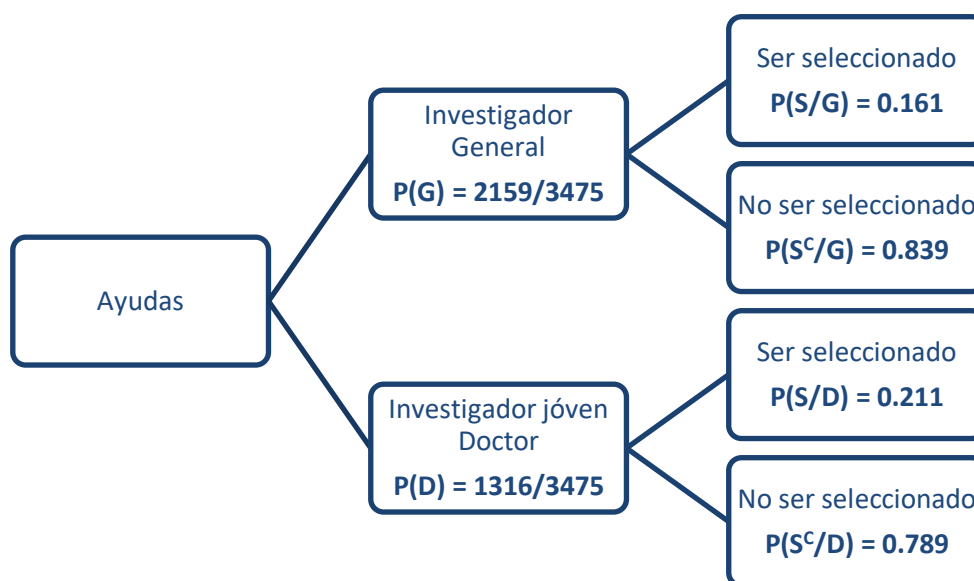
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramon y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Llamamos G al suceso “Ser investigador General”, D al suceso “Ser investigador joven doctor” y S al suceso “Ser seleccionado”.

Se presentaron $2159 + 1316 = 3475$ solicitudes.

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(G)P(S/G) + P(D)P(S/D) = \frac{2159}{3475} \cdot 0.161 + \frac{1316}{3475} \cdot 0.211 \approx \boxed{0.18}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{P(G)P(S/G)}{P(S)} = \frac{\frac{2159}{3475} \cdot 0.161}{0.18} \approx \boxed{0.556}$$

B.5. (2 puntos) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99% para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

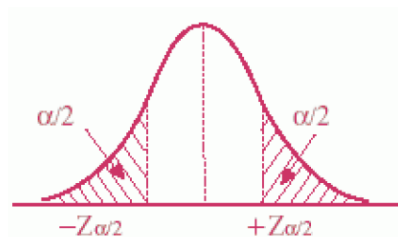
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90%.

a) X = Distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano. $X = N(\mu, 2)$

El tamaño de la muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 50$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

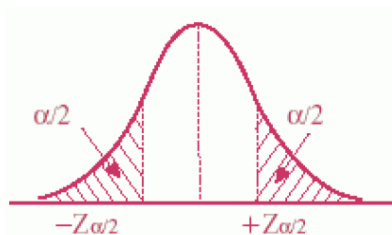
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50 - 1.15, 50 + 1.15) = (48.85, 51.15)$$

b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualemos el error a 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 2 \Rightarrow n = (1.645 \cdot 2)^2 = 10.8241$$

El tamaño mínimo debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 11 autobuses.

EvAU 2023 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	B

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen. Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.
- Calcule $B \cdot B^t \cdot A^{-1}$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.

A.2. (2 puntos) Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?

A.3. (2 puntos) Dada la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 3$.
- Para $a = 1$, determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,57$, $P(B) = 0,46$ y $P(A \cap B) = 0,28$. Calcule las siguientes probabilidades:

- $P(A \cup B)$.
- $P(B/\bar{A})$ siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

A.5. (2 puntos) La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,2$ metros.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95%.
- Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\bar{X}$, sea mayor de 4,04 metros.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

B.2. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a :

$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

- Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$
- Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

B.3. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Determine las asíntotas de la función.

B.4. (2 puntos) Un restaurante de comida rápida sirve el 40% de los menús para consumir en el local, el 35% es transportado por motoristas a domicilio (*delivery*) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (*take-away*). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8% de los clientes en el local, el 5% de los pedidos a domicilio y el 12% de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:

- Sea vegetariano.
- Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que es vegetariano.

B.5. (2 puntos) La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniéndose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .
- ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz X tal que, $A \cdot X = B$.

b) Calcule $B \cdot B^t \cdot A^{-1}$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B y A^{-1} la matriz inversa de A.

a) Calculamos la inversa de A y hallamos X.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-2 & 1-2 \\ -2+0 & 0+5 & -2+5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

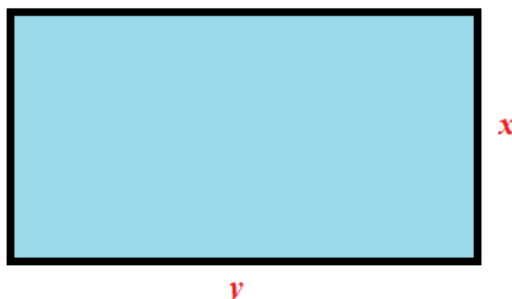
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+1 \\ 0+0+1 & 0+1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & -4+5 \\ 1-4 & -2+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?

Llamamos y = “largo de la piscina”, x = “ancho de la piscina”.



Las restricciones del problema son:

“el largo no puede ser más de 2 veces el ancho” $\rightarrow y \leq 2x$

“3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo” $\rightarrow 3x \leq 2y$

“el perímetro debe tener 30 metros como máximo” $\rightarrow 2x + 2y \leq 30$

“la piscina tenga al menos 4 metros de ancho” $\rightarrow x \geq 4$

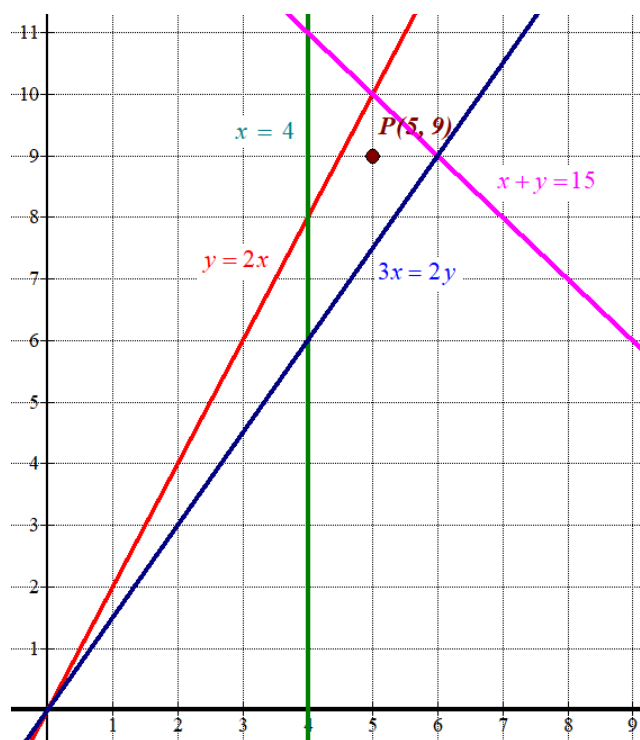
“El largo es positivo” $\rightarrow y \geq 0$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq 2x \\ 3x \leq 2y \\ 2x + 2y \leq 30 \\ x \geq 4; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 2x \\ 3x \leq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 4; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = 2x$	$3x = 2y$
$x \mid y = 2x$	$x \mid y = \frac{3x}{2}$
0 0	0 0
10 20	10 15
$x + y = 15$	$x = 4$
$x \mid y = 15 - x$	$x = 4 \mid y$
0 15	4 0
15 0	4 10
$y = 0$	
$x \mid y = 0$	
4 0	
15 0	



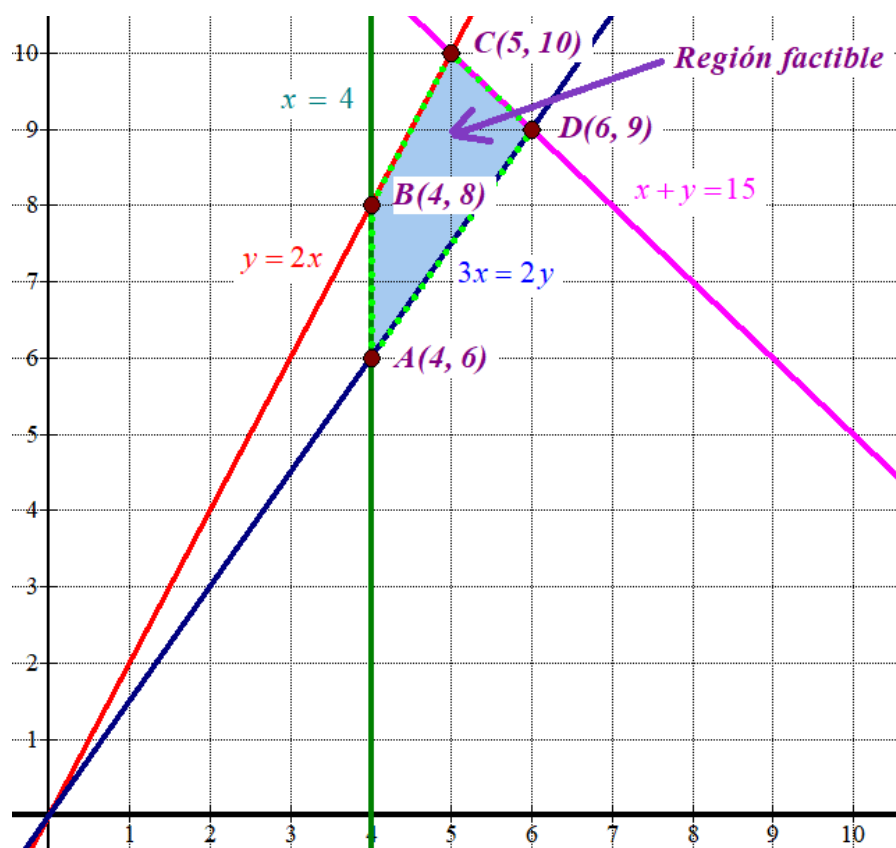
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} y \leq 2x \\ 3x \leq 2y \\ x + y \leq 15 \\ x \geq 4; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por encima de}$$

la recta azul, por debajo de las rectas rosa y roja y a la derecha de la recta vertical verde. Lo comprobamos viendo si el punto P(5, 9) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 9 \leq 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9 \\ 5 + 9 \leq 15 \\ 5 \geq 4; 9 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función largo $L(x, y) = y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(4, 6) \rightarrow L(4, 6) = 6$$

$$B(4, 8) \rightarrow L(4, 8) = 8$$

$$C(5, 10) \rightarrow L(5, 10) = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(6, 9) \rightarrow L(6, 9) = 9$$

La piscina más larga cumpliendo todo lo pedido tiene de largo 10 metros y 5 de ancho.

A.3. (2 puntos) Dada la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 3$.
 b) Para $a = 1$, determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

- a) La función debe ser continua en $x = 3$.

El valor de la función y los límites laterales en $x = 3$ deben ser iguales.

Calculamos el valor de límite de la función en $x = 3$ por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{3^2 - 3 - 6}{3^2 - 3 \cdot 3} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 1}{2x - 3} = \frac{6 - 1}{6 - 3} = \frac{5}{3}$$

Comprobamos la continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= a \cdot 3^2 \cdot e^{3-3} = 9a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 e^{x-3} = 9a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{5}{3} \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{5}{3} = 9a \Rightarrow a = \frac{5}{27}$$

El valor buscado es $a = \frac{5}{27}$.

- b) Para $a = 1$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^2 e^{x-3}$.

Utilizamos la derivada de la función $\rightarrow f'(x) = 2xe^{x-3} + x^2 e^{x-3} = (2x + x^2) e^{x-3}$

Obtenemos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= (2x + x^2) e^{x-3} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2x + x^2) e^{x-3} = 0 \Rightarrow \{e^{x-3} \neq 0\} \Rightarrow 2x + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-\infty, 1) \\ 2 + x = 0 \rightarrow x = -2 \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

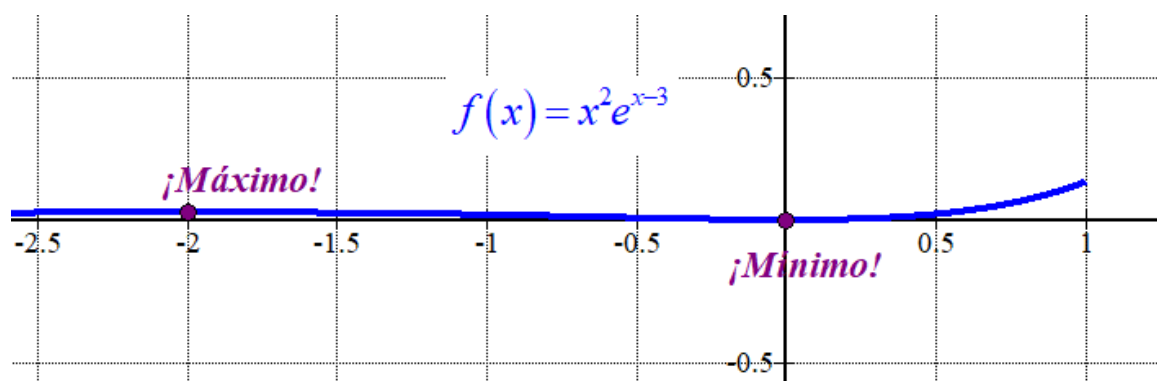
Estudiamos el signo de la derivada segunda en estos dos puntos críticos.

$$f''(x) = (2 + 2x) e^{x-3} + (2x + x^2) e^{x-3} = (2 + 4x + x^2) e^{x-3}$$

$$\begin{cases} f''(0) = (2 + 4 \cdot 0 + 0^2)e^{0-3} = 2e^{-3} > 0 \rightarrow x = 0 \text{ es mínimo} \\ f''(-2) = (2 + 4(-2) + (-2)^2)e^{-2-3} = -2e^{-5} < 0 \rightarrow x = -2 \text{ es máximo} \end{cases}$$

Como $f(0) = 0^2 e^{0-3} = 0$ la función tiene un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$.

Como $f(-2) = (-2)^2 e^{-2-3} = 4e^{-5} = \frac{4}{e^5}$ la función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2, \frac{4}{e^5}\right)$



A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,57$, $P(B) = 0,46$ y $P(A \cap B) = 0,28$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(B/\bar{A})$ siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

a) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.57 + 0.46 - 0.28 = \boxed{0.75}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0.46 - 0.28}{1 - 0.57} = \boxed{\frac{18}{43} \approx 0.4186}$$

A.5. (2 puntos) La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,2$ metros.

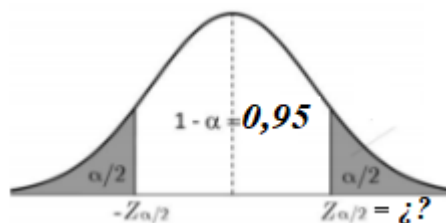
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95%.

b) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\bar{X}$, sea mayor de 4,04 metros.

$X = \text{"longitud en metros de un coche"}$. $X = N(\mu, 0.2)$

a) Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Nuestro error debe ser inferior a 0.04 metros.

Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.96 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.96} = \frac{0.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.04\sqrt{n} = 0.2 \cdot 1.96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.2 \cdot 1.96}{0.04} \Rightarrow n = \left(\frac{0.2 \cdot 1.96}{0.04} \right)^2 = 96.04$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 97 coches.

b) $X = N(4, 0.2)$

La distribución de las medias tiene la misma media (4 metros) pero su desviación típica es

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.2}{\sqrt{36}} = \frac{1}{30} \approx 0.0333. \quad \bar{X}_{36} = N\left(4, \frac{1}{30}\right)$$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{36} > 4.04)$.

$$P(\bar{X}_{36} > 4.04) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{4.04 - 4}{1/30}\right) = P(Z > 1.2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 3a - 2 - 0 + 1 - 2a^2 = -2a^2 - 3a - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} = \frac{3 \pm 1}{-4} = \begin{cases} \frac{3+1}{-4} = \boxed{-1 = a} \\ \frac{3-1}{-4} = \boxed{\frac{-1}{2} = a} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para $a = -1$ y $a = \frac{-1}{2}$.

Distinguimos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1}{2}$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $a = -1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y

obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ -2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6 \quad -2 \quad -2 \quad -4 \\ -6 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\ 0 \quad -1 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = \frac{-1}{2}$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -3 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 5/2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 5 \quad 5 \\ 0 \quad -2 \quad -5 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al tener rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1}{2}$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = \frac{-1}{2}$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = 1$ la situación es la analizada en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

El sistema queda
$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - z = 0 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$
. Lo resolvemos

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - z = 0 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x = z \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z + y + 2z = 2 \\ 3z - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z + y = 2 \\ 2z - y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 4z \\ 2z - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2z - (2 - 4z) = 2 \Rightarrow 2z - 2 + 4z = 2 \Rightarrow 6z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 2 - 4 \cdot \frac{2}{3} = 2 - \frac{8}{3} = \frac{-2}{3}} \\ \boxed{x = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{-2}{3}$; $z = \frac{2}{3}$.

B.2. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real a :

$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

- a) Calcule el valor de a para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$.
- b) Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

- a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es $f'(1)$. La pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$ es -4 .
Como son iguales tenemos que $f'(1) = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -3x^2 + 8ax - 17 \\ f'(1) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 \cdot 1^2 + 8a \cdot 1 - 17 = -4 \Rightarrow -3 + 8a - 17 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8a = -4 + 20 = 16 \Rightarrow a = \frac{16}{8} = 2$$

El valor buscado es $a = 2$.

- b) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = -x^3 - 17x$.

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 - 17x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 - 17x = 0 \Rightarrow x(-x^2 - 17) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ -x^2 - 17 = 0 \Rightarrow x^2 = -17 \Rightarrow x = \sqrt{-17} = \text{No existe} \end{array} \right.$$

El único punto de corte de la gráfica con el eje de abscisas es $x = 0$.

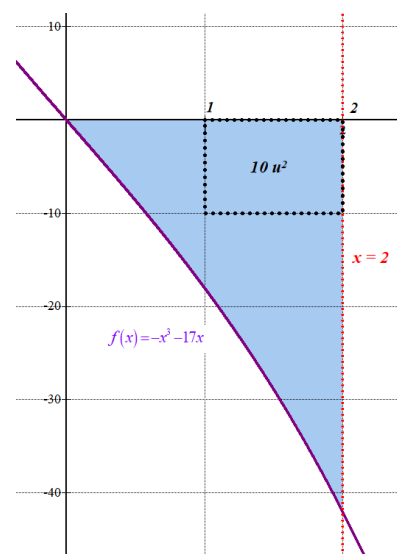
El área de la región pedida es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_0^2 -x^3 - 17x dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 17 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[-\frac{2^4}{4} - 17 \frac{2^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^4}{4} - 17 \frac{0^2}{2} \right] =$$

$$= -4 - 34 = -38$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ tiene un valor de 38 unidades cuadradas.



B.3. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
b) Determine las asíntotas de la función.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador de la fracción. Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$.

Hallamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x+4)x - 1 \cdot (x^2 + 4x + 3)}{x^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 - 4x - 3}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Incluimos el valor excluido del dominio ($x = 0$).

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 3}{(-2)^2} = \frac{1}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^2} = -2 < 0. \text{ La función decrece en } (-\sqrt{3}, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 3}{1^2} = -2 < 0$. La función decrece en $(0, +\sqrt{3})$.

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 - 3}{2^2} = \frac{1}{4} > 0$. La función crece en $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, +\sqrt{3})$.

- b) Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + 4 + \frac{3}{x} = \infty + 4 + \frac{3}{\infty} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 4x + 3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \frac{3}{x} = 4 + \frac{3}{\infty} = 4$$

$y = x + 4$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: $x = 0$ es asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal y tiene como asíntota oblicua la recta $y = x + 4$.

B.4. (2 puntos) Un restaurante de comida rápida sirve el 40% de los menús para consumir en el local, el 35% es transportado por motoristas a domicilio (*delivery*) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (*take-away*). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8% de los clientes en el local, el 5% de los pedidos a domicilio y el 12% de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:

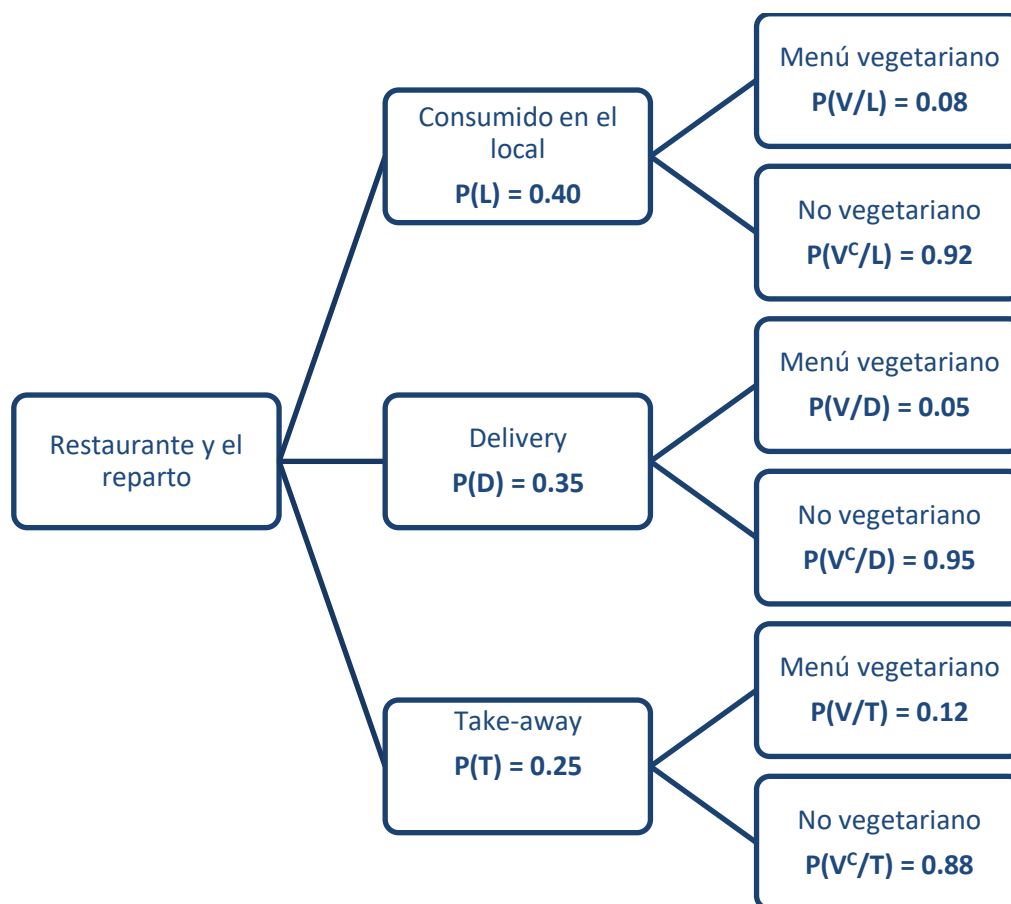
a) Sea vegetariano.

b) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que es vegetariano.

Llamamos L al suceso “Ser consumido en el local”, D al suceso “Ser repartido a domicilio por motoristas” y T al suceso “Ser recogido en el local para consumir en casa”.

Llamamos V al suceso “El menú es vegetariano”

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(L)P(V/L) + P(D)P(V/D) + P(T)P(V/T) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.08 + 0.35 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.12 = \boxed{0.0795}$$

b) Nos piden calcular $P(D/V)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D/V) = \frac{P(D \cap V)}{P(V)} = \frac{P(D)P(V/D)}{P(V)} = \frac{0.35 \cdot 0.05}{0.0795} = \frac{35}{159} \approx 0.2201$$

B.5. (2 puntos) La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

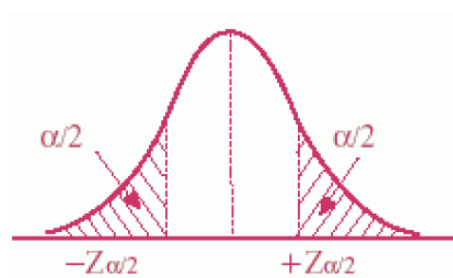
- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniéndose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .
- b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

a) X = Vida media de una persona medida en semanas. $X = N(\mu, 300)$

El tamaño de la muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 4020$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{300}{\sqrt{20}} = 172.74 \text{ semanas}$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (4020 - 172.74, 4020 + 172.74) = (3847.26, 4192.74)$$

- b) La amplitud del intervalo de confianza es el doble del error. Para que no sobrepase las 100 semanas el error no debe sobrepasar las 50 semanas.

Igualamos el error a 50.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50 = 2.575 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50\sqrt{n} = 2.575 \cdot 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 300}{50} \Rightarrow n = (2.575 \cdot 6)^2 \Rightarrow \boxed{n = 238.7025}$$

El tamaño mínimo debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 239 personas.

EvAU 2023 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.
- Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.
- Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
- Determine las asíntotas de la función anterior.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además, se sabe que $P(\bar{B} | A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

- $P(A \cap B)$.
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

A.5. (2 puntos) La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

- Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95% para la capacidad media de los botes de champú.
- Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

B.3. (2 puntos) Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

B.4. (2 puntos) El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5% del total, el 24% correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19,5% restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8% del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1% de las Universitarias y el 80,3% de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

- Sea financiada por el ministerio.
- La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

B.5. (2 puntos) El 30% de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

- ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?
- Halle la probabilidad de que más del 35% de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

SOLUCIONES**A.1.** (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.
 b) Determine la matriz X tal que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 1 + 2 + 0 = 2 \neq 0$$

Tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

- b) Despejamos X en la ecuación.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -1 + 0 + 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

A.2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.

b) Para $a = 1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int 6x^2 + ae^x - 2 dx = 6 \frac{x^3}{3} + ae^x - 2x = 2x^3 + ae^x - 2x + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[2x^3 + ae^x - 2x \right]_0^1 = \left[2 \cdot 1^3 + ae^1 - 2 \cdot 1 \right] - \left[2 \cdot 0^3 + ae^0 - 2 \cdot 0 \right] = \\ &= 2 + ae - 2 - a = ae - a = a(e - 1) \end{aligned}$$

Hacemos que este resultado obtenido sea igual a $e - 1$.

$$a(e - 1) = e - 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El valor buscado es $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = 6x^2 + e^x - 2$.

La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 6 \cdot 0^2 + e^0 - 2 = -1 \\ f'(x) &= 12x + e^x \rightarrow f'(0) = 12 \cdot 0 + e^0 = 1 \\ y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-1) = (1)(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Indique el dominio de la función $f(x)$ y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
b) Determine las asíntotas de la función anterior.

a) Es una función a trozos. Para $x \leq 0$ la función es $f(x) = \frac{-x^4}{x^2+1}$. Como el denominador no se anula la función existe siempre.

Para $x > 0$ la función es $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Como el denominador se anula en $x = -1$, pero este valor no está en el dominio la función existe.

Dominio $f(x) = \mathbb{R}$

La función es continua para $x \leq 0$ y para $x > 0$ pues está definida como fracciones polinómicas cuyo denominador no se anula. Falta comprobar si es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{-0^4}{0^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^4}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{0^2+1}{0+1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x = 0$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito. La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

El dominio de la función son todos los reales. Por lo que no presenta asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^2+1} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = -\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Estudiamos la posibilidad de asíntota en $-\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-x^4}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{x^3+x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = +\infty$$

No existe asíntota oblicua en $-\infty$

Estudiamos la posibilidad de asíntota en $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x-1} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{-1}{1} = -1$$

La asíntota oblicua en $+\infty$ tiene ecuación $y = x - 1$.

Resumiendo: La función no tiene asíntotas verticales ni horizontales. No existe asíntota oblicua en $-\infty$ y la recta $y = x - 1$ es la asíntota oblicua en $+\infty$.

A.4. (2 puntos) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,55$ y $P(B) = 0,1$. Además, se sabe que $P(\bar{B} / A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

a) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{B} / A) = 0,89 \Rightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = 0,89 \Rightarrow \frac{P(\bar{B} \cap A)}{0,55} = 0,89 \Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,55 \cdot 0,89 = 0,4895$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,55 = P(A \cap B) + 0,4895 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0,55 - 0,4895 = 0,0605}$$

b) Aplicando las leyes de Morgan.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= 1 - (0,55 + 0,1 - 0,0605) = \boxed{0,4105}$$

A.5. (2 puntos) La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95% para la capacidad media de los botes de champú.

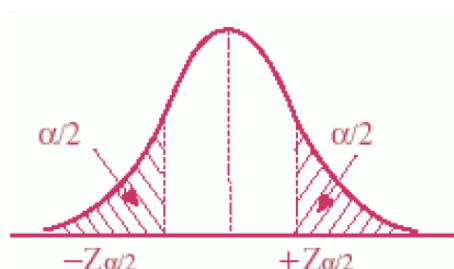
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90%.

X = “La capacidad en mililitros de un bote de champú”. $X = N(\mu, 10)$

a) Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 200$

Calculamos $Z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9716	0.9719	0.9722	0.9725	0.9727	0.9729

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} \approx 4.383$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (200 - 4.383, 200 + 4.383) = (195.617, 204.383)$$

b) Calculamos $Z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Igualemos el error a 0.5 y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \right)^2 \Rightarrow \boxed{n = 1082.41}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1083 botes de champú.

B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Llamamos “x” al número de buñuelos de chocolate, “y” al número de buñuelos de nata y “z” al número de buñuelos de crema.

“Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema” $\rightarrow x + y + z = 220$

“Hay el doble de buñuelos de nata que de crema” $\rightarrow y = 2z$

“El doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata” $\rightarrow 2z + 3x = 2y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ y = 2z \\ 2z + 3x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 220 \\ 2z + 3x = 2(2z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 220 \\ 2z + 3x = 4z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 220 - 3z \\ 3x - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(220 - 3z) - 2z = 0 \Rightarrow 660 - 9z - 2z = 0 \Rightarrow -11z = -660 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-660}{-11} = 60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 220 - 3 \cdot 60 = 40} \\ \boxed{y = 2 \cdot 60 = 120} \end{array} \right.$$

Hay 40 buñuelos de chocolate, 120 de nata y 60 de crema.

B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Llamemos x = “litros de pintura VERDE1”, y = “litros de pintura VERDE2”.
Reunimos los datos en una tabla.

	Litros de azul	Litros de amarillo	Beneficio
Nº litros de VERDE1 (x)	$0.3x$	$0.7x$	x
Nº litros de VERDE2 (y)	$0.5y$	$0.5y$	$1.2y$
	$0.3x + 0.5y$	$0.7x + 0.5y$	$x + 1.2y$

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 1.2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Dispone para la mezcla de 20 litros de azul” $\rightarrow 0.3x + 0.5y \leq 20$

“Dispone para la mezcla de 28 litros de amarillo” $\rightarrow 0.7x + 0.5y \leq 28$

“No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1” $\rightarrow x \leq 30$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 0.3x + 0.5y \leq 20 \\ 0.7x + 0.5y \leq 28 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 200 \\ 7x + 5y \leq 280 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$3x + 5y = 200$$

x	$y = \frac{200 - 3x}{5}$
0	40
40	8

$$7x + 5y = 280$$

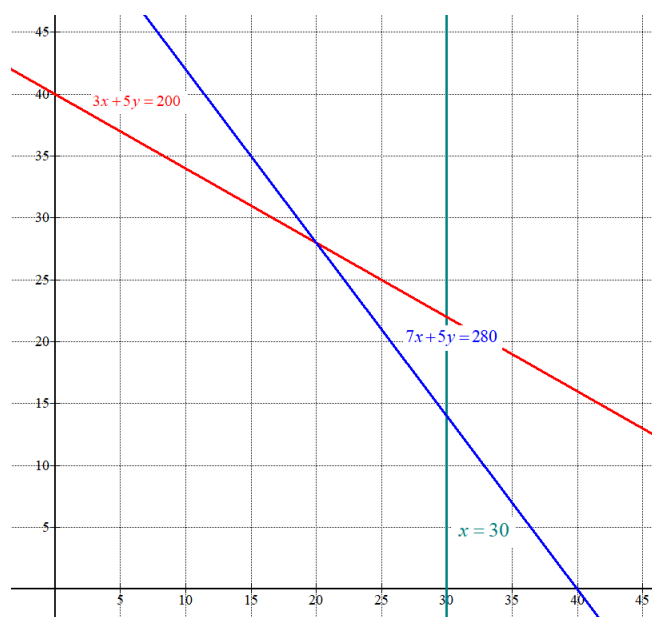
x	$y = \frac{280 - 7x}{5}$
0	56
40	0

$$x = 30$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Recta
vertical

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

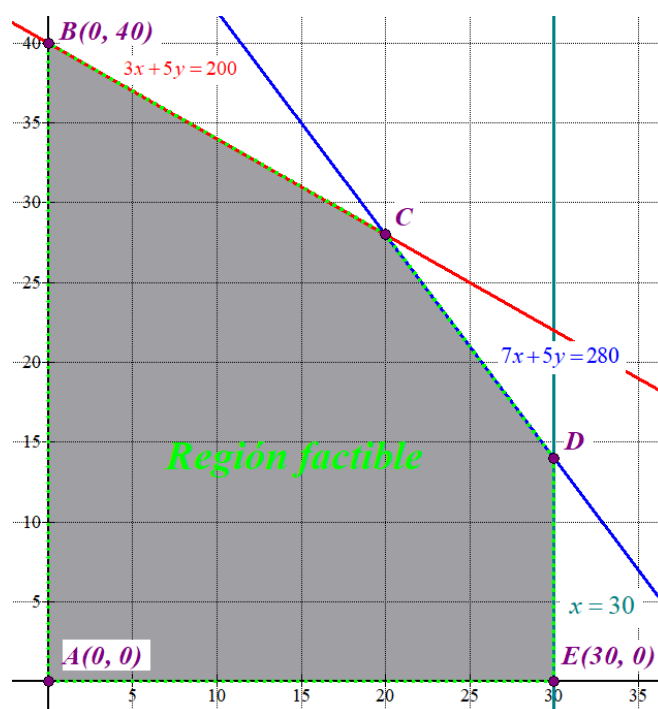
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 200 \\ 7x + 5y \leq 280 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por debajo}$$

de la recta azul y roja, a la izquierda de la recta vertical verde $x = 30$.

Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 50 \leq 200 \\ 70 + 50 \leq 280 \\ 10 \leq 30 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas de los puntos C y D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 200 \\ 7x + 5y = 280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 200 \\ -7x - 5y = -280 \end{cases} \\ -4x = -80 \Rightarrow x = -80 / -4 = 20 \Rightarrow 60 + 5y = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 140 \Rightarrow y = \frac{140}{5} = 28 \Rightarrow \boxed{C(20, 28)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ 7x + 5y = 280 \end{cases} \Rightarrow 210 + 5y = 280 \Rightarrow 5y = 70 \Rightarrow y = \frac{70}{5} = 14 \Rightarrow \boxed{D(30, 14)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow B(0, 40) = 0 + 1.2 \cdot 40 = 48$$

$$C(20, 28) \rightarrow B(20, 28) = 20 + 1.2 \cdot 28 = 53.6 \quad \text{¡Máximo!}$$

$$D(30, 14) \rightarrow B(30, 14) = 30 + 1.2 \cdot 14 = 46.8$$

$$E(30, 0) \rightarrow B(30, 0) = 30 + 0 = 30$$

El beneficio máximo es de 53.6 € y se consigue en el vértice C(20, 28), que significa fabricar 20 litros de pintura VERDE1 y 28 de pintura VERDE2.

B.3. (2 puntos) Se consideran las siguientes funciones reales de variable real:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad g(x) = 4x$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
 b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

a) Usamos la función derivada para buscar sus puntos críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 \\ f'(x) = 0 \end{aligned} \Rightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-3)(4)}}{2(-3)} =$$

$$= \frac{-4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} \frac{-4+8}{-6} = \frac{-2}{3} = x \\ \frac{-4-8}{-6} = 2 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2/3)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = -3(-1)^2 + 4(-1) + 4 = -3 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -2/3)$.
- En el intervalo $(-2/3, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 = 5 > 0$. La función crece en $(-2/3, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4 = -11 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -2/3) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(-2/3, 2)$.

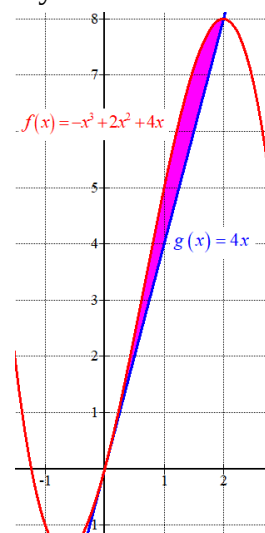
b) Buscamos los puntos de corte de ambas funciones.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 4x = 4x \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2(-x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) - g(x) dx &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2 + 4x - 4x) dx = \\ &= \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{2^4}{4} + 2\frac{2^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2\frac{0^3}{3} \right] = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \text{ u}^2}$$

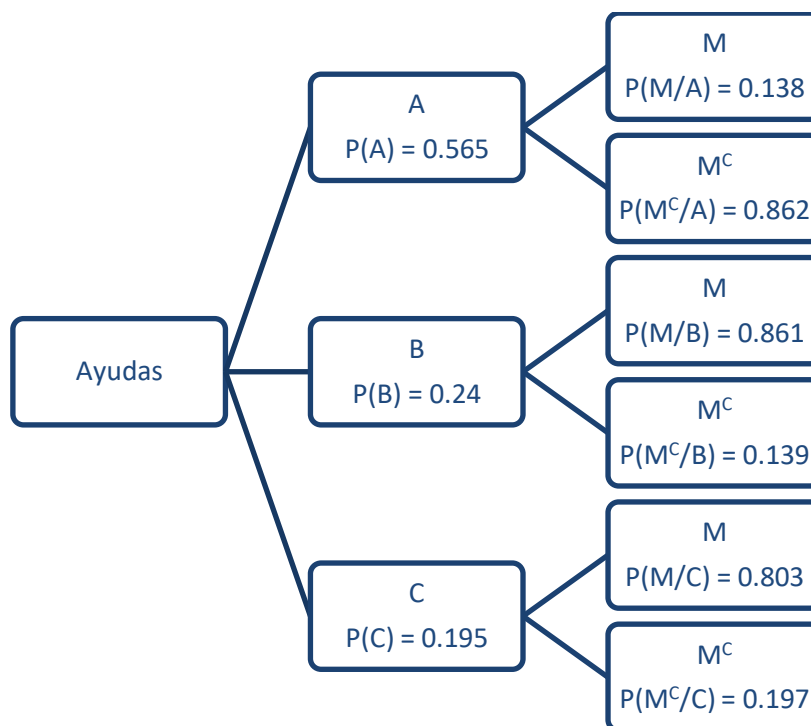


B.4. (2 puntos) El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5% del total, el 24% correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19, 5% restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8% del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1% de las Universitarias y el 80,3% de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Llamamos A al suceso “Ayuda destinada a las Enseñanzas Obligatorias”, B al suceso “Ayuda destinada a las Enseñanzas Universitarias” y C al suceso “Ayuda destinada a Enseñanzas Postobligatorias”. Y llamamos M al suceso “Ayuda financiada por el ministerio”. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) = \\
 &= 0.565 \cdot 0.138 + 0.24 \cdot 0.861 + 0.195 \cdot 0.803 = \boxed{0.4412}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(A/M) &= \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \\
 &= \frac{0.565 \cdot 0.138}{0.565 \cdot 0.138 + 0.24 \cdot 0.861 + 0.195 \cdot 0.803} = \boxed{0.1767}
 \end{aligned}$$

B.5. (2 puntos) El 30% de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

- a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?
 b) Halle la probabilidad de que más del 35% de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

- a) El tamaño de la muestra es $n = 120$ y la probabilidad de éxito es $p = 0.3$.

Como $np = 120 \cdot 0.3 = 36 > 5$ y $nq = 120 \cdot 0.7 = 84 > 5$ la proporción se puede aproximar por

$$\text{una normal } Y \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.3, \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{120}}\right) = N(0.3, 0.0418)$$

- b) Nos piden calcular $P(p > 0.35)$.

Utilizamos la aproximación a la normal $Y \equiv N(0.3, 0.0418)$.

$$P(p > 0.35) = P(Y > 0.35) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.35 - 0.30}{0.0418}\right) =$$

$$= P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8849 = \boxed{0.1151}$$

EvAU 2023 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2022-2023 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcule $A^2 - A$.
- Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A.2. (2 puntos) En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

- Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.
- Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.4. (2 puntos) El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50,2% de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23% de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6-7 años de edad el 78% no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

- Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.
- No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

A.5. (2 puntos) Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

- Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 5%.
- Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \leq 0 \\ 2x + a & x > 0 \end{cases}$$

- Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.
- Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

B.3. (2 puntos) Considere la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

- Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.4. (2 puntos) En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el 25% son bandas de música *indie*, el 35% de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el 75% de los grupos *indie*, el 15% de las agrupaciones de *k-pop* y el 60% de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

- Sea nacional.
- Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

B.5. (2 puntos) El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .
- Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\bar{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos.

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^2 - A$.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+2 \\ 1-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Como $A^2 - A = I_2$ si sacamos factor común la matriz A tenemos que $A(A - I) = I$, por lo que la matriz inversa de A es la matriz $A - I$.

$$A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

Llamemos x = “litros de aceite de girasol”, y = “litros de aceite de oliva”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 3y$.

Las restricciones del problema son:

“Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva” $\rightarrow x \geq 10; y \geq 24$

“Los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol” $\rightarrow y \geq 2x$

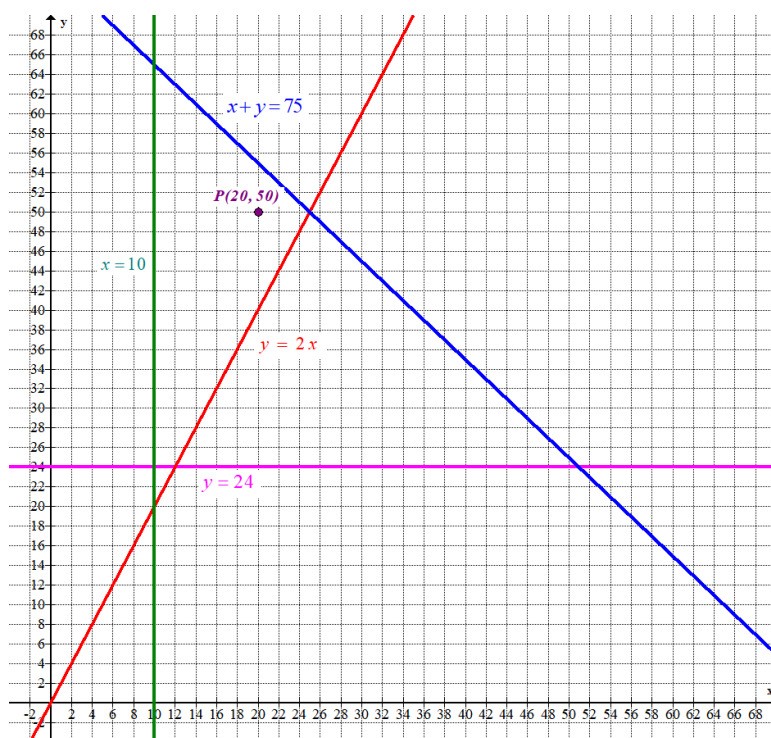
“No hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día” $\rightarrow x + y \leq 75$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 2x \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 10; y \geq 24 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = 2x$		$x + y = 75$		$x = 10$		$y = 24$	
x	$y = 2x$	x	$y = 75 - x$	$x = 10$	y	x	$y = 24$
12	24	10	65	10	24	10	24
25	50	25	50	10	65	12	24



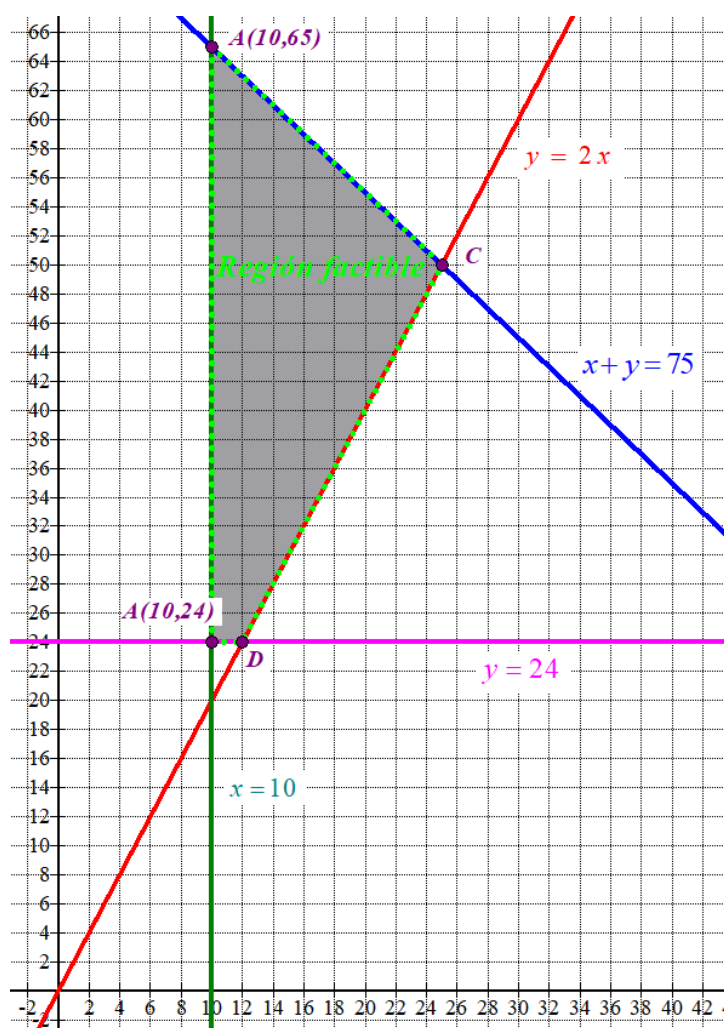
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} y \geq 2x \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 10; \quad y \geq 24 \end{array} \right\}$$
 la región está en el primer cuadrante por

debajo de la recta azul, por encima de las rectas rosa y naranja, a la derecha de la recta vertical verde.

Lo comprobamos viendo si el punto P(20, 50) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 \geq 2 \cdot 20 \\ 20 + 50 \leq 75 \\ 20 \geq 10; \quad 50 \geq 24 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas de los puntos C y D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x + y = 75 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x = 75 \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow y = 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow \boxed{C(25, 50)}$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow \boxed{D(12, 24)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 3y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(10, 24) \rightarrow B(10, 24) = 10 + 3 \cdot 24 = 82$$

$$B(10, 65) \rightarrow B(10, 65) = 10 + 3 \cdot 65 = 205 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(25, 50) \rightarrow B(25, 50) = 25 + 3 \cdot 50 = 175$$

$$D(12, 24) \rightarrow B(12, 24) = 12 + 3 \cdot 24 = 84$$

El beneficio máximo es de 205 € y se consigue en el vértice B(10, 65), que significa producir 10 litros de aceite de girasol y 65 de aceite de oliva.

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.
 b) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

- a) Para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ se debe anular la derivada en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2ax + 4 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a(1) + 4 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = \frac{-4}{2} = -2$$

El valor buscado es $a = -2$.

- b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f'(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 5 = 4(x - 0) \Rightarrow y = 4x + 5$$

La recta tangente tiene ecuación $y = 4x + 5$.

A.4. (2 puntos) El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50,2% de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23% de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6 -7 años de edad el 78% no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

- Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.
- No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

Si en el grupo de escolares con 6 -7 años de edad (son el 50.2 % del total) el 78% no tenía sobrepeso entonces representan el $0.78 \cdot 50.2 = 39.156$ % del total.

Realizamos una tabla de contingencia.

	De 6 a 7 años	De 8 a 9 años	TOTAL
Escolares con sobrepeso			23
Escolares sin sobrepeso	39.156		
	50.2		100

Completamos la tabla.

	De 6 a 7 años	De 8 a 9 años	TOTAL
Escolares con sobrepeso	11.044	11.956	23
Escolares sin sobrepeso	39.156	37.844	77
	50.2	49.8	100

a) Mirando en la tabla la probabilidad pedida es $\frac{11.044}{100} = 0.11044$.

b) Mirando en la tabla la probabilidad pedida es $\frac{37.844}{100} = 0.37844$.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos A al suceso “Tener entre 6 y 7 años” y B al suceso “tener sobrepeso”.

Los datos del ejercicio son $P(A) = 0.502$; $P(B) = 0.23$, $P(B^C/A) = 0.78$

- a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned}
 P(B^C / A) = 0.78 &\Rightarrow \frac{P(B^C \cap A)}{P(A)} = 0.78 \Rightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 0.78 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{0.502 - P(A \cap B)}{0.502} = 0.78 \Rightarrow 0.502 - P(A \cap B) = 0.78 \cdot 0.502 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0.502 - 0.78 \cdot 0.502 = P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.11044}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(A^C \cap B^C)$.

$$\begin{aligned}
 P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
 P(A^C \cap B^C) &= 1 - [0.502 + 0.23 - 0.11044] = \boxed{0.37844}
 \end{aligned}$$

A.5. (2 puntos) Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

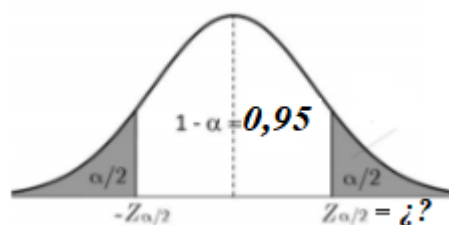
a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 5%.

b) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

a) Tenemos que $p = 0.2$.

Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Con la fórmula del error obtenemos el valor de n para que este error sea como máximo del 5%.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.16}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = 0.16 \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2} \approx 245.86 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra es de 246 países.

b) Tamaño de la muestra es $n = 34$, la proporción muestral es $p = \frac{10}{34} \approx 0.2941$

Para un nivel de confianza del 95 % hemos visto que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.2941 \cdot (1-0.2941)}{34}} \approx 0.1532$$

El intervalo de confianza es

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.2941 - 0.1532, 0.2941 + 0.1532) = (0.1409, 0.4473)$$

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a + 0 + 4 + a - 2 - 0 = 2a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{2} = -1}$$

Estudiamos dos casos diferentes por separado.

CASO 1. Si $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 2 \quad -3 \\ 0 \quad 3 \quad -2 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ \hline 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array}$$

El rango de A es 2, al igual que el de la matriz ampliada A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado y si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

- b) Para $a = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones (visto en el apartado anterior). Lo resolvemos partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2z = -3 + 3y \rightarrow z = \frac{3y-3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - \frac{3y-3}{2} = 2 \Rightarrow 2x + 2y - (3y-3) = 4 \Rightarrow 2x + 2y - 3y + 3 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y = 1 \Rightarrow 2x = 1 + y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{1+\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = \frac{3\lambda-3}{2} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \leq 0 \\ 2x + a & x > 0 \end{cases}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.
 b) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= e^{0^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + a = a \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El valor buscado es $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \leq 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$.

En el intervalo $[1, 3]$ la función es $f(x) = 2x + 1$.

Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas ($y = 0$).

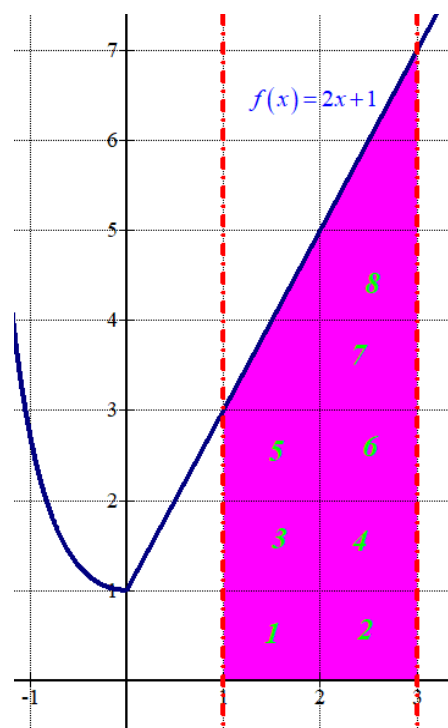
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x + 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin [1, 3]$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 3 de la función.

$$\text{Área} = \int_1^3 2x + 1 dx = \left[x^2 + x \right]_1^3 =$$

$$= [3^2 + 3] - [1^2 + 1] = \boxed{10 \text{ u}^2}$$

Si contamos cuadraditos de 1 unidad cuadrada comprobamos que el área de la región coloreada de rosa tiene un valor aproximado de $6 + 2 + 2 = 10 \text{ u}^2$.



B.3. (2 puntos) Considere la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

- a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{3\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = \frac{5}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{3}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

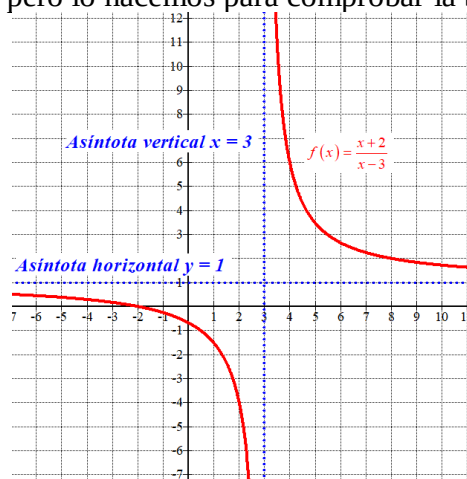
b) Usamos la función derivada para buscar sus puntos críticos.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (x+2)}{(x-3)^2} = \frac{1x-3-x-2}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

Esta expresión de la derivada tiene un numerador siempre negativo y un denominador siempre positivo, por lo que la derivada siempre es negativa y no cambia nunca de signo.

La función es decreciente en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

No pide dibujar la gráfica, pero lo hacemos para comprobar la bondad de las respuestas.

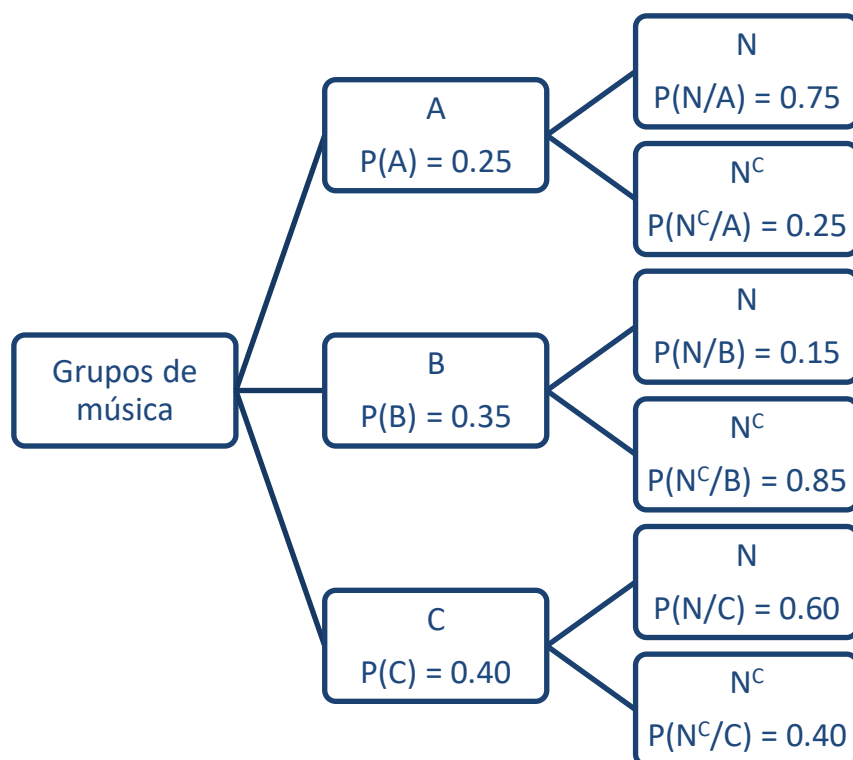


B.4. (2 puntos) En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el 25% son bandas de música *indie*, el 35% de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el 75% de los grupos *indie*, el 15% de las agrupaciones de *k-pop* y el 60% de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea nacional.

b) Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

Llamamos A al suceso “Ser un grupo de música Indie”, B al suceso “Ser grupo de música k-pop” y C al suceso “Ser grupo de música trap”. Y llamamos N al suceso “Ser grupo nacional”. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(N) &= P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C) = \\
 &= 0.25 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.15 + 0.40 \cdot 0.6 = \boxed{0.48}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)P(N/A)}{P(N)} = \frac{0.25 \cdot 0.75}{0.48} = \boxed{\frac{25}{64} \approx 0.3906}$$

B.5. (2 puntos) El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ .

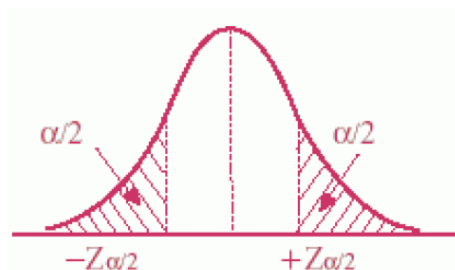
b) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\bar{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos.

X = porcentaje de agua en el cuerpo humano. $X = N(\mu, 8)$

a) Tamaño de la muestra $n = 20$, $\bar{x} = 65$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} \approx 4.606$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (65 - 4.606, 65 + 4.606) = (60.394, 69.606)$$

b) Si $X = N(67, 8)$ la distribución de medias tiene la misma media, pero la desviación típica es

$$\frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2.53. \quad \bar{X}_{10} = N\left(67, \frac{8}{\sqrt{10}}\right).$$

$$P\left(65 \leq \bar{X}_{10} \leq 69\right) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{65 - 67}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{69 - 67}{8/\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P(-0.79 \leq Z \leq 0.79) = P(Z \leq 0.79) - P(Z \leq -0.79) =$$

$$= P(Z \leq 0.79) - P(Z \geq 0.79) = P(Z \leq 0.79) - [1 - P(Z \leq 0.79)] =$$

$$= 2P(Z \leq 0.79) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 2 \cdot 0.7852 - 1 = \boxed{0.5704}$$

EvAU 2022 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400, \quad 3x - 8y \leq 2000, \quad 11x + 14y \geq 9500, \quad x \leq 1200, \quad y \leq 1000$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S , indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

A.3. (2 puntos) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y

$$g(x) = -x^2 + ax + 3.$$

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq 1 \\ g(x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g .

A.4. (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B . Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$

a) Calcule $P(A^c)$.

b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B .

A.5. (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

- Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.
- Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 2 \\ x - az &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema para $a = 0$.

B.2. (2 puntos)

- Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.
- Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x \frac{170 - 0.85x}{5}$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

- Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.
- Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Expresé los resultados con 2 cifras decimales.

B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30% de las invitaciones, Berta el 40% y Carla las restantes. El 2% de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3% y 1%, respectivamente.

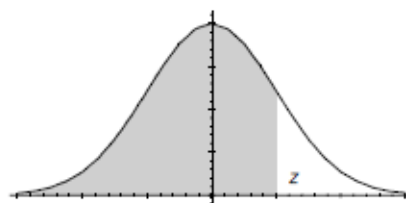
- Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.
- Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

- Calcule el valor de la media muestral.
- Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

a) Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + 0 + a + 0 + a = 4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

La matriz A tiene inversa cuando a sea distinto de 0.

b) Para $a = 1$ comprobamos si existe la inversa de $A - B$.

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Calculamos su inversa para resolver el sistema con cálculo matricial.

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - B)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - B)^T)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$(A-B)X = Y \Rightarrow X = (A-B)^{-1}Y$$

Sustituimos el valor de las matrices y resolvemos.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} - 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = -2 \end{cases}}$$

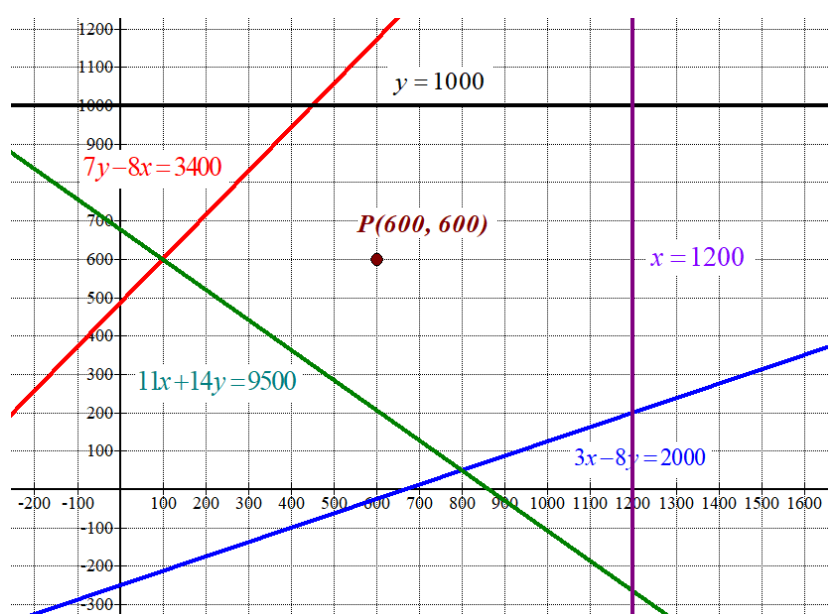
A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por

$$7y - 8x \leq 3400, \quad 3x - 8y \leq 2000, \quad 11x + 14y \geq 9500, \quad x \leq 1200, \quad y \leq 1000$$

- a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
 b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

a) Representamos las rectas asociadas a cada inecuación que delimitarán la región S.

$7y - 8x = 3400$		$3x - 8y = 2000$		$11x + 14y = 9500$		$x = 1200$	$y = 1000$
x	$y = \frac{3400 + 8x}{7}$	x	$y = \frac{3x - 2000}{8}$	x	$y = \frac{9500 - 11x}{14}$	Recta	Recta
100	600	800	50	100	600	vertical	horizontal
800	1400	1200	200	800	50		



Como las inecuaciones son:

$$7y - 8x \leq 3400, \quad 3x - 8y \leq 2000, \quad 11x + 14y \geq 9500, \quad x \leq 1200, \quad y \leq 1000$$

Cambiamos la “y” de lado de la inecuación para que esté positiva en todas las inecuaciones:

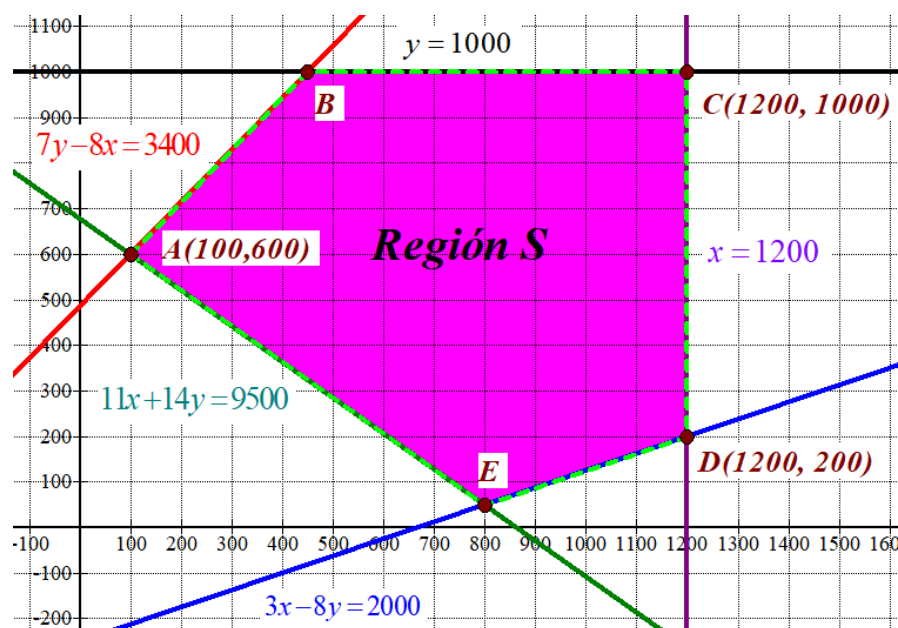
Roja	Azul	Verde	Violeta	Negra
$-8x + 7y \leq 3400,$	$3x \leq 8y + 2000,$	$11x + 14y \geq 9500,$	$x \leq 1200,$	$y \leq 1000$

La región S del plano que cumple todas las inecuaciones está situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y de la verde, a la izquierda de la recta vertical violeta y por debajo de la recta horizontal negra.

Comprobamos que el punto $P(600, 600)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$4200 - 4800 \leq 3400, \quad 1800 - 4800 \leq 2000, \quad 6600 + 14 \cdot 600 \geq 9500, \quad 600 \leq 1200, \quad 600 \leq 1000$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región S es la región coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y E.

$$B \rightarrow \begin{cases} 7y - 8x = 3400 \\ y = 1000 \end{cases} \Rightarrow 7000 - 8x = 3400 \Rightarrow 8x = 7000 - 3400 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3600}{8} = 450 \Rightarrow \boxed{B(450, 1000)}$$

$$E \rightarrow \begin{cases} 3x - 8y = 2000 \\ 11x + 14y = 9500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \times(11) \rightarrow 33x - 88y = 22000 \\ \times(-3) \rightarrow 11x + 14y = 9500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 33x - 88y = 22000 \\ -33x - 42y = -28500 \end{cases}$$

$$\underline{-130y = -6500} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{6500}{130} = 50 \Rightarrow 3x - 400 = 2000 \Rightarrow 3x = 2400 \Rightarrow x = \frac{2400}{3} = 800 \Rightarrow \boxed{E(800, 50)}$$

Los vértices de la región S son: A(100, 600), B(450, 1000), C(1200, 1000), D(1200, 200) y E(800, 50)

b) Valoro la función $f(x, y) = 2x + y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(100, 600) \rightarrow f(100, 600) = 200 + 600 = 800 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(450, 1000) \rightarrow f(450, 1000) = 900 + 1000 = 1900$$

$$C(1200, 1000) \rightarrow f(1200, 1000) = 2400 + 1000 = 3400$$

$$D(1200, 200) \rightarrow f(1200, 200) = 2400 + 200 = 2600$$

$$E(800, 50) \rightarrow f(800, 50) = 1600 + 50 = 1650$$

El valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S es 800 y se alcanza en el punto A(100, 600).

A.3. (2 puntos) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq 1 \\ g(x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g .

a) La función $h(x)$ está definida como:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ pues son funciones polinómicas y continuas.

Vemos que pasa en el cambio de definición $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x + 3 = 1^2 - 4 + 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + ax + 3 = -1^2 + a + 3 = 2 + a \\ h(1) &= 1^2 - 4 + 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La función $h(x)$ es continua en $x = 1$ si $a = -2$.

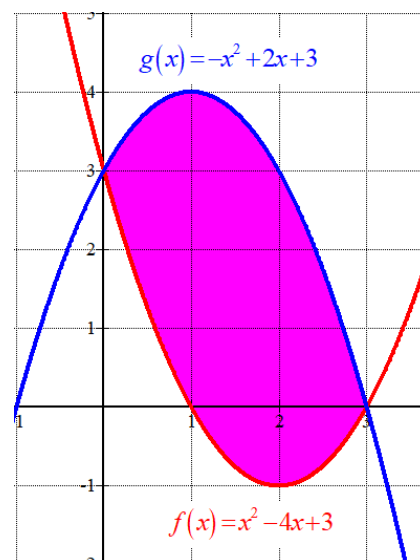
b) Para $a = 2$ las funciones son $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Buscamos los puntos de intersección de sus gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

El área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g se obtiene con la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^3 (x^2 - 4x + 3) - (-x^2 + 2x + 3) dx \right| = \\ &= \left| \int_0^3 2x^2 - 6x dx \right| = \left| \left[2 \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \\ &= \left| \left[2 \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 \right] - \left[2 \frac{0^3}{3} - 3 \cdot 0^2 \right] \right| = \\ &= |18 - 27| = \boxed{9u^2} \end{aligned}$$



A.4. (2 puntos) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$.

a) Calcule $P(A^c)$.

b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Si $E = A \cup B$ implica que $P(E) = P(A \cup B) \Rightarrow 1 = P(A \cup B)$

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos y la información proporcionada en el ejercicio.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 1 = P(A) + 0,7 - 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - 0,7 + 0,2 = 0,5 \Rightarrow \boxed{P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,5 = 0,5}$$

b) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ley de Morgan} \\ P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c) \end{array} \right\} = P((A \cap B)^c) =$$

$$= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = \boxed{0,8}$$

A.5. (2 puntos) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95% para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza pues el intervalo de confianza se obtiene con la fórmula $(p - \text{Error}, p + \text{Error})$.

Como el intervalo de confianza es (0,2, 0,3) la proporción muestral es $\frac{0.3+0.2}{2} = 0.25$.

La proporción de tornillos con defectos en la muestra es del 25 %.

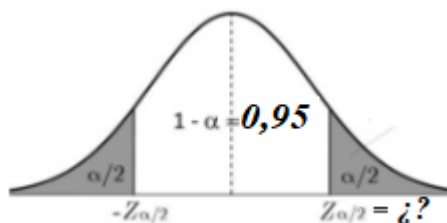
El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza:

$$\text{Error} = \frac{0.3-0.2}{2} = 0.05$$

El error máximo es del 5 %.

b) Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{700}} \approx 0.032$$

El error máximo sería del 3.2 %

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - a^2 + 1 - 0 - a + a = -a^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Distinguimos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a = -1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos

la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $a = 1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $a = 0$ la situación es la analizada en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ x = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ x = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 2 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 2 = 2 \Rightarrow y = 0$$

La solución del sistema es: $x = 0, y = 0, z = 2$.

B.2. (2 puntos)

- a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.
- b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Aplicamos las condiciones dadas para obtener un sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + \frac{b}{x} \\ f(2) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + \frac{b}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{4a + b = 8}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + \frac{b}{x} \Rightarrow f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - \frac{b}{2^2} = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{4} \Rightarrow \boxed{b = 4a}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} 4a + b = 8 \\ b = 4a \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + 4a = 8 \Rightarrow 8a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 4$.

- b) La función $g(x) = x + \frac{1}{x}$ tiene como dominio todos los números reales menos el 0.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} = 0 + \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \infty + \frac{1}{\infty} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{\infty} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene a $x = 0$ como asíntota vertical, no tiene asíntota horizontal y la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

B.3. (2 puntos) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x \frac{170 - 0.85x}{5}$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

- Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.
- Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Expresé los resultados con 2 cifras decimales.

- El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = x \frac{170 - 0.85x}{5} - (10 + 2x + x^2) = x(34 - 0.17x) - 10 - 2x - x^2$$

$$B(x) = 34x - 0.17x^2 - 10 - 2x - x^2 = -1.17x^2 + 32x - 10$$

Derivo e igualo a cero la derivada en busca de sus puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2.34x + 32 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2.34x + 32 = 0 \Rightarrow x = \frac{32}{2.34} = \frac{1600}{117} \approx 13.675$$

Sustituimos en la derivada segunda y vemos su signo.

$$B''(x) = -2.34 \Rightarrow B''(13.675) = -2.34 < 0$$

La función beneficio tiene un máximo en $x = 13.675$

Como $B\left(\frac{1600}{117}\right) = -1.17\left(\frac{1600}{117}\right)^2 + 32\frac{1600}{117} - 10 = \frac{24430}{117} \approx 208.803$ podemos decir que el máximo beneficio que se puede conseguir es de 208803 € y se consigue con una demanda de 13675 litros de fertilizante.

- La función coste medio tiene la expresión: $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10 + 2x + x^2}{x} = \frac{10}{x} + 2 + x$.

Busco el valor de x que hace este coste medio igual a 10.

$$f(x) = 10 \Rightarrow 10 = \frac{10}{x} + 2 + x \Rightarrow 10x = 10 + 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 40}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{2} = 4 \pm \sqrt{6} = \begin{cases} 4 + \sqrt{6} \approx 6.45 = x \\ 4 - \sqrt{6} \approx 1.55 = x \end{cases}$$

Vemos cuando se anula la derivada de la función $f(x)$.

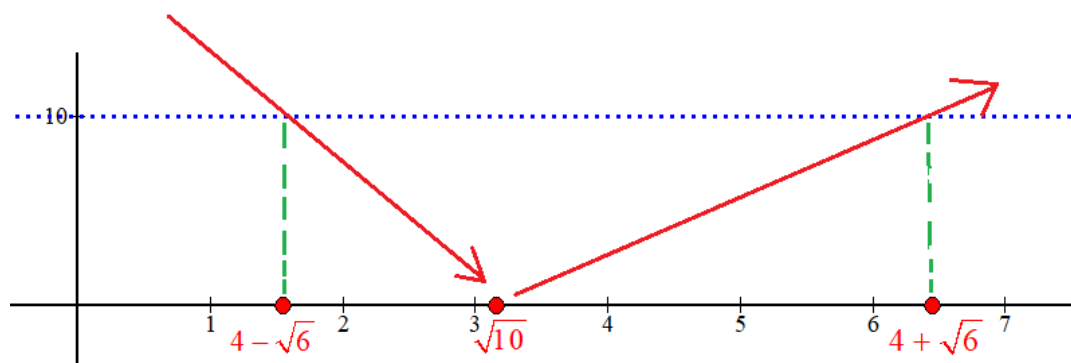
$$f(x) = \frac{10}{x} + 2 + x \Rightarrow f'(x) = -\frac{10}{x^2} + 1 \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{10}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow \\ f'(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -10 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{10} \approx 3.16}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \sqrt{10} \approx 3.16$.

- En $(0, 3.16)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -\frac{10}{1^2} + 1 = -9 < 0$. La función decrece en $(0, 3.16)$.
- En $(3.16, +\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = -\frac{10}{4^2} + 1 = \frac{3}{8} > 0$. La función crece en $(3.16, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



El coste medio está por debajo de 10 mil euros entre los valores de demanda 1550 y 6450 litros de fertilizante.

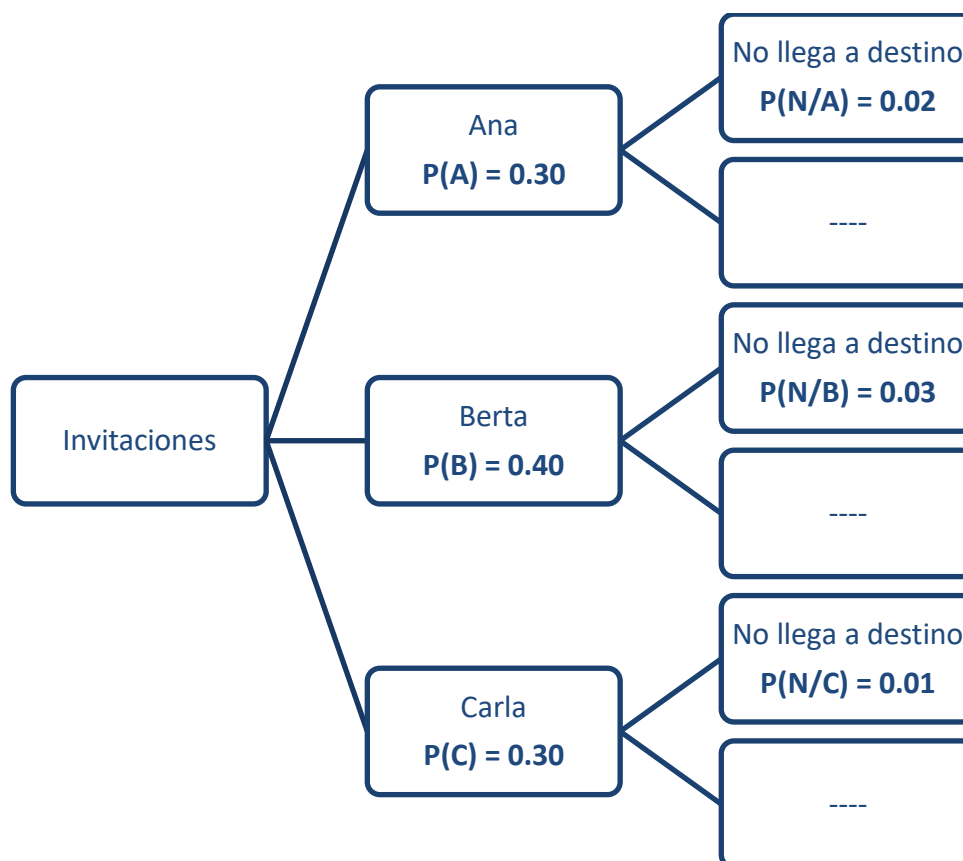
B.4. (2 puntos) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30% de las invitaciones, Berta el 40% y Carla las restantes. El 2% de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3% y 1%, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Llamamos A = “invitación enviada por Ana”, B = “invitación enviada por Berta”, C = “invitación enviada por Carla”. N = “invitación no llega a destino”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(N) &= P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.01 = \boxed{0.021}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)P(N/A)}{P(N)} = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.021} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.286}$$

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

a) $X = N(\mu, 15)$

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{157.125 + 182.875}{2} = \boxed{170}$$

b) Tamaño de muestra es $n = 9$.

Calculamos el error del intervalo de confianza como la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{182.875 - 157.125}{2} = 12.875$$

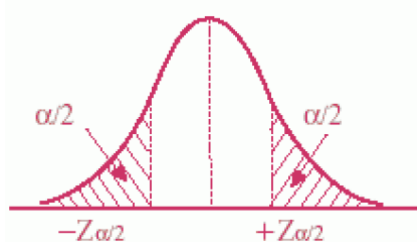
Utilizamos la fórmula del error para hallar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 12.875 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{9}} \Rightarrow 12.875 = z_{\alpha/2} \cdot 5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{12.875}{5} = 2.575$$

Averiguamos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2}$.

$$z_{\alpha/2} = 2.575 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos} \\ \text{en la tabla} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0.9949 + 0.9951}{2} = 0.995 \Rightarrow 2 - \alpha = 1.99 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.99$$

El nivel de confianza es del 99 %.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9947	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981

EvAU 2022 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las CC SS II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
 EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
 UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
 Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.
- b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A - B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A.2. (2 puntos) La plataforma digital Plusfix va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15 € de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10 € de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

A.3. (2 puntos)

- a) Halle

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5} dx.$$

- b) Considere

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 5} \text{ y } g(x) = \ln(x).$$

Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$.

A.4. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique la respuesta.

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

A.5. (2 puntos) El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95% para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

B.2. (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ (x - a)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.

b) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x .

B.3. (2 puntos) Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es 15/e.

b) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.

Nota: Expresa los resultados con 2 cifras decimales.

B.4. (2 puntos) Un virus muy peligroso está presente en el 5% de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85% de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85% de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85% de las veces.

a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?

b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

B.5. (2 puntos) El 64% de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

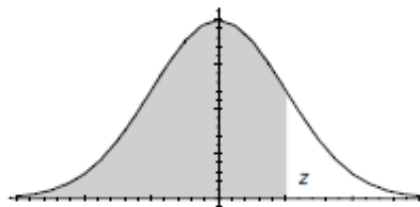
a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 70% de los individuos de la muestra posean dicha característica.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Para que la matriz A tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{vmatrix} = -a + a - 2a + a^2 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de “ a ” distinto de 0 y de 2.

b) Sustituimos y resolvemos la ecuación matricial.

$$A-B = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 0=0 \\ -a+1=2 \rightarrow 1-2=a \rightarrow \boxed{a=-1} \end{cases}$$

El valor buscado es $a = -1$.

A.2. (2 puntos) La plataforma digital Plusfix va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15 € de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10 € de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

Llamemos x = tiempo dedicado al cine, y = tiempo dedicado al deporte.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 15x + 10y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“El tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte” $\rightarrow x \leq y$

“La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos” $\rightarrow 600 \leq x + y \leq 900$

“Debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte” $\rightarrow 200 \leq x; y \leq 500$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq y \\ 600 \leq x + y \leq 900 \\ 200 \leq x; y \leq 500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \geq x \\ 600 \leq x + y \leq 900 \\ 200 \leq x \\ y \leq 500 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$y = x$$

x	$y = x$
0	0
100	100

$$x + y = 600$$

x	$y = 600 - x$
0	600
400	200

$$x + y = 900$$

x	$y = 900 - x$
0	900
400	500

$$x = 200$$

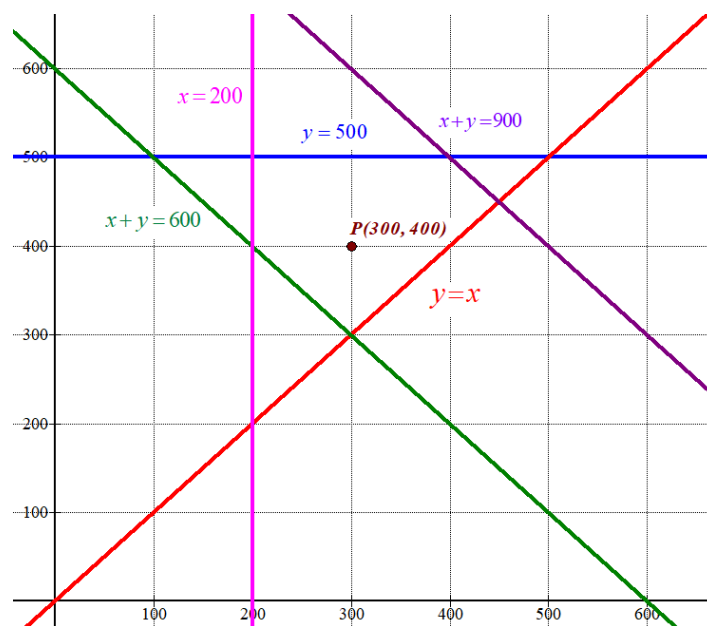
Recta vertical

$$y = 500$$

x	$y = 500$
0	500
100	500

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



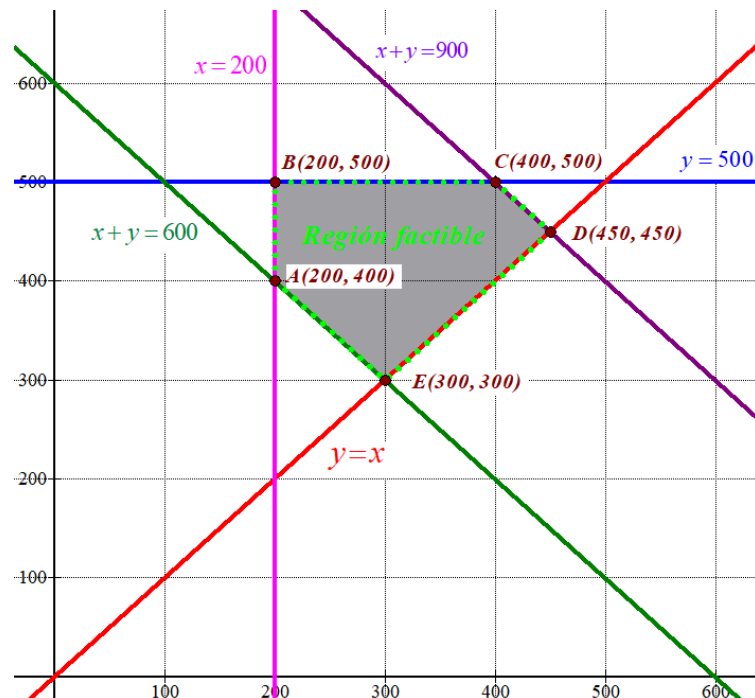
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \geq x \\ \text{Como las restricciones son: } 600 \leq x + y \leq 900 \\ 200 \leq x \\ y \leq 500 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por}$$

debajo de la recta horizontal azul, debajo de la recta violeta, por encima de la recta roja, por encima de la recta verde y a la derecha de la recta vertical rosa.

Comprobamos si el punto P(300, 400) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 300 \geq 0; \quad 400 \geq 0 \\ 400 \geq 300 \\ 600 \leq 300 + 400 \leq 900 \\ 200 \leq 300 \\ 400 \leq 500 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x + x = 900 \Rightarrow x = 450 \Rightarrow \boxed{D(450, 450)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 15x + 10y$ en cada vértice en busca del máximo.

$$A(200, 400) \rightarrow B(200, 400) = 3000 + 4000 = 7000$$

$$B(200, 500) \rightarrow B(200, 500) = 3000 + 5000 = 8000$$

$$C(400, 500) \rightarrow B(400, 500) = 6000 + 5000 = 11000$$

$$D(450, 450) \rightarrow B(450, 450) = 6750 + 4500 = 11250 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(300, 300) \rightarrow B(300, 300) = 4500 + 3000 = 7500$$

El beneficio máximo es de 11250 € y se consigue en el vértice D(450, 450), que significa dedicar 450 minutos al cine y otros 450 al deporte.

A.3. (2 puntos)

a) Halle

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5} dx.$$

b) Considere

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 5} \text{ y } g(x) = \ln(x).$$

Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$.

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{x}{2x^2 + 5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2 + 5} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 5) + K$$

Ahora calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5} dx &= \left[\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 5) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{4} \ln(2 \cdot 1^2 + 5) \right] - \left[\frac{1}{4} \ln(2 \cdot 0^2 + 5) \right] = \boxed{\frac{1}{4} \ln 7 - \frac{1}{4} \ln 5 \approx 0.3365} \end{aligned}$$

b) Derivamos aplicando la regla de la cadena.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (2x^2 + 5) - x(4x)}{(2x^2 + 5)^2} = \frac{2x^2 + 5 - 4x^2}{(2x^2 + 5)^2} = \frac{5 - 2x^2}{(2x^2 + 5)^2}$$

$$g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(\ln(x)) \cdot g'(x) = \frac{5 - 2(\ln x)^2}{(2(\ln x)^2 + 5)^2} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{5 - 2(\ln x)^2}{x(2(\ln x)^2 + 5)^2}}$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique la respuesta.

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B .

a) Para que sean A y B independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0,7 \\ P(B^c) = 0,7 \Rightarrow P(B) = 1 - 0,7 = 0,3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0,21 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

b) Usamos la ley de Morgan: $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$ y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ &= 1 - [0,7 + 0,3 - 0,2] = \boxed{0,2} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Colocamos los datos del ejercicio $P(A) = 0,7$, $P(B^c) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$ en una tabla de contingencia.

	B	B^c	
A	0.2		0.7
A^c			
		0.7	1

Completamos la tabla.

	B	B^c	
A	0.2	0.5	0.7
A^c	0.1	0.2	0.3
	0.3	0.7	1

Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace para calcular la probabilidad pedida: $P(A^c \cap B^c) = 0,2$

A.5. (2 puntos) El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

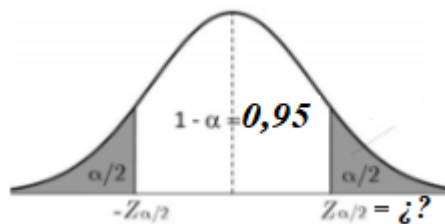
- a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95% para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.
 b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90%.

a) X = Peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas. $X = N(\mu, 10)$

Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 200$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

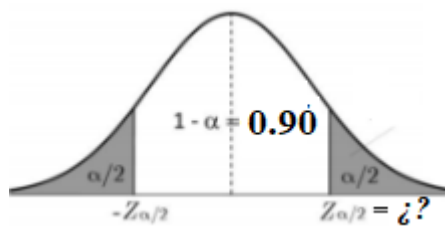
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} \approx 4.383$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (200 - 4.383, 200 + 4.383) = (195.617, 204.383)$$

b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualamos el error a 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 \cdot \sqrt{n} = 1.645 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 10}{0.5} \right)^2 = 1082.41$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 1083 bolsas de palomitas.

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ ax - z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

- a) Determine a para que el sistema NO sea compatible determinado.
b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + a = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

Cuando $a = 0$ o $a = 1$ el sistema no es compatible determinado. El sistema será compatible indeterminado o incompatible pues el rango de A no puede ser 3 y será menor que el número de incógnitas (3).

- b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x = z \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2x = 2 \\ 2y + 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow 3x + 2(1 - x) = 2 \Rightarrow 3x + 2 - 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1 - 0 = 1} \\ \boxed{z = 2 \cdot 0 = 0} \end{cases}$$

La solución es $x = 0$; $y = 1$; $z = 0$.

B.2. (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ (x-a)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que f sea una función continua en su dominio.
 b) Para $a = 1/2$, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de las x .

a) Para que sea continua en su dominio debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 - 1 = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-a)^2 = (1-a)^2 \\ f(1) &= a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 1 = (1-a)^2 \Rightarrow a - 1 = 1 + a^2 - 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = a \\ \frac{3-1}{2} = 1 = a \end{cases}$$

La función es continua si $a = 1$ o $a = 2$.

b) Para $a = 1/2$ la función es $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

El eje de las x tiene ecuación $y = 0$.

Hallamos los puntos de corte entre ambas funciones.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1, & \text{si } x \leq 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} +\sqrt{2} \notin (-\infty, 1] \\ -\sqrt{2} \in (-\infty, 1] \end{cases} \\ 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty) \end{cases}$$

La función $f(x)$ corta el eje de las x solamente en $x = -\sqrt{2}$.

B.3. (2 puntos) Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, t (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

- a) Obtenga razonadamente el valor de la constante C sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$.
 b) Para $C = 3$, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.
 Nota: Expresa los resultados con 2 cifras decimales.

- a) La tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es $15/e$ significa que $f'(5) = 15/e$.

$$f(t) = 90 + Ct^2 e^{-t/5} \Rightarrow f'(t) = 2Cte^{-t/5} + \frac{-1}{5}Ct^2 e^{-t/5} = 2Cte^{-t/5} - \frac{1}{5}Ct^2 e^{-t/5}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &= 2Cte^{-t/5} - \frac{1}{5}Ct^2 e^{-t/5} \\ f'(5) &= \frac{15}{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{15}{e} = 2C \cdot 5 \cdot e^{-5/5} - \frac{1}{5}C \cdot 5^2 \cdot e^{-5/5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{e} = 10C e^{-1} - 5C e^{-1} \Rightarrow \frac{15}{e} = 5C e^{-1} \Rightarrow \frac{15}{e} = \frac{5C}{e} \Rightarrow 15 = 5C \Rightarrow \boxed{C = 3}$$

- b) Para $C = 3$ la función es $f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5}$, $0 \leq t \leq 60$.

Utilizamos la derivada para estudiar su comportamiento.

$$f(t) = 90 + 3t^2 e^{-t/5} \Rightarrow f'(t) = 6te^{-t/5} - \frac{1}{5}3t^2 e^{-t/5} = te^{-t/5} \left(6 - \frac{3t}{5} \right)$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow te^{-t/5} \left(6 - \frac{3t}{5} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t = 0} \\ e^{-t/5} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 6 - \frac{3t}{5} = 0 \rightarrow 6 = \frac{3t}{5} \rightarrow 30 = 3t \rightarrow \boxed{t = 10} \end{cases}$$

Los puntos críticos son en $t = 0$ y en $t = 10$. Vemos que ocurre en los intervalos $(0, 10)$ y en $(10, 60)$.

- En el intervalo $(0, 10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$f'(5) = 5e^{-5/5} \left(6 - \frac{3 \cdot 5}{5} \right) = \frac{15}{e} > 0. \text{ La función crece en } (0, 10).$$

- En el intervalo $(10, 60)$ tomamos $t = 15$ y la derivada vale

$$f'(15) = 15e^{-15/5} \left(6 - \frac{3 \cdot 15}{5} \right) = \frac{-45}{e^3} < 0. \text{ La función decrece en } (10, 60).$$

La cantidad de glucosa en sangre disminuye entre los 10 y los 60 minutos.

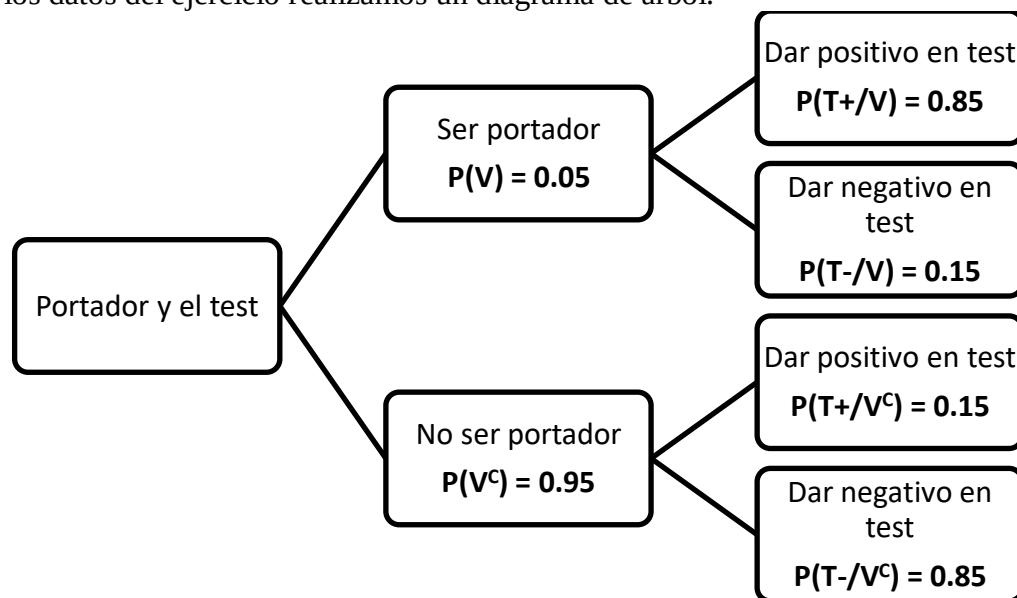
La cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco se produce a los 10 minutos y es de $f(10) = 90 + 3 \cdot 10^2 e^{-10/5} \approx 130.60 \text{ mg/dl}$.

B.4. (2 puntos) Un virus muy peligroso está presente en el 5% de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85% de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85% de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85% de las veces.

- a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?
- b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

Llamamos V = “Ser portador del virus”, V^C = “No ser portador del virus”, $T+$ = “Dar positivo en el test” y $T-$ = “Dar negativo en el test”.

Con los datos del ejercicio realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+) = P(V)P(T+/V) + P(V^C)P(T+/V^C) =$$

$$= 0.05 \cdot 0.85 + 0.95 \cdot 0.15 = \boxed{0.185}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/T+) = \frac{P(V \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(V)P(T+/V)}{P(T+)} = \frac{0.05 \cdot 0.85}{0.185} = \boxed{\frac{17}{74} \approx 0.2297}$$

B.5. (2 puntos) El 64% de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

- ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?
- Halle la probabilidad de que más del 70% de los individuos de la muestra posean dicha característica.

- a) La variable proporción X = “proporción de individuos con esa característica de la muestra” sigue una distribución normal de media 0.64 y desviación típica

$$\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{120}} \approx 0.04$$

$$X = N(0.64, 0.04)$$

- b) Nos piden calcular $P(X > 0.7)$

$$P(X > 0.7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.7 - 0.64}{0.04}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

EvAU 2022 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2021-2022 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

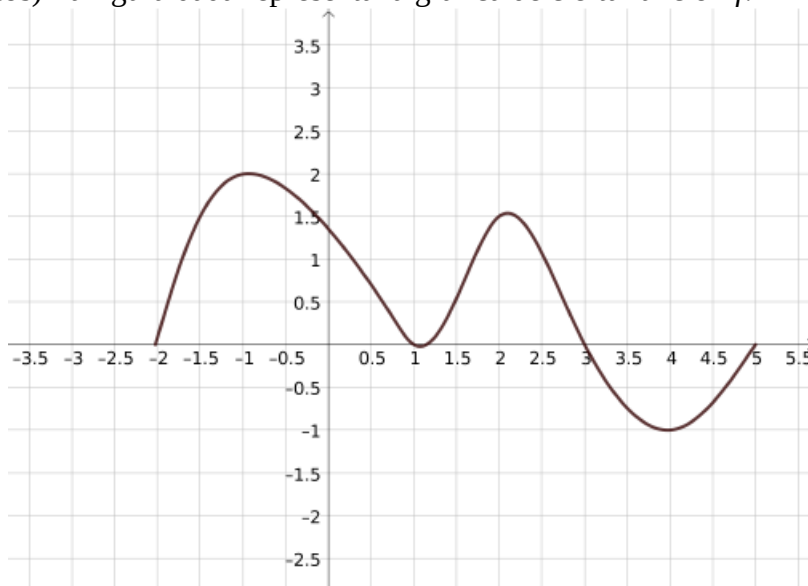
A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.
- Calcule A^{-1} para $a = 1$.

A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1;6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1e y por cada litro de chocolate un beneficio de 2e. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

A.3. (2 puntos) La figura dada representa la gráfica de cierta función f .



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$:

- Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.
- Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^5 f(x) dx.$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$, $P(A/B) = 0,4$ y $P(A/B^c) = 0,8$; siendo B^c es el suceso complementario de B.

- Calcule $P(B)$.
- ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

A.5. (2 puntos) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

- Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99% para el peso medio de un saco de cemento.
- Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

- Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema para $a = 2$.

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

- Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

B.3. (2 puntos) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura.

Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm² para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm² para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Expresé el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.

B.4. (2 puntos) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

- Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.
- Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ . Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

- Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95% para μ .
- Si $\sigma = 20$; calcule $P(-10 < \bar{X} - \mu < 10)$

SOLUCIONES**A.1.** (2 puntos) Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.
 b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

a) Para ser invertible el determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -2 + a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{3} = a \\ 1 + \sqrt{3} = a \end{cases}$$

Para ser invertible el valor de a debe ser distinto de $1 - \sqrt{3}$ y de $1 + \sqrt{3}$.b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1 € y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 €. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Llamemos x = “litros de leche”, y = “litros de chocolate líquido”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Dispone para la mezcla de 30 litros de leche” $\rightarrow x \leq 30$

“Dispone para la mezcla de 20 litros de chocolate líquido” $\rightarrow y \leq 20$

“Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche” $\rightarrow x \leq 3y$

“Por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate” $\rightarrow y \leq 1,6x$

“Solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche” $\rightarrow x + y \leq 45$

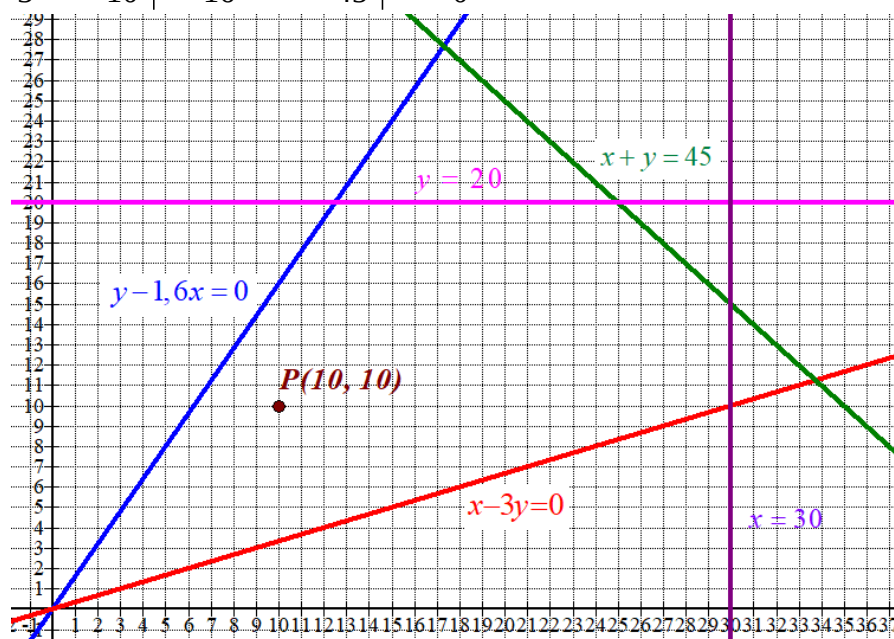
Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x \leq 3y \\ y \leq 1,6x \\ x + y \leq 45 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x - 3y \leq 0 \\ y - 1,6x \leq 0 \\ x + y \leq 45 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$-3y = 0$ $y - 1,6x = 0$ $x + y = 45$ $x = 30$ $y = 20$ $x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = \frac{x}{3}$	x	$y = 1,6x$	x	$y = 45 - x$	Recta	Recta	Primer
0	0	0	0	0	45	vertical	horizontal	cuadrante
3	3	10	16	45	0			



Como las restricciones son

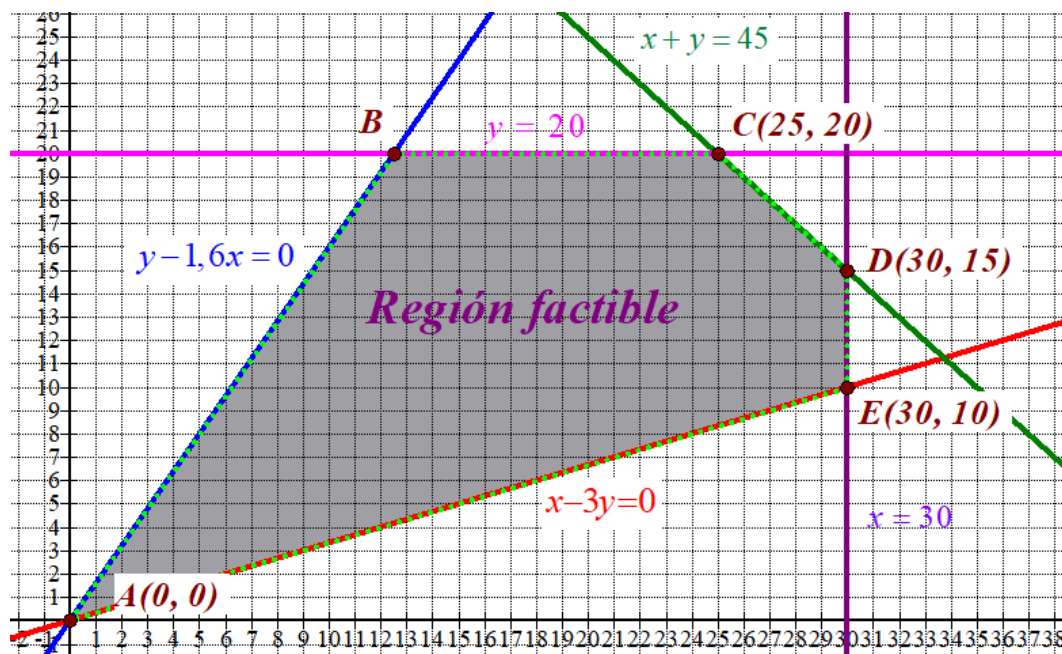
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x - 3y \leq 0 \\ y - 1,6x \leq 0 \\ x + y \leq 45 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por debajo}$$

de la recta azul y verde, por encima de la recta roja, a la izquierda de $x = 30$ y por debajo de la recta horizontal $y = 20$.

Lo comprobamos probando si el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 30 \\ 10 \leq 20 \\ 10 - 30 \leq 0 \\ 10 - 16 \leq 0 \\ 10 + 10 \leq 45 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas del punto B. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left. \begin{array}{l} y = 20 \\ y - 1,6x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 20 - 1,6x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{1,6} = 12,5 \Rightarrow B(12,5, 20)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(12,5, 20) \rightarrow B(12,5, 20) = 12,5 + 40 = 52,5$$

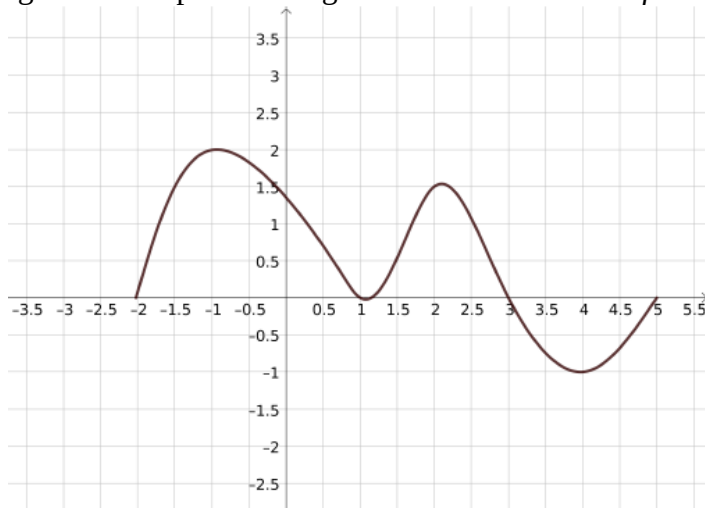
$$C(25, 20) \rightarrow B(25, 20) = 25 + 40 = 65 \text{ ¡¡Máximo!!}$$

$$D(30, 15) \rightarrow B(30, 15) = 30 + 30 = 60$$

$$E(30, 10) \rightarrow B(30, 10) = 30 + 20 = 50$$

El beneficio máximo es de 65 € y se consigue en el vértice $C(25, 20)$, que significa mezclar 25 litros de leche con 20 litros de chocolate líquido.

A.3. (2 puntos) La figura dada representa la gráfica de cierta función f .



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$:

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^5 f(x) dx.$$

a) La derivada es 0 en $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$ y $x = 4$. La derivada es positiva (la función crece) en los intervalos $(-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5)$.

b) En el intervalo $(-2, 3)$ la gráfica está por encima del eje y en el intervalo $(3, 5)$ está por debajo.

La integral definida de la función en el intervalo $(-2, 3)$ es positiva y en el intervalo $(3, 5)$ es negativa, pero es más grande el área de la región limitada por la gráfica y el eje OX en el

intervalo $(-2, 3)$ por lo que $\int_{-2}^5 f(x) dx$ va a tener un resultado positivo.



A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$, $P(A/B) = 0,4$ y $P(A/B^c) = 0,8$; siendo B^c es el suceso complementario de B.

a) Calcule $P(B)$.

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = 0,4 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B)$$

$$P(A/B^c) = 0,8 \Rightarrow \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 0,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B^c) = 0,8 \cdot P(B^c) = 0,8(1 - P(B)) = 0,8 - 0,8 \cdot P(B)$$

Como $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ sustituimos los valores obtenidos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B) \\ P(A \cap B^c) = 0,8 - 0,8 \cdot P(B) \\ P(A) = 0,6 \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \end{array} \right\} \Rightarrow 0,6 = 0,4 \cdot P(B) + 0,8 - 0,8 \cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,6 = 0,4 \cdot P(B) + 0,8 - 0,8 \cdot P(B) \Rightarrow -0,2 = -0,4 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(B)P(A/B) + P(B^c)P(A/B^c) \Rightarrow 0,6 = 0,4P(B) + 0,8P(B^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,6 = 0,4P(B) + 0,8(1 - P(B)) \Rightarrow 0,6 = 0,4P(B) + 0,8 - 0,8P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,2 = -0,4P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{-0,2}{-0,4} = 0,5$$

b) ¿Son A y B independientes? Para ello debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A/B) = 0,4 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$$

$$P(A)P(B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$$

$$P(A \cap B) = 0,2 \neq 0,3 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

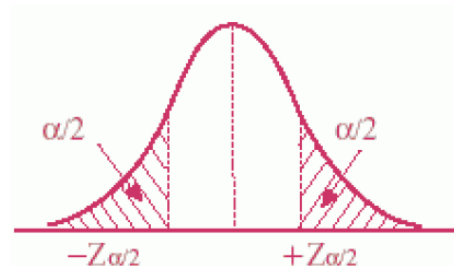
A.5. (2 puntos) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

- a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99% para el peso medio de un saco de cemento.
- b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90%.

- a) X = Peso de un saco de cemento (en kg). $X = N(\mu, 2)$
 Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 50$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

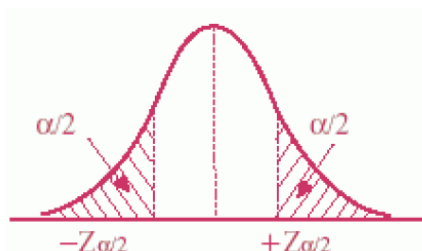
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50 - 1.15, 50 + 1.15) = (48.85, 51.15)$$

- b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %.

$$1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualemos el error a 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 2 \Rightarrow n = (1.645 \cdot 2)^2 = 10.8241$$

El tamaño mínimo es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 11 sacos.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^2 + a + 1 - a^2 + a = -2a^2 + 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a(-a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \boxed{y = 0} \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 0 + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 3}^a \} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = y + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + z + y + z = 1 \Rightarrow 2y + 2z = 1 \Rightarrow 2y = 1 - 2z \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} - z} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} - z + z = \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a=0$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado. Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a & & & \\ 2x & -y & -2z & = 0 \\ -2x & -4y & -2z & = -4 \\ \hline 0 & -5y & -4z & = -4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a & & & \\ x & +y & +z & = 1 \\ -x & -2y & -z & = -2 \\ \hline 0 & -y & 0 & = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -5y - 4z = -4 \\ -y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -5y - 4z = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 + z = 2 \\ -5 - 4z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -4z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

La solución es $x = \frac{1}{4}; y = 1; z = -\frac{1}{4}$

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

- a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
 b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

- a) El dominio de la función son todos los reales menos los que anulen el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{1 - 1 + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \{\text{Grado del numerador} > \text{grado del denominador}\} = +\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} =$$

$$= \{\text{Grado del numerador} = \text{grado del denominador}\} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

- b) Usamos la fórmula de derivación de un cociente para obtener la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

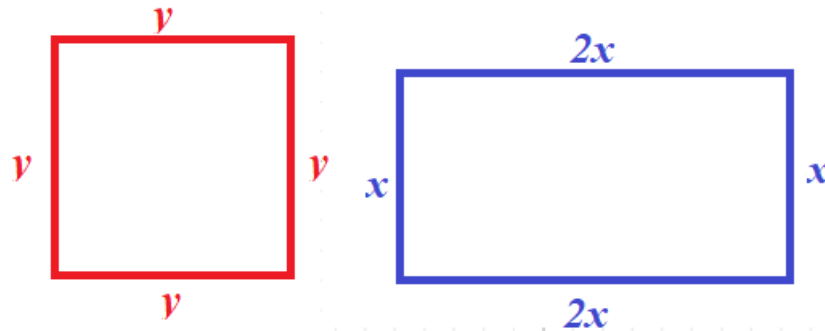
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - \cancel{x} + 1 - x^2 + \cancel{x} - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}} \Rightarrow \boxed{f'(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{(2 - 1)^2} = 0}$$

B.3. (2 puntos) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura.

Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm² para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm² para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Expresa el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.



Área del cuadrado de lado “y” es y^2 . El área del rectángulo es $2x \cdot x = 2x^2$

El coste es $C(x, y) = 16 \cdot y^2 + 10 \cdot 2x^2 = 16y^2 + 20x^2$

Si el alambre inicial mide 450 cm $\rightarrow 4y + 2x + 4x = 450 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4y + 6x = 450 \Rightarrow 2y + 3x = 225 \Rightarrow 2y = 225 - 3x \Rightarrow y = \frac{225 - 3x}{2}$$

Sustituyendo en la función coste tenemos:

$$C(x) = 16 \left(\frac{225 - 3x}{2} \right)^2 + 20x^2 = 16 \frac{50625 + 9x^2 - 1350x}{4} + 20x^2$$

$$C(x) = 4(50625 + 9x^2 - 1350x) + 20x^2 = 202500 + 36x^2 - 5400x + 20x^2$$

$$\boxed{C(x) = 56x^2 - 5400x + 202500}, \text{ donde } x \text{ es la altura del rectángulo.}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca del mínimo.

$$C(x) = 56x^2 - 5400x + 202500 \Rightarrow C'(x) = 112x - 5400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow 112x - 5400 = 0 \Rightarrow x = \frac{5400}{112} = \frac{675}{14} \approx 48.214 \text{ cm}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$C'(x) = 112x - 5400 \Rightarrow C''(x) = 112 \Rightarrow C''(48.214) = 112 > 0$$

La función coste tiene un valor mínimo en $x = \frac{675}{14} \approx 48.214$.

Esto significa que el trozo de alambre para el rectángulo tiene de longitud

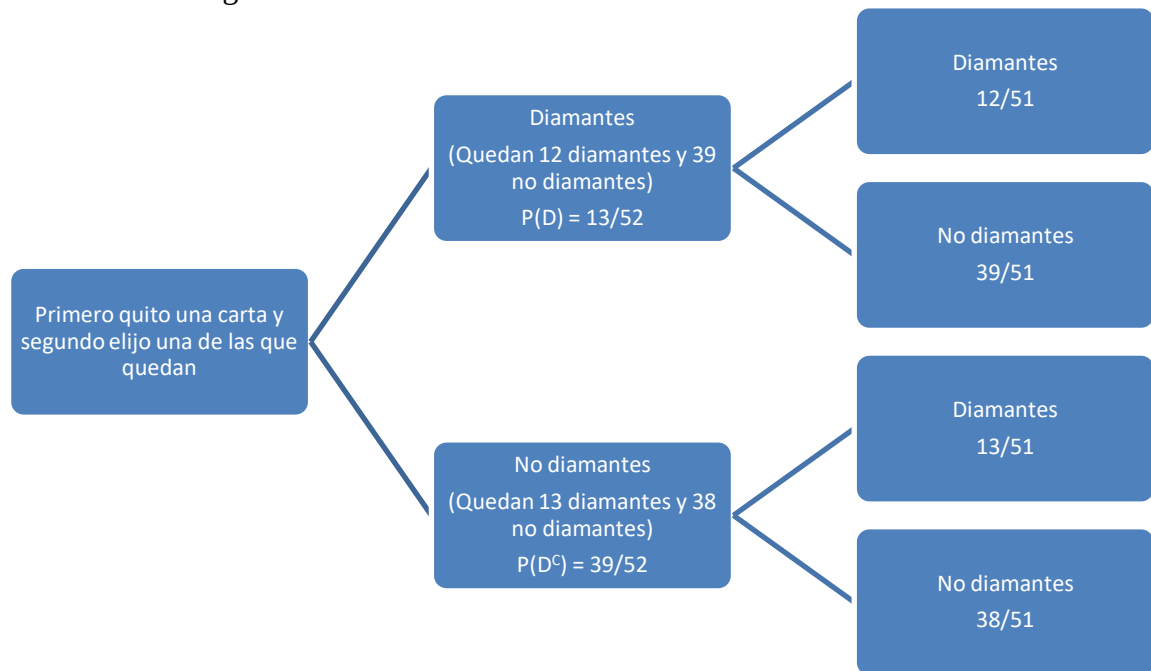
$$6x = 6 \cdot \frac{675}{14} = \frac{2025}{7} \approx \boxed{289.286 \text{ cm}} \text{ y el del cuadrado es}$$

$$4y = 4 \cdot \frac{225 - 3x}{2} = 2 \left(225 - 3 \cdot \frac{675}{14} \right) = \frac{1125}{7} \approx \boxed{160.714 \text{ cm}}$$

B.4. (2 puntos) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

- a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.
 b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos D1 a sacar una carta de diamantes en la primera extracción y D2 a sacar una carta de diamantes en la segunda extracción.

- a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D2) = P(D1)P(D2/D1) + P(\overline{D1})P(D2/\overline{D1}) =$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\overline{D1}/\overline{D2}) = \frac{P(\overline{D1} \cap \overline{D2})}{P(\overline{D2})} = \frac{P(\overline{D1})P(\overline{D2}/\overline{D1})}{1 - P(D2)} = \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - 0.25} = \boxed{\frac{38}{51} \approx 0.745}$$

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ . Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

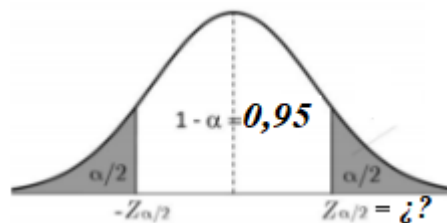
a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95% para μ .

b) Si $\sigma = 20$; calcule $P(-10 < \bar{X} - \mu < 10)$

Si la distribución de la variable X es una normal $X = N(\mu, \sigma)$ entonces la distribución $\bar{X}_{10}$ de las medias de tamaño 10 sigue una distribución normal con la misma media, pero con la desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{10}} \rightarrow \bar{X}_{10} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$.

a) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



La media muestral es el valor central del intervalo de confianza $I = (58,2; 73,8)$.

$$\bar{x} = \frac{58,2 + 73,8}{2} = 66$$

El error del intervalo es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $I = (58,2; 73,8)$.

$$Error = \frac{73,8 - 58,2}{2} = 7,8$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7,8 = 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow 7,8\sqrt{10} = 1,96\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{7,8\sqrt{10}}{1,96} = 12,58$$

b) $X = N(\mu, 20) \rightarrow \bar{X}_{10} = N\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu, 2\sqrt{10})$

$$P(-10 < \bar{X} - \mu < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{-10}{2\sqrt{10}} < \frac{\bar{X} - \mu}{2\sqrt{10}} < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-10}{2\sqrt{10}} < Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) = P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - P\left(Z < \frac{-10}{2\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - P\left(Z > \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) = P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{10}{2\sqrt{10}}\right)\right) =$$

$$= P(Z < 1,58) - 1 + P(Z < 1,58) = 2 \cdot 0,9429 - 1 = \boxed{0,8858}$$

EvAU 2022 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
 EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
 UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
 Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$.

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

A.2. (2 puntos) Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{si } x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x + b, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^0 f(x) dx.$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B) = 1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cup B) = 3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cap B^c) = 1/4$.

Nota: B^c denota el suceso complementario de B .

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

- Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 6%.
- Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias que tienen internet.

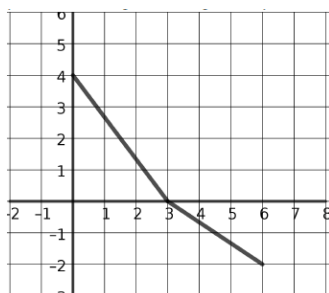
B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{array} \right\}$$

- Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema para $a = 0$.

B.2. (2 puntos) La siguiente figura representa la gráfica de una **función lineal** a trozos

$$f : [0, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$$



- Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x) dx$.
- ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x) dx$ o $\int_0^6 f(x) dx$? Razone la respuesta.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

- Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x = 9$ sea paralela al eje de las x . Indique la expresión de dicha recta.
- Para $K = 3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

B.4. (2 puntos) Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50% de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30% no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

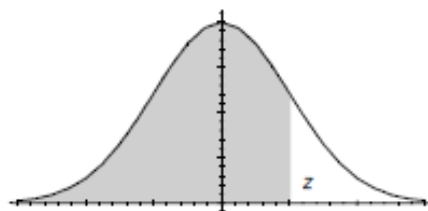
B.5. (2 puntos) Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

- ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?
- Calcule $P(19 < \bar{X} < 22)$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$.

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$

Sustituimos en la expresión $A(A^2 - A^4)$

$$A(A^2 - A^4) = A(A^2 - A^2) = A \cdot 0 = 0$$

b) Para que la matriz B sea invertible tiene que tener determinante no nulo.

$$B = A + aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

La matriz B es invertible si “a” es distinto de 0, de -1 y de 1.

Para que la matriz AB sea invertible tiene que tener determinante no nulo

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz AB tiene determinante nulo, independientemente del valor de “a”.

La matriz AB no es invertible para ningún valor de “a”.

A.2. (2 puntos) Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Llamemos x = número de sacos de 5 kg, y = número de sacos de 10 kg.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 2x + 5y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg” $\rightarrow y \leq 180$

“Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos” $\rightarrow 5x + 10y \leq 2000$

“Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg” $\rightarrow 3x \leq 2y$

“Como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg” $\rightarrow x \geq 20; y \geq 60$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ 5x + 10y \leq 2000 \\ 3x \leq 2y \\ x \geq 20; y \geq 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ x + 2y \leq 400 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20; y \geq 60 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$y = 180$$

$$x + 2y = 400$$

x	$y = 180$
0	180
100	180

x	$y = \frac{400-x}{2}$
0	200
400	0

$$2y = 3x$$

$$x = 20$$

x	$y = \frac{3x}{2}$
0	0
400	600

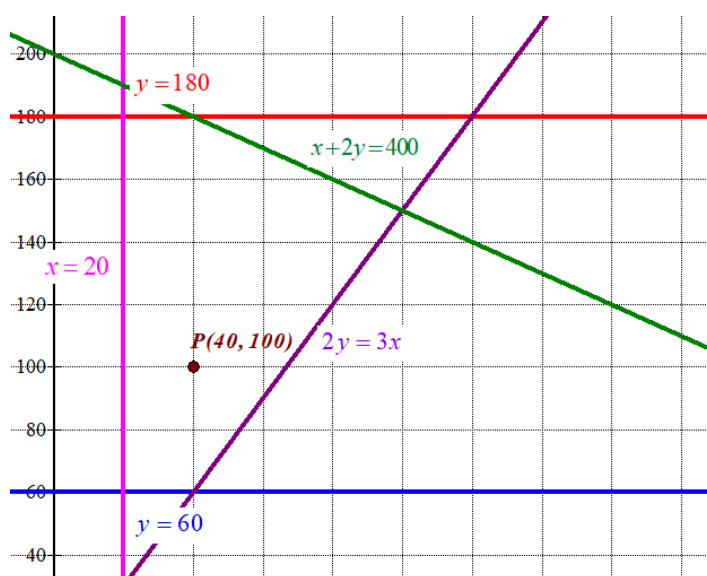
Recta
vertical

$$y = 60$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 60$
0	60
100	60

Primer
cuadrante



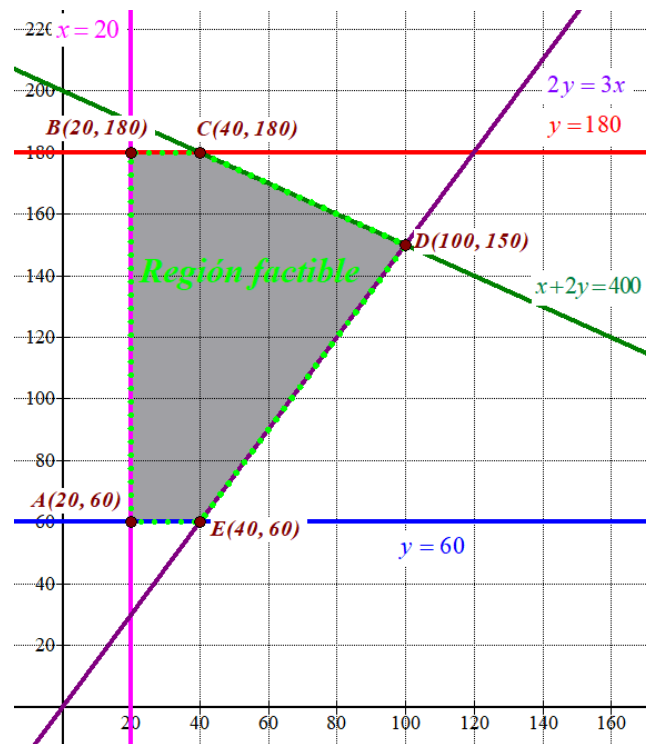
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ \text{Como las restricciones son } x + 2y \leq 400 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20; \quad y \geq 60 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por debajo}$$

de la recta horizontal roja, debajo de la recta verde, por encima de la recta violeta, por encima de la recta horizontal azul y a la derecha de la recta vertical rosa.

Lo comprobamos viendo si el punto P(40, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 40 \geq 0; \quad 100 \geq 0 \\ 100 \leq 180 \\ 40 + 200 \leq 400 \\ 200 \geq 3 \cdot 40 \\ 40 \geq 20; \quad 100 \geq 60 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x + 2y = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x = 400 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 3(400 - 2y) \Rightarrow 2y = 1200 - 6y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y = 1200 \Rightarrow y = \frac{1200}{8} = 150 \Rightarrow x = 400 - 300 = 100 \Rightarrow \boxed{D(100, 150)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(20, 60) \rightarrow B(20, 60) = 40 + 300 = 340$$

$$B(20, 180) \rightarrow B(20, 180) = 40 + 900 = 940$$

$$C(40, 180) \rightarrow B(40, 180) = 80 + 900 = 980 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(100, 150) \rightarrow B(100, 150) = 200 + 750 = 950$$

$$E(40, 60) \rightarrow B(40, 60) = 80 + 300 = 380$$

El beneficio máximo es de 980 € y se consigue en el vértice C(40, 180), que significa vender 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{si } x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x + b, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^0 f(x) dx.$$

a) La función debe ser continua en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x - a = -4 - a \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 = 4 \\ f(-2) &= (-2)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 = -4 - a \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

La función debe ser continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + b = 1 + b \\ f(1) &= 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = 1 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Los valores buscados son $a = -8$ y $b = 0$.

b) Para $a = b = -8$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{si } x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x - 8, & \text{si } 1 < x \end{cases}$.

En el intervalo $(-3, 0)$ la función es $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$, por lo que la integral definida se divide en dos integrales.

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 f(x) dx &= \int_{-3}^{-2} 2x + 8 dx + \int_{-2}^0 x^2 dx = \left[x^2 + 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[(-2)^2 + 8(-2) \right] - \left[(-3)^2 + 8(-3) \right] + \left[\frac{0^3}{3} \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} \right] = \\ &= 4 - 16 - 9 + 24 + 0 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{17}{3}} \end{aligned}$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B) = 1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cup B) = 3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A \cap B^c) = 1/4$.

Nota: B^c denota el suceso complementario de B .

a) Como A y B son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 3/4 \\ P(B) = 1/2 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A) \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4} = P(A) + \frac{1}{2} - P(A) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 4P(A) + 2 - 2P(A) \Rightarrow 2P(A) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B^c) = 1/4 \\ P(B) = 1/2 \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A) \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = P(A) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4P(A) = 2P(A) + 1 \Rightarrow 2P(A) = 1 \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$$

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

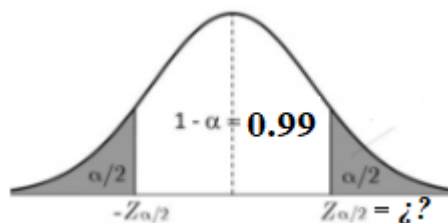
a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 6%.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias que tienen internet.

a) La proporción muestral es $P = 0.8$. El error máximo es del 6 %.

Para un nivel de confianza del 99 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 0.06 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = \frac{0.06}{2.575} \Rightarrow$$

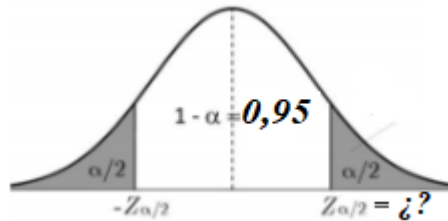
$$\Rightarrow \frac{0.8 \cdot 0.2}{n} = \left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.8 \cdot 0.2}{\left(\frac{0.06}{2.575} \right)^2} \approx 294.69$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 295 familias.

- b) La proporción muestral es de $\frac{170}{200} = 0.85$

Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.85 \cdot 0.15}{200}} \approx 0.0495$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.85 - 0.0495, 0.85 + 0.0495) = (0.8005, 0.8995)$$

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{array} \right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -2a + a^2 - 2a^2 = -a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 2a = 0 \Rightarrow -a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\left. \begin{array}{l} z = 1 \\ -y + z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = t \\ y = 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \left. \begin{array}{l} -4x + z = 1 \\ -2x - y + z = 0 \\ -2y + z = -1 \end{array} \right\}$$

Transformamos con el método de Gauss el sistema en otro triangular.

$$A/B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ -4 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 4 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -4 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}}^A \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A/B}$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz ampliada A/B y menor que el número de incógnitas (3).

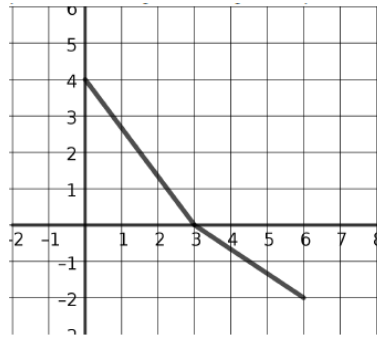
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = 0$ o $a = -2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Las soluciones para $a = 0$ las hemos hallado en el apartado a).

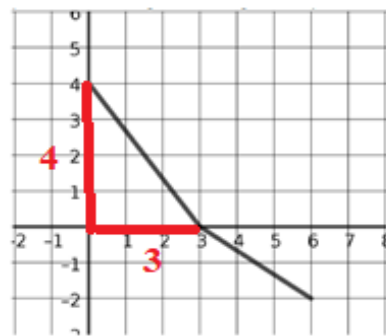
Las soluciones son $x = t$; $y = 1$; $z = 1$, $t \in \mathbb{R}$

B.2. (2 puntos) La siguiente figura representa la gráfica de una **función lineal** a trozos $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$



- a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x) dx$.
- b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x) dx$ o $\int_0^6 f(x) dx$? Razone la respuesta.

- a) La función a trozos cambia en $x = 3$. De 0 a 3 el valor de $\int_0^3 f(x) dx$ es el área bajo la recta dibujada, es decir, el área de un triángulo de base 3 y altura 4.



$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{3 \cdot 4}{2} = \boxed{6}$$

- b) La función es positiva entre 0 y 3 el valor de $\int_0^3 f(x) dx$ es positivo, pero la función entre 3 y 6 es negativa, por lo que $\int_3^6 f(x) dx$ es negativo.

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx < \int_0^3 f(x) dx.$$

Tenemos que $\int_0^3 f(x) dx > \int_0^6 f(x) dx$.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

- a) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x = 9$ sea paralela al eje de las x . Indique la expresión de dicha recta.
 b) Para $K = 3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

- a) Si la recta tangente a la función en $x = 9$ es paralela al eje de las x la recta tangente es horizontal y su pendiente debe ser 0. Esto significa que $f'(9) = 0$.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-K)^2 - 2(x-K)x^3}{(x-K)^4} = \frac{3x^2(x-K) - 2x^3}{(x-K)^3}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-K) - 2x^3}{(x-K)^3} \left. \begin{array}{l} \\ f'(9) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{3 \cdot 9^2(9-K) - 2 \cdot 9^3}{(9-K)^3} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 9^2(9-K) - 2 \cdot 9^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 3(9-K) - 2 \cdot 9 \Rightarrow 27 - 3K - 18 = 0 \Rightarrow 3K = 9 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

El valor buscado es $K = 3$.

Para $K = 3$ determinamos la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$ en $x = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} \Rightarrow f(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = \frac{81}{4} \\ f'(9) = 0 \\ y - f(9) = f'(9)(x-9) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{81}{4} = 0(x-9) \Rightarrow \boxed{y = \frac{81}{4}}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = \frac{81}{4}$.

- b) Para $K = 3$ la función es $f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$.

Utilizamos la derivada y su signo para determinar el comportamiento de la función.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - 2(x-3)x^3}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(3(x-3) - 2x)}{(x-3)^3} = \frac{x^2(3x-9-2x)}{(x-3)^3} = \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos $x = 3$ que es el valor que anula el denominador.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2(-1-9)}{(-1-3)^3} = \frac{5}{32} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2(1-9)}{(1-3)^3} = \frac{8}{27} > 0$. La función crece en $(0, 3)$.

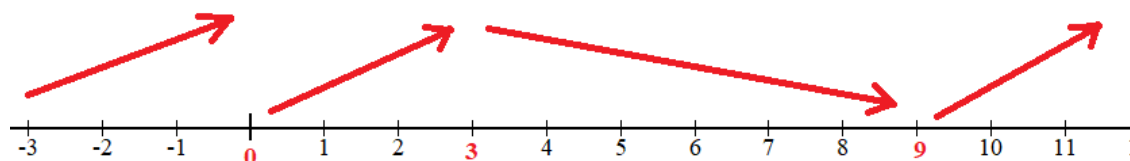
- En el intervalo $(3, 9)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2(4-9)}{(4-3)^3} = -80 < 0$.

La función decrece en $(3, 9)$.

- En el intervalo $(9, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{10^2(10-9)}{(10-3)^3} = \frac{100}{343} > 0. \text{ La función crece en } (9, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente



La función crece en $(-\infty, 3) \cup (9, +\infty)$ y decrece en $(3, 9)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 9$. Como $f(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = \frac{81}{4}$ el mínimo

relativo tiene coordenadas $\left(9, \frac{81}{4}\right)$.

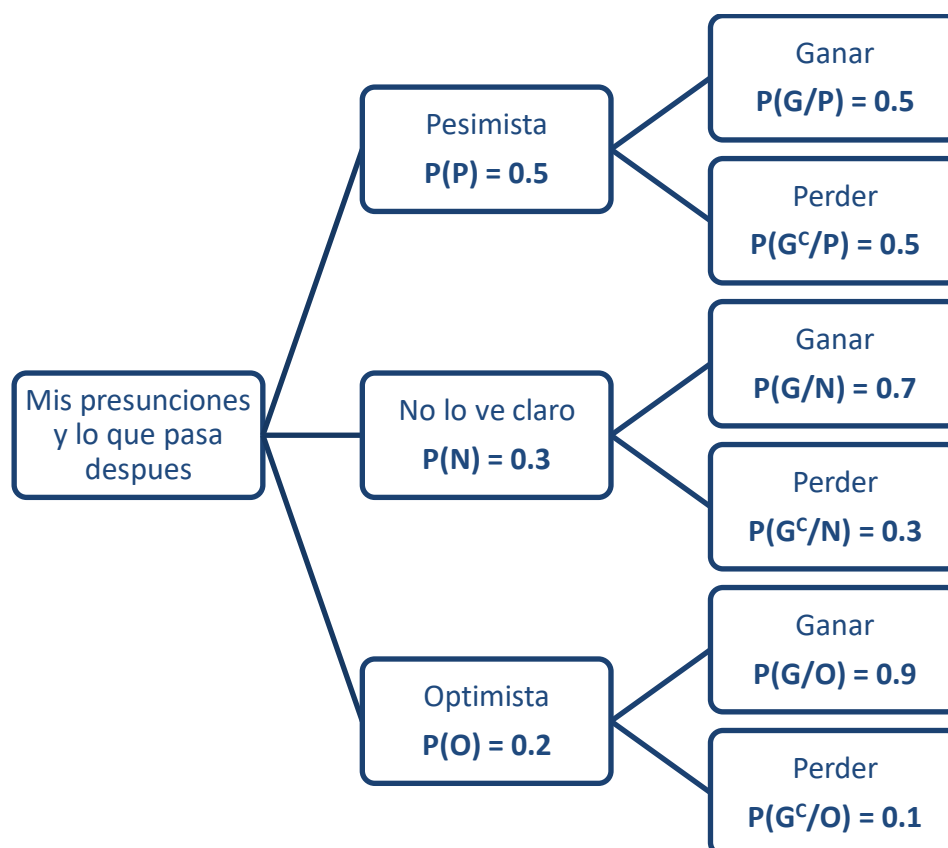
En $x = 3$ la función no existe y en $x = 0$ será un punto de inflexión.

B.4. (2 puntos) Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50% de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30% no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

Llamamos P = “Ser pesimista”, N = “No lo ve claro” y O = “Ser Optimista”. G = “Ganar al gambón”

Realizamos un diagrama de árbol.



Con esta información respondemos a las preguntas.

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(P)P(G/P) + P(N)P(G/N) + P(O)P(G/O) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.64}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular la probabilidad de que un ganador haya sido previamente pesimista $\rightarrow P(P/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(P/G) = \frac{P(P \cap G)}{P(G)} = \frac{P(P)P(G/P)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.64} = \boxed{0.390625}$$

B.5. (2 puntos) Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?

b) Calcule $P(19 < \bar{X} < 22)$.

a) La distribución de las medias muestrales mantiene la misma media, pero con una desviación típica menor $\rightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$X = N(20, 5) \rightarrow \bar{X}_{25} = N\left(20, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{25} = N(20, 1)$$

La distribución de medias es una distribución normal de media 20 y desviación típica 1.

b)

$$P(19 < \bar{X} < 22) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{19-20}{1} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < \frac{22-20}{1}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - P(Z > 1) =$$

$$= P(Z < 2) - [1 - P(Z \leq 1)] = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} =$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.8185}$$

z	,00	,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5833
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6951
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7613
0,8	0,7881	0,7913
0,9	0,8159	0,8191
1,0	0,8413	0,8444
1,1	0,8643	0,8673
1,2	0,8849	0,8879
1,3	0,9032	0,9062
1,4	0,9192	0,9222
1,5	0,9332	0,9362
1,6	0,9452	0,9482
1,7	0,9554	0,9584
1,8	0,9641	0,9671
1,9	0,9713	0,9743
2,0	0,9772	0,9801
2,1	0,9821	0,9851
2,2	0,9861	0,9891

z	,00	,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5833
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6951
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7613
0,8	0,7881	0,7913
0,9	0,8159	0,8191
1,0	0,8413	0,8444
1,1	0,8643	0,8673
1,2	0,8849	0,8879
1,3	0,9032	0,9062
1,4	0,9192	0,9222
1,5	0,9332	0,9362
1,6	0,9452	0,9482
1,7	0,9554	0,9584
1,8	0,9641	0,9671
1,9	0,9713	0,9743
2,0	0,9772	0,9801
2,1	0,9821	0,9851
2,2	0,9861	0,9891

EvAU 2021 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2020-2021
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
- Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

- Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
- Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
- Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.8$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.9$.

- Estudie si los sucesos A y B son independientes.
- Calcule $P(\bar{A} / \bar{B})$.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media poblacional de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

- Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

- Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
- Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

- No sufra fracaso escolar.
- Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

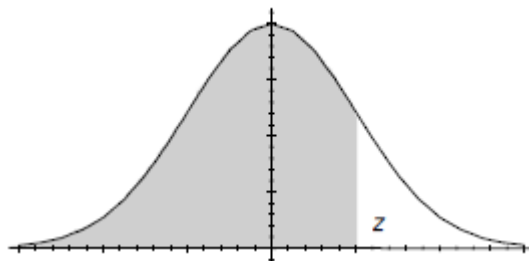
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
- Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\bar{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES**A.1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
 b) Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

a) Calculamos el determinante de A y vemos cuando es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 = -a - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo y eso ocurre cuando $a \neq -1$.

b) Para $a = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa, la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y obtenemos la matriz X .

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 + 1/3 - 2/3 \\ -2/3 + 2/3 - 1/3 \\ 4/3 - 4/3 + 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

- Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
- Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

- Llamamos “x” a la cantidad de metros del modelo A2020 e “y” a la de metros del modelo B2020.

Las restricciones son:

“Se necesitan al menos 6000 metros de cable” $\rightarrow x + y \geq 6000$

“Del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros” $\rightarrow y \leq 5000$

“Debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos” $\rightarrow x + y \leq 8000$

“Se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020” $\rightarrow y \geq x$

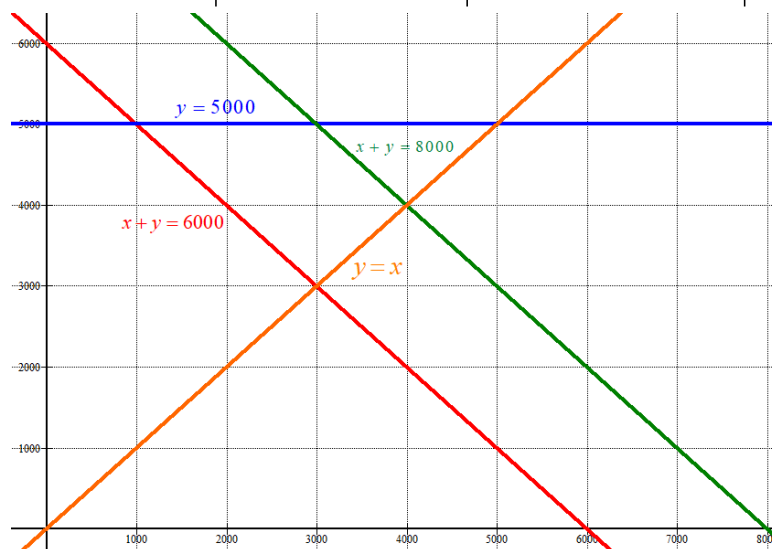
Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x + y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

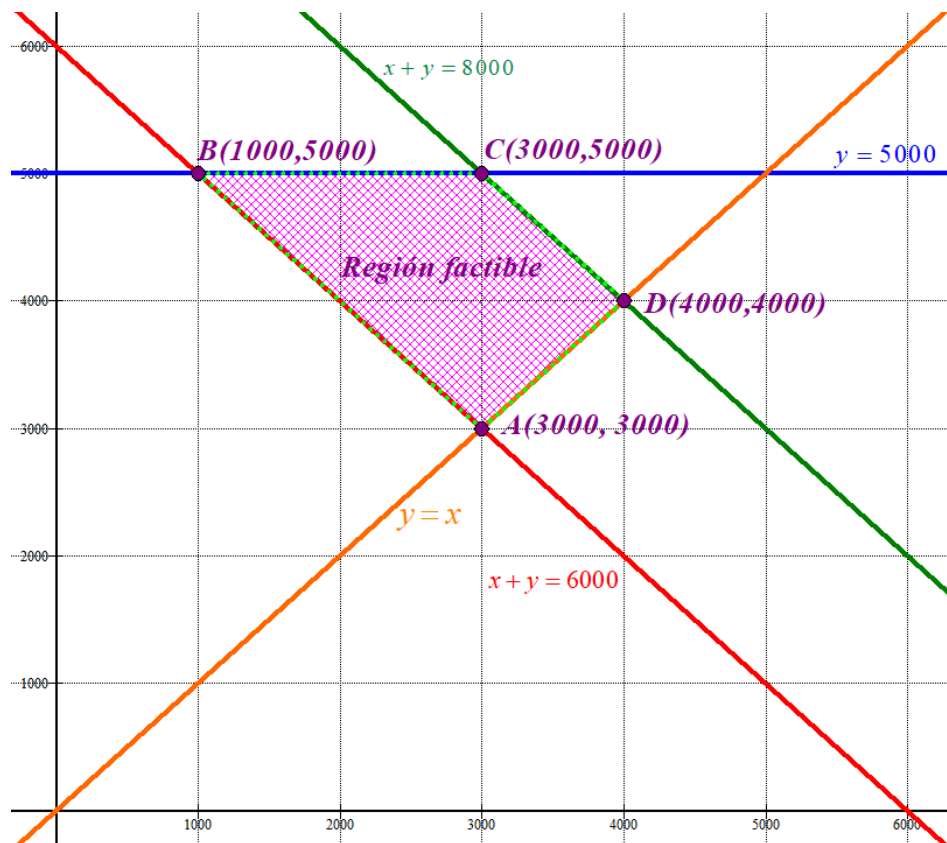
$x + y = 6000$		$y = 5000$		$x + y = 8000$		$y = x$		Primer cuadrante
x	y = 6000 - x	x	y = 5000	x	y = 8000 - x	x	y = x	
0	6000	1000	5000	0	8000	0	0	
1000	5000	3000	5000	3000	5000	5000	5000	



$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ \text{Como las restricciones son } x + y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante situada por encima de la recta roja y naranja y por debajo de las rectas azul y verde.

Coloreamos de rosa la región factible y establecemos las coordenadas de los vértices de dicha región.



Los vértices de la región factible son A(3000, 3000), B(1000, 5000), C(3000, 5000) y D(4000, 4000).

- b) Se desea minimizar el coste de producción que viene dado como $C(x, y) = 2x + 0.5y$. Valoramos el coste en cada vértice de la región factible.

$$A(3000, 3000) \rightarrow C(3000, 3000) = 6000 + 1500 = 7500$$

$$B(1000, 5000) \rightarrow C(1000, 5000) = 2000 + 2500 = 4500 \text{ ; } \text{Mínimo!}$$

$$C(3000, 5000) \rightarrow C(3000, 5000) = 6000 + 2500 = 8500$$

$$D(4000, 4000) \rightarrow C(4000, 4000) = 8000 + 2000 = 10000$$

El coste mínimo satisfaciendo las restricciones se produce en el vértice B(1000, 5000), es decir, con 1000 metros de cable A2020 y 5000 metros de cable B2020 se consigue un coste mínimo, que tiene un valor de 4500 €.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
- b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

- a) La función es un trozo de parábola en $(-\infty, 3)$ que es continua y una fracción que no es continua en $x = 0$, pero no pertenece a su intervalo de definición $(3, +\infty)$.

Para que la función sea continua en todo su dominio solo necesita ser continua en $x = 3$, el cambio de definición. Para ello debe cumplirse que $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 3 - 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - x - 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3a}{x} = \frac{3a}{3} = a \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

Para $a = 5$ la función es continua en $x = 3$.

Veamos si para $a = 5$ también es derivable.

Calculamos las derivadas laterales y vemos si coinciden en $x = 3$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ -\frac{15}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(3^-) &= 6 - 1 = 5 \\ f'(3^+) &= -\frac{15}{3^2} = -\frac{5}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) \neq f'(3^+)$$

La función no es derivable en $x = 3$.

- b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ y en el entorno de $x = 1$ la función

es la parábola $f(x) = x^2 - x - 1$, por lo que:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - x - 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1 \\ f'(x) &= 2x - 1 \Rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1 \\ \text{Tangente} &\rightarrow y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$$

La recta tangente a la función $f(x)$ en $x = 1$ es $y = x - 2$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.8$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcule $P(\bar{A}/\bar{B})$.

a) Debemos calcular el valor de $P(B)$ y de $P(A \cap B)$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\left. \begin{array}{l} P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.9 \\ \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} \end{array} \right\} \Rightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0.9 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Para ser independientes los sucesos A y B debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) = 0.5 \\ P(B) = 0.2 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.1$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cup \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.5 + 0.8 - 0.9}{0.8} = \frac{0.4}{0.8} = \boxed{0.5}$$

También se puede resolver pensando que si A y B son independientes también lo son sus complementarios y así $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ y sustituirlo en la fórmula de Bayes.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}) \cancel{P(\bar{B})}}{\cancel{P(\bar{B})}} = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = \boxed{0.5}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media poblacional de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ .

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

a) X = El peso de un huevo (en gramos). $X = N(\mu, 8)$

Tamaño de muestra = $n = 20$ y $\mu = 60$.

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3.506$$

El intervalo de confianza es:

$$(\mu - Error, \mu + Error) = (60 - 3.506, 60 + 3.506) = (56.494, 63.506)$$

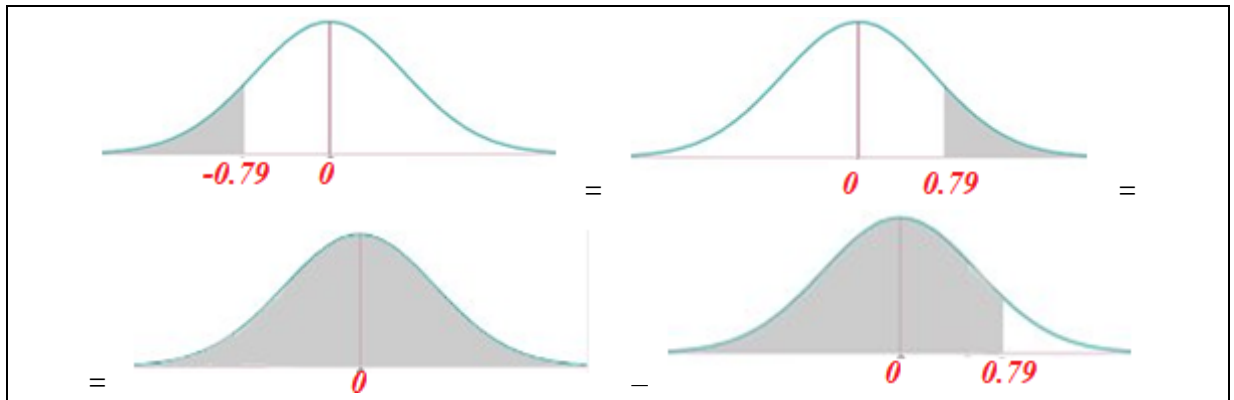
b) X = El peso de un huevo (en gramos). $X = N(59, 8)$

La distribución de las medias $\overline{X}_{10}$ de una muestra de tamaño 10 sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

$$\overline{X}_{10} = N\left(59, \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$$

Nos piden calcular $P(57 \leq \overline{X}_{10} \leq 61)$.

$$\begin{aligned} P(57 \leq \overline{X}_{10} \leq 61) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{57-59}{\frac{4\sqrt{10}}{5}} \leq Z \leq \frac{61-59}{\frac{4\sqrt{10}}{5}}\right) = P(-0.79 \leq Z \leq 0.79) = \\ &= P(Z \leq 0.79) - P(Z \leq -0.79) = \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dots &= P(Z \leq 0.79) - P(Z \geq 0.79) = P(Z \leq 0.79) - [1 - P(Z \leq 0.79)] = \\ &= \{\text{Miramos en la tabla de } N(0, 1)\} = 0.7852 - [1 - 0.7852] = \boxed{0.5704} \end{aligned}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7824	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right)$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a + 0 + 1 - 0 - 2a - 0 = -a + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Nos planteamos 2 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$, utilizando el método de Gauss

obtenemos una matriz triangular equivalente para estudiar el rango de A y de A/B con más facilidad.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ \hline \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \hline \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)^{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \ 2 \ 1}^{A/B} & 0 \\ \underbrace{0 \ 1 \ 1}_A & 1 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0}_A & 0 \end{array} \right)$$

Si observamos la matriz obtenida vemos que el rango de A es 2 y también el de A/B. Pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 3$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).

El sistema queda
$$\begin{cases} x + 6y + z = 0 \\ -x - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{cases}.$$

Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + 6y + z = 0 \\ -x - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6y - z \\ -x - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(-6y - z) - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6y + z - 3y = 1 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + z = 1 \\ z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow 3y + 3 - y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow \boxed{z = 3 - (-1) = 4} \Rightarrow \boxed{x = 6 - 4 = 2}$$

La solución es: $x = 2$; $y = -1$; $z = 4$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

- a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{1^3 - 2}{(1-1)^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Obtenemos el valor de “m”.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \boxed{1} \end{aligned}$$

Obtenemos el valor de “n”.

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{x^3} + \cancel{2x^2} - x}{x^2 - 2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1} = \boxed{0} \end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

- b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el cambio de signo de la derivada, empezando por localizar en que momento se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x^3 + 8x^2 - 4x - (2x^4 - 2x^3 - 4x^3 + 4x^2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 4x - (2x^4 - 6x^3 + 4x^2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 4x^2 + 7x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \end{cases}$$

Buscamos las raíces usando el método de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 7 & -4 \\ 1 & & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = (x-1)(x^2 - 3x + 4)$$

$x=1$ es raíz

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{No existe.}$$

Solo hay dos valores que anulan la derivada: $x = 0$, $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^4 - 4(-1)^3 + 7(-1)^2 - 4(-1)}{((-1)^2 - 2(-1) + 1)^2} = 1 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (-\infty, 0)$$

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{(0.5)^4 - 4(0.5)^3 + 7(0.5)^2 - 4(0.5)}{((0.5)^2 - 2(0.5) + 1)^2} = -11 < 0. \text{ La función decrece en el}$$

intervalo $(0, 1)$.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{2^4 - 4(2)^3 + 7(2)^2 - 4(2)}{(2^2 - 4 + 1)^2} = 4 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (1, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(0, 1)$.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

- a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
 b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

- a) Integro la función derivada $f'(x) = 3x^2 + 8x$ para obtener la función $f(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 8x \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int 3x^2 + 8x dx = x^3 + 4x^2 + K$$

Como además sabemos que $f(1) = 11$ podremos determinar el valor de K .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + 4x^2 + K \\ f(1) = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^3 + 4 \cdot 1^2 + K = 11 \Rightarrow K = 11 - 5 = 6$$

La función buscada tiene la expresión $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

- b) Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(3x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ 3x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos en $x = 0$ y en $x = -\frac{8}{3}$. Estudiamos el signo de la derivada segunda en cada uno de ellos para establecer si son máximos o mínimos relativos.

$$f'(x) = 3x^2 + 8x \Rightarrow f''(x) = 6x + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 + 8 = 8 > 0. \text{ Hay un mínimo local en } x = 0 \\ f''\left(-\frac{8}{3}\right) = 6\left(-\frac{8}{3}\right) + 8 = -\frac{24}{3} < 0. \text{ Hay un máximo local en } x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Como $f(0) = 0 + 0 + 6 = 6$ el mínimo local tiene coordenadas $(0, 6)$.

Como $f\left(-\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 6 = \frac{418}{27}$ el máximo local tiene coordenadas $\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)$

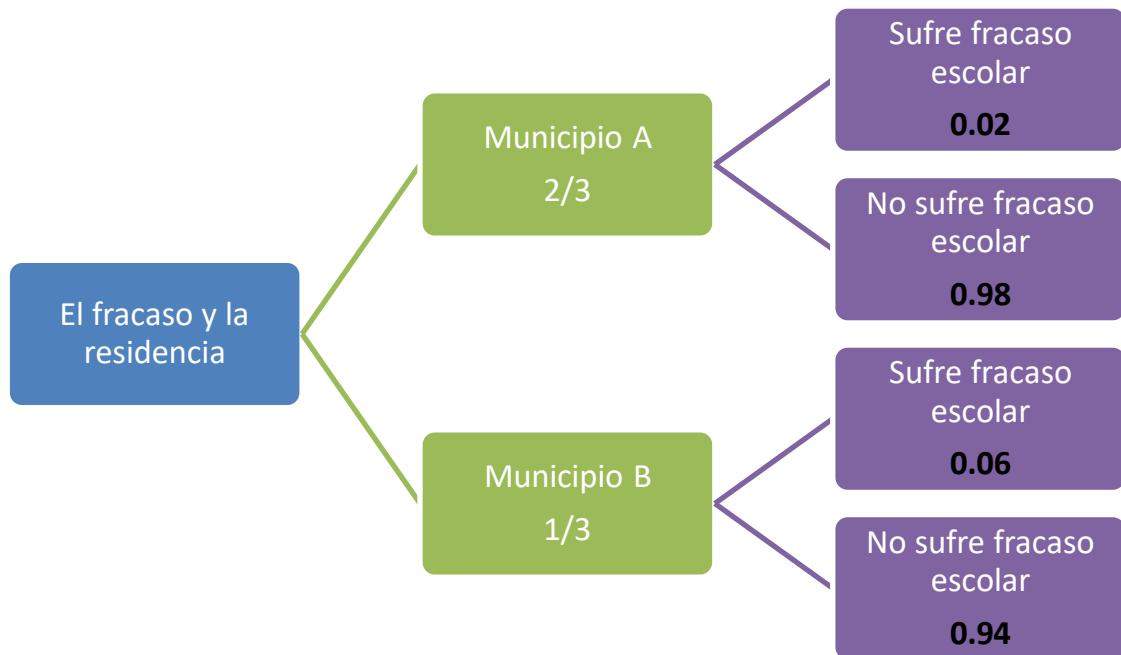
B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

- No sufra fracaso escolar.
- Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Hacemos un diagrama de árbol.

Como los matriculados del municipio A son el doble de los matriculados del municipio B, de cada 3 alumnos matriculados 2 son de A y 1 de B. Por lo que la probabilidad de elegir un matriculado de A es $2/3$ y de B es $1/3$.



Damos nombre a los sucesos que vamos a manejar:

A = Ser alumno matriculado que habita en el municipio A.

B = Ser alumno matriculado que habita en el municipio B.

F = Sufrir fracaso escolar. $\bar{F}$ = No sufrir fracaso escolar.

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\bar{F}) = P(A)P(\bar{F}/A) + P(B)P(\bar{F}/B) = \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = \boxed{\frac{29}{30} \approx 0.967}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)P(F/A)}{1 - P(\bar{F})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.02}{1 - \frac{29}{30}} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.
- b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\bar{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

a) X = El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico (en minutos).

$X = N(\mu, 3)$

¿Tamaño mínimo de muestra = n ?

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 3 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 3)^2 = 34.5744$$

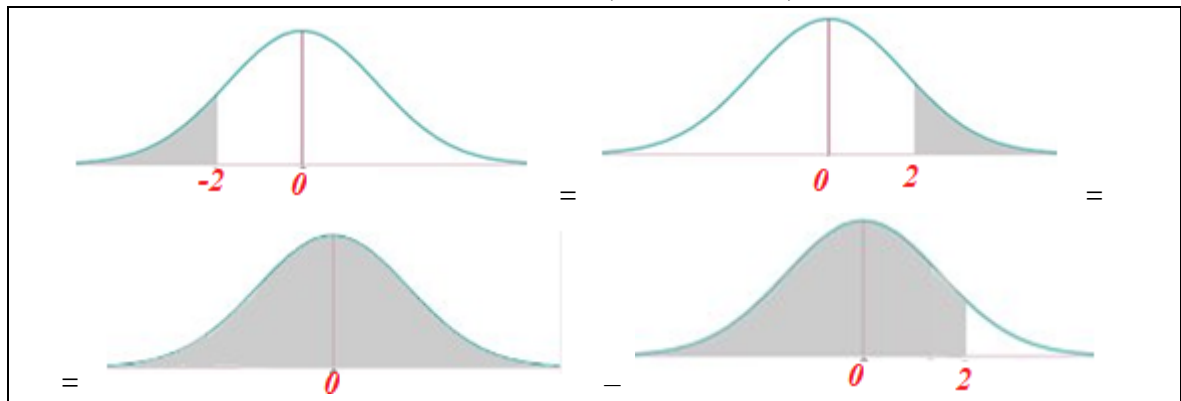
El tamaño mínimo de la muestra es de 35 pruebas.

b) X = El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico (en minutos). $X = N(32, 3)$

La distribución de medias $\overline{X}_{16}$ de una muestra de tamaño 16 sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{3}{\sqrt{16}} = 0.75$.

$$\overline{X}_{16} = N(32, 0.75)$$

$$P(\overline{X}_{16} < 30.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{30.5 - 32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = \dots$$



$$\dots = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Miramos en la tabla de } N(0, 1)\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

z	.00	.01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5098	0,5144
0,2	0,5193	0,5239
0,3	0,5279	0,5324
0,4	0,5359	0,5405
0,5	0,5438	0,5484
0,6	0,5517	0,5563
0,7	0,5596	0,5642
0,8	0,5679	0,5724
0,9	0,5753	0,5798
1,0	0,5823	0,5868
1,1	0,5898	0,5943
1,2	0,5968	0,6013
1,3	0,6038	0,6083
1,4	0,6093	0,6138
1,5	0,6143	0,6188
1,6	0,6193	0,6238
1,7	0,6243	0,6288
1,8	0,6293	0,6338
1,9	0,6343	0,6388
2,0	0,9772	0,9777
2,1	0,9781	0,9786
2,2	0,9786	0,9791

EvAU 2021 Extraordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2020-2021 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la región del plano S definida por

$$y \leq 5, \quad 2x + 3y \leq 25, \quad 3x + 2y \geq 10, \quad 6y - x \geq 10$$

- Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
- Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = x + 3y$ en la región S , indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 3x^3 - ax + 1$$

- Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = 1$ de la función $f(x)$ sea un punto de tangente horizontal. Determine si es un máximo, mínimo o punto de inflexión.
- Determine el valor del parámetro real a para que se cumpla que la $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

- Calcule los valores del parámetro real a para que A sea invertible.
- Para $a = 1$, calcule A^{-1} .

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un bar, a la hora del aperitivo, el 60% de los clientes tienen más de 40 años. Los mayores de 40 años, en un 70% prefieren tomar cerveza sin alcohol, mientras que en el resto solo un 25% toman cerveza sin alcohol. Calcule la probabilidad de que un cliente al azar:

- Tome cerveza sin alcohol.
- Tenga 40 años o menos, dado que toma cerveza sin alcohol.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

En el envasado de un determinado producto, medido en gramos (g), se establece que la cantidad de producto se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación $\sigma = 6g$.

- Se observa que el contenido en los envases del producto, en una muestra de tamaño $n = 36$, tiene una media de 500g. Calcule un intervalo de confianza al 95% para la media μ .
- Determine el tamaño de la muestra necesario para que un intervalo al 95% tenga un error menor que 1,5g.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + y - az = 0 \\ y + az = 3 \end{array} \right\}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
- b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{4 - x^2}$$

- a) Halle el dominio y sus asíntotas.
- b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 5$.
- b) Calcule $\int_3^5 9x\sqrt{x^2 - 9} dx$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,3$.

- a) ¿Son independientes? Justifique su respuesta.
- b) Calcule $P(\bar{B} / A)$.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

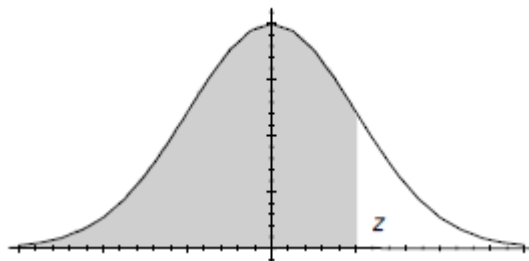
El número de pasajeros en un día laborable en el metro de Madrid, medido en millones de individuos, se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación $\sigma = 0,1$ millones.

- a) Si $\mu = 2,2$ y se toma una muestra al azar de 25 días, calcule la probabilidad de que $\bar{X}$ no supere los 2,25 millones de pasajeros.
- b) De una muestra de $n = 16$ días, tomados al azar, se obtuvo una media muestral de 2,19. Para esta muestra, calcule un intervalo de confianza para μ al 90 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la región del plano S definida por

$$y \leq 5, \quad 2x + 3y \leq 25, \quad 3x + 2y \geq 10, \quad 6y - x \geq 10$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = x + 3y$ en la región S , indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

a) Para dibujar la región S empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

$$y = 5$$

$$2x + 3y = 25$$

$$3x + 2y = 10$$

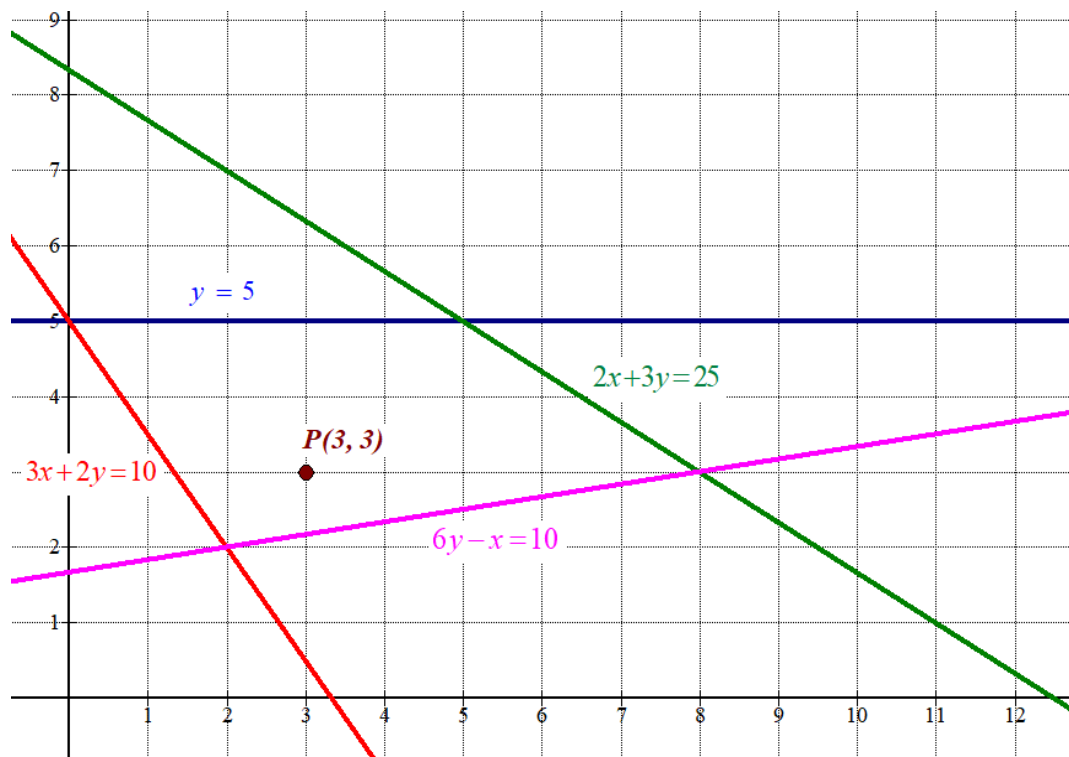
$$6y - x = 10$$

x	$y = 5$
0	5
5	5

x	$y = \frac{25-2x}{3}$
5	5
8	3

x	$y = \frac{10-3x}{2}$
0	5
2	2

x	$y = \frac{x+10}{6}$
2	2
8	3

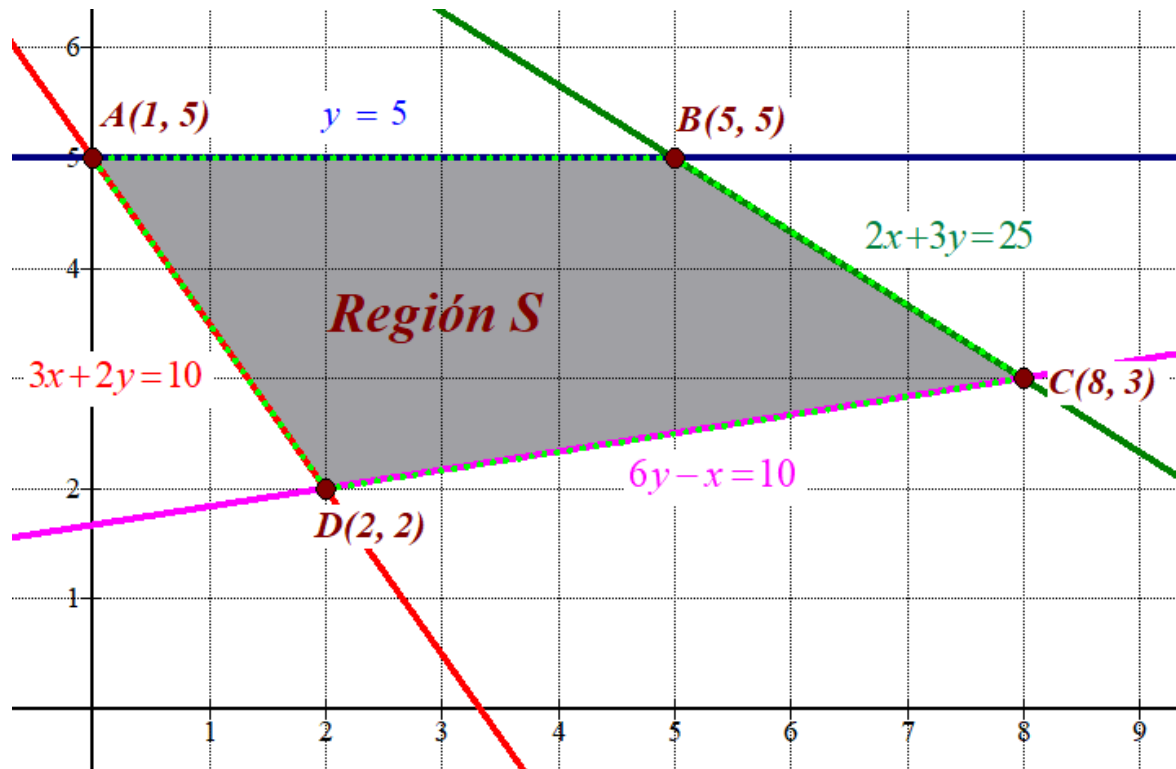


Como las restricciones son $y \leq 5$, $2x + 3y \leq 25$, $3x + 2y \geq 10$, $6y - x \geq 10$ la región factible es la región del plano situada por encima de la recta roja y rosa, y por debajo de las rectas azul y verde.

Comprobamos que el punto $P(3, 3)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones:

$$3 \leq 5, \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \leq 25, \quad 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \geq 10, \quad 6 \cdot 3 - 3 \geq 10$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de gris y establecemos las coordenadas de los vértices de dicha región.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas: $A(1, 5)$, $B(5, 5)$, $C(8, 3)$ y $D(2, 2)$.

b) Se desea maximizar la función $f(x, y) = x + 3y$.

La valoramos en cada vértice de la región S.

$$A(1, 5) \rightarrow f(1, 5) = 1 + 15 = 16$$

$$B(5, 5) \rightarrow f(5, 5) = 5 + 15 = 20 \rightarrow \text{¡Máximo!}$$

$$C(8, 3) \rightarrow f(8, 3) = 8 + 9 = 17$$

$$D(2, 2) \rightarrow f(2, 2) = 2 + 6 = 8$$

El valor máximo de la función es 20 y se alcanza en el punto $B(5, 5)$.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 3x^3 - ax + 1$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = 1$ de la función $f(x)$ sea un punto de tangente horizontal. Determine si es un máximo, mínimo o punto de inflexión.

b) Determine el valor del parámetro real a para que se cumpla que la $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

a) Si en el punto de abscisa $x = 1$ la función $f(x)$ tiene tangente horizontal significa que la derivada en $x = 1$ es 0 $\Rightarrow f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 3x^3 - ax + 1 &\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - a \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 9 \cdot 1^2 - a \Rightarrow 9 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 9}$$

En $x = 1$ tenemos un punto crítico. Comprobamos si es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x) = 9x^2 - 9 \Rightarrow f''(x) = 18x \Rightarrow f''(1) = 18 > 0$$

Al ser la derivada segunda positiva en $x = 1$ tenemos un mínimo relativo.

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int 3x^3 - ax + 1 dx = 3 \frac{x^4}{4} - a \frac{x^2}{2} + x + C$$

Lo aplicamos a la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 3x^3 - ax + 1 dx = \left[3 \frac{x^4}{4} - a \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \\ &= \left[3 \frac{1^4}{4} - a \frac{1^2}{2} + 1 \right] - \left[3 \frac{0^4}{4} - a \frac{0^2}{2} + 0 \right] = \frac{3}{4} - \frac{a}{2} + 1 \end{aligned}$$

Iguamos este resultado de la integral definida a 1.

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{a}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3-2a}{4} = 0 \Rightarrow 3-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

El valor buscado es $a = \frac{3}{2}$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para que A sea invertible.

b) Para $a = 1$, calcule A^{-1} .

a) Para que la matriz A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{vmatrix} = 6a + 6a = 12a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12a = 0 \Rightarrow a = 0$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 0.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. Calculamos A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

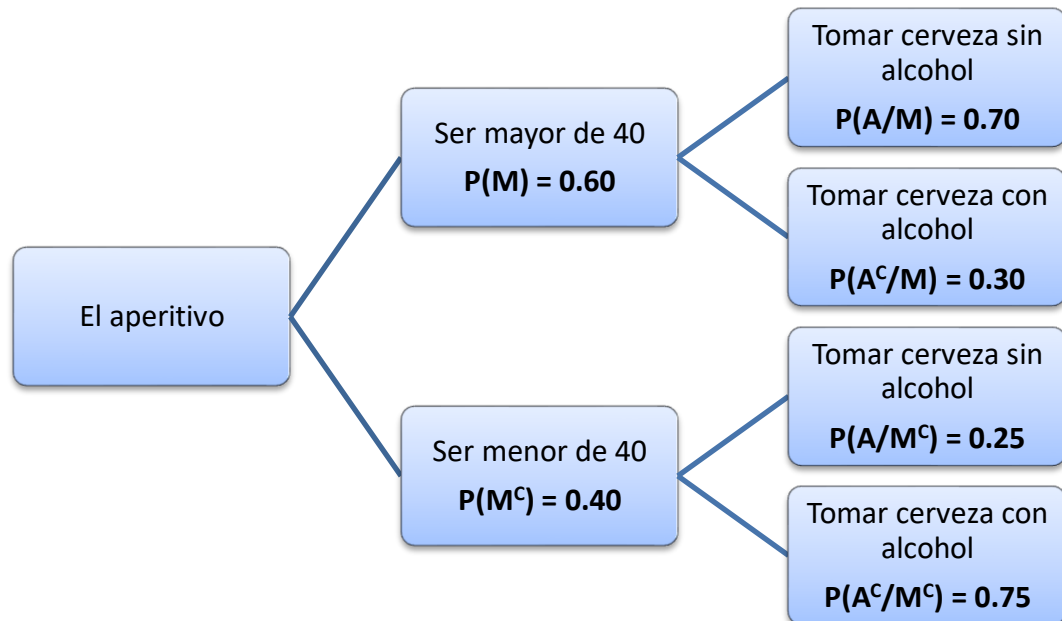
A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un bar, a la hora del aperitivo, el 60% de los clientes tienen más de 40 años. Los mayores de 40 años, en un 70% prefieren tomar cerveza sin alcohol, mientras que en el resto solo un 25% toman cerveza sin alcohol. Calcule la probabilidad de que un cliente al azar:

- Tome cerveza sin alcohol.
- Tenga 40 años o menos, dado que toma cerveza sin alcohol.

Llamamos M = “Ser mayor de 40 años” y A = “Tomar cerveza sin alcohol”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total y usamos la información del diagrama de árbol.

$$P(A) = P(M)P(A/M) + P(M^c)P(A/M^c) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.25 = \boxed{0.52}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M^c/A) = \frac{P(M^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M^c)P(A/M^c)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.52} = \boxed{\frac{5}{26} \approx 0.192}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

En el envasado de un determinado producto, medido en gramos (g), se establece que la cantidad de producto se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación $\sigma = 6$ g.

a) Se observa que el contenido en los envases del producto, en una muestra de tamaño $n = 36$, tiene una media de 500g. Calcule un intervalo de confianza al 95% para la media μ .

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que un intervalo al 95% tenga un error menor que 1,5g.

a) $X =$ Cantidad de producto envasado (en gramos). $X = N(\mu, 6)$

Tamaño de muestra $= n = 36$ y $\bar{x} = 500$

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.96$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (500 - 1.96, 500 + 1.96) = (498.04, 501.96)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Aplicamos la fórmula del error para un valor de 1,5 g.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = \frac{11.76}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{11.76}{1.5} = 7.84 \Rightarrow \boxed{n = 7.84^2 = 61.46}$$

La muestra debe ser de un tamaño mínimo de 62 productos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - az = 0 \\ y + az = 3 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

a) La matriz de coeficientes y matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 1 - a + a = a + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Estudiamos dos casos por separado: $a \neq -1$ y $a = -1$.

CASO 1. $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Im posible!}$$

Nos queda la ecuación primera y segunda con dos igualdades imposibles de cumplir de forma simultánea (ser igual a 9 y a 0). El sistema es **incompatible**.

b) Para $a = -2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y + 2z = 0 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y + 2z = 0 \\ y = 3 + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 + 2z + z = 9 \\ x + 3 + 2z + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 6 \\ x + 4z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 3z \\ x + 4z = -3 \end{cases} \Rightarrow 6 - 3z + 4z = -3 \Rightarrow \boxed{z = -9} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 6 - 3(-9) = 33} \\ \boxed{y = 3 + 2(-9) = -15} \end{cases}$$

La solución es $x = 33$; $y = -15$; $z = -9$

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{9-x^2}{4-x^2}$$

- a) Halle el dominio y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$.**Asíntota vertical.** $x=a$.¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{5}{0} = \infty$$

 $x=2$ es asíntota vertical.¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{5}{0} = \infty$$

 $x=-2$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1$$

 $y=1$ es asíntota horizontal.**Asíntota oblicua.** $y=mx+n$.

Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene dos asíntotas verticales: $x=2$ y $x=-2$, la asíntota horizontal es $y=1$ y no tiene asíntota oblicua.

b) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos donde se anula.

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (4-x^2) - (-2x)(9-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{-8x + \cancel{2x^3} + 18x - \cancel{2x^3}}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x}{(4-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 10x = 0 \Rightarrow x = 0$$

En $x=0$ la función tiene un punto crítico.Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x=-2$, $x=0$ y $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{10(-3)}{(4-(-3)^2)^2} = \frac{-30}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{10(-1)}{(4 - (-1)^2)^2} = \frac{-10}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{10(1)}{(4 - (1)^2)^2} = \frac{10}{9} > 0$.

La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{10(3)}{(4 - (3)^2)^2} = \frac{30}{25} > 0. \text{ La función crece en } (2, +\infty).$$

La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 5$.b) Calcule $\int_3^5 9x\sqrt{x^2 - 9} dx$.a) La recta tangente en $x = 5$ tiene ecuación $y - f(5) = f'(5)(x - 5)$.Obtenemos el valor de la función y su derivada en $x = 5$.

$$f(5) = \sqrt{5^2 - 9} = 4$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \Rightarrow f'(5) = \frac{5}{2\sqrt{5^2 - 9}} = \frac{5}{2\sqrt{16}} = \frac{5}{8}$$

Lo aplicamos al cálculo de la recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} f(5) = 4 \\ f'(5) = \frac{5}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 4 = \frac{5}{8}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{5}{8}x - \frac{25}{8} + 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}}$$

$$y - f(5) = f'(5)(x - 5)$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int 9x\sqrt{x^2 - 9} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x^2 - 9 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\ dx = \frac{1}{2x} dt \end{array} \right\} = \int 9 \cancel{x} \sqrt{t} \frac{1}{2 \cancel{x}} dt = \frac{9}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{9}{2} \int t^{1/2} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} = 3\sqrt{t^3} = 3\sqrt{(x^2 - 9)^3} + C$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida:

$$\int_3^5 9x\sqrt{x^2 - 9} dx = \left[3\sqrt{(x^2 - 9)^3} \right]_3^5 = \left[3\sqrt{(5^2 - 9)^3} \right] - \left[3\sqrt{(3^2 - 9)^3} \right] = \boxed{192}$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,3$.

- a) ¿Son independientes? Justifique su respuesta.
 b) Calcule $P(\bar{B} / A)$.

- a) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse la igualdad siguiente:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Calculamos los valores que intervienen en la igualdad y los comparamos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A) = 0.8 \\ P(B) = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \left. \vphantom{\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A) = 0.8 \\ P(B) = 0.4 \end{array}} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 \neq 0.32 = P(A) \cdot P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{B} / A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.8 - 0.3}{0.8} = \boxed{0.625}$$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de pasajeros en un día laborable en el metro de Madrid, medido en millones de individuos, se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación $\sigma = 0,1$ millones.

- a) Si $\mu = 2,2$ y se toma una muestra al azar de 25 días, calcule la probabilidad de que $\bar{X}$ no supere los 2,25 millones de pasajeros.
 b) De una muestra de $n = 16$ días, tomados al azar, se obtuvo una media muestral de 2,19. Para esta muestra, calcule un intervalo de confianza para μ al 90 %.

X = Número de viajeros en un día laborable en el metro de Madrid (en millones de individuos).
 $X = N(\mu, 0.1)$

- a) Tamaño de muestra es $n = 25$ y la media $\mu = 2.2$.

$\bar{X}_{25}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{0.1}{\sqrt{25}} = \frac{0.1}{5} = 0.02$.

$$\bar{X}_{25} = N(2.2, 0.02)$$

$$P(\bar{X}_{25} \leq 2.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{\bar{X}_{25} - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{2.25 - 2.2}{0.02}\right) = P(Z \leq 2.5) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = N(0,1) \end{array} \right\}$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.9938}$$

z	,00	
0,0	0.5000	0
0,1	0.5398	0
0,2	0.5793	0
0,3	0.6179	0
0,4	0.6554	0
0,5	0.6915	0
0,6	0.7257	0
0,7	0.7580	0
0,8	0.7881	0
0,9	0.8159	0
1,0	0.8413	0
1,1	0.8643	0
1,2	0.8849	0
1,3	0.9032	0
1,4	0.9192	0
1,5	0.9332	0
1,6	0.9452	0
1,7	0.9554	0
1,8	0.9641	0
1,9	0.9713	0
2,0	0.9772	0
2,1	0.9821	0
2,2	0.9861	0
2,3	0.9893	0
2,4	0.9918	0
2,5	0.9938	0
2,6	0.9952	0

- b) Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{16}} = 0.041125$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (2.19 - 0.041125, 2.19 + 0.041125) = (2.148875, 2.231125)$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599

EvAU 2021 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2020-2021
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- Determine los valores de los parámetros reales a y b para que se verifique $A = A^{-1}$.
- Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

- Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por $\ln$ la función logaritmo neperiano.

- Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

- No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
- No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

- Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
- Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

- Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

- Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.
- Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x) dx$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B} / A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

- Calcule $P(B / \overline{A})$
- Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

- Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
- Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ , determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para que se verifique $A = A^{-1}$.
 b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

a) Si $A = A^{-1}$ entonces $A \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$.

$$A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & a+a \\ 0 & b^2 & 0 \\ a+a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \rightarrow a^2=0 \rightarrow \boxed{a=0} \\ 2a=0 \\ b^2=1 \rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1} \end{cases}$$

Se cumple cuando $a = 0$ y $b = 1$, también cuando $a = 0$ y $b = -1$.

b) Para $a = b = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 \neq 0. \text{ Existe la inversa de A. La calculamos.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **Asíntotas verticales.** $x = a$ $x = -1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 + 4}{(-1)^2 - 1} = \frac{5}{0} = \infty. \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

 $x = 1$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \frac{(1)^3 + 4}{(1)^2 - 1} = \frac{5}{0} = \infty. \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\cancel{3}} + 4 - x^{\cancel{3}} + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{4}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = x$.**Resumiendo:** La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua es $y = x$.

- b) La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Calculamos los valores de la función y su derivada en $x = 0$.

$$f(0) = \frac{0^3 + 4}{0^2 - 1} = -4$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 4)}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2(0^2 - 1) - 2 \cdot 0(0^3 + 4)}{(0^2 - 1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

La ecuación de la recta tangente queda:

$$\left. \begin{array}{l} y - f(0) = f'(0)(x - 0) \\ f(0) = -4 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-4) = 0 \cdot x \Rightarrow y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -4}$$

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por $\ln$ la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

a) La función es continua en $(-\infty, 1)$ pues es una función polinómica. También es continua en $(1, +\infty)$ pues es un logaritmo y la variable x es siempre positiva.

Falta ver si es continua en $x = 1$. Para ello comprobamos si el valor de la función coincide con el valor de sus límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - a = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - ax = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El valor de a que hace continua la función es $a = 1$.

b) Entre $x = -1$ y $x = 0$ la función es $f(x) = x^2 - ax$. Como $a = 1$ la función es $f(x) = x^2 - x$. Comprobamos si la función corta el eje OX en el intervalo $(-1, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - x \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

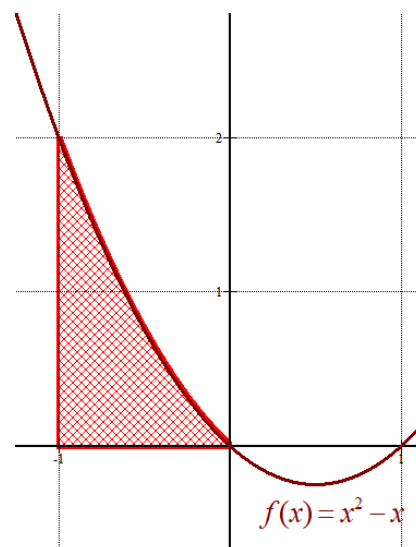
Los dos puntos de corte quedan fuera del intervalo $(-1, 0)$, por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de $f(x) = x^2 - x$.

$$\int_{-1}^0 x^2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right] = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{5}{6} u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos el recinto para comprobar la solución obtenida.

En el dibujo contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de superficie se aprecia que el área de la zona coloreada es casi una unidad cuadrada.

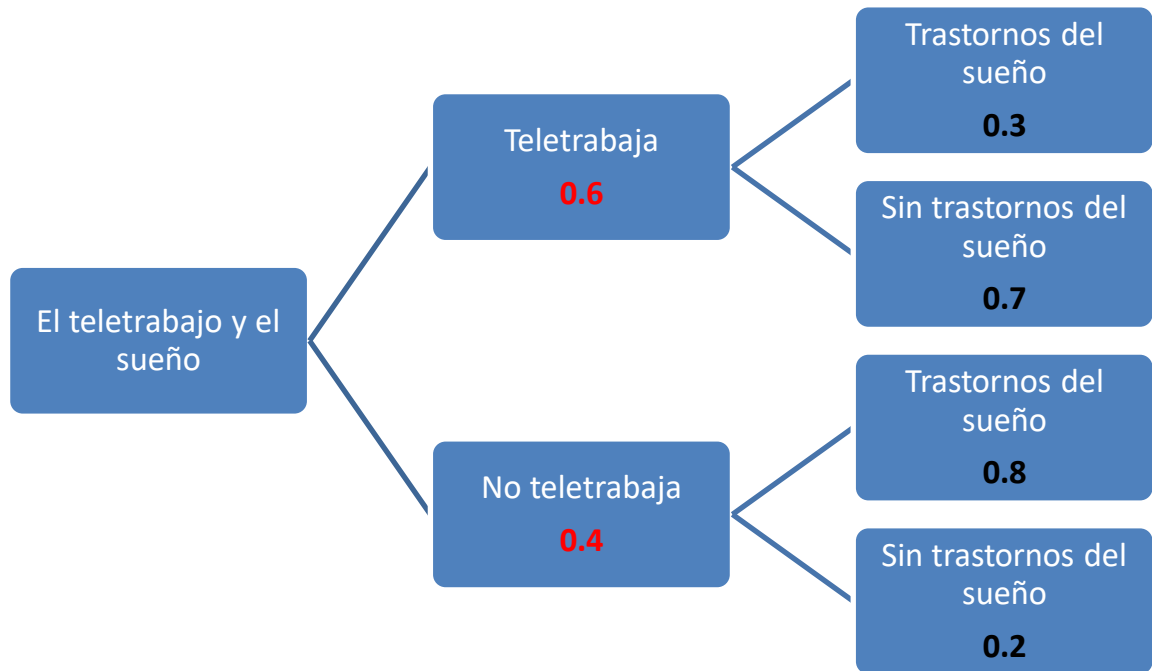


A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

- No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
- No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos T = “El empleado teletrabaja”, con lo que $\bar{T}$ = “El empleado no teletrabaja”.
 S = “El empleado tiene trastornos del sueño” y $\bar{S}$ = “El empleado no tiene trastornos del sueño”

- Nos piden calcular $P(T \cap \bar{S})$. Utilizando la información del diagrama de árbol.

$$P(T \cap \bar{S}) = P(T)P(\bar{S}/T) = 0.6 \cdot 0.7 = \boxed{0.42}$$

- Nos piden calcular $P(\bar{T}/\bar{S})$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{T}/\bar{S}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{T})P(\bar{S}/\bar{T})}{P(T)P(\bar{S}/T) + P(\bar{T})P(\bar{S}/\bar{T})} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2} = \boxed{\frac{4}{25} = 0.16}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

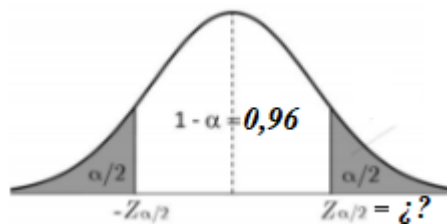
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

- a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
- b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

- a) La proporción de menores de 14 años que usan las redes sociales es $p = \frac{320}{500} = 0,64$

Con un nivel de confianza del 96% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



Utilizamos la fórmula del error:

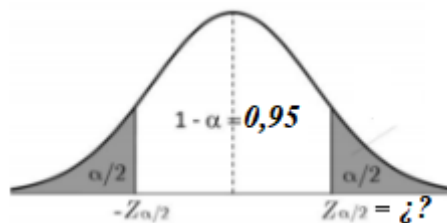
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}} = 0,0441$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0,64 - 0,0441; 0,64 + 0,0441) = (0,5959; 0,6841)$$

- b) Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



Utilizamos la fórmula del error y hacemos que este sea del 5% = 0,05:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0,05 = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow \frac{0,05}{1,96} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2 = \frac{0,25}{n} \Rightarrow \frac{25}{38416} = \frac{0,25}{n} \Rightarrow n = \frac{0,25 \cdot 38416}{25} = 384,16$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 menores de 16 años.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 + 1 - 2 - 1 + a^2 = 3a^2 - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Distinguimos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a = -1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y

obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ \hline \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ \hline \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ \hline \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 & 1 & -1 & -1}^{A/B} \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \underbrace{}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, el de A/B también es 2 y el número de incógnitas es 3, El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = 1$

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Queda igual que en el caso 2, por lo

que también será un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado (única solución) y si $a = \pm 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $a = 1$ la situación es la analizada en el caso 3 y el sistema es compatible indeterminado. Como hemos obtenido la matriz triangular equivalente a la matriz ampliada podemos usarla para resolver el sistema a partir de ahí.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Matriz equivalente a } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sistema equivalente es } \left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ -2y + 2z = 4 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

Resolvemos este último sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ -2y + 2z = 4 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ -y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = -1 \\ z = 2 + y \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x + y - 2 - y = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1 + 2 = 1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = 1, y = t, z = 2 + t$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Llamemos x = “kilos de almendras en la mezcla”, y = “kilos de avellanas en la mezcla”.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = x + 2y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

“Tenemos un saco de 50 kg de almendras” $\rightarrow x \leq 50$

“Tenemos un saco de 25 kg de avellanas” $\rightarrow y \leq 25$

“La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas” $\rightarrow x \geq 1,5y$

“Deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos” $\rightarrow x + y \geq 60$

“No puede vender más de 70 kg entre ambos” $\rightarrow x + y \leq 70$

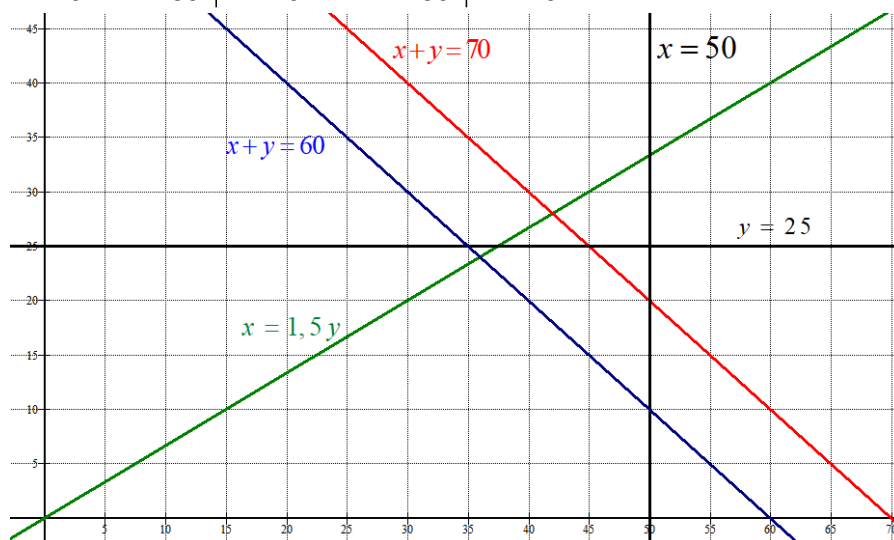
Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ x + y \geq 60 \\ x \geq 1,5y \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + y = 70 \quad x + y = 60 \quad x = 1,5y \quad x = 50 \quad y = 25 \quad x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 70 - x$	x	$y = 60 - x$	x	$y = x / 1,5$	Recta	Recta	Primer
0	70	0	60	30	20	vertical	horizontal	cuadrante
70	0	60	0	60	40			

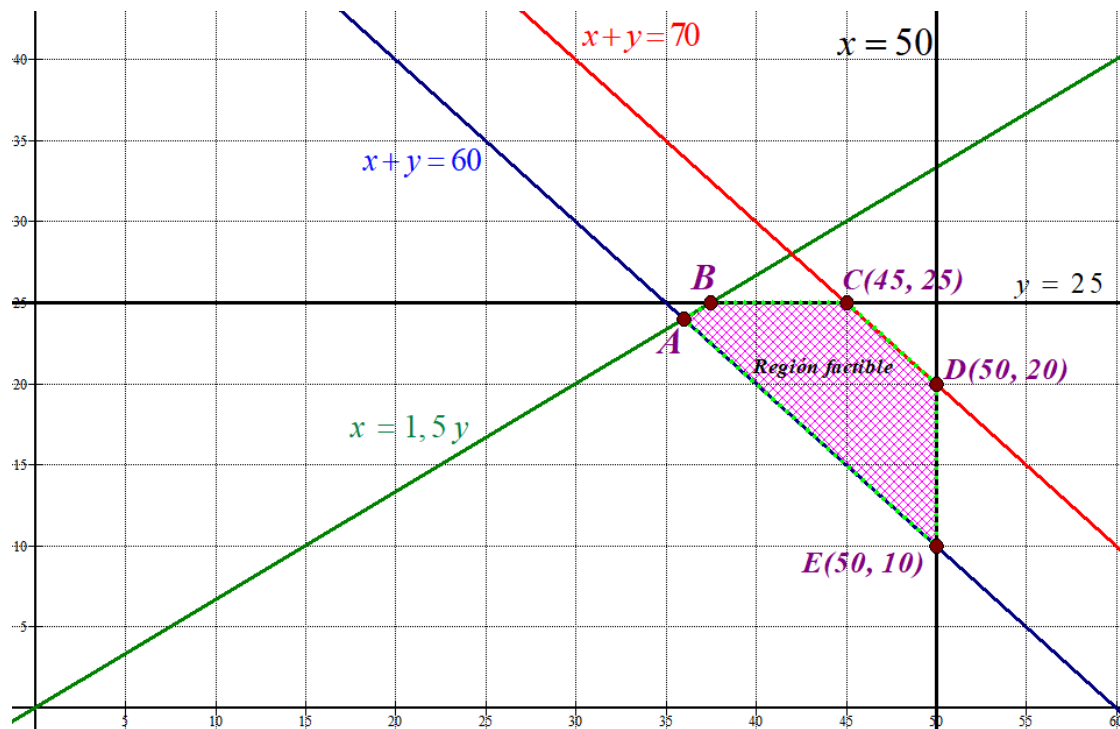


Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ x + y \geq 60 \\ x \geq 1,5y \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está en el primer cuadrante por debajo}$$

de la recta roja, por encima de la recta azul, por debajo de la verde, a la derecha de $x = 50$ y por debajo de la recta horizontal.

Coloreamos de rosa la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas de los puntos A y B. Los obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,5y \\ x + y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 1,5y + y = 60 \Rightarrow 2,5y = 60 \Rightarrow y = \frac{60}{2,5} = 24 \Rightarrow x = 1,5 \cdot 24 = 36 \Rightarrow A(36, 24)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,5y \\ y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1,5 \cdot 25 = 37,5 \Rightarrow B(37,5, 25)$$

Valoramos cada vértice en la función beneficio $B(x, y) = x + 2y$ en busca del valor máximo.

$$A(36, 24) \rightarrow B(36, 24) = 36 + 48 = 84$$

$$B(37,5, 25) \rightarrow B(37,5, 25) = 37,5 + 50 = 87,5$$

$$C(45, 25) \rightarrow B(45, 25) = 45 + 50 = 95 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(50, 20) \rightarrow B(50, 20) = 50 + 40 = 90$$

$$E(50, 10) \rightarrow B(50, 10) = 50 + 20 = 70$$

El beneficio máximo es de 95 € y se consigue en el vértice C(45, 25), que significa mezclar 45 kg de almendras con 25 de avellanas.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x) dx$$

a) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x \Rightarrow f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \text{ no puede ser } 0\} \Rightarrow$$

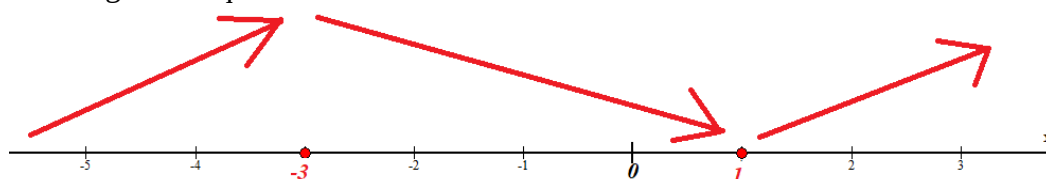
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x = -3$ y $x = 1$.

Vemos cómo evoluciona la función antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -3)$ tomo $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5) = ((-5)^2 - 10 - 3)e^{-5} = 12e^{-5} > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, 1)$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (0^2 + 0 - 3)e^0 = -3 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-3, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = (2^2 + 4 - 3)e^2 = 5e^2 > 0$. La función crece en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-3, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Como $f(-3) = ((-3)^2 - 3)e^{-3} = 6e^{-3}$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-3, 6e^{-3})$.

Como $f(1) = (1^2 - 3)e^1 = -2e$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -2e)$.

b)

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{-x} f(x) dx &= \int_1^2 e^{-x} (x^2 - 3)e^x dx = \int_1^2 e^{-x+x} (x^2 - 3) dx = \int_1^2 (x^2 - 3) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 6 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 \right] = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 = \boxed{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\bar{B}/A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B/\bar{A})$

b) Determine si son dependientes o independiente los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

$$a) \quad P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0,4 = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{0,5} \Rightarrow P(\bar{B} \cap A) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,5 = P(A \cap B) + 0,2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,9 = 0,5 + P(B) - 0,3 \Rightarrow P(B) = 0,7$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = \boxed{0,8}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Supongamos que hay 100 elementos en la población.

$P(A) = 0,5$ significa que el 50 % de los elementos están en A, es decir, 50 están en A.

$P(\bar{B}/A) = 0,4$ significa que el 40 % de los elementos de A están también en $\bar{B}$, es decir, el 40 % de 50 que son 20 están en $A \cap \bar{B}$.

$P(A \cup B) = 0,9$ significa que el 90 % de los elementos están en A o en B. Por lo que solamente hay 10 elementos que no están ni en A ni en B. Es decir 10 están en $\bar{A} \cap \bar{B}$.

	B	$\bar{B}$	
A		20	50
$\bar{A}$		10	
			100

Completamos la tabla:

	B	$\bar{B}$	
A	30	20	50
$\bar{A}$	40	10	50
	70	30	100

Utilizando los datos de la tabla la probabilidad pedida vale $P(B/\bar{A}) = \frac{40}{50} = \boxed{0,8}$

b) Nos planteamos si es cierta la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,3 \\ P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Por lo que A y B son sucesos dependientes.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
 b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ , determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

- a) X = Consumo diario de pan (en gramos) de un estudiante de secundaria. $X = N(\mu, 20)$
 Tamaño de muestra = $n = 36$ y $\mu = 120$

$\bar{X}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{20}{\sqrt{36}} = \frac{10}{3}$.

$$\bar{X} = N\left(120, \frac{10}{3}\right)$$

$$P(\bar{X}_{36} < 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{125-120}{10/3}\right) =$$

$$= P(Z < 1,5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miro en la tabla} \\ \text{de la } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0,9332}$$

- b) Tamaño de muestra = $n = 81$

Del intervalo de confianza para la media (117,3444; 124,6556) podemos obtener el error cometido, ya que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Error} = \frac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556$$

Utilizando la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3,6556 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{81}} \Rightarrow 3,6556 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{9} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{9 \cdot 3,6556}{20} = 1,64502$$

Si $z_{\alpha/2} = 1,64502$ buscamos este valor en la tabla de la $N(0, 1)$ y encontramos dos valores próximos, por ello tomamos el promedio de los dos valores:

$$1 - \alpha/2 = \frac{0,9495 + 0,9505}{2} = 0,95 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow 1 - \alpha = 0,9$$

El nivel de confianza es del 90%.

EvAU 2021 Ordinaria (coincidencias) Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2020-2021 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
- Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

- Calcule las asíntotas de $f(x)$.
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

- Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.
- Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

- La segunda bola seleccionada sea negra.
- Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

- Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
- Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3, \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a , b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$

a) Calcule $P(A \cap \bar{B})$

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

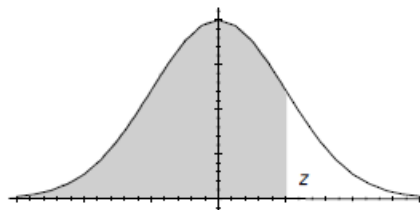
Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
 b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

a) Para que la matriz A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 16 + 12a - 12a - 24 - 4a^2 = 2a^2 - 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

La matriz A no es invertible para $a = -2$ y $a = 2$.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 16 + \cancel{12} - \cancel{12} - 24 - 4 = -6 \neq 0. \text{ Calculamos la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Despejamos X de la ecuación matricial $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 6 - 24 + 4 \\ -12 - 24 + 16 \\ 0 + 12 - 6 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.**Asíntotas verticales.** $x = a$ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{1^3}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$ Hallamos el valor de m .

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 1$$

Hallamos el valor de n .

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 2$$

La asíntota oblicua es $y = x + 2$ **Resumiendo:** La función tiene una asíntota vertical: $x = 1$, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua es $y = x + 2$.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función buscando los valores que anulan la derivada.

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x) + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{3x^2 - 3x^3 + 2x^3}{(1-x)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$, $x=1$ y $x=3$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^3 + 3(-1)^2}{(1-(-1))^3} = \frac{4}{8} > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-0.5^3 + 3 \cdot 0.5^2}{(1-0.5)^3} = \frac{0.75}{0.125} = 1 > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-2^3 + 3 \cdot 2^2}{(1-2)^3} = \frac{4}{-1} = -4 < 0, \text{ la función decrece en el intervalo } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = \frac{-4^3 + 3 \cdot 4^2}{(1-4)^3} = \frac{-16}{-27} > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (3, +\infty).$$

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 + ax dx = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + K$$

Nos piden que se verifique $F(0) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + K \\ F(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0^3}{3} + a \frac{0^2}{2} + K = 3 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

La primitiva queda $F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + 3$.

También debe cumplirse que $F(2) = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + 3 \\ F(2) = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2^3}{3} + a \frac{2^2}{2} + 3 = 9 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2a + 3 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 6 - \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{10/3}{2} = \frac{5}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3} \frac{x^2}{2} + 3 = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6} + 3$

b) Para $a = -2$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$. Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

Como el valor $x = 2$ está entre 0 y 3 la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$ la dividimos en dos partes: de 0 a 2 y de 2 a 3. Hallamos el área de cada parte y el área pedida es la suma de las dos áreas.

$$\int_0^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

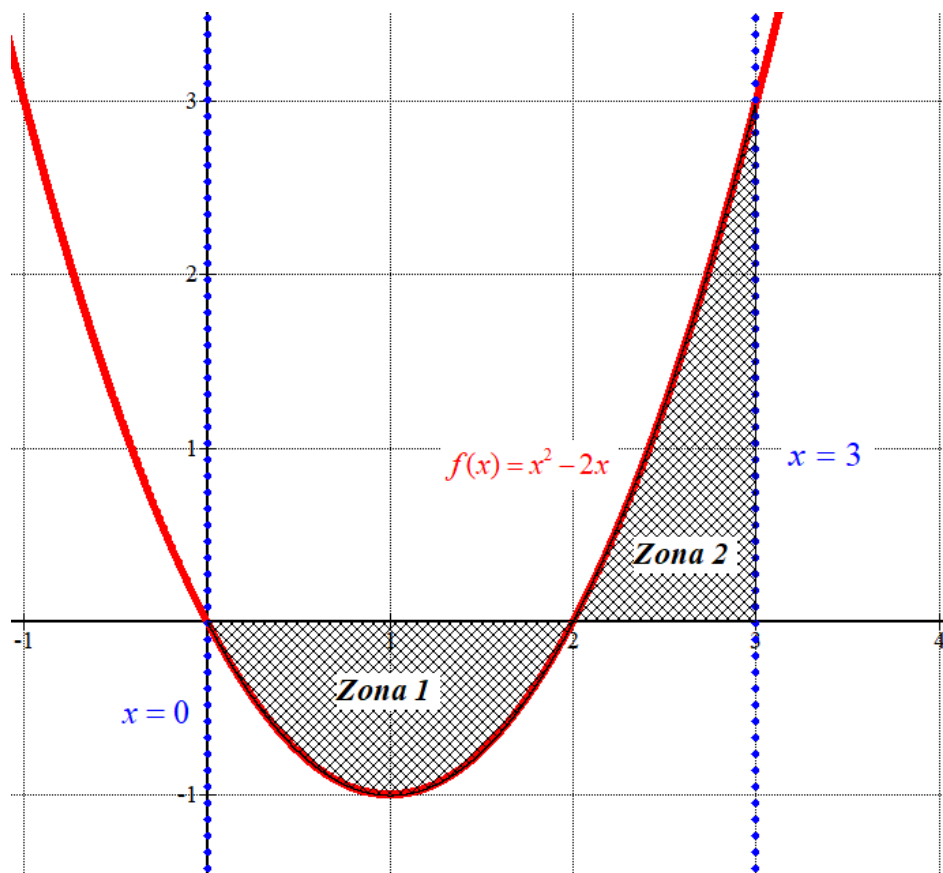
$$\text{Área1} = \left| \int_0^2 x^2 - 2x dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^3 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = 9 - 9 - \left[\frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área2} = \left| \int_2^3 x^2 - 2x dx \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

El área total es la suma: $\text{Área} = \text{Área1} + \text{Área2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.66 \text{ unidades}$

No lo pide, pero dibujamos el recinto para comprobar la solución obtenida.

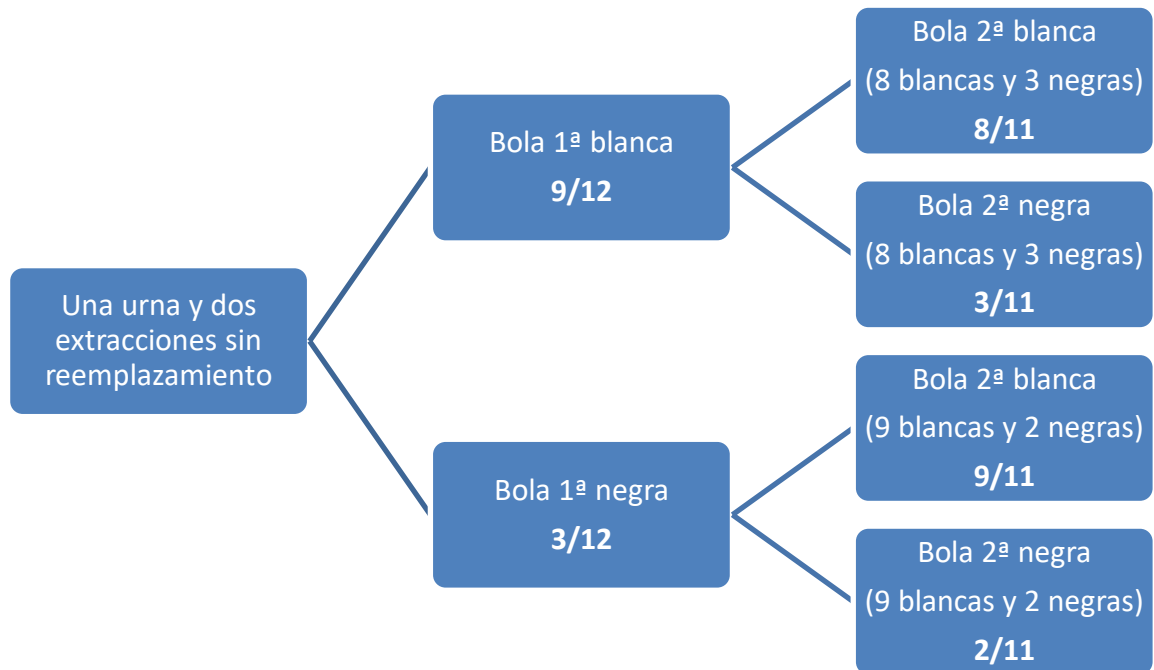


A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

- La segunda bola seleccionada sea negra.
- Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B1 al suceso “1ª bola blanca”, N1 al suceso “1ª bola negra” y de forma análoga B2 al suceso “2ª bola blanca”, N2 al suceso “2ª bola negra”.

- Utilizamos la información del diagrama de árbol y el teorema de la probabilidad total.

$$P(N2) = P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(N2/N1) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

- Nos piden la probabilidad de que haya salido la primera bola negra sabiendo que la segunda ha sido negra $\rightarrow P(N1/N2)$

Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{P(N2)} = \frac{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}}{0.25} = \boxed{\frac{2}{11} \approx 0.18}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

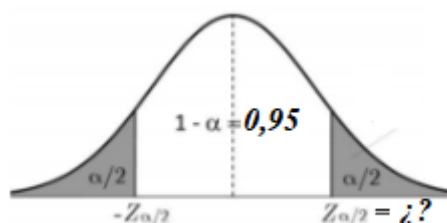
- a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
- b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

a) X = El peso en gramos de una barra de mantequilla. $X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de muestra = $n = 15$ y $\bar{x} = 254$ gramos.

Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \approx 2,0243$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (254 - 2,0243, 254 + 2,0243) = (251,9757, 256,0243)$$

- b) La distribución de medias $\bar{X}_{25}$ sigue una distribución normal de la misma media 250 gramos y desviación típica $\frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$ gramos.

$$\bar{X}_{25} = N(250, 0,8)$$

La probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos es la probabilidad de que la media muestral sea mayor o igual que 248 gramos

$$\rightarrow P(\bar{X}_{25} \geq 248)$$

$$P(\bar{X}_{25} \geq 248) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{248 - 250}{0,8}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2,5) = P(Z \leq 2,5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 0,9938$$



z	,00	,0
0,0	0,4000	0,4
0,1	0,3988	0,4
0,2	0,3979	0,4
0,3	0,3970	0,4
0,4	0,3960	0,4
0,5	0,3950	0,4
0,6	0,3940	0,4
0,7	0,3930	0,4
0,8	0,3920	0,4
0,9	0,3910	0,4
1,0	0,3900	0,4
1,1	0,3890	0,4
1,2	0,3880	0,4
1,3	0,3870	0,4
1,4	0,3860	0,4
1,5	0,3850	0,4
1,6	0,3840	0,4
1,7	0,3830	0,4
1,8	0,3820	0,4
1,9	0,3810	0,4
2,0	0,3800	0,4
2,1	0,3790	0,4
2,2	0,3780	0,4
2,3	0,3770	0,4
2,4	0,3760	0,4
2,5	0,3750	0,4
2,6	0,3740	0,4
2,7	0,3730	0,4

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3, \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

a) Representamos las rectas que delimitan la región S.

$$-2x + y = 1$$

x	$y = 1 + 2x$
0	1
2	5

$$x + y = 3$$

x	$y = 3 - x$
2	1
3	0

$$x = 0$$

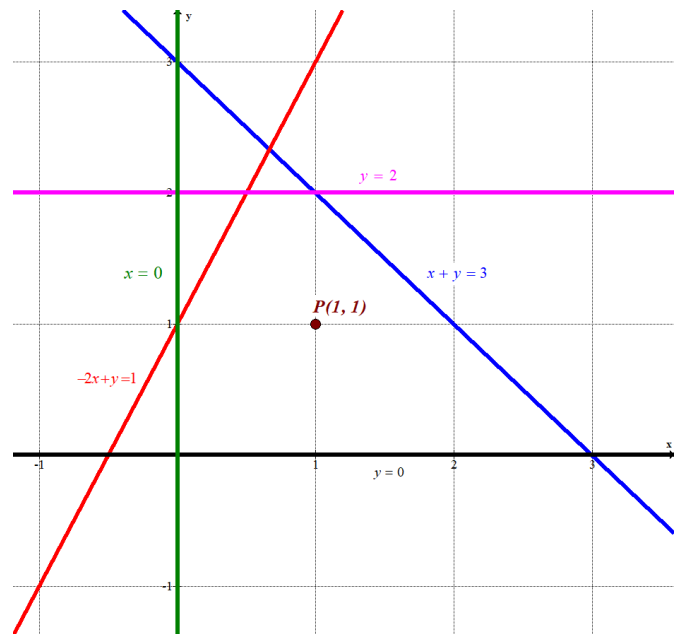
$x = 0$	y
0	1
0	2

$$y = 0$$

x	$y = 0$
0	0
3	0

$$y = 2$$

x	$y = 2$
0	2
3	2

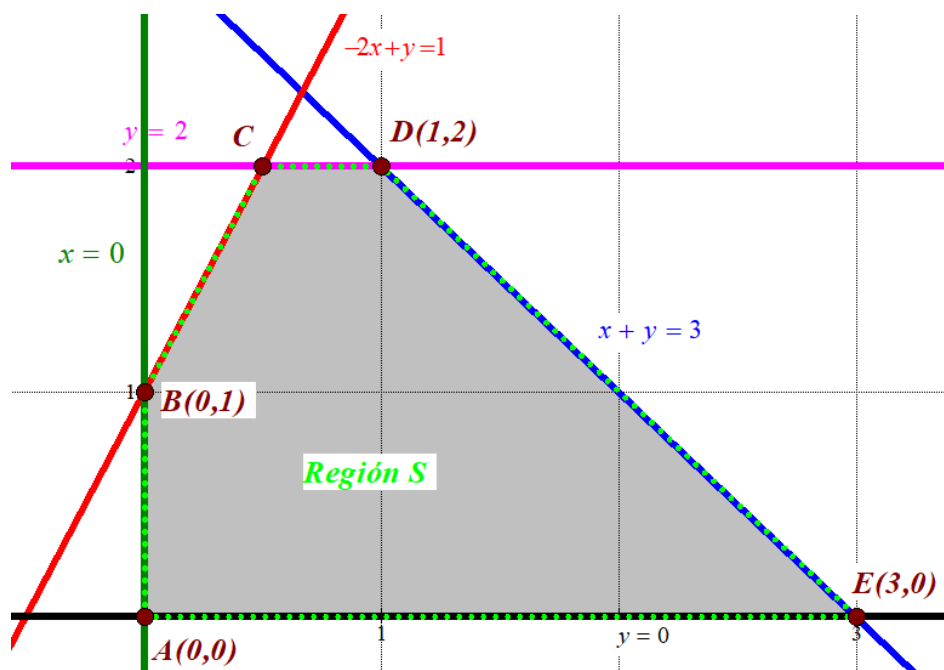


Como las inecuaciones son $-2x + y \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $x + y \leq 3$, $x \geq 0$ la región S está situada por debajo de las dos rectas oblicuas (roja y azul), a la derecha de la recta vertical verde y entre las líneas horizontales (rosa y negra).

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$-2 \cdot 1 + 1 \leq 1, \quad 0 \leq 1 \leq 2, \quad 1 + 1 \leq 3, \quad 1 \geq 0$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región S es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas $y = 2$ y $-2x + y = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 1 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 2 = 1 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Los vértices de la región S son: A(0, 0), B(0, 1), $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, D(1, 2) y E(3, 0).

b) Valoramos la función $f(x, y) = x + y$ en cada uno de los vértices buscando el valor máximo y mínimo.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0 + 0 = 0 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(0, 1) \rightarrow f(0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$D(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = 1 + 2 = 3 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 3 + 0 = 3 \text{ ¡Máximo!}$$

El valor mínimo de la función sobre la región S es 0 y se alcanza en el vértice A(0, 0).

El valor máximo de la función sobre la región S es 3 y se alcanza en los vértice D(1, 2) y E(3, 0), por lo que el valor máximo se alcanza en cualquier punto del segmento que une los vértices D y E.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

Llamamos “x” al número de juguetes de 1 € que debemos comprar, “y” al número de juguetes de 2 €, “z” al número de juguetes de 5 €.

La información proporcionada en el problema nos permite establecer las ecuaciones siguientes:

“Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} z \longrightarrow y \\ 5 \longrightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 5y = z$$

“Por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro” $\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3y$

“Se compran juguetes por valor de 228 euros” $\rightarrow x + 2y + 5z = 228$

Reuniendo todas las ecuaciones tenemos un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5y = z \\ 2x = 3y \\ x + 2y + 5z = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x + 2y + 5 \cdot 5y = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x + 27y = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = 228 - 27y \end{array} \right\} \Rightarrow 2(228 - 27y) = 3y \Rightarrow 456 - 54y = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 456 = 57y \Rightarrow \boxed{y = \frac{456}{57} = 8} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 228 - 27 \cdot 8 = 12} \\ \boxed{z = 5 \cdot 8 = 40} \end{array} \right.$$

Se deben comprar 12 juguetes de 1 €, 8 juguetes de 2 € y 40 juguetes de 5 €.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

- a) Calcule a , b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.
- b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

- a) La pendiente de la recta $y = -4x$ es -4 . Si la recta tangente es paralela a esta recta la recta tangente debe tener pendiente -4 . Como la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 2)$ es el valor de $f'(1)$ se debe cumplir que $f'(1) = -4$.

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2$$

$$f'(1) = -4 \Rightarrow 2a \cdot 1 - \frac{b}{1^2} + 2 = -4 \Rightarrow 2a - b + 2 = -4 \Rightarrow \boxed{2a - b = -6}$$

La recta tangente debe pasar por el punto $(1, 2)$, por lo que debe cumplirse que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + \frac{b}{1} + 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a = -b \\ 2a - b = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-b) - b = -6 \Rightarrow -2b - b = -6 \Rightarrow -3b = -6 \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 2$.

- b) Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ la segunda derivada debe anularse para $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$.

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 = 2ax - bx^{-2} + 2 \Rightarrow f''(x) = 2a + 2bx^{-3} = 2a + \frac{2b}{x^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^3} \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + \frac{2b}{1^3} \Rightarrow 0 = 2a + 2b \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow \boxed{b = -a}$$

Comprobamos que para $b = -a$; $a \in \mathbb{R}$ la derivada tercera no se anula para $x = 1$.

$$f''(x) = 2a + \frac{2(-a)}{x^3} = 2a - 2ax^{-3} \Rightarrow f'''(x) = 6ax^{-4} \Rightarrow f'''(1) = 6a \cdot 1^{-4} = 6a$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ los valores de a y b deben ser $b = -a$; $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$

a) Calcule $P(A \cap \bar{B})$

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A/\bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{5}} \end{aligned}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean incompatibles su intersección debe ser nula.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{5} = P(A \cap B) + \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0}$$

Los sucesos A y B son incompatibles.

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.

Asumimos que hay 10 elementos en la población.

$P(A) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ significa que de los 10 elementos 4 están en A.

$P(B) = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ significa que de los 10 elementos 5 están en B. Por lo que 5 están en $\bar{B}$.

$P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$ significa que de los 5 elementos que están en $\bar{B}$ hay 4 que están en A.

Construimos una tabla de contingencia con estos datos del problema.

	B	$\bar{B}$	
A		4	4
$\bar{A}$			
	5	5	10

Completamos la tabla:

	B	$\bar{B}$	
A	0	4	4
$\bar{A}$	5	1	6
	5	5	10

a) Mirando la tabla tenemos que $P(A \cap \bar{B}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

b) Mirando la tabla tenemos que $P(A \cap B) = \frac{0}{10} = 0$. Los sucesos A y B son incompatibles.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P .

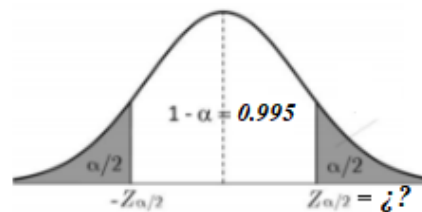
a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

a) La proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$.

Con un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9439
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9544
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9858
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9915
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9942	0,9944	0,9945	0,9946	0,9947	0,9949	0,9950
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

Utilizamos la fórmula del error con un valor de 0.08:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}} \Rightarrow 0.08 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.08}{2.575} = \sqrt{\frac{0.16}{n}} \Rightarrow$$

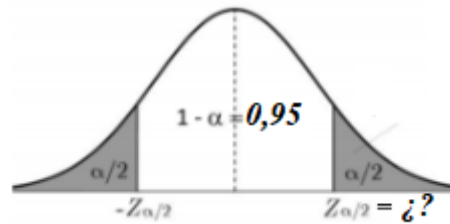
$$\Rightarrow \left(\frac{0.08}{2.575} \right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.08}{2.575} \right)^2} = 165.765625$$

El tamaño muestral mínimo debe ser un número entero mayor que el obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 166 cajas de bombones.

b) El tamaño de la muestra es $n = 200$ cajas. La proporción muestral es $p = \frac{25}{200} = 0.125$.

Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{200}} \simeq 0,0458$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0,125 - 0,0458, 0,125 + 0,0458) = (0,0792, 0,1708)$$

EvAU 2020 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2019-2020 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

- Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.
- Calcule A^{-1} para $a = -1$.

A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

- Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.
- Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2 + 1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.
- Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX .

A.4. (2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A/B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y

$P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

- $P(A \cup \bar{B})$
- $P((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A))$.

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

A.5. (2 puntos)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

- Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95%.
- Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\bar{X} \leq 220) = 0,9940$.

B.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned} \right\}$$

- Discute el sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema para $a = 3$.

B.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

- Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$
- Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

B.3. (2 puntos)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

- Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.
- Calcule

$$\int_0^1 f(x) dx$$

B.4. (2 puntos)

En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

- Sea el examen de un alumno.
- Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

B.5. (2 puntos)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

- Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza (26.9, 37.1), expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ , con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.
- Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

SOLUCIONES**A.1. (2 puntos)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

a)

$$A^2 - 5A = -I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 + 5a^2 & 10a + 15a \\ 2a + 3a & 5a^2 + 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 25a \\ 5a & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 + 5a^2 - 10 & 10a + 15a - 25a \\ 2a + 3a - 5a & 5a^2 + 9 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 5a^2 - 6 = -1 \Rightarrow 5a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

b) Para $a = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0. \text{ Al ser distinto de cero el determinante, existe la inversa.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m³ del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m³ del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

- a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.
 b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

- a) Llamamos "x" al número de metros cúbicos de sustrato tipo A e "y" al número de metros cúbicos del sustrato tipo B.

Resumimos la información proporcionada en una tabla.

	Kg de tierra vegetal	Horas de trabajo	Beneficio
Nº de m ³ de sustrato A (x)	60x	30x	50x
Nº de m ³ de sustrato B (y)	50y	50y	60y
TOTALES	60x + 50y	30x + 50y	50x + 60y

"El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal" $\rightarrow 60x + 50y \leq 21000$

"El vivero dispone como máximo de 15000 horas de trabajo" $\rightarrow 30x + 50y \leq 15000$

"La cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B" $\rightarrow x \leq 5y$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 50y \leq 21000 \\ 30x + 50y \leq 15000 \\ x \leq 5y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 2100 \\ 3x + 5y \leq 1500 \\ x \leq 5y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple este conjunto de restricciones.

$$6x + 5y = 2100$$

$$x \quad y = \frac{2100 - 6x}{5}$$

0	420
200	180

$$3x + 5y = 1500$$

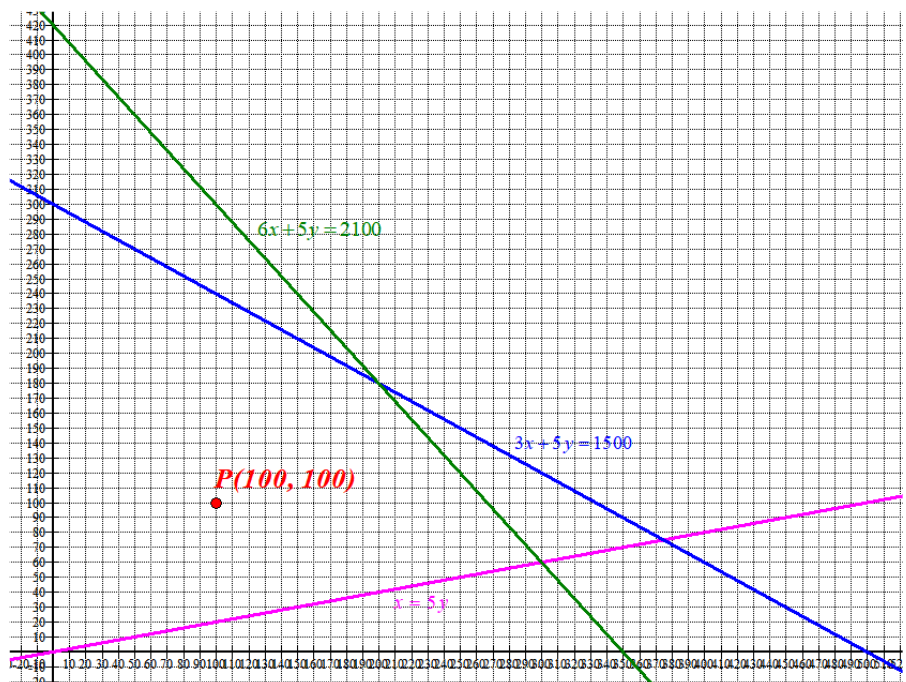
$$x \quad y = \frac{1500 - 3x}{5}$$

0	300
200	180

$$x = 5y$$

$$x \quad y = \frac{x}{5}$$

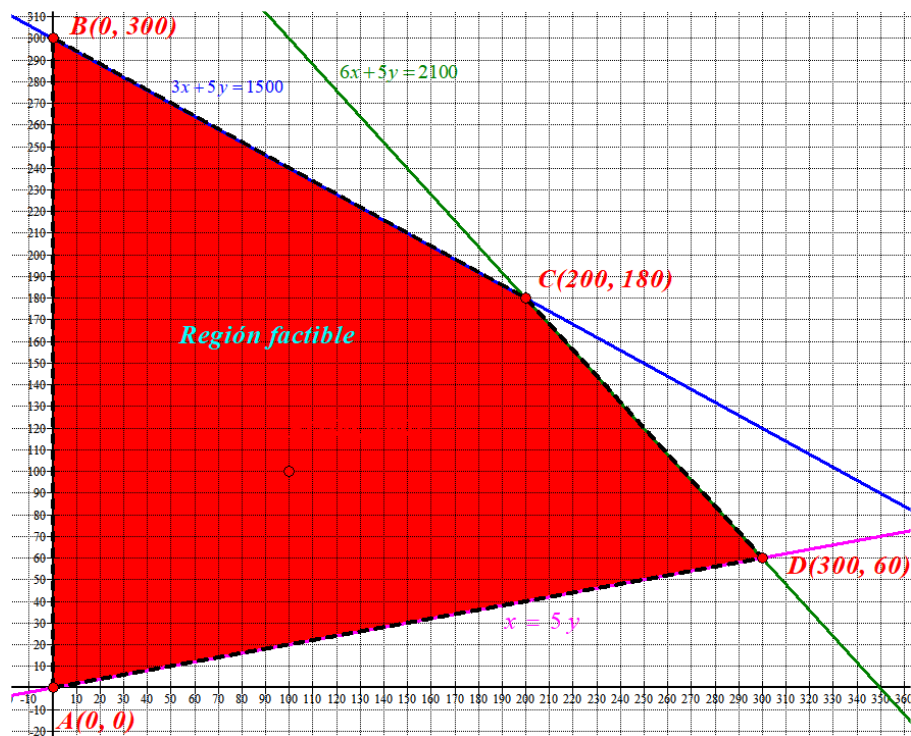
0	0
5	1



Veamos si el punto P(100, 100) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 600 + 500 \leq 2100 \\ 300 + 500 \leq 1500 \\ 100 \leq 500 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumple todo y la región factible es la zona rayada de rojo en el dibujo.



Los vértices de esta región son A(0, 0); B(0, 300); C(200, 180) y D(300, 60).

Se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2100 \\ 3x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2100 \\ -6x - 10y = -3000 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} \hline -5y = -900 \Rightarrow y = \frac{900}{5} = 180 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x + 900 = 1500 \rightarrow \boxed{x = 200} \quad C(200, 180)$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2100 \\ x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow 30y + 5y = 2100 \Rightarrow 35y = 2100 \Rightarrow y = \frac{2100}{35} = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 300} \quad D(300, 60)$$

b) La función beneficio es $B(x, y) = 50x + 60y$. La valoramos en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 300) \rightarrow B(0, 300) = 18000$$

$$C(200, 180) \rightarrow B(200, 180) = 10000 + 10800 = 20800 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(300, 60) \rightarrow B(300, 60) = 15000 + 3600 = 18600$$

El beneficio máximo es de 20800 € y se obtiene en el vértice C(200, 180), que significa producir 200 m³ de sustrato tipo A y 180 m³ de sustrato tipo B.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX .

a) Para que $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea continua debe de serlo en $x = 1$ y debe cumplirse:

- Existe $f(1) = 2m + \ln 1 = 2m$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6x}{2x^2+1} = \frac{6}{2+1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2m + \ln x = 2m + \ln 1 = 2m \end{cases} \Rightarrow 2 = 2m \Rightarrow m = 1$
- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Para que sea continua debe ser $m = 1$.

La función para $x < 1$ es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$ y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{6(2x^2+1) - 4x \cdot 6x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2+6-24x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{6-12x^2}{(2x^2+1)^2}$$

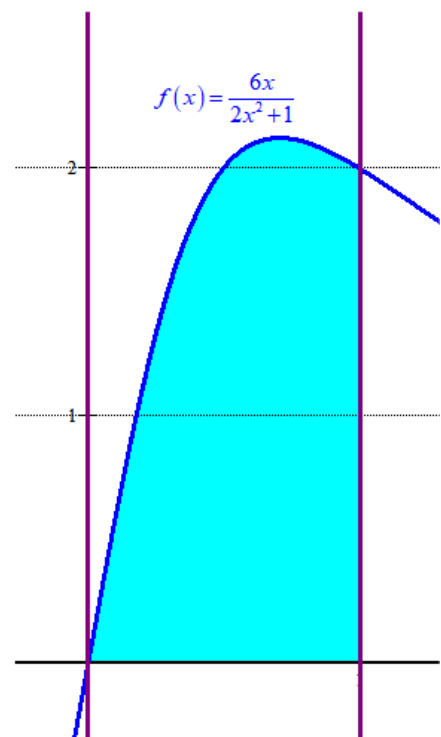
b) Entre $x = -1$ y $x = 0$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$ si $x < 1$, por lo que el área pedida es

la integral definida de $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$ entre 0 y 1.

Calculamos la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \frac{6x}{2x^2+1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2x^2+1 = t \rightarrow 4x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4x} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{6\cancel{x}}{t} \frac{dt}{4\cancel{x}} = \frac{6}{4} \int \frac{1}{t} dt = \frac{3}{2} \ln t = \frac{3}{2} \ln(2x^2+1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 \frac{6x}{2x^2+1} dx = \left[\frac{3}{2} \ln(2x^2+1) \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{3}{2} \ln(2+1) \right] - \left[\frac{3}{2} \ln(0+1) \right] = \\ &= \boxed{\frac{3}{2} \ln 3 = 1.648 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



A.4. (2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A/B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y

$P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \bar{B})$

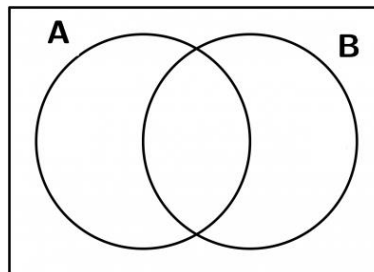
b) $P((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A))$.

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

$$\text{Como } P(A/B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

UNA FORMA DE HACERLO

Pasamos a valores absolutos. En el diagrama de Venn vamos a escribir los elementos que hay en cada parte del dibujo.

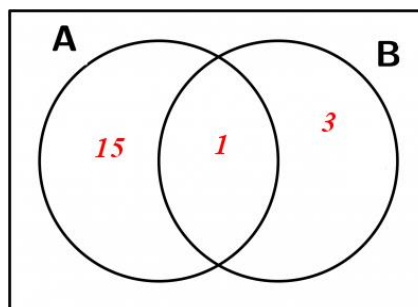


Tenemos que $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{24}$.

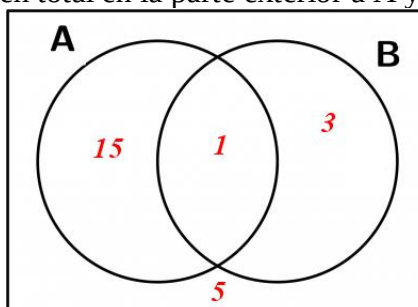
Pasamos todas las probabilidades a denominador 24 y nos queda:

$$P(A) = \frac{16}{24}; P(B) = \frac{4}{24} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

Por lo que en el gráfico hay 1 elemento en la intersección y el resto en la parte no común de cada dibujo.

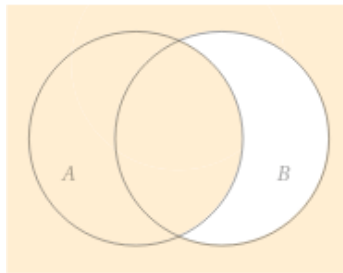


Como hay 24 elementos en total en la parte exterior a A y B quedan $24 - 19 = 5$ elementos.

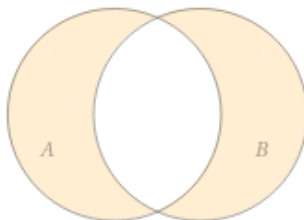


A partir de este esquema tenemos que:

$$\text{a) } P(A \cup \bar{B}) = \frac{15+1+5}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} = 0,875$$



$$b) P\left(\left(\bar{A} \cap B\right) \cup \left(\bar{B} \cap A\right)\right) = \frac{15+3}{24} = \boxed{\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0.75}$$



OTRA FORMA DE HACERLO

a)

$$\left. \begin{aligned} P(A) = \frac{2}{3} &\Rightarrow P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{24} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{24} + P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{24} = \frac{15}{24}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{15}{24} = \frac{16+20-15}{24} = \boxed{\frac{21}{24} = 0.875}$$

b)

$$\begin{aligned} P\left(\left(\bar{A} \cap B\right) \cup \left(\bar{B} \cap A\right)\right) &= P\left(\bar{A} \cap B\right) + P\left(\bar{B} \cap A\right) - P\left(\left(\bar{A} \cap B\right) \cap \left(\bar{B} \cap A\right)\right) = \\ &= P\left(\bar{A} \cap B\right) + P\left(\bar{B} \cap A\right) + 0 = \\ &= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3} - \frac{1}{24} = \frac{4-1+16-1}{24} = \boxed{\frac{18}{24} = 0.75} \end{aligned}$$

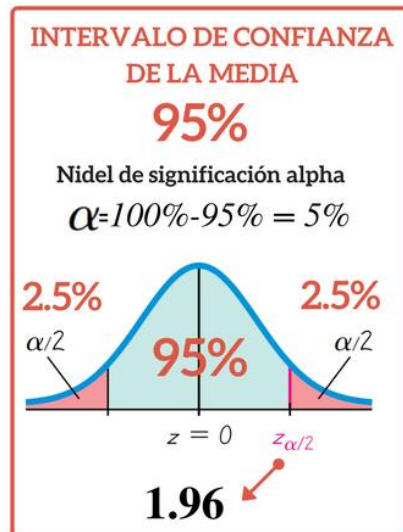
A.5. (2 puntos)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

- a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.
- b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\bar{X} \leq 220) = 0,9940$.

X = Peso de una patata en gramos (g). $X = N(\mu, 60)$

- a) Con un nivel de confianza del 95 %.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

El Error debe ser menor de 20 g, planteamos la igualdad

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20\sqrt{n} = 1.96 \cdot 60 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{n} &= \frac{1.96 \cdot 60}{20} = 5.88 \Rightarrow n = 5.88^2 = 34.57 \end{aligned}$$

La muestra debe ser de 35 patatas o más para que el error sea menor de 20 gramos.

- b) Tomamos una muestra de $n = 100$

La distribución de la media de peso de las 100 patatas sigue una distribución:

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \bar{X} = N(\mu, 6)$$

$$P(\bar{X} \leq 220) = 0,9940 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{220 - \mu}{6}\right) = 0,9940 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{220 - \mu}{6} = 2.51 \Rightarrow 220 - \mu = 15.06 \Rightarrow \boxed{\mu = 220 - 15.06 = 204.94 \text{ gramos}}$$

B.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute el sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

- a) El sistema tiene una matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$$

Con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4 + 2a - a^2 + a = -a^2 + 3a + 4$$

Iguálamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{-2} = -1 = a \\ \frac{-3-5}{-2} = 4 = a \end{cases}$$

Nos surgen 3 situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 4$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes A es distinto de cero y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz A/B ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es cero y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

Considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 1 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3.}$$

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = rango de A/B $\rightarrow$ **El sistema es incompatible.** No tiene solución.

CASO 3. $a = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de A es cero, por lo que el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ con

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 16 + 8 + 0 - 8 = 0. \text{ El rango de A/B no es 3.}$$

Al ser 2 el rango de A el rango de A/B es también 2.

Rango de A = 2 = rango de A/B < 3 = N° de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 4$ el sistema es compatible determinado, si $a = -1$ el sistema es incompatible y si $a = 4$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado, lo resolvemos por Cramer.

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4-3+0-6+3}{4+6-9+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-2+0+3-1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4-12+9+8-9-6}{4+6-9+3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

La solución es $x = y = -\frac{1}{2}$; $z = -\frac{3}{2}$

B.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

- a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.
 b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

- a) La asíntota horizontal tiene ecuación $y = b$ siendo $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Para que la asíntota sea $y = -1$ debe ser $b = -1$.

$$-1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \cancel{x^2} - 3}{\cancel{x^2} - 5} = a$$

Por lo que debe ser $a = -1$.

- b) Para $a = 1$ la función es $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$.

$$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \text{El dominio de la función es } \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$$

Calculamos la derivada e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 5) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 5)^2} = \frac{2x^3 - 10x - 2x^3 + 6x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos la evolución de la función antes y después de los valores excluidos del dominio:

$x = \pm\sqrt{5}$ y del punto crítico $x = 0$.

- En $(-\infty, -\sqrt{5})$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{12}{((-3)^2 - 5)^2} = \frac{12}{16} > 0$.

La función crece en $(-\infty, -\sqrt{5})$.

- En $(-\sqrt{5}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{4}{((-1)^2 - 5)^2} = \frac{4}{16} > 0$. La

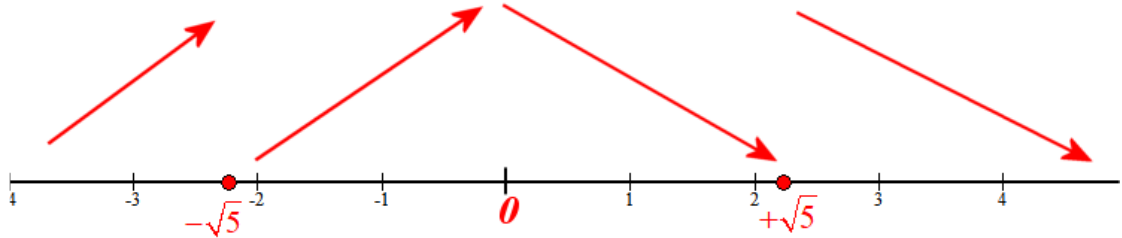
función crece en $(-\sqrt{5}, 0)$.

- En $(0, +\sqrt{5})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-4}{(1^2 - 5)^2} = \frac{-4}{16} < 0$. La función

decrece en $(0, +\sqrt{5})$.

- En $(+\sqrt{5}, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-12}{(3^2 - 5)^2} = \frac{-12}{16} < 0$. La función decrece en $(+\sqrt{5}, +\infty)$.

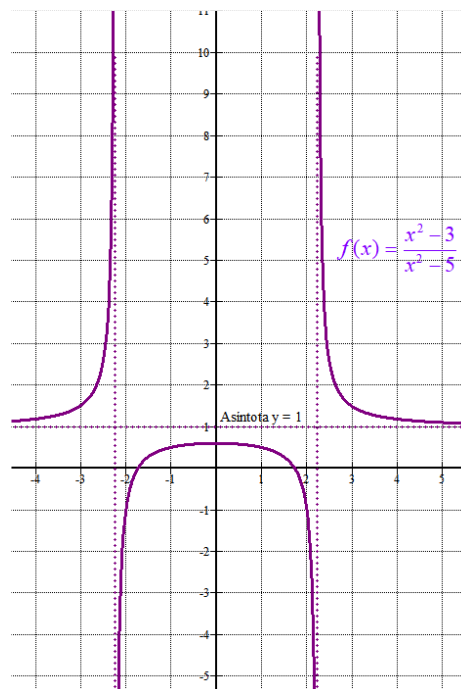
La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, 0)$ y decrece en $(0, +\sqrt{5}) \cup (+\sqrt{5}, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{0^2 - 3}{0^2 - 5} = \frac{3}{5}$. La función tiene un máximo relativo en $(0, \frac{3}{5})$.



B.3. (2 puntos)

Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.
 b) Calcule

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- a) La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en $x = 0$ tiene ecuación

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Hallamos el valor de la función y su derivada en $x = 0$ y lo sustituimos en la fórmula anterior.

$$f(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$f(x) = e^{2x} + x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} + 1 \Rightarrow f'(0) = 2e^0 + 1 = 2 + 1 = 3$$

La recta tangente tiene ecuación:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 1}$$

- b)

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{2x} + x dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{e^2}{2} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{e^0}{2} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{e^2}{2}}$$

B.4. (2 puntos)

En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.

b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

$$P(\text{escrito en azul}) = 2/3$$

$$P(\text{Sea de alumna} / \text{escrito en azul}) = 0,7$$

$$P(\text{Escrito en negro y de alumno}) = 0,2 = 2/10$$

$$P(\text{Sea de alumna} / \text{escrito en azul}) = 0,7 \Rightarrow \frac{P(\text{Sea de alumna y escrito en azul})}{P(\text{escrito en azul})} = 0,7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(\text{Sea de alumna y escrito en azul})}{\frac{2}{3}} = 0,7 \Rightarrow P(\text{Sea de alumna y escrito en azul}) = 0,7 \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\text{Sea de alumna y escrito en azul}) = \frac{1,4}{3} = \frac{14}{30}$$

Pasamos las probabilidades a fracciones con denominador común (30).

$$P(\text{escrito en azul}) = 2/3 = 20/30$$

$$P(\text{Sea de alumna y escrito en azul}) = 14/30$$

$$P(\text{Escrito en negro y de alumno}) = 0,2 = 2/10 = 6/30$$

Construimos una tabla de contingencia con estos datos. Consideramos un total de 30 alumnos/as y el resto de datos se refleja en la tabla.

	Escrito en azul	Escrito en negro	
Escrito por alumno		6	
Escrito por alumna	14		
	20		30

Completamos la tabla.

	Escrito en azul	Escrito en negro	
Escrito por alumno	6	6	12
Escrito por alumna	14	4	18
	20	10	30

$$a) P(\text{Sea de un alumno}) = \frac{\text{Nº de alumnos}}{\text{Total de alumnos/as}} = \frac{12}{30} = \boxed{\frac{2}{5} = 0,4}$$

$$b) P(\text{Sea de alumno} / \text{Escrito en negro}) = \frac{\text{Nº de alumnos que escriben en negro}}{\text{Nº de alumnos/as que escriben en negro}} = \boxed{\frac{6}{10} = 0,6}$$

B.5. (2 puntos)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza (26.9, 37.1), expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ , con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

$X =$ Tiempo que tarda (minutos) en hacer un recorrido. $X = N(\mu, 10)$

a) Con un nivel de confianza del 98,92 %.

$$1 - \alpha = 0,9892 \rightarrow \alpha = 0,0108 \rightarrow \alpha/2 = 0,0054 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9946 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.55$$

El intervalo de confianza tiene una amplitud de $37.1 - 26.9 = 10.2$ minutos.

El Error es la mitad de dicha amplitud $\rightarrow$ Error = 5.1

Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5.1 = 2.55 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5.1\sqrt{n} = 25.5 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{25.5}{5.1} = 5 \Rightarrow n = 5^2 = 25$$

La muestra debe ser de más de 25 días.

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza.

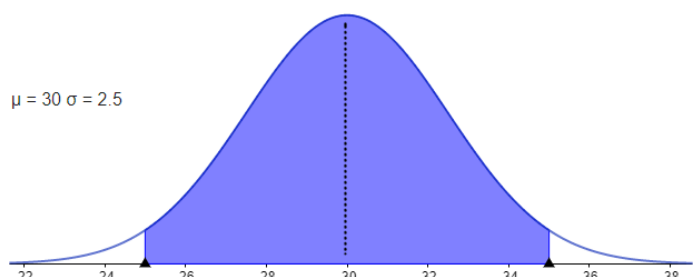
$$\bar{x} = \frac{37.1 + 26.9}{2} = 32 \text{ minutos}$$

b) $\mu = 30 \rightarrow X = N(30, 10)$

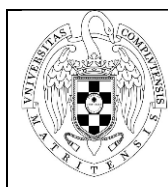
La distribución de la media de los 16 días sigue una distribución

$$\overline{X}_{16} = N\left(30, \frac{10}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{16} = N(30, 2.5)$$

$$\begin{aligned} P(25 \leq \overline{X}_{16} \leq 35) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{25-30}{2.5} \leq Z \leq \frac{35-30}{2.5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = \\ &= 0.9772 - 1 + 0.9772 = \boxed{0.9544} \end{aligned}$$



EvAU 2020 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2019-2020
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ x + ay + (a+1)z &= a \end{aligned} \right\}$$

- Discute el sistema en función de los valores del parámetro a .
- Resuelva el sistema para $a = 0$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

- Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
- Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

- Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
- Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

A.4. (2 puntos)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

- Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
- Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

- Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
- Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
- Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

- Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .
- Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

- Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
- Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40% de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

- Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
- Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

- En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

- A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{array} \right\}$$

- a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix} = 2a - a^2 - a - 2a = -a^2 - a$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - a = 0 \Rightarrow -a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Hay tres casos a estudiar.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A no es cero y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El **sistema es compatible determinado (una única solución)**.

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

Como la columna 2ª es todo 0, quitamos la columna 2ª y la fila 1ª, este menor de orden 2

es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Determinamos el rango de A/B .

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo he añadido una columna con todo cero, el rango de A/B es 2, igual que el de A .

Rango de A = Rango de A/B = $2 < 3$ = número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

La fila 1ª y 3ª son iguales, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila

y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Determinamos el rango de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de A/B es 3.

Rango de A es 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = -1$ el sistema es incompatible.

b) Para $a = 0$ estamos en el caso 2 estudiado y el sistema es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 0 + 2z = 0 \\ 0 + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

Las soluciones del sistema son $\boxed{x = 0; \quad y = t; \quad z = 0}$ siendo $t \in \mathbb{R}$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

- a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
 b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

- a) El dominio de definición de la función es todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador.

$$3x + x^2 = 0 \Rightarrow x(3 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 + x = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que:

- Exista $f(0) = \frac{0}{0} + 4$. No existe.
- Exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{0}{0} + 4 = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(4 - x^2)}{\cancel{x}(3 + x)} + 4 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

- Ambos valores deben ser iguales. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Debemos darle el valor $f(0) = \frac{16}{3}$ para conseguir que sea continua en $x = 0$.

b) Asíntotas verticales. $x = a$

En $x = 0$ hemos visto que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{0}{0} + 4 = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(4 - x^2)}{\cancel{x}(3 + x)} + 4 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

La función no tiene asíntota en $x = 0$.

En $x = -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \frac{-12 + 27}{0} + 4 = \infty$$

La función tiene una asíntota en $x = -3$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^2} + 4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x + 4 = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Hallamos el valor de m .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^3 + 12x + 4x^2}{3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1 \end{aligned}$$

Hallamos el valor de n .

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^3 + 4x^2 + 16x}{3x + x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-\cancel{x^3} + 4x^2 + 16x + 3x^2 + \cancel{x^3}}{3x + x^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2 + 16x}{x^2 + 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2}{x^2} = 7 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = -x + 7$

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = -3$, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua es la recta $y = -x + 7$.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

- a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
 b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

- a) La recta tangente en $x = -1$ tiene ecuación $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

Para $a = -1$ tenemos:

$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \Rightarrow f'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) = 4 + 3 - 4 = 3$$

La recta tangente queda:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y = 3(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 3}$$

- b) Veamos si la función corta el eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ -x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

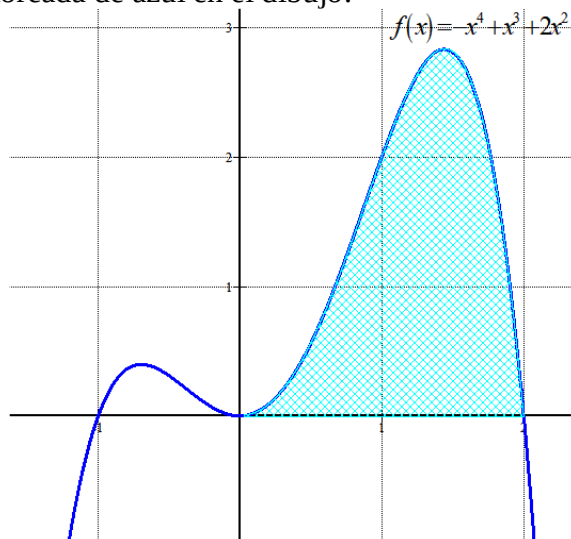
$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = \boxed{-1 = x} \\ \frac{-1-3}{-2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Corta en tres puntos: $x = -1$; $x = 0$ y $x = 2$.

El área del recinto pedido es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 -x^4 + x^3 + 2x^2 dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \\ &= \left[-\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + 2\frac{2^3}{3} \right] - \left[-\frac{0^5}{5} + \frac{0^4}{4} + 2\frac{0^3}{3} \right] = -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \boxed{\frac{44}{15} = 2,93 u^2} \end{aligned}$$

El recinto es la zona coloreada de azul en el dibujo.

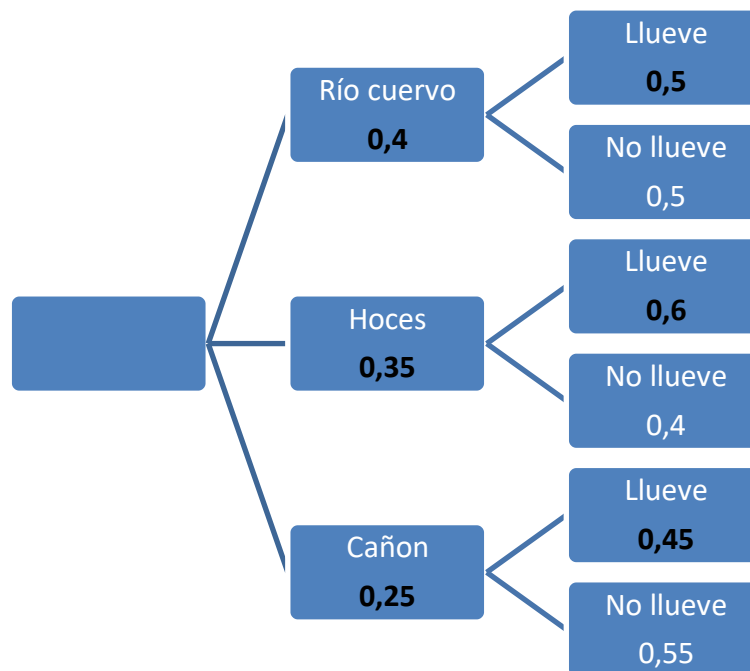


A.4. (2 puntos)

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40% de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35% a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

- Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
- Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Realizamos un diagrama de árbol.



- Puede suceder que no llueva de tres formas distintas, calculamos la probabilidad de cada una y las sumamos.

$$P(\text{No llueve}) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,55 = 0,20 + 0,14 + 0,1375 = \boxed{0,4775}$$

- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos la fórmula de Bayes.

$$P(\text{Río Cuervo} / \text{Ha llovido}) = \frac{P(\text{Río Cuervo} \cap \text{Llueve})}{P(\text{Llueve})} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{1 - 0,4775} = \boxed{0,383}$$

A.5. (2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ , es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

X = Longitud de escritura de un bolígrafo en km. $X = N(\mu, 0.5)$

a) Con un nivel de confianza del 95,44 % hallamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,9544 \rightarrow \alpha = 0,0456 \rightarrow \alpha/2 = 0,0228 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9772 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,05 \Rightarrow 1 = 0,05\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{0,05} = 20 \Rightarrow n = 20^2 = 400$$

La muestra debe ser de un mínimo de 400 bolígrafos.

b) $\mu = 2 \rightarrow X = N(2, 0.5)$

Si deseamos estudiar lo que se escribe con 16 bolígrafos consideramos la distribución de la

media de los 16 bolígrafos. $\overline{X}_{16} = N\left(2, \frac{0,5}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{16} = N\left(2, \frac{1}{8}\right)$

Si con 16 bolígrafos quieres escribir más de 30 km, entonces cada bolígrafo debe escribir más de $\frac{30}{16}$.

$$P\left(\overline{X}_{16} \geq \frac{30}{16}\right) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{\frac{30}{16} - 2}{\frac{1}{8}}\right) = P\left(Z \geq \frac{-2}{\frac{1}{8}}\right) = P(Z \geq -1) =$$



$$= P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8413}$$

B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
 b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 3+m-2 & 6+4 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 3+2 & 1-m-2 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A = -4I \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -1-m & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ 4-m=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m^2-5m=-4 \end{cases} \Rightarrow 16-20=-4 \text{ Se cumple}$$

Para $m = 4$ se cumple la identidad $A^2 - 5A = -4I$.

b) Para $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0. \text{ La matriz } A \text{ es invertible}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

B.2. (2 puntos)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

- a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
 b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

- a) Dibujamos las rectas asociadas a las expresiones que definen la región del plano.

$$x = 3,$$

$$y = 0,$$

$$y = 15,$$

$$y - 5 + \frac{x}{2} = 0$$

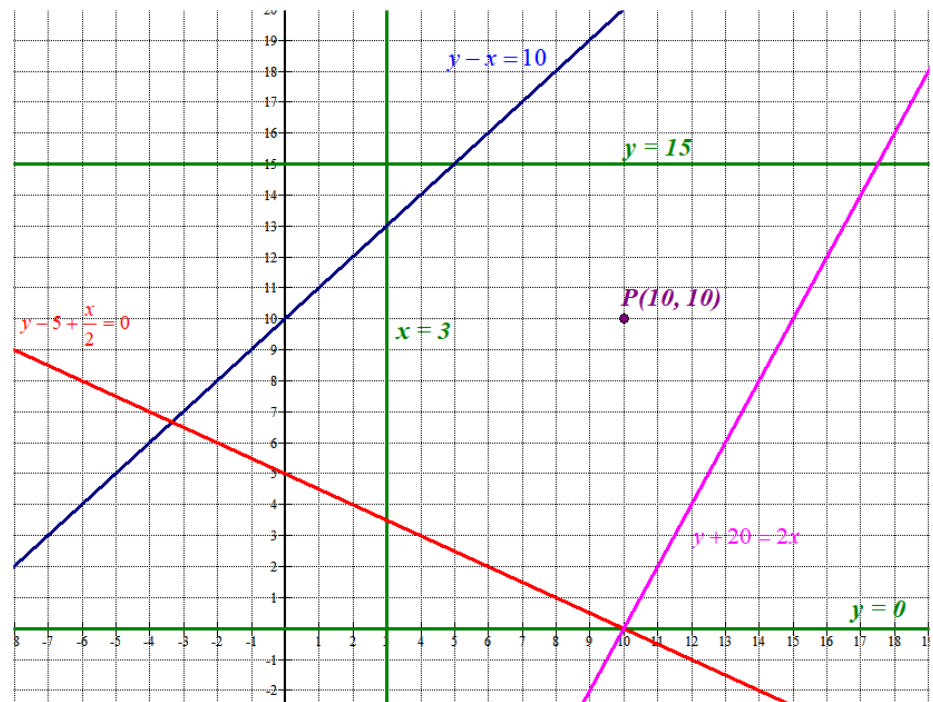
x	$y = 5 - \frac{x}{2}$
0	5
10	0

$$y - x = 10,$$

x	$y = x + 10$
0	10
-10	0

$$y + 20 = 2x$$

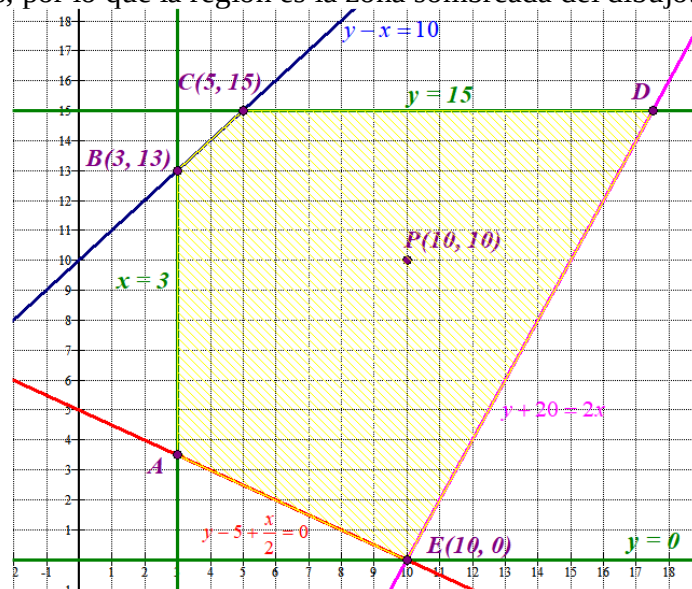
x	$y = 2x - 20$
0	-20
10	0



Comprobamos si el punto P(10, 10) cumple las condiciones del ejercicio.

$$10 \geq 3, \quad 0 \leq 10 \leq 15, \quad 10 - 5 + \frac{10}{2} \geq 0, \quad 10 - 10 \leq 10, \quad 10 + 20 \geq 20$$

Se cumplen todas, por lo que la región es la zona sombreada del dibujo.



Las coordenadas de los puntos A y D lo obtenemos resolviendo el sistema correspondiente.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y - 5 + \frac{x}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 5 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow A\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 15 \\ y + 20 = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 15 + 20 = 2x \Rightarrow x = \frac{35}{2} \Rightarrow D\left(\frac{35}{2}, 15\right)$$

b) Valoramos la función $f(x, y) = x + y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A\left(3, \frac{7}{2}\right) \rightarrow f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = 6.5 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(3, 13) \rightarrow f(3, 13) = 3 + 13 = 16$$

$$C(5, 15) \rightarrow f(5, 15) = 5 + 15 = 20$$

$$D\left(\frac{35}{2}, 15\right) \rightarrow f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = \frac{35}{2} + 15 = 32.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(10, 0) \rightarrow f(10, 0) = 10 + 0 = 10$$

El valor mínimo es 6.5 y se alcanza en el punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

El valor máximo es 32.5 y se alcanza en el punto $D\left(\frac{35}{2}, 15\right)$.

B.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) El dominio es todo $\mathbb{R}$, pues la exponencial $e^{\frac{-x}{2}}$ no plantea ningún problema y $3(x+k)$ tampoco.

Para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal debe tener pendiente 0, es decir la derivada en $x = 1$ debe ser $0 \Rightarrow f'(1) = 0$.

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}} + 3(x+k)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}} = 3e^{\frac{-x}{2}} - \frac{3}{2}(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

$$f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(1 - \frac{x+k}{2}\right) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{2-x-k}{2}\right)$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3e^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{2-1-k}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1-k}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para $k = 1$ la función queda $f(x) = 3(x+1)e^{\frac{-x}{2}}$ y la derivada es $f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3(1+1)e^{\frac{-1}{2}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \\ f'(1) = 3e^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1-1}{2}\right) = 0 \\ \text{recta tangente} \rightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{6}{\sqrt{e}} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{\sqrt{e}}}$$

b) Para $k = 1$ la derivada es $f'(x) = 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right)$

La igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Veamos que ocurre antes y después de 1.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada es $f'(0) = 3e^0\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3e^{\frac{-2}{2}}\left(\frac{1-2}{2}\right) = -\frac{3e^{-1}}{2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

B.4. (2 puntos)

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40% de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

- a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
 b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

- a) Utilizamos el suceso contrario. El suceso contrario a “Se estropee al menos uno de ellos” es “No se estropea ninguno”.
 La probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos es 1 menos la probabilidad de que no se estropee ninguno.

$$P(\text{se estropee al menos uno de ellos}) = 1 - P(\text{no se estropee ninguno}) = \{\text{Sucesos independientes}\} = 1 - P(\text{no se estropee el microondas}) \cdot P(\text{No se estropee el horno}) = \\ = 1 - 0,98 \cdot 0,95 = \boxed{0,069}$$

- b) $P(\text{Se estropee el microondas y conserve la garantía}) = P(\text{Se estropee el microondas}) \cdot P(\text{Conserve la garantía} / \text{se ha estropeado}) = 0,02 \cdot (1 - 0,4) = 0,02 \cdot 0,6 = \boxed{0,012}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Damos nombre a los sucesos posibles y aplicamos las propiedades de la probabilidad.

Llamamos M al suceso “Se estropea el microondas durante el periodo de garantía” y H al suceso H al suceso “Se estropea el horno eléctrico durante el periodo de garantía”.

Llamamos F al suceso “El cliente no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación”

Sabemos que $P(M) = 0.02$, $P(H) = 0.05$. Estos sucesos son independientes significa que $P(M \cap H) = P(M) \cdot P(H) = 0.02 \cdot 0.05 = 0.001$. También sabemos que $P(F / M) = 0.40$.

- a) Nos piden calcular $P(H \cup M)$.

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = 0.05 + 0.02 - 0.001 = \boxed{0.069}$$

- b) Nos piden calcular $P(M \cap \bar{F})$.

$$P(M \cap \bar{F}) = P(M)P(\bar{F} / M) = P(M)[1 - P(F / M)] = 0.02[1 - 0.4] = \boxed{0.012}$$

B.5. (2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

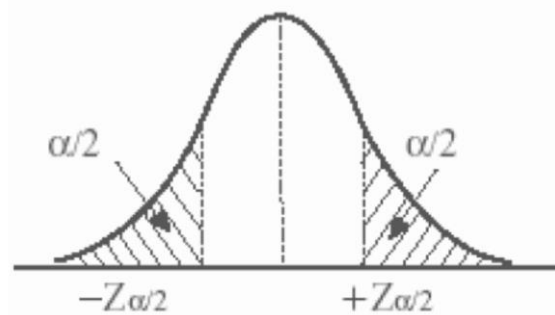
X = Consumo de agua de un programa de lavado. $X = N(\mu, 7)$

a) $n = 10$

$$\bar{x} = \frac{40 + 45 + 38 + 44 + 41 + 40 + 35 + 50 + 40 + 37}{10} = 41$$

Con un nivel de confianza del 90 %

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



El error del intervalo de confianza es:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3.641.$$

El intervalo de confianza sería:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (41 - 3.641, 41 + 3.641) = (37.359, 44.641)$$

b) $n = 64$

Si el intervalo de confianza tiene longitud 5 el error es la mitad 2.5 litros.

Utilizando la fórmula del error tenemos:

$$Error = 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} = 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.5 \cdot 8}{7} = 2.86$$

Buscando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $1 - \alpha/2 = 0.9979$.

$$1 - \alpha/2 = 0.9979 \rightarrow \alpha/2 = 0.0021 \rightarrow \alpha = 0.0042 \rightarrow 1 - \alpha = 0.9958$$

El nivel de confianza es del 99,58%.

EvAU 2019 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2018-2019 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
- Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

- Determinése en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
- Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - 9} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

- Estúdiase la continuidad de f .
- Determinése si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de $2/5$ hacían ejercicio regularmente y $2/3$ siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de $9/25$ hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

- ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
- Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

- Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos.
Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
- Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos.
Cálculase la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además, su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

- Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
- Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determinénese el largo del estanque y su coste.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz B es tal que $(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

- Calcúlese A^{-1} .
- Calcúlese B^{-1} .

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

- Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
- Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.3$, $P(B/A) = 0.4$, $P(B/\bar{A}) = 0.6$. Calcúlese:

- $P(A/B)$
- $P(\bar{A}/\bar{B})$

Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

- Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0.22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
- Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
 b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

- a) Para que la matriz A no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 - 2a - 4 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para $a = 0$, ni para $a = 2$.

- b) Para $a = 3$ la matriz A tiene inversa y su determinante vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 6 - 4 = 3 \neq 0$$

Calculamos la matriz inversa con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 27 - 18 \\ -9 + 1 + 6 \\ -9 - 2 + 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

- a) Determinése en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
 b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

- a) Para que la tangente sea horizontal su pendiente debe ser 0, es decir, la derivada de la función $f(x) = 2x^3 - 8x$ debe ser 0.

$$f(x) = 2x^3 - 8x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

En los puntos $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ la tangente es horizontal.

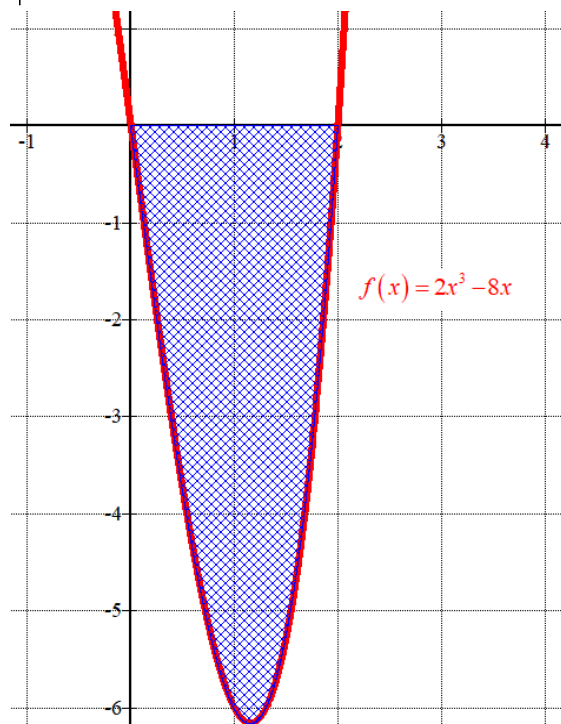
- b) Determinamos si la función corta al eje OX ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 8x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Ninguno de estos puntos de corte está en el intervalo $(0, 2)$, por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función $f(x) = 2x^3 - 8x$ entre 0 y 2.

$$\int_0^2 2x^3 - 8x dx = \left[2 \frac{x^4}{4} - 8 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{2} - 4x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{2} - 4 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 4 \cdot 0^2 \right] = 8 - 16 = -8$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 2x^3 - 8x dx \right| = |-8| = 8 \text{ u}^2$$



Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-9} & \text{si } x < 3 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

a) Estúdiese la continuidad de f .b) Determinése si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.a) Para $x > 3$ la función es $f(x) = x^2 - 4$. Al ser una función polinómica la función es continua.

Para $x < 3$ la función es $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$. El denominador de la fracción se anula en $x = -3$ y $x = 3$, ya que si lo igualamos a cero obtenemos:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

La función no es continua en $x = -3$.

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^2 - 9} = \frac{-27}{0} = \text{No existe}$$

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 3$, valor donde la función cambia de definición.

- Existe $f(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$
- ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0} = \infty$? ¡No existe!

No se cumple esta condición y no cabe plantear más. No es continua en $x = 3$.La función es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ b) **Asíntota vertical.** $x = a$ ¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

 $x = 3$ es asíntota vertical por la izquierda.¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-27}{0} = \infty$$

 $x = -3$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 = +\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Vemos que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota oblicua.

Probamos cuando x tiende a $-\infty$.

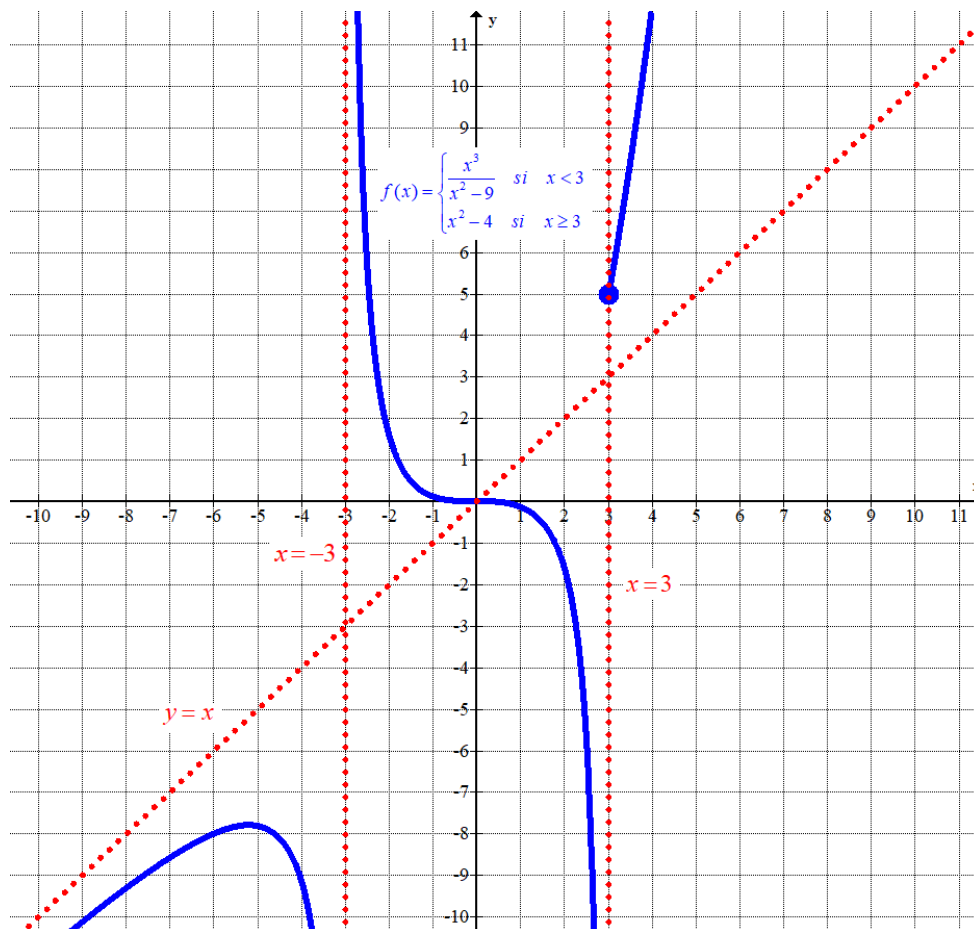
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 9)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 9} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2 - 9} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x} = \frac{9}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$ es $y = x$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = -3$, otra asíntota vertical por la izquierda: $x = 3$, no tiene asíntota horizontal y la recta $y = x$ es una asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.



Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de $\frac{2}{5}$ hacían ejercicio regularmente y $\frac{2}{3}$ siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de $\frac{9}{25}$ hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

- a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
 b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

- a) Llamamos D al suceso “Siempre desayuna” y H al suceso “Hace ejercicio regularmente”.

Los datos proporcionados en el ejercicio nos permiten establecer las probabilidades

siguientes: $P(D) = \frac{2}{3}$; $P(H) = \frac{2}{5}$; $P(H/D) = \frac{9}{25}$

Tenemos que comprobar si $P(D \cap H) = P(D) \cdot P(H)$.

$$P(D \cap H) = P(D) \cdot P(H/D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{18}{75} = 0.24$$

$$P(D) \cdot P(H) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0.26$$

Comprobamos que no son iguales

$$P(D \cap H) = 0.24 \neq 0.26 = P(D) \cdot P(H)$$

Siempre desayunar y hacer ejercicio regularmente no son independientes.

- b) Nos piden calcular $P(\overline{D} \cap \overline{H})$. Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{D} \cap \overline{H}) = P(\overline{D \cup H}) = 1 - [P(D) + P(H) - P(D \cap H)] = 1 - \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{18}{75} \right] = \frac{13}{75}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Sabemos que $P(D) = \frac{2}{3} = \frac{50}{75}$; $P(H) = \frac{2}{5} = \frac{30}{75}$; $P(H/D) = \frac{9}{25} = \frac{18}{50}$

Consideramos que hay 75 escolares y realizamos una tabla de contingencia.

	Hacen ejercicio	No hacen ejercicio	
Desayunan	18		50
No desayunan			
	30		75

Y ahora completamos los datos que faltan, sabiendo que fila o columna deben sumar lo indicado al final de fila o columna.

	Hacen ejercicio	No hacen ejercicio	
Desayunan	18	32	50
No desayunan	12	13	25
	30	45	75

La respuesta a la probabilidad pedida es muy sencilla, pues 13 es el contenido de la celda donde coinciden la columna “No hacen ejercicio” y la fila “No desayunan”, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{13}{75}$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Llamemos X = Peso de un paquete de harina en gramos. $X = N(\mu, 25)$

a) $\bar{x} = 560$ gramos; $n = 15$

Con el nivel de confianza del 95% determinamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(560 - 1,96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}}, 560 + 1,96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}} \right)$$

El intervalo de confianza es (547'35, 572'65)

b) Si $X = N(\mu, \sigma)$ la distribución de la media es una normal con la misma media y con

desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. $\bar{X}_{50} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{50}}\right)$

En nuestro caso la media sigue una normal $\bar{X}_{50} = N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) \rightarrow \bar{X}_{50} = N\left(560, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{50} \geq 565)$.

$$P(\bar{X}_{50} \geq 565) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\bar{X}_{50} - 560}{\frac{5}{\sqrt{2}}} \geq \frac{565 - 560}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= P(Z \geq \sqrt{2}) = P(Z \geq 1,41) = 1 - P(Z \leq 1,41) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla}\} = 1 - 0,9207 = \boxed{0,0793}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además, su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determinése la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determinése el largo del estanque y su coste.

La situación es la que refleja el dibujo:



Llamemos al largo = x y al ancho = y .

Las restricciones de la situación son:

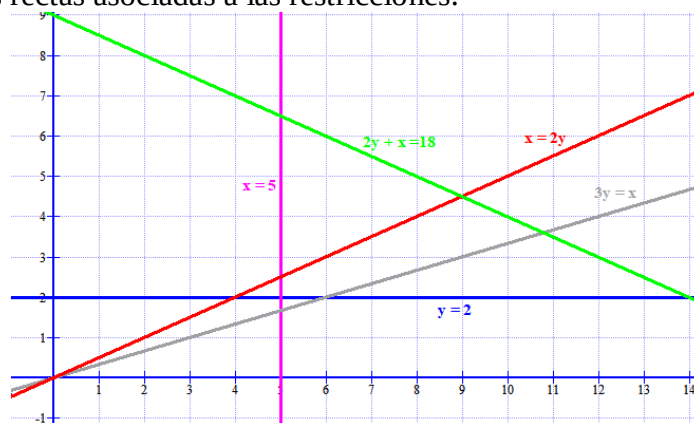
- El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho $\rightarrow y \geq 2$
- El estanque deberá tener al menos 5 metros de largo $\rightarrow x \geq 5$
- Su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho $\rightarrow 3y \geq x \geq 2y$
- Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros $\rightarrow 1000y + 500x \leq 9000$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 2 \\ x \geq 5 \\ 3y \geq x \\ x \geq 2y \\ 1000y + 500x \leq 9000 \Rightarrow 2y + x \leq 18 \end{array} \right\}$$

La función objetivo (a maximizar) es el ancho (y).

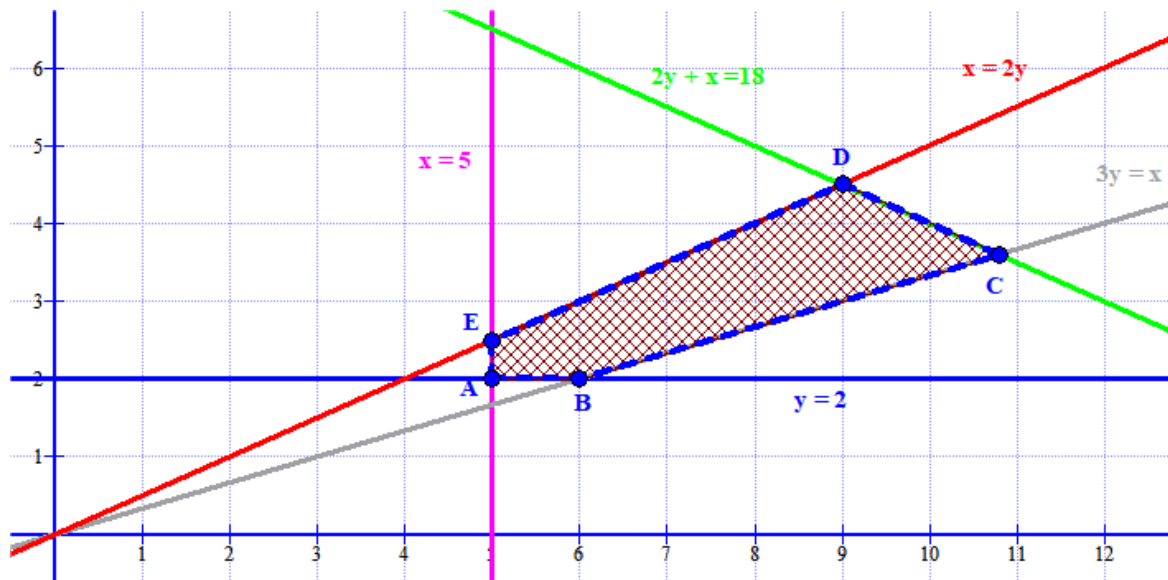
Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones:



El punto (8, 3) cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq 2 \\ 8 \geq 5 \\ 3 \cdot 3 \geq 8 \\ 8 \geq 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + 8 \leq 18 \end{array} \right\}$$

La zona factible es la subrayada del dibujo y delimitada por la línea de puntos azules:



Los puntos candidatos a maximizar la función son los vértices: A(5, 2), B(6, 2) y el resto de puntos los obtengo resolviendo los sistemas de cada par de ecuaciones.

C es el punto de corte de la recta $3y = x$ y la recta $2y + x = 18$

$$\left. \begin{array}{l} 3y = x \\ 2y + x = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 3y = 18 \Rightarrow 5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5} = 3,6 \Rightarrow x = 3 \cdot 3,6 = 10,8 \Rightarrow C(10,8, 3,6)$$

D es el punto de corte de $x = 2y$ y la recta $2y + x = 18$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ 2y + x = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2y = 18 \Rightarrow 4y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{4} = 4,5 \Rightarrow x = 2 \cdot 4,5 = 9 \Rightarrow D(9, 4,5)$$

E es el punto de corte de la recta $x = 5$ y la recta $x = 2y$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow E(5, 2,5)$$

Valoramos cada punto para obtener el que tiene un ancho (y) mayor.

$$A(5, 2), B(6, 2), C(10,8, 3,6), D(9, 4,5), E(5, 2,5)$$

El punto D tiene 4,5 en la coordenada “y” por lo que es la solución del problema.

El estanque debe tener 4,5 metros de ancho y 9 metros de largo.

$$\text{El coste es } 1000 \cdot 4,5 + 500 \cdot 9 = 4500 + 4500 = 9000 \text{ €}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1} .b) Calcúlese B^{-1} .

a) La matriz A tiene determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \cancel{12} + 64 + 60 - 40 - 96 - \cancel{12} = 124 - 136 = -12 \neq 0$$

Al tener determinante no nulo la matriz A es invertible. Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}}{-12} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix}$$

b) La inversa de AB debe cumplir que $(AB)^{-1}(AB) = I$ y esto se cumple con la matriz $B^{-1}A^{-1}$.

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Sustituimos $(AB)^{-1}$ por la matriz $B^{-1}A^{-1}$.

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} A$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6-4 & 3-3 & 6-6 \\ -2+4 & -1+3 & -2+6 \\ 6-6-12 & 16-3-9 & 20-6-18 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

- a) Determinénse los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
 b) Determinénse los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

a) Si $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 + 3 = 3$ El punto de corte con el eje OY es $(0, 3)$.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + x^2 - 5x + 3$ Como es una ecuación de grado 3, aplicamos la regla de Ruffini para obtener sus raíces.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

Una de las raíces es $x = 1$

Resolvemos la ecuación de segundo grado restante.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Hay otra raíz que es $x = -3$.

Los puntos de corte con el eje OX son $(1, 0)$ y $(-3, 0)$.

Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

- b) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en ese punto. Hallamos la derivada de la función y la igualamos a 3.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} x = \frac{-2+10}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x = \frac{-2-10}{6} = -2 \end{cases}$$

La pendiente de la recta tangente es 3 en $x = \frac{4}{3}$ y en $x = -2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,3$, $P(B/A) = 0,4$, $P(B/\bar{A}) = 0,6$. Calcúlese:

a) $P(A/B)$

b) $P(\bar{A}/\bar{B})$

Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Hallamos la probabilidad del suceso $A \cap B$.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{0,3} = 0,4 \Rightarrow P(B \cap A) = 0,12$$

Hallamos la probabilidad del suceso B.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{1 - P(A)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{0,7} = 0,6 \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0,12 + 0,42 = 0,54$$

a) Usamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,54} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) Usamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}/\bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - 0,54} = \frac{1 - P(A \cup B)}{0,46} = \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{0,46} = \\ &= \frac{1 - (0,3 + 0,54 - 0,12)}{0,46} = \frac{1 - 0,72}{0,46} = \frac{0,28}{0,46} = \boxed{\frac{14}{23}} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P , que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

- a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
- b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

$$P = 0,22 \rightarrow q = 1 - 0,22 = 0,78; \alpha = 0,01; \text{Error} < 0,04. \text{ ¿Cuánto vale } n?$$

- a) El nivel de confianza es del 99 %. Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos} \\ \text{en la tabla} \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

Igualemos el error a 0.04 y hallamos el valor de n .

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,04 = 2,575 \cdot \frac{\sqrt{0,22 \cdot 0,78}}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot \sqrt{0,22 \cdot 0,78}}{0,04} = 26,67 \Rightarrow n = (26,67)^2 = 711,1$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 712 trabajadores.

- b) El tamaño de la muestra es $N = 1000$. La proporción es $p = \frac{250}{1000} = 0,25$.

El nivel de confianza es del 95 %. Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos} \\ \text{en la tabla} \\ \text{de } N(0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right) = \left(0,25 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,25 \cdot 0,75}}{\sqrt{1000}}, 0,25 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,25 \cdot 0,75}}{\sqrt{1000}} \right)$$

El intervalo de confianza es $(0,2232, 0,2768)$

EvAU 2019 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
 EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
 UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
 Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS
SOCIALES II

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga **NINGUNA** de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Obtégase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
- Determinése si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C , son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

- Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
- Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obtégase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

- Obtégase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.
- Determinése los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiense la concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0{,}6, P(B) = 0{,}8 \text{ y } P(A \cap \overline{B}) = 0{,}1.$$

- Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B .
- Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B .

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros².

- Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ , de las clases de Pilates.
- Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{cases}$$

- Determinénse los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Resuélvase el sistema para $m = 1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

- Determinénse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
- Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k .
- Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

- Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
- Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.

- En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
- Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
 b) Determinése si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C , son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

a) Calculamos la expresión de la matriz $A - 2B$.

$$A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A - 2B| = \begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2k - 4 - 24 - 1 = 2k - 29$$

$$|A - 2B| = 0 \Rightarrow 2k - 29 = 0 \Rightarrow k = \frac{29}{2}$$

b) C no es invertible, pues no es una matriz cuadrada.

Calculamos la matriz $C^t \cdot C$.

$$C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 2} \quad \rightarrow \quad 2 \times 2$

$$C^t \cdot C \text{ es cuadrada y su determinante vale } |C^t \cdot C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Al tener determinante no nulo la matriz $C^t \cdot C$ es invertible. Calculamos su inversa.

$$(C^t \cdot C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((C^t \cdot C)^t)}{|C^t \cdot C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

- Representétese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
- Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

a) Llamemos x = número de litros de helado e y = número de litros de horchata.

Las restricciones son:

- La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas en un máximo de 20 horas $\rightarrow x + 2y \leq 20$.
- Puede preparar hasta 15 litros de helado $\rightarrow x \leq 15$
- Tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata $\rightarrow x + y \geq 10$
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reuniendo todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a estas inecuaciones:

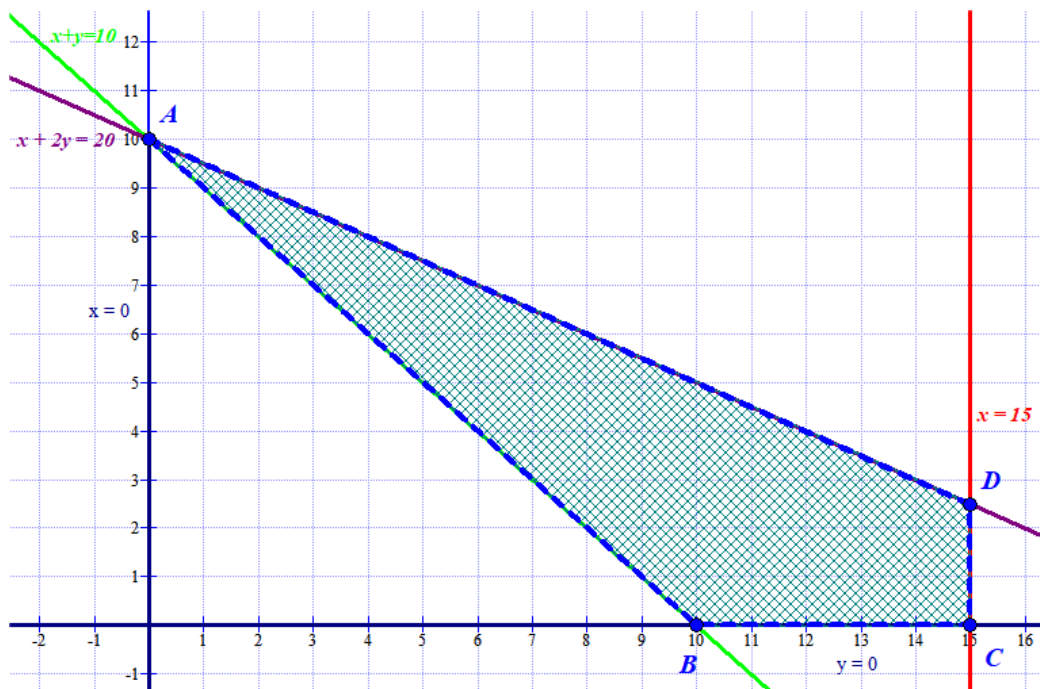


Tenemos que deducir cual es la región factible.

Probamos con el punto (12, 1) y vemos que cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 2 \leq 20 \\ 12 \leq 15 \\ 12 + 1 \geq 10 \\ 12 \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona sombreada de la imagen:



- b) La función beneficio es $B(x, y) = 25x + 12y$. Si deseamos maximizarla, debemos decidir cuál de los vértices de la región factible nos da mayor beneficio. Obtenemos las coordenadas del vértice D como el punto de corte de la recta $x = 15$ y la recta $x + 2y = 20$. Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 15 + 2y = 20 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} = 2,5$$

El punto D tiene coordenadas D(15, 2'5)

Los vértices de la región factible son: A(0, 10); B(10, 0); C(15, 0); D(15, 2'5).

Valoramos la función $B(x, y) = 25x + 12y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 0 + 120 = 120\text{€}$$

$$B(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 250 + 0 = 250\text{€}$$

$$C(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 375 + 0 = 375\text{€}$$

$$D(15, 2'5) \rightarrow B(15, 2'5) = 375 + 30 = 405\text{€ ; Máximo!}$$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(15, 2'5), que significa que se deben elaborar 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata para conseguir un beneficio máximo de 405 €.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

- a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.
 b) Determinéense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiense la concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$) de esta función.

- a) La función $f(x)$ es la integral de la derivada, es decir,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x^2 - 4x - 6 dx = 2 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

$$f(x) = 2 \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$$

Como además pasa por el punto $(0, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(x) = 2 \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$$

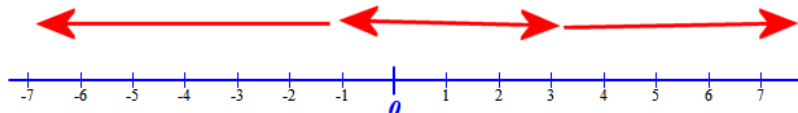
La función es $f(x) = 2 \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$

- b) Para determinar los puntos críticos derivamos (la sabemos) e igualamos a cero.

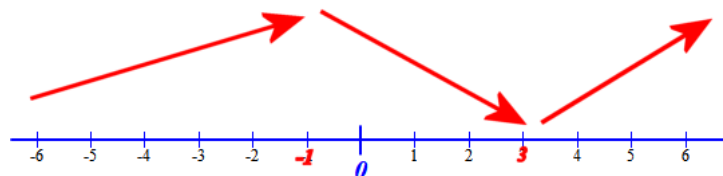
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada en las tres partes en que se divide la recta real.



- En $(-\infty, -1)$ probamos con -2 y la derivada vale $f'(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) - 6 = 10 > 0$. La función crece.
- En $(-1, 3)$ probamos con 0 y la derivada vale $f'(0) = 2(0)^2 - 4(0) - 6 = -6 < 0$. La función decrece.
- En $(3, +\infty)$ probamos con 5 y la derivada vale $f'(5) = 2(5)^2 - 4(5) - 6 = 24 > 0$. La función crece.



En $x = -1$ hay un máximo relativo. En $x = 3$ hay un mínimo relativo.

Para estudiar la concavidad o convexidad utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 \Rightarrow f''(x) = 4x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

En $x = 1$ hay un punto de inflexión como se aprecia en el esbozo de la gráfica superior.

Es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-\infty, 1)$ y convexa ($\cup$) en $(1, +\infty)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$$P(A) = 0'6, P(B) = 0'8 \text{ y } P(A \cap \bar{B}) = 0'1.$$

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\bar{B}$ son independientes. $\bar{B}$ denota el complementario del suceso B .

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B .

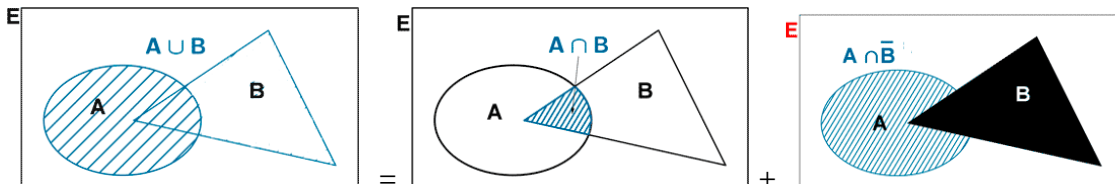
$$a) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0'1}{1-0'8} = \frac{0'1}{0'2} = 0'5.$$

Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap \bar{B}) = 0'1 \\ P(A)P(\bar{B}) = 0'6 \cdot (1-0'8) = 0'6 \cdot 0'2 = 0'12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0'1 \neq 0'12 = P(A)P(\bar{B})$$

No son iguales y por tanto no son independientes.

b)



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'8 - 0'5 = \boxed{0'9}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos una tabla de contingencia.

	B	$\bar{B}$	
A		0'1	0'6
$\bar{A}$			
	0'8		1

Completamos la tabla

	B	$\bar{B}$	
A	0'5	0'1	0'6
$\bar{A}$	0'3	0'1	0'4
	0'8	0'2	1

La probabilidad se obtiene sumando todas las casillas centrales, menos la celda donde coinciden la columna $\bar{B}$ y la fila $\bar{A}$.

$$P(A \cup B) = 0'5 + 0'3 + 0'1 = \boxed{0'9}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros².

- a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2% para estimar el precio medio mensual, μ , de las clases de Pilates.
- b) Détermínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Llamemos X = Precio mensual de las clases de Pilates. $X = N(\mu, 49)$

a) $\bar{x} = 34 \text{ €}; \quad n = 64$

Con un nivel de confianza del 99,2% obtenemos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,992 \rightarrow \alpha = 0,008 \rightarrow \alpha/2 = 0,004 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,996 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,65$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(34 - 2,65 \cdot \frac{34}{\sqrt{64}}, 34 + 2,65 \cdot \frac{34}{\sqrt{64}} \right)$$

El intervalo de confianza es (31'68, 36'32)

- b) Para un nivel de confianza del 95% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Como el error es 3 € aplicamos la fórmula del error para determinar n .

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{7}{3} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1,96 \cdot \frac{7}{3} \right)^2 = 20,91$$

El tamaño mínimo de la muestra es 21 individuos.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{cases}$$

- a) Determinénse los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.
- b) Resuélvase el sistema para $m = 1$.

- a) Si el sistema es compatible determinado la solución única es la trivial, por lo que debemos buscar el valor de m que hace que sea compatible indeterminado, es decir, cuando el rango de la matriz de coeficientes y la ampliada son iguales y a su vez menores que 3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m^2 - 1 - 1 - m + m + 1 = m^2 - 1$$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$$

- Si $m \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado y por tanto solo tiene la solución trivial.
- Si $m = 1$ el sistema queda

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ \hline 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \Rightarrow 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z} \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $m = -1$ el sistema queda

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ \hline 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \Rightarrow 0 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = x} \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema tiene soluciones diferentes a la solución trivial cuando $m = -1$ o $m = 1$.

- b) Resuelto en el apartado anterior. Las soluciones son: $x = t$; $y = 0$; $z = t$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

- a) Determinénse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
- b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 2x \cdot 8}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-16x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Veamos que ocurre antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-16(-2)}{(4+4)^2} = \frac{32}{16^2} > 0$. La

función crece.

- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-16(2)}{(4+4)^2} = \frac{-32}{8^2} = \frac{-1}{2} < 0$. La

función decrece.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.**Asíntotas verticales.** $x = a$

Si igualamos a cero el denominador

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} = \text{No existe}, \text{ No hay asíntotas verticales.}$$

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2 + 4} = \frac{8}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^2 + 4} = \frac{8}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

- b) La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$\text{Como } f'(2) = \frac{-16(2)}{(4+4)^2} = \frac{-32}{8^2} = \frac{-1}{2}; f(2) = \frac{8}{2^2 + 4} = \frac{8}{8} = 1$$

La recta tangente queda:

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2}x + 2}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k .
 b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

- a) La primera función es exponencial que es continua. La segunda es polinómica, también es continua. La tercera es una fracción cuyo denominador se anula en $x = 3$ que no está en su dominio de definición. La función es continua si lo es en $x = 0$ y en $x = 3$.

En $x = 0$ para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(0) = e^0 + k = 1 + k$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x + k = 1 + k$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x^2 = 1 - 0 = 1$
- Los tres valores son iguales. $1 + k = 1 \Rightarrow k = 0$

Para $k = 0$ la función es continua en $x = 0$.

En $x = 3$ para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(3) = 1 - 3^2 = -8$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 - x^2 = 1 - 9 = -8$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0} = +\infty$

No se cumple la tercera condición, por lo que no es continua en $x = 3$.

Conclusión: Para $k = 0$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Para $k \neq 0$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.

- b) Para $k = 0$ la función queda

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Busquemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas en el intervalo $(-1, 1)$.

$$\text{En } (-1, 0) \rightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = e^x \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$\text{En } (0, 1) \rightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estos puntos no pertenecen a nuestro intervalo $(-1, 1)$.

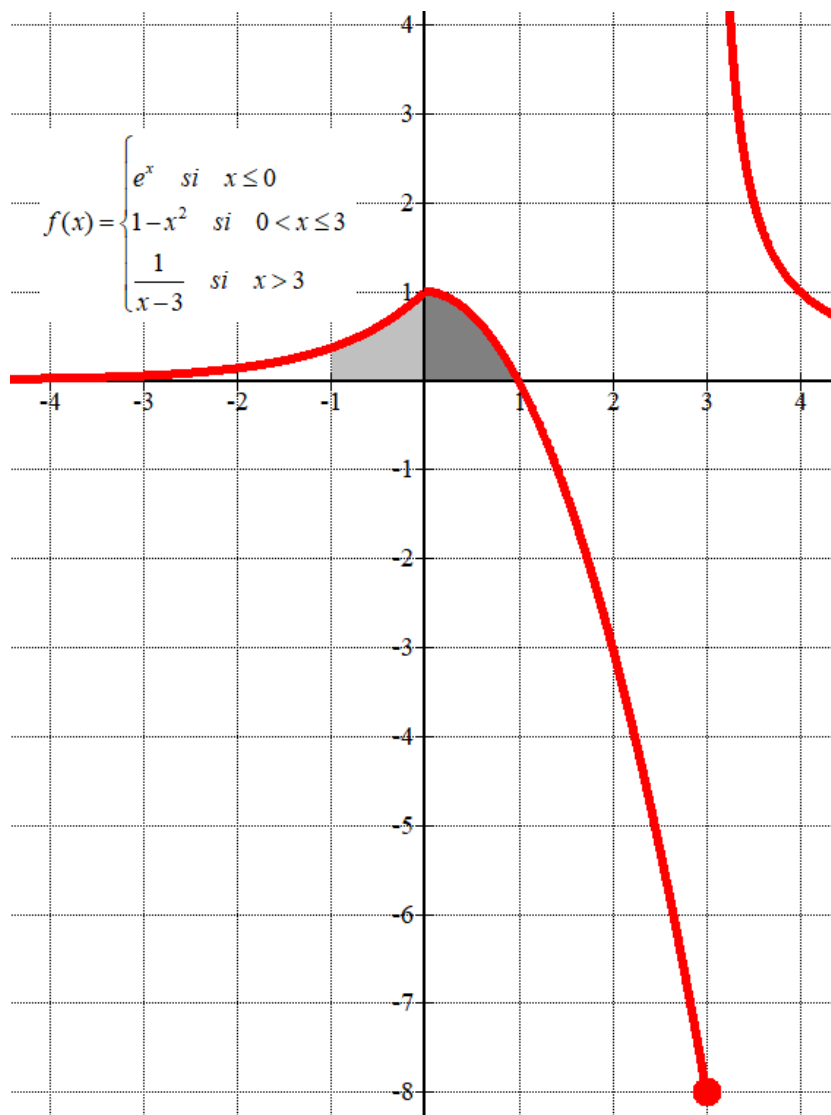
Como no hay puntos de corte el área de este recinto solo es una integral definida de la función desde -1 a 1 . Aunque debemos separarlo en dos integrales al cambiar de definición.

$$\int_{-1}^0 e^x dx = \left[e^x \right]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\int_0^1 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[0 - \frac{0^3}{3} \right] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

El área es la suma del valor de las integrales calculadas.

$$\text{Área} = 1 - \frac{1}{e} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3} - \frac{1}{e} = 1,3 u^2}$$

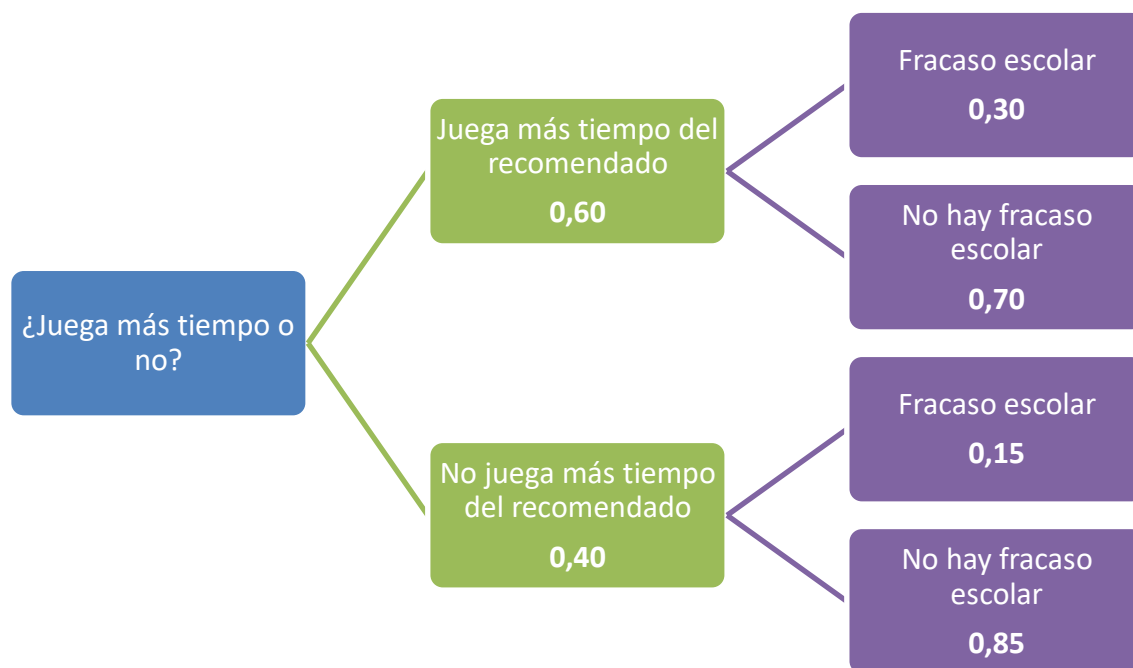


Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

- Obtégase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
- Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar el experimento aleatorio.



- Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Fracaso escolar}) &= \\
 &= P(\text{Juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar} / \text{Juega más tiempo}) + \\
 &+ P(\text{No juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar} / \text{No juega más tiempo}) = \\
 &= 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,18 + 0,06 = \boxed{0,24}
 \end{aligned}$$

- Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No juega más tiempo del recomendado} / \text{Fracaso escolar}) &= \\
 &= \frac{P(\text{No juega más tiempo del recomendado} \cap \text{Fracaso escolar})}{P(\text{Fracaso escolar})} = \\
 &= \frac{P(\text{No juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar} / \text{No juega más tiempo})}{0,24} = \\
 &= \frac{0,4 \cdot 0,15}{0,24} = \frac{0,06}{0,24} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1,5$ kilogramos.

- a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
- b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

X = Peso en kilos de la mochila escolar de un niño de 5º y 6º de primaria. $X = N(\mu, 1,5)$

- a) Para un nivel de confianza del 95 % determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El intervalo de confianza tiene una amplitud igual al doble del error, siendo el error

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Igualemos el error a 0.49.

$$\left. \begin{aligned} \text{Amplitud} &= 0,49 \\ \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{n}} = \frac{2,94}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0,49 = 2 \cdot \frac{2,94}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5,88}{0,49} = 12 \Rightarrow n = 12^2 = 144$$

La muestra debe ser de más de 144 mochilas.

- b) Si $X = N(\mu, \sigma)$ la distribución de la media es una normal con la misma media y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. $\bar{X}_{225} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

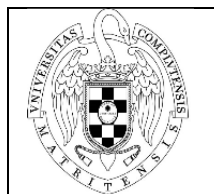
En nuestro caso la media sigue una normal $\bar{X}_{225} = N\left(6, \frac{1,5}{\sqrt{225}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{225} = N(6, 0,1)$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(\bar{X}_{225} \geq 5,75)$.

$$P(\bar{X}_{225} \geq 5,75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\bar{X}_{225} - 6}{0,1} \geq \frac{5,75 - 6}{0,1}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$= P(Z \leq 2,5) = \{\text{Buscamos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \boxed{0,9938}$$

EvAU 2018 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2017-2018
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS
SOCIALES II

uc3m
Universidad
Carlos III
de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz $\left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11}$.

b) Determinénse el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$.

Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X .

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M .

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 4; x + 2y \leq 12; x \leq 4; -x + 2y \leq 12\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlese las coordenadas de sus vértices.

b) Determinénse los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de f en dichos puntos.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{1 - 4x^2}$.

a) Determinénse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) Estúdiense las asíntotas de f .

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) Si el 65% de los participantes son hombres y el 35% mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24\,000$ km.

- a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95% para μ sea a lo sumo de 23 550 km.
- b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150\,000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\bar{X}$, esté entre 144 240 km y 153 840 km.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= a \\ 2x + ay - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a .
- b) Resuélvase para $a = 4$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función

$$f(x) = x^3 - 12x, \text{ donde } x \text{ representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.}$$

- a) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?
- b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{3+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- a) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiense su continuidad.

b) Calcúlese $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.8$. Calcúlese:

- a) $P(\bar{A} \cap B)$.
- b) $P(\overline{A \cup B} / A)$

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S .

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P , que estarían dispuestos a comprarlo.

- a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).
- b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90% para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz $\left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11}$.

b) Determinénse el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

a)

$$\begin{aligned}
 AA^t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{11} = \\
 &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11}
 \end{aligned}$$

Calculemos la matriz al cuadrado, al cubo, a la cuarta y busquemos una regla que nos permita deducir la expresión de la matriz elevada a 11.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Solo cambia el signo del único valor no nulo, siendo positivo en potencias pares y negativo en potencias impares.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión inicial quedaría:

$$\left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La matriz A es de dimensión 3×2 y A^t es de dimensión 2×3 .

B es de dimensión 3×1 , luego B^t es de dimensión 1×3 .

Aplicamos todo esto a la igualdad planteada y busquemos la dimensión $m \times n$ de la matriz X:

$$X \cdot A^t = B^t$$

$$\xrightarrow{m \times \boxed{n=2} \times 3 = 1 \times 3}$$

Para poder hacer el producto debe ser $n = 2$ y el resultado del producto debe ser 1×3 luego $m = 1$. La matriz X es de dimensión $1 \times 2 \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

Para que A^t tenga inversa debe ser cuadrada y como $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 2×3 no es cuadrada y no puede ser invertible.

Resolvemos la igualdad planteada.

$$X \cdot A^t = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

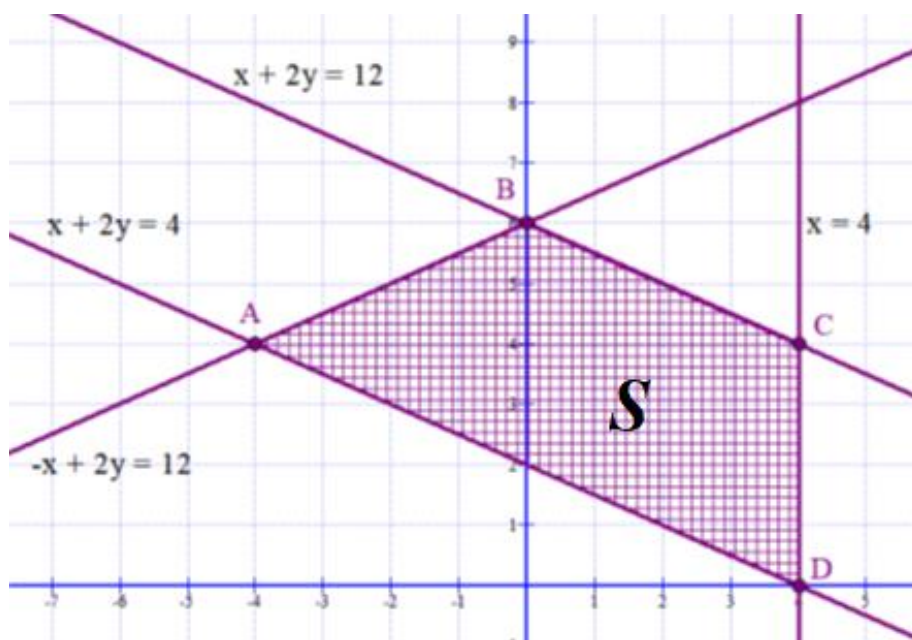
Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 4; x + 2y \leq 12; x \leq 4; -x + 2y \leq 12\}$$

- a) Representérese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
 b) Determinéense los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de f en dichos puntos.

- a) Para representar la región dibujamos primero las rectas asociadas a cada restricción y determinamos las coordenadas de los puntos donde se cortan.

$x + 2y = 4$	$x + 2y = 12$	$-x + 2y = 12$
x	x	x
$y = \frac{4-x}{2}$	$y = \frac{12-x}{2}$	$y = \frac{x+12}{2}$
0	0	0
4	4	-12
-4	12	-4
2	6	6
0	4	0
4	0	4



Comprobamos que la región del dibujo marcada es la región S viendo si el punto $P(0, 4)$ perteneciente a la zona sombreada cumple todas las inecuaciones.

$$P(0, 4) \rightarrow 0 + 2 \cdot 4 \geq 4; 0 + 2 \cdot 4 \leq 12; 0 \leq 4; -0 + 2 \cdot 4 \leq 12$$

Todas las desigualdades son ciertas y la región S es la zona marcada en el dibujo. Averiguamos las coordenadas de los vértices de esta región.

La recta $x + 2y = 4$ y $-x + 2y = 12$ se cortan en el vértice A .

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ -x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4 - 2y \\ -x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 + 2y + 2y = 12 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 4 - 8 = -4$$

El vértice A tiene coordenadas $A(-4, 4)$.

La recta $x + 2y = 12$ y $-x + 2y = 12$ se cortan en B .

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 12 \\ -x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 12 - 2y \\ -x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 + 2y + 2y = 12 \Rightarrow 4y = 24 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 12 - 12 = 0$$

El vértice B tiene coordenadas $B(0,6)$.

La recta $x + 2y = 12$ y la recta vertical $x = 4$ se cortan en C.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 12 \\ x = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2y = 12 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

El vértice C tiene coordenadas $C(4,4)$.

La recta $x + 2y = 4$ y la recta vertical $x = 4$ se cortan en D.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ x = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

El vértice D tiene coordenadas $D(4,0)$.

Los vértices de la región factible tienen coordenadas: $A(-4, 4)$, $B(0, 6)$, $C(4, 4)$ y $D(4, 0)$.

- b) Valoremos la función $f(x, y) = 3x - y$ en cada uno de los vértices de la región S en busca de los valores máximo y mínimo de la función.

$$A(-4, 4) \rightarrow f(-4, 4) = -12 - 4 = -16 ; \text{Mínimo!}$$

$$B(0, 6) \rightarrow f(0, 6) = 0 - 6 = -6$$

$$C(4, 4) \rightarrow f(4, 4) = 12 - 4 = 8$$

$$D(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = 12 - 0 = 12 ; \text{Máximo!}$$

El valor máximo se alcanza en $D(4,0)$ siendo este valor máximo 12.

El valor mínimo se alcanza en $A(-4,4)$ siendo este valor mínimo -16.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$.

- a) Determinéense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
 b) Estúdiense las asíntotas de f .

a) Derivamos la función e igualamos la derivada a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x}{1-4x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-4x^2 - (-8x \cdot x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{1-4x^2+8x^2}{(1-4x^2)^2} = \frac{1+4x^2}{(1-4x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1+4x^2}{(1-4x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1+4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-1}{4}} = \text{No existe}$$

La función no tiene ningún punto crítico.

Determinamos el dominio de la función: $1-4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$

El dominio es $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

Veamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{1+4}{(1-4)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece.
- En $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1}{(1)^2} = 1 > 0$. La función crece.
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1+4}{(1-4)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece.

La función es creciente en todo su dominio.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x}{1-4x^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-1} = \frac{-0,5}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{1-4x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-1} = \frac{0,5}{0} = \infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Hay asíntota horizontal, luego no hay oblicua.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

- a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.
 b) Si el 65% de los participantes son hombres y el 35% mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

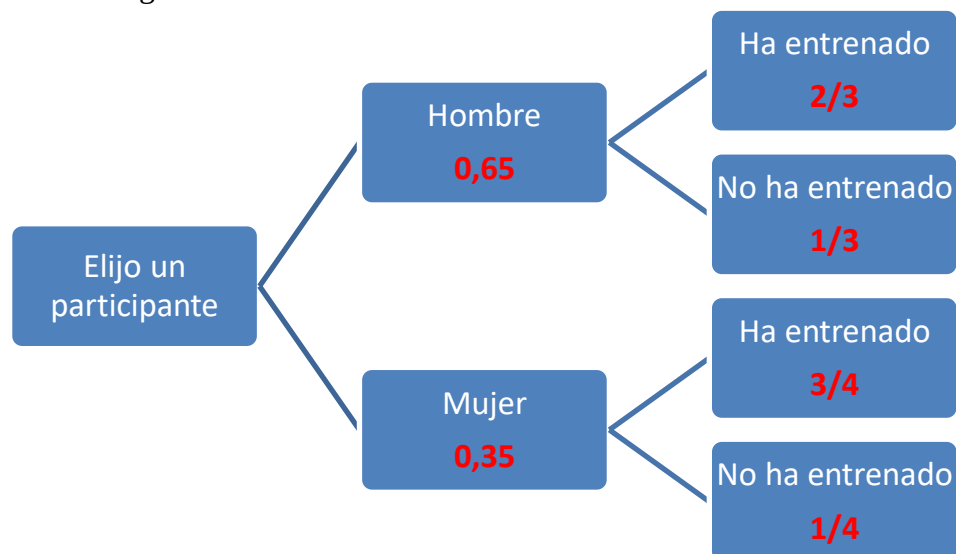
- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Alguno de ellos haya entrenado}) &= P(\text{Hombre y mujer hayan entrenado}) + \\
 &+ P(\text{Hombre haya entrenado y mujer no haya entrenado}) + \\
 &+ P(\text{Hombre no haya entrenado y mujer si haya entrenado}) = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}
 \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\begin{aligned}
 P(\text{Alguno de ellos haya entrenado}) &= 1 - P(\text{Ninguno haya entrenado}) = \\
 &= 1 - P(\text{Hombre no haya entrenado}) P(\text{Mujer no haya entrenado}) = \\
 &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{12} = \boxed{\frac{11}{12}}
 \end{aligned}$$

- b) Construimos un diagrama de árbol.



Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea hombre} / \text{Ha entrenado}) &= \frac{P(\text{Sea hombre y Haya entrenado})}{P(\text{Haya entrenado})} = \\
 &= \frac{0,65 \cdot \frac{2}{3}}{0,65 \cdot \frac{2}{3} + 0,35 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1,3}{3}}{\frac{1,3}{3} + \frac{1,05}{4}} = \frac{\frac{1,3}{3}}{\frac{5,2 + 3,15}{12}} = \frac{12 \cdot 1,30}{3 \cdot 8,35} = \frac{520}{835} = \frac{104}{167} = \boxed{0,623}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24\,000$ km.

- a) Determinése el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95% para μ sea a lo sumo de 23 550 km.
 b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150\,000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\bar{X}$, esté entre 144 240 km y 153 840 km.

- a) X = Distancia anual en km recorrida por una furgoneta de reparto. $X = N(\mu, 24000)$

Si el nivel de confianza es 95% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Como el intervalo de confianza es $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$, el error es la mitad de la amplitud del intervalo. Si deseo que la amplitud sea más pequeña de 23550, el error debe ser menor de la mitad 11775 km.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{24000}{\sqrt{n}} = 11775 \\ \sqrt{n} &= \frac{1,96 \cdot 24000}{11775} \Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 24000}{11775} \right)^2 = 15,96 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 16 furgonetas.

- b) Si X = Distancia anual en km recorrida por una furgoneta de reparto. $X = N(150000, 24000)$

Entonces la distribución de las medias es una normal con la misma media μ y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\bar{X}_{25} = N\left(150000, \frac{24000}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{25} = N(150000, 4800)$$

Calculemos la probabilidad $P(144240 < \bar{X}_{25} < 153840)$ pedida.

$$\begin{aligned} P(144240 < \bar{X}_{25} < 153840) &= \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(\frac{144240 - 150000}{4800} < \frac{\bar{X}_{25} - 150000}{4800} < \frac{153840 - 150000}{4800}\right) = \\ &= P(-1,2 < Z < 0,8) = P(Z < 0,8) - P(Z < -1,2) = P(Z < 0,8) - P(Z > 1,2) = \\ &= P(Z < 0,8) - (1 - P(Z < 1,2)) = 0,7881 - (1 - 0,8849) = \boxed{0,673} \end{aligned}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= a \\ 2x + ay - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a .
b) Resuélvase para $a = 4$.

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -5a - 18 - 6 - (a - 30 + 18) = -6a - 12.$$

Si igualamos a cero $\rightarrow |A| = 0 \Rightarrow -6a - 12 = 0 \Rightarrow 6a = -12 \Rightarrow a = \frac{-12}{6} = -2$

Distinguimos dos casos: $a = -2$ y $a \neq -2$ que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

El sistema tiene solución única. Es compatible determinado.

CASO 2. $a = -2$

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= -2 \\ 2x - 2y - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

Estudiamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

No es 3 ya que su determinante es cero. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2$$

Estudiamos el rango de la matriz $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

¿El rango es 3?

Tomemos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -6 & 8 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -72 - 24 - 20 - (-36 - 8 - 120) = -116 + 164 = 48 \neq 0$$

El rango de A/B es 3

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B $\rightarrow$ El sistema no tiene solución. Es incompatible.

b) Para a = 4 el sistema tiene solución única, pues estamos en el caso 1.

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 4 \\ 2x + 4y - 6z = 8 \\ x - 3y - 5z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 4 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = 4 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos aplicando el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 - 3 - 2 + 15 - 9 = -18$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-40 - 36 - 12 - 8 + 60 - 36}{-18} = \frac{-72}{-18} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-36} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-36} = 0$$

La solución es $x = 4$; $y = 0$; $z = 0$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

- a) Determinése, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?
- b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

- a) Derivamos la función e igualamos a cero la derivada en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Sustituimos en la derivada segunda.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow f''(-2) = -12 < 0 \rightarrow \text{Máximo local} \\ x = 2 \Rightarrow f''(2) = 12 > 0 \rightarrow \text{Mínimo local} \end{cases}$$

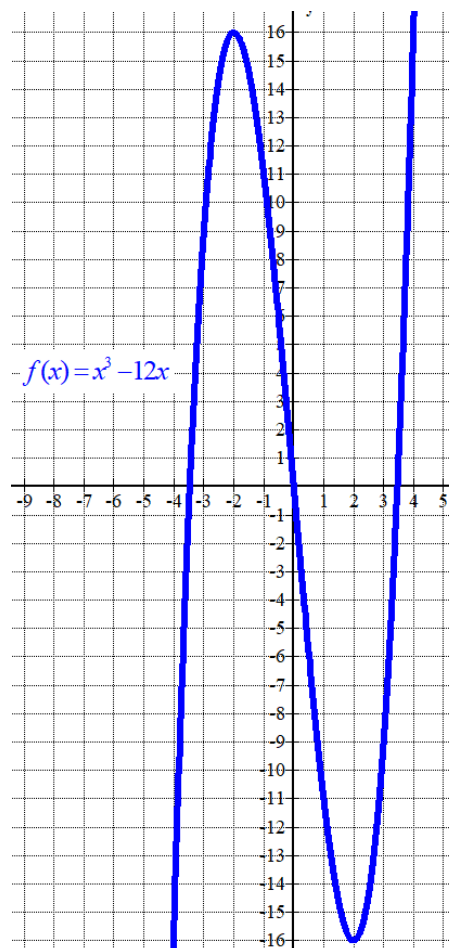
El máximo se alcanza en el valor del índice $x = -2$.

El beneficio para ese índice es $f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$.

El beneficio máximo es de 16 millones de euros.

- b) En $x = 4$ la derivada es $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 = 48 - 12 = 36 > 0$. La función crece en $x = 4$.

Al aumentar el índice (x) la función del beneficio crece (aumentará).



Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{3+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

a) Determinénse el dominio de $f(x)$ y estúdiense su continuidad.

b) Calcúlese $\int_{-1}^0 f(x)dx$.

- a) En $(-\infty, 0)$ la función es $f(x) = x^3 + 2e^x$ que tiene como dominio $(-\infty, 0)$ y no presenta ningún problema de continuidad al ser una función polinómica sumada con una exponencial. En $(0, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{2}{3+x}$ que en $x = -3$ no existe, pero no pertenece al intervalo considerado y no presenta ningún problema de continuidad. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Estudiemos la continuidad en $x = 0$.

- $f(0) = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + 2e^x = 0 + 2e^0 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3}$
- $f(0) = \frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$. ¡No son iguales!

La función no es continua en $x = 0$.

Es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $f(x) = x^3 + 2e^x$.

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^3 + 2e^x dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2e^x \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^4}{4} + 2e^0 \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + 2e^{-1} \right] = 2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{e} = \boxed{\frac{7}{4} - \frac{2}{e}}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap B)$.

b) $P(\overline{A \cup B} / A)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.4 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

Entonces:

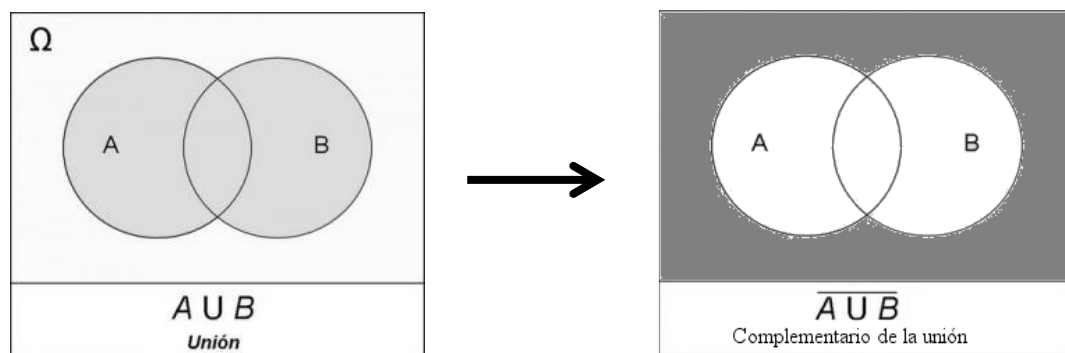
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$0.6 = 0.2 + P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

b)

$$P(\overline{A \cup B} / A) = \frac{P(\overline{A \cup B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{0.4} = \frac{0}{0.4} = 0$$



Se aprecia en el dibujo que no hay nada en común entre $\overline{A \cup B}$ y $A \rightarrow \overline{A \cup B} \cap A = \emptyset$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P , que estarían dispuestos a comprarlo.

- a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).
- b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90% para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

- a) Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

El intervalo de confianza es $(p - \text{Error}, p + \text{Error})$

El error debe ser menor de 0,03.

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,03 \Rightarrow \sqrt{\frac{0,25}{n}} = \frac{0,03}{1,96} \Rightarrow \frac{0,25}{n} = \left(\frac{0,03}{1,96}\right)^2$$

$$\frac{0,25}{n} = 0,000234 \Rightarrow n = \frac{0,25}{0,000234} = 1067,11$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1068 productos.

- b) El tamaño de la muestra es $n = 450$ y la proporción es $p = \frac{90}{450} = 0,2$

Para un nivel de confianza del 90% calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$$

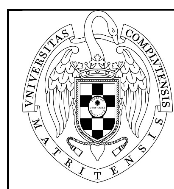
Utilizamos la fórmula del error.

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{450}} = 1,645 \sqrt{\frac{0,16}{450}} = 0,031$$

El intervalo de confianza es

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0,2 - 0,031, 0,2 + 0,031) = (0,169, 0,231)$$

EvAU 2018 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso 2017-2018
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
II

uc3m
Universidad
Carlos III
de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$.

- Compruébese que B es la matriz inversa de A.
- Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, 2x + y \leq 80, x \geq 0, y \geq 0.$$

- Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Obtégase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
- Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

- Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
- Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0.5$ gramos.

- Determinése el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0.25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.
- Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\bar{X}$, pese más de 12.25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a - 1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{array} \right\}$$

- Discútase en función de los valores del parámetro a .
- Resuélvase para $a = 3$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

- Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- Determinése sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

- Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.
- Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

- Una persona que trabaja.
- Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

- Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99.5 descargas. Determinése un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\bar{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.
 b) Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

a) Hagamos el producto de las matrices y comprobemos si se obtiene la matriz identidad.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -3+3 \\ 24-24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 3-3 \\ -24+24 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Queda demostrado que la matriz B es la inversa de A.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Obtenemos la inversa de la matriz A y comprobamos que es igual a la matriz B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$$

Al ser el determinante no nulo existe la inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = B$$

Queda demostrado que $A^{-1} = B$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = B \cdot B$$

Sustituimos el valor de la matriz B y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -3-3 \\ -24-24 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

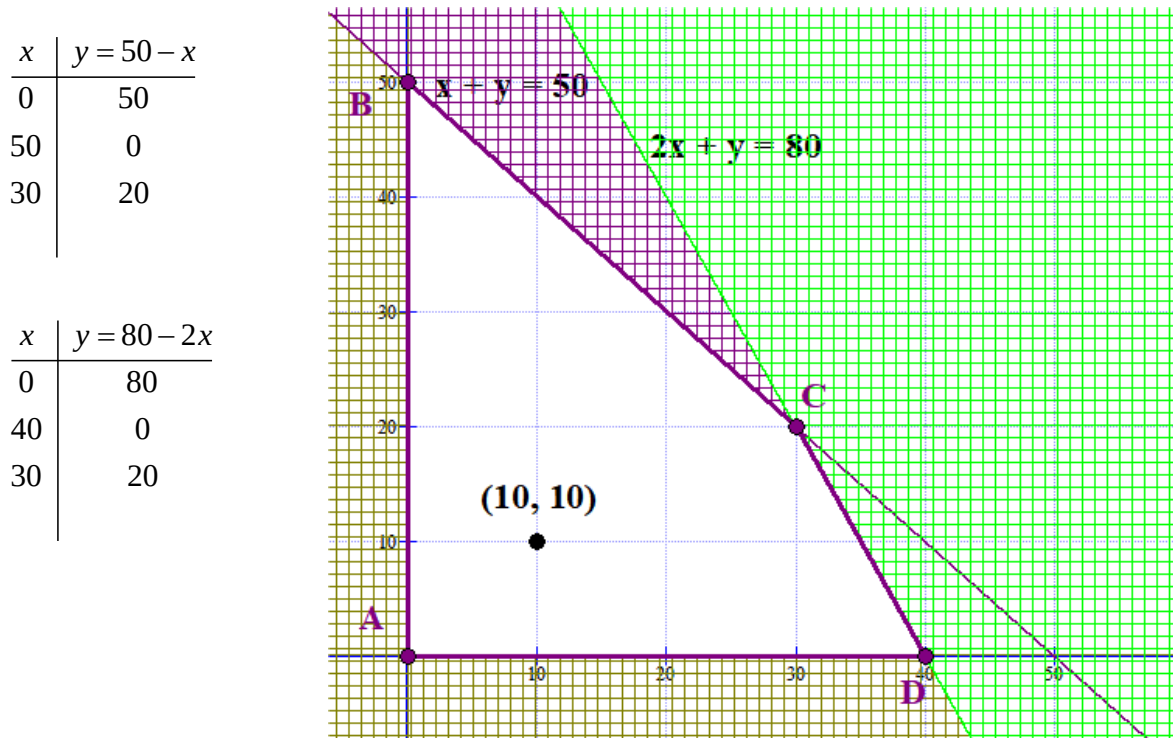
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, 2x + y \leq 80, x \geq 0, y \geq 0.$$

- a) Representése la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
 b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

- a) Para representar la región dibujamos las rectas asociadas y decidimos donde está situada la región S valorando puntos de las regiones en que se divide el plano.



La región es la zona blanca, ya que el punto $(10, 10)$ cumple todas las condiciones.

$$10 + 10 \leq 50, 20 + 10 \leq 80, 10 \geq 0, 10 \geq 0$$

Las coordenadas de los vértices son los puntos de corte de las rectas.

- A es $(0, 0)$.
- B es $(0, 50)$
- C lo averiguamos resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 50 \\ 2x + y = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 50 - x \\ 2x + y = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 50 - x = 80 \Rightarrow \boxed{x = 30} \Rightarrow \boxed{y = 50 - 30 = 20}$$

C es $(30, 20)$

- D es $(40, 0)$

- b) Este valor máximo se encuentra en uno de los vértices. Valoramos la función en cada uno de ellos para decidir el valor máximo de la función y donde se produce.

- $A = (0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$
- $B = (0, 50) \rightarrow f(0, 50) = 0 + 200 = 200$
- $C = (30, 20) \rightarrow f(30, 20) = 150 + 80 = 230$ ¡Máximo!
- $D = (40, 0) \rightarrow f(40, 0) = 200 + 0 = 200$

La función $f(x, y) = 5x + 4y$ alcanza su valor máximo 230 en el punto $C(30, 20)$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2 - 2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.
 b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

- a) Para que sea continua en $x = 2$ debe de existir la función y que los límites laterales sean iguales al valor de la función en ese punto.

- Existe $f(2)$ y vale $f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 2x}{x+2} = \frac{12-4}{4} = 2$
- No son iguales, pues $f(2)=4 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. El valor de la función es igual que el límite lateral izquierdo, pero distinto del límite lateral derecho.

La función no es continua en $x = 2$.

- b) Para $x < 2$ la función es $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ y su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

- a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.
b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener las probabilidades de los distintos sucesos.

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	65		75
No billete			
	80		100

Completamos la tabla para que las sumas horizontales y verticales sean correctas.

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	65	10	75
No billete	15	10	25
	80	20	100

Con estos datos podemos responder con facilidad a las preguntas planteadas.

- a) Aplicamos la regla de Laplace. Hay 100 casos posibles y sumando los casos favorables tenemos:

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	65	10	75
No billete	15	10	25
	80	20	100

$$P(\text{Busca billete o reserva}) = \frac{65 + 10 + 15}{100} = \frac{90}{100} = \boxed{0,9}$$

- b) Aplicamos la regla de Laplace. Hay 80 casos de reserva de hotel y de ellos hay 65 que también buscan billete.

	Reserva de hotel	No reserva	
Billete de transporte	65	10	75
No billete	15	10	25
	80	20	100

$$P(\text{Busca billete} / \text{Busca reserva}) = \frac{65}{80} = \boxed{0,8125}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0,5$ gramos.

a) Determinése el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de $0,25$ gramos con un nivel de confianza del 95% .

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\bar{X}$, pese más de $12,25$ gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

a) X = Peso en gramos de un sobre de azúcar. $X = N(\mu, 0,5)$

Si el nivel de confianza es 95% calculemos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Igualemos el error a $0,25$ y obtenemos n .

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 0,5}{0,25} \Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,25} \right)^2 = 15,36$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido $\rightarrow 16$ sobres.

b) Si X = Peso en gramos de un sobre de azúcar. $X = N(\mu, 0,5)$

Entonces la distribución de las medias es una normal con la misma media y con desviación

típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\bar{X}_{25} = N\left(12, \frac{0,5}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{25} = N(12, 0,1)$$

Calculemos la probabilidad pedida $P(\bar{X}_{25} > 12,25)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_{25} > 12,25) &= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\bar{X}_{25} - 12}{0,1} > \frac{12,25 - 12}{0,1}\right) = \\ &= P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = \boxed{0,0062} \end{aligned}$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a+1 \end{aligned} \right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 3$.

a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y averiguamos cuando se anula.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a + a - (1 + a^2 + a - 1)$$

$$|A| = 1 + \cancel{a^2} - \cancel{a} + \cancel{a} - \cancel{1} - \cancel{a^2} - a + \cancel{1} = 1 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

Distinguiremos dos casos distintos: $a \neq 1$ y $a = 1$.

CASO 1. $a \neq 1$.

En este caso el rango de la matriz A de coeficientes es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema tiene **solución única**. Es Compatible Determinado.

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el sistema queda:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\} \text{Tenemos la ecuación primera y la tercera que son iguales en el primer}$$

miembro de la igualdad, pero el segundo es un número distinto en cada caso. Este sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE VERLO.

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La columna 1ª y 2ª son iguales, por lo que

consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - (0 + 2 + 1) = -1 \neq 0$$

El rango de la matriz A/B es $3 \neq 2 = \text{rango de } A$. El sistema es **incompatible**.

b) Si $a = 3$ el sistema tiene solución única.

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right\}$$

Hallamos la solución por el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1+6+3} - \cancel{1-9-2} = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+24+3-4-9-2}{-2} = \frac{13}{-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3+2+12-3-3-8}{-2} = \frac{3}{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4+9+3-1-36-3}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12$$

La solución es $x = -\frac{13}{2}$; $y = -\frac{3}{2}$; $z = 12$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

- a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
 b) Determinéense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ son todos los números reales salvo los que anulan el denominador. Quitamos $x = -1$ del dominio. $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

- **Asíntota vertical.** $x = a$

Es $x = -1$ ya que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0} = \infty$

- **Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2} \right) = -2$$

La asíntota oblicua es $y = x - 2$

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = -1$, no tiene asíntota horizontal y la asíntota oblicua es la recta $y = x - 2$.

- b) Utilizamos la derivada para este estudio.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4} = \frac{\cancel{(x+1)}(3x^2(x+1) - 2x^3)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

Para obtener los puntos críticos igualamos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

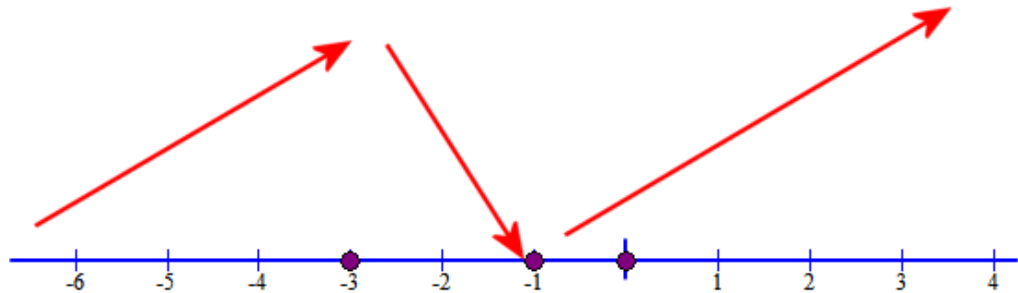
Añadimos también el valor de $x = -1$ que hemos quitado del dominio.

Consideramos como puntos de posible cambio: $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$.

Veamos cómo evoluciona la función antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -3)$ tomo $x = -5$ la derivada vale $f'(-5) = \frac{(-5)^3 + 3(-5)^2}{(-5+1)^3} = \frac{-50}{-64} > 0$. La función crece.
- En $(-3, -1)$ tomo $x = -2$ la derivada vale $f'(-2) = \frac{(-2)^3 + 3(-2)^2}{(-2+1)^3} = -4 < 0$. La función decrece.
- En $(-1, 0)$ tomo $x = -0,5$ la derivada vale $f'(-0,5) = \frac{(-0,5)^3 + 3(-0,5)^2}{(-0,5+1)^3} = 5 > 0$. La función crece.
- En $(0, +\infty)$ tomo $x = 1$ la derivada vale $f'(1) = \frac{1^3 + 3}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y decrece en $(-3, -1)$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

- a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.
 b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Veamos si la función corta al eje OX ($y = 0$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} = \frac{5+1}{4} = 1,5 \\ = \frac{5-1}{4} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función corta el eje OX en los puntos $x = 0$; $x = 1$ y $x = 1,5$

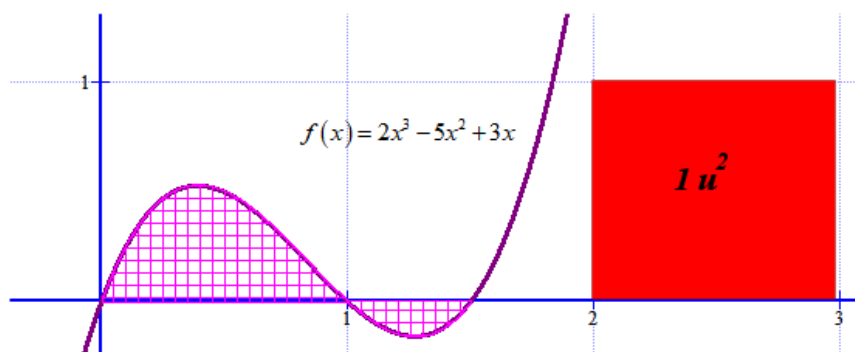
El recinto delimitado por la función y el eje se divide en dos partes, calculamos el área de cada trozo y el área total será la suma de las dos.

$$\left| \int_0^1 2x^3 - 5x^2 + 3x dx \right| + \left| \int_1^{1,5} 2x^3 - 5x^2 + 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{2} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_1^{1,5} \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{1^4}{2} - 5\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 5\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] \right| + \left| \left[\frac{1,5^4}{2} - 5\frac{1,5^3}{3} + 3\frac{1,5^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{2} - 5\frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right| + \left| 0,28125 - \frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{1}{3} \right| + |-0,05| = \boxed{0,38 u^2}$$

No nos pide dibujar la función, pero lo hacemos para comprobar que el área es tan pequeña como hemos obtenido.



- b) La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$ en $x = 0$ tiene la ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

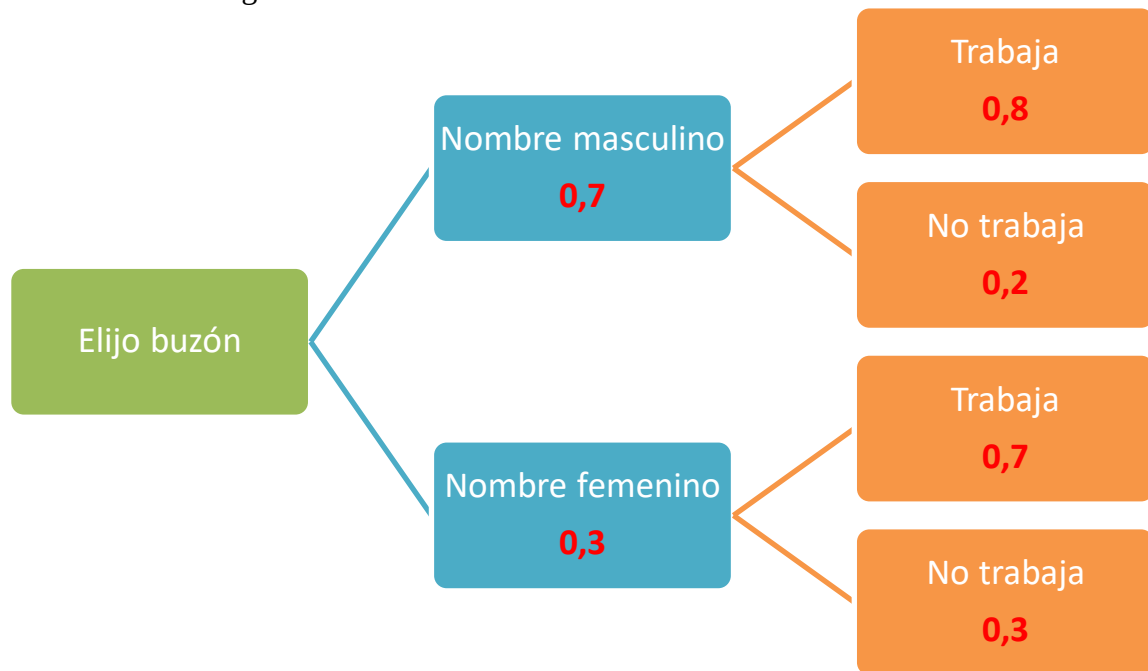
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \\ f(0) = 0 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 3(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 3x}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0,8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

- Una persona que trabaja.
- Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Trabaja}) &= P(\text{Es hombre y trabaja}) + P(\text{Es mujer y trabaja}) = \\
 &= P(\text{Es hombre})P(\text{Trabaja} / \text{Es hombre}) + P(\text{Es mujer})P(\text{Trabaja} / \text{Es mujer}) = \\
 &= 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,56 + 0,21 = \boxed{0,77}
 \end{aligned}$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Hombre} / \text{Trabaja}) = \frac{P(\text{Hombre y Trabaja})}{P(\text{Trabaja})} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,77} = \frac{0,56}{0,77} = \frac{8}{11} = \boxed{0,727}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99'5 descargas. Determinéase un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\bar{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

X = Número de descargas por hora. $X = N(\mu, 20)$

- a) Se toma $n = 40$, $\bar{x} = 99,5$.

Para un nivel de confianza del 95 % determinamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Buscando en la tabla de la normal el valor 0,975 encontramos $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Con todos estos datos, aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{40}} = 6,198$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (99,5 - 6,198, 99,5 + 6,198) = (93,302, 105,698)$$

- b) X = Número de descargas por hora. $X = N(100, 20)$.

La distribución de medias es una normal con la misma media y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

El tamaño de la muestra es $n = 10$.

$$\bar{X}_{10} = N\left(100, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{10} = N(100, 6,32)$$

Calculamos la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned} P(100 < \bar{X}_{10} < 110) &= P\left(\frac{100-100}{6,32} < Z < \frac{110-100}{6,32}\right) = P(0 < Z < 1,58) = \\ &= P(Z < 1,58) - P(Z < 0) = \{\text{Busco en la tabla } N(0,1)\} = 0,9429 - 0,5 = \boxed{0,4429} \end{aligned}$$

EvAU 2017 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

 POLITÉCNICA	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2016-2017 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	 uc3m Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - az = 2 \\ y + az = -2 \end{cases}$$

- Discútase en función de los valores del parámetro a .
- Resuélvase para $a = 4$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4; \quad 3x - y \leq 10.$$

- Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}.$$

- Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.
- Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determinénse sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0'02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0'06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

- No salga defectuoso.
- Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

- La probabilidad de que la media muestral del tiempo, $\bar{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.
- El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo (24'24; 47'76) para μ .

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinése la matriz C^{40} .
- Calcúlese la matriz X que verifica

$$X \cdot A + 3B = C.$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}.$$

- Estúdiense sus asíntotas.
- Determinése los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax.$$

- Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$.
Determinése si se trata de un máximo o un mínimo local.
- Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0'4, y por ambos es 0'2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

- No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.
- No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0'6$ cm.

- Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\bar{x} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98% para μ .
- ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0'1 cm, con un nivel de confianza del 98%?

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - az = 2 \\ y + az = -2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .b) Resuélvase para $a = 4$.

a) La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad y \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array} \right)$$

El determinante de la matriz A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - (4a - a) = 2 - 3a$$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq \frac{2}{3}$

El determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene rango 3, al igual que la matriz A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Es compatible determinado.

CASO 2. $a = \frac{2}{3}$ El determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

El rango de A es 2, ya que el menor que resulta de eliminar la fila 1ª y la columna 3ª tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -2 \end{array} \right)$.

Veamos si tiene rango 3, para ello tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 2 = 10 \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

El rango de A y el de A/B son distintos, por lo que el sistema no tiene solución. Es incompatible.

b) Para $a = 4$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).

El sistema queda:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - 4z = 2 \\ y + 4z = -2 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - 4z = 2 \\ y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -2x & -4z & 2 \\ \hline 2x & -4y & -2z & -4 \\ -4y & -6z & -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -4y - 6z = -2 \\ y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a + 4 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ -4y & -6z & = & -2 \\ 4y & +16z & = & -8 \\ \hline & 10z & = & -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -4y - 6z = -2 \\ 10z = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -4y - 6z = -2 \\ \boxed{z = \frac{-10}{10} = -1} \end{cases} \Rightarrow -4y + 6 = -2 \rightarrow -4y = -8 \rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 \cdot 2 - (-1) = -2 \Rightarrow x - 4 + 1 = -2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución es $x = 1$; $y = 2$ y $z = -1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4; \quad 3x - y \leq 10.$$

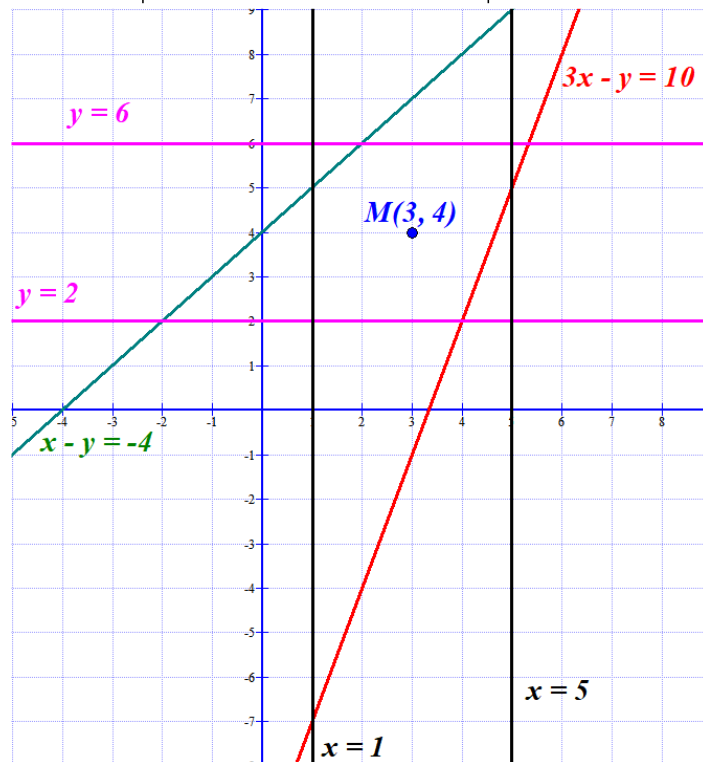
- a) Representétese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
 b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

- a) Para dibujar la región S, dibujamos las rectas asociadas al conjunto de restricciones. Las primeras restricciones están delimitadas por dos rectas verticales ($x = 1$; $x = 5$) y dos horizontales ($y = 2$; $y = 6$). No se necesita tabla de valores para representarlas.

$$x - y = -4 \Rightarrow y = x + 4 \quad 3x - y = 10 \Rightarrow y = 3x - 10$$

x	y = x + 4
0	4
-4	0

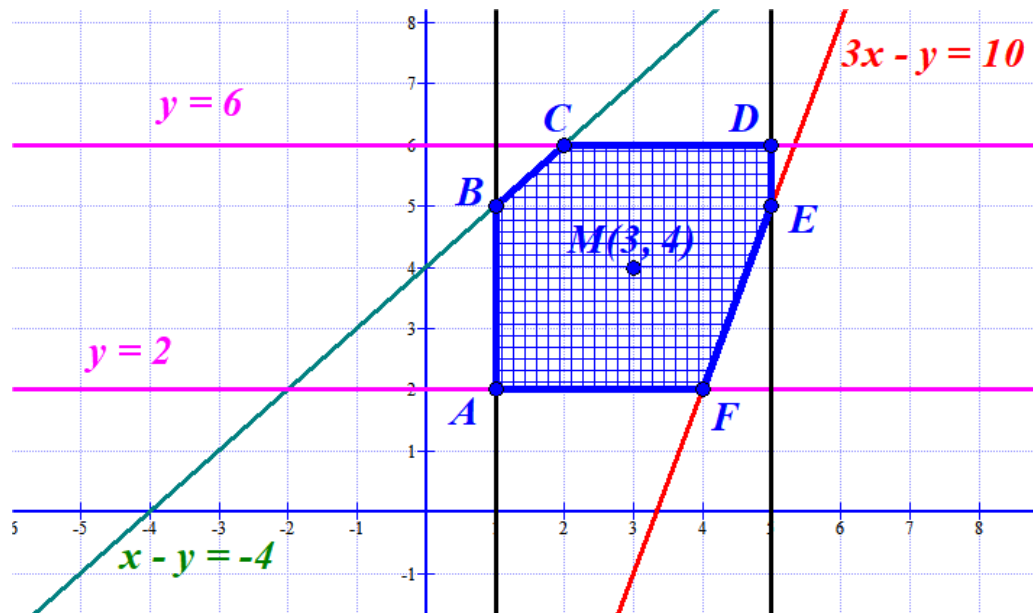
x	y = 3x - 10
0	-10
4	2



Probamos las restricciones con el punto $M(3, 4)$.

$$\left. \begin{array}{l} M(3, 4) \rightarrow x = 3; y = 4 \\ 1 \leq x \leq 5; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4; \quad 3x - y \leq 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 \leq 3 \leq 5; \text{ Se cumple} \\ 2 \leq 4 \leq 6; \text{ Se cumple} \\ 3 - 4 \geq -4; \text{ Se cumple} \\ 9 - 4 \leq 10; \text{ Se cumple} \end{array} \right\}$$

La región a la que pertenece el punto M es la región S buscada.



Las coordenadas de los vértices se observan en el dibujo:

$$A(1, 2); B(1, 5); C(2, 6); D(5, 6); E(5, 5) \text{ y } F(4, 2)$$

- b) Los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S son los que se obtienen en los vértices de la región.

$$A(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = -200 + 1200 = 1000$$

$$B(1, 5) \rightarrow f(1, 5) = -200 + 3000 = 2800$$

$$C(2, 6) \rightarrow f(2, 6) = -400 + 3600 = 3200 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(5, 6) \rightarrow f(5, 6) = -1000 + 3600 = 2600$$

$$E(5, 5) \rightarrow f(5, 5) = -1000 + 3000 = 2000$$

$$F(4, 2) \rightarrow f(4, 2) = -800 + 1200 = 400 \text{ ¡Mínimo!}$$

El valor mínimo es 400 y se obtiene en el punto F(4, 2).

El valor máximo es 3200 y se obtiene en el punto C(2, 6)

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}.$$

- a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.
- b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determinénse sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Para $x < -1$ la función es un polinomio $f(x) = ax+1$ y es continua.

Para $x > -1$ la función es un polinomio $f(x) = x^2 + x - 2$ y es continua.

Veamos si es continua en el cambio de definición: $x = -1$.

- Existe $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} ax+1 = -a+1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + x - 2 = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$
- Los tres valores son iguales. Para ello debe ser $-2 = -a+1 \Rightarrow \boxed{a=3}$

La función es continua para $a = 3$.

b) Para $a = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

Los puntos de corte son:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 + 0 - 2 = -2$. El punto $(0, -2)$ es punto de corte con el eje Y.

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} = -0,5 \notin (-\infty, -1) \\ x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \notin [-1, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

El punto $(1, 0)$ es punto de corte con el eje X.

Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

- Para $x < -1$ la función es $f(x) = 2x+1$ con derivada siempre positiva: $f'(x) = 2 > 0$. Es una recta creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- Para $x > -1$ la función es una parábola $f(x) = x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x+1$. Igualamos a cero $\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$
- Para $-1 < x < -1/2$, por ejemplo $x = -0,8$ la derivada vale $f'(-0,8) = -1,6+1 = -0,6 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-1, -1/2)$.
- Para $x > -1/2$, por ejemplo, $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = 0+1 = 1 > 0$. La función crece en el intervalo $(-1/2, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-1, \frac{-1}{2}\right)$.

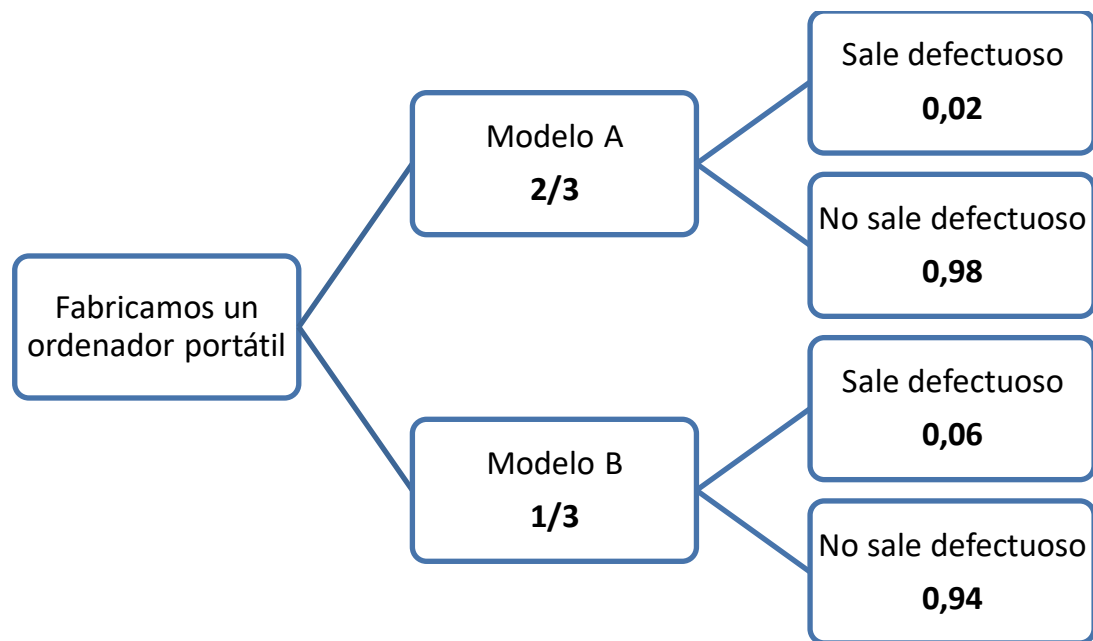
Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0'02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0'06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

- a) No salga defectuoso.
b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

La producción del modelo A es el doble que la del modelo B, si lo expresamos en probabilidad tendríamos que la probabilidad de que un ordenador sea del modelo A es $2/3$ y del modelo B es $1/3$.

Construyamos el diagrama de árbol con las probabilidades de cada suceso posible.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{No sale defectuoso}) = P(\text{Es modelo A})P(\text{No sale defectuoso/Es modelo A}) +$$

$$+ P(\text{Es modelo B})P(\text{No sale defectuoso/ Es modelo B}) = \frac{2}{3} \cdot 0,98 + \frac{1}{3} \cdot 0,94 = \boxed{0,967}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea modelo A/ Es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea modelo A y Es defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} =$$

$$= \frac{P(\text{Sea modelo A})P(\text{Es defectuoso / Es del modelo A})}{1 - P(\text{No es defectuoso})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,02}{1 - 0,967} = \frac{40}{99} = 0,404$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

- a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo, $\bar{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.
 b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo (24'24 ; 47'76) para μ .

X = El tiempo en horas que tarda en hacerse la portabilidad. $X = N(\mu, 24)$

- a) El tamaño de la muestra es $n = 16$. La media es $\mu = 36$ horas.
 La distribución de medias sigue una normal con la misma media $\mu = 36$ horas y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\bar{X}_{16} = N\left(36, \frac{24}{\sqrt{16}}\right) = N(36, 6)$$

Calculamos la probabilidad pedida $P(\bar{X}_{16} > 48)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_{16} > 48) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\bar{X}_{16} - 36}{6} > \frac{48 - 36}{6}\right) = P(Z > 2) = \\ &= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228} \end{aligned}$$

- b) Si el intervalo de confianza es (24'24; 47'76) su amplitud es $47,76 - 24,24 = 23,52$. El error es la mitad de esta amplitud $\text{Error} = \frac{23,52}{2} = 11,76$.

Aplicamos la fórmula del error, lo igualamos a 11.76 y despejando obtenemos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 11,76 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \Rightarrow 11,76 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 6 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{11,76}{6} = 1,96$$

Entonces buscando en la tabla de la normal tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,975 = 0,025 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95$$

El nivel de confianza aplicado es del 95%

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinése la matriz C^{40} .

b) Calcúlese la matriz X que verifica

$$X \cdot A + 3B = C.$$

a) Calculemos las potencias de la matriz C, en busca de una regla que nos permita determinar la expresión de C^{40} .

$$C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = C$$

$$C^4 = C^3 \cdot C = C \cdot C = C^2 = I$$

$$\text{Por lo que } C^{40} = (C^4)^{10} = I^{10} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X \cdot A + 3B = C \Rightarrow X \cdot A = C - 3B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - 3B) A^{-1} \Rightarrow X = (C - 3B) A^{-1}$$

Calculemos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Existe la inversa de A y la obtenemos con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X.

$$\begin{aligned} X &= (C - 3B) A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 & 8+9 \\ 3-4 & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{La matriz buscada es } X = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}.$$

a) Estúdiense sus asíntotas.

b) Determinéense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

- **Asíntotas verticales.** $x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \frac{-0,55}{0} = \infty$$

- **Asíntotas horizontales.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

Hallamos el valor de m .

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{3x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - 1}{3\cancel{x^2} - 2x} = \frac{1}{3}$$

Hallamos el valor de n .

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x - 2} - \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x - 2} - \frac{x}{3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3(x^2 - 1) - x(3x - 2)}{3(3x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{3x^2} - 3 - \cancel{3x^2} + 2x}{9x - 6} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{9x - 6} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{x}}{9\cancel{x}} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ **Resumiendo:** La función tiene una asíntota vertical: $x = \frac{2}{3}$, no tiene asíntota horizontal ytiene una asíntota oblicua: $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$.

b) Determinamos la expresión de la derivada de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(3x - 2) - 3(x^2 - 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 4x - 3x^2 + 3}{(3x - 2)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x - 2)^2}$$

Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x - 2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 36}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{6} = \nexists$$

El numerador de la derivada $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x - 2)^2}$ nunca se anula y la función no tiene

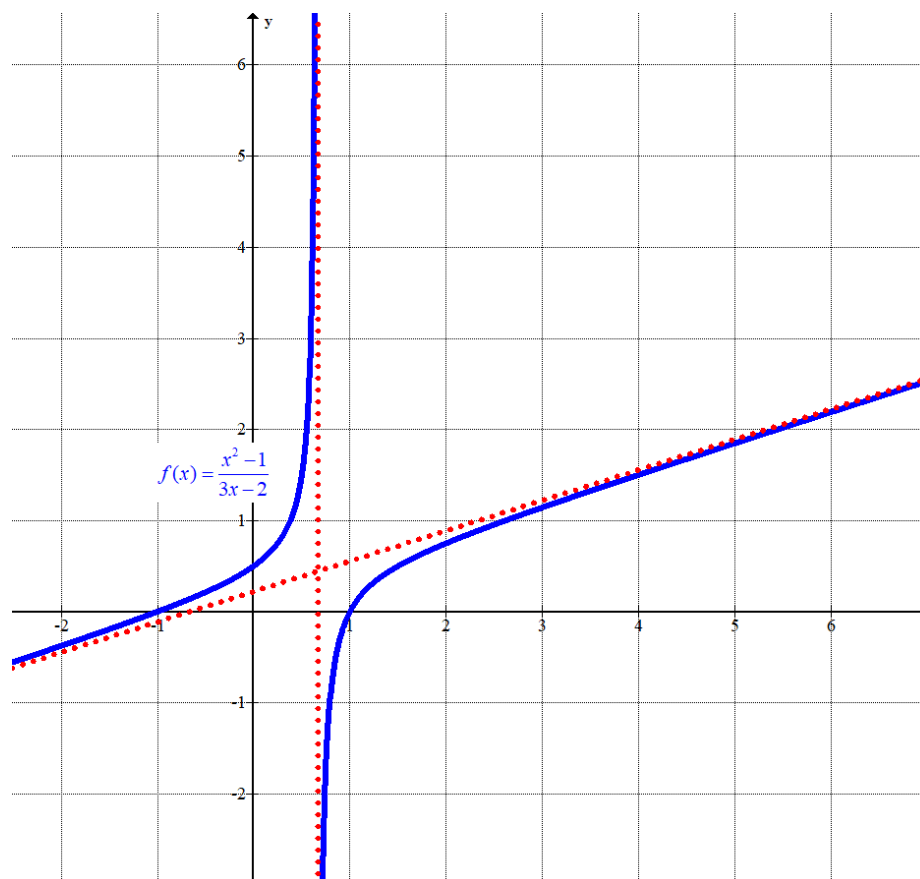
puntos críticos.

El denominador es siempre positivo pues está elevado al cuadrado y el numerador es siempre positivo o negativo pues es una función que no se anula y es continua.

Solo debemos estudiar lo que ocurre en un valor real cualquiera y eso ocurrirá también en el resto de valores reales.

En $x = 0$ la derivada es $f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{(3 \cdot 0 - 2)^2} = \frac{3}{4} > 0$

La función es creciente en todo su dominio $\mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.



Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax.$$

- a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determinése si se trata de un máximo o un mínimo local.
- b) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

- a) Para que tenga un extremo relativo debe de anularse la derivada de $f(x) = x^2 + ax$.

$$f(x) = x^2 + ax \Rightarrow f'(x) = 2x + a$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + a = 0 \Rightarrow 2x = -a \Rightarrow x = \frac{-a}{2}$$

$$\text{Debe cumplirse la igualdad } 2 = \frac{-a}{2} \Rightarrow 4 = -a \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Comprobemos si es máximo o mínimo local usando el signo de la derivada segunda.

$$f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2$$

Sustituyendo $x = 2$, tenemos que $f''(2) = 2 > 0$. En $x = 2$ hay un mínimo local.

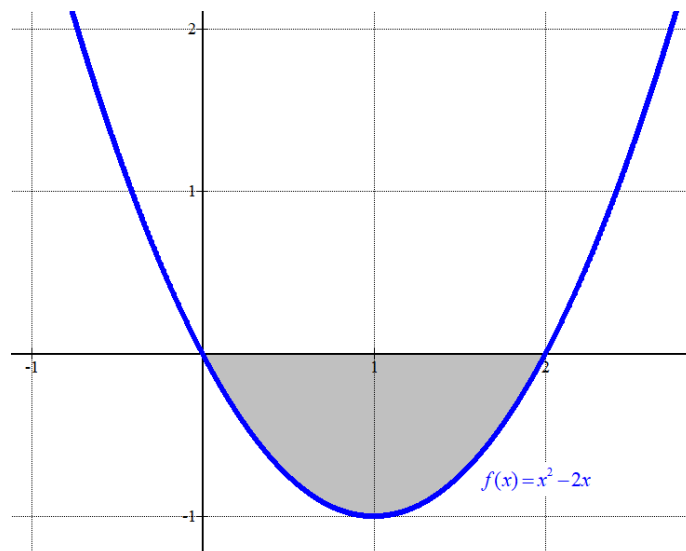
- b) Para $a = -2$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$. Averiguamos si la función corta al eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Estos dos valores son los límites de integración para determinar el área del recinto pedido, por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_0^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{El área pedida es } \left| \int_0^2 x^2 - 2x dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \approx 1.33 u^2.$$



Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0'4, y por ambos es 0'2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

- a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.
 b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

La tabla de contingencia asociada a este experimento es:

	Contaminado por sulfatos	No contaminado por sulfatos	
Contaminado por nitratos	0,2		0,6
No contaminado por nitratos			
	0,4		1

Completamos la tabla, aplicando el criterio de que la suma de dos números en vertical o en horizontal da el número del final de dicha línea.

	Contaminado por sulfatos	No contaminado por sulfatos	
Contaminado por nitratos	0,2	0,4	0,6
No contaminado por nitratos	0,2	0,2	0,4
	0,4	0,6	1

Respondemos a las preguntas planteadas.

$$a) P(\text{No esté contaminado por nitratos} / \text{Está contaminado por sulfatos}) = \frac{0,2}{0,4} = \boxed{0,5}$$

$$b) P(\text{No esté contaminado ni por nitratos ni sulfatos}) = \boxed{0,2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Llamamos N = Estar contaminado por nitratos, $\bar{N}$ = No estar contaminado por nitratos.

S = Estar contaminado por sulfatos, $\bar{S}$ = No estar contaminado por sulfatos.

Sabemos que $P(S) = 0,4$ $P(N) = 0,6$ $P(N \cap S) = 0,2$

a) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{N} / S) = \frac{P(\bar{N} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 - 0,2}{0,4} = \frac{0,2}{0,4} = \boxed{0,5}$$

b) Nos piden calcular $P(\bar{N} \cap \bar{S})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{N} \cap \bar{S}) &= P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - (P(N) + P(S) - P(N \cap S)) = \\ &= 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = \boxed{0,2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,6$ cm.

- a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\bar{x} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98% para μ .
- b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98%?

X = Longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en cm. $X = N(\mu, 0,6)$

- a) El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 7$ cm.

Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 98%.

$$1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2,32 + 2,33}{2} = 2,325$$

El error del intervalo de confianza es:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{100}} = 2,325 \cdot 0,06 = 0,1395$$

El intervalo de confianza es:

$$(7 - 0,1395, \quad 7 + 0,1395) = (6,8605, \quad 7,1395)$$

- b) ¿n? El nivel de confianza es del 98% y por tanto $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$

Si el error máximo debe ser 0,1 cm entonces:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{n}} = 0,1 \Rightarrow 2,325 \cdot \frac{0,6}{0,1} = \sqrt{n} \Rightarrow n = (2,325 \cdot 6)^2 = 194,6$$

El tamaño de la muestra debe de ser mayor de 194,6, es decir, a partir de 195 varones.

EvAU 2017 Ordinaria Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

 POLITÉCNICA	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2016–2017 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	 Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
 Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.
- Determinése para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6 \quad ; \quad 5x - 2y \geq -2 \quad ; \quad x + 3y \leq 20 \quad ; \quad 2x - y \leq 12\}.$$

- Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Determinése los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

- Determinése el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$
- Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25% de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40% tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0'01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0'05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0'12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

- Se estropee.
- Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0'9 kg.

- Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\bar{x} = 7'8 \text{ kg}$. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99'2% para μ .
- Determinése el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 0'2 kg.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2 - a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

- Discútase en función de los valores del parámetro a.
- Resuélvase para $a = 3$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real: $f(x) = x^3 - 3x$

- Calcúlense $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$
- Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Estúdiense la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.
- Calcúlese $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

El 30% de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0'20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0'9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

- No lea prensa al menos una vez por semana.
- No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3T$. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

- Si la media de la muestra es $\bar{x} = 25'9T$, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ .
- Supóngase ahora que $\mu = 23T$. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000T.

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.
 b) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

- a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero, por ello calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2k - 2k - (2k^2 - 2 + 2) = 2 - 2k^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow 2 = 2k^2 \Rightarrow 1 = k^2 \Rightarrow k = \pm 1$$

La matriz A tiene inversa para los valores de k distintos de 1 y de -1 .

- b) Para $k = 0$ la matriz A tiene inversa. Despejamos X en la ecuación $A \cdot X = B$

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Además } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X .

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

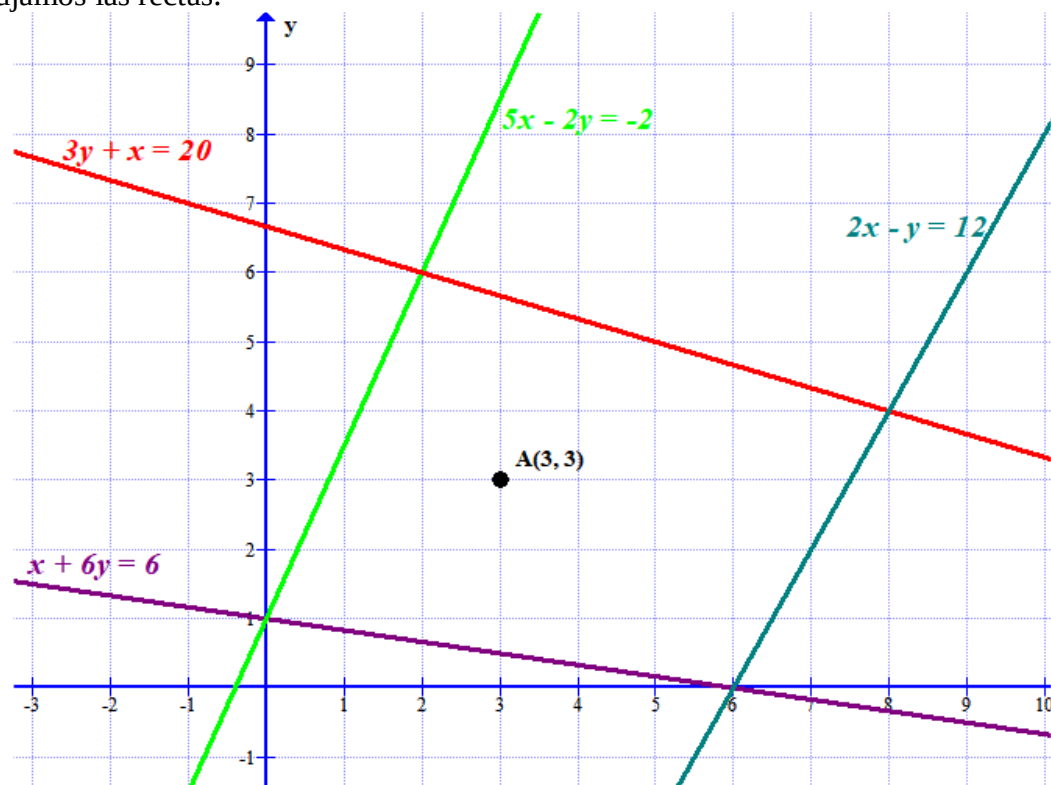
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6 \quad ; \quad 5x - 2y \geq -2 \quad ; \quad x + 3y \leq 20 \quad ; \quad 2x - y \leq 12\}.$$

- a) Representétese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
 b) Determinénse los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

- a) Para representar la región S del plano, vamos a dibujar sus límites, que son las rectas asociadas a cada desigualdad.

$x + 6y = 6$	$5x - 2y = -2$	$x + 3y = 20$	$2x - y = 12$
$x \mid y = \frac{6-x}{6}$	$x \mid y = \frac{5x+2}{2}$	$x \mid y = \frac{20-x}{3}$	$x \mid y = 2x-12$
0 1	-2 -4	-1 7	0 -12
6 0	0 1	2 6	6 0
12 -1	2 6	8 4	8 4

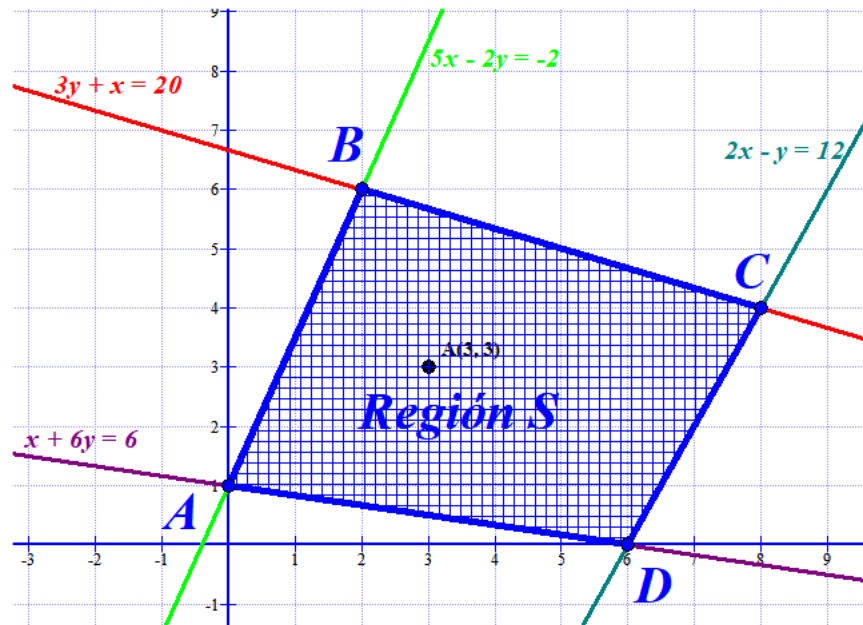
Dibujamos las rectas:



Probamos en el punto A(3, 3) las condiciones de la región S y comprobamos su pertenencia a dicha región o no.

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{¿} A(3, 3) \in S? \\
 &S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6 \quad ; \quad 5x - 2y \geq -2 \quad ; \quad x + 3y \leq 20 \quad ; \quad 2x - y \leq 12\} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{¿} 3 + 6 \cdot 3 \geq 6? \\
 &\text{¿} 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \geq -2? \\
 &\text{¿} 3 + 3 \cdot 3 \leq 20? \\
 &\text{¿} 2 \cdot 3 - 3 \leq 12?
 \end{aligned}
 \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 &\text{¿} 21 \geq 6? \\
 &\text{¿} 15 - 6 \geq -2? \\
 &\text{¿} 12 \leq 20? \\
 &\text{¿} 6 - 3 \leq 12?
 \end{aligned}
 \right\} \text{ Se cumplen todas las desigualdades}
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

La región S es la región del plano a la que pertenece el punto A(3,3).



Las coordenadas de sus vértices son: A(0, 1); B(2, 6); C(8, 4) y D(6, 0).

- b) Los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 4x - 3y$ en la región S se hallan en los vértices de dicha región. Valoramos la función en cada uno de los vértices.

$$A(0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 0 - 3 = -3$$

$$B(2, 6) \Rightarrow f(2, 6) = 8 - 18 = -10 \text{ ; } \text{Mínimo!}$$

$$C(8, 4) \Rightarrow f(8, 4) = 32 - 12 = 20$$

$$D(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 24 - 0 = 24 \text{ ; } \text{Máximo!}$$

La función alcanza un mínimo en el vértice B(2, 6), es decir, para los valores $x = 2$ e $y = 6$. Su valor mínimo es -10 .

La función alcanza un máximo en el punto D(6, 0), es decir, para los valores $x = 6$ e $y = 0$. Su valor máximo es 24 .

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) Determinése el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

a) La derivada de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ es $f'(x) = \frac{e^x(1+x) - 1 \cdot e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x + xe^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

Sustituimos en la función derivada el valor $x = 0$ para obtener $f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{0 \cdot e^0}{(1+0)^2} = 0$$

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ son todos los números reales excepto los que anulan

el denominador. $1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntotas verticales. $x = 1$. $x = -1$

$$x = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$$x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = -\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas. $y = mx + n$

Calculamos el valor de m .

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$$

Calculamos el valor de n .

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = -x$.

Resumiendo: La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$, no tiene asíntota horizontal y tiene como asíntota oblicua la recta $y = -x$.

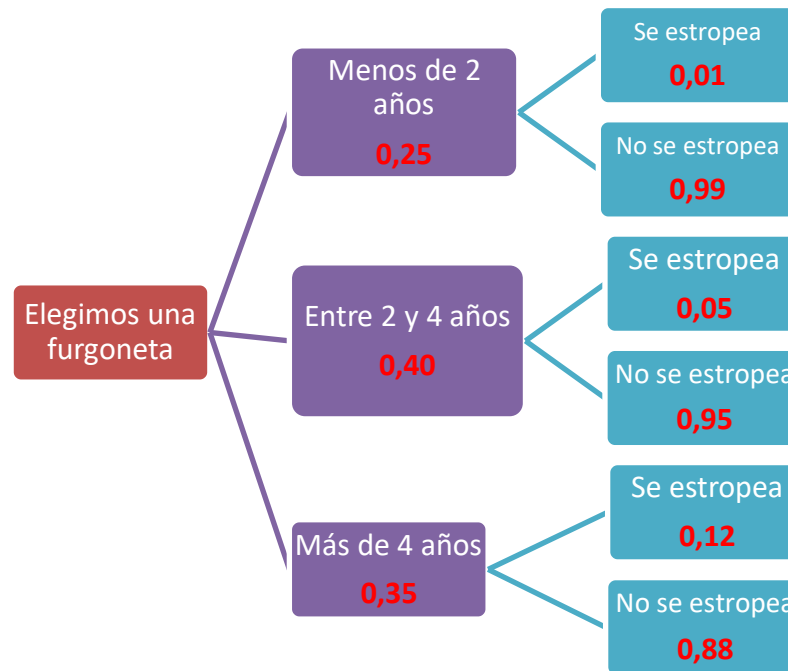
Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25% de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40% tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0'01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0'05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0'12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

El diagrama de árbol asociado a este problema sería el siguiente:



Utilizando este diagrama podemos responder a las cuestiones planteadas de forma sencilla.

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Se estropee}) &= P(\text{Tenga menos de 2 años})P(\text{Se estropee}/\text{Tiene menos de 2 años}) + \\
 &+ P(\text{Tenga entre 2 y 4 años})P(\text{Se estropee}/\text{Tiene entre 2 y 4 años}) + \\
 &+ P(\text{Tenga más de 4 años})P(\text{Se estropee}/\text{Tiene más de 4 años}) = \\
 &= 0,25 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 = \boxed{0,0645}
 \end{aligned}$$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Tenga más de 4 años}/\text{No se estropea}) &= \frac{P(\text{Tenga más de 4 años y No se estropee})}{P(\text{No se estropee})} = \\
 &= \frac{P(\text{Tenga más de 4 años})P(\text{No se estropee}/\text{Tenga más de 4 años})}{1 - P(\text{Se estropee})} = \frac{0,35 \cdot 0,88}{1 - 0,0645} = \boxed{0,329}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0'9 kg.

- a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\bar{x} = 7'8 \text{ kg}$. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99'2% para μ .
- b) Determinése el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 0'2 kg.

X = Peso en kg de un cordero a las seis semanas de su nacimiento. $X = N(\mu, 0,9)$

- a) Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$,

siendo $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$N = 324$, $\bar{x} = 7,8 \text{ kg}$, $\sigma = 0,9$

Calculamos para un nivel de confianza del 99.2 % el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0'992 \rightarrow \alpha = 0'008 \rightarrow \alpha/2 = 0'004 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0'996 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,65$$

$$\text{El error sería } \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{324}} = 0,1325$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (7,8 - 0,1325, 7,8 + 0,1325) = (7,6675; 7,9325)$$

- b) Calculamos para un nivel de confianza del 95 % el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

El error es la mitad del intervalo de confianza, entonces el error debe de ser $\frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ kg}$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,1 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{0,9}{\sqrt{n}} = 0,1 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{0,9}{0,1} = \sqrt{n}$$

$$1,96 \cdot 9 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1,96 \cdot 9)^2 = 311,16$$

El tamaño mínimo es de 312 corderos.

OPCIÓN B**Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 3$.

a) La matriz de coeficientes A y ampliada A/B asociada al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Calculamos el determinante de A y comprobamos para que valores de a se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 4a(2-a) + 6a - (-8(2-a) + 2a^2 - 12)$$

$$|A| = 8 + \cancel{8a} - 4a^2 + 6a + 16 - \cancel{8a} - 2a^2 + 12$$

$$|A| = -6a^2 + 6a + 36$$

Si igualamos a cero.

$$-6a^2 + 6a + 36 = 0 \Rightarrow -a^2 + a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} = \frac{-1+5}{-2} = -2 \\ = \frac{-1-5}{-2} = 3 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq 3$

En este caso el rango de A es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Solo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.

CASO 2. $a = -2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

La primera y la segunda ecuación son iguales y el sistema de 3 ecuaciones se reduce a otro de 2 ecuaciones. Lo resolvemos y establecemos el tipo de sistema.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 2z \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 4(-2y - 2z) + 3y - 2z = 0$$

$$-8y - 8z + 3y - 2z = 0 \Rightarrow -5y - 10z = 0 \Rightarrow y + 2z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2z}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2y - 2z \\ y = -2z \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4z - 2z = 2z \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2z \\ y = -2z \\ z = z \end{array}}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = 3$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación son iguales y el sistema de 3 ecuaciones se reduce a otro de 2 ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 2z \\ 3x - 4y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(3y - 2z) - 4y - 4z = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9y - 6z - 4y - 4z = 0 \Rightarrow 5y - 10z = 0 \Rightarrow y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z \\ \left. \begin{array}{l} y = 2z \\ x = 3y - 2z \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{array}{l} x = 6z - 2z = 4z \\ y = 2z \\ z = z \end{array} \end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Es compatible indeterminado.

Resumiendo: Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado, si $a = -2$ o $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

b) La solución se ha obtenido en el apartado anterior.

Las soluciones del sistema son: $x = 4t$; $y = 2t$; $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) Calcúlense $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 3)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 3 = -3$$

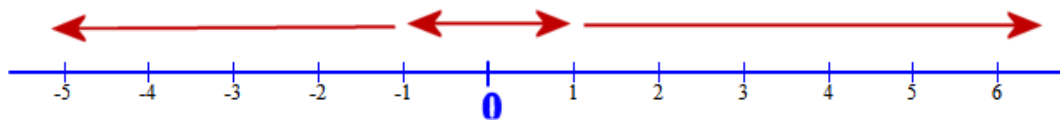
b) Utilizamos la derivada de la función para estudiar el crecimiento o decrecimiento.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

Iguamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de la función.

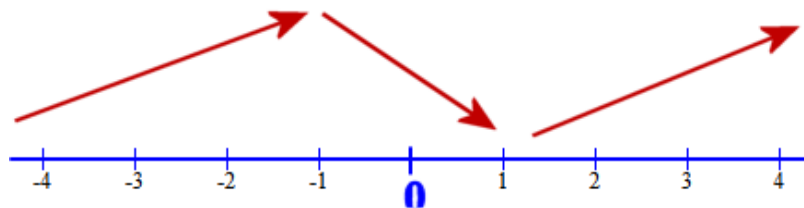
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La recta real queda dividida en tres trozos:



Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo o semirrecta en que hemos dividido la recta real.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada tiene signo $f'(-2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función es creciente.
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada tiene signo $f'(0) = -3 < 0$. La función es decreciente.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada tiene signo $f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función es creciente.



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.b) Calcúlese $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a) Para $x < 0$ la función es $f(x) = \frac{2}{x+2}$ que no es continua en $x = -2$, ya que para ese valor se anula el denominador.

Para $x > 0$ la función es $f(x) = x+2$ que es una función continua.

Para $x = 0$ hacemos el estudio de la continuidad:

- Existe $f(0) = \frac{2}{0+2} = 1$. Se cumple.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = 1$. Se cumple.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+2 = 2$. Se cumple.
- Los tres valores son iguales: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. No se cumple.

La función no es continua en $x = 0$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b)

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{x+2} dx = 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx = \left[2 \ln|x+2| \right]_{-1}^0 =$$

$$= \left[2 \ln|0+2| \right] - \left[2 \ln|-1+2| \right] = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2 = \boxed{\ln 4}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

El 30% de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0'20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0'9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

- No lea prensa al menos una vez por semana.
- No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

a) UNA FORMA DE HACERLO

Llamemos J = “Ser joven”, L = “Leer prensa”. Así $\bar{J}$ = “No ser joven” y $\bar{L}$ = “No leer prensa”.

Nos piden calcular $P(\bar{L})$

Los datos que se nos proporciona son:

$$P(J) = 0,3, \text{ por lo que } P(\bar{J}) = 0,7.$$

$$P(L/J) = 0,2, \text{ por lo que } P(L/J) = \frac{P(L \cap J)}{P(J)} = \frac{P(L \cap J)}{0,3} = 0,2 \Rightarrow P(L \cap J) = 0,06$$

$$P(\bar{J}/L) = 0,9, \text{ por lo que } P(\bar{J}/L) = \frac{P(\bar{J} \cap L)}{P(L)} = 0,9 \Rightarrow P(\bar{J} \cap L) = 0,9 \cdot P(L)$$

Aplicamos todo lo obtenido a determinar el valor de $P(L)$.

$$P(L) = P(L \cap J) + P(L \cap \bar{J}) = 0,06 + 0,9 \cdot P(L)$$

$$P(L) - 0,9 \cdot P(L) = 0,06$$

$$0,1 \cdot P(L) = 0,06$$

$$P(L) = \frac{0,06}{0,1} = 0,6$$

$$\text{Por lo tanto } P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 1 - 0,6 = \boxed{0,4}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar no lea es del 40%

OTRA FORMA DE HACERLO

Hagamos una tabla de contingencia para establecer los valores de la probabilidad de las distintas situaciones.

De cada 100 personas 30 son jóvenes. Y de esas 30 el 20% lee prensa, es decir, $30 \cdot 0,2 = 6$. Llamemos X a las personas que leen prensa.

	Lee prensa	No lee prensa	
Persona joven	6		30
Persona que no es joven			
	X		100

Como la probabilidad de que las X personas que leen sean no jóvenes es de 0,9 significa que el 90% de los lectores son no jóvenes y el 10 % jóvenes. Como sabemos que son 6 los lectores jóvenes entonces, tenemos que son 9 veces más los no jóvenes, es decir, $9 \cdot 6 = 54$.

Por lo que los lectores son $54 + 6 = 60$.

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea lectora es del 60% y de que no sea lectora el restante 40%.

b) Nos piden $P(\bar{L} \cup \bar{J})$

UNA FORMA DE HACERLO

Manejando las fórmulas de probabilidad:

Sabemos que $P(\bar{L} \cup \bar{J}) = P(\overline{L \cap J}) = 1 - P(L \cap J) = 1 - 0,06 = \boxed{0,94}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Del apartado anterior tenemos la tabla de contingencia.

	Lee prensa	No lee prensa	
Persona joven	6		30
Persona que no es joven			
	60		100

Completamos la tabla y tendremos:

	Lee prensa	No lee prensa	
Persona joven	6	24	30
Persona que no es joven	54	16	70
	60	40	100

Por lo que el número de personas que no son jóvenes o no leen son todas menos las 6 que son jóvenes y leen, es decir, 94 de 100, el 94%.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

- a) Si la media de la muestra es $\bar{x} = 25,9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ .
 a) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

- a) Para establecer el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error})$,

siendo $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$N = 484$, $\bar{x} = 25,9$ T, $\sigma = 3$ T

Para un nivel de confianza del 90% calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

El error sería $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0,2243$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - E; \bar{x} + E) = (25,9 - 0,2243; 25,9 + 0,2243) = (25,675; 26,124)$$

- b) Para que el barco pueda transportar la carga, el peso medio de los contenedores deberá ser igual o menor a $\frac{11000}{484}$ kg, por lo tanto, se pide calcular la probabilidad de que el peso medio de los contenedores sea igual o inferior a ese valor.

Si la variable peso de los contenedores sigue una distribución normal $X = N(23, 3)$, entonces para muestras de tamaño 484 las medias muestrales siguen una distribución con la misma

media (23) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{484}}$.

$$\overline{X}_{484} = N\left(23, \frac{3}{\sqrt{484}}\right) = N\left(23, \frac{3}{22}\right)$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X}_{484} \leq \frac{11000}{484}\right)$

$$P\left(\overline{X}_{484} \leq \frac{11000}{484}\right) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{\overline{X}_{484} - 23}{3/22} \leq \frac{\frac{11000}{484} - 23}{\frac{3}{22}}\right) = P(Z \leq -2) =$$

$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$