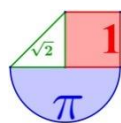


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en Navarra
Años 2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas EvAU de Navarra desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	14
EvAU Extraordinaria 2024	24
EvAU Ordinaria 2024.....	38
EvAU Extraordinaria 2023	52
EvAU Ordinaria 2023.....	66
EvAU Extraordinaria 2022	76
EvAU Ordinaria 2022	88
EvAU Extraordinaria 2021	100
EvAU Ordinaria 2021	113
EvAU Extraordinaria 2020	123
EvAU Ordinaria 2020	134
EvAU Julio 2019	146
EvAU Junio 2019	156
EvAU Julio 2018	166
EvAU Junio 2018	179
EvAU Julio 2017	190
EvAU Junio 2017	205

PAU Extraordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad

CURSO: 2024-2025

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

upna

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Instrucciones: las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta debe seleccionar sólo una opción (A o B) y contestar a todos sus apartados.

PREGUNTA 1:

Una empresa produce dos modelos de cristales, C1 y C2. Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente. La siguiente tabla recoge, para cada modelo de cristal, la cantidad de materia prima de cada tipo necesaria para su fabricación y el tiempo de fabricación.

	Materia prima M1 (kg/m ²)	Materia prima M2 (kg/m ²)	Tiempo de fabricación (minutos/m ²)
C1	3	2	22
C2	6	1	14

Sabiendo que la empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m² de cristal, determine la cantidad diaria que se deberá fabricar de cada modelo de cristal si la empresa desea minimizar el tiempo de fabricación.

i) Plantee el problema. (1.25 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.

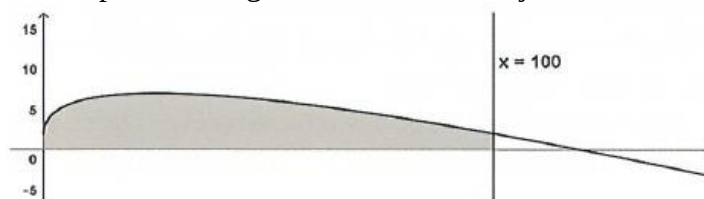
(1.25 puntos)

PREGUNTA 2:

La siguiente figura muestra el ala de una maqueta de avión de aeromodelismo.



El corte transversal del ala, representado gráficamente en los ejes de coordenadas, es:



La parte sombreada del corte transversal es la región del plano delimitada por el eje X y la curva

que vienen dada por la función: $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2$, para $0 \leq x \leq 100$, donde x es la distancia

horizontal (en cm) desde la parte delantera del ala e y es la altura (en cm) respecto al eje horizontal.

i) Calcule la altura máxima del ala y a qué distancia horizontal se alcanza. Razone analíticamente por qué es un máximo relativo. (1.25 puntos)

ii) Calcule el área de la parte sombreada del corte transversal. (1.25 puntos)

PREGUNTA 3:

Un estudio realizado en una comunidad autónoma concluyó que el tiempo de espera para una intervención de cirugía cardíaca sigue una distribución normal. A partir de una muestra de 100 pacientes operados, se calculó el siguiente intervalo de confianza al 97% para el tiempo medio (en días) de espera para la cirugía: $[28.264, 31.736]$.

- i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medido de espera para la cirugía de la muestra de 100 pacientes. (1.25 puntos)
- ii) Construya un intervalo de confianza al 91% para el tiempo medio de espera para una intervención de cirugía cardíaca. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

PREGUNTA 4**OPCIÓN A:**

- i) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule, si es posible, la matriz inversa de A. (1.75 puntos)

- ii) Calcule y simplifique la derivada de la función $f(x) = \frac{e^{3x}}{2x-5}$. (0.75 puntos)

OPCIÓN B:

- i) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a para los cuales la matriz B tiene inversa. (0.75 puntos)

- ii) En un estudio sobre hábitos de compras de libros entre los jóvenes de una región, la mitad de los encuestado hace compras por internet, el 40% compra en tiendas físicas y el 35% combina ambas prácticas. Se elige un joven al azar.
 - a) Calcule la probabilidad de que compre libros en alguno de los dos formatos. (0.75 puntos)
 - b) Calcule la probabilidad de que no compre libros en tiendas físicas, sabiendo que tampoco compra en internet. (1 punto)

Tabla de la distribución normal estándar $Z \sim N(0,1)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1738	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-t^2/2} dt$$



SOLUCIONES

PREGUNTA 1:

Una empresa produce dos modelos de cristales, C1 y C2. Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente. La siguiente tabla recoge, para cada modelo de cristal, la cantidad de materia prima de cada tipo necesaria para su fabricación y el tiempo de fabricación.

	Materia prima M1 (kg/m ²)	Materia prima M2 (kg/m ²)	Tiempo de fabricación (minutos/m ²)
C1	3	2	22
C2	6	1	14

Sabiendo que la empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m² de cristal, determine la cantidad diaria que se deberá fabricar de cada modelo de cristal si la empresa desea minimizar el tiempo de fabricación.

i) Plantee el problema. (1.25 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

i) Llamamos “x” al número de metros cuadrados fabricados del cristal C1, “y” al número de metros cuadrados fabricados del cristal C2.

	Materia prima M1 (kg/m ²)	Materia prima M2 (kg/m ²)	Tiempo de fabricación (minutos/m ²)
M ² de C1 (x)	3x	2x	22x
M ² de C2 (y)	6y	y	14y
TOTALES	3x + 6y	2x + y	22x + 14y

La función a minimizar es el tiempo de fabricación: $T(x, y) = 22x + 14y$.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

“La empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m² de cristal” $\rightarrow x + y \geq 20$.

“Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente” $\rightarrow 3x + 6y \leq 135$; $2x + y \leq 60$.

“Las cantidades son positivas” $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 20 \\ 3x + 6y \leq 135 \\ 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 20 \\ x + 2y \leq 45 \\ 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 20$

$x + 2y = 45$

$2x + y = 60$

$x \geq 0; y \geq 0$

x	$y = 20 - x$
0	20
10	10
20	0

x	$y = \frac{45 - x}{2}$
0	$45/2$
25	10
45	0

x	$y = 60 - 2x$
0	60
25	10
30	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 20 \\ x + 2y \leq 45 \\ 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible son los puntos del primer cuadrante

situados por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(20, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 10 \geq 20 \\ 20 + 20 \leq 45 \\ 2 \cdot 20 + 10 \leq 60 \\ 20 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función tiempo de fabricación en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(25, 10) \rightarrow T(25, 10) = 22 \cdot 25 + 14 \cdot 10 = 690$$

$$B(0, 45/2) \rightarrow T\left(0, \frac{45}{2}\right) = 22 \cdot 0 + 14 \cdot \frac{45}{2} = 315$$

$$C(0, 20) \rightarrow T(0, 20) = 22 \cdot 0 + 14 \cdot 20 = \mathbf{280 \text{ Mínimo}}$$

$$D(20, 0) \rightarrow T(20, 0) = 22 \cdot 20 + 14 \cdot 0 = 440$$

$$E(30, 0) \rightarrow T(30, 0) = 22 \cdot 30 + 14 \cdot 0 = 660$$

El tiempo mínimo de fabricación se consigue en el punto $C(0, 20)$.

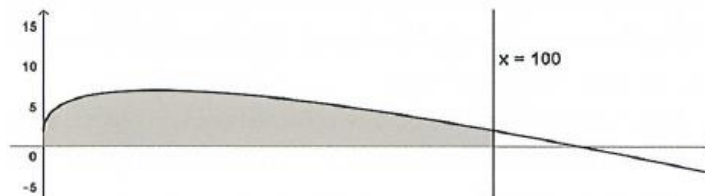
El tiempo mínimo de fabricación es de 280 minutos y se consigue con la fabricación de 0 metros cuadrados del cristal C1 y 20 metros cuadrados del cristal C2.

PREGUNTA 2:

La siguiente figura muestra el ala de una maqueta de avión de aeromodelismo.



El corte transversal del ala, representado gráficamente en los ejes de coordenadas, es:



La parte sombreada del corte transversal es la región del plano delimitada por el eje X y la curva que vienen dada por la función: $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2$, para $0 \leq x \leq 100$, donde x es la distancia horizontal (en cm) desde la parte delantera del ala e y es la altura (en cm) respecto al eje horizontal.

i) Calcule la altura máxima del ala y a qué distancia horizontal se alcanza. Razone analíticamente por qué es un máximo relativo. (1.25 puntos)

ii) Calcule el área de la parte sombreada del corte transversal. (1.25 puntos)

i) La altura del corte transversal nos la da la función $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2$, para $0 \leq x \leq 100$.

Derivamos la función y buscamos cuando se anula esta derivada.

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow \boxed{x = 5^2 = 25} \in [0, 100]$$

Sustituimos el valor del punto crítico $x = 25$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{5} = x^{-1/2} - \frac{1}{5} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{2} x^{-1/2-1} = \frac{-1}{2} x^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''(25) = \frac{-1}{\sqrt{25^3}} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo relativo para $x = 25$.

Para este valor la altura vale $f(25) = 2\sqrt{25} - \frac{25}{5} + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ centímetros.

La altura máxima del ala es de 7 centímetros y se alcanza a 25 centímetros del comienzo del ala.

ii) El área es el valor de la integral definida entre 0 y 100 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{100} f(x) dx = \int_0^{100} 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2 dx = \int_0^{100} 2x^{1/2} - \frac{x}{5} + 2 dx = \left[2 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} = \\ &= \left[2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} = \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} = \left[\frac{4 \cdot 100^{3/2}}{3} - \frac{100^2}{10} + 200 \right] - \left[\frac{4 \cdot 0^{3/2}}{3} - \frac{0^2}{10} + 2 \cdot 0 \right] = \\ &= \frac{4000}{3} - 1000 + 200 = \boxed{\frac{1600}{3} \approx 533.33 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

El área de la parte sombreada del corte transversal vale $\frac{1600}{3}$ centímetros cuadrados.

PREGUNTA 3:

Un estudio realizado en una comunidad autónoma concluyó que el tiempo de espera para una intervención de cirugía cardíaca sigue una distribución normal. A partir de una muestra de 100 pacientes operados, se calculó el siguiente intervalo de confianza al 97% para el tiempo medio (en días) de espera para la cirugía: $[28.264, 31.736]$.

- Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medido de espera para la cirugía de la muestra de 100 pacientes. (1.25 puntos)
- Construya un intervalo de confianza al 91% para el tiempo medio de espera para una intervención de cirugía cardíaca. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

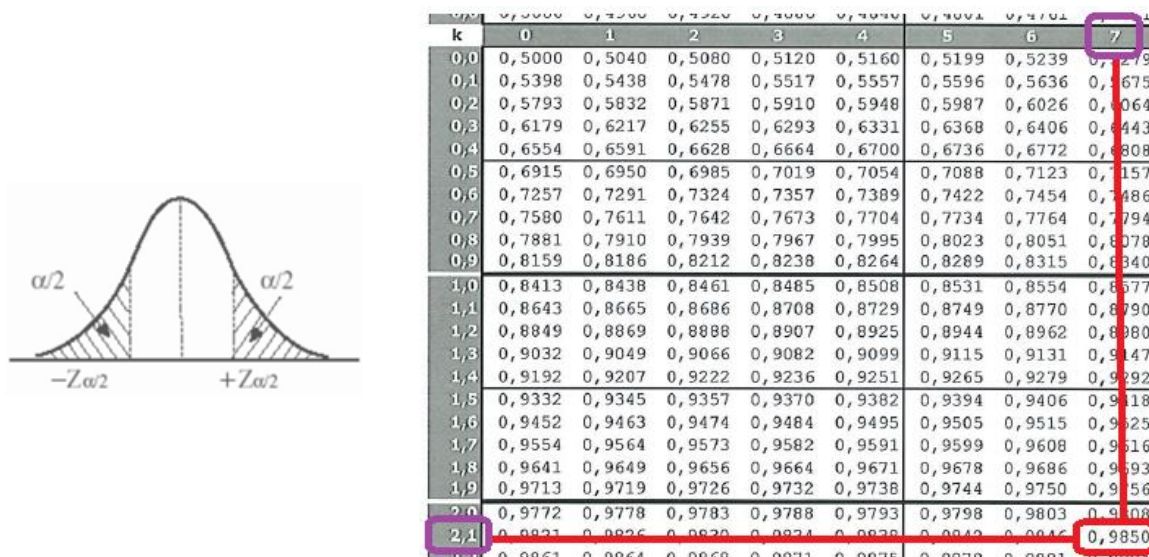
i) X = El tiempo (en días) de espera para una intervención de cirugía cardíaca. $X = N(\mu, \sigma)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$.

La media muestral es el valor central del intervalo $\bar{x} = \frac{28.264 + 31.736}{2} = 30$ días.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$



El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{31.736 - 28.264}{2} = 1.736$$

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.736 = 2.17 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Rightarrow \sigma = \frac{1.736 \cdot 10}{2.17} = 8 \text{ días}$$

La media muestral es de 30 días de espera. La varianza poblacional es $\sigma^2 = 8^2 = 64$ días².

ii) Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 91 %

$$1 - \alpha = 0.91 \rightarrow \alpha = 0.09 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.045 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.955 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.69 + 1.70}{2} = 1.695$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9493	0,9503	0,9513	0,9523	0,9533	0,9543
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.695 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}} = 1.356 \text{ días}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (30 - 1.356, 30 + 1.356) = (28.644, 31.356)$$

Podemos afirmar, con un nivel de confianza del 91% que el tiempo medio de espera para una cirugía cardíaca está comprendido entre 28.644 y 31.356 días.

PREGUNTA 4**OPCIÓN A:**

i) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule, si es posible, la matriz inversa de A. (1.75 puntos)

ii) Calcule y simplifique la derivada de la función $f(x) = \frac{e^{3x}}{2x-5}$. (0.75 puntos)

i) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 + 4 - 0 + 2 = 8 \neq 0$$

El determinante es distinto de cero y existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4 & 3/4 \\ -1/8 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ii) Calculamos la derivada y la simplificamos todo lo posible.

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{2x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{3e^{3x}(2x-5) - 2e^{3x}}{(2x-5)^2} = \frac{e^{3x}(6x-15) - 2e^{3x}}{(2x-5)^2} = \frac{e^{3x}(6x-17)}{(2x-5)^2}$$

OPCIÓN B:

i) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a para los cuales la matriz B tiene inversa.

(0.75 puntos)

ii) En un estudio sobre hábitos de compras de libros entre los jóvenes de una región, la mitad de los encuestado hace compras por internet, el 40% compra en tiendas físicas y el 35% combina ambas prácticas. Se elige un joven al azar.

a) Calcule la probabilidad de que compre libros en alguno de los dos formatos. (0.75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que no compre libros en tiendas físicas, sabiendo que tampoco compra en internet. (1 punto)

i) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a + 0 - 2a - 0 + 2 = -3a + 2$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

El determinante de la matriz B se anula para $a = \frac{2}{3}$.

La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{2}{3}$.

ii) Realizamos una tabla de contingencia.

	Tienda física	No compra en tienda física	
Compra por internet	35		50
No compra por internet			
	40		100

Completamos la tabla.

	Tienda física	No compra en tienda física	
Compra por internet	35	15	50
No compra por internet	5	45	50
	40	60	100

a) Hay un 45% de los jóvenes que no compra en ningún formato, por lo que el restante 55% compra en alguno de los formatos. La probabilidad de que la persona elegida al azar compre libros en alguno de los dos formatos es de 0.55.

b) Hay un 50% de los jóvenes encuestados que no compra por internet. De estos un 45% no compra en tiendas físicas. La probabilidad de que el joven elegido al azar entre los que no compran por internet tampoco compre libros en tiendas físicas vale $\frac{45}{50} = 0.9$.

PAU Ordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad

CURSO: 2024-2025

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



Instrucciones: las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta debe seleccionar sólo una opción (A o B) y contestar a todos sus apartados.

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

- Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)
- Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)
- ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)
- Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

- Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)
- Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)
- Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

PREGUNTA 4
OPCIÓN A:

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla $AB = BA$. (1 punto)
- Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x . (1.5 puntos)

OPCIÓN B:

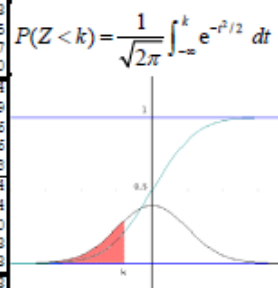
i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial

$$XD - C = I. \text{ (1.25 puntos)}$$

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros². Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Tabla de la distribución normal estándar $Z \sim N(0,1)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9634
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998



SOLUCIONES

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

ii) Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de cajas de pastas de 250 g, “y” al número de cajas de 500 g y “z” al número de cajas de 1 kg.

“Cierta día se envasaron 65 cajas en total” $\rightarrow x + y + z = 65$.

“Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g)” $\rightarrow x = 5 + y$.

“Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros” $\rightarrow$ Se envasaron un total de $\frac{720}{24} = 30$ kilos de galletas $\rightarrow 0.250 \cdot x + 0.500 \cdot y + 1 \cdot z = 30$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ 0.250 \cdot x + 0.500 \cdot y + 1 \cdot z = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ x + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ x + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + y + y + z = 65 \\ 5 + y + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 60 \\ 3y + 4z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 60 - 2y \\ 3y + 4z = 115 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + 4(60 - 2y) = 115 \Rightarrow 3y + 240 - 8y = 115 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -125 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-125}{-5} = 25} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 60 - 2 \cdot 25 = 10} \\ \boxed{x = 5 + 25 = 30} \end{array} \right.$$

Se han vendido 30 cajas de galletas de 250 gramos, 25 cajas de 500 gramos y 10 de 1 kilogramo.

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)
- ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)
- Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

i) Calculamos el valor de $P(6)$.

$$P(6) = 6 + \frac{12 \cdot 6}{6^2 + 4} = 7.8$$

La población a los 6 años es de 7800 ejemplares.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12t}{t^2} = 6 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{12}{t} = 6 + \frac{12}{\infty} = 6 + 0 = 6$$

La población a largo plazo tiende a ser de 6000 ejemplares.

La función es continua pues el denominador ($t^2 + 4$) nunca se anula.

ii) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} \Rightarrow P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + 4) - 2t(12t)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{12t^2 + 48 - 24t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 48 - 12t^2 = 0 \Rightarrow 4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

Estudiamos la evolución de la población antes y después del segundo año.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{48 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2}{(1^2 + 4)^2} = \frac{36}{25} > 0$. La población crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $P'(5) = \frac{48 \cdot 5 - 12 \cdot 5^2}{(5^2 + 4)^2} = \frac{-60}{841} < 0$.

La población decrece en $(2, +\infty)$.

Como la población crece antes y decrece después la población tiene un máximo relativo para

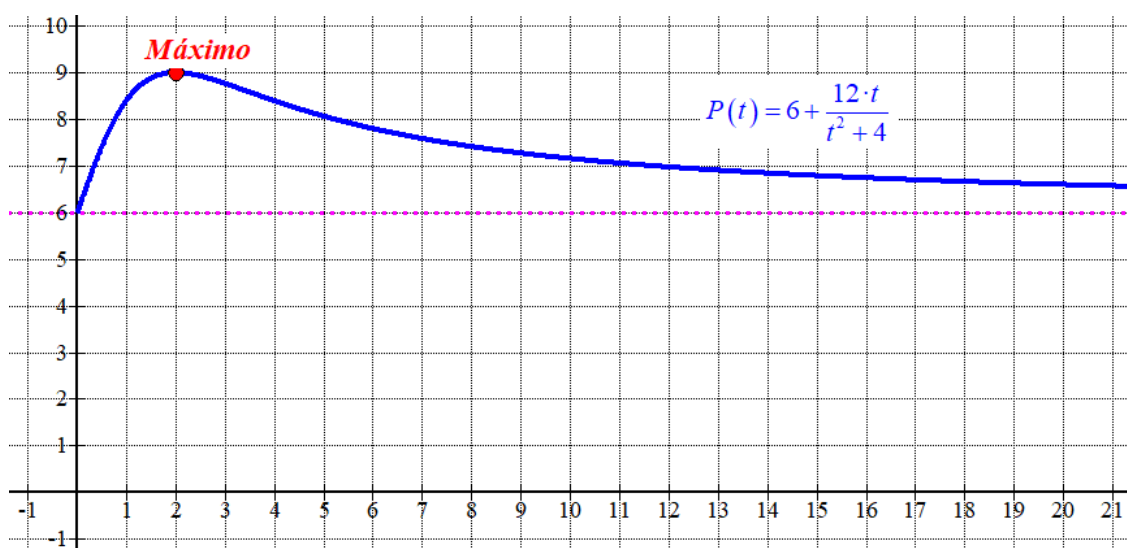
$$t = 2. \text{ Tenemos que } P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9.$$

La población es máxima en el segundo año, siendo esta población máxima de 9000 ejemplares. La población crece durante los dos primeros años y decrece a partir del segundo año.

iii) Sabemos que la función presenta un máximo relativo y absoluto en el punto (2, 9). También sabemos que tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y = 6$.

Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$
0	6
2	9 <i>Máximo</i>
6	7.8
20	6.594



PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

- Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)
- Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)
- Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

Han sido encuestados 150 mujeres y 100 hombres (250 jóvenes). Prefieren usar el transporte público 60 mujeres y 40 hombres, prefieren usar su propio vehículo el 16% de las mujeres: $0.16 \cdot 150 = 24$ mujeres y el 10% de los hombres: $0.10 \cdot 100 = 10$ hombres, y por último prefieren caminar el resto: $150 - 60 - 24 = 66$ mujeres y $100 - 40 - 10 = 50$ hombres.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES				250

Completamos la tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES	100	34	116	250

Respondemos a las cuestiones planteadas utilizando la regla de Laplace y la información contenida en la tabla.

- Hay 116 jóvenes que prefieren caminar y de ellos 66 son mujeres. La probabilidad de que el joven que prefiere caminar sea mujer tiene un valor de $\frac{66}{116} = \frac{33}{58} \approx 0.569$.

- La probabilidad de que al elegir un hombre prefiera el transporte público vale $\frac{40}{100} = 0.4$ y la probabilidad de que al elegir una mujer esta prefiera el transporte público vale $\frac{60}{150} = 0.4$.

El suceso contrario al que se contempla en el ejercicio es “Ninguno prefiere el transporte público”. Usamos este suceso contrario para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Al menos uno prefiere el t. público}) &= 1 - P(\text{Ninguno de los dos prefiere el t. público}) = \\
 &= 1 - P(\text{Mujer no prefiere t. público}) \cdot P(\text{Hombre no prefiere t. público}) = \\
 &= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.4) = \boxed{0.64}
 \end{aligned}$$

También podemos obtener la solución con expresiones matemáticas.

Llamamos M a “ser mujer”, H a “ser hombre” y T a “preferir el transporte público”.

$$\begin{aligned}
 P((T/H) \cup (T/M)) &= P(T/H) + P(T/M) - P((T/H) \cap (T/M)) = \\
 &= \{ \text{Independientes} \} = P(T/H) + P(T/M) - P(T/H)P(T/M) = \\
 &= 0.4 + 0.4 - 0.4 \cdot 0.4 = \boxed{0.64}
 \end{aligned}$$

- iii) En cada nueva elección de un joven queda uno menos en el grupo que inicialmente tenía 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres), es decir, en la primera elección hay 250 jóvenes en el grupo, tras la primera elección para la segunda quedan 249 jóvenes y para la tercera quedan 248 jóvenes.

Si vamos eligiendo jóvenes que prefieren usar su propio vehículo en la primera elección hay 34 jóvenes que prefieren usar su vehículo, en la segunda quedan 33 y en la tercera 32.

Para expresarnos mejor los sucesos llamamos V1, V2 y V3 a elegir joven que prefiere usar su propio vehículo en primera, segunda y tercera elección.

$$P(V1 \cap V2 \cap V3) = P(V1)P(V2/V1)P(V3/(V1 \cap V2)) = \frac{34}{250} \cdot \frac{33}{249} \cdot \frac{32}{248} \approx \boxed{0.0023}$$

PREGUNTA 4**OPCIÓN A:**

i) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla

$$AB = BA. \text{ (1 punto)}$$

ii) Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x . (1.5 puntos)

i) Resolvemos la igualdad planteada.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & -2a \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8 = 3b \rightarrow b = \frac{-8}{3} \\ -2 = -2a \rightarrow a = 1 \\ 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 3b = -8 \rightarrow b = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = \frac{-8}{3}$.

ii) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 2x + 3 \\ \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = \boxed{-3} \\ \frac{2-4}{-2} = \boxed{1} \end{cases}$$

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre -3 y 1 .

$$\int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^1 -x^2 - 2x + 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 =$$

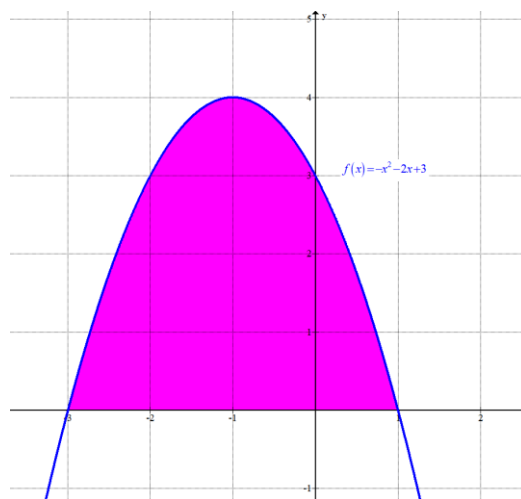
$$= \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3) \right] =$$

$$= \frac{-1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = \frac{32}{3} \approx 10.6667$$

El área del recinto del plano limitado por la función

$f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x tiene un valor de

$$\frac{32}{3} \approx 10.6667 \text{ unidades cuadradas.}$$



OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial

$$XD - C = I. \text{ (1.25 puntos)}$$

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros². Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

i) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XD - C = I \Rightarrow XD = I + C \Rightarrow X = (I + C)D^{-1}$$

Comprobamos que la matriz D tiene inversa y la calculamos.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X &= (I + C)D^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+8 & 1-4 \\ 3-4 & 3+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X buscada es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$.

ii) X = El importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda.

Como la varianza es 22500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{22500} = 150$ euros.

$$X = N(\mu, 150)$$

El tamaño de la muestra es $n = 74$. La media muestral es $\bar{x} = 738$ euros.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 96 %

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$

k	0	1	2	3	4	5	6
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{150}{\sqrt{74}} \approx 35.83 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (738 - 35.83, 738 + 35.83) = (702.17, 773.83)$$

Con un nivel de confianza del 96% el precio del alquiler de un piso en este barrio estará comprendido entre 702.17 y 773.83 euros al mes.

Significa que si fuésemos realizando distintas muestras de 74 pisos el 96 % de dichas muestras tendrían una media comprendida entre 702.17 y 773.83 euros al mes.

EvAU Extraordinaria 2024

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2023-2024

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Determine los valores del parámetro a para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
- ii) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa A^{-1} . (3 puntos)
- iii) Para $a = 2$, despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $XA + I = B^t \cdot C$, siendo I la matriz identidad. (5 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

- i) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{9 - x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

- ii) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 5}{x}$ que cumpla $F(1) = 1$.

(5 puntos)

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x .
¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)
- ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)
- ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

- Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

- Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)
- Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

- Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)
- Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, $[67.4050, 82.5950]$, determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Determine los valores del parámetro a para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
 ii) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa A^{-1} . (3 puntos)
 iii) Para $a = 2$, despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $XA + I = B^t \cdot C$, siendo I la matriz identidad. (5 puntos)

- i) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 12 - 0 - 0 - 0 + a = a^2 + a - 12$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a - 12 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 = a \\ \frac{-1-7}{2} = -4 = a \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y -4.

- ii) Para $a = 2$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 2 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

iii) Para $a = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + I = B^t \cdot C \Rightarrow XA = B^t \cdot C - I \Rightarrow X = (B^t \cdot C - I)A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$B^t \cdot C - I = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (B^t \cdot C - I)A^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -3+0+0 & -4+0+0 & 4+0+0 \\ -6+27-12 & -8+18-20 & 8-18+8 \\ 3-15+12 & 4-10+20 & -4+10-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 9 & -10 & -2 \\ 0 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “número de hectáreas para uva negra”, y = “número de hectáreas para uva blanca”. Se desea maximizar el beneficio anual que viene dado por la expresión:

$$B(x, y) = 10000x + 7000y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

“La parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas” $\rightarrow$
 $10 \leq x \leq 25$

“La parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas” $\rightarrow 7 \leq y \leq 15$

“Se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca” $\rightarrow$
 $x \leq 2y$.

“No puede cultivar más de 30 hectáreas en total” $\rightarrow x + y \leq 30$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$x = 2y$$

$$x + y = 30$$

$$x = 10$$

$$x = 25$$

$$y = 7$$

$$y = 15$$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
20	10
30	15

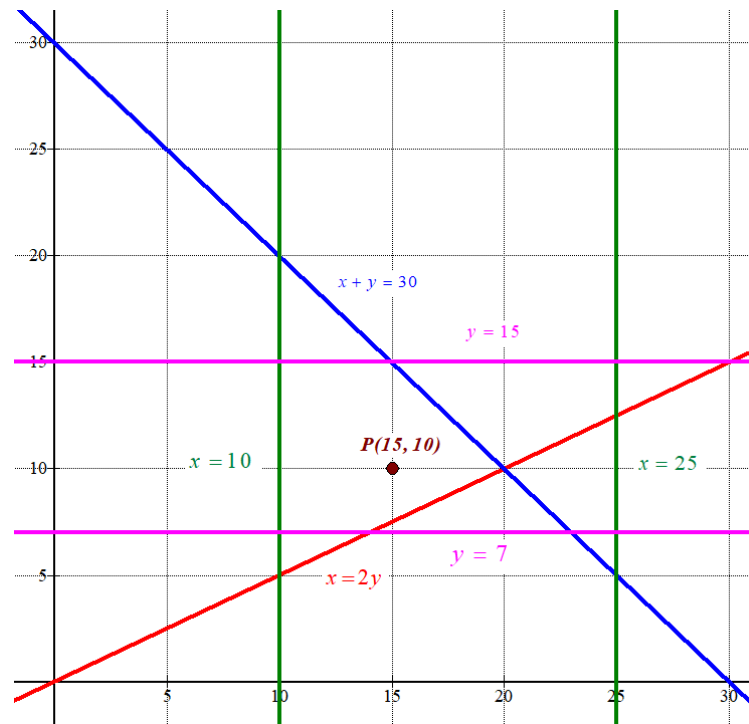
x	$y = 30 - x$
0	30
10	20
30	0

$x = 10$	y
10	0
10	10
10	20

$x = 25$	y
25	0
25	10
25	20

x	$y = 7$
0	7
10	7
20	7

x	$y = 15$
0	15
10	15
20	15



Como las restricciones son

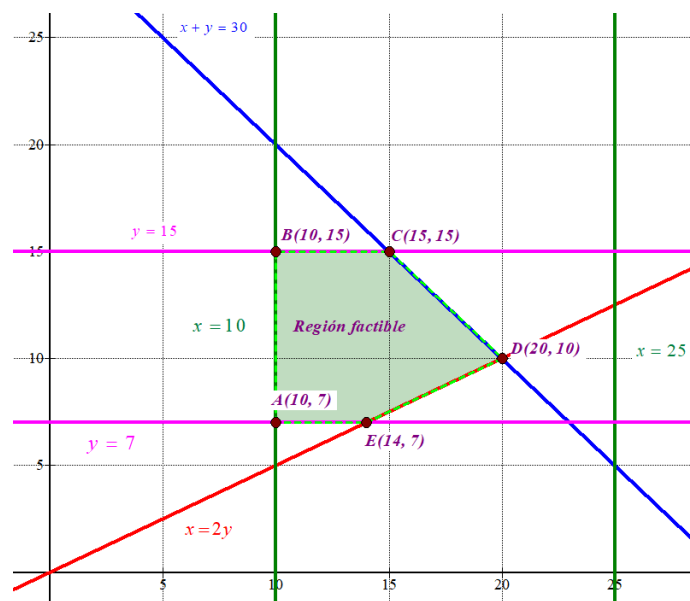
$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada entre las rectas horizontales rosas, entre las rectas verticales verdes, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja.

Comprobamos si el punto $P(15, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 15 \leq 25 \\ 7 \leq 10 \leq 15 \\ 15 \leq 2 \cdot 10 \\ 15 + 10 \leq 30 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos el beneficio anual $B(x, y) = 10000x + 7000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo.

$$A(10, 7) \rightarrow B(10, 7) = 100\,000 + 49\,000 = 149\,000$$

$$B(10, 15) \rightarrow B(10, 15) = 10000 \cdot 10 + 7000 \cdot 15 = 205\,000$$

$$C(15, 15) \rightarrow B(15, 15) = 10000 \cdot 15 + 7000 \cdot 15 = 255\,000$$

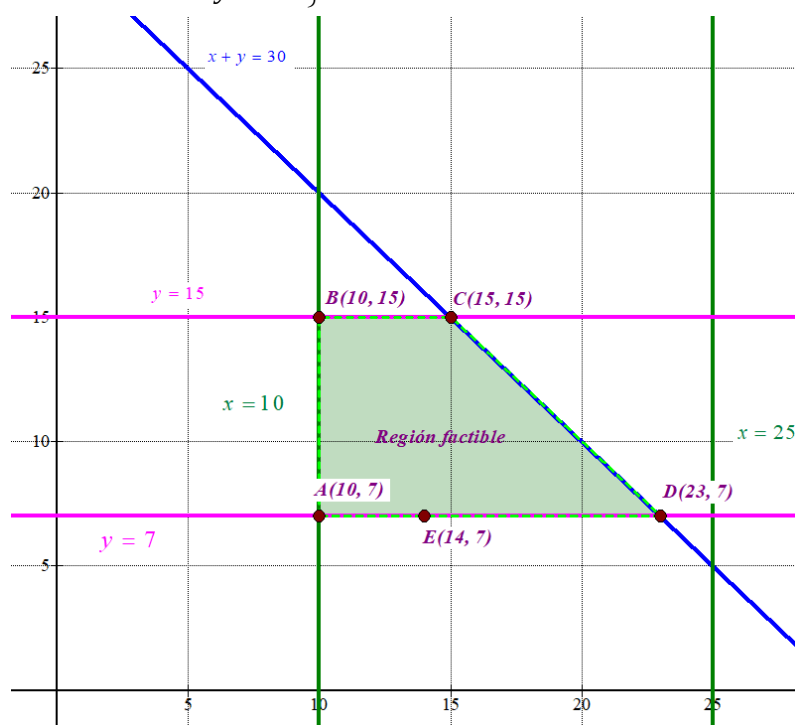
$$D(20, 10) \rightarrow B(20, 10) = 10000 \cdot 20 + 7000 \cdot 10 = 270\,000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(14, 7) \rightarrow B(14, 7) = 10000 \cdot 14 + 7000 \cdot 7 = 189\,000$$

El beneficio máximo es de 270 000 € y se obtiene en el punto D(20, 10).

Dedicando 20 hectáreas a uva negra y 10 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 270 000 €.

iii) Las nuevas restricciones son $\left. \begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$ y la región factible es:



Valoramos el beneficio anual $B(x, y) = 10000x + 7000y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible en busca de un valor máximo.

$$A(10, 7) \rightarrow B(10, 7) = 149\,000$$

$$B(10, 15) \rightarrow B(10, 15) = 205\,000$$

$$C(15, 15) \rightarrow B(15, 15) = 255\,000$$

$$D(23, 7) \rightarrow B(23, 10) = 10000 \cdot 23 + 7000 \cdot 7 = 279\,000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(14, 7) \rightarrow B(14, 7) = 189\,000$$

El beneficio máximo es de 279 000 € y se obtiene en el punto D(23, 7).

Dedicando 23 hectáreas a uva negra y 7 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 279 000 €.

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1) = 1$.

(5 puntos)

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3x^2+1}{9-x^2} = \frac{28}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x^2+1}{9-x^2} = \frac{28}{0^-} = -\infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.



¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2+1}{9-x^2} = \frac{28}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2+1}{9-x^2} = \frac{28}{0^-} = -\infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical

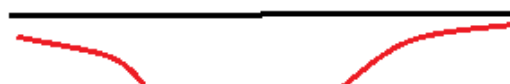


Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2} - 1} = \frac{3 + \frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty} - 1} = \frac{3+0}{0-1} = -3$$

$$\left(x = 100 \rightarrow \frac{3 \cdot 100^2 + 1}{9 - 100^2} = -3.002 < -3 \right)$$

$$\left(x = -100 \rightarrow \frac{3 \cdot (-100)^2 + 1}{9 - (-100)^2} = -3.002 < -3 \right)$$



$y = -3$ es la asíntota horizontal. La gráfica se aproxima a la asíntota por debajo de ella.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

ii) Calculamos la integral indefinida de $f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{2x^3 - 3x + 5}{x} dx = \int \frac{2x^3}{x} dx - \int \frac{3x}{x} dx + \int \frac{5}{x} dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - 3 \int dx + 5 \int \frac{1}{x} dx = 2 \frac{x^3}{3} - 3x + 5 \ln x + C \end{aligned}$$

Determinamos el valor de C para que $F(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 2 \frac{x^3}{3} - 3x + 5 \ln x + C \\ F(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 2 \frac{1^3}{3} - 3 + 5 \ln 1 + C \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} - 3 + C \Rightarrow \boxed{C = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = 2 \frac{x^3}{3} - 3x + 5 \ln x + \frac{10}{3}$.

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

- Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x .
¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)
- ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)
- ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

- i) Los ingresos son $I(x) = 40x$.

$$\text{Los beneficios son } B(x) = I(x) - C(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = -2x^2 + 36x - 98.$$

Nos piden calcular $B(6)$.

$$B(6) = -2 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 - 98 = 46 \text{ €}$$

Produciendo 6 toneladas el beneficio es de 46 €.

- ii) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 98 \Rightarrow B'(x) = -4x + 36$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 36 = 0 \Rightarrow -4x = -36 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -4x + 36 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(9) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el beneficio tiene un máximo relativo en $x = 9$.

Como $B(9) = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 98 = 64$ el beneficio máximo es de 64 € y se obtiene con 9 toneladas de producto.

- iii) Averiguamos cuando el beneficio es cero.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 36x - 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(49)}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{128}}{2} = \begin{cases} \frac{18 + \sqrt{128}}{2} = 9 + 4\sqrt{2} \approx 14.65 \\ \frac{18 - \sqrt{128}}{2} = 9 - 4\sqrt{2} \approx 3.34 \end{cases}$$

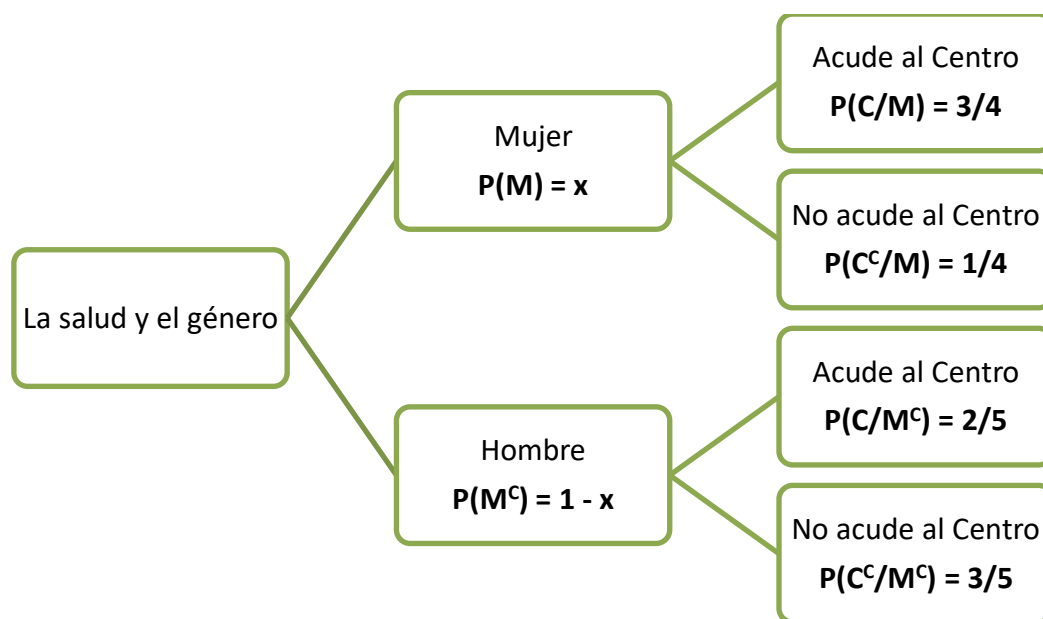
Como la función tiene un máximo en $x = 9$ entonces crece de 0 a 9 y decrece de 9 en adelante. Por ello el beneficio es negativo con una producción inferior a 3.34 toneladas y también con una producción superior a 14.65 toneladas.

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

- i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)
- Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:
- ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)
- iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

- i) Realizamos un diagrama de árbol.



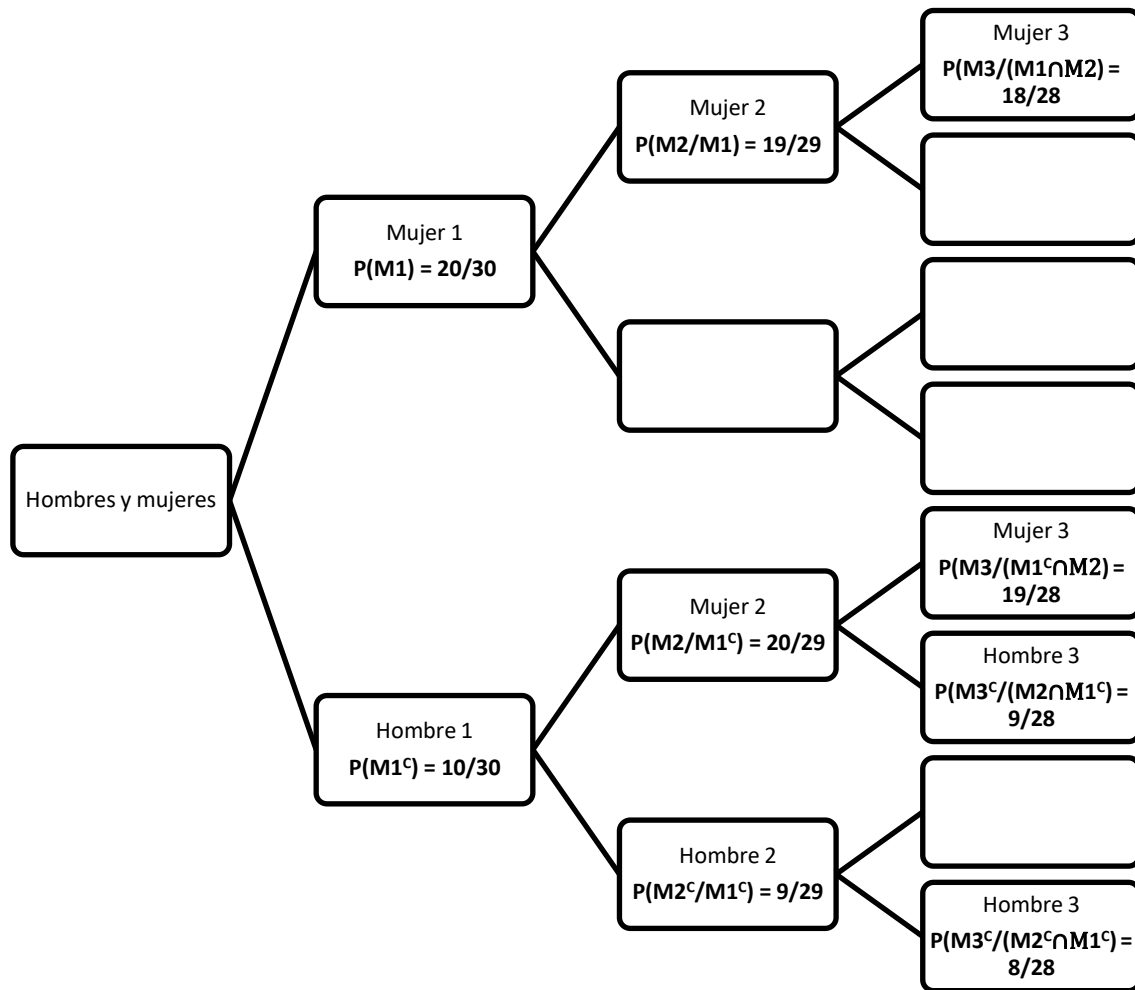
Usamos el suceso contrario.

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud es 1 menos la probabilidad de que ninguno haya acudido al centro de salud.

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{20} = 0.85$$

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud es de 0.85.

- ii) Realizamos un diagrama de árbol del nuevo experimento aleatorio planteado.



Con los datos del diagrama tenemos:

$$P(M1^c \cap M2^c \cap M3^c) = P(M1^c) \cdot P(M2^c / M1^c) \cdot P(M3^c / (M1^c \cap M2^c)) =$$

$$= \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} = \frac{6}{203} \approx 0.0296$$

La probabilidad de que los tres elegidos sean hombres es de 0.0296.

iii) Hay varias formas de que solo haya una mujer.

$$P(M1 \cap M2^c \cap M3^c) + P(M1^c \cap M2 \cap M3^c) + P(M1^c \cap M2^c \cap M3) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} = 3 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} = \frac{45}{203} \approx 0.2217$$

La probabilidad de que sólo haya una mujer entre los tres elegidos es de 0.2217.

EJERCICIO 6:

- i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)
- ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

- i) De $175 + 150 = 325$ personas no escuchan música clásica $100 + 0.8 \cdot 150 = 220$ personas, por lo que $325 - 220 = 105$ personas escuchan música clásica. Eso es una proporción de

$$p_r = \frac{105}{325} = \frac{21}{65} \approx 0.323.$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 93 %

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.035 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.965 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.81$$

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow Error = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{21}{65} \cdot \frac{44}{65}} \approx 0.047$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que escuchan música clásica es:

$$(p_r - Error, p_r + Error) = (0.323 - 0.047, 0.323 + 0.047) = (0.276, 0.37)$$

La proporción de personas que escuchan música clásica se espera (con un nivel de confianza del 93%) que esté entre el 27.6 % y el 37 %.

- ii) Si la varianza es 1225 la desviación típica es $\sqrt{1225} = 35$ puntos.

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$[67.4050, 82.5950] \Rightarrow Error = \frac{82.5950 - 67.4050}{2} = 7.595 \text{ puntos}$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

z	0	0.1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5080	0.5120
0.2	0.5160	0.5200
0.3	0.5239	0.5279
0.4	0.5319	0.5359
0.5	0.5398	0.5438
0.6	0.5478	0.5518
0.7	0.5557	0.5597
0.8	0.5637	0.5677
0.9	0.5716	0.5756
1.0	0.5795	0.5835
1.1	0.5874	0.5914
1.2	0.5953	0.5993
1.3	0.6032	0.6072
1.4	0.6111	0.6151
1.5	0.6190	0.6230
1.6	0.6269	0.6309
1.7	0.6348	0.6388
1.8	0.6427	0.6467
1.9	0.6506	0.6546
2.0	0.6585	0.6625
2.1	0.6664	0.6704
2.2	0.6743	0.6783
2.3	0.6822	0.6862
2.4	0.6901	0.6941
2.5	0.6980	0.7020
2.6	0.7059	0.7099
2.7	0.7138	0.7178
2.8	0.7217	0.7257
2.9	0.7296	0.7336
3.0	0.7375	0.7415
3.1	0.7454	0.7494
3.2	0.7533	0.7573
3.3	0.7612	0.7652
3.4	0.7691	0.7731
3.5	0.7770	0.7810
3.6	0.7849	0.7889
3.7	0.7928	0.7968
3.8	0.7997	0.8037
3.9	0.8076	0.8116
4.0	0.8155	0.8195
4.1	0.8234	0.8274
4.2	0.8313	0.8353
4.3	0.8392	0.8432
4.4	0.8471	0.8511
4.5	0.8550	0.8590
4.6	0.8629	0.8669
4.7	0.8708	0.8748
4.8	0.8787	0.8827
4.9	0.8866	0.8906
5.0	0.8945	0.8985
5.1	0.9024	0.9064
5.2	0.9103	0.9143
5.3	0.9182	0.9222
5.4	0.9261	0.9301
5.5	0.9340	0.9380
5.6	0.9419	0.9459
5.7	0.9498	0.9538
5.8	0.9577	0.9617
5.9	0.9656	0.9696
6.0	0.9735	0.9775
6.1	0.9814	0.9854
6.2	0.9893	0.9933
6.3	0.9972	0.9992
6.4	0.9991	0.9999
6.5	0.9998	0.9999
6.6	0.9999	0.9999
6.7	0.9999	0.9999
6.8	0.9999	0.9999
6.9	0.9999	0.9999
7.0	0.9999	0.9999

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.985 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño de la muestra (n).

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7.595 = 2.17 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 35}{7.595} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 35}{7.595} \right)^2 = 100$$

El tamaño de la muestra elegida para realizar el intervalo de confianza es de 100 estudiantes.

EvAU Ordinaria 2024

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2023-2024

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

- i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
- ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.

La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x < -1 \\ 4 - x & \text{si } -1 \leq x < 1. \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- i) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
- ii) Estudie la derivabilidad de $f(x)$. (3 puntos)
- iii) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$. (4 puntos)

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = x(x-2)^2$.

- i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (3 puntos)
- ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función $f(x)$ presenta puntos de inflexión? (4 puntos)
- iii) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$. (3 puntos)

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

- i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
- ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
- iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días². Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

- i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
- ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

- i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
 ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

- i) Llamamos s al número de sesiones de senderismo, r al de rápel y c a las de ciclismo. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

“Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones” $\rightarrow s + r + c = 45$.

“Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día” $\rightarrow$
 $40s + 20r + 60c = 1700$

“Por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{cc} \text{Rápel} & \text{Senderismo} \\ r & \longrightarrow s \\ 1 & \longrightarrow 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3r = s$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} s + r + c = 45 \\ 40s + 20r + 60c = 1700 \\ 3r = s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s + r + c = 45 \\ 2s + r + 3c = 85 \\ 3r = s \end{array} \right\}$$

- ii) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} s + r + c = 45 \\ 2s + r + 3c = 85 \\ 3r = s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3r + r + c = 45 \\ 6r + r + 3c = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4r + c = 45 \rightarrow c = 45 - 4r \\ 7r + 3c = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7r + 3(45 - 4r) = 85 \Rightarrow 7r + 135 - 12r = 85 \Rightarrow -5r = -50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{-50}{-5} = 10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{s = 30} \\ \boxed{c = 45 - 40 = 5} \end{array} \right.$$

30 personas hicieron senderismo, 10 hicieron rápel y 5 hicieron ciclismo de montaña.

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.

La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

- Plantee el problema. (4 puntos)
- Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

- Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “litros de disolvente diarios procedentes del distribuidor D1”, y = “litros diarios procedentes del distribuidor D2”.

Hacemos una tabla.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1 (x)	$0.8x$	$0.06x$
D2 (y)	y	$0.02y$
TOTALES	$0.8x + y$	$0.06x + 0.02y$

Se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental que viene dado por la expresión:

$$C(x, y) = 0.06x + 0.02y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

“La empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente” $\rightarrow$
 $0.8x + y \leq 80$

“El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad” $\rightarrow y \leq 20; x \leq 60$

“La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día” $\rightarrow x + y \geq 50$.

“La empresa quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2” $\rightarrow$
 $x \geq y + 30$.

Además, las cantidades deben ser valores positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.8x + y \leq 80 \\ y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y + 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 5y \leq 400 \\ y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y + 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$$4x + 5y = 400$$

$$y = 20$$

$$x = 60$$

x	$y = \frac{400 - 4x}{5}$
0	80
50	40
100	0

x	y = 20
0	20
30	20
70	20

x = 60	y
60	0
60	10
60	20

$$x + y = 50$$

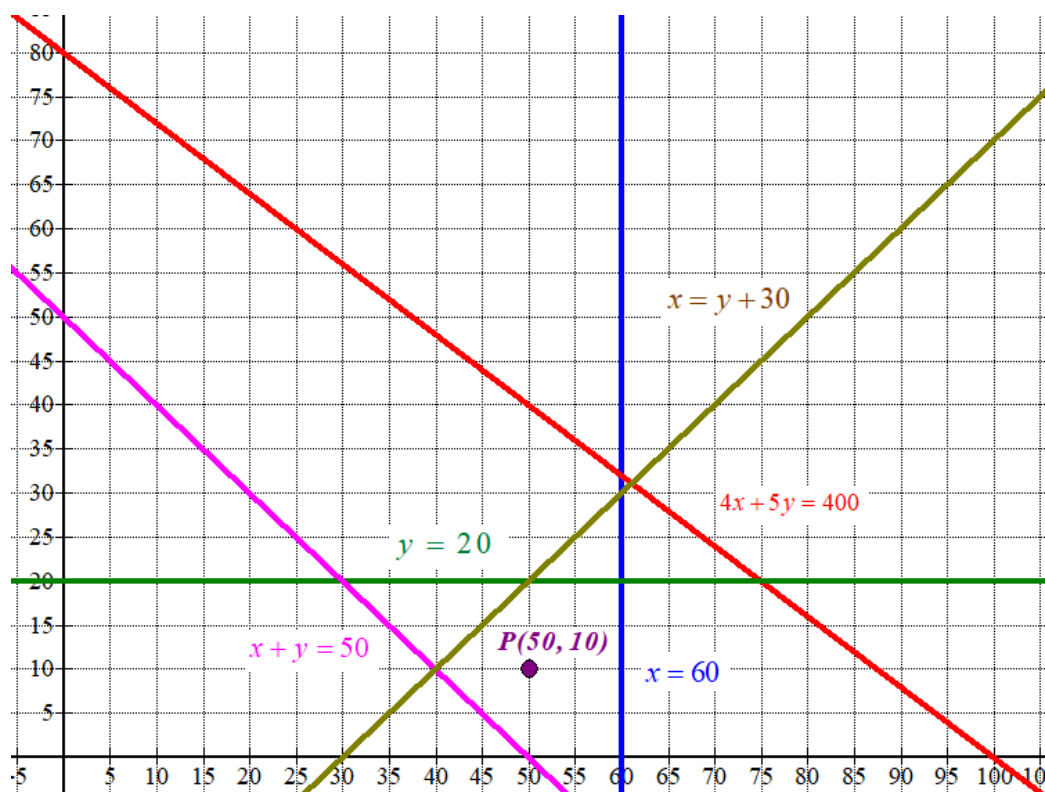
$$x = y + 30$$

$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$

x	y = 50 - x
0	50
30	20
50	0

x	y = x - 30
30	0
50	20
60	30

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

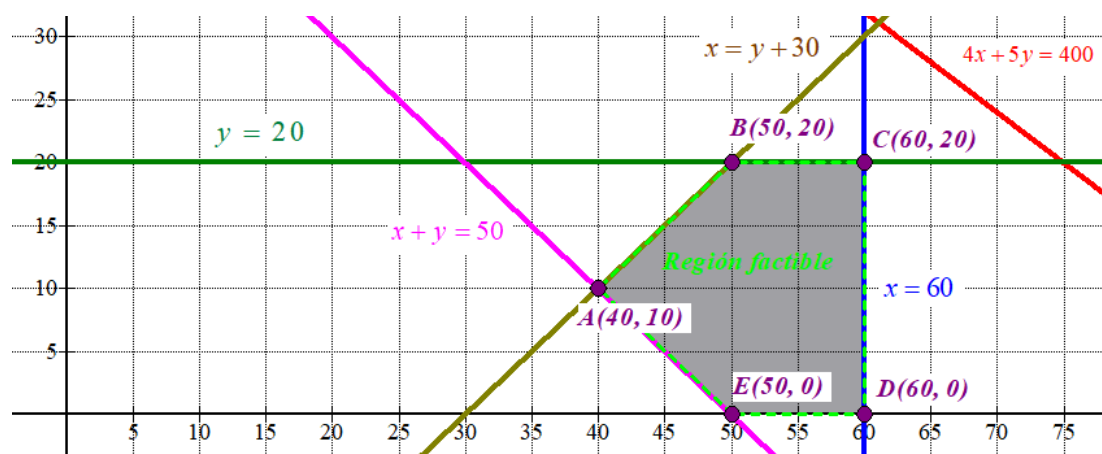
$$\left. \begin{array}{l} 4x + 5y \leq 400 \\ y \leq 20 \\ x \leq 60 \\ x + y \geq 50 \\ x \geq y + 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas verde, roja y marrón, por encima de la recta rosa y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto $P(50,10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 50 + 5 \cdot 10 \leq 400 \\ 10 \leq 20 \\ 50 \leq 60 \\ 50 + 10 \geq 50 \\ 50 \geq 10 + 30 \\ 50 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos el nivel de contaminación ambiental $C(x, y) = 0.06x + 0.02y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor mínimo.

$$\begin{aligned} A(40,10) &\rightarrow C(40,10) = 0.06 \cdot 40 + 0.02 \cdot 10 = 2.6 \text{ ¡Mínimo!} \\ B(50,20) &\rightarrow C(50,20) = 0.06 \cdot 50 + 0.02 \cdot 20 = 3.4 \\ C(60,20) &\rightarrow C(60,20) = 0.06 \cdot 60 + 0.02 \cdot 20 = 4 \\ D(60,0) &\rightarrow C(60,0) = 0.06 \cdot 60 + 0.02 \cdot 0 = 3.6 \\ E(50,0) &\rightarrow C(50,0) = 0.06 \cdot 50 + 0.02 \cdot 0 = 3 \end{aligned}$$

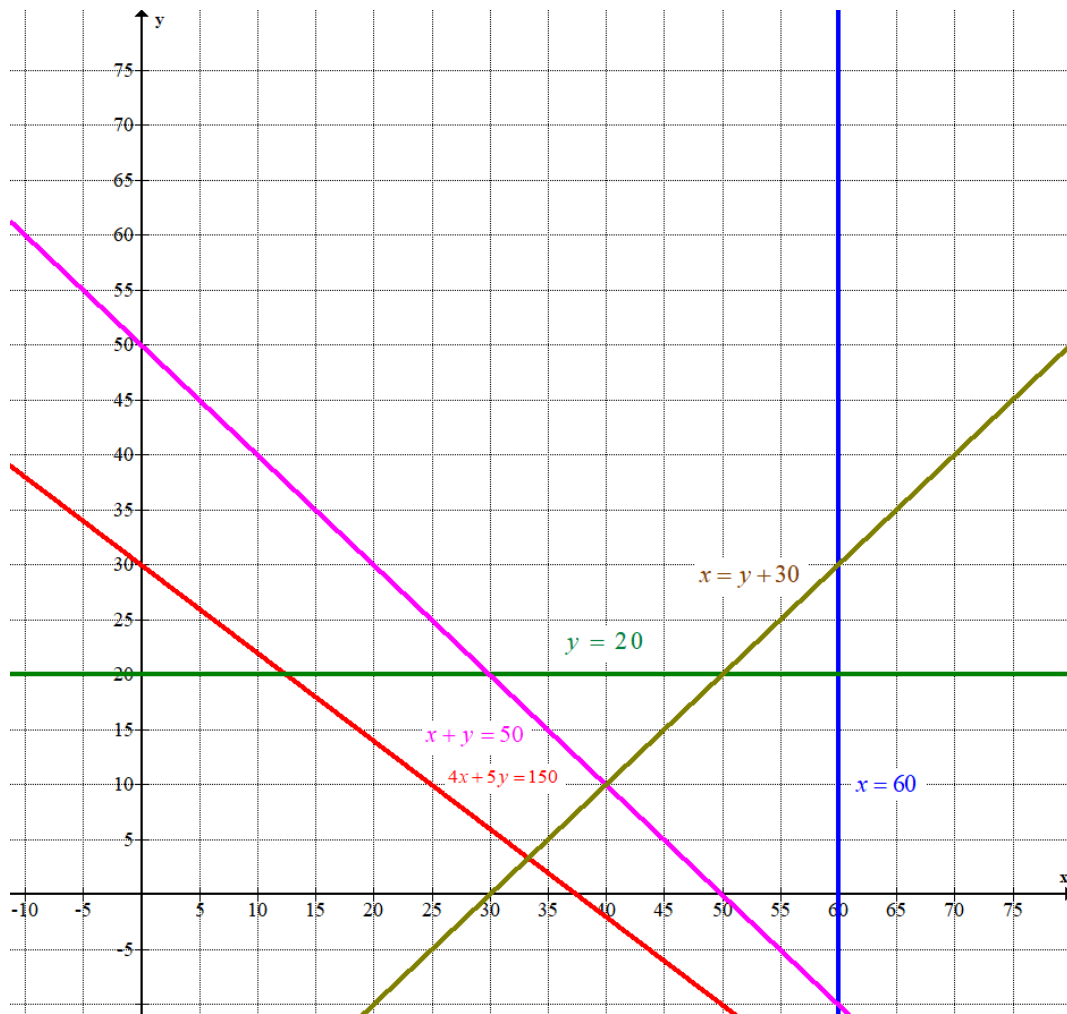
El nivel de contaminación ambiental mínimo es de 2.6 mg/litro y se obtiene en el punto $A(40, 10)$.

Con el envío diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2 la contaminación ambiental es mínima con un valor de 2.6 mg/litro.

iii) En el problema resuelto la condición era: “Si la empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente” y la inequación asociada era:

$$0.8x + y \leq 80 \Rightarrow 4x + 5y \leq 400.$$

Con la nueva condición: “Si la empresa no quiere gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente” la inecuación asociada es $0.8x + y \leq 30 \Rightarrow 4x + 5y \leq 150$. La nueva región factible no existe. Es un conjunto de restricciones que no cumple ningún punto del plano.



No existe ningún punto en el primer cuadrante por debajo de la línea roja y por encima de la línea rosa. Son unas condiciones imposibles de cumplir.

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x < -1 \\ 4 - x & \text{si } -1 \leq x < 1. \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- i) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
 ii) Estudie la derivabilidad de $f(x)$. (3 puntos)
 iii) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$. (4 puntos)

i) La función en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ son expresiones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

¿La función es continua en $x = -1$?

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 4 - (-1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -x^2 - 4x = -(-1)^2 - 4(-1) = -1 + 4 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 4 - x = 4 - (-1) = 5 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 5 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ la función no es continua en $x = -1$. Esta discontinuidad es inevitable de salto finito.

¿La función es continua en $x = 1$?

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 - x = 4 - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 6x + 8 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. Presentando una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -1$.

ii) La función en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ son expresiones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en los cambios de definición.

¿La función es derivable en $x = -1$? No es derivable pues no es continua.

¿La función es derivable en $x = 1$?

Investigamos si son iguales las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 6 = 2 - 6 = -4$$

Como $f'(1^-) = -1 \neq -4 = f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.

iii) La función en el intervalo $(0, 2)$ se expresa de dos formas distintas. Calculamos la integral definida pedida como la integral definida entre 0 y 1 más la integral definida entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 4 - x dx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8 dx = \\ &= \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 = \left[4 - \frac{1^2}{2} \right] - \left[0 - \frac{0^2}{2} \right] + \left[\frac{2^3}{3} - 12 + 16 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 + 8 \right] = \\ &= 4 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 5 = 3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{26}{9}} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = x(x-2)^2$.

- Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (3 puntos)
- Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de x la función $f(x)$ presenta puntos de inflexión? (4 puntos)
- Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$. (3 puntos)

i) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x(x-2)^2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

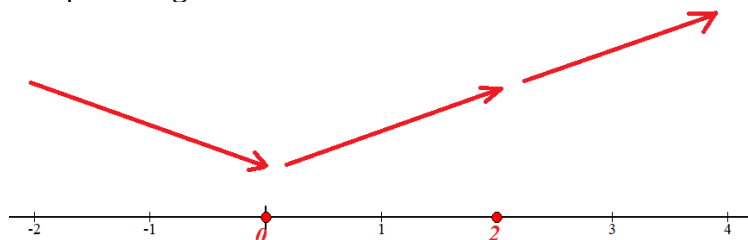
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = (-1)(-1-2)^2 = -9 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (1)(1-2)^2 = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = (3)(3-2)^2 = 3 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

ii) Buscamos los valores que anulan la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = x(x-2)^2 = x(x^2 + 4 - 4x) = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La función presenta dos posibles puntos de inflexión. Comprobamos si la derivada tercera es no nula para dichos valores.

$$f''(x) = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow f'''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} f'''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 4 \neq 0 \\ f'''(\frac{2}{3}) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = -4 \neq 0 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de inflexión: $x = 2$ y $x = \frac{2}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, \frac{2}{3})$ tomo $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 4 = 4 > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo } (-\infty, \frac{2}{3}).$$

- En el intervalo $(\frac{2}{3}, 2)$ tomo $x = 1$ y la derivada segunda vale

$$f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4 = -1 < 0. \text{ La función es cóncava (O) en el intervalo } (\frac{2}{3}, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada segunda vale

$$f''(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 4 = 7 > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo } (2, +\infty).$$

La función es convexa en $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ y cóncava en $(\frac{2}{3}, 2)$.

iii) La integral de la derivada $f'(x)$ es la función $f(x) \rightarrow \int f'(x) dx = f(x)$. Lo aplicamos para calcular la función $f(x)$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^3 - 4x^2 + 4x dx = \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$$

Como $f(0) = 5$ sustituimos en la función obtenida y determinamos el valor de C.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = \frac{0^4}{4} - 4 \frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 + C \Rightarrow \boxed{C=5}$$

La función tiene la expresión $f(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5$.

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

- Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
- Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
- Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %		40 %
No consulta libros			
	55 %		100 %

Completamos la tabla.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %	25 %	40 %
No consulta libros	40 %	20 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

Respondemos a las preguntas planteadas.

- Hay un 40 % que solo consulta videos, un 25 % que solo consulta libros y un 15 % que consulta ambos formatos. Hay un $40 + 25 + 15 = 80$ % que consulta alguno de los dos formatos. La probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos es de 0.8.
- Hay un 40 % que solo consulta videos y un 25 % que solo consulta libros. Hay un $40 + 25 = 65$ % que consulta solamente uno de los dos formatos. La probabilidad de que un universitario consulte solo uno de los dos formatos es de 0.65.
- Hay un 45 % de los universitarios que no consulta videos y un 20 % que no consulta videos ni libros. Aplicando la regla de Laplace tenemos $\frac{20}{45} = \frac{4}{9} \simeq 0.4444$ es la probabilidad de que no consulte libros sabiendo que no consulta videos con tutoriales.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos L a “el joven consulta libros en la biblioteca” y T a “el joven consulta videos con tutoriales”. Sabemos que $P(L) = 0.40$, $P(T) = 0.55$ y $P(L \cap T) = 0.15$.

$$i) P(L \cup T) = P(L) + P(T) - P(L \cap T) = 0.40 + 0.55 - 0.15 = \boxed{0.80}$$

$$ii) P(\bar{L} \cap T) + P(L \cap \bar{T}) = P(T) - P(L \cap T) + P(L) - P(L \cap T) = 0.55 - 0.15 + 0.4 - 0.15 = \boxed{0.65}$$

$$iii) P(\bar{L} / \bar{T}) = \frac{P(\bar{L} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\overline{L \cup T})}{1 - P(T)} = \frac{1 - P(L \cup T)}{1 - P(T)} = \frac{1 - 0.8}{1 - 0.55} = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.4444}$$

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días². Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

- Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
- Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

X = El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios.

Como la varianza es 2500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{2500} = 50$ días.

$$X = N(\mu, 50)$$

- El tamaño de la muestra es $n = 10$. Calculamos la media de la muestra obtenida.

$$\bar{x} = \frac{101 + 200 + 187 + 69 + 237 + 125 + 173 + 235 + 24 + 60}{10} = 141.1 \text{ días}$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.96 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$$

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \approx 27.67 \text{ días}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (141.1 - 27.67, 141.1 + 27.67) = (113.43, 168.77)$$

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{68.62143}{2} = 34.310715 \text{ días}$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “ $z_{\alpha/2}$ ”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 34.310715 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{34.310715 \cdot \sqrt{10}}{50} = 2.17$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 2.17$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P(Z < 2.17) \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5715	0.5755
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7191	0.7226
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7824	0.7854
0.8	0.7883	0.7913	0.7943	0.7973	0.7999	0.8023	0.8051	0.8078	0.8104	0.8130
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8998	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9266	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9440
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9493	0.9503	0.9513	0.9523	0.9532	0.9541
1.7	0.9550	0.9559	0.9567	0.9575	0.9583	0.9591	0.9599	0.9606	0.9613	0.9621
1.8	0.9628	0.9635	0.9642	0.9648	0.9655	0.9661	0.9667	0.9673	0.9678	0.9683
1.9	0.9688	0.9693	0.9698	0.9703	0.9708	0.9713	0.9718	0.9722	0.9727	0.9731
2.0	0.9736	0.9740	0.9744	0.9748	0.9752	0.9756	0.9760	0.9764	0.9768	0.9771
2.1	0.9775	0.9778	0.9781	0.9784	0.9787	0.9790	0.9793	0.9796	0.9798	0.9801
2.2	0.9803	0.9806	0.9808	0.9810	0.9812	0.9814	0.9816	0.9818	0.9819	0.9821
2.3	0.9822	0.9824	0.9826	0.9827	0.9828	0.9829	0.9830	0.9831	0.9832	0.9833
2.4	0.9834	0.9835	0.9836	0.9837	0.9838	0.9839	0.9840	0.9841	0.9842	0.9843
2.5	0.9844	0.9845	0.9846	0.9847	0.9848	0.9849	0.9850	0.9851	0.9852	0.9853
2.6	0.9854	0.9855	0.9856	0.9857	0.9858	0.9859	0.9860	0.9861	0.9862	0.9863
2.7	0.9864	0.9865	0.9866	0.9867	0.9868	0.9869	0.9870	0.9871	0.9872	0.9873
2.8	0.9874	0.9875	0.9876	0.9877	0.9878	0.9879	0.9880	0.9881	0.9882	0.9883
2.9	0.9884	0.9885	0.9886	0.9887	0.9888	0.9889	0.9890	0.9891	0.9892	0.9893
3.0	0.9894	0.9895	0.9896	0.9897	0.9898	0.9899	0.9900	0.9901	0.9902	0.9903

El nivel de confianza es del 97 %.

EvAU Extraordinaria 2023

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

- i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. (7 puntos)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

- ii) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

- Plantee el problema. (4 puntos)
- Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Considere las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

- Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x = 1$, aplicando la definición de derivada. (3 puntos)
- Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto. (7 puntos)

EJERCICIO 4:

El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función:

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ 2t - 3 & \text{si } 7 < t \leq 10 \end{cases}, \text{ siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses.}$$

- i) ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa? (1 punto)
- ii) Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
- iii) ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo? (3 puntos)
- iv) Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa. (3 puntos)

EJERCICIO 5:

- i) En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio. (5 puntos)
- ii) En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40% realizaban 5 comidas al día y el 70% de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80% de los estudiantes que realizaban 5 comidas al día hacían ejercicio físico regularmente.
Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. (3 puntos)
Compruebe si los sucesos “comer 5 comidas al día” y “hacer ejercicio físico regularmente” son o no sucesos independientes. (2 puntos)

EJERCICIO 6:

El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros², mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

- i) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88%. Interprete las soluciones en el contexto del problema. (5 puntos)
 - ii) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: [1.525, 1.675]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. (7 puntos)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

ii) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute. (3 puntos)

i) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos de A y A/B utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 3 \quad 5 \quad 5 \\ -4 \quad -4 \quad -12 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -7 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -7 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -7 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 7 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 3 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -7 \quad 1 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A \quad 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B , pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ -y-7z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ -1-7z=y \end{cases} \Rightarrow x-1-7z+3z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+4z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=-1-7\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

ii) Comprobamos cuando $A \cdot B = B \cdot A$. Sustituimos los valores de A y B.

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & -6+6 \\ -4+2k & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 & 4-4 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12-k=-14 \\ 0=0 \\ -4+2k=3k-6 \\ -14=-k-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=k \\ 0=0 \\ 2=k \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k=2}$$

El valor buscado es $k = 2$.

EJERCICIO 2:

Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “número de horas de M1”. y = “número de horas de M2”.

Hacemos una tabla para ordenar toda la información proporcionada.

	Metros de lámina rayada	Metros de lámina lisa	Metros de lámina doblemente rayada	Coste
Nº horas M1 (x)	$10x$	$50x$	$10x$	$800x$
Nº horas M2 (y)	$40y$	$20y$	$10y$	$100y$
	$10x + 40y$	$50x + 20y$	$10x + 10y$	$800x + 100y$

Se desea minimizar el coste. La función objetivo sería: $C(x, y) = 800x + 100y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

“La empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada” $\rightarrow$

$$10x + 40y \geq 240; \quad 50x + 20y \geq 300; \quad 10x + 10y \geq 120$$

Además, el número de horas debe ser positivo o cero $\rightarrow x \geq 0; \quad y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 40y \geq 240 \\ 50x + 20y \geq 300 \\ 10x + 10y \geq 120 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$$x + 4y = 24$$

x	$y = \frac{24-x}{4}$
0	6
8	4
24	0

$$5x + 2y = 30$$

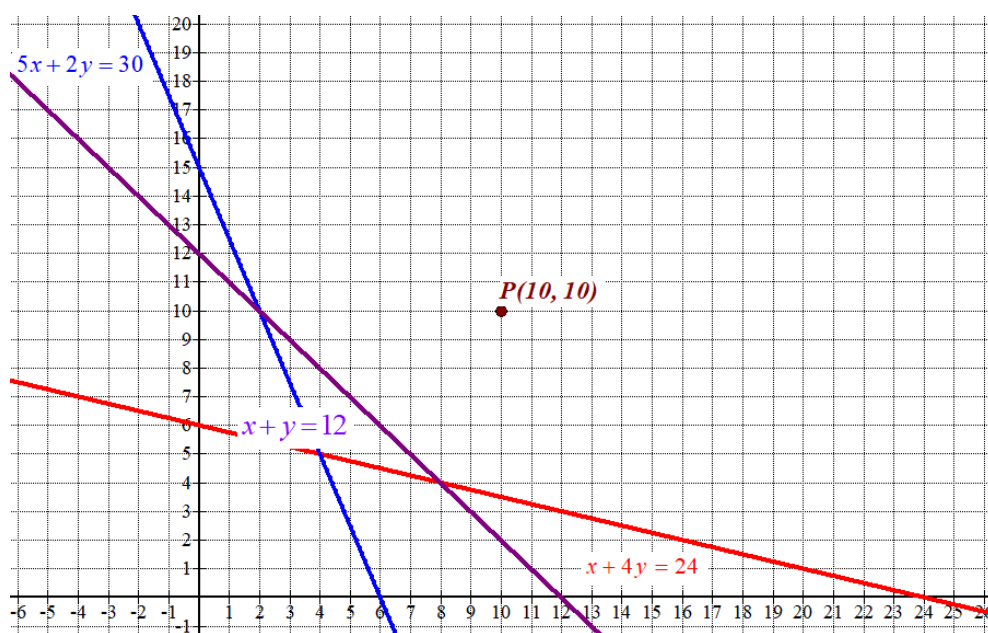
x	$y = \frac{30-5x}{2}$
0	15
2	10
6	0

$$x + y = 12$$

x	$y = 12 - x$
0	12
2	10
8	4
12	0

$$x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Primer cuadrante



Como las restricciones son

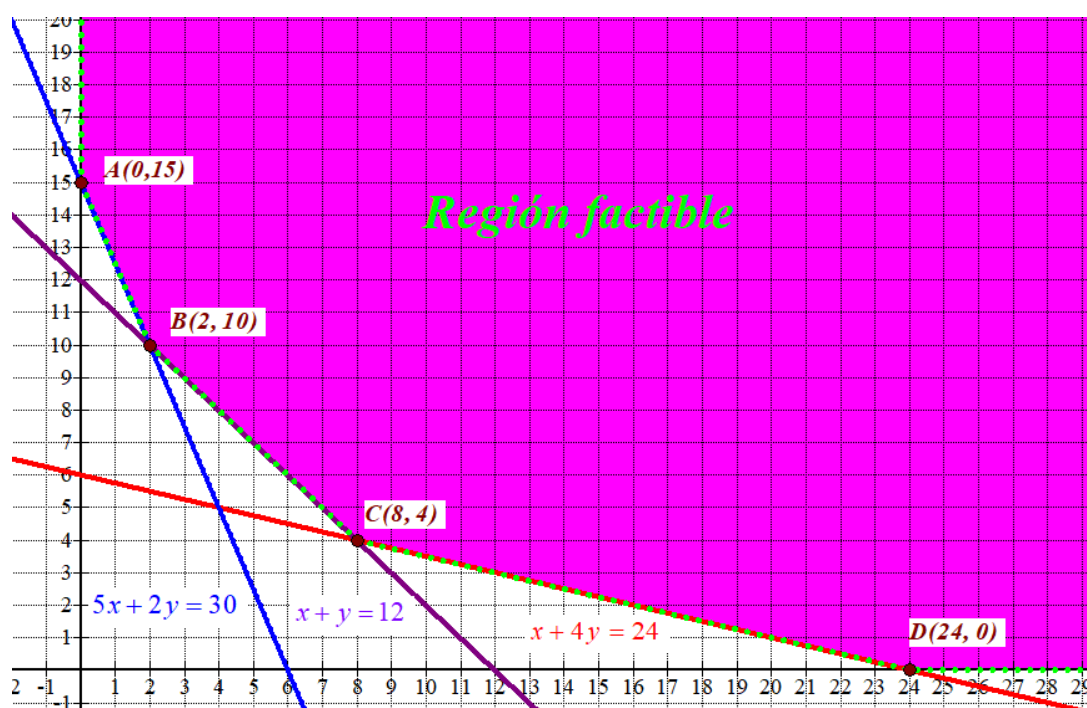
$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada en el}$$

primer cuadrante por encima de la recta azul, roja, verde y violeta.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 40 \geq 24 \\ 50 + 20 \geq 30 \\ 10 + 10 \geq 12 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función coste $C(x, y) = 800x + 100y$ en cada uno de los vértices de la región factible buscando el valor mínimo.

$$A(0, 15) \rightarrow C(0, 15) = 0 + 1500 = 1500 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(2, 10) \rightarrow C(2, 10) = 1600 + 1000 = 2600$$

$$C(8, 4) \rightarrow C(8, 4) = 6400 + 400 = 6800$$

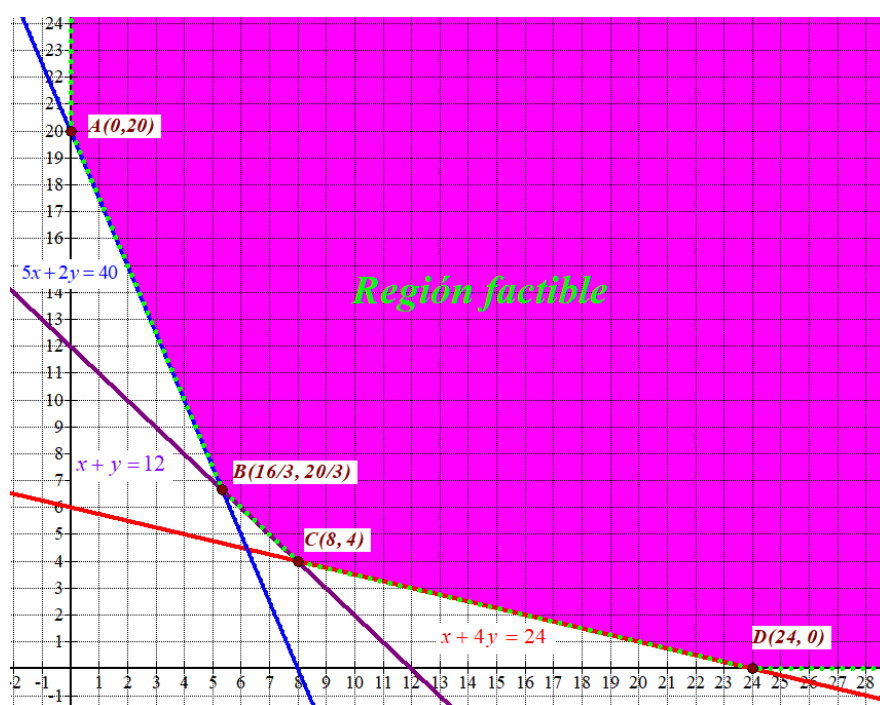
$$D(24, 0) \rightarrow C(24, 0) = 15200 + 0 = 15200$$

El mínimo coste es de 1500 € y se produce en el vértice A(0, 15).

Con 0 horas de la máquina M1 y 15 horas de la máquina M2 cumplimos todas las restricciones con un coste mínimo de 1500 €.

- iii) Si se modifica la restricción “La empresa tiene una demanda diaria de al menos 400 metros de lámina lisa” $\rightarrow 50x + 20y \geq 400 \rightarrow 5x + 2y \geq 40$

La nueva región factible sería:



Valoramos la función coste $C(x, y) = 800x + 100y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible buscando el valor mínimo.

$$A(0, 20) \rightarrow C(0, 20) = 0 + 2000 = 2000 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(16/3, 20/3) \rightarrow C(16/3, 20/3) = \frac{16}{3}800 + \frac{20}{3}100 = \frac{14800}{3} \approx 4933.33$$

$$C(8, 4) \rightarrow C(8, 4) = 6400 + 400 = 6800$$

$$D(24, 0) \rightarrow C(24, 0) = 15200 + 0 = 15200$$

Con la nueva situación la solución que minimiza el coste es el punto A(0, 20).

El mínimo coste es de 2000 € y se produce con 0 horas de la máquina M1 y 20 horas de la máquina M2.

EJERCICIO 3:

Considere las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

- i) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x = 1$, aplicando la definición de derivada. (3 puntos)
- ii) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto. (7 puntos)

i) $g'(x) = -2x + 4 \Rightarrow g'(1) = -2 + 4 = 2.$

Aplicando la definición de derivada tenemos que:

$$\begin{aligned} g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 4(1+h) + 3 - (-1^2 + 4 + 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h^2+2h) + 4 + 4h + 3 - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - h^2 - 2h + 4 + 4h + 3 - 6}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -h + 2 = \boxed{2} \end{aligned}$$

- ii) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

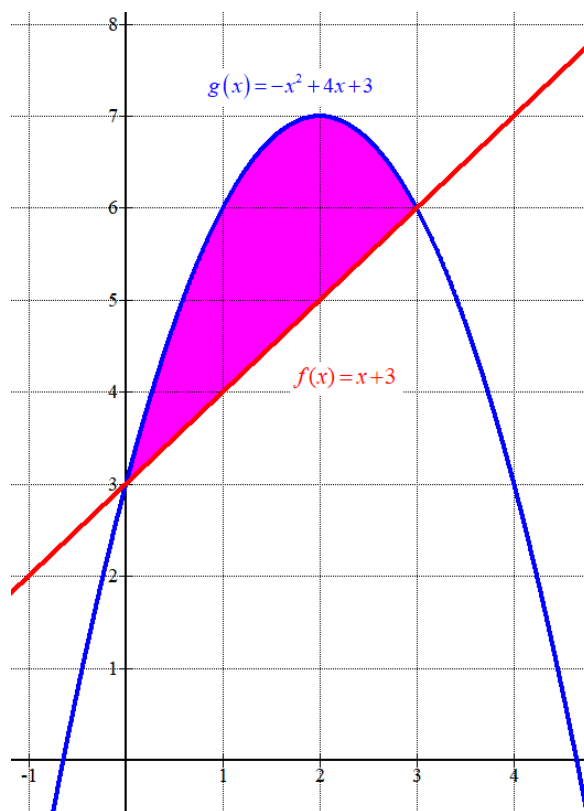
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x + 3 = -x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar recta y parábola entre 0 y 3.

x	$f(x) = x + 3$
0	3
3	6
x	$g(x) = -x^2 + 4x + 3$
0	3
1	6
2	7
3	6

Calculamos el área del recinto.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 -x^2 + 4x + 3 - (x + 3) dx = \\ &= \int_0^3 -x^2 + 4x + 3 - x - 3 dx = \int_0^3 -x^2 + 3x dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] = \\ &= -9 + \frac{27}{2} = \boxed{4.5 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



EJERCICIO 4:

El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función:

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ 2t - 3 & \text{si } 7 < t \leq 10 \end{cases}, \text{ siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses.}$$

- i) ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa? (1 punto)
 ii) Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
 iii) ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo? (3 puntos)
 iv) Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa. (3 puntos)

i) Nos piden el valor de $B(0)$.

$$B(0) = -0^2 + 8 \cdot 0 + 4 = 4$$

El beneficio inicial de la empresa es de 4000 €.

ii) El único punto donde puede haber discontinuidad es en el cambio de definición, en $t = 7$, pues los dos trozos son funciones polinómicas que son continuas.

$$\left. \begin{array}{l} B(7) = -7^2 + 8 \cdot 7 + 4 = 11 \\ \lim_{t \rightarrow 7^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 7^-} -t^2 + 8t + 4 = 11 \\ \lim_{t \rightarrow 7^+} B(t) = \lim_{t \rightarrow 7^+} 2t - 3 = 14 - 3 = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow B(7) = \lim_{t \rightarrow 7^-} B(t) = \lim_{t \rightarrow 7^+} B(t) = 11$$

La función es continua en su dominio $[0, 10]$.

No hay puntos de discontinuidad.

iii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$B'(t) = \begin{cases} -2t + 8 & \text{si } 0 \leq t < 7 \\ 2 & \text{si } 7 < t \leq 10 \end{cases}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 8 = 0 \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4 \in (0, 7) \\ 2 = 0 \quad \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La función presenta un punto crítico, en $t = 4$.

Valoramos la función en este valor y en los extremos de los intervalos de definición.

$$\left. \begin{array}{l} B(0) = 4 \\ B(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 4 = 20 \text{ ¡Máximo!} \\ B(7) = 11 \\ B(10) = 20 - 3 = 17 \end{array} \right\}$$

En $t = 4$ hay un valor máximo absoluto de la función beneficio.

En el cuarto mes se obtiene un beneficio máximo de 20000 €.

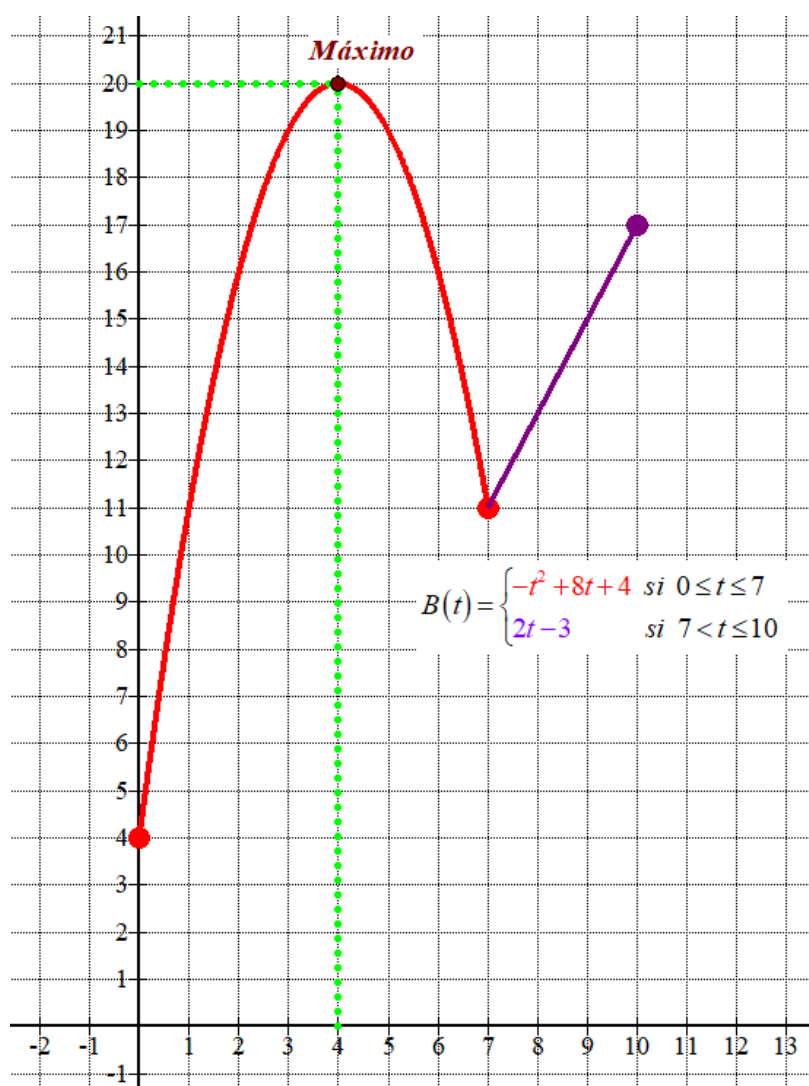
iv) Para representar la gráfica de la función hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función beneficio.

$$0 \leq t \leq 7$$

t	$B(t) = -t^2 + 8t + 4$
0	4
1	11
3	19
4	20
5	19
7	11

$$7 < t \leq 10$$

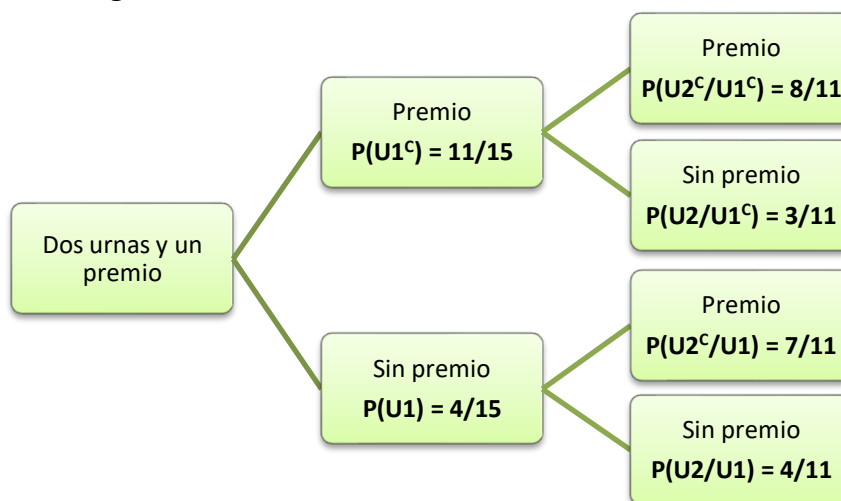
t	$B(t) = 2t - 3$
8	13
10	17



EJERCICIO 5:

- i) En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio. (5 puntos)
- ii) En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40% realizaban 5 comidas al día y el 70% de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80% de los estudiantes que realizaban 5 comidas al día hacían ejercicio físico regularmente. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. (3 puntos)
- Compruebe si los sucesos “comer 5 comidas al día” y “hacer ejercicio físico regularmente” son o no sucesos independientes. (2 puntos)

- i) Llamamos U_1 = “Elegir bola **no** premiada en urna 1”, U_2 = “Elegir bola **no** premiada en urna 2”. Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden determinar el valor de $P(U_2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(U_2) = P(U_1^c)P(U_2/U_1^c) + P(U_1)P(U_2/U_1) = \frac{11}{15} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{11} = \frac{49}{165} \approx 0.297$$

- ii) Realizamos una tabla de contingencia para ordenar la información proporcionada y obtener el resto de datos que vienen implícitos en el ejercicio.

	5 comidas al día	No hacen 5 comidas al día	
Hacen ejercicio físico	$0.80 \cdot 40 = 32$		70
No hacen ejercicio físico			
	40		100

Completamos la tabla.

	5 comidas al día	No hacen 5 comidas al día	
Hacen ejercicio físico	$0.80 \cdot 40 = 32$	38	70
No hacen ejercicio físico	8	22	30
	40	60	100

Llamamos A = “Comer 5 comidas al día” y B = “Hacer ejercicio físico regularmente”.

$$P(\text{ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \boxed{\frac{22}{100} = 0.22}$$

Comprobamos si son independientes los sucesos A y B . Para ello comprobamos si se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{32}{100} = 0.32 \\ P(A)P(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100} = 0.28 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad podemos afirmar que los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6:

El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros², mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

- Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88%. Interprete las soluciones en el contexto del problema. (5 puntos)
 - Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: [1.525, 1.675]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X_A = El salario mensual (en euros) de un joven de un país A.

Como la varianza es 40000 la desviación típica será $\sigma_A = \sqrt{40000} = 200$ euros.

$$X_A = N(\mu_A, 200)$$

X_B = El salario mensual (en euros) de un joven de un país B. $X_B = N(\mu_B, 300)$

- En el país A el tamaño de la muestra es $n = 169$ y la media muestral es $\bar{x}_A = 1200$ €

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 88 %

$$1 - \alpha = 0.88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,06 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,94 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.94 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,555$$

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555 \cdot \frac{200}{\sqrt{169}} \approx 23.92$$

El intervalo de confianza para la media poblacional en el país A es:

$$(\bar{x}_A - Error, \bar{x}_A + Error) = (1200 - 23.92, 1200 + 23.92) = (1176.08, 1223.92)$$

En el país B el tamaño de la muestra es $n = 49$, la media muestral es $\bar{x}_B = 1600$ € y $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.555$.

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,555 \cdot \frac{300}{\sqrt{49}} \approx 66.64$$

El intervalo de confianza para la media poblacional en el país B es:

$$(\bar{x}_B - Error, \bar{x}_B + Error) = (1600 - 66.64, 1600 + 66.64) = (1533.36, 1666.64)$$

El error en el intervalo de confianza en el país A es menor que en el B, a pesar de tener el país B una dispersión mayor, pero la muestra es mucho más grande en A.

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza [1.525, 1.675].

$$Error = \frac{1675 - 1525}{2} = 75 \text{ €}$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “ $z_{\alpha/2}$ ”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 75 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{49}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{75 \cdot 7}{300} = 1.75$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 1.75$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la } N(0,1) \\ P(Z < 1.75) \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow 1 - \alpha = 0.92$$

El nivel de confianza es del 92 %.

EvAU Ordinaria 2023

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D , para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)
- ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)
- iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5+x^2}$.

- i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)
- ii) Calcule $\int x \cdot f(x) dx$. (3 puntos)
- iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\ln(5-3x) + 3x^2 \sin(7x-5)$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 puto)
- ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 putos)
- iii) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)
- iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

- i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)
- ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)
- iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

- i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
- ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D , para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna.

(2 puntos)

ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)

iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad.

(6 puntos)

i) La matriz D es de dimensiones $m \times n$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t \cdot D = E$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m = 3$ y el resultado del producto tiene dimensiones $2 \times n$ y para que sea una matriz columna debe ser $n = 1$.

La matriz D debe ser de dimensiones 3×1 .

ii) Obtenemos la expresión de $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2-1 & 3+0-1 \\ 0+2+1 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Despejamos X de la ecuación.

$$ABX - C = I \Rightarrow ABX = I + C \Rightarrow (AB)^{-1} \cdot ABX = (AB)^{-1} \cdot (I + C) \Rightarrow X = (AB)^{-1} \cdot (I + C)$$

Hallamos la inversa de AB .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}(AB)^T}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3-6} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X .

$$X = (AB)^{-1} \cdot (I + C) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 - 4/3 & 0 \\ 2 + 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “Toneladas para el mercado nacional”. y = “Toneladas para el mercado internacional”.

Se desea maximizar el beneficio mensual. La función objetivo sería:

“vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. El beneficio unitario se duplica en el mercado internacional” $\rightarrow f(x, y) = 10000x + 20000y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

“La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales” $\rightarrow x + y \leq 80$

“La empresa ha decidido destinar mensualmente al mercado nacional al menos el 75% de la producción total” $\rightarrow x \geq 0.75(x + y)$

“Un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales” $\rightarrow y \geq 10$

Además, las cantidades deben ser valores positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 80 \\ x \geq 0.75(x + y) \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 80 \\ x \geq 0.75x + 0.75y \rightarrow 0.25x \geq 0.75y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 80 \\ x \geq 3y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$$x + y = 80$$

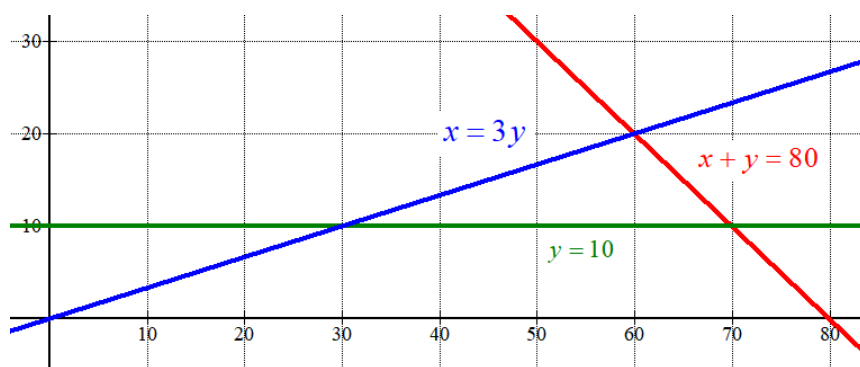
$$x = 3y$$

$$y = 10$$

x	$y = 80 - x$
0	80
60	20
70	10

x	$y = \frac{x}{3}$
0	0
30	10
60	20

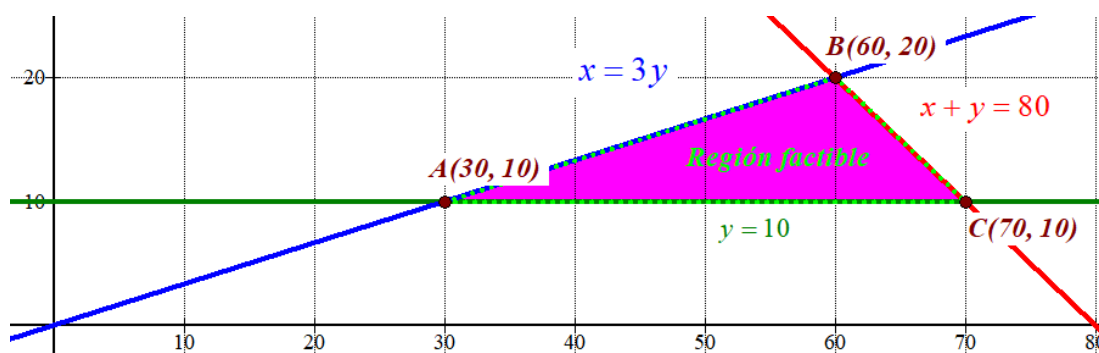
x	$y = 10$
0	10
30	10
70	10



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 80 \\ x \geq 3y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada en el}$$

primer cuadrante por debajo de la recta azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $f(x, y) = 10000x + 20000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de beneficio.

$$A(30, 10) \rightarrow f(30, 10) = 300000 + 200000 = 500000$$

$$B(60, 20) \rightarrow f(60, 20) = 600000 + 400000 = 1000000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(70, 10) \rightarrow f(70, 10) = 700000 + 200000 = 900000$$

El máximo beneficio mensual es de 1000 000 € y se obtiene en el punto B(60, 20).

Enviando 60 toneladas al mercado nacional y 20 al internacional se satisfacen todas las restricciones y se obtiene un beneficio mensual máximo de 1000 000 €.

- iii) Si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada tendríamos que utilizar una nueva función de beneficio mensual: $f(x, y) = 20000x + 20000y$. Si valoramos la función en los nuevos vértices tenemos que:

$$A(30, 10) \rightarrow f(30, 10) = 600000 + 200000 = 800000$$

$$B(60, 20) \rightarrow f(60, 20) = 1200000 + 400000 = 1600000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(70, 10) \rightarrow f(70, 10) = 1400000 + 200000 = 1600000 \text{ ¡Máximo!}$$

El máximo beneficio mensual se alcanza en dos vértices: B y C.

Por lo que dicho beneficio máximo se alcanza en todos los puntos del segmento BC. Por ejemplo B(60, 20), D(61, 19), E(62, 18), ..., C(70, 10) obteniendo un beneficio mensual máximo de 1 600 000 €.

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5+x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)

ii) Calcule $\int x \cdot f(x) dx$. (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\ln(5-3x) + 3x^2 \operatorname{sen}(7x-5)$. (3 puntos)

i) La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$

$$f(x) = \sqrt{5+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = \sqrt{5+(-2)^2} = 3 \\ f'(-2) = \frac{-2}{\sqrt{5+(-2)^2}} = -\frac{2}{3} \\ y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 2) \Rightarrow y - 3 = -\frac{2x}{3} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}}$$

ii) Usamos un cambio de variable.

$$\int x f(x) dx = \int x \sqrt{5+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{5+x^2} = t \rightarrow 5+x^2 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \rightarrow dx = \frac{t}{x} dt \end{array} \right\} = \int x \cdot t \cdot \frac{t}{x} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5+x^2})^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} \sqrt{(5+x^2)^3} + K}$$

iii) Determinamos la expresión de la derivada de la función.

$$g'(x) = 6 \frac{-3}{5-3x} + 6x \operatorname{sen}(7x-5) + 3x^2 (7) \cos(7x-5)$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-18}{5-3x} + 6x \operatorname{sen}(7x-5) + 21x^2 \cos(7x-5)}$$

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 puto)
- Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 putos)
- Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)
- Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

i) Con el eje OY: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow P(0, 3)$

Con el eje OX.

$$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 = x \rightarrow Q(-1, 0) \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 = x \rightarrow R(3, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: $P(0, 3)$; $Q(-1, 0)$ y $R(3, 0)$.

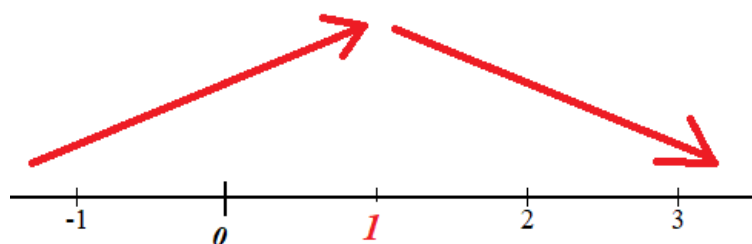
ii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

La función presenta un punto crítico. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -2 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



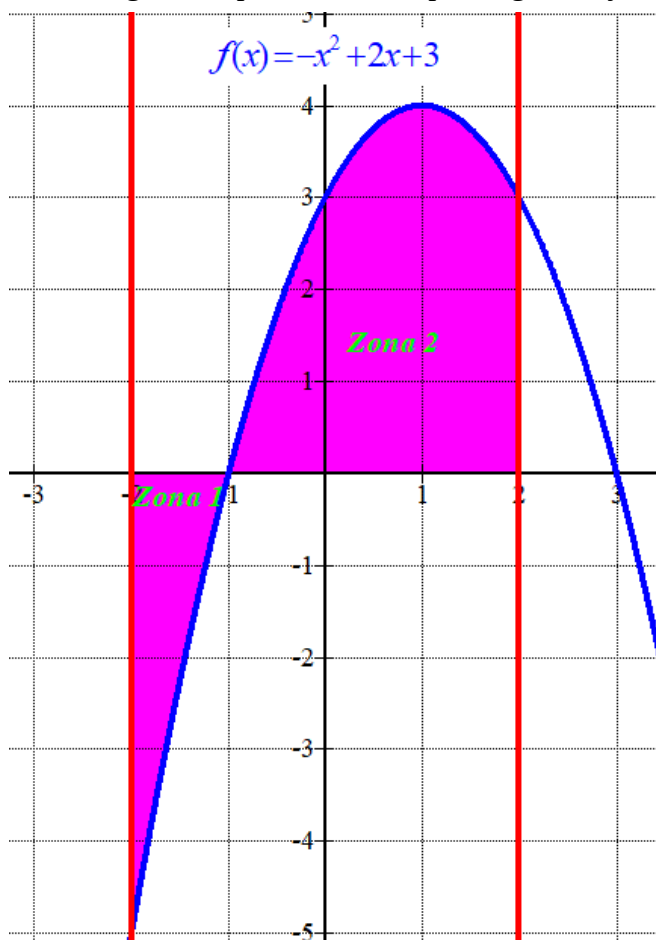
$f(1) = -1^2 + 2 + 3 = 4$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

iii) La función corta el eje OX en $x = -1$ y en $x = 3$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región del plano limitada por la gráfica y el eje OX.

x	$y = -x^2 + 2x + 3$
-2	-5
-1	0
0	3
1	4
2	3
3	0



iv) El área del recinto la calculamos como la suma del área de la zona 1 más el área de la zona 2.

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} -x^2 + 2x + 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 3(-2) \right] = \frac{1}{3} + 1 - 3 - \frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{-7}{3}$$

$$\text{Área 1} = \boxed{\frac{7}{3} u^2}$$

$$\text{Área 2} = \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^2 =$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 3(2) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right] = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \boxed{9u^2}$$

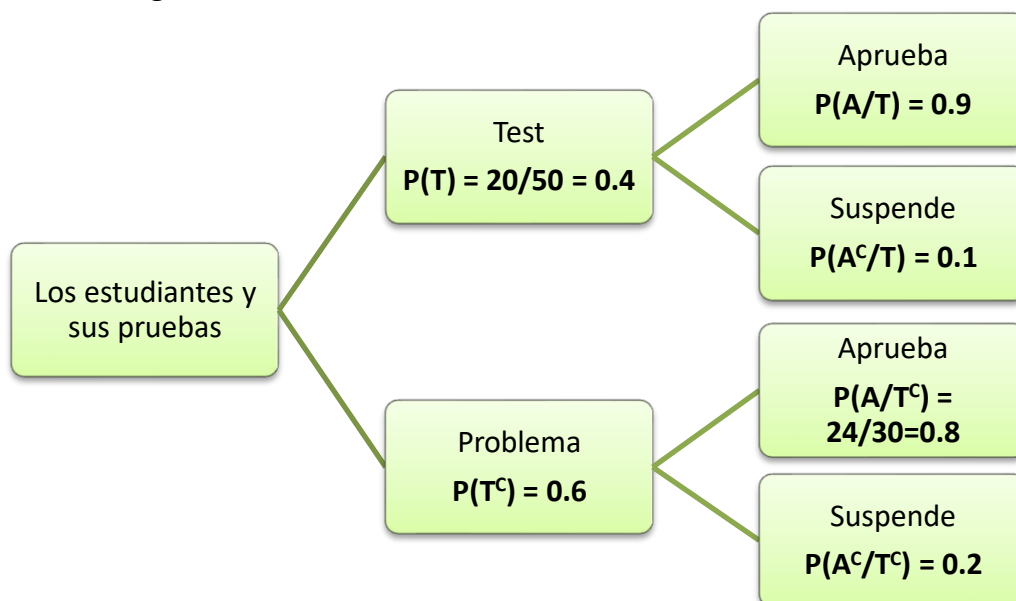
El área total del recinto es de $\frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3} \approx 11.33$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

- Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)
- Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)
- Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

Llamamos T = “Hacer un test”, T^C = “Hacer un problema”, A = “Aprobar”
Realizamos un diagrama de árbol.



- i) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(A^C) &= P(T \cap A^C) + P(T^C \cap A^C) = P(T)P(A^C/T) + P(T^C)P(A^C/T^C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 = \boxed{0.16}
 \end{aligned}$$

- ii) Calculamos la probabilidad de las dos opciones.

Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)} = \frac{P(T)P(A/T)}{1 - 0.16} = \frac{0.4 \cdot 0.9}{0.84} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

$$P(T^C/A) = \frac{P(T^C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(T^C)P(A/T^C)}{1 - 0.16} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.84} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

Como $P(T/A) = 0.4286 < 0.5714 = P(T^C/A)$ es más probable que haya hecho un problema.

- iii) Son sucesos independientes y la probabilidad de que pasen los dos es el producto de sus probabilidades.

$$P(\text{los dos hayan aprobado}) = P(A/T) \cdot P(A/T^C) = 0.9 \cdot 0.8 = \boxed{0.72}$$

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

- Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
- Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Número de jóvenes que usan el transporte público de un grupo de 200.

La proporción de estudiantes que usan el transporte público es $p = \frac{150}{200} = 0.75$

- Los datos son $p = 0.75$; $n = 200$.

Para un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} = 0.063$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que usan el transporte público es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.063, 0.75 + 0.063) = (0.687, 0.813)$$

La proporción de jóvenes que usan el transporte público está comprendida entre el 68.7% y el 81.3 % con un nivel de confianza del 96 %.

- La amplitud del intervalo de confianza es el doble de error. Si se reduce a la tercera parte, se reduce en la misma proporción el error, que debe ser $0.063 / 3 = 0.021$.

Para un nivel de confianza del 98%

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Determinamos el tamaño de la muestra a partir de la fórmula del error.

$$\begin{aligned} Error = 0.021 &\Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.021 \Rightarrow 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} = 0.021 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} = \frac{0.021}{2.33} \Rightarrow \frac{0.75 \cdot 0.25}{n} = \left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2 \Rightarrow 0.75 \cdot 0.25 = n \left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow n = \frac{0.75 \cdot 0.25}{\left(\frac{0.021}{2.33}\right)^2} \approx 2308.2 \end{aligned}$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al obtenido tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 2309 jóvenes.

EvAU Extraordinaria 2022

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- i) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
- ii) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A . (5 puntos)
- iii) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	P1	P2	Disponibilidad semanal
R1	6	3	180
R2	4	5	200
R3	1	1.5	70

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

- i) Calcule la derivada de la siguiente función: $y = \frac{3}{(2x-3)^2} + \ln(2x^4 - 3)$. (3 puntos)
- ii) Calcule la siguiente integral: $\int (\sin 2x + e^{x/5}) dx$. (3 puntos)
- iii) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{x}{2x^2 + 1} dx$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responda a las siguientes cuestiones:

- i) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -2$. (4 puntos)
- ii) Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (6 puntos)

EJERCICIO 5:

Se considera que el 4% de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92% de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10% de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

- i) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo en la prueba. (3 puntos)
- ii) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo. (3 puntos)
- iii) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizaban habitualmente una determinada red social.

- i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)
 - ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0.544563, 0.655437]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- i) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
 ii) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A . (5 puntos)
 iii) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$. (3 puntos)

i) Para que tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = k + 2k^2 - 6k + k = 2k^2 - 4k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 4k = 0 \Rightarrow 2k(k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

Para que tenga inversa la matriz A el valor de k debe ser distinto de 0 y de 2.

ii) Para $k = 1$ la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 6 + 1 = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

iii) Para $k = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2-6 & 0 \\ 3-4 & -1+2 & 0-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2A^t)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -4-4 & 8 \\ -1-1 & 4+1-2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2A^t)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	P1	P2	Disponibilidad semanal
R1	6	3	180
R2	4	5	200
R3	1	1.5	70

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg. (2 puntos)

- i) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “kg del producto P1”. y = “kg del producto P2”.

	P1 (x)	P2 (y)	Disponibilidad semanal
R1	$6x$	$3y$	180
R2	$4x$	$5y$	200
R3	x	$1.5y$	70
Coste	$20x$	$15y$	

Se desea minimizar el coste de producción. La función objetivo sería: $C(x, y) = 20x + 15y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

Disponibilidad de R1 $\rightarrow 6x + 3y \leq 180$

Disponibilidad de R2 $\rightarrow 4x + 5y \leq 200$

Disponibilidad de R3 $\rightarrow x + 1.5y \leq 70$

Garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg $\rightarrow x + y \geq 30$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y \leq 180 \\ 4x + 5y \leq 200 \\ x + 1.5y \leq 70 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 60 \\ 4x + 5y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 140 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$2x + y = 60$

$4x + 5y = 200$

$2x + 3y = 140$

$x + y = 30$

$x \geq 0; y \geq 0$

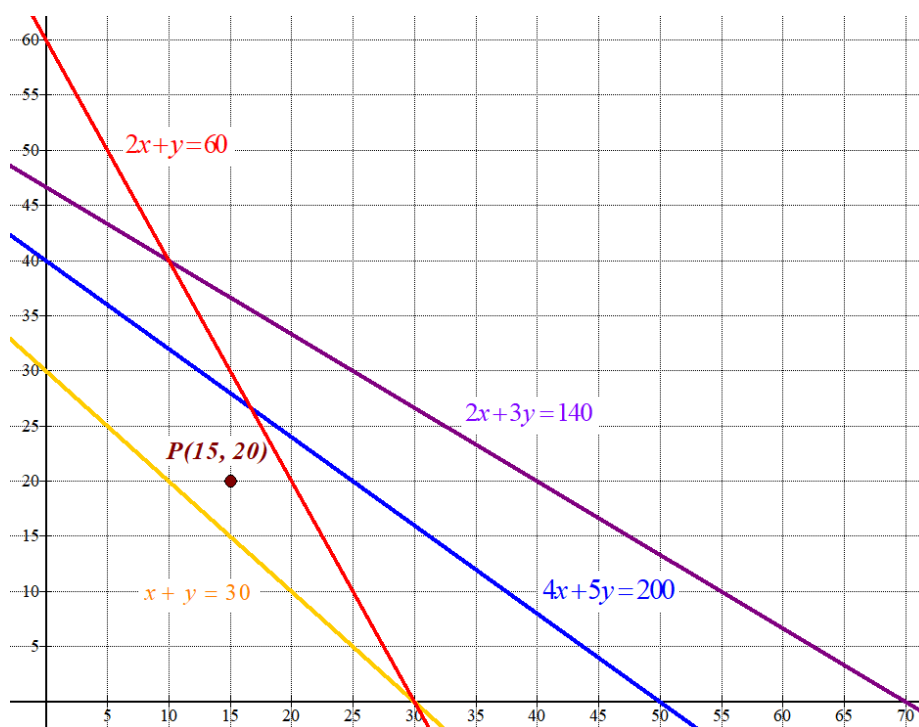
x	y = 60 - 2x
0	60
10	40
30	0

x	y = $\frac{200-4x}{5}$
0	40
25	20
50	0

x	y = $\frac{140-2x}{3}$
10	40
70	0

x	y = 30 - x
0	30
30	0

Primer
cuadrante



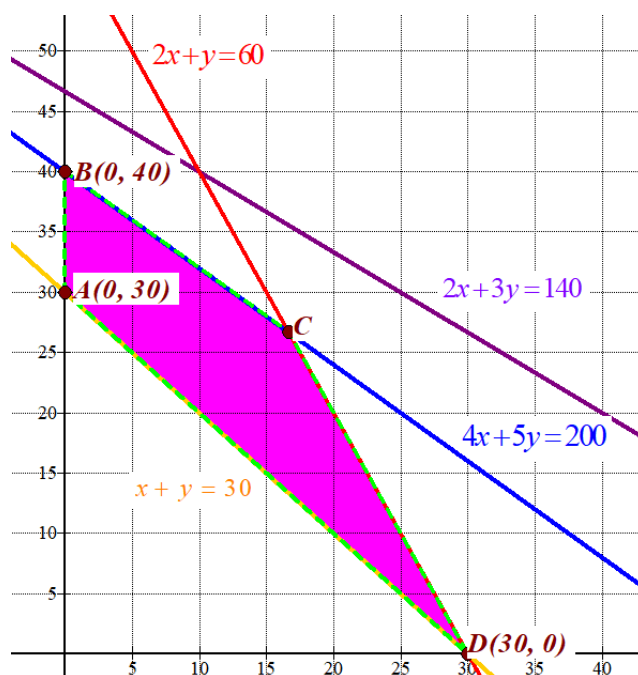
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 60 \\ 4x + 5y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 140 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada en el

primer cuadrante por debajo de la recta azul, violeta y roja y por encima de la recta amarilla.

Comprobamos que el punto P(15, 20) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 20 \leq 60 \\ 60 + 100 \leq 200 \\ 30 + 60 \leq 140 \\ 15 + 20 \geq 30 \\ 15 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ 4x + 5y = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 60 - 2x \\ 4x + 5y = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 5(60 - 2x) = 200 \Rightarrow 4x + 300 - 10x = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x = -100 \Rightarrow x = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \Rightarrow y = 60 - \frac{100}{3} = \frac{80}{3} \Rightarrow C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right)$$

Valoramos cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

$$A(0, 30) \rightarrow C(0, 30) = 0 + 450 = 450 \quad \text{¡Mínimo!}$$

$$B(0, 40) \rightarrow C(0, 40) = 0 + 600 = 600$$

$$C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) \rightarrow C(x, y) = 20 \frac{50}{3} + 15 \frac{80}{3} = \frac{2200}{3} \approx 733.33$$

$$D(30, 0) \rightarrow C(30, 0) = 600 + 0 = 600$$

El mínimo coste es de 450 € y se obtiene en el punto A(0, 30).

Con 0 kg del producto P1 y 30 kg del producto P2 el coste es mínimo.

iii) Solo cambia la función objetivo que pasa a ser $C(x, y) = 20x + 20y$.

Volvemos a valorar esta función en cada uno de los vértices.

$$A(0, 30) \rightarrow C(0, 30) = 0 + 600 = 600 \quad \text{¡Mínimo!}$$

$$B(0, 40) \rightarrow C(0, 40) = 0 + 800 = 800$$

$$C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) \rightarrow C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) = 20 \frac{50}{3} + 20 \frac{80}{3} = \frac{2600}{3} \approx 866.66$$

$$D(30, 0) \rightarrow C(30, 0) = 600 + 0 = 600 \quad \text{¡Mínimo!}$$

El valor mínimo se alcanza en dos puntos, por lo que el coste mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$.

EJERCICIO 3:

i) Calcule la derivada de la siguiente función: $y = \frac{3}{(2x-3)^2} + \ln(2x^4-3)$. (3 puntos)

ii) Calcule la siguiente integral: $\int (\sin 2x + e^{x/5}) dx$. (3 puntos)

iii) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} dx$. (3 puntos)

i) Cambiamos la expresión de la función y la derivamos.

$$y = \frac{3}{(2x-3)^2} + \ln(2x^4-3) = 3(2x-3)^{-2} + \ln(2x^4-3) \Rightarrow y' = -6(2x-3)^{-3} \cdot 2 + \frac{8x^3}{2x^4-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-12}{(2x-3)^3} + \frac{8x^3}{2x^4-3}$$

ii) Calculamos la integral descomponiéndola en suma de integrales inmediatas.

$$\int (\sin 2x + e^{x/5}) dx = \int \sin 2x dx + \int e^{x/5} dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + 5e^{x/5} + K \right]$$

iii) Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1} dx = \left[\frac{1}{4} \ln |2x^2+1| \right]_1^2 = \left[\frac{1}{4} \ln |2 \cdot 2^2+1| \right] - \left[\frac{1}{4} \ln |2 \cdot 1^2+1| \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \ln 9 - \frac{1}{4} \ln 3 = \frac{1}{4} (\ln 9 - \ln 3) = \frac{1}{4} \ln \frac{9}{3} = \left[\frac{1}{4} \ln 3 \right]$$

EJERCICIO 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responda a las siguientes cuestiones:

- Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga pendiente $m = -2$. (4 puntos)
- Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (6 puntos)

- i) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ significa que $f'(1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{3 + 2a + b = 0}$$

Si la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene pendiente $m = -2$ significa que $f'(0) = -2$.

$$f'(0) = -2 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Sustituimos en la ecuación obtenida antes y determinamos el valor de “a”.

$$3 + 2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{2}$; $b = -2$.

- ii) Si $a = -2$ y $b = -4$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{4+8}{6} = \boxed{2 = x} \\ \frac{4-8}{6} = \frac{-4}{6} = \boxed{-\frac{2}{3} = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

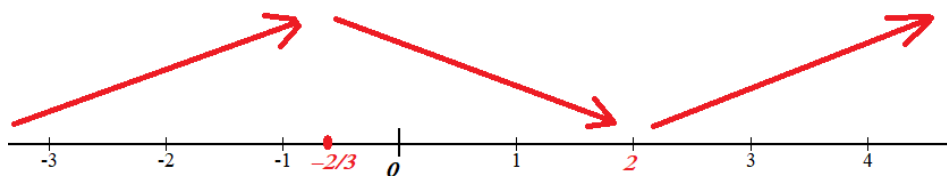
- En el intervalo $(-\infty, -2/3)$ tomamos $x = -1$ la derivada vale

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) - 4 = 3 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (-\infty, -2/3).$$

- En el intervalo $(-2/3, 2)$ tomamos $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$.
La función decrece en el intervalo $(-2/3, 2)$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 4 = 11 > 0$. La función crece en el intervalo $(2, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -2/3) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2/3, 2)$

La función tiene un máximo relativo en $x = -\frac{2}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{67}{27}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right)$

Como $f(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 4(2) + 1 = -7$ las coordenadas del mínimo relativo son $(2, -7)$

Para estudiar la curvatura utilizamos la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Comprobamos que el valor obtenido es punto de inflexión viendo que la tercera derivada en dicho valor es no nula.

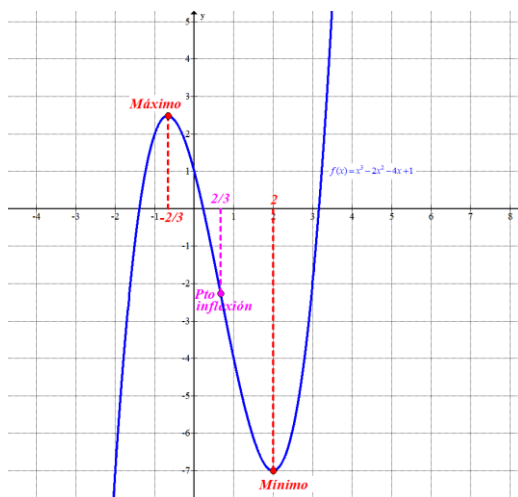
$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0$$

En $x = \frac{2}{3}$ hay un punto de inflexión. Como $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{-61}{27}$ las

coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{2}{3}, \frac{-61}{27}\right)$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda para ver la curvatura.

- En el intervalo $(-\infty, 2/3)$ tomamos $x = 0$ la derivada segunda vale $f''(0) = 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-\infty, 2/3)$.
- En el intervalo $(2/3, +\infty)$ tomamos $x = 1$ la derivada segunda vale $f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(2/3, +\infty)$.

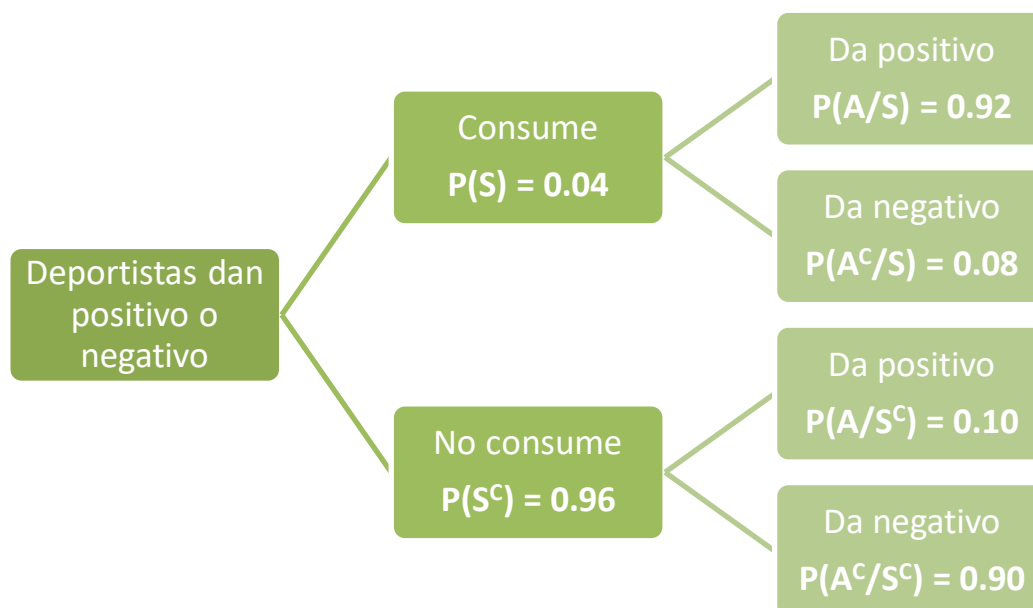


EJERCICIO 5:

Se considera que el 4% de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92% de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10% de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

- La probabilidad de que obtenga un resultado positivo en la prueba. (3 puntos)
- La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo. (3 puntos)
- La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo. (4 puntos)

Llamamos S = “Consume sustancias no permitidas” y A = “Da positivo en la prueba”.
Realizamos un diagrama de árbol.



- i) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(S)P(A/S) + P(S^c)P(A/S^c) = 0.04 \cdot 0.92 + 0.96 \cdot 0.1 = \boxed{0.1328}$$

- ii) Nos piden calcular $P(S \cap A^c)$.

$$P(S \cap A^c) = P(S)P(A^c/S) = 0.04 \cdot 0.08 = \boxed{0.0032}$$

- iii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^c/A^c) = \frac{P(S^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(S^c)P(A^c/S^c)}{1 - P(A)} = \frac{0.96 \cdot 0.90}{1 - 0.1328} = \frac{270}{271} \approx 0.9963$$

EJERCICIO 6:

En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizaban habitualmente una determinada red social.

- Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)
- Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0.544563, 0.655437]$.

Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

De los 300 jóvenes encuestados 120 **no** utilizan cierta red social.

La proporción de estudiantes que no utilizan la red social es $p = \frac{120}{300} = 0.4$

- Los datos son $p = 0.4$; $n = 300$.

Para un nivel de confianza del 96% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no utilizan cierta red social es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(0.4 - 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{300}}, 0.4 + 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{300}} \right) = \boxed{(0.3419, 0.4581)}$$

- Ahora es la proporción de estudiantes que utilizan la red social.

Los datos son $p = \frac{180}{300} = 0.6$; $n = 300$.

El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{0.655437 - 0.544563}{2} = 0.055437$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de $z_{\alpha/2}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.055437 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.055437}{\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}}} \approx 1.96$$

Mirando en la tabla de la Normal $N(0, 1)$ tenemos que $1 - \alpha/2 = 0.9750$

$$1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza del intervalo proporcionado es del 95 %.

-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,47
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,97
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,98
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,98

EvAU Ordinaria 2022

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa. (3 puntos)

ii) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema: $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

i) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando los puntos de discontinuidad. (3 puntos)

ii) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (4 puntos)

iii) Calcule $\int f(x) dx$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x) = x \cdot (x - 3)^2$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (*Trans* y *Logis*). El año pasado, la empresa realizó 1500 ventas y encargó a *Trans* el 60% del reparto y a *Logis* el 40%. El 20% de los productos distribuidos por *Trans* fueron tipo A, el 50% fueron tipo B y el 30% tipo C. Para la empresa *Logis*, estos porcentajes fueron 40%, 35% y 25%, respectivamente.

- i) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por *Trans*. (3 puntos)
- ii) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por *Logis*. (4 puntos)
- iii) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por *Trans*. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17280 kWh.

- i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el consumo energético medio en hogares. (5 puntos)
 - ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa. (3 puntos)

ii) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema: $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$ (7 puntos)

$$i) B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 & -4-4 \\ -9+1-5 & 6+4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que tiene inversa vemos si su determinante es no nulo.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 104 = -59 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa.

ii) Obtenemos la expresión de las matrices X e Y solución del sistema.

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times 3 \rightarrow \\ \times (-2) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 6X - 9Y = 3A \\ -6X + 4Y = -2B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hline -5Y = 3A - 2B \Rightarrow Y = \frac{1}{5}(-3A + 2B)$$

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times 2 \rightarrow \\ \times (-3) \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 4X - 6Y = 2A \\ -9X + 6Y = -3B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hline -5X = 2A - 3B \Rightarrow X = \frac{1}{5}(-2A + 3B)$$

Sustituimos los valores de A y B.

$$Y = \frac{1}{5}(-3A + 2B) = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}(-2A + 3B) = \frac{1}{5} \left[\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ -6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1. (2 puntos)

i) Llamamos x = “inversión en cartera C1”. y = “inversión en cartera C2”.

Se desea maximizar la rentabilidad. La función objetivo sería:

“La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%” $\rightarrow$

$$f(x, y) = 0.07x + 0.04y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

“Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio” $\rightarrow 0.20 \cdot 20000 \leq x + y \leq 0.50 \cdot 20000$

“El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2” $\rightarrow x \leq 8000; y \geq 3000$

“El asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1” $\rightarrow y \geq x$

Además, la inversión son valores positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0.20 \cdot 20000 \leq x + y \leq 0.50 \cdot 20000 \\ x \leq 8000; y \geq 3000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4000 \leq x + y \leq 10000 \\ x \leq 8000; y \geq 3000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$$x + y = 4000$$

x	$y = 4000 - x$
0	4000
3000	1000
4000	0

$$x + y = 10000$$

x	$y = 10000 - x$
0	10000
7000	3000
10000	0

$$x = 8000$$

$x = 8000$	y
8000	0
8000	3000

$$y = 3000$$

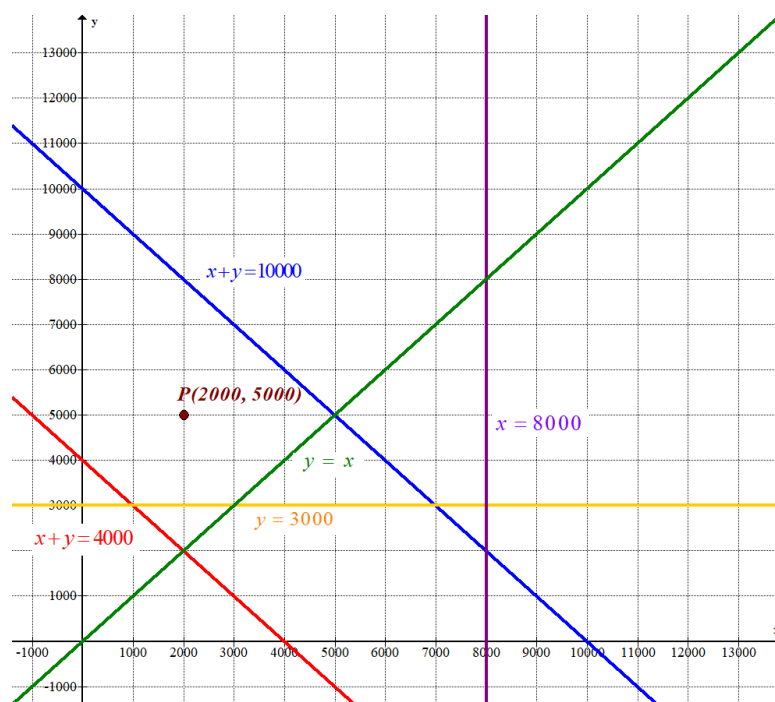
x	$y = 3000$
0	3000
8000	3000

$$y = x$$

x	$y = x$
0	0
5000	5000

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



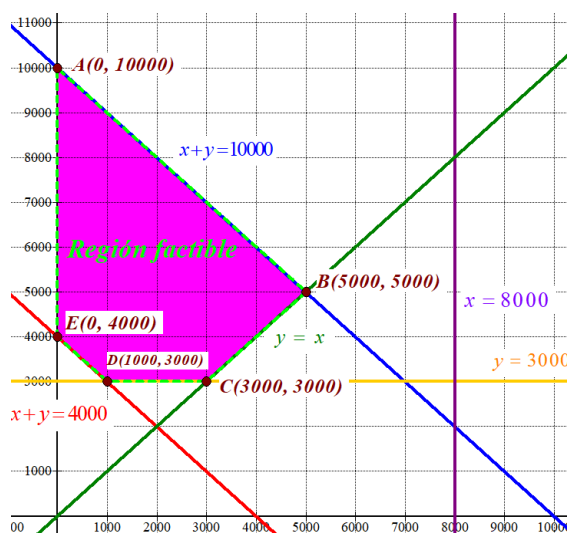
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 4000 \leq x + y \\ x + y \leq 10000 \\ x \leq 8000; \quad y \geq 3000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada}$$

en el primer cuadrante por debajo de la recta azul y por encima de las rectas roja, verde y naranja. La recta vertical no es frontera de la región factible. Comprobamos que el punto $P(2000, 5000)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4000 \leq 2000 + 5000 \\ 2000 + 5000 \leq 10000 \\ 2000 \leq 8000; \quad 5000 \geq 3000 \\ 5000 \geq 2000 \\ 2000 \geq 0; \quad 5000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

$$A(0,10000) \rightarrow f(0,10000) = 0 + 0.04 \cdot 10000 = 400$$

$$B(5000, 5000) \rightarrow f(5000,5000) = 0.07 \cdot 5000 + 0.04 \cdot 5000 = 350 + 200 = 550 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(3000, 3000) \rightarrow f(3000,3000) = 0.07 \cdot 3000 + 0.04 \cdot 3000 = 210 + 120 = 330$$

$$D(1000, 3000) \rightarrow f(1000,3000) = 0.07 \cdot 1000 + 0.04 \cdot 3000 = 70 + 120 = 190$$

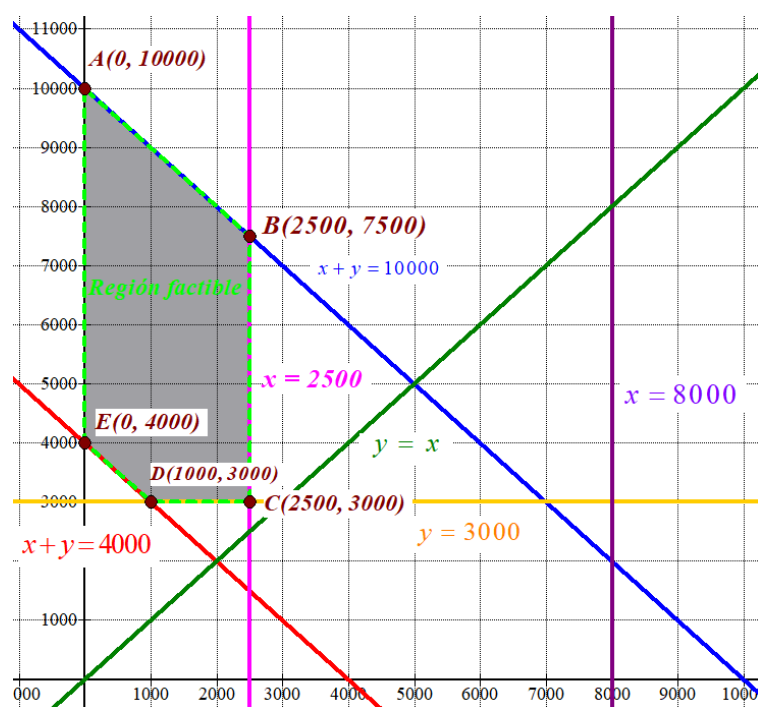
$$E(0, 4000) \rightarrow f(0,4000) = 0 + 0.04 \cdot 4000 = 160$$

La máxima rentabilidad es de 550 € y se obtiene en el punto B(5000, 5000).

Con 5000 euros invertidos en la cartera C1 y otros 5000 euros en la cartera C2 se obtiene la máxima rentabilidad de 550 €.

iii) Si se añade la restricción “no invertir más de 2500 € en la cartera C1” $\rightarrow x \leq 2500$

La nueva región factible sería:



Si valoramos la función en los nuevos vértices tenemos que:

$$A(0,10000) \rightarrow f(0,10000) = 0 + 0.04 \cdot 10000 = 400$$

$$B(2500, 7500) \rightarrow f(2500,7500) = 0.07 \cdot 2500 + 0.04 \cdot 7500 = 175 + 300 = 475 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(2500, 3000) \rightarrow f(2500,3000) = 0.07 \cdot 2500 + 0.04 \cdot 3000 = 175 + 120 = 295$$

$$D(1000, 3000) \rightarrow f(1000,3000) = 0.07 \cdot 1000 + 0.04 \cdot 3000 = 70 + 120 = 190$$

$$E(0, 4000) \rightarrow f(0,4000) = 0 + 0.04 \cdot 4000 = 160$$

Con la nueva situación la solución que maximiza la rentabilidad sigue estando a la derecha de la región factible y evidentemente en el vértice con las coordenadas de mayor valor, el B(2500, 7500), siendo este nuevo beneficio de 475 €. Menor que el anterior pues he limitado la inversión en la cartera C1.

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

- i) Estudie la continuidad de $f(x)$, clasificando los puntos de discontinuidad. (3 puntos)
 ii) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (4 puntos)
 iii) Calcule $\int f(x) dx$. (3 puntos)

i) La función es continua salvo en los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

En $x = -2$ la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0} = \infty$$

En $x = 2$ la discontinuidad es inevitable de salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0} = \infty$$

ii) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1}{1^2 - 4} = \frac{-1}{3} \\ f'(1) = \frac{-1^2 - 4}{(1^2 - 4)^2} = \frac{-5}{9} \\ y - f(1) = f'(1)(x - 1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{9}(x - 1) \Rightarrow y + \frac{1}{3} = -\frac{5x}{9} + \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y + 3 = -5x + 5 \Rightarrow \boxed{9y + 5x - 2 = 0}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $9y + 5x - 2 = 0$.

$$\text{iii) } \int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| + K}$$

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

- i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
- iii) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX. (2 puntos)
- iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

i) Calculamos el punto de corte con el eje OY. $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot (0-3)^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

Calculamos el punto de corte con el eje OX.

$$y = 0 \Rightarrow x \cdot (x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ Punto de corte con los ejes OX y OY} \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3,0) \text{ Punto de corte con el eje OX} \end{cases}$$

ii) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = x \cdot (x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

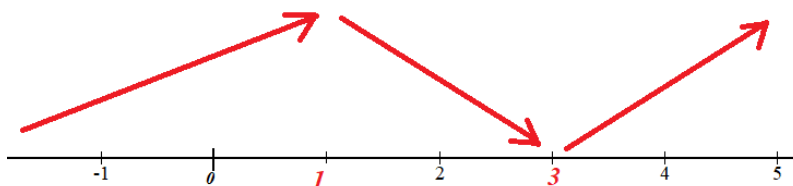
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{4-2}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$.
La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$.
La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



$f(1) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.

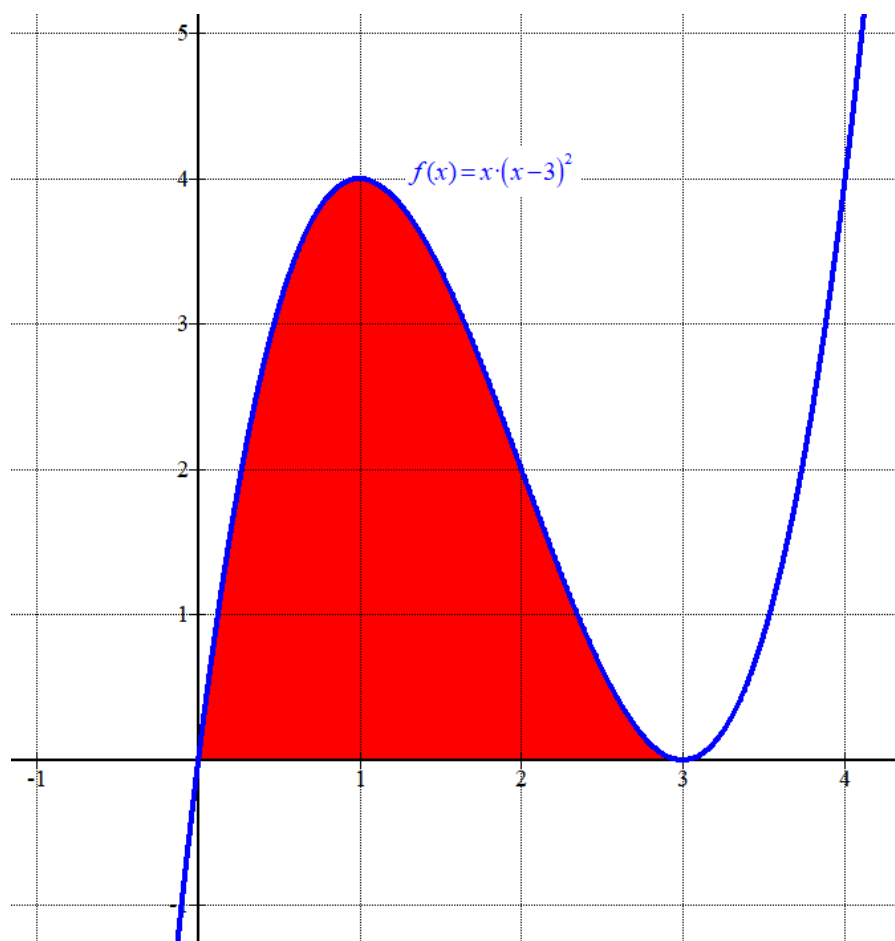
$f(3) = 3 \cdot (3-3)^2 = 0$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(3, 0)$.

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

iii) La función corta el eje OX en $x = 0$ y en $x = 3$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la región del plano limitada por la gráfica y el eje OX.

x	$y = x \cdot (x-3)^2$
-1	-16
0	0
1	4
2	2
3	0
4	4



iv) El área del recinto es la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$\text{Área} = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x^3 - 6x^2 + 9x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 =$$

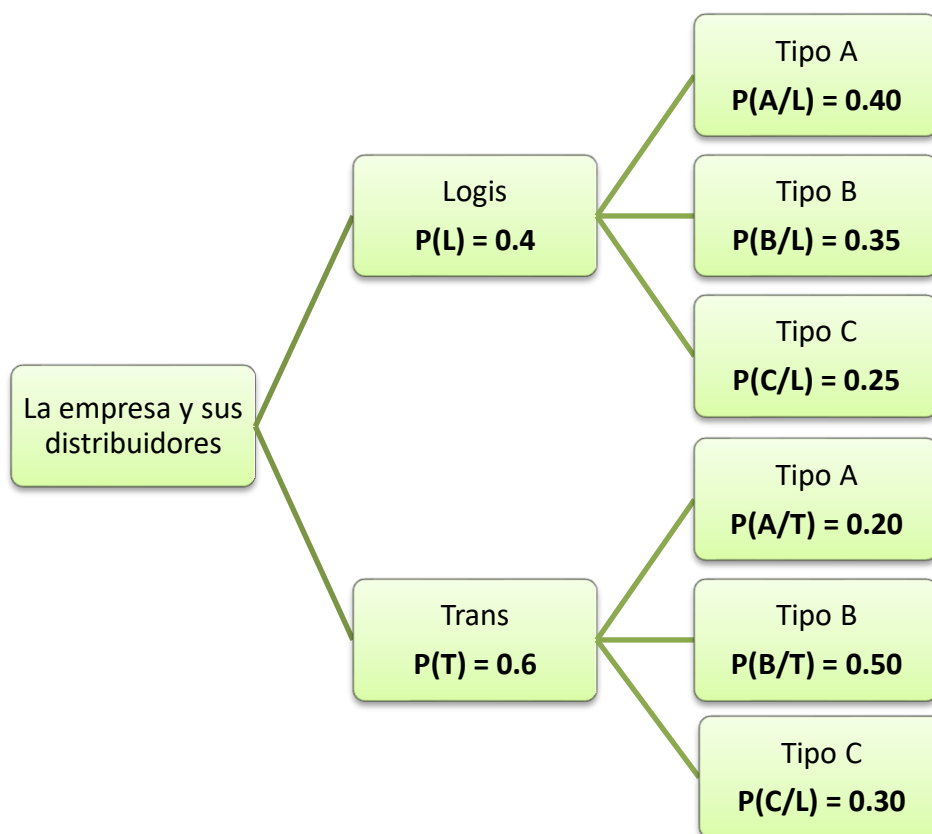
$$= \left[\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9}{2} \cdot 3^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + \frac{9}{2} \cdot 0^2 \right] = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4} = \boxed{6.75 \text{ u}^2}$$

EJERCICIO 5:

Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (*Trans* y *Logis*). El año pasado, la empresa realizó 1500 ventas y encargó a *Trans* el 60% del reparto y a *Logis* el 40%. El 20% de los productos distribuidos por *Trans* fueron tipo A, el 50% fueron tipo B y el 30% tipo C. Para la empresa *Logis*, estos porcentajes fueron 40%, 35% y 25%, respectivamente.

- Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por *Trans*. (3 puntos)
- Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto tipo C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por *Logis*. (4 puntos)
- Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por *Trans*. (3 puntos)

Llamamos L = “Ser distribuido por *Trans*”, L = “Ser distribuido por *Logis*”, A = “Ser un producto tipo A”, B = “Ser un producto tipo B”, C = “Ser un producto tipo C”
Realizamos un diagrama de árbol.



- i) Nos piden calcular $P(T \cap B)$.

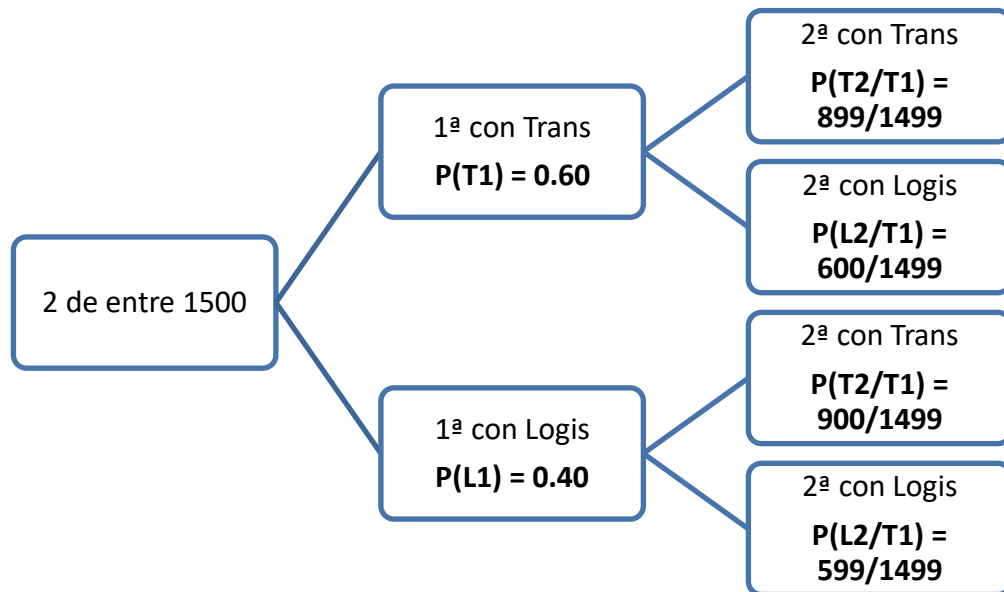
$$P(T \cap B) = P(T)P(B/T) = 0.6 \cdot 0.5 = \boxed{0.3}$$

- ii) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{P(L)P(C/L)}{P(L)P(C/L) + P(T)P(C/T)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.3} = \frac{5}{14} \approx 0.357$$

iii) De las 1500 ventas Trans distribuyó el 60 %, es decir, $1500 \cdot 0.6 = 900$ ventas y Logis distribuyó las 600 restantes.

Realizamos un diagrama de árbol de esa elección de dos ventas de entre las 1500.



La probabilidad pedida es la de la rama superior.

$$P(T1 \cap T2) = P(T1)P(T2/T1) = 0.6 \cdot \frac{899}{1499} = \boxed{\frac{2697}{7495} \approx 0.36}$$

EJERCICIO 6:

El consumo energético mensual (en kWh) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17280 kWh.

- i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el consumo energético medio en hogares. (5 puntos)
 ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Consumo energético mensual (en kWh).

Como la varianza es 400 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{400} = 20$ kWh. $X = N(\mu, 20)$

- i) El tamaño de la muestra es $n = 64$ y la media muestral es $\bar{x} = \frac{17280}{64} = 270$ kWh

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75$$

k	0	1	2	3	4	5
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5298	0,5338	0,5378	0,5417	0,5457	0,5496
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75 \cdot \frac{20}{\sqrt{64}} = 4.375$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (270 - 4.375, 270 + 4.375) = (265.625, 274.375)$$

- ii) La mitad del error sería $Error = \frac{4.375}{2} = 2.1875$ kWh

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “n”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.1875 = 1.75 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.1875\sqrt{n} = 1.75 \cdot 20 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75 \cdot 20}{2.1875} \Rightarrow n = \left(\frac{1.75 \cdot 20}{2.1875} \right)^2 = 256$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 256 hogares. A partir de ese tamaño de muestra el error cometido es menor de 2.1875 kWh.

EvAU Extraordinaria 2021

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Un cajero automático contiene billetes de 10 €, 20 € y 50 €. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €. El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

- i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
- ii) Resuelva el sistema por el método de Gauss. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0.1 kg de grasas, 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0.2 kg de grasas, 0.3 kg de hidratos de carbono y 0.5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

- i) Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (6 puntos)
- ii) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. (4 puntos)

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$

- i) Estudie la continuidad de la función $f(x)$. (3 puntos)
- ii) Represente gráficamente la función $f(x)$. (3 puntos)
- iii) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos.

Calcule:

- i) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados. (3 puntos)
- ii) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador. (3.5 puntos)
- iii) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador. (3.5 puntos)

EJERCICIO 6:

Un estudio concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9.58875, 10.41125]$.

- i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de los 144 exfumadores. (5 puntos)
- ii) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10 €, 20 € y 50 €. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €. El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

- i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
 ii) Resuelva el sistema por el método de Gauss. (7 puntos)

- i) Llamamos “x” al número de billetes de 10 €, “y” al número de billetes de 20 € y “z” al número de billetes de 50 €.

“En total hay 800 billetes” $\rightarrow x + y + z = 800$

“En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €” $\rightarrow 10x + 20y + 50z = 21000$

“El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos” $\rightarrow x = y + z$

Reunimos estas ecuaciones formando un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 21000 \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 2100 \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 2100 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

- ii) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 2100 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 5z = 2100 \\ -x - y - z = -800 \\ \hline y + 4z = 1300 \\ \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x - y - z = 0 \\ -x - y - z = -800 \\ \hline -2y - 2z = -800 \\ \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 1300 \\ -2y - 2z = -800 \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \text{Divido ecuación 3ª entre 2} \} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 1300 \\ -y - z = -400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ -y - z = -400 \\ y + 4z = 1300 \\ \hline 3z = 900 \\ \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 1300 \\ 3z = 900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 1300 \\ \boxed{z = 300} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 300 = 800 \\ y + 1200 = 1300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ \boxed{y = 1300 - 1200 = 100} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 100 = 500 \Rightarrow \boxed{x = 400}$$

La solución del problema es $x = 400$, $y = 100$, $z = 300$. Hay 400 billetes de 10 €, 100 de 20 € y 300 de 50 €.

EJERCICIO 2:

Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0.1 kg de grasas, 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0.2 kg de grasas, 0.3 kg de hidratos de carbono y 0.5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina. (2 puntos)

i) Llamamos x = kilos comprados de alimento A, y = kilos comprados de alimento B.

Hacemos una tabla para aclarar los datos del problema.

	Kilos de grasas	Kilos de hidratos de carbono	Kilos de proteínas	Coste
Kilos de alimento A (x)	$0.1x$	$0.6x$	$0.3x$	$10x$
Kilos de alimento B (y)	$0.2y$	$0.3y$	$0.5y$	$30y$
TOTALES	$0.1x + 0.2y$	$0.6x + 0.3y$	$0.3x + 0.5y$	$10x + 30y$

La función a minimizar es el coste total de la compra: $C(x, y) = 10x + 30y$.

Las restricciones del problema son:

“Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono” $\rightarrow 0.6x + 0.3y \geq 18$

“Se desea conseguir al menos 15 kg de proteínas” $\rightarrow 0.3x + 0.5y \geq 15$

“Se desea conseguir no más de 10 kg de grasas” $\rightarrow 0.1x + 0.2y \leq 10$

“Se desea además no comprar más de 75 kg de A” $\rightarrow x \leq 75$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.6x + 0.3y \geq 18 \\ 0.3x + 0.5y \geq 15 \\ 0.1x + 0.2y \leq 10 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 3y \geq 180 \\ 3x + 5y \geq 150 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 3x + 5y \geq 150 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$2x + y = 60$$

$$3x + 5y = 150$$

$$x + 2y = 100$$

$$x = 75$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

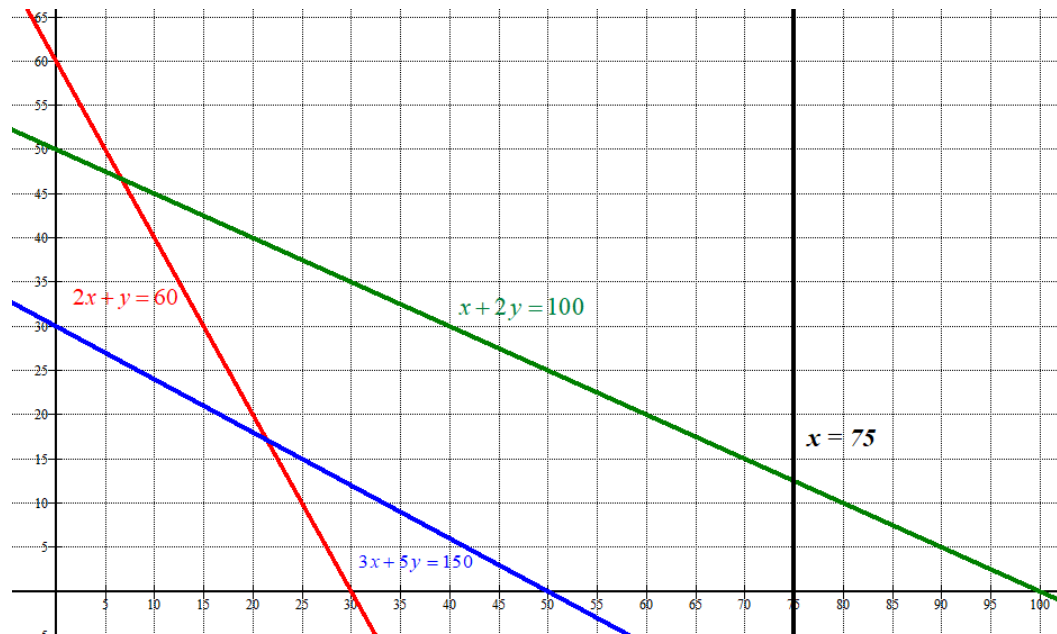
x	$y = 60 - 2x$
0	60
30	0

x	$y = \frac{150 - 3x}{5}$
0	30
50	0

x	$y = \frac{100 - x}{2}$
0	50
60	20

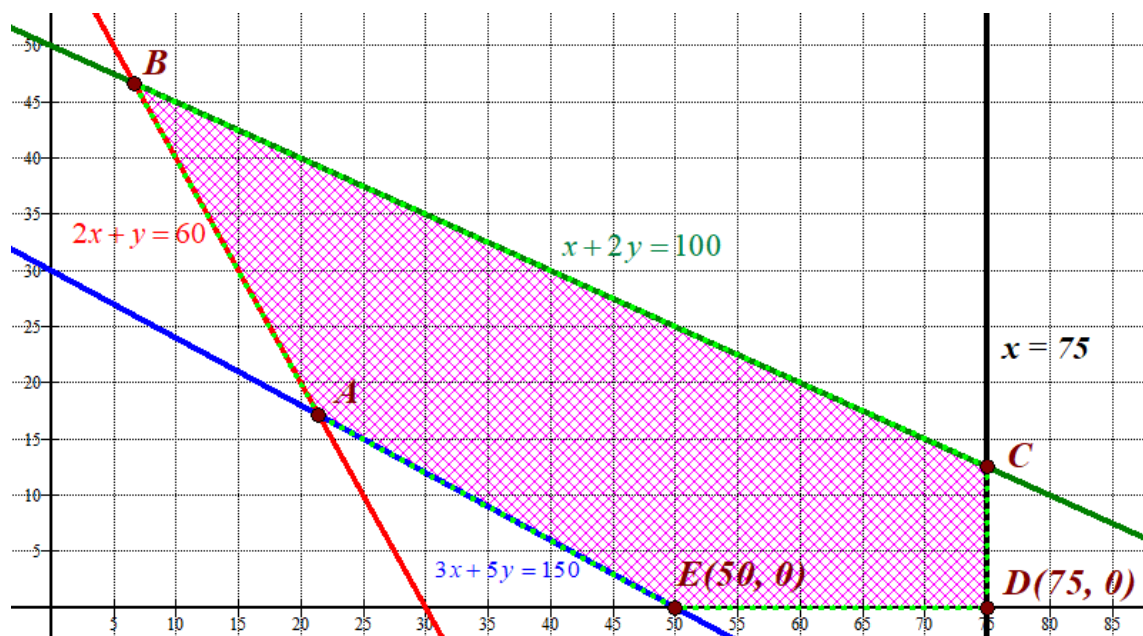
Recta
vertical

Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 3x + 5y \geq 150 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano por encima de las rectas roja y azul, por debajo de la recta verde y a la izquierda de la recta negra vertical.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas de los vértices A, B y C.

$$A \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ 3x + 5y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 60 - 2x \\ 3x + 5y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 5(60 - 2x) = 150 \Rightarrow 3x + 300 - 10x = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x = -150 \Rightarrow \boxed{x = \frac{150}{7}} \Rightarrow \boxed{y = 60 - 2\frac{150}{7} = \frac{120}{7}} \Rightarrow A\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right)$$

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ x + 2y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 60 - 2x \\ x + 2y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2(60 - 2x) = 100 \Rightarrow x + 120 - 4x = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = -20 \Rightarrow \boxed{x = \frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{y = 60 - 2\frac{20}{3} = \frac{140}{3}} \Rightarrow B\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right)$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 75 \\ x + 2y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 75 + 2y = 100 \Rightarrow 2y = 25 \Rightarrow \boxed{y = \frac{25}{2}} \Rightarrow C\left(75, \frac{25}{2}\right)$$

Valoramos la función coste $C(x, y) = 10x + 30y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) \rightarrow C\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) = \frac{1500}{7} + \frac{3600}{7} = \frac{5100}{7} \approx 728.57$$

$$B\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right) \rightarrow C\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right) = \frac{200}{3} + \frac{4200}{3} = \frac{4400}{3} \approx 1466.66$$

$$C\left(75, \frac{25}{2}\right) \rightarrow C\left(75, \frac{25}{2}\right) = 750 + \frac{750}{2} = 1125$$

$$D(75, 0) \rightarrow C(75, 0) = 750$$

$$E(50, 0) \rightarrow C(50, 0) = 500$$

El coste mínimo se consigue en el vértice $E(50, 0)$. Comprando solo 50 kg del alimento A se cumplen las restricciones y el coste es mínimo (500 €).

iii) En la nueva situación planteada la función objetivo es la cantidad de vitamina: $v(x, y) = 1.5x + 2y$

Valoramos la nueva función en cada vértice en busca del valor máximo de vitamina.

$$A\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) \rightarrow v\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right) = 1.5\frac{150}{7} + 2\frac{120}{7} = \frac{465}{7} \approx 66.43$$

$$B\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right) \rightarrow v\left(\frac{20}{3}, \frac{140}{3}\right) = 1.5\frac{20}{3} + 2\frac{140}{3} = \frac{310}{3} \approx 103.33$$

$$C\left(75, \frac{25}{2}\right) \rightarrow v\left(75, \frac{25}{2}\right) = 1.5 \cdot 75 + 2\frac{25}{2} = \frac{275}{2} = 137.5 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 0) \rightarrow v(75, 0) = 1.5 \cdot 75 = 112.5$$

$$E(50, 0) \rightarrow v(50, 0) = 1.5 \cdot 50 = 75$$

La máxima cantidad de vitaminas se consigue en el vértice $C\left(75, \frac{25}{2}\right)$.

Hay que comprar 75 kg del alimento A y 12,5 kilos del alimento B para cumplir las restricciones y obtener un máximo aporte de vitaminas.

EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

- i) Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (6 puntos)
- ii) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. (4 puntos)

i) Puntos de corte con los ejes.

$$\text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0^2 - 0^3 = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

$$\text{Eje OX} \rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow O(0,0) \\ 0 \\ x = 2 \rightarrow A(2,0) \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte con los ejes de coordenadas: $O(0, 0)$ y $A(2, 0)$.

Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

$$g(x) = 2x^2 - x^3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 3x^2 \Rightarrow g''(x) = 4 - 6x$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = \frac{2}{3}$.

- En $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $g''(0) = 4 > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
- En $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $g''(1) = 4 - 6 = -2 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Como se produce un cambio de curvatura en $x = \frac{2}{3}$ la función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$.

ii) Determinamos la expresión de la función $h(x)$.

$$h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

Derivamos $h(x)$ e igualamos a cero su derivada en busca de sus puntos críticos.

$$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

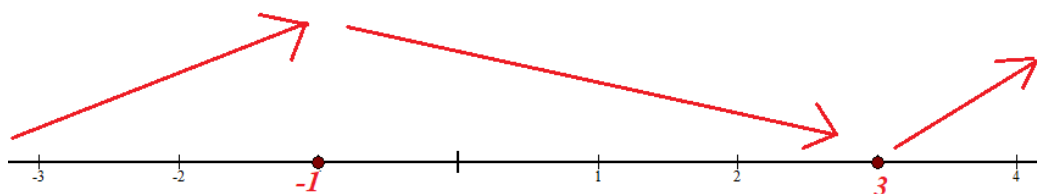
$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ 0 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $h'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 21 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $h'(0) = 3(0)^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$. La función decrece en $(-1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $h'(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 - 9 = 15 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

Como tenemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

El mínimo relativo no es absoluto.

Como $h(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 10 = -17$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(3, -17)$.

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$

- i) Estudie la continuidad de la función $f(x)$. (3 puntos)
 ii) Represente gráficamente la función $f(x)$. (3 puntos)
 iii) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$. (4 puntos)

i) En cada tramo es continua pues son dos trozos de parábolas.

Falta ver si es continua en el cambio de definición $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + 6x - 8 = -2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

La función es continua en $x = 2$ y por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.

ii) La función son dos trozos de dos parábolas.

Averiguamos el vértice de cada una de ellas.

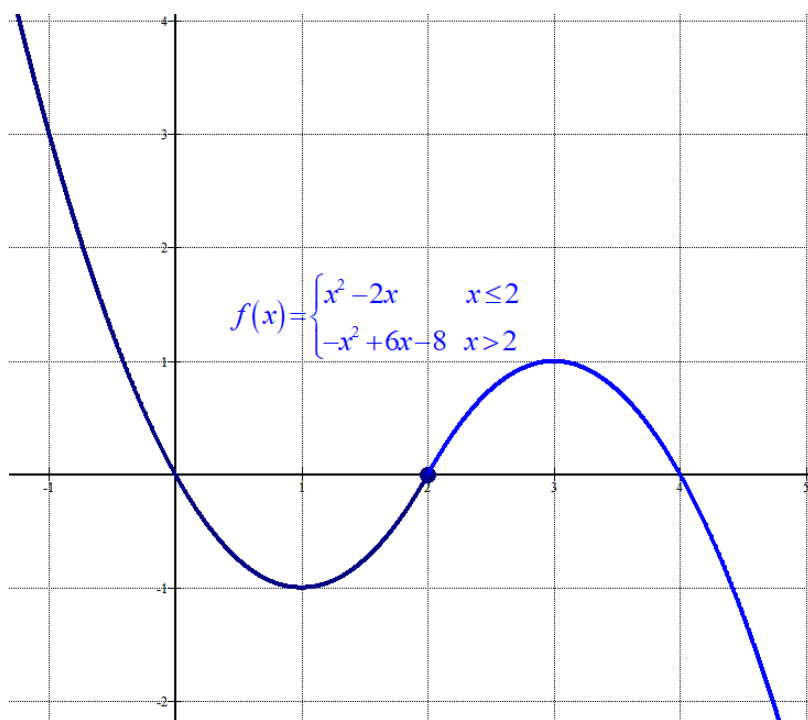
$$\begin{aligned} \boxed{x \leq 2} \rightarrow f(x) &= x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{Vértice } (1, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{x > 2} \rightarrow f(x) &= -x^2 + 6x - 8 \Rightarrow f'(x) = -2x + 6 \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{Vértice } (3, 1) \end{aligned}$$

Hacemos una tabla de valores de la función.

$x \leq 2$	
x	$y = x^2 - 2x$
0	0
1	-1
2	0

$x > 2$	
x	$y = -x^2 + 6x - 8$
3	1
4	0
5	-3

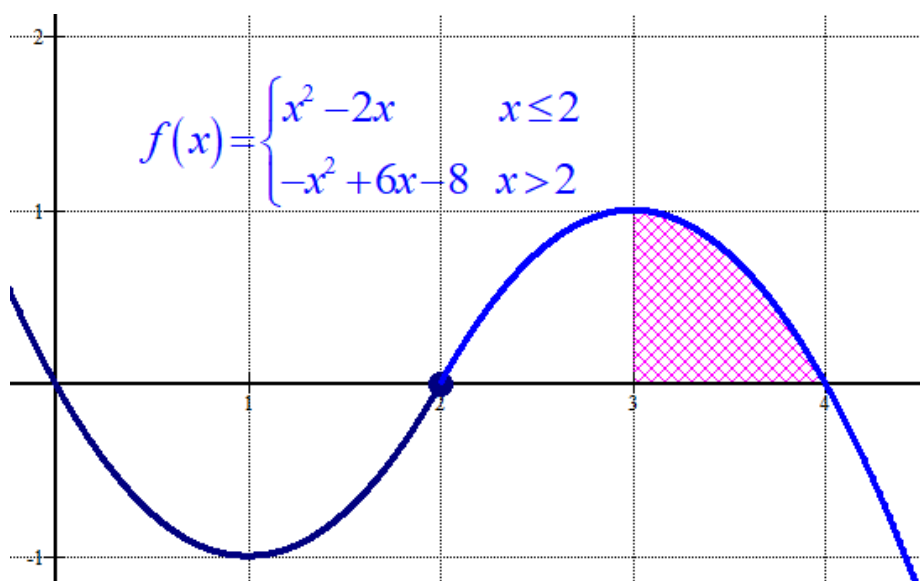


iii) En el intervalo (3, 4) la función es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

El área pedida es el valor de la integral definida entre 3 y 4 de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_3^4 -x^2 + 6x - 8 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_3^4 = \\ &= \left[-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 32 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 24 \right] = -\frac{64}{3} + 16 + 9 - 27 + 24 = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

No lo pide pero hacemos el dibujo del recinto para comprobar el valor obtenido.



EJERCICIO 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos.

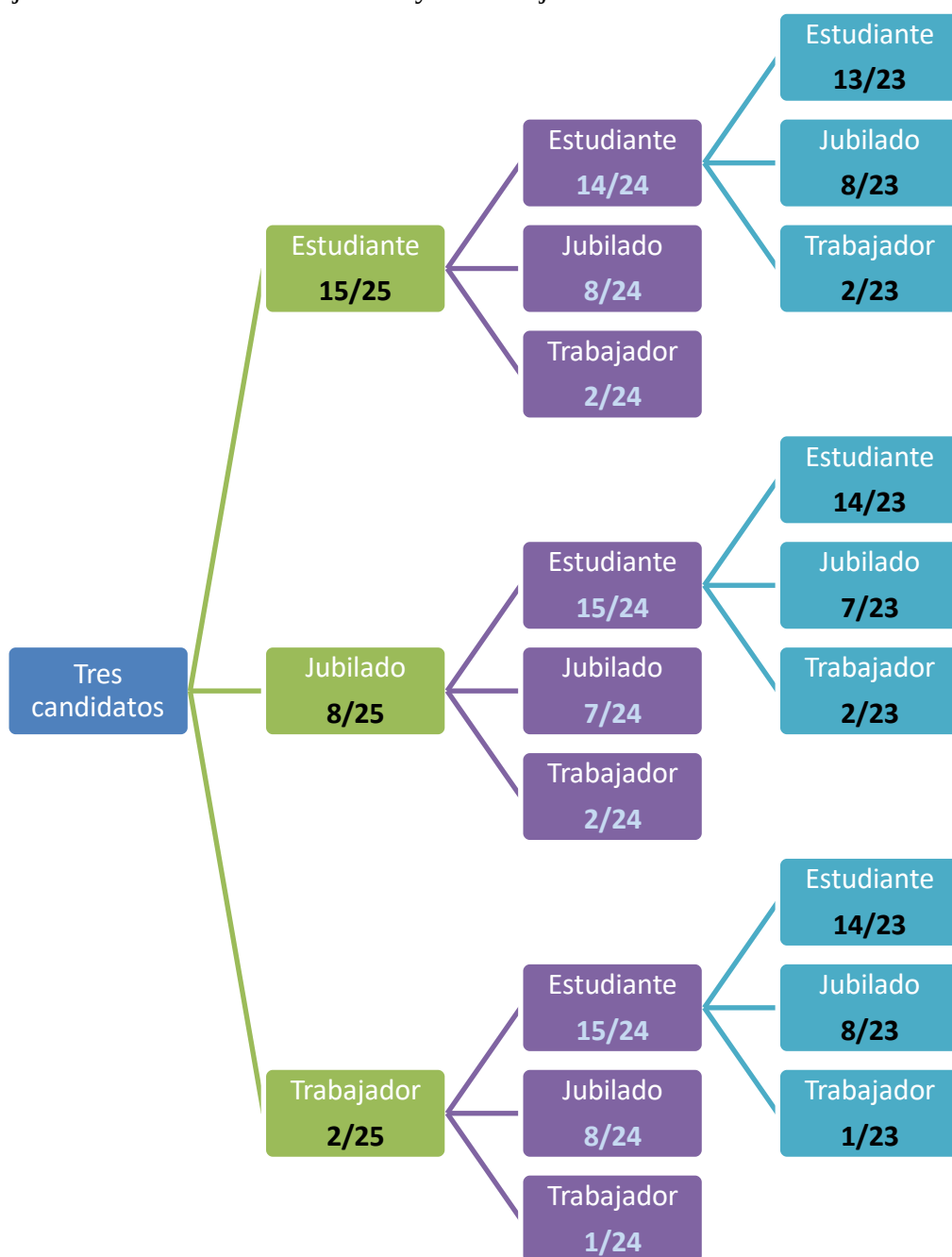
Calcule:

- La probabilidad de que todos ellos sean jubilados. (3 puntos)
- La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador. (3.5 puntos)
- La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador. (3.5 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol.

De los 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado los estudiantes son el 60 % de 25 $\rightarrow$ 15.

Los jubilados son el 32 % de 25 $\rightarrow$ 8 y los trabajadores son $25 - 15 - 8 = 2$.



El diagrama de árbol es muy grande y no lo hacemos completo, pero nos sirve para darnos cuenta de como funciona el experimento aleatorio y sus probabilidades.

Llamamos E1, E2 y E3 a elegir estudiante en 1ª, 2ª o 3ª selección.

Análogamente llamamos J1, J2 y J3 a elegir jubilado en 1ª, 2ª o 3ª selección. Y T1, T2 y T3 a elegir trabajador en 1ª, 2ª o 3ª selección.

i) Nos piden calcular $P(J1 \cap J2 \cap J3)$.

$$P(J1 \cap J2 \cap J3) = P(J1)P(J2/J1)P(J3/(J1 \cap J2)) = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} = \boxed{\frac{14}{675} \approx 0.02}$$

ii) Hay distintas formas de que se realice este suceso:

$$E1 \cap E2 \cap T3; E1 \cap T2 \cap E3; T1 \cap E2 \cap E3$$

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos anteriores.

$$P(2 \text{ estudiantes y 1 trabajador}) =$$

$$= P(E1 \cap E2 \cap T3) + P(E1 \cap T2 \cap E3) + P(T1 \cap E2 \cap E3) =$$

$$= \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} + \frac{15}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{14}{23} + \frac{2}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = 3 \cdot \frac{2}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = \boxed{\frac{21}{230} \approx 0.09}$$

iii) Existen muchas formas de que ocurra el suceso que se plantea, por ello nos planteamos calcular su probabilidad utilizando el suceso contrario.

El suceso contrario de “Alguno es trabajador” es “Ninguno es trabajador”

$$P(\text{Alguno es trabajador}) = 1 - P(\text{Ninguno es trabajador}) =$$

$$= 1 - P(\overline{T1} \cap \overline{T2} \cap \overline{T3}) = 1 - P(\overline{T1})P(\overline{T2}/\overline{T1})P(\overline{T3}/(\overline{T1} \cap \overline{T2})) =$$

$$= 1 - \frac{23}{25} \cdot \frac{22}{24} \cdot \frac{21}{23} = 1 - \frac{77}{100} = \boxed{\frac{23}{100} = 0.23}$$

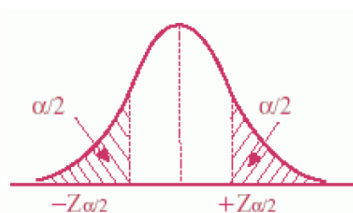
EJERCICIO 6:

Un estudio concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: [9.58875, 10.41125].

- Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de los 144 exfumadores. (5 puntos)
- Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar. (5 puntos) (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Tiempo (en meses) que tarda un fumador en dejar de fumar. $X = N(\mu, \sigma)$

- Tamaño de la muestra = $n = 144$
El nivel de confianza es del 90%



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{10.41125 - 9.58875}{2} = 0.41125$$

Utilizamos la fórmula del error y despejo σ .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.41125 = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{144}} \Rightarrow \sigma = \frac{0.41125 \cdot 12}{1.645} = 3$$

La desviación típica es 3 y por tanto la varianza poblacional es $3^2 = 9$.
La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{9.58875 + 10.41125}{2} = 10$$

El tiempo medio en dejar de fumar para la muestra es de 10 meses.

- Con un nivel de confianza del 94% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}} = 0.47$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (10 - 0.47, 10 + 0.47) = (9.53, 10.47)$$

EvAU Ordinaria 2021

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes

cuestiones:

- i) Calcule A^{-1} y B^{-1} (3 puntos)
- ii) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$. (3 puntos)
- iii) Resuelva la ecuación matricial $AXB = C$. (4 puntos)

EJERCICIO 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2%. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2}$ y $g(x) = 2x^2 + ax + 1$.

- i) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad. (3 puntos)
- ii) Calcule el valor del parámetro a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = 1/2$. (3 puntos)
- iii) Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro $a = -1$. (4 puntos)

EJERCICIO 4:

- i) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x + 1}$. (5 puntos)
- ii) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x + 1)^3$, sabiendo que $F(0) = 9/8$. (5 puntos)

EJERCICIO 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75% de las visitas buscan alojamiento, el 55% de las visitas buscan vuelo y el 40% de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

- i) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento. (3 puntos)
- ii) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo. (4 puntos)
- iii) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento. (3 puntos)

EJERCICIO 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos: 49.8, 34.4, 42.1, 55.7, 54.9, 53, 54.6, 53.3, 68.9 y 42.4.

- i) Calcule un intervalo de confianza al 93% para el gasto medio. (5 puntos)
- ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes

cuestiones:

i) Calcule A^{-1} y B^{-1} (3 puntos)

ii) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$. (3 puntos)

iii) Resuelva la ecuación matricial $AXB = C$. (4 puntos)

i) La matriz inversa existe si el determinante es no nulo. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Existe la matriz inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si el determinante de B es no nulo. $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$

Existe la matriz inversa de B. La calculamos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$C - A = 2X - 6I \Rightarrow C - A + 6I = 2X \Rightarrow X = \frac{1}{2}(C - A + 6I)$$

Sustituimos las matrices I, A y C.

$$C - A + 6I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C - A + 6I = \begin{pmatrix} 4 - 2 + 6 & 2 + 2 + 0 \\ -2 - 0 + 0 & 6 - 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(C - A + 6I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11/2 \end{pmatrix}$$

iii) Sabemos que las matrices A y B tienen inversa y se ha calculado en el apartado i).

Despejamos en la ecuación y hallamos la matriz X.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 & 1 + 6 \\ 0 - 2 & 0 + 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2%. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2. (2 puntos)

- i) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = “número de horas de formación F1”. y = “número de horas de formación F2”.

Se desea maximizar el aumento de la productividad. La función objetivo sería:

“Cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2 mejoraría la productividad en un 2%” $\rightarrow f(x, y) = 0.01x + 0.02y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

“Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación” $\rightarrow x + y \leq 50$

“El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2” $\rightarrow x \geq 20; y \leq 35$

“Los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2” $\rightarrow x \geq y$

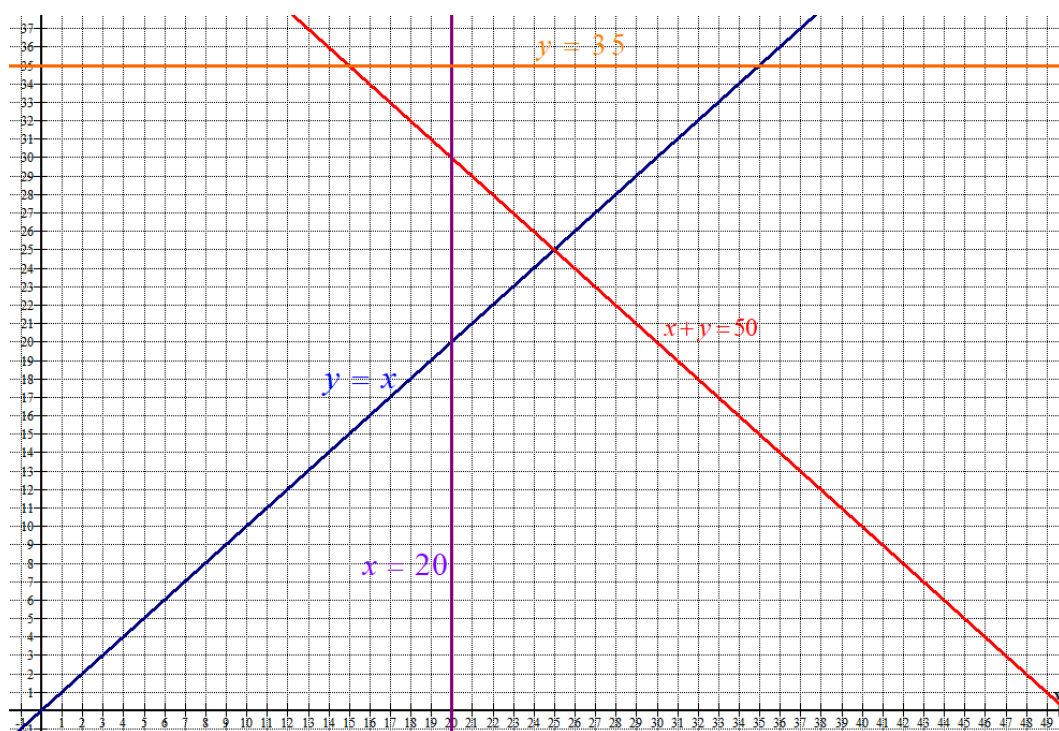
Además, el número de horas es positivo $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ x \geq 20; \quad y \leq 35 \\ x \geq y \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

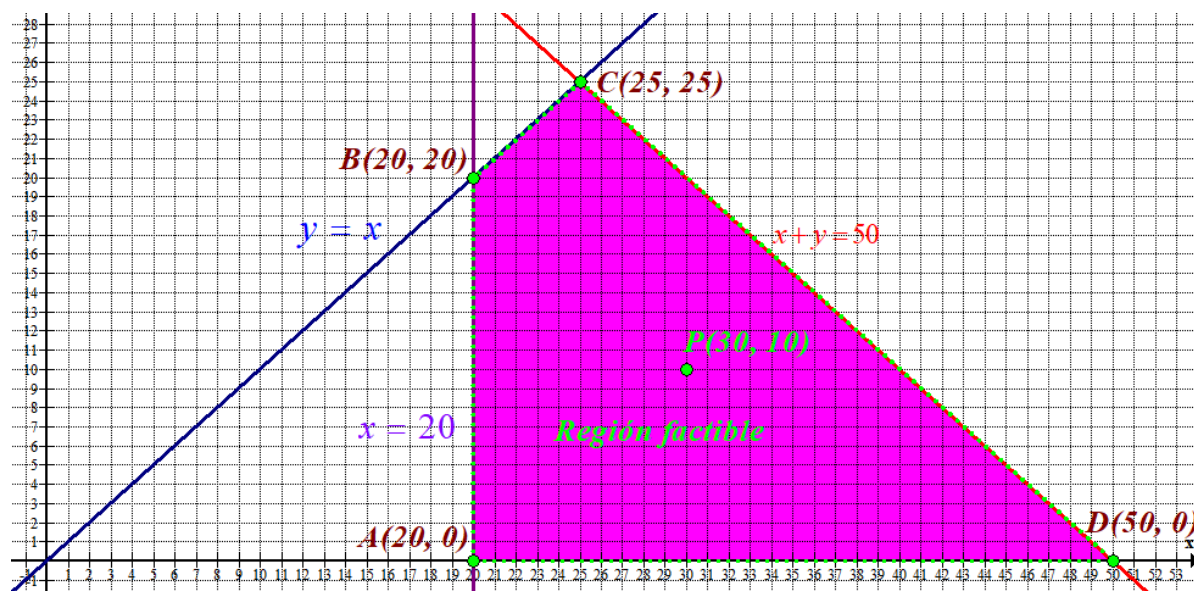
$x + y = 50$		$y = x$		$x = 20$		$y = 35$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 50 - x$	x	$y = x$	$x = 20$	y	x	$y = 35$	
0	50	0	0	20	20	0	35	
25	25	20	20	20	30	30	35	
50	0	25	25					



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ x \geq 20; \quad y \leq 35 \\ x \geq y \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del plano situada en}$$

el primer cuadrante a la derecha de la recta lila y por debajo de las rectas azul, roja y naranja. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Comprobamos que el punto P(30, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 10 \leq 50 \\ 30 \geq 20; \quad 10 \leq 35 \\ 30 \geq 10 \\ 30 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡SE CUMPLEN! La región factible es correcta.}$$

Valoramos la función $f(x, y) = 0.01x + 0.02y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

$$A(20, 0) \rightarrow f(20, 0) = 0.01 \cdot 20 + 0 = 0.2$$

$$B(20, 20) \rightarrow f(20, 20) = 0.01 \cdot 20 + 0.02 \cdot 20 = 0.6$$

$$C(25, 25) \rightarrow f(25, 25) = 0.01 \cdot 25 + 0.02 \cdot 25 = \mathbf{0.75}$$

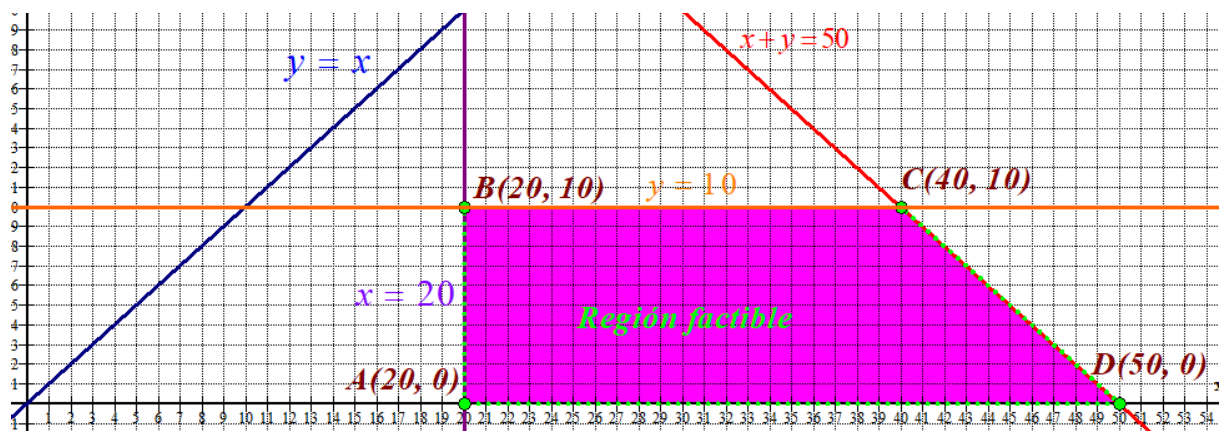
$$D(50, 0) \rightarrow f(50, 0) = 0.01 \cdot 50 + 0.02 \cdot 0 = 0.5$$

La máxima productividad ($0.75 = 75\%$) se obtiene en el punto $C(25, 25)$.

Con 25 horas de formación tipo F1 y 25 horas del tipo F2 se maximiza el aumento de la productividad.

iii) Si se añade la restricción “no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2” $\rightarrow y \leq 10$

La nueva región factible sería:



Si valoramos los nuevos vértices tenemos que:

$$A(20, 0) \rightarrow f(20, 0) = 0.01 \cdot 20 + 0 = 0.2$$

$$B(20, 10) \rightarrow f(20, 10) = 0.01 \cdot 20 + 0.02 \cdot 10 = 0.4$$

$$C(40, 10) \rightarrow f(40, 10) = 0.01 \cdot 40 + 0.02 \cdot 10 = \mathbf{0.60}$$

$$D(50, 0) \rightarrow f(50, 0) = 0.01 \cdot 50 + 0.02 \cdot 0 = 0.5$$

Con la nueva situación la solución que maximiza el aumento de la productividad es $C(40, 10)$.

Con 40 horas de cursos de formación F1 y 10 de cursos de formación F2 se obtiene un aumento máximo de la productividad de un $0.60 = 60\%$.

EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2}$ y $g(x) = 2x^2 + ax + 1$.

- Estudie la continuidad de la función $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad. (3 puntos)
- Calcule el valor del parámetro a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = 1/2$. (3 puntos)
- Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro $a = -1$. (4 puntos)

- i) La función $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2}$ tiene por dominio $\mathbb{R} - \{1\}$ ya que $x = 1$ anula el denominador.

La función es discontinua en $x = 1$. Estudiamos la discontinuidad:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2} = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x - 2} = \frac{8}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ Es discontinua inevitable de salto infinito.}$$

- ii) Para que tenga un mínimo en $x = 1/2$ debe anularse la derivada $\rightarrow g'(1/2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + ax + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x + a \\ g'(1/2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

Además la derivada segunda debe ser positiva $\rightarrow g''(1/2) > 0$. Lo comprobamos.

$$g(x) = 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x - 2 \Rightarrow g''(x) = 4 > 0. \text{ Se cumple.}$$

- iii) Para el valor del parámetro $a = -1$ la función queda $g(x) = 2x^2 - x + 1$

$$\begin{aligned} g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 - (1+h) + 1 - (2 - 1 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1^2 + h^2 + 2h) - 1 - h + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 2h^2 + 4h - 1 - h + 1 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2h + 3)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 3 = \boxed{3} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4:

- i) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x+1}$. (5 puntos)
- ii) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = 9/8$. (5 puntos)

- i) El denominador de la función se anula para $x = -1$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntota vertical. $x = -1$.

$$\text{Calculamos los límites laterales: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5}{x+1} = \frac{2+5}{0} = \infty$$

La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 5}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x+1} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5 - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 5}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1} = -2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 2x - 2$

- ii) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (2x+1)^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 2x+1 \Rightarrow dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int t^3 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{1}{2} \frac{t^4}{4} = \frac{1}{8} t^4$$

$$= \frac{1}{8} t^4 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = 2x+1 \end{array} \right\} = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + K$$

$$F(x) = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + K$$

Como debe cumplirse que $F(0) = 9/8$ determinamos el valor de K para que ocurra.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + K \\ F(0) = \frac{9}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{8} (2 \cdot 0 + 1)^4 + K = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} + K = \frac{9}{8} \Rightarrow K = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + 1$.

EJERCICIO 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75% de las visitas buscan alojamiento, el 55% de las visitas buscan vuelo y el 40% de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

- La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento. (3 puntos)
- La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo. (4 puntos)
- La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento. (3 puntos)

Llamemos A = “Cliente busca alojamiento”; V = “Cliente busca vuelo”.

Las probabilidades de que un cliente que visita la web de reservas busque alojamiento es $P(A) = 0.75$. De que busque vuelo es $P(V) = 0.55$. De que busque alojamiento y vuelo es $P(A \cap V) = 0.40$.

Construimos una tabla de contingencia para obtener el resto de probabilidades.

	Cliente busca vuelo (V)	Cliente no busca vuelo ($\bar{V}$)	
Cliente busca alojamiento (A)	40 $P(A \cap V) = 0.40$	$P(A \cap \bar{V}) =$	75
Cliente no busca alojamiento ($\bar{A}$)	$P(\bar{A} \cap V) =$	$P(\bar{A} \cap \bar{V}) =$	
	55		100

Completamos la tabla aplicando la propiedad de que la suma del contenido de las 2 primeras celdas da como resultado el contenido de la tercera (tanto en vertical como en horizontal).

	Cliente busca vuelo (V)	Cliente no busca vuelo ($\bar{V}$)	
Cliente busca alojamiento (A)	40 $P(A \cap V) = 0.40$	35 $P(A \cap \bar{V}) = 0.35$	75
Cliente no busca alojamiento ($\bar{A}$)	15 $P(\bar{A} \cap V) = 0.15$	10 $P(\bar{A} \cap \bar{V}) = 0.10$	25
	55	45	100

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas.

- i) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento $\rightarrow P(A \cup V)$

$$P(A \cup V) = \{\text{Regla de Laplace}\} = \frac{40 + 35 + 15}{100} = \frac{90}{100} = \boxed{\frac{9}{10} = 0.9}$$

- ii) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo $\rightarrow P(A/\bar{V})$

$$P(A/\bar{V}) = \frac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{35}{45} = \boxed{\frac{7}{9} \approx 0.78}$$

- iii) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento $\rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{V})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{V}) = \{\text{Regla de Laplace}\} = \frac{10}{100} = \boxed{\frac{1}{10} = 0.1}$$

EJERCICIO 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos: 49.8, 34.4, 42.1, 55.7, 54.9, 53, 54.6, 53.3, 68.9 y 42.4.

- i) Calcule un intervalo de confianza al 93% para el gasto medio. (5 puntos)
 ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Gasto en euros de un cliente de un supermercado.

Como la varianza es 64 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{64} = 8$ €. $X = N(\mu, 8)$

- i) El tamaño de la muestra es $n = 10$ y la media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{49.8 + 34.4 + 42.1 + 55.7 + 54.9 + 53 + 54.6 + 53.3 + 68.9 + 42.4}{10} = 50.91 \text{ €}$$

Para un nivel de confianza al 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.035 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.965 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$

k	0	1	2
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
0.9	0.8159	0.8186	0.8212
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
1.3	0.9032	0.9049	0.9066
1.4	0.9192	0.9207	0.9222
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
1.6	0.9452	0.9463	0.9474
1.7	0.9554	0.9564	0.9573
1.8	0.9641	0.9649	0.9656

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 4.58$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50.91 - 4.58, 50.91 + 4.58) = (46.33, 55.49)$$

- ii) La mitad del error sería $Error = \frac{4.58}{2} = 2.29$ €

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “n”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.29 = 1.81 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.29\sqrt{n} = 1.81 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.81 \cdot 8}{2.29} \Rightarrow n = \left(\frac{1.81 \cdot 8}{2.29} \right)^2 = 39.98..$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 40 clientes. A partir de ese tamaño de muestra el error cometido es menor de 2.29 €.

EvAU Extraordinaria 2020

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa**Elija tres de los seis ejercicios siguientes****EJERCICIO 1:**

- i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (7 \text{ puntos})$$

- ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B . (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$

- i) Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

- ii) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$ (4 puntos)

- iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + \ln(5x - 3)^2 + xe^{3x}$ (3 puntos)

EJERCICIO 3:

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación de 3 toneladas.

- i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio. (5 puntos)
- ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

EJERCICIO 4:

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m² y 100 euros/m², respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m² de telas. Para elaborar un m² de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m² de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m² de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m² de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

- Plantee el problema. (4 puntos)
- Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m² de tela T1 que de tela T2. (2 puntos)

EJERCICIO 5:

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 5 & 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & x \geq 4 \end{cases}.$$

- Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada. (4 puntos)
- ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta. (2 puntos)
- Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x-1} \, dx$ (4 puntos)

EJERCICIO 6:

En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60% de los 110 estudiantes presentados.

- Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado. (3 puntos)
- Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido. (4 puntos)
- Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro. (3 puntos)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

- i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (7 \text{ puntos})$$

- ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B . (3 puntos)

- i) Utilizamos el método de Gauss para su clasificación.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + y + z = 4 \\ -2x + 2y - 2z = -6 \\ \hline 3y - z = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x + 3y + z = 5 \\ -3x + 3y - 3z = -9 \\ \hline 6y - 2z = -4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 6y - 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 6y - 2z = -4 \end{cases} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 6y - 2z = -4 \\ -6y + 2z = 4 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones lineales triangular equivalente al del ejercicio tiene infinitas soluciones pues hay 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -z + 3 \\ z = 2 + 3y \end{cases} \Rightarrow x - y = -2 - 3y + 3 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2y}$$

Las soluciones del sistema son $\boxed{x = 1 - 2t; \quad y = t; \quad z = 2 + 3t}$ siendo $t \in \mathbb{R}$

- ii)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+0+8 & -1+0+1 & 2+0-2 \\ 0+24-24 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -28+12+16 & -4+2+2 & 8-3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_3$$

La inversa de A es B y la inversa de B es A : $A^{-1} = B$ y $B^{-1} = A$.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$

i) Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

ii) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$ (4 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x}$ (3 puntos)

i) Calculamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+3)x - 1 \cdot (x^2 + 3x + 4)}{x^2} = \frac{2x^2 + 3x - x^2 - 3x - 4}{x^2}$$

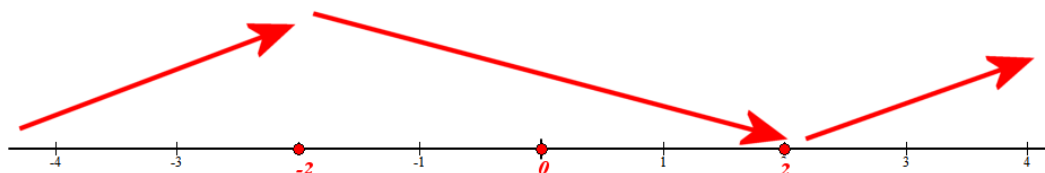
$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Veamos el signo de la derivada antes de -2 , entre -2 y 2 , y después de 2 .

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 4}{(-3)^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 4}{(-1)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 4}{1^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 4}{3^2} = \frac{5}{9} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 3(-2) + 4}{-2} = -1$$

$$f(2) = \frac{2^2 + 6 + 4}{2} = 7$$

El máximo relativo es $M(-2, -1)$ y el mínimo relativo es $P(2, 7)$.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 4}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{4}{x} dx = \int_1^2 x + 3 + \frac{4}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln x \right]_1^2 \\
 &= \left[\frac{2^2}{2} + 6 + 4 \ln 2 \right] - \left[\frac{1^2}{2} + 3 + 4 \ln 1 \right] = 2 + 6 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 = \boxed{4.5 + 4 \ln 2 = 7.27}
 \end{aligned}$$

iii) Determinamos la expresión de $g(x)$ y después obtenemos su derivada.

$$g(x) = f(x) + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x} = \frac{x^2 + 3x + 4}{x} + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x}$$

$$g(x) = x + 3 + 4x^{-1} + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x} \Rightarrow g'(x) = 1 + 0 - 4x^{-2} + \frac{2(5x-3)5}{(5x-3)^2} + e^{3x} + x3e^{3x}$$

La derivada de la función es $g'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{10}{5x-3} + e^{3x}(1+3x)$.

EJERCICIO 3:

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación de 3 toneladas.

- i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio. (5 puntos)
- ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Peso (en toneladas) de un contenedor. $X = N(\mu, 3)$

- i) Para un nivel de confianza es del 97% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Utilizamos la fórmula del error para despejar “n”.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.651 \Rightarrow 2,17 \cdot 3 = 0.651 \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,17 \cdot 3}{0.651} \Rightarrow n = \left(\frac{2,17 \cdot 3}{0.651} \right)^2 = 100$$

Se utilizó una muestra de 100 contenedores.

- ii) La muestra es de 9 contenedores y la media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{20.25 + 17.5 + 21.8 + 15.7 + 14.6 + 17.2 + 23.1 + 11.7 + 18.3}{9} = 17.794 \text{ toneladas}$$

Con un nivel de confianza del 93% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.81$$

Obtenemos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}} = 1.81$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17.794 - 1.81, 17.794 + 1.81) = (15.984, 19.604)$$

EJERCICIO 4:

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m² y 100 euros/m², respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m² de telas. Para elaborar un m² de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m² de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m² de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m² de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m² de tela T1 que de tela T2. (2 puntos)

- i) Llamemos “x” al número de metros cuadrados de tela T1 e “y” al número de metros cuadrados de tela T2.

Hacemos una tabla para ordenar la información proporcionada en el ejercicio.

	Horas de máquina	Carretes de hilo	Precio de venta	Coste de elaboración
M ² de tela T1 (x)	2x	6x	60x	15x
M ² de tela T2 (y)	4y	3y	100y	10y
TOTALES	2x + 4y	6x + 3y	60x + 100y	15x + 10y

La función objetivo son los beneficios que deseamos maximizar. El beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el coste de elaboración:

$$B(x, y) = 60x + 100y - 15x - 10y = 45x + 90y$$

Las restricciones son:

“Debe fabricar un total de al menos 15 m² de telas” $\rightarrow x + y \geq 15$

“Dispone de 80 horas semanales de máquina” $\rightarrow 2x + 4y \leq 80$

“Dispone de 150 carretes de hilo” $\rightarrow 6x + 3y \leq 150$

El número de metros cuadrados de tela son positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- ii) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

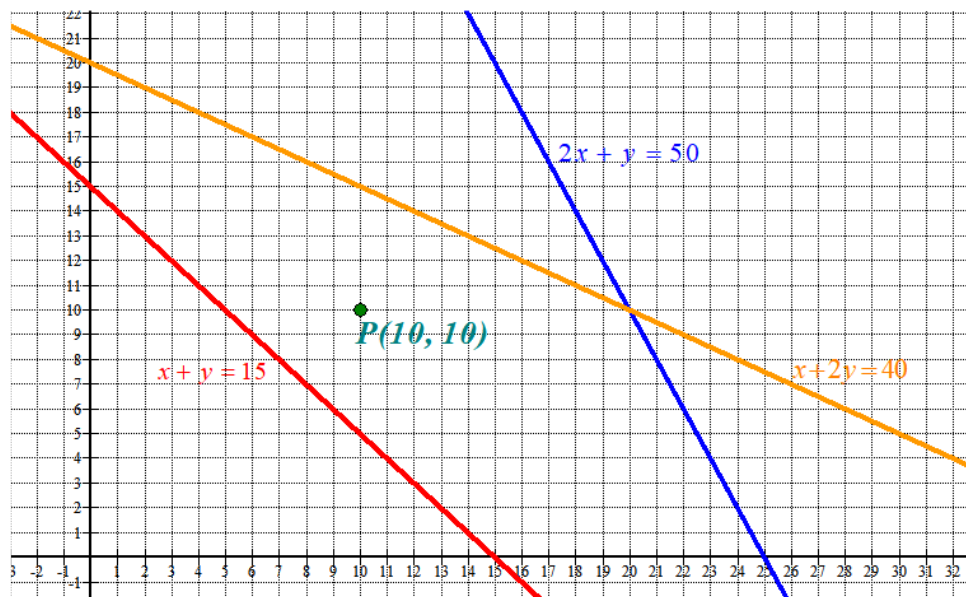
$$x + y = 15$$

$$x + 2y = 40$$

$$2x + y = 50$$

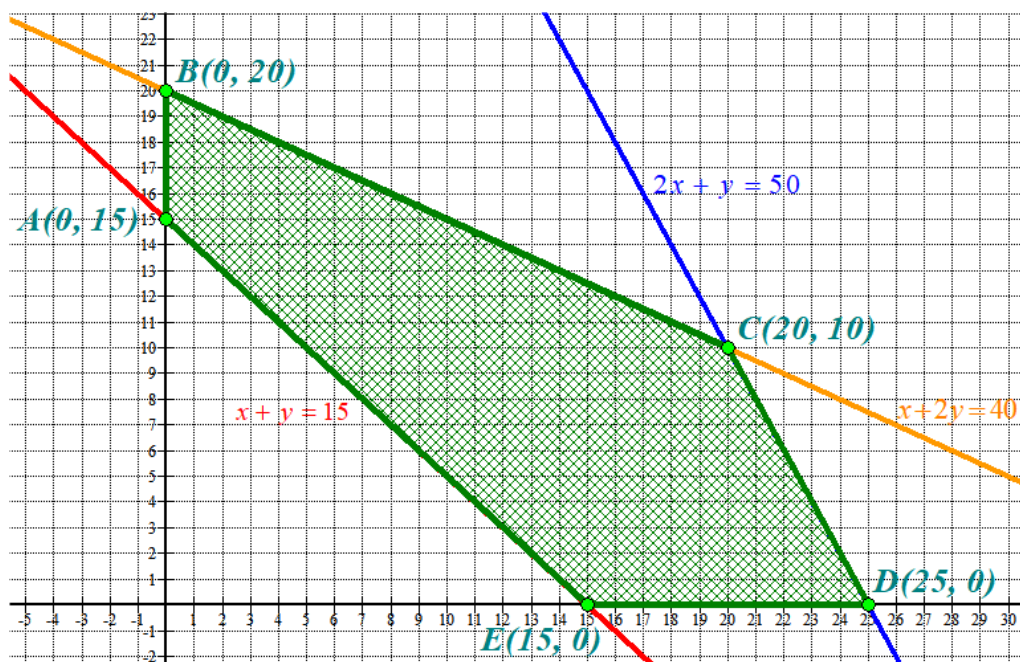
$$x \geq 0; y \geq 0 \quad \text{Primer cuadrante}$$

x	y = 15 - x	x	y = $\frac{40 - x}{2}$	x	y = 50 - 2x
0	15	0	20	0	50
15	0	40	0	25	0



Veamos si el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 15 \\ 10 + 20 \leq 40 \\ 20 + 10 \leq 50 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada.}$$



Valoramos la función beneficio en cada vértice en busca de un mínimo.

$$A(0, 15) \rightarrow B(0, 15) = 1350$$

$$B(0, 20) \rightarrow B(0, 20) = 1800$$

$$C(20, 10) \rightarrow B(20, 10) = 900 + 900 = 1800$$

$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 1125$$

$$E(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 675$$

Todos los puntos del segmento que une el punto B con C dan un beneficio de 1800 €. La solución no es única.

Una solución: 0 m² de tela T1 y 20 de tela T2.

Otra solución: 2 m² de tela T1 y 19 de tela T2.

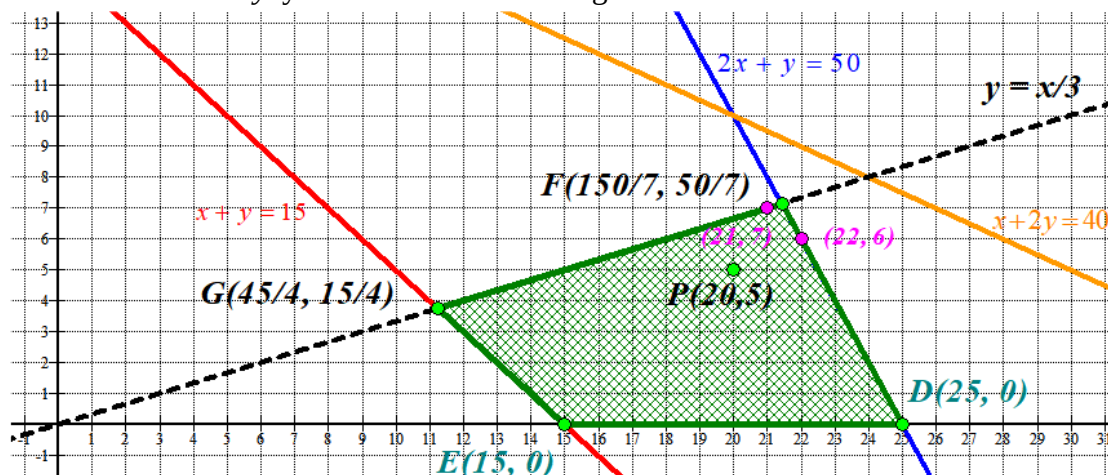
Otra solución: 4 m² de tela T1 y 18 de tela T2.

...

Última solución: 20 m² de tela T1 y 10 de tela T2

iii) Añadimos la restricción “Se quiere elaborar al menos el triple de m² de tela T1 que de tela T2”
 $\rightarrow x \geq 3y$.

Añadimos la recta $x = 3y$ y obtenemos la nueva región factible.



$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 15 \\ 10 + 20 \leq 40 \\ 20 + 10 \leq 50 \\ 20 \geq 15 \\ 10 \geq 0; \quad 10 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(20,5) \text{ cumple la nueva restricción. La región factible es la rayada.} \end{array}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 45x + 90y$ en cada vértice de la nueva región factible.

$$D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 1125$$

$$E(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 675$$

$$F(150/7, 50/7) \rightarrow B(150/7, 50/7) = 1607.14$$

$$G(45/4, 15/4) \rightarrow B(45/4, 15/4) = 843.75$$

La solución del problema es ahora el punto $F(150/7, 50/7)$. O si los metros cuadrados deben ser un valor entero, el punto de coordenadas enteras más próximo $(21, 7)$ con un beneficio de 1575, superior al de $(22, 6)$ que tiene de beneficio 1530.

EJERCICIO 5:

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 5 & 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & x \geq 4 \end{cases}$$

- i) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada. (4 puntos)
 ii) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta. (2 puntos)
 iii) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x-1} dx$ (4 puntos)

- i) La derivada por la izquierda en $x = 4$.

$$f'(4^-) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 6x + 5 - (8 - 11)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{0}{0} =$$

Factorizo el numerador

1	-6	8
4	4	-8
1	-2	0

$$\rightarrow x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} x - 2 = 2 = f'(4^-)$$

Y la derivada por la derecha en $x = 4$.

$$f'(4^+) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 11 - (8 - 11)}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x - 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2 = 2 = f'(4^+)$$

- ii) Veamos si es continua en $x = 4$.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 8 - 11 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 6x + 5 = 16 - 24 + 5 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x - 11 = -3 \end{aligned} \right\} \text{Son iguales y es continua en } x = 4.$$

Es derivable en $x = 4$ pues coinciden sus derivadas laterales $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$.

- iii) Hacemos un cambio de variable para calcular la integral.

$$\int \sqrt{6x-1} dx = \left\{ \begin{aligned} \sqrt{6x-1} = t &\rightarrow \frac{6}{2\sqrt{6x-1}} dx = dt \rightarrow \\ &\rightarrow dx = \frac{2\sqrt{6x-1}}{6} dt \rightarrow dx = \frac{t}{3} dt \end{aligned} \right\} = \int t \cdot \frac{t}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^2 dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{9} = \left\{ \sqrt{6x-1} = t \right\} = \frac{(\sqrt{6x-1})^3}{9} + K$$

EJERCICIO 6:

En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60% de los 110 estudiantes presentados.

- i) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado. (3 puntos)
- ii) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido. (4 puntos)
- iii) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro. (3 puntos)

- i) Llamamos A_1 al suceso “ser alumno del centro 1”, A_2 a “ser alumno del centro 2” y B a “aprobar la prueba de acceso a la universidad”.

Nos piden calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) =$$

$$= \frac{140}{140+110} \cdot \frac{112}{140} + \frac{110}{140+110} \cdot 0.60 = \boxed{\frac{89}{125} = 0.712}$$

- ii) Nos piden calcular $P(A_2/\bar{B})$. Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(A_2/\bar{B}) = \frac{P(A_2 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A_2)P(\bar{B}/A_2)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{110}{250} \cdot (1 - 0.60)}{1 - 0.712} = \boxed{\frac{11}{18} \approx 0.6111}$$

- iii) El suceso planteado puede pasar de dos formas: o todos son del primer centro o todos son del segundo.

Al ser sin reemplazamiento las elecciones de cada estudiante las extracciones sucesivas no son independientes.

$$P(\text{Los tres estudiantes son del mismo centro}) =$$

$$= P(\text{Los tres estudiantes son del centro 1}) + P(\text{Los tres estudiantes son del centro 2}) =$$

$$= P(1^\circ \text{ del centro 1})P(2^\circ \text{ del centro 1}/1^\circ \text{ del centro 1})P(3^\circ \text{ del centro 1}/1^\circ \text{ y } 2^\circ \text{ del centro 1}) +$$

$$+ P(1^\circ \text{ del centro 2})P(2^\circ \text{ del centro 2}/1^\circ \text{ del centro 2})P(3^\circ \text{ del centro 2}/1^\circ \text{ y } 2^\circ \text{ del centro 2}) =$$

$$= \frac{140}{250} \cdot \frac{139}{249} \cdot \frac{138}{248} + \frac{110}{250} \cdot \frac{109}{249} \cdot \frac{108}{248} = \boxed{\frac{107}{415} = 0.2578}$$

EvAU Ordinaria 2020

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II


 Universidad Pública de Navarra
 Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

responda a las siguientes cuestiones:

- Determine el valor de m para que $AB = BA$ (3.5 puntos)
- Calcule CB^{-1} y DC^t . (3.5 puntos)
- ¿Qué dimensión debe tener una matriz N para que pueda calcularse el producto DNC ? ¿Y para que NBD^t sea matriz cuadrada? Razone las respuestas. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

- Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un punto de inflexión en el punto $x = \frac{1}{3}$. (5 puntos)
- Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 2}$ (5 puntos)

EJERCICIO 3:

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25% de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40% de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

- Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en la sección de Sonido. (3 puntos)
- Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés. (3.5 puntos)
- Consideremos los sucesos A “el empleado trabaja en la sección Portátiles” y el suceso B “el empleado tiene titulación C1 en inglés”. Compruebe si los sucesos A y B son o no independientes. (3.5 puntos)

EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación. (2 puntos)

EJERCICIO 5:

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$.

- i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)
- iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX. (2 puntos)
- iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

El tiempo que la población de jóvenes de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas². El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

- i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)
 - ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: $[24.9775, 26.6225]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = (-3 \ 1)$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de m para que $AB = BA$ (3.5 puntos)

ii) Calcule CB^{-1} y DC^t . (3.5 puntos)

iii) ¿Qué dimensión debe tener una matriz N para que pueda calcularse el producto DNC ? ¿Y para que NBD^t sea matriz cuadrada? Razone las respuestas. (3 puntos)

i) Planteamos la igualdad y determinamos el valor de m .

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1+0 & 0+0 \\ -m-5 & 0-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 0+0 \\ 1+2m & 0-10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 = -1 \\ 0 = 0 \\ -m-5 = 1+2m \\ -10 = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m-5 = 1+2m \Rightarrow -3m = 6 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

ii) Para calcular CB^{-1} debemos calcular primero la inversa de B .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } B.$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz CB^{-1} .

$$CB^{-1} = (-3 \ 1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (-3 \ 1) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (6+1 \ 0+1) = \boxed{\frac{1}{2} (7 \ 1)}$$

Determinamos la expresión de la matriz DC^t .

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$DC^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ -3+0 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$(3 \times 2) \cdot (2 \times 1) \rightarrow (3 \times 1)$$

iii) Para poder calcular los dos productos de DNC debe de ser posible DN , siendo $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ una

matriz 3×2 la matriz N debe ser de dimensión $2 \times n$.

Para poder hacer NC , siendo $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz 1×2 la matriz N debe ser de dimensión $m \times 1$.

Uniendo los dos requisitos la matriz N debe ser de dimensión 2×1 .

Para que NBD^t sea cuadrada debe de cumplirse lo siguiente:

N de dimensión $m \times n$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de dimensión 2×2 y $D^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de dimensión 2×3 .

Pongamos las dimensiones:

$$(m \times n)(2 \times 2)(2 \times 3) = (m \times n)(2 \times 3)$$

Este último producto solo es posible si $n = 2$.

$$(m \times n)(2 \times 3) = (m \times 2)(2 \times 3) = (m \times 3)$$

Y para que el resultado sea una matriz cuadrada debe cumplirse que $m = 3$.

La matriz N debe ser de dimensión 3×2

EJERCICIO 2:

i) Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un punto de inflexión en el punto $x = \frac{1}{3}$. (5 puntos)

ii) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 2}$ (5 puntos)

i) La función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene como derivada $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$.

Como sabemos que tiene un extremo relativo en $x = -1$ en dicho valor la derivada se anula:

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Rightarrow \underline{-3 - 2a + b = 0}$$

Además, sabemos que pasa por el punto $(-1, 0)$ sustituyendo en la función tendríamos:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow \underline{1 + a - b + c = 0}$$

Y también tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$ por lo que se anula la derivada segunda en dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = -6x + 2a \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -6\frac{1}{3} + 2a = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \underline{a = 1}$$

Sustituyendo en las otras dos igualdades obtenidas tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} -3 - 2 + b = 0 \\ 1 + 1 - b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b = 5} \quad \left. \begin{array}{l} \\ -b + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{c = b - 2 = 5 - 2 = 3}$$

Los valores buscados son $a = 1$; $b = 5$; $c = 3$.

ii) La función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 2}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \frac{13}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $\underline{x = 2}$

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 + 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\cancel{x^2} + 1}{\cancel{x^2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{x - 2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1 - 3x(x - 2)}{x - 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{3x^2} + 1 - \cancel{3x^2} + 6x}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 6 = 6$$

La asíntota oblicua es $\underline{y = 3x + 6}$

EJERCICIO 3:

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25% de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40% de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

- Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en la sección de Sonido. (3 puntos)
- Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés. (3.5 puntos)
- Consideremos los sucesos A “el empleado trabaja en la sección Portátiles” y el suceso B “el empleado tiene titulación C1 en inglés”. Compruebe si los sucesos A y B son o no independientes. (3.5 puntos)

Hay 40 empleados, de ellos 16 están en Portátiles y de estos el 25% tiene el C1, es decir, $0,25 \cdot 16 = 4$ empleados están en Portátiles y tienen el C1, los restantes $16 - 4 = 12$ están en Portátiles y no tienen el C1.

20 empleados están en Telefonía y de estos el 40% tiene el C1, es decir, $0,40 \cdot 20 = 8$ empleados están en Telefonía y tienen el C1, los restantes $20 - 8 = 12$ empleados están en Telefonía y no tienen el C1.

4 empleados están en Sonido y de estos 3 tienen el C1, los restantes $4 - 3 = 1$ está en Sonido y no tiene el C1.

Toda esta información se recoge de una forma muy organizada en una tabla de contingencia.

	Portátiles	Telefonía	Sonido	
Tienen el C1	4	8	3	
No tienen el C1	12	12	1	
	16	20	4	40

Completamos la tabla.

	Portátiles	Telefonía	Sonido	
Tienen el C1	4	8	3	15
No tienen el C1	12	12	1	25
	16	20	4	40

Con esta información respondemos a las preguntas.

- i) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No tenga C1 en inglés y trabaje en Sonido}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{1}{40} = \boxed{0,025}$$

- ii) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Trabaje en Telefonía / Tiene el C1}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{8}{15} = \boxed{0,533}$$

- iii) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\text{Trabajar en Portátiles y tener el C1}) = \frac{4}{40} = 0,1 \\ P(A)P(B) &= P(\text{Trabajar en Portátiles})P(\text{Tener C1}) = \frac{16}{40} \cdot \frac{15}{40} = \frac{240}{1600} = 0,15 \end{aligned} \right\}$$

Son valores distintos y los sucesos A y B no son independientes.

EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación. (2 puntos)

- i) Es un problema de programación lineal. Llamamos “x” al número de toneladas del biocombustible T1 e “y” al número de toneladas del biocombustible T2.

El objetivo es encontrar el número de toneladas de cada combustible que permite maximizar el precio total de venta. Como vende cada tonelada de biocombustible T1 a un precio de 2000 euros y cada tonelada de T2 a 1800 euros $\rightarrow f(x, y) = 2000x + 1800y$. Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.

Obtengamos las restricciones.

Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y cada tonelada de T2 requiere 1 hora. Disponemos de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción $\rightarrow 3x + y \leq 90$

Cada tonelada de T1 requiere 2 unidades de materia prima y cada tonelada de T2 requiere 4 unidades. Disponemos de 195 unidades de materia prima a la semana $\rightarrow 2x + 4y \leq 195$

Además, se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible $\rightarrow x + y \geq 40$

Estas cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

El resumen de las restricciones es:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \geq 40 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ 3x + y \leq 90 \end{array} \right\}$$

- ii) Dibujamos las rectas asociadas a cada restricción y localizamos la región factible.

$$x + y = 40$$

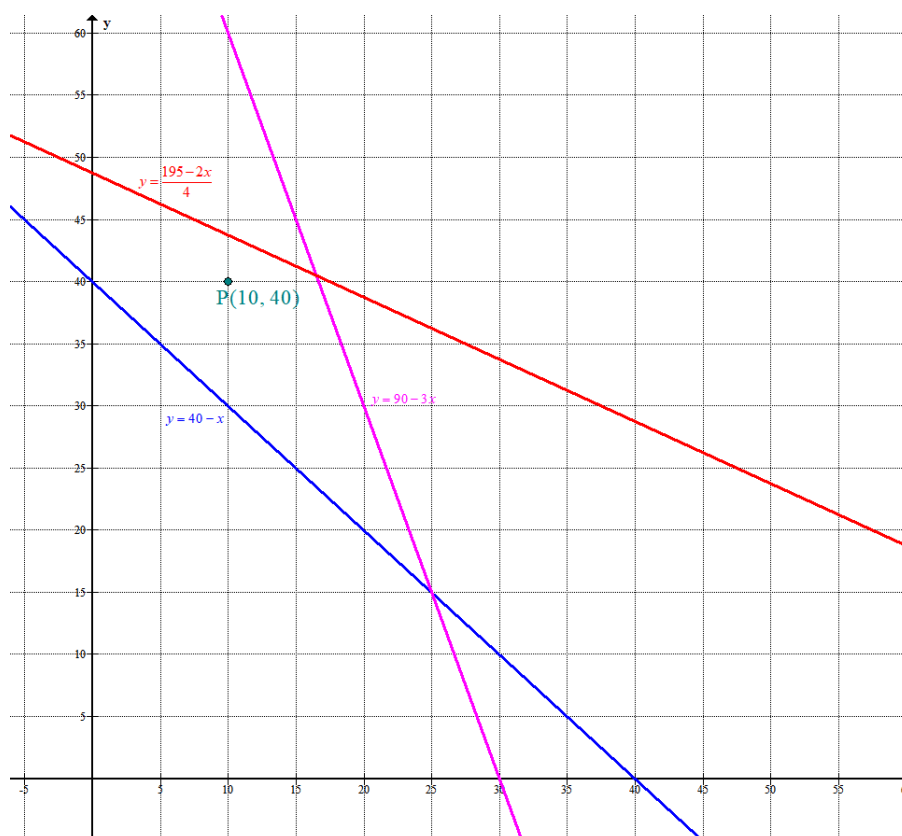
x	$y = 40 - x$
0	40
40	0

$$2x + 4y = 195$$

x	$y = \frac{195 - 2x}{4}$
20	155 / 4
30	135 / 4

$$3x + y = 90$$

x	$y = 90 - 3x$
20	30
30	0



Probamos si el punto $P(10, 40)$ cumple las restricciones o no.

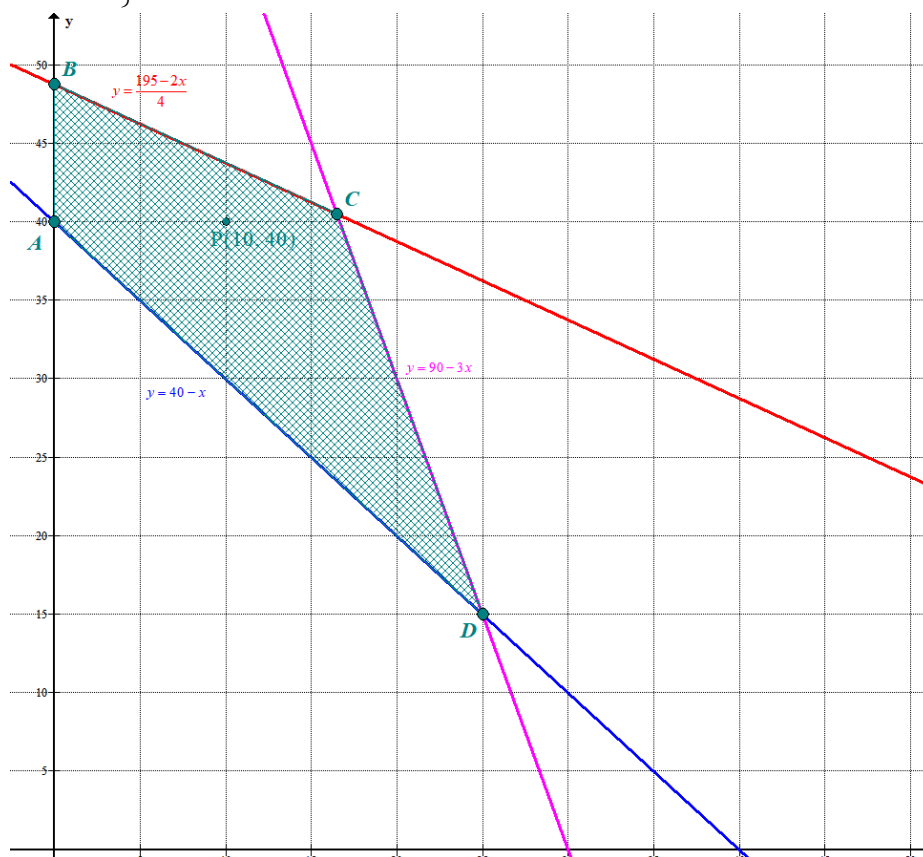
$$10 \geq 0; 40 \geq 0$$

$$10 + 40 \geq 40$$

$$20 + 160 \leq 195$$

$$30 + 40 \leq 90$$

Se cumplen todas. Por lo que la zona factible es la zona rayada.



Falta determinar las coordenadas de los vértices de esta región.

Los vértices A y B tienen coordenadas A(0, 40) y B(0, 195/4).

El vértice C y D los obtenemos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas correspondientes.

$$\begin{cases} y = 90 - 3x \\ y = 40 - x \end{cases} \Rightarrow 90 - 3x = 40 - x \Rightarrow -2x = -50 \Rightarrow x = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow y = 40 - 25 = 15$$

El punto D tiene coordenadas D(25, 15)

$$\begin{cases} y = 90 - 3x \\ 4y + 2x = 195 \end{cases} \Rightarrow 4(90 - 3x) + 2x = 195 \Rightarrow 360 - 12x + 2x = 195 \Rightarrow$$

$$-10x = -165 \Rightarrow x = \frac{165}{10} = 16,5 \Rightarrow y = 90 - 3 \cdot 16,5 = 90 - 49,5 = 40,5$$

El punto C tiene coordenadas C(16.5, 40.5).

Valoramos la función en cada uno de estos vértices en busca de un valor máximo.

$$A(0, 40) \rightarrow f(0, 40) = 0 + 1800 \cdot 40 = 72000 \text{ €}$$

$$B(0, 48.75) \rightarrow f(0, 48.75) = 0 + 1800 \cdot 48.75 = 87750 \text{ €}$$

$$C(16.5, 40.5) \rightarrow f(16.5, 40.5) = 2000 \cdot 16.5 + 1800 \cdot 40.5 = 33000 + 72900 = 105900 \text{ €}$$

$$D(25, 15) \rightarrow f(25, 15) = 2000 \cdot 25 + 1800 \cdot 15 = 50000 + 27000 = 77000 \text{ €}$$

El máximo precio se consigue con una producción de 16.5 toneladas del biocombustible T1 y de 40.5 toneladas del biocombustible T2.

- iii) Cambiamos la función objetivo y pasa a ser minimizar la contaminación, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación: $g(x, y) = 5x + 10y$ es nuestra nueva función objetivo.

La región factible es la misma por lo que hay que valorar en cada vértice esta nueva función objetivo.

$$A(0, 40) \rightarrow g(0, 40) = 0 + 400 = 400$$

$$B(0, 48.75) \rightarrow g(0, 48.75) = 0 + 487.5 = 487.5$$

$$C(16.5, 40.5) \rightarrow g(16.5, 40.5) = 5 \cdot 16.5 + 10 \cdot 40.5 = 82.5 + 405 = 487.5$$

$$D(25, 15) \rightarrow g(25, 15) = 125 + 150 = 275$$

La mínima contaminación se produce en el punto D(25, 15). Deben fabricar 25 toneladas del biocombustible T1 y 15 del T2 para minimizar la contaminación.

EJERCICIO 5:

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$.

- i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)
- iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX. (2 puntos)
- iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

- i) Los puntos de corte se obtienen:

Eje OY $\rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$. El punto de corte es P(0, 0)

$$\text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

El otro punto de corte es Q(3, 0).

- ii) Para determinar estos intervalos utilizamos la derivada. Buscamos cuando se anula.

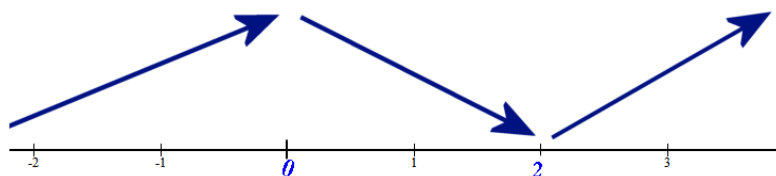
$$y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son $x = 0$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada es $y' = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada es $y' = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada es $y' = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

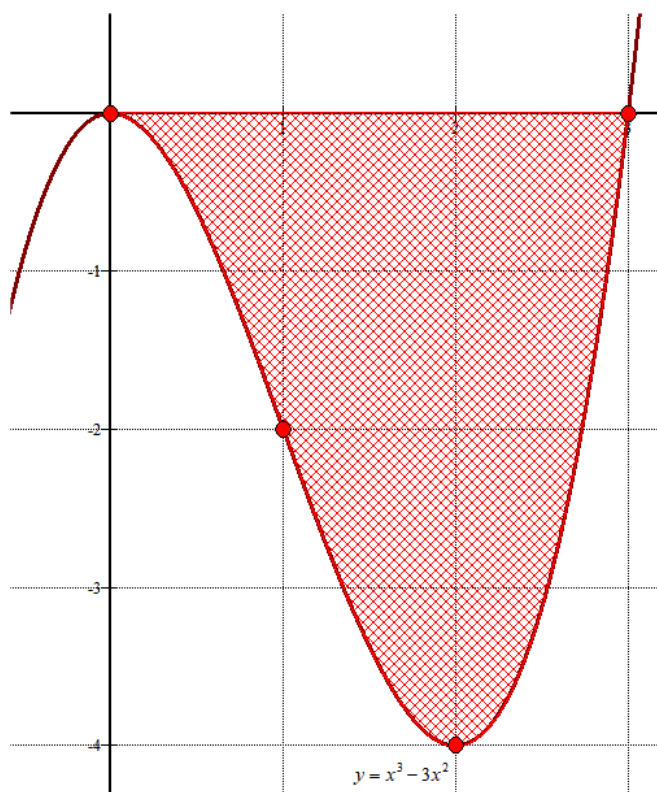
La función sigue el esquema siguiente.



Mirando este esquema la función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$. Presenta un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

- iii) Tenemos que dibujar el recinto limitado por la gráfica de la función y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 3$.

x	$y = x^3 - 3x^2$
0	0
1	$1 - 3 = -2$
2	$8 - 12 = -4$
3	0



iv) Contando cuadraditos rayados se observa que el área vale entre 6 y 7 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto con la integral definida entre 0 y 3 de $y = x^3 - 3x^2$.

Como está por debajo del eje de abscisas tomamos valor absoluto pues la integral definida va a salir negativa.

$$\text{Área} = \left| \int_0^3 x^3 - 3x^2 dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^3 \right| = \left| \left[\frac{3^4}{4} - 3^3 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 \right] \right| = \left| \frac{81}{4} - 27 \right| = |-6.75| = \boxed{6.75 \text{ u}^2}$$

EJERCICIO 6:

El tiempo que la población de jóvenes de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas². El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

- i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)
- ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: [24.9775, 26.6225]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Tiempo que un joven de una región dedica mensualmente a hacer deporte.

Como la varianza es 16 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{16} = 4$ horas. $X = N(\mu, 4)$

- i) El tamaño de la muestra es $n = 64$ y la media muestral es $\bar{x} = 25.8$

Para un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla de} \\ \text{la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Determinamos el valor del error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}} = 1,085$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (25.8 - 1,085, 25.8 + 1,085) = (24.715, 26.885)$$

- ii) El error es la mitad de la longitud del intervalo.

$$Error = \frac{26.6225 - 24.9775}{2} = 0.8225$$

Utilizando la fórmula del error obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = 0.8225 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{64}} = 0,8225 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2 \cdot 0.8225 = 1.645$$

Buscamos 1.645 en la tabla de la Normal(0, 1) y tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0.9495 + 0.9505}{2} = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.95 = 0.05 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9$$

Si $1 - \alpha = 0.90$ el nivel de confianza es del 90 %



EvAU Julio 2019
Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Realiza una de las opciones A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)
- ii) Calcule $(A - B)(A + B)$ (1 punto)
- iii) Calcule $C^{-1}C^t - I$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

- i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión, (2 puntos)
- ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

- i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)
 - ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad, (1 punto)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Opción B**EJERCICIO 1:**

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

- i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$. (1 punto)
- ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

EJERCICIO 3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

- i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)
 - ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)
 - iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)
- (Escriba las fórmulas necesarias)

SOLUCIONES**Opción A****EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)

ii) Calcule $(A-B)(A+B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1}C^t - I$ (1.5 puntos)

i)

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+4 & -8-2 \\ -8-2 & 4+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+1 & -2-3 \\ -2-3 & 1+9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii)

$$\left. \begin{aligned} (A-B) &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ (A+B) &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 12+3 & -6+6 \\ -6-4 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Calculemos $C^{-1}C^t - I$.

$$C^{-1}C^t - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 & -6+4 \\ 3/2-2/2 & 9/2-4/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}C^t - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

- i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión, (2 puntos)
 ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x$.

Buscamos los puntos que anulan la segunda derivada (posibles puntos de inflexión).

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$$

El posible punto de inflexión es $x = 2$.

Veamos el signo de la derivada segunda antes de 2 y después de 2.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = -12 < 0$, la función es cóncava ($\cap$).
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$, la función es convexa ($\cup$).

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

Como la función cambia de cóncava a convexa en $x = 2$, en dicho valor la función presenta un punto de inflexión. Como $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 24 = 8$ las coordenadas del punto de inflexión son $(2, 8)$.

- ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Determinamos los valores de $f(a)$ y $f'(a)$.

$$a = -2 \Rightarrow \begin{cases} f(a) = f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 24 = -8 - 24 + 24 = -8 \\ f'(a) = f'(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = 12 + 24 = 36 \end{cases}$$

La recta tangente queda:

$$y + 8 = 36(x + 2) \Rightarrow y = 36x + 64$$

EJERCICIO 3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

- i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)
 ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad, (1 punto)
 (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

- i) Si X = duración de un tipo de batería en meses. $X = N(\mu, 3)$.

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{15,7 + 7,2 + 21,6 + 19,4 + 14,5 + 17,3 + 15,2 + 23,4 + 21,5 + 15,8}{10} = 17,16$$

Para un nivel de confianza del 98% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$$

El error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 2,21$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (17,16 - 2,21, 17,16 + 2,21)$$

El intervalo de confianza es (15,95, 19,37).

- ii) El error en el tamaño de muestra anterior es 2,21, si se debe reducir a la mitad debe quedarse en 1,105. Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor de "n".

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,105 \Rightarrow 2,33 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1,105 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,33 \cdot \frac{3}{1,105} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,33 \cdot \frac{3}{1,105} \right)^2 = 40,01$$

El número mínimo de baterías a utilizar en la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad sea es de 41 baterías.

Opción B

EJERCICIO 1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

Llamemos x = número de horas diarias de trabajo en la planta P1 y = número de horas diarias de trabajo en la planta P2

- i) Las restricciones son:

Bobinas de ancho A1 se producen $10x + 10y$ al día. Al menos se deben suministrar 180 al día
 $\rightarrow 10x + 10y \geq 180$.

Bobinas de ancho A2 se producen $10x + 50y$ al día. Al menos se deben suministrar 300 al día
 $\rightarrow 10x + 50y \geq 300$.

Bobinas de ancho A3 se producen $20x + 10y$ al día. Al menos se deben suministrar 240 al día
 $\rightarrow 20x + 10y \geq 240$.

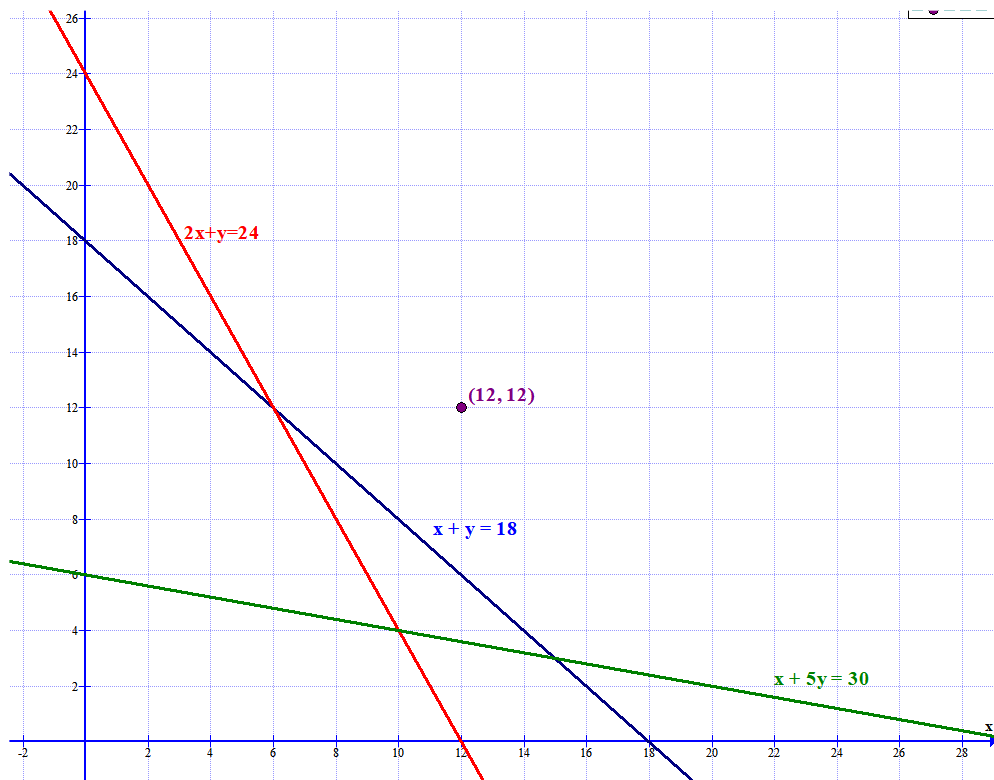
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 10y \geq 180 \Rightarrow x + y \geq 18 \\ 10x + 50y \geq 300 \Rightarrow x + 5y \geq 30 \\ 20x + 10y \geq 240 \Rightarrow 2x + y \geq 24 \end{array} \right\}$$

El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 (funciona x horas al día) y de 120 euros en la planta P2 (funciona y horas al día). La función a minimizar es la función gasto diario, que es $f(x, y) = 70x + 120y$

- ii) Hacemos una tabla de valores para dibujar las rectas asociadas a las restricciones.

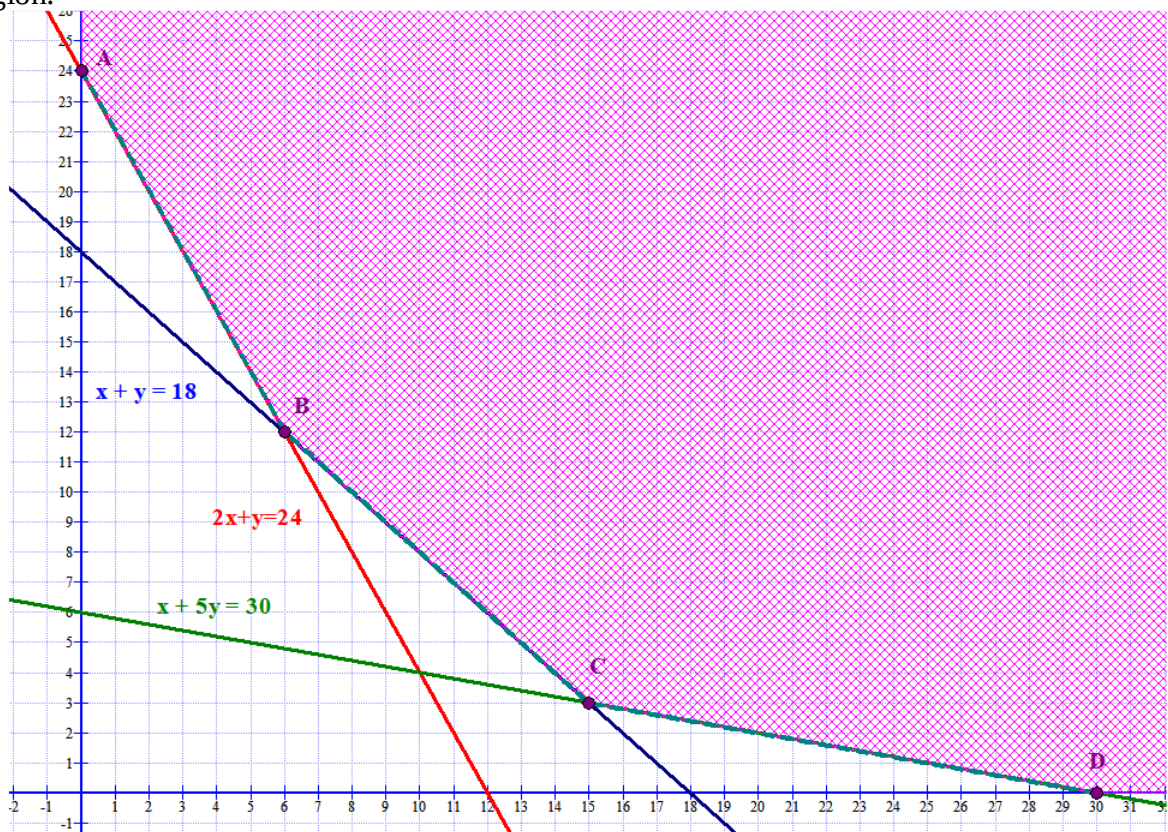
x	$y = 18 - x$	x	$y = \frac{30 - x}{5}$	x	$y = 24 - 2x$
0	18	0	6	0	24
10	8	10	4	10	4
18	0	30	0	12	0



Si probamos el punto $(12, 12)$ vemos que cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 12 \geq 0 \\ 12 \geq 0 \\ 12 + 12 \geq 18 \\ 12 + 60 \geq 30 \\ 24 + 12 \geq 24 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona rayada y los candidatos a minimizar el gasto los vértices de esta región.



Los vértices tienen coordenadas A(0,24), B(6, 12), C(15,3) y D(30, 0).

Valoramos el gasto en cada vértice de la región factible.

$$A(0,24) \rightarrow f(0,24) = 2880$$

$$B(6, 12) \rightarrow f(6,12) = 420 + 1440 = 1860$$

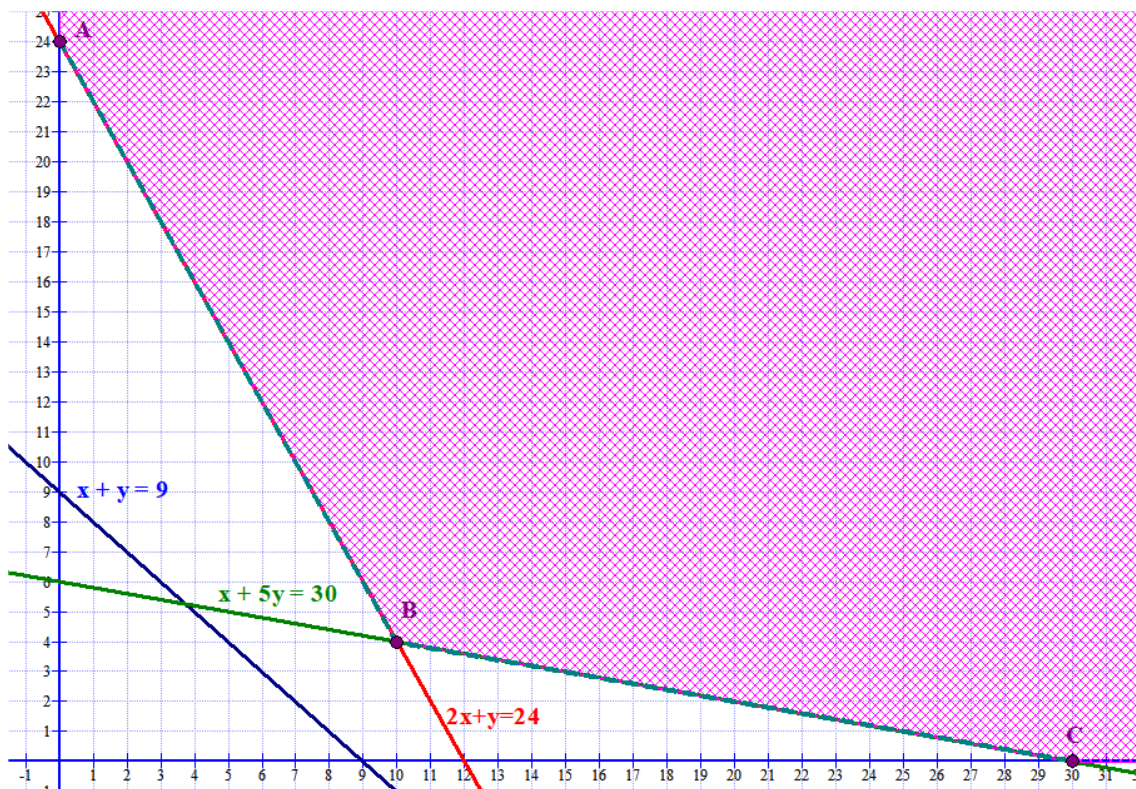
$$C(15,3) \rightarrow f(15,3) = 1050 + 360 = 1410$$

$$D(30, 0) \rightarrow f(30,0) = 2100$$

El gasto es mínimo en C(15,3). Es decir 15 horas diarias en la planta P1 y 3 horas diarias en planta P2.

iii) Si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad (90 diarias), las restricciones cambiarían y la región factible quedaría.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 10y \geq 90 \Rightarrow x + y \geq 9 \\ 10x + 50y \geq 300 \Rightarrow x + 5y \geq 30 \\ 20x + 10y \geq 240 \Rightarrow 2x + y \geq 24 \end{array} \right\}$$



La producción de bobinas A1 no influirá en la minimización del gasto, ya que la recta $x + y = 9$ no limita la región factible.

EJERCICIO 2:

i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$.

(1 punto)

ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

i) ¿Dónde se cortan las gráficas de las funciones?

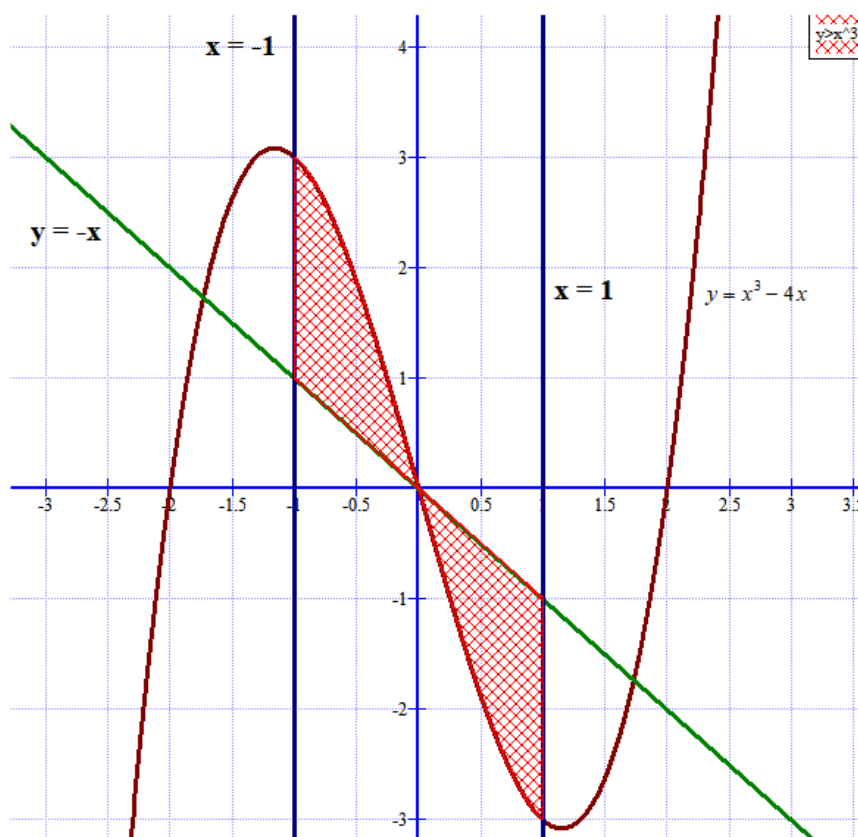
$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = -x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = -x \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} = \pm 1,73 \end{cases}$$

Solo está en nuestro intervalo $(-1, 1)$ el valor $x = 0$.

Tomamos una tabla de valores para dibujar las dos gráficas y el recinto indicado.

x	$y = x^3 - 4x$
-1	3
0	0
1	-3
2	0
-2	0

x	$y = -x$
-1	1
0	0
1	-1



ii) El área de este recinto es la suma de la integral definida entre -1 y 0 de parábola menos recta y de la integral definida entre 0 y 1 de la recta menos la parábola.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^3 - 4x - (-x) dx + \int_0^1 -x - (x^3 - 4x) dx &= \int_{-1}^0 x^3 - 3x dx + \int_0^1 -x^3 + 3x dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{0}{4} - 3\frac{0}{2} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - 3\frac{(-1)^2}{2} \right] + \left[-\frac{1^4}{4} + 3\frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{0}{4} + 3\frac{0}{2} \right] = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \boxed{2,5 u^2} \end{aligned}$$

EJERCICIO 3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

- Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)
 - Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)
 - Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)
- (Escriba las fórmulas necesarias)

Construimos una tabla de contingencia para aclarar la simultaneidad de los sucesos.

	Trabaja	No trabaja	
Estudia	25%		80%
No estudia			
	40%		100%

A partir de estos datos proporcionados por el problema completamos las celdas que faltan en la tabla.

	Trabaja	No trabaja	
Estudia	25%	55%	80%
No estudia	15%	5%	20%
	40%	60%	100%

i) $P(\text{únicamente estudia}) = P(\text{Estudia y no trabaja}) = 55\% = \boxed{0,55}$

ii) $P(\text{No estudia y no trabaja}) = 5\% = \boxed{0,05}$

iii) $P(\text{Trabaje} / \text{No estudia}) = \frac{P(\text{Trabaje y no estudie})}{P(\text{No estudie})} = \frac{0,15}{0,20} = \boxed{0,75}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Llamemos al suceso A = Un joven estudia, B = Un joven trabaja.

Nos dicen que al elegir al azar a un joven $P(A) = 0,80$, $P(B) = 0,40$ y que $P(A \cap B) = 0,25$.

i) Nos piden calcular $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,8 = 0,25 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0,8 - 0,25 = \boxed{0,55}$$

ii) Nos piden calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (0,8 + 0,4 - 0,25) = 1 - 0,95 = \boxed{0,05}$$

iii) $P(B / \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0,4 - 0,25}{1 - 0,8} = \frac{0,15}{0,2} = \boxed{0,75}$

EvAU Junio 2019

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Realiza una de las opciones A o B

Opción A**EJERCICIO 1:**Sea la expresión matricial $B^t - A X = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- i) Despeje la matriz X . (1 punto)
- ii) Calcule la matriz X . (2.5 puntos)

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

- i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)
- ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)
- iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)
- iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

- i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)
 - ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
 - iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B**EJERCICIO 1:**

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas de maquinaria y de 2400 kilos de abono.

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

- i) Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos^3(5x^2) + x \ln(1-2x)$ (1 punto)
- ii) Calcule $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)
- iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2} dx$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

- i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)
- ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES**Opción A****EJERCICIO 1:**

Sea la expresión matricial $B^t - A X = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz X . (1 punto)

ii) Calcule la matriz X . (2.5 puntos)

i) $B^t - A X = B \Rightarrow -A X = B - B^t \Rightarrow A X = -B + B^t$

Si A es invertible podemos despejar X multiplicando por la matriz inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

Esto demuestra que A es invertible y existe A^{-1} . Y seguimos despejando.

$$A X = -B + B^t \Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} (-B + B^t) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} (-B + B^t)}$$

ii) Debemos hallar la inversa de A y luego hacer las operaciones indicadas.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (-B + B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 & 6+3 & -6-6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6+3 & -3-3 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

- ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)
- Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)
- Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)
- ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

i) Si $x = 0$ la función beneficio da un valor de $f(0) = -3(0)^2 + 30(0) + 20 = 20$. Da un beneficio de 20.000 €.

Si $x = 1$ entonces $f(1) = -3 + 30 + 20 = 47$. El beneficio es de 47.000 €.

ii) Para obtener la x que da un máximo beneficio calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f(x) = -3x^2 + 30x + 20 \Rightarrow f'(x) = -6x + 30$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 30 = 0 \Rightarrow -6x = -30 \Rightarrow x = \frac{30}{6} = 5$$

Para ver si es máximo o mínimo utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = -6x + 30 \Rightarrow f''(x) = -6$$

Sustituyendo $x = 5$ tenemos $f''(5) = -6 < 0$. Luego $x = 5$ es un máximo.

Calculemos el beneficio con $x = 0$; $x = 5$ y $x = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 20 \\ f(5) &= -75 + 150 + 20 = 95 \\ f(8) &= -192 + 240 + 20 = 68 \end{aligned} \right\}$$

Tiene un máximo beneficio de 95.000 € con un gasto de 5000 € en publicidad.

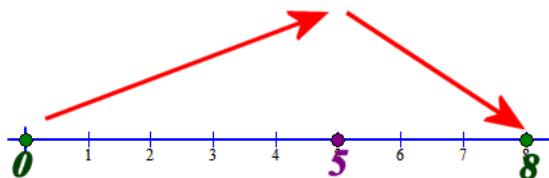
iii) La derivada no cambia de signo en el intervalo (0,5), ni en (5,8). Veamos el signo en cada intervalo.

De 0 a 5000 € de gasto en publicidad, tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = -18 + 30 = 12 > 0. \text{ El beneficio va creciendo.}$$

De 5000 a 8000 € de gasto en publicidad, tomamos $x = 6$ y la derivada vale

$$f'(6) = -36 + 30 = -6 < 0. \text{ El beneficio va disminuyendo.}$$



iv) Como $\left. \begin{aligned} f(0) &= 20 \\ f(5) &= -75 + 150 + 20 = 95 \\ f(8) &= -192 + 240 + 20 = 68 \end{aligned} \right\}$ El beneficio mínimo se produce en gasto 0 € en publicidad.

El beneficio en gasto 0 es de 20.000 €.

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

- i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)
- ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)
- iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

- i) $P(\text{Ninguno estudie alemán}) = P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B}) =$

$$= P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno 2 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno de la clase B}) =$$

$$= \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{20}{25} = \boxed{0,446}$$

- ii) $P(\text{Únicamente estudie uno de ellos alemán}) = P(\text{Estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B}) + P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y Estudie alemán el alumno 2 de la clase A y no estudie alemán el alumno de la clase B}) + P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A y no estudie alemán el alumno 2 de la clase A y Estudie alemán el alumno de la clase B}) =$

$$= P(\text{Estudie alemán el alumno 1 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno 2 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno de la clase B}) + P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A}) \cdot$$

$$P(\text{Estudie alemán el alumno 2 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno de la clase B}) + P(\text{No estudie alemán el alumno 1 de la clase A}) \cdot P(\text{No estudie alemán el alumno 2 de la clase A}) \cdot$$

$$P(\text{Estudie alemán el alumno de la clase B}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{20}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{5}{25} = \boxed{0,368}$$

- ii) $P(\text{Alguno de ellos estudie alemán}) = 1 - P(\text{Ninguno estudie alemán}) = 1 - 0,446 = \boxed{0,554}$

Opción B

EJERCICIO 1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas de maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

i) Llamemos x = hectáreas dedicadas al cultivo C1; y = hectáreas dedicadas al cultivo C2.

Las restricciones de la situación planteada son:

- Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas $\rightarrow x + y \geq 4$
- Son necesarias 20 horas de maquinaria para cada hectárea del cultivo C1 y 10 horas para cada hectárea del cultivo C2. Solo disponemos de 180 horas de maquinaria $\rightarrow 20x + 10y \leq 180 \Rightarrow 2x + y \leq 18$
- Son necesarios 100 kilos de abono para cada hectárea del cultivo C1 y 300 kilos de abono para cada hectárea del cultivo C2. Solo disponemos de 2400 kilos $\rightarrow 100x + 300y \leq 2400 \Rightarrow x + 3y \leq 24$

Las restricciones se resumen:

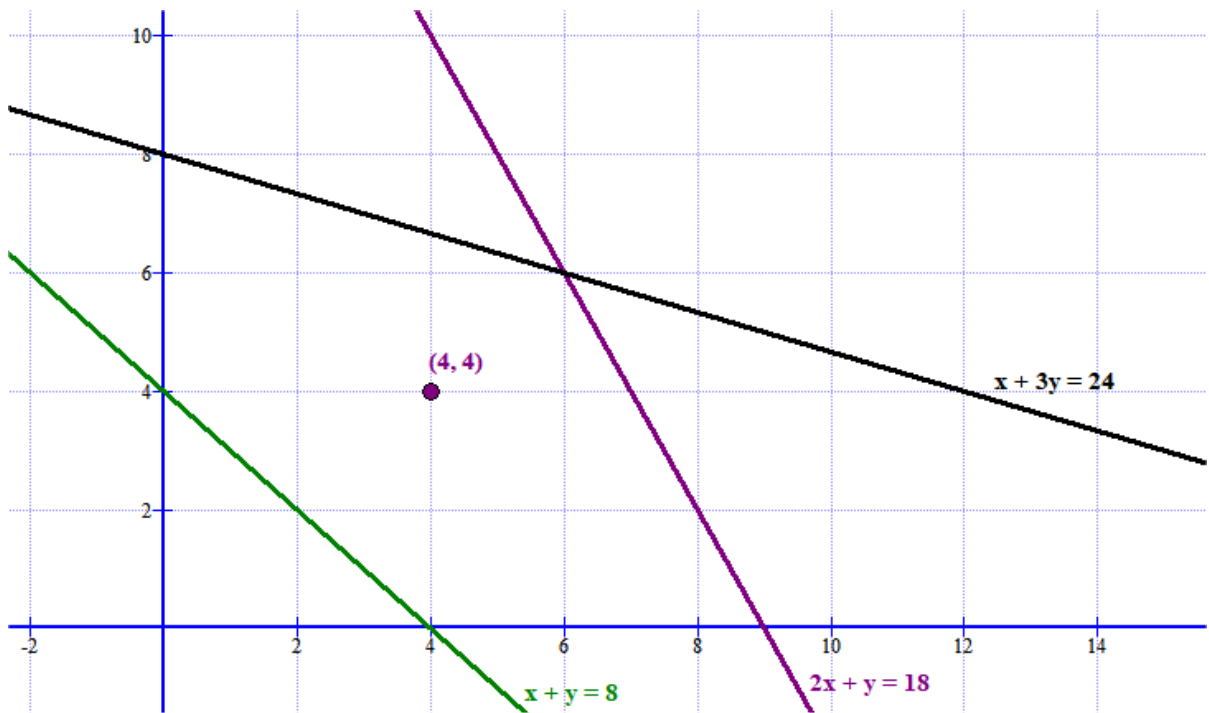
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + 3y \leq 24 \end{array} \right\}$$

El beneficio neto obtenido por cada hectárea del cultivo C1 es de 3000 € y del C2 es de 1500 €.

La función beneficio es $B(x, y) = 3000x + 1500y$

ii) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones para localizar la región factible.

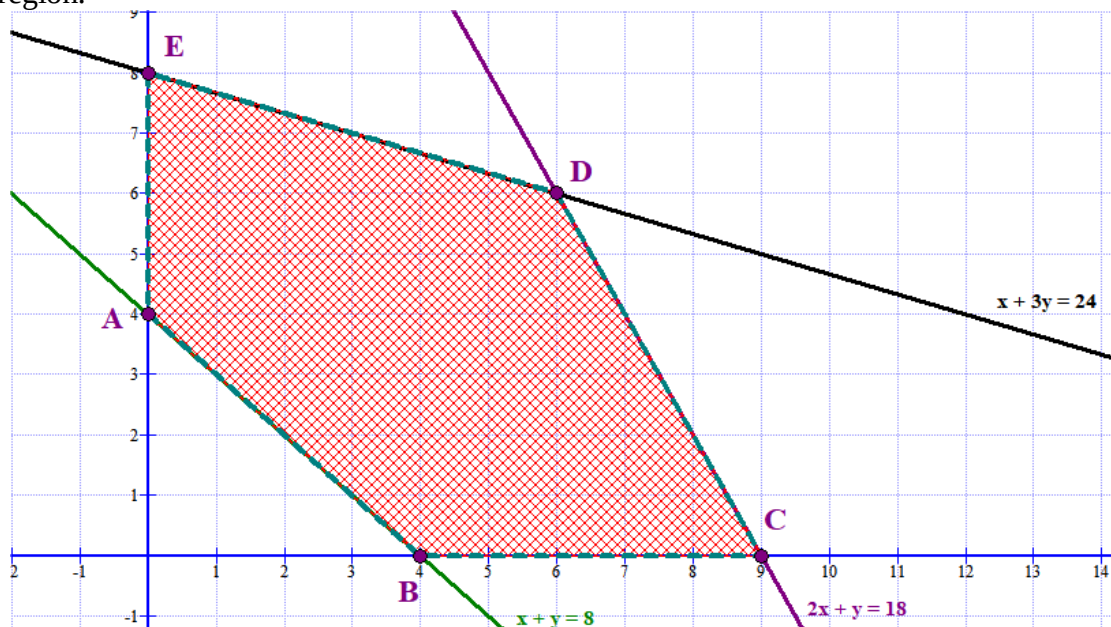
x	$y = 4 - x$	x	$y = 18 - 2x$	x	$y = \frac{24 - x}{3}$
0	4	0	18	0	8
4	0	9	0	24	0
		6	6	6	6



Comprobamos que el punto (4, 4) cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \\ 4 + 4 \geq 4 \\ 8 + 4 \leq 18 \\ 4 + 12 \leq 24 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona rayada y los candidatos a maximizar el beneficio son los vértices de esta región.



Los vértices tienen coordenadas A(0, 4), B(4, 0), C(9, 0), D(6, 6) y E(0, 8). Veamos el beneficio que se obtiene en cada punto:

$$A(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 6000$$

$$B(4, 0) \rightarrow B(4, 0) = 12000$$

$$C(9, 0) \rightarrow B(9, 0) = 27000$$

$$D(6, 6) \rightarrow B(6, 6) = 18000 + 9000 = 27000$$

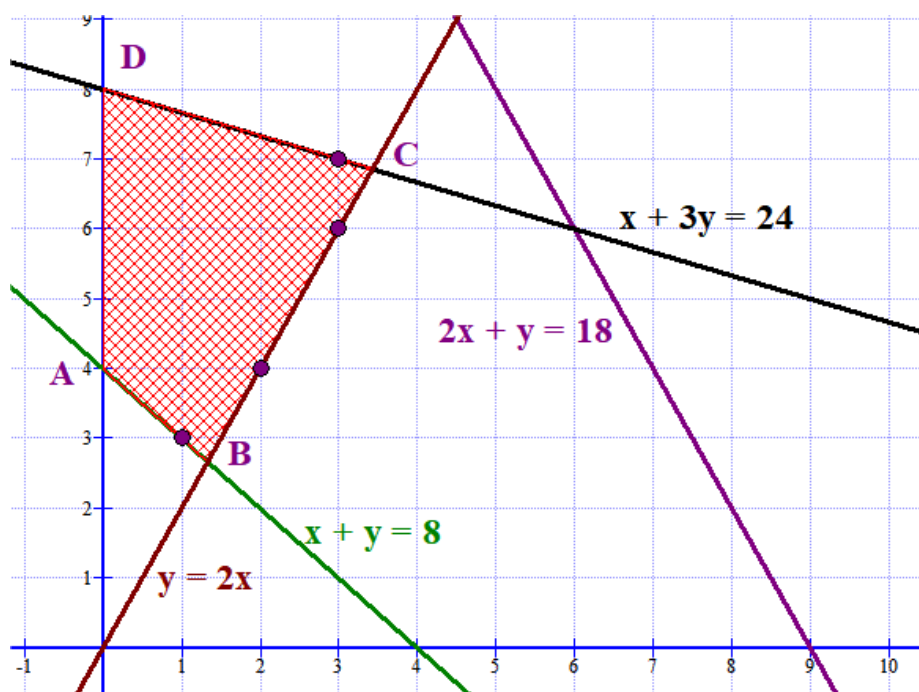
$$E(0, 8) \rightarrow B(x, y) = 12000$$

Se produce el mismo beneficio máximo en 2 puntos C y D. Esto significa que el máximo beneficio se obtiene en todo el segmento que une dichos vértices.

La solución es múltiple: 9 hectáreas de C1 y 0 de C2 o bien 6 hectáreas de C1 y 6 de C2. También 8 de C1 y 2 de C2, 7 de C1 y 4 de C2.

- iii) Si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1 $\rightarrow y > 2x$.

Con esa nueva restricción se reduce la región factible a la zona rayada del dibujo.



Los vértices B y C no tienen coordenadas enteras. Si nuestra solución debe ser entera solo nos valdrían los puntos próximos a ellos con coordenadas enteras.

A(0, 4), D(0, 8), E(1, 3), F(2, 4), G(3, 6) y H(3, 7). Calculamos el beneficio en cada punto.

$$A(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 6000$$

$$D(0, 8) \rightarrow B(0, 8) = 12000$$

$$E(1, 3) \rightarrow B(1, 3) = 3000 + 4500 = 7500$$

$$F(2, 4) \rightarrow B(2, 4) = 6000 + 6000 = 12000$$

$$G(3, 6) \rightarrow B(3, 6) = 9000 + 9000 = 18000$$

$$H(3, 7) \rightarrow B(3, 7) = 9000 + 10500 = 19500$$

El máximo beneficio se obtiene en el punto H(3,7), es decir, 3 hectáreas de C1 y 7 de C2.

EJERCICIO 2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos^3(5x^2) + x \ln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2} dx$ (1.5 puntos)

i) Calculamos la derivada.

$$f(x) = \cos^3(5x^2) + x \ln(1-2x) \Rightarrow f'(x) = -3\cos^2(5x^2)\sin(5x^2) \cdot 10x + \ln(1-2x) + x \frac{-2}{1-2x}$$

$$f'(x) = -30x\cos^2(5x^2)\sin(5x^2) + \ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}$$

ii) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 4x^2+1=t \Rightarrow 8x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{8} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{8}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{8} 2 \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \sqrt{t}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ 4x^2+1=t \end{array} \right\} = \boxed{\frac{1}{4} \sqrt{4x^2+1} + K}$$

iii) Calculamos la integral definida usando un pequeño ajuste.

$$\int_0^1 2xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 6xe^{3x^2} dx = \frac{1}{3} \left[e^{3x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (e^3 - e^0) = \boxed{\frac{e^3 - 1}{3}}$$

EJERCICIO 3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

i) Los datos son $p = \frac{350}{500} = 0,7$; $n = 500$.

Para un nivel de confianza del 96% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,055$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(0,7 - 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}}, 0,7 + 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}} \right) = \boxed{(0,658, 0,742)}$$

ii) Los datos son $p = \frac{150}{500} = 0,3$; $n = 500$.

Para un nivel de confianza del 92% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0,04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(0,3 - 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{500}}, 0,3 + 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{500}} \right) = \boxed{(0,29642, 0,3358)}$$

EvAU Julio 2018

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017-2018

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A**EJERCICIO 1:**

En una tienda por comprar 3 video juegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros. Si volvemos a la tienda y compramos 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros.

- Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)
- Si nos cobran 70 euros por 1 video juego y 1 memoria USB, plantee y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)

EJERCICIO 2:

- Calcule el valor del parámetro a de la función $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$, sabiendo que $y = 3x - 1$ es la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. (1.5 puntos)
- Calcule las asíntotas de la función $f(x)$. (1 punto)
- Calcule los máximos y mínimos de la función $f(x)$. (1 punto)

EJERCICIO 3:

La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 95% para la velocidad media (Km/h) a la que circulan los automóviles por ese tramo: (84.06, 89.94).

- Calcule la varianza poblacional y calcule la velocidad media de la muestra de 100 mediciones tomadas por el radar. (1.5 puntos)
 - Calcule el intervalo de confianza al 97% para la velocidad media de los coches que circulan por ese tramo de carretera. (1.5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Opción B

EJERCICIO 1:

Los estudiantes de bachillerato de un centro escolar han recolectado 6000 euros que quieren destinar a proyectos benéficos. Han seleccionado dos proyectos: el proyecto P1 colabora en la vacunación de niños y el proyecto P2 proporciona suplementos nutricionales a niños con alimentación incompleta. Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños. Los estudiantes deciden repartir el dinero en los proyectos de forma que se done para vacunas no más del doble de la donación para suplementos nutricionales. Además, quieren donar al menos 1500 euros al proyecto de vacunación y no más de 3500 euros al proyecto de alimentación. Determine cuántos euros deberán invertir en cada proyecto si se desea maximizar el número total de niños beneficiados.

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se elimina la restricción de no invertir más de 3500 euros en suplementos nutricionales. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ 2x^3 + 4x^2 - 3 & -1 \leq x < 2 \\ \frac{5x}{x^2 + 1} & x \geq 2 \end{cases}$$

- i) Estudie la continuidad de la función. (1 punto)
- ii) Calcule $f'(1)$ aplicando la definición de derivada. (1.25 puntos)
- iii) Calcule $\int_3^4 f(x)dx$ (1.25 puntos)

EJERCICIO 3:

Dos estudiantes construyen un dado con 5 caras rojas y una cara azul, colocan 7 bolas verdes y 3 bolas negras en una caja A y colocan 6 bolas negras y 2 bolas verdes en una caja B. Se plantean el siguiente juego: lanzar el dado y sacar una bola de la caja A si la cara es roja y una bola de la caja B si la cara es azul. Lanzan el dado y sacan una bola.

Calcule:

- i) La probabilidad de que la bola sea verde. (1 punto)
- ii) La probabilidad de que la cara del dado sea azul, sabiendo que la bola no es verde. (2 puntos)

SOLUCIONES**Opción A****EJERCICIO 1:**

En una tienda por comprar 3 video juegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros. Si volvemos a la tienda y compramos 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros.

i) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)

ii) Si nos cobran 70 euros por 1 video juego y 1 memoria USB, plantee y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)

i) Llamemos x = precio de 1 video juego, y = precio de 1 auricular, z = precio de 1 memoria USB.

- Por 3 video juegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros $\rightarrow 3x + y + 2z = 230$
- Por 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros $\rightarrow 2x + z - y = 60$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3x + 2z = 230 \\ -y + 2x + z = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ -y + 2x + z = 60 \\ y + 3x + 2z = 230 \\ \hline 5x + 3z = 290 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3x + 2z = 230 \\ 5x + 3z = 290 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y + 3x + 2z = 230 \\ x = \frac{290 - 3z}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow y + 3 \frac{290 - 3z}{5} + 2z = 230 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y + 870 - 9z + 10z = 1150 \Rightarrow 5y = 1150 - 870 - z \Rightarrow y = \frac{280 - z}{5}$$

No podemos determinar el precio de cada artículo. Queda dependiente del precio de uno de ellos,

por ejemplo, el precio de la memoria USB (z): $x = \frac{290 - 3z}{5}$, $y = \frac{280 - z}{5}$

ii) Si añadimos la información dada en este apartado si podemos determinar los precios.

Si nos cobran 70 euros por 1 video juego y 1 memoria USB $\rightarrow x + z = 70$.

El nuevo sistema es $\left. \begin{array}{l} x + z = 70 \\ 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 70 \\ 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 70 - z \\ 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(70 - z) + y + 2z = 230 \\ 2(70 - z) + z - y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 210 - 3z + y + 2z = 230 \\ 140 - 2z + z - y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z = 20 \\ -z - y = -80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 + z \\ z + y = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 20 + z = 80 \Rightarrow 2z = 60 \Rightarrow \boxed{z = 30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 20 + 30 = 50} \\ \boxed{x = 70 - 30 = 40} \end{cases}$$

Hemos obtenido que 1 video juego cuesta 40 €, el auricular 50 € y 1 memoria USB cuesta 30 €.

EJERCICIO 2:

- i) Calcule el valor del parámetro a de la función $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$, sabiendo que $y = 3x - 1$ es la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. (1.5 puntos)
- ii) Calcule las asíntotas de la función $f(x)$. (1 punto)
- iii) Calcule los máximos y mínimos de la función $f(x)$. (1 punto)

- i) Calculemos la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$ en $x = 1$.

$$f(x) = \frac{ax^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax(x+1) - ax^2}{(x+1)^2} = \frac{2ax^2 + 2ax - ax^2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax}{(x+1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} \\ f'(1) &= \frac{a + 2a}{(1+1)^2} = \frac{3a}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}x - \frac{3a}{4} \Rightarrow y = \frac{3a}{4}x - \frac{3a}{4} + \frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{3a}{4}x - \frac{3a}{4} + \frac{2a}{4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3a}{4}x - \frac{a}{4}}$$

La recta tangente tiene ecuación: $y = \frac{3a}{4}x - \frac{a}{4}$

Como la recta tangente debe ser $y = 3x - 1$, entonces: $\frac{a}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si la recta tangente es $y = 3x - 1$, entonces la pendiente de esta recta tangente es 3.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es $f'(1)$. Calculemos esta derivada e igualémosla a 3.

$$f(x) = \frac{ax^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax(x+1) - ax^2}{(x+1)^2} = \frac{2ax^2 + 2ax - ax^2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax}{(x+1)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= \frac{a + 2a}{(1+1)^2} = \frac{3a}{4} \\ \text{pendiente} &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

- ii) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2}{x+1} = \frac{4}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = -1$

- **Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2} + x} = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2}{x+1} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^{\cancel{2}} - 4x^{\cancel{2}} - 4x}{x+1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4\cancel{x}}{\cancel{x}} = -4$$

La asíntota oblicua es $y = 4x - 4$

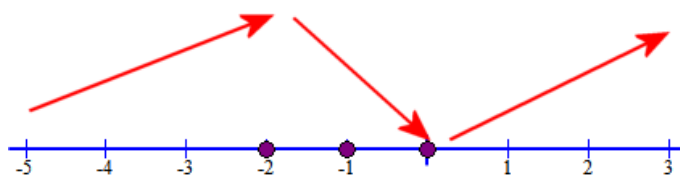
iii) La derivada de la función es $f'(x) = \frac{4x^2 + 8x}{(x+1)^2}$. Igualamos a cero la derivada en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 8x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 8x = 0 \Rightarrow 4x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores y $x = -1$ excluido del dominio de la función.

- En $(-\infty, -2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{36 - 24}{(-3+1)^2} = \frac{12}{4} > 0$. La función crece.
- En $(-2, -1)$ tomo $x = -1,5$ y la derivada vale $f'(-1,5) = \frac{4x^2 + 8x}{(-1,5+1)^2} = \frac{9 - 12}{0,25} < 0$. La función decrece.
- En $(-1, 0)$ tomo $x = -0,5$ y la derivada vale $f'(-0,5) = \frac{4x^2 + 8x}{(-0,5+1)^2} = \frac{1 - 4}{0,25} < 0$. La función decrece.
- En $(0, +\infty)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4 + 8}{(1+1)^2} > 0$. La función crece.

La función sigue el esquema siguiente



La función tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$.

EJERCICIO 3:

La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 95% para la velocidad media (Km/h) a la que circulan los automóviles por ese tramo: (84.06, 89.94).

- Calcule la varianza poblacional y calcule la velocidad media de la muestra de 100 mediciones tomadas por el radar. (1.5 puntos)
- Calcule el intervalo de confianza al 97% para la velocidad media de los coches que circulan por ese tramo de carretera. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Velocidad de un vehículo. $X = N(\mu, \sigma)$

- Si el intervalo de confianza es (84.06, 89.94) la velocidad media de la muestra es el valor central del intervalo.
$$\bar{x} = \frac{84,06 + 89,94}{2} = \frac{174}{2} = 87 \text{ km/h}$$

Para calcular la desviación típica hallamos el error que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{89,94 - 84,06}{2} = \frac{5,88}{2} = 2,94$$

Para un nivel de confianza es 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Con la fórmula del error despejamos el valor de la desviación típica.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 1,96 \cdot \frac{\sigma}{10} = 2,94 \Rightarrow \sigma = \frac{29,4}{1,96} = 15$$

La varianza poblacional = $\sigma^2 = 15^2 = 225$ y la velocidad media es 87 km/h.

- Para un el nivel de confianza es 97% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

Obtenemos el valor del error.

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} = 3,255$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (87 - 3,255, 87 + 3,255) = (83,745, 90,255)$$

Con un nivel de confianza del 97% la velocidad media estaría entre 83,745 Km/h y 90,255 km/h.

Opción B

EJERCICIO 1:

Los estudiantes de bachillerato de un centro escolar han recolectado 6000 euros que quieren destinar a proyectos benéficos. Han seleccionado dos proyectos: el proyecto P1 colabora en la vacunación de niños y el proyecto P2 proporciona suplementos nutricionales a niños con alimentación incompleta. Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños. Los estudiantes deciden repartir el dinero en los proyectos de forma que se done para vacunas no más del doble de la donación para suplementos nutricionales. Además, quieren donar al menos 1500 euros al proyecto de vacunación y no más de 3500 euros al proyecto de alimentación. Determine cuántos euros deberán invertir en cada proyecto si se desea maximizar el número total de niños beneficiados.

- Plantee el problema. (1.5 puntos)
- Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si se elimina la restricción de no invertir más de 3500 euros en suplementos nutricionales. (0.5 puntos)

- Llamamos x = euros invertidos en el proyecto P1 (vacunación de niños),
 y = euros invertidos en el proyecto P2 (suplementos nutricionales).

La función a maximizar es el número de niños beneficiados.

Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños $\rightarrow B(x, y) = 3x + 5y$

Las restricciones son:

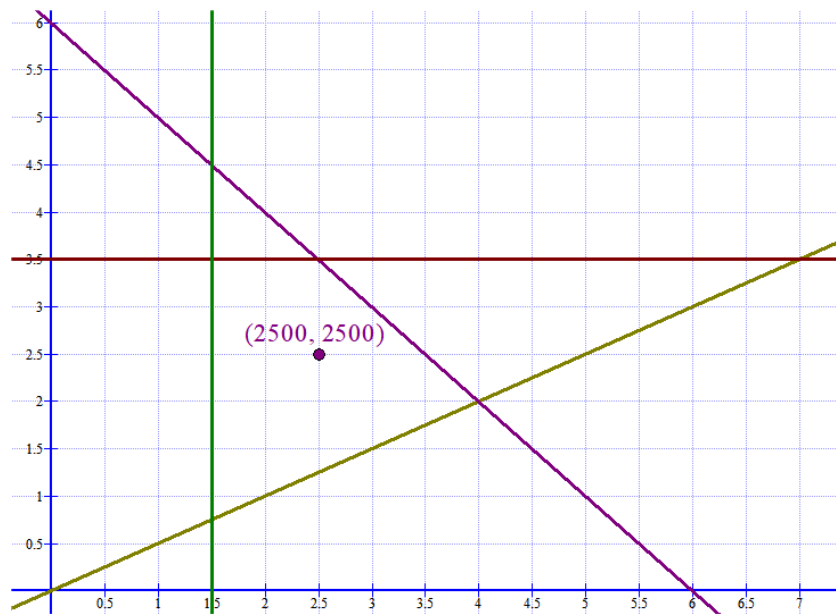
- Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$
- Van a donar un máximo de 6000 € $\rightarrow x + y \leq 6000$
- Se done para vacunas (x) no más del doble de la donación para suplementos nutricionales (y) $\rightarrow x \leq 2y$
- Quieren donar al menos 1500 euros al proyecto de vacunación $\rightarrow x \geq 1500$
- y no más de 3500 euros al proyecto de alimentación $\rightarrow y \leq 3500$

El problema consiste en maximizar la función $B(x, y) = 3x + 5y$ con las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq 3500 \\ x + y \leq 6000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 1500 \end{array} \right\}$$

- Dibujamos las rectas asociadas a cada restricción y buscamos la región factible.

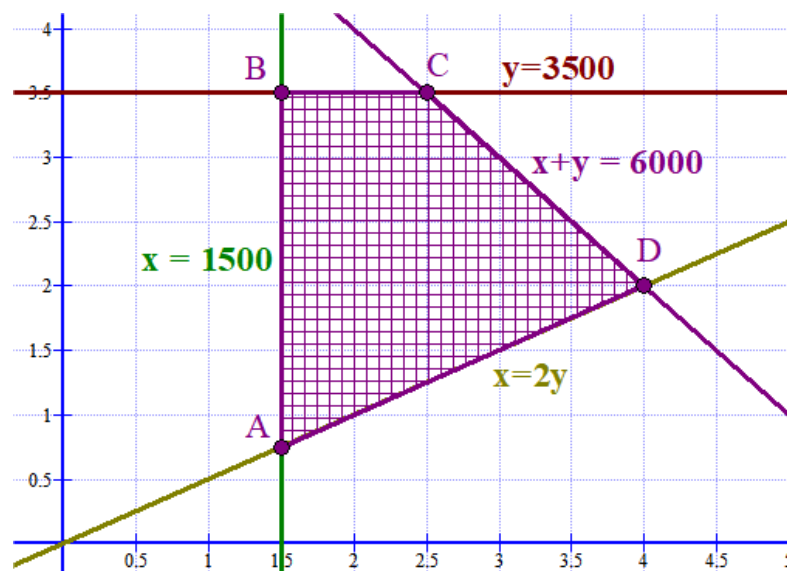
x	$y = 6000 - x$	x	$y = \frac{x}{2}$
1500	4500	0	0
0	6000	4000	2000
3500	2500	1500	750



Probamos el punto (2500, 2500) y cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2500 \geq 0 \\ 2500 \leq 3500 \\ 2500 + 2500 \leq 6000 \\ 2500 \leq 2 \cdot 2500 \\ 2500 \geq 1500 \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona coloreada y los vértices de la región se aprecian en el dibujo. Sus coordenadas se obtienen directamente del dibujo.



Los vértices son A(1500, 750), B(1500, 3500), C(2500, 3500), D(4000, 2000).
Sustituyo en la función beneficiarios y averiguo donde se alcanza el valor más alto.

$$A(1500, 750) \rightarrow B(1500, 750) = 4500 + 3750 = 8250$$

$$B(1500, 3500) \rightarrow B(1500, 3500) = 4500 + 17500 = 22000$$

$$C(2500, 3500) \rightarrow B(2500, 3500) = 7500 + 17500 = 25000$$

$$D(4000, 2000) \rightarrow B(4000, 2000) = 12000 + 10000 = 22000$$

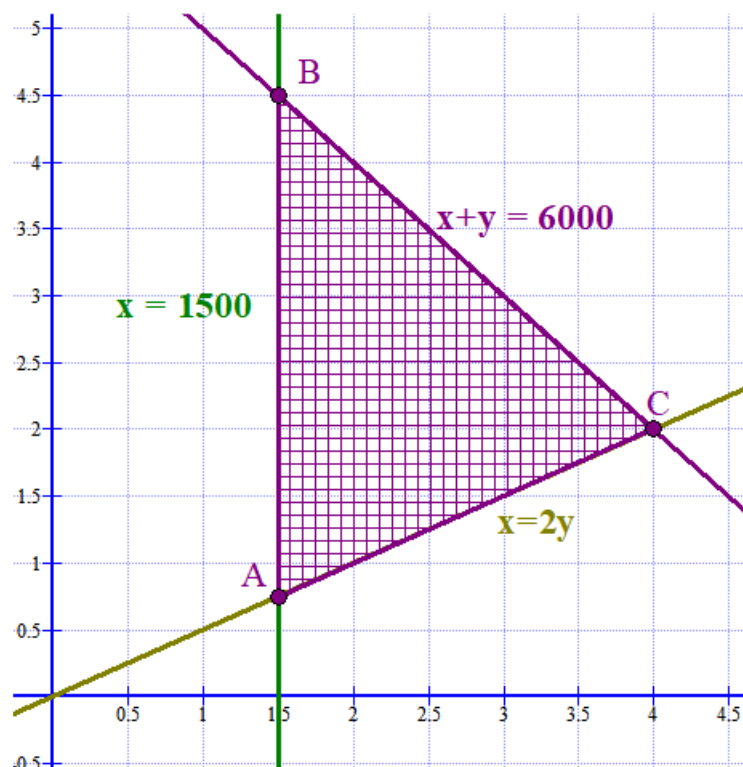
El máximo número de beneficiarios se alcanza en el punto C(2500, 3500).

Con 2500 € destinados al proyecto P1 y 3500 € al proyecto P2.

- iii) Si eliminamos la restricción “no invertir más de 3500 euros en suplementos nutricionales” debemos de quitar la restricción $y \leq 3500$. Y las nuevas restricciones quedarían:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x + y \leq 6000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 1500 \end{array} \right\} \text{y el punto } (2500, 2500) \text{ sigue cumpliendo las restricciones.}$$

La nueva región factible es la del dibujo.



Ahora los vértices son A(1500, 750), B(1500, 4500) y C(4000, 2000). Los valoramos en la función beneficiarios.

$$A(1500, 750) \rightarrow B(1500, 750) = 4500 + 3750 = 8250$$

$$B(1500, 4500) \rightarrow B(1500, 4500) = 4500 + 22500 = \mathbf{27000 \text{ ¡Máximo!}}$$

$$C(4000, 2000) \rightarrow B(4000, 2000) = 12000 + 10000 = 22000$$

El máximo número de beneficiarios es de 27000 y se alcanza en el punto B(1500, 4500).

Se maximizan los beneficiarios de estos proyectos invirtiendo 1500 € en el proyecto P1 y 4500 € en el proyecto P2.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ 2x^3 + 4x^2 - 3 & -1 \leq x < 2 \\ \frac{5x}{x^2 + 1} & x \geq 2 \end{cases}$

- i) Estudie la continuidad de la función. (1 punto)
 ii) Calcule $f'(1)$ aplicando la definición de derivada. (1.25 puntos)
 iii) Calcule $\int_3^4 f(x)dx$ (1.25 puntos)

- i) Cada una de las tres definiciones son continuas, pues son funciones polinómicas y la tercera

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1} \text{ tiene un denominador que no se anula.}$$

Para estudiar la continuidad basta con ver si es continua en los momentos de cambio de definición.

En $x = -1$.

- Existe $f(-1) = 2(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3 = -2 + 4 - 3 = -1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^3 + 4x^2 - 3 = -2 + 4 - 3 = -1$
- Los tres valores son iguales.

Se cumple todo, luego la función es continua en $x = -1$.

En $x = 2$.

- Existe $f(2) = \frac{10}{4+1} = 2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^3 + 4x^2 - 3 = 16 + 16 - 3 = 29$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{x^2 + 1} = \frac{10}{5} = 2$
- Los tres valores son iguales. No se cumple, pues los límites laterales no son iguales.

No se cumple el último requisito, luego la función no es continua en $x = 2$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$\text{ii) } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Factorizo el polinomio del numerador} \\ \begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 6 & 6 & 0 \end{array} & 2x^3 + 4x^2 - 6 = (x-1)(2x^2 + 6x + 6) \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (2x^2 + 6x + 6)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 6x + 6 = \boxed{14}$$

iii) En el intervalo (3,4) la función es $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$, por lo que la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_3^4 f(x) dx &= \int_3^4 \frac{5x}{x^2 + 1} dx = \frac{5}{2} \int_3^4 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_3^4 = \\ &= \left[\frac{5}{2} \ln(16 + 1) \right] - \left[\frac{5}{2} \ln(9 + 1) \right] = \frac{5}{2} (\ln 17 - \ln 10) = \boxed{\frac{5}{2} \ln \frac{17}{10} = 2,5 \ln 1,7} \end{aligned}$$

EJERCICIO 3:

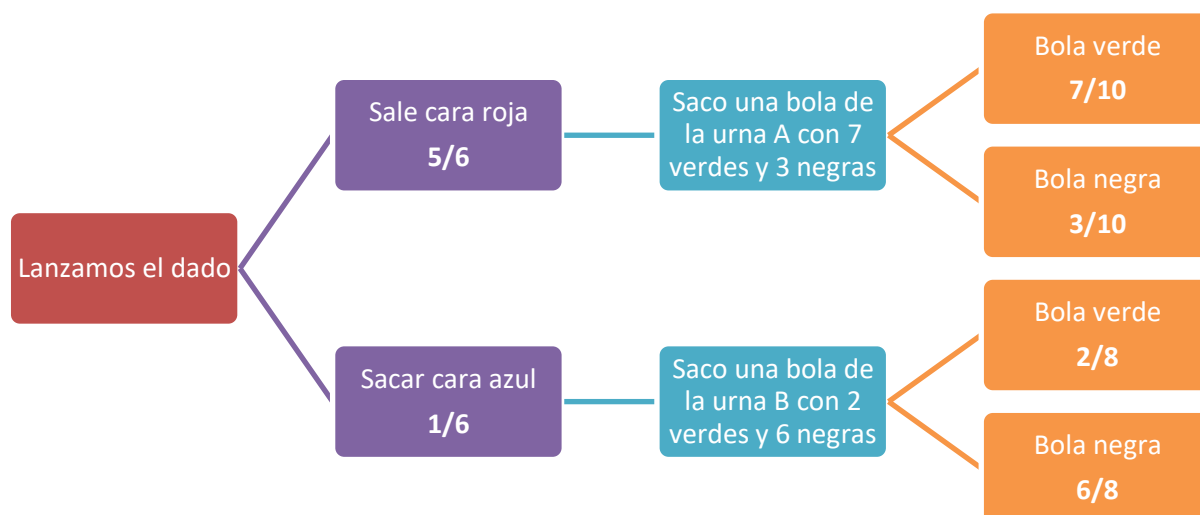
Dos estudiantes construyen un dado con 5 caras rojas y una cara azul, colocan 7 bolas verdes y 3 bolas negras en una caja A y colocan 6 bolas negras y 2 bolas verdes en una caja B. Se plantean el siguiente juego: lanzar el dado y sacar una bola de la caja A si la cara es roja y una bola de la caja B si la cara es azul. Lanzan el dado y sacan una bola.

Calcule:

i) La probabilidad de que la bola sea verde. (1 punto)

ii) La probabilidad de que la cara del dado sea azul, sabiendo que la bola no es verde. (2 puntos)

Construyamos el diagrama de árbol que explica este experimento y sus probabilidades.



i) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Sacar bola verde}) = P(\text{Sacar cara roja en dado y bola verde en caja}) + P(\text{Sacar cara azul en dado y bola verde en caja}) =$$

$$= P(\text{Sacar cara roja en dado})P(\text{Bola verde} / \text{Sacar cara roja}) + P(\text{Sacar cara azul en dado})P(\text{Bola verde} / \text{Sacar cara azul}) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{12} + \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \boxed{0,625}$$

ii) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Cara azul} / \text{Bola no es verde}) = P(\text{Cara azul} / \text{Bola es negra}) =$$

$$= \frac{P(\text{Cara azul y Bola negra})}{P(\text{Bola negra})} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8}}{1 - P(\text{Bola verde})} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - 0,625} = \frac{1}{3} = \boxed{0,333}$$



EvAU Junio 2018
Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017-2018

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio de venta(€)
P1	4	7	2	0	0	0.8
P2	4	5	3	2	3	0.6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

- Plantee el problema. (1.5 puntos)
- Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Calcule:

i) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx$ (1.25 puntos)

ii) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} dx$ (1 punto)

iii) Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1) = 2$. (1.25 puntos)

EJERCICIO 3:

Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente (0.7485, 0.8515).

- Calcule el nivel de confianza de este intervalo. (1.5 puntos)
- Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Opción B**EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ responda a las siguientes preguntas.

- i) Calcule: $A \cdot A^t - B \cdot B^t$ (1.25 puntos)
- ii) Calcule: $(C^{-1})^2$ (1.25 puntos)
- iii) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$, calcule:

- i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$. (1.25 puntos)
- ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.5 puntos)
- iii) Asíntotas de la función. (0.75 puntos)
- iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)

EJERCICIO 3:

En un aula de bachillerato, el 75% de las chicas y el 60% de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicha aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

- i) La probabilidad de que sea lector habitual. (1 punto)
- ii) La probabilidad de que sea chico y no sea lector habitual. (1 punto)
- iii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual. (1.5 puntos)

SOLUCIONES

Opción A

EJERCICIO 1:

Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio de venta(€)
P1	4	7	2	0	0	0.8
P2	4	5	3	2	3	0.6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

- Plantee el problema. (1.5 puntos)
- Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso. (0.5 puntos)

- i) Llamamos x = número de raciones del pienso P1, y = número de raciones del pienso P2.
Deseamos maximizar las proteínas ingeridas. $P(x, y) = 7x + 5y$

Las restricciones son:

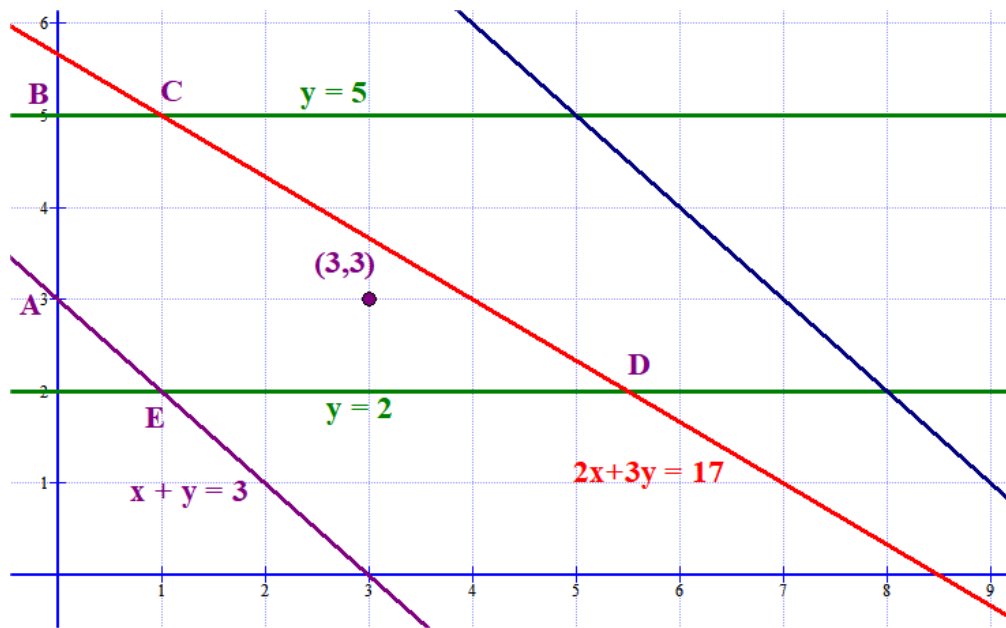
- Las raciones son valores positivos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$
- Una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades $\rightarrow 12 \leq 4x + 4y \leq 40$
- Una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades $\rightarrow 3y \geq 6$
- Una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades $\rightarrow 2y \leq 10$
- No sobrepasar 17 unidades de grasas al día $\rightarrow 2x + 3y \leq 17$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 12 \leq 4x + 4y \leq 40 \\ 3y \geq 6 \\ 2y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 17 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 3 \leq x + y \leq 10 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 17 \end{array} \right\}$$

- ii) Representamos las rectas asociadas a las restricciones.

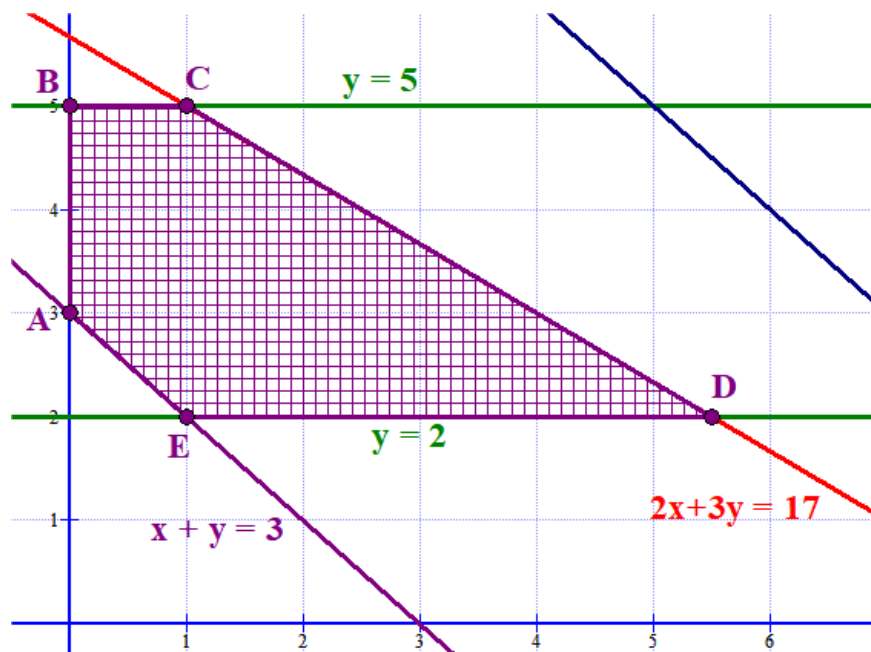
$$\begin{array}{c|c} x & y = 3 - x \\ \hline 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y = 10 - x \\ \hline 0 & 10 \\ 5 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y = \frac{17 - 2x}{3} \\ \hline 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{array}$$



El punto $(3, 3)$ cumple todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq 0 \\ 3 \leq 3 + 3 \leq 10 \\ 2 \leq 3 \leq 5 \\ 6 + 9 \leq 17 \end{array} \right\}$$

La región factible y los vértices de esta región son:



El punto D es el punto de corte de las rectas $y = 2$ y $2x + 3y = 17$, planteamos el sistema y lo resolvemos para determinar sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 6 = 17 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = 5,5 \Rightarrow D(5,5, 2)$$

El resto de vértices tienen coordenadas $A(0, 2)$, $B(0, 5)$, $C(1, 5)$, $E(1, 2)$.

Valoramos la función a maximizar $P(x, y) = 7x + 5y$ en cada uno de estos vértices.

$$A(0, 3) \rightarrow P(0, 3) = 0 + 15 = 15$$

$$B(0, 5) \rightarrow P(0, 5) = 0 + 25 = 25$$

$$C(1, 5) \rightarrow P(1, 5) = 7 + 25 = 32$$

$$D(5.5, 2) \rightarrow P(5.5, 2) = 38.5 + 10 = 48.5$$

$$E(1, 2) \rightarrow P(1, 2) = 7 + 10 = 17$$

La máxima dosis de proteínas se consigue en el punto $D(5.5, 2)$, pero las raciones del pienso P1 es decimal. Si deseamos unas raciones enteras, debemos considerar como soluciones el punto $(5, 2)$ o $(4, 3)$. Los valoramos y decidimos cuál de ellos da un resultado más alto.

$$(5, 2) \rightarrow P(5, 2) = 35 + 10 = 45$$

$$(4, 3) \rightarrow P(4, 3) = 28 + 15 = 43$$

La solución es 5 raciones del pienso P1 y 2 raciones del pienso P2.

- iii) Si desea minimizar el gasto en pienso la función es $G(x, y) = 0.8x + 0.6y$. Valoramos esta función en los vértices de la región.

$$A(0, 3) \rightarrow G(0, 3) = 0 + 1.8 = 1.8$$

$$B(0, 5) \rightarrow G(0, 5) = 0 + 3 = 3$$

$$C(1, 5) \rightarrow G(1, 5) = 0.8 + 3 = 3.8$$

$$D(5.5, 2) \rightarrow G(5.5, 2) = 4.4 + 1.2 = 5.6$$

$$E(1, 2) \rightarrow G(1, 2) = 0.8 + 1.2 = 2$$

El gasto mínimo se obtiene con el punto A. Con ninguna ración del pienso C1 y 3 raciones del pienso P2.

EJERCICIO 2:

Calcule:

i) $\int_{-1}^0 \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx$ (1.25 puntos)

ii) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} dx$ (1 punto)

iii) Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1) = 2$. (1.25 puntos)

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_{-1}^0 \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Realizamos la división} \\ \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{5x}{x^2 + 1} \end{array} \right\} = \int_{-1}^0 2 + \frac{5x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int_{-1}^0 2 dx + \int_{-1}^0 \frac{5x}{x^2 + 1} dx = \int_{-1}^0 2 dx + \frac{5}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[2x + \frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[0 + \frac{5}{2} \ln(0^2 + 1) \right] - \left[-2 + \frac{5}{2} \ln((-1)^2 + 1) \right] = \boxed{2 - \frac{5}{2} \ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \\ dx = 2\sqrt{x} dt \end{array} \right\} = \int \frac{e^t}{\sqrt{2}\sqrt{x}} 2\sqrt{x} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{e^t}{\cancel{\sqrt{x}}} \cancel{\sqrt{x}} dt = \\ &= \sqrt{2} \int e^t dt = \sqrt{2} e^t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right\} = \boxed{\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } F(x) = \int \frac{3x}{(2-x^2)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2-x^2 = t \rightarrow -2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right\} = \int \frac{3\cancel{x}}{t^2} \frac{dt}{-2\cancel{x}} = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{3}{2} \int t^{-2} dt \\ &= -\frac{3}{2} \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{3}{2t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ 2-x^2 = t \end{array} \right\} = \frac{3}{2(2-x^2)} + K \end{aligned}$$

Como $F(-1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2(2-(-1)^2)} + K = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + K = 2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$.

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{3}{2(2-x^2)} + \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 3:

Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente (0.7485, 0.8515).

i) Calcule el nivel de confianza de este intervalo. (1.5 puntos)

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

i) El tamaño de la muestra es $n = 400$ y la proporción de vuelos puntuales es $p = \frac{320}{400} = 0,8$.

Si el intervalo de confianza es (0.7485, 0.8515) el error es $\frac{0.8515 - 0.7485}{2} = 0.0515$

Por otro lado, el error es:

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.0515$$

$$0.0515 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}}$$

$$0.0515 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot 0.02$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.0515}{0.02} = 2.575$$

Buscando en la tabla de la normal $N(0, 1)$.

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{0.9949 + 0.9951}{2} = 0.995 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha = 0.99$$

El nivel de confianza es del 99%.

ii) $n = 400$ y la proporción de vuelos **no** puntuales es $p = \frac{80}{400} = 0,2$.

Para un nivel de confianza del 93% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,035 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$

El Error es

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,81 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}} = 0,0362$$

El intervalo de confianza es

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0'2 - 0'0362, 0'2 + 0'0362) = (0'1638, 0'2362)$$

Opción B

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule: $A \cdot A^t - B \cdot B^t$ (1.25 puntos)

ii) Calcule: $(C^{-1})^2$ (1.25 puntos)

iii) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta. (0.5 puntos)

i) Realizamos las operaciones indicadas.

$$\begin{aligned} A \cdot A^t - B \cdot B^t &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+1+0 & -2+1+0 \\ -2+1+0 & 4+1+9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii) Tenemos que $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$. Al ser no nulo existe la inversa de C. La calculamos.

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ (C^{-1})^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -1-2 \\ -3-6 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iii) Averiguamos el valor de la matriz $A \cdot A^t$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Su determinante vale $|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$. No tiene inversa, pues el determinante de la matriz vale 0.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$, calcule:

- i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$. (1.25 puntos)
- ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.5 puntos)
- iii) Asíntotas de la función. (0.75 puntos)
- iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$. (1 punto)

$$i) \quad f(x) = \frac{5-x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(1-x) - (-1)(5-x)}{(1-x)^2} = \frac{-1+x+5-x}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}$$

La recta tangente a la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$ en $x = -1$ tiene la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = \frac{5+1}{1+1} = 3 \\ f'(-1) = \frac{4}{(1+1)^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - 3 = 1(x+1) \Rightarrow \boxed{y = x + 4}$$

ii) La derivada de la función es $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$. La igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow 4 = 0 \text{ No hay solución}$$

No hay ningún máximo ni mínimo.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$, pues el denominador de la función se anula en $x = 1$.

Estudiamos el cambio del signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{4}{(1-0)^2} = 4 > 0$. La función crece.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4}{(1-2)^2} = 4 > 0$. La función crece.

La función crece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos relativos.

Lo podíamos haber razonado diciendo que la derivada tiene una expresión que siempre es positiva y por tanto la función siempre crece.

iii) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5-x}{1-x} = \frac{4}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

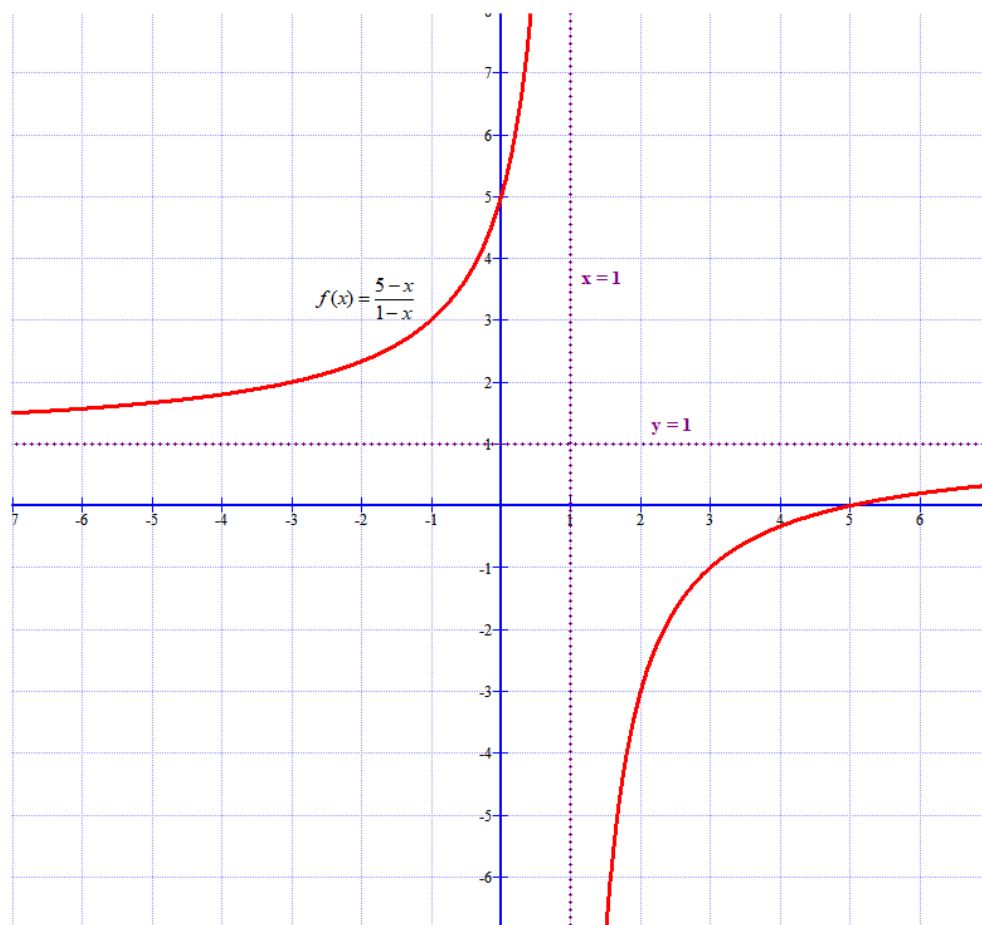
La asíntota horizontal es $y = 1$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

iv) Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$. Asíntota vertical en $x = 1$. Asíntota horizontal en $y = 1$. La función siempre crece. No tiene máximos ni mínimos. Hacemos una tabla de valores para poder hacer la gráfica.

x	$y = \frac{5-x}{1-x}$
-1	$\frac{6}{2} = 3$
0	5
2	-3
3	-1



EJERCICIO 3:

En un aula de bachillerato, el 75% de las chicas y el 60% de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicho aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

- i) La probabilidad de que sea lector habitual. (1 punto)
- ii) La probabilidad de que sea chico y no sea lector habitual. (1 punto)
- iii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual. (1.5 puntos)

El número de chicas es $\frac{2}{3}$ y el de chicos $\frac{1}{3}$. Si fuesen 300 personas las que hay en el aula, serían 200 chicas y 100 chicos. El 75% de las chicas son lectoras habituales, es decir, 75% de 200 = 150 y el 60 % de los chicos son lectores habituales, es decir 60.

Hacemos una tabla de contingencia.

	Lector habitual	No lector habitual	
Chica	150		200
Chico	60		100
			300

Completamos la tabla de contingencia.

	Lector habitual	No lector habitual	
Chica	150	50	200
Chico	60	40	100
	210	90	300

Respondamos a las preguntas planteadas.

- i) De los 300 alumnos hay 210 que son lectores habituales, aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea lector habitual}) = \frac{210}{300} = \frac{7}{10} = \boxed{0,7}$$

- ii) De los 300 alumnos hay 40 chicos que no son lectores habituales, aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea chico y no lector habitual}) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15} = \boxed{0,133}$$

- iii) De los 90 alumnos que no son lectores habituales hay 50 que son chicas, aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No sea chico / no es lector habitual}) = P(\text{Sea chica / no es lector habitual}) = \frac{50}{90} = \frac{5}{9} = \boxed{0,55}$$

EvAU Julio 2017

**Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaren Ebaluazioa Unibertsitatean Sartzeka****ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II****CURSO: 2016/2017 IKASTURTEA****OPCIÓN A****EJERCICIO 1:**

Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos (A y B). El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas (M1 y M2), de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no superen el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

a) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int \sin(3x)(\cos(3x))^2 dx$ (1 punto)

ii) $\int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx$ (1 punto)

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^{2x}$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

- i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos. (1 punto)
- ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso. (1 punto)
- iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso. (1 punto)



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaren Ebaluaziaa Unibertsitatean Sartzeka

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO: 2016/2017 IKASTURTEA

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y:

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ 3A - 2B &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

ii) Razone si la matriz X+Y es invertible. (1 punto)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$, calcule:

- i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (0.25 puntos)
- ii) Asíntotas. (0.75 puntos)
- iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.75 puntos)
- iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (0.75 puntos)
- v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (1 punto)

EJERCICIO 3:

En una región se selecciona una muestra de 650 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.

- i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99%. (2 puntos)
 - ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (1 punto)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:

Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos (A y B). El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas (M1 y M2), de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no superen el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa. (0.5 puntos)

- i) Llamemos x al número de toneladas del producto A e y al número de toneladas del producto B. La función a maximizar es el beneficio y sabemos que el beneficio es la diferencia entre ingresos y coste.

$$B(x, y) = 200x + 500y - (25x + 275y)$$

$$B(x, y) = 200x + 500y - 25x - 275y$$

$$B(x, y) = 175x + 225y$$

Las restricciones son:

Para M2 fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2 → Las unidades de M1 necesarias son $8x + 4y$, de M2 son necesarias $2x + 3y$. Como solo disponen de 184 de M1 y 100 de M2 → $8x + 4y \leq 184$ $2x + 3y \leq 100$

Garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades → $x + y \geq 15$

Además, deben ser cantidades positivas → $x \geq 0$ $y \geq 0$

Reuniendo todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 4y \leq 184 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 46 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

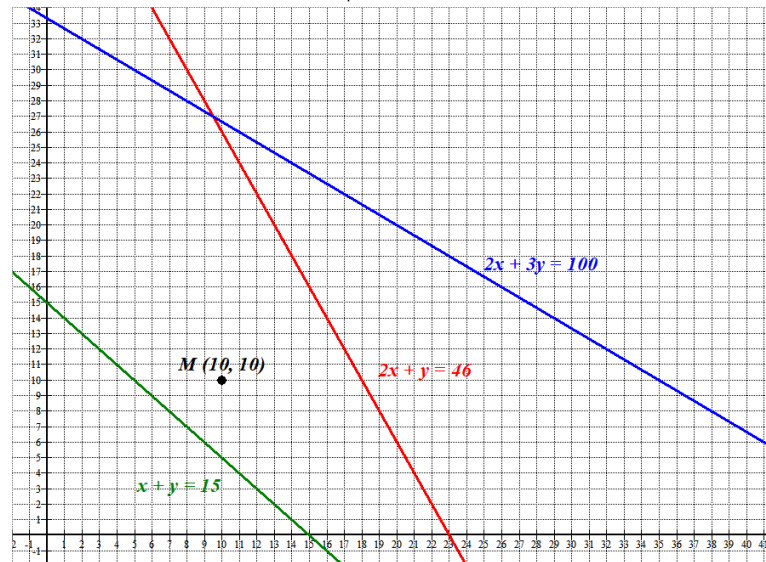
- ii) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$2x + y = 46 \Rightarrow y = 46 - 2x \quad 2x + 3y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{3} \quad x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

x	y = 46 - 2x
0	46
20	6

x	y = \frac{100 - 2x}{3}
50	0
35	10
11	26

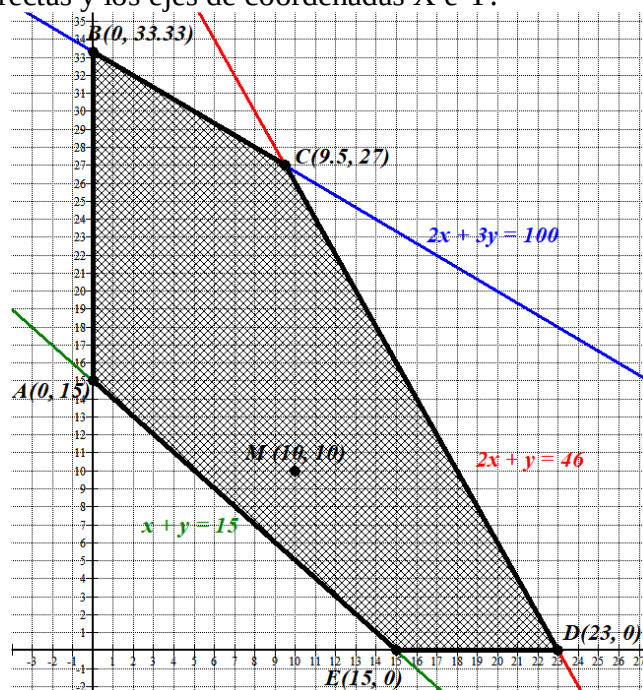
x	y = 15 - x
0	15
10	5
15	0



Comprobamos que el punto M (10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 10 \leq 46 \\ 20 + 30 \leq 100 \\ 10 + 10 \geq 15 \\ 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Cumple las restricciones y por tanto la región factible es la que contiene a M(10, 10) y está limitada por las tres rectas y los ejes de coordenadas X e Y.



Averiguamos los puntos de corte de las rectas resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\bullet \begin{cases} x + y = 15 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 15.$$

El vértice A tiene coordenadas A(0,15).

$$\bullet \begin{cases} 2x + 3y = 100 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{3} = 33,33.$$

El vértice B tiene coordenadas B(0, 100/3).

$$\bullet \begin{cases} 2x + 3y = 100 \\ 2x + y = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 100 \\ -2x - y = -46 \end{cases}$$

$$2y = 54 \Rightarrow y = 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 27 = 46 \Rightarrow 2x = 19 \Rightarrow x = 9,5.$$

El vértice C tiene coordenadas C(9.5, 27).

$$\bullet \begin{cases} 2x + y = 46 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 46 \Rightarrow x = 23.$$

El vértice D tiene coordenadas D(23,0).

$$\bullet \begin{cases} x + y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 15.$$

El vértice E tiene coordenadas E(15,0).

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 175x + 225y$ en cada uno de los vértices de la región factible y vemos cual proporciona mayor beneficio.

$$A(0, 15) \rightarrow B(0,15) = 0 + 3475 = 3475$$

$$B(0, 100/3) \rightarrow B(0,100/3) = 0 + 7500 = 7500$$

$$C(9.5, 27) \rightarrow B(9.5, 27) = 7737.5$$

$$D(23, 0) \rightarrow B(23, 0) = 4025$$

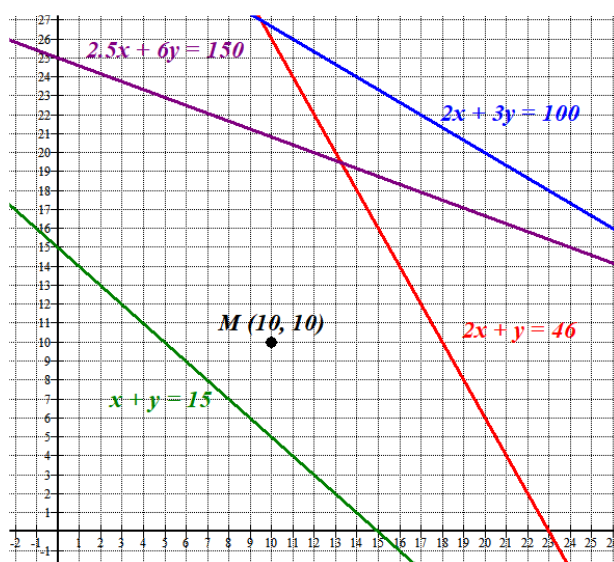
$$E(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 2625$$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(9.5, 27). Hay que producir 9,5 toneladas del producto A y 27 del producto B para maximizar el beneficio.

iii) Hay que añadir una nueva restricción.

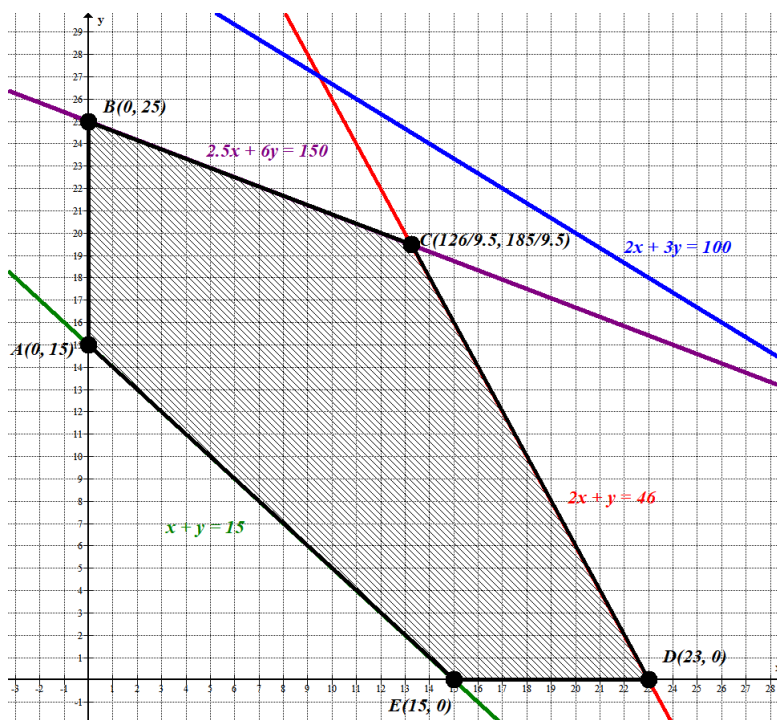
La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades y no se puede superar el nivel de 150 unidades de emisiones diarias $\rightarrow 2,5x + 6y \leq 150$

Añadimos esta recta asociada a las establecidas en el apartado anterior y obtenemos:



El punto $M(10, 10)$ cumple las restricciones anteriores y también la nueva restricción $25 + 60 \leq 150$.

La región factible se reduce a la siguiente:



Los vértices B y C cambian de valor, se mantienen los vértices A, D y E.

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 150 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y = 150 \Rightarrow y = \frac{150}{6} = 25.$$

Las coordenadas del vértice B son $B(0, 25)$.

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 150 \\ 2x + y = 46 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2,5x + 6y = 150 \\ y = 46 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2,5x + 6(46 - 2x) = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,5x + 276 - 12x = 150 \Rightarrow -9,5x = -126 \Rightarrow x = \frac{126}{9,5} \Rightarrow y = 46 - 2 \cdot \frac{126}{9,5} = \frac{185}{9,5}.$$

Las coordenadas del vértice C son $C(126/9.5, 185/9.5)$.

Valoramos el beneficio $B(x, y) = 175x + 225y$ en los nuevos vértices y obtenemos el nuevo valor máximo.

$$A(0, 15) \rightarrow B(0, 15) = 0 + 3475 = 3475$$

$$B(0, 25) \rightarrow B(0, 25) = 5625$$

$$C(126/9.5, 185/9.5) \rightarrow B(126/9.5, 185/9.5) = 6702.6$$

$$D(23, 0) \rightarrow B(23, 0) = 4025$$

$$E(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 2625$$

El nuevo valor máximo se alcanza en el punto $C(13.26, 19.47)$. Deben producirse 13.26 toneladas de A y 19.47 de B.

EJERCICIO 2:

a) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int \sin(3x)(\cos(3x))^2 dx$ (1 punto)

ii) $\int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx$ (1 punto)

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)}} + e^{2x}$ (1.5 puntos)

a) i) Utilizamos un cambio de variable.

$$\int \sin(3x)(\cos(3x))^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos(3x) = t \Rightarrow -3\sin(3x) dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-3\sin(3x)} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \cancel{\sin(3x)} t^2 \frac{dt}{-3\cancel{\sin(3x)}} = \frac{-1}{3} \int t^2 dt = \frac{-1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{-t^3}{9} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos} \\ \text{cambio de variable} \\ \cos(3x) = t \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-(\cos(3x))^3}{9} = \boxed{-\frac{\cos^3(3x)}{9} + K}$$

ii)

$$\int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx = \int 5 dx + 3 \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= \int 5 dx + 3 \int x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-3} dx = 5x + 3 \frac{x^3}{3} + \ln x + 2 \frac{x^{-2}}{-2} = \boxed{5x + x^3 + \ln x - \frac{1}{x^2} + K}$$

b) Debo calcular la integral de la función dada y luego darle dos valores distintos a K.

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)}} + e^{2x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx + \int e^{2x} dx = \int (x+2)^{-1/2} dx + \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{(x+2)^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{2} e^{2x} = \boxed{2\sqrt{x+2} + \frac{e^{2x}}{2} + K}$$

Doy a K los valores 0 y 1, y obtengo las funciones $F_0(x) = 2\sqrt{x+2} + \frac{e^{2x}}{2}$ y

$$F_1(x) = 2\sqrt{x+2} + \frac{e^{2x}}{2} + 1.$$

EJERCICIO 3:

Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma sucesiva y sin devolverlos a la caja.

- i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos. (1 punto)
- ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso. (1 punto)
- iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso. (1 punto)

Son 3 extracciones sucesivas dependientes una de lo que haya ocurrido en la o las anteriores extracciones.

i) $P(\text{Los 3 bolígrafos están bien}) =$

$$= P(\text{El bolígrafo 1 esté bien}) P(\text{El bolígrafo 2 esté bien}) P(\text{El bolígrafo 3 esté bien}) =$$

$$= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{\frac{14}{55} = 0,255}$$

- ii) Esta probabilidad es laboriosa si la calculamos con el suceso directo. Vamos a utilizar el suceso contrario que es más sencillo el cálculo de su probabilidad.

$$P(\text{Al menos 1 de los bolígrafos sea defectuoso}) =$$

$$= 1 - P(\text{Los 3 bolígrafos están bien}) = 1 - \frac{14}{55} = \boxed{\frac{41}{55} = 0,745}$$

iii) $P(\text{Sólo 1 bolígrafo sea defectuoso}) =$

$$= P(\text{El bolígrafo 1 sea defectuoso}) P(\text{El 2 esté bien}) P(\text{El 3 esté bien}) +$$

$$+ P(\text{El bolígrafo 1 esté bien}) P(\text{El 2 sea defectuoso}) P(\text{El 3 esté bien}) +$$

$$+ P(\text{El bolígrafo 1 esté bien}) P(\text{El 2 esté bien}) P(\text{El 3 sea defectuoso}) =$$

$$= \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \boxed{\frac{28}{55} = 0,509}$$

OPCIÓN B**EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y:

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ii) Razone si la matriz X+Y es invertible. (1 punto)

i)

$$\left. \begin{array}{l} 2A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ 3A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \{3 \cdot \text{Ecuación } 1^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{6A} - 9B - \cancel{6A} + 4B = 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5B = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -10 & 0 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \text{ Sustituyendo en la } 1^a \text{ Ecuación}$$

$$2A - 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Las matrices solución son $A = X$ y $B = Y$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Sustituimos en el sistema A por X y B por Y comprobando si se cumplen las dos igualdades.

ii) Determinamos la expresión de la matriz X + Y.

$$X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz no es cuadrada por lo que no podemos hablar de su inversa.

Si ampliamos el concepto de inversa a matrices no cuadradas, sería buscar una matriz Z de dimensión 3×2 tal que:

$$(X + Y)Z = I_2$$

$$Z(X + Y) = I_3$$

Busquemos esa matriz (si fuese posible).

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 5a+c+2e & 5b+d+2f \\ 2a+c+3e & 2b+d+3f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+2b & a+b & 2a+3b \\ 5c+2d & c+d & 2c+3d \\ 5e+2f & e+f & 2e+3f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{aligned} 5a+c+2e &= 1 \\ 5b+d+2f &= 0 \\ 2a+c+3e &= 0 \\ 2b+d+3f &= 1 \\ 5a+2b &= 1 \\ a+b &= 0 \\ \Rightarrow 2a+3b &= 0 \\ 5c+2d &= 0 \\ c+d &= 1 \\ 2c+3d &= 0 \\ 5e+2f &= 0 \\ e+f &= 0 \\ 2e+3f &= 1 \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \begin{aligned} 5a+c+2e &= 1 \\ 5b+d+2f &= 0 \\ 2a+c+3e &= 0 \\ 2b+d+3f &= 1 \\ 5a+2b &= 1 \\ a &= -b \\ \Rightarrow 2a+3b &= 0 \\ 5c+2d &= 0 \\ c &= 1-d \\ 2c+3d &= 0 \\ 5e+2f &= 0 \\ e &= -f \\ 2e+3f &= 1 \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \begin{aligned} -5b+1-d+2e &= 1 \\ 5b+d+2f &= 0 \\ -2b+1-d-3f &= 0 \\ 2b+d+3f &= 1 \\ -5b+2b &= 1 \\ -2b+3b &= 0 \\ 5-5d+2d &= 0 \\ 2-2d+3d &= 0 \\ -5f+2f &= 0 \\ -2f+3f &= 1 \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \begin{aligned} -5b-d+2e &= 0 \\ 5b+d+2f &= 0 \\ -2b+1-d-3f &= 0 \\ 2b+d+3f &= 1 \\ -3b &= 1 \\ b &= 0 \\ 5-5d+2d &= 0 \\ 2-2d+3d &= 0 \\ -3f &= 0 \\ f &= 1 \end{aligned} \end{aligned} \right\}$$

Esto no es posible, pues nos sale b y f igual a dos valores distintos y no existe la inversa.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$, calcule:

- i) Dominio y puntos de corte con los ejes. (0.25 puntos)
- ii) Asíntotas. (0.75 puntos)
- iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. (0.75 puntos)
- iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. (0.75 puntos)
- v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica. (1 punto)

- i) El dominio de la función son todos los valores reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Punto de corte con eje OX $\rightarrow y = 0$

$$0 = \frac{3}{x^2 - 4} \Rightarrow 0 = 3$$

No es posible. No existen puntos de corte con eje OX.

Punto de corte con eje OY $\rightarrow x = 0$

$$f(0) = \frac{3}{0^2 - 4} = \frac{-3}{4}$$

El punto de corte con eje OY es $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$

- ii) **Asíntota vertical.** $x = a$

Existen dos: $x = 2$ y $x = -2$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 - 4} = \frac{3}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe, pues la función ya tiene una asíntota horizontal

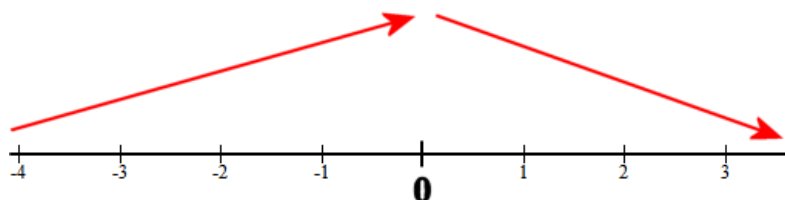
- iii) Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 2x \cdot 3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

En $x = 0$ existe un punto crítico de la función. Averiguamos cómo se comporta la función antes y después de dicho valor. No consideramos $x = 2$ ni $x = -2$, pues el denominador de la derivada está elevado al cuadrado y no cambia de signo.

- En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada es $f'(-1) = \frac{6}{((-1)^2 - 4)^2} > 0$. La función crece.
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada es $f'(1) = \frac{-6}{(1-4)^2} < 0$. La función decrece.



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Tiene un máximo en $x = 0$

iv) Para estudiar la curvatura calculamos la derivada segunda e igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-6(x^2 - 4)^2 - 2(x^2 - 4)2x(-6x)}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$= \frac{-6(x^2 - 4)^2 + 24x^2(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{-6(x^2 - 4) + 24x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{-6x^2 + 24 + 24x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{24 + 18x^2}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{24 + 18x^2}{(x^2 - 4)^3} = 0 \Rightarrow 24 + 18x^2 = 0 \Rightarrow 4 + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-4}{3}} = \text{No existe}$$

No hay puntos de inflexión.

Estudiemos la curvatura antes de -2 , entre -2 y 2 y después de 2 .

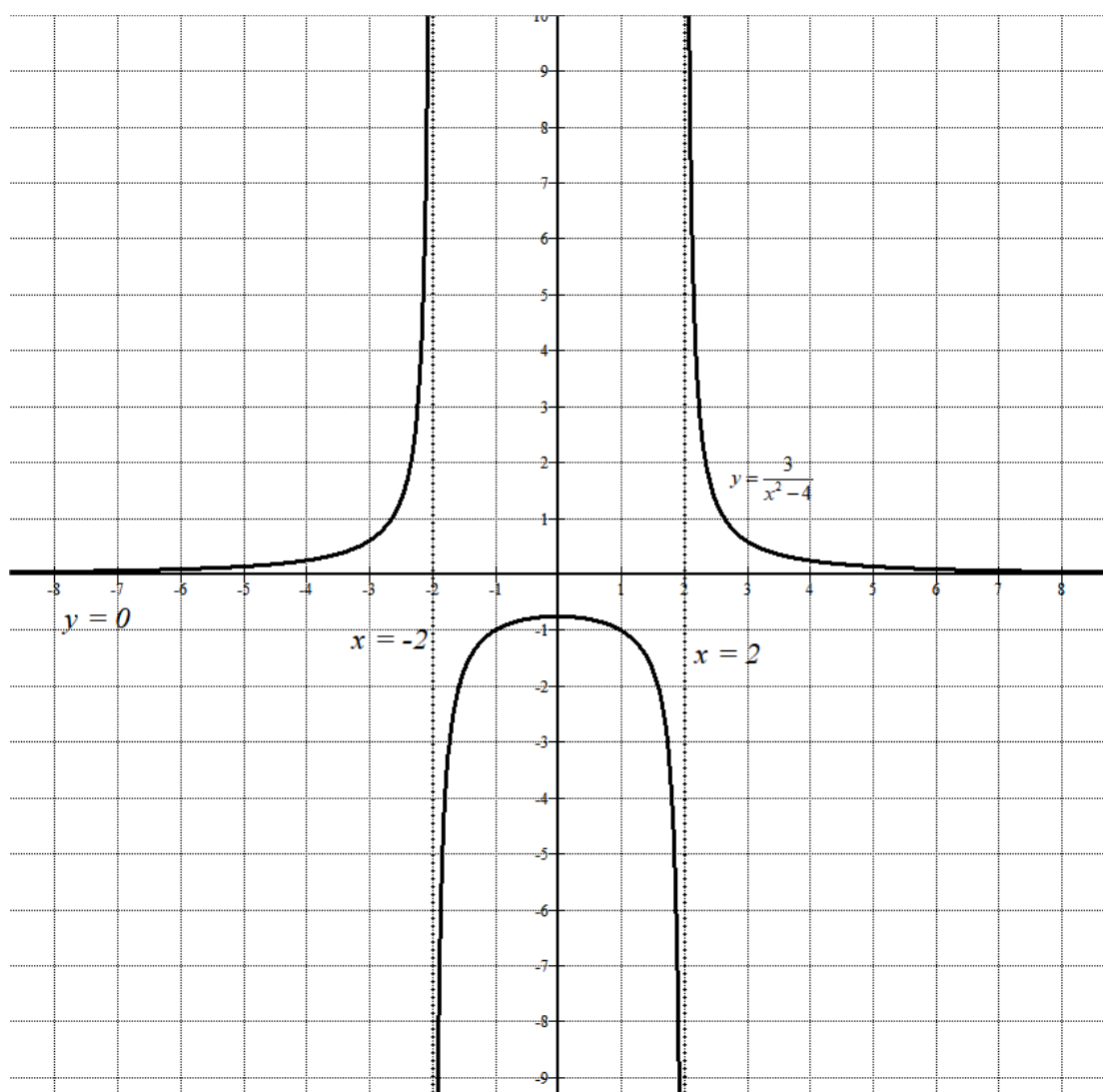
- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada segunda vale $f''(-3) = \frac{24 + 18(-3)^2}{((-3)^2 - 4)^3} = \frac{+}{125} > 0$. La función es convexa ($\cup$).
- En $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = \frac{24}{(0-4)^3} = \frac{+}{-} < 0$. La función es cóncava ($\cap$).
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = \frac{24 + 18 \cdot 9}{(9-4)^3} = \frac{+}{+} > 0$. La función es convexa ($\cup$).

Resumiendo: La función no presenta puntos de inflexión, cambia de curvatura en las asíntotas verticales.

La función es convexa ($\cup$) en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y cóncava ($\cap$) en $(-2, 2)$.

v) Añadimos a lo obtenido una tabla de valores y dibujamos la función.

x	$y = \frac{3}{x^2 - 4}$	x	$y = \frac{3}{x^2 - 4}$
-3	$3/5 = 0.6$	2	No existe
-2	No existe	3	0.6
-1	-1		
0	$-3/4 = -0.75$		
1	-1		



EJERCICIO 3:

En una región se selecciona una muestra de 650 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.

- i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99%. (2 puntos)
 ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (1 punto)
 (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

- i) La proporción de jóvenes no lectores habituales obtenida es $p = \frac{150}{650} = \frac{3}{13} = 0,231$; $n = 650$.

Para un nivel de confianza del 99% obtenemos $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha / 2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$.

El intervalo de confianza para la proporción de jóvenes no lectores habituales es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(\frac{3}{13} - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{3/13 \cdot 10/13}{650}}, \frac{3}{13} + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{3/13 \cdot 10/13}{650}} \right) = (0.188, 0.273)$$

El intervalo de confianza para la proporción es (0.188, 0.273)

- ii) Si el nivel de confianza disminuyese el intervalo sería de menos amplitud.
 Por ejemplo, con un nivel de confianza del 90% (menor).

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha / 2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) =$$

$$= \left(\frac{3}{13} - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{3/13 \cdot 10/13}{650}}, \frac{3}{13} + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{3/13 \cdot 10/13}{650}} \right) = (0.203, 0.258)$$

Con un nivel de confianza del 99% la amplitud del intervalo de confianza es

$$\frac{0.273 - 0.188}{2} = 0.0425.$$

Con un nivel de confianza del 90% (menor que 99%) la amplitud del intervalo de confianza es

$$\frac{0.258 - 0.203}{2} = 0.0275 \text{ (menor que 0.0425).}$$

EvAU Junio 2017



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaren Ebaluaziaa Unibertsitatean Sartzeka

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO: 2016/2017 IKASTURTEA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:

Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios para sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

- i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
- ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
- iii) Analice gráficamente qué ocurriría si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas diarias. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -2 \\ x^2+2x+1 & -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$

- i) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo $\mathbb{R}$. {1.5 puntos}
- ii) Dibuje su gráfica. (1 punto)
- iii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)$ en $x = 3$. (1 punto)

EJERCICIO 3:

El salario medio correspondiente a una muestra aleatoria de 900 personas de una población dada es de 1190 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal con desviación típica de 150 euros.

- i) Calcule el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional. (1.5 puntos)
 - ii) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo sea la misma, con un nivel de confianza del 97%? (1.5 puntos)
- (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad/Batxilergaaren Ebaluaziaa Unibertsitatean Sartzeka

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CURSO: 2016/2017 IKASTURTEA

OPCIÓN B

EJERCICIO 1:

Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- i) Despeje la matriz X. (1 punto)
- ii) Calcule la matriz X. (2.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

- i) $f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}$ (1 punto)
- ii) $g(x) = 3\sin^2 x - \ln(x^3 + 2)$ (1 punto)
- iii) $h(x) = 4 \operatorname{tg} x^2 + \exp(2x^2 + x)$ (1 punto)

EJERCICIO 3:

En un almacén hay 300 cerraduras del modelo A, 400 del modelo B, 100 del modelo C y 200 del modelo D. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0.04 si es del modelo A, 0.02 si es del modelo B, 0.05 si es del modelo C y 0.03 si es del modelo D. Se toma una cerradura al azar.

- i) Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee. (1.5 puntos)
- ii) Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo B. (2 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1:

Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios para sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas diarias. (0.5 puntos)

i) y ii) Llamamos x al número de cajeras e y al número de dependientas.

La función a maximizar es el número de horas que trabajan.

“Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cada cajera trabajará 10 horas al día” $\rightarrow f(x, y) = 10x + 8y$.

Las restricciones para la contratación de las trabajadoras son:

“Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro” $\rightarrow y \leq 8 \quad x \leq 9$

“Cada dependienta que contrate cobrará 60 euros diarios y cada cajera cobrará 90 euros diarios”. “Si la empresa dispone de 930 euros diarios para sueldo” $\rightarrow 60y + 90x \leq 930$

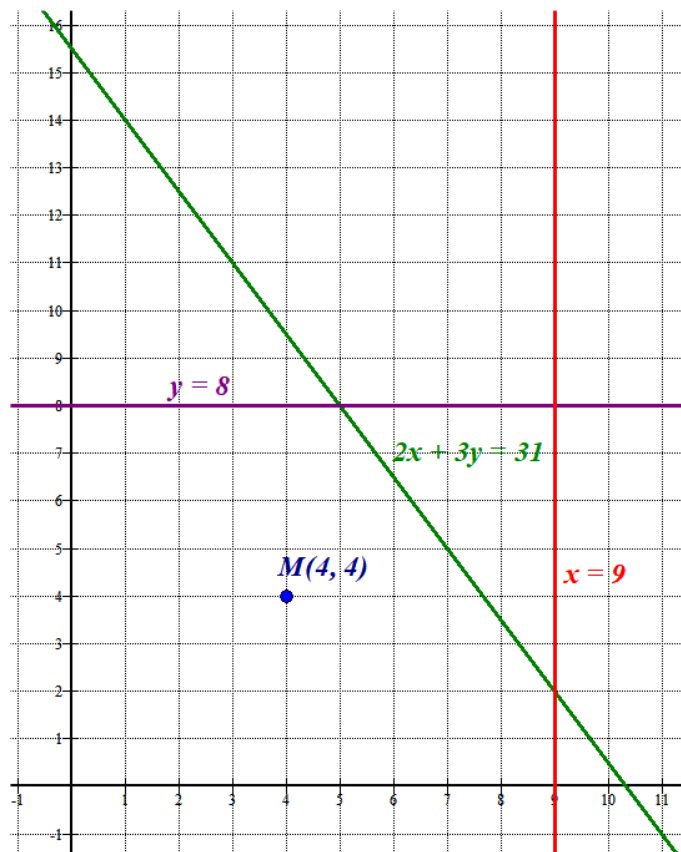
Añadimos que el número de contratadas debe ser positivo y resumimos las restricciones en:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 8 \\ x \leq 9 \\ 60y + 90x \leq 930 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 8 \\ x \leq 9 \\ 2y + 3x \leq 31 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que van a delimitar nuestra región factible (cumple todas las restricciones).

$$2y + 3x = 31 \Rightarrow 2y = 31 - 3x \Rightarrow y = \frac{31 - 3x}{2}$$

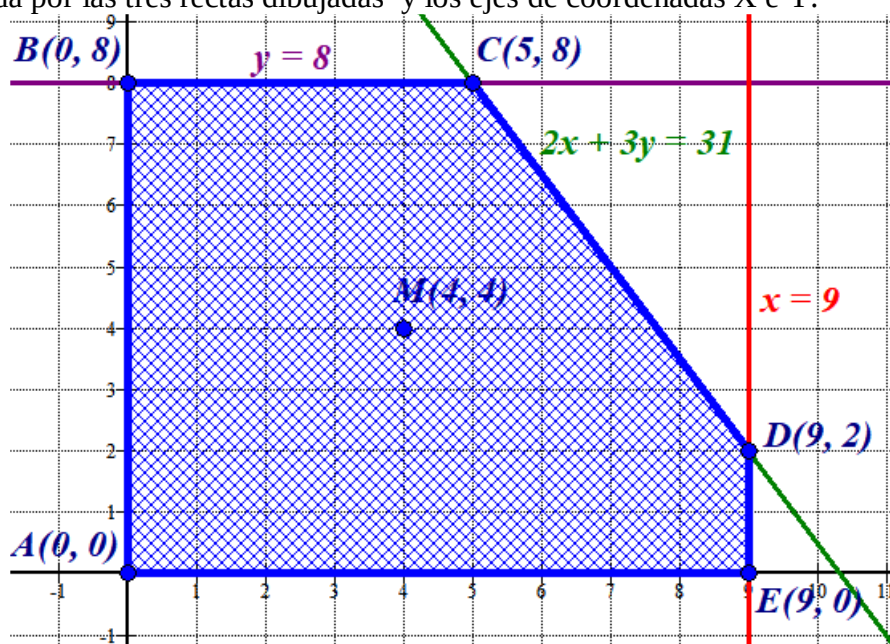
x	$y = \frac{31 - 3x}{2}$
1	14
5	8
9	2



Probamos si el punto $M(4, 4)$ cumple las restricciones del problema.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 8 \\ x \leq 9 \\ 2y + 3x \leq 31 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \\ 4 \leq 8 \\ 4 \leq 9 \\ 8 + 12 \leq 31 \end{array} \right\}$$

Si las cumple, por lo que la región factible es la región a la que pertenece el punto $M(4, 4)$ y delimitada por las tres rectas dibujadas y los ejes de coordenadas X e Y.



Valoramos los vértices en la función horas $f(x, y) = 10x + 8y$ en busca del máximo valor.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow f(0, 8) = 0 + 64 = 64$$

$$C(5, 8) \rightarrow f(5, 8) = 50 + 64 = 114$$

$$D(9, 2) \rightarrow f(9, 2) = 90 + 16 = 106$$

$$E(9, 0) \rightarrow f(9, 0) = 90 + 0 = 90$$

El valor máximo se alcanza en el punto $C(5, 8)$. Significa que se deben contratar 5 cajeras y 8 dependientas para cubrir el máximo posible de horas, atendiendo a las restricciones consideradas.

iii) Si cada cajera debiera trabajar 12 horas la función objetivo sería $f(x, y) = 12x + 8y$ y los valores de dicha función en los vértices de la región factible serían:

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow f(0, 8) = 0 + 64 = 64$$

$$C(5, 8) \rightarrow f(5, 8) = 60 + 64 = 124$$

$$D(9, 2) \rightarrow f(9, 2) = 108 + 16 = 124$$

$$E(9, 0) \rightarrow f(9, 0) = 108 + 0 = 108$$

Como en el punto $C(5, 8)$ y $D(9, 2)$ se obtiene el mismo número máximo de horas, la solución al problema serían todos los puntos con valores enteros comprendidos en el segmento CD :

$$C(5, 8) \rightarrow 5 \text{ cajeras y } 8 \text{ dependientas}$$

$$F(7, 5) \rightarrow 7 \text{ cajeras y } 5 \text{ dependientas}$$

$$D(9, 2) \rightarrow 9 \text{ cajeras y } 2 \text{ dependientas}$$

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -2 \\ x^2+2x+1 & -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$

- i) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo $\mathbb{R}$. {1.5 puntos}
 ii) Dibuje su gráfica. (1 punto)
 iii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)$ en $x = 3$. (1 punto)

- i) La función $f(x)$ es una función definida a trozos y en cada uno de esos trozos es una función polinómica que es continua y derivable. Solo hay que estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en los momentos de cambio de definición: $x = -2$ y en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -2 \\ x^2+2x+1 & -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x < -2 \\ 2x+2 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

En $x = -2$ estudiamos su continuidad.

- Existe $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 4 - 4 + 1 = \boxed{1}$

- Existe el límite lateral por izquierda en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x + 5 = -4 + 5 = \boxed{1}$$

- Existe el límite lateral por derecha en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 2x + 1 = 4 - 4 + 1 = \boxed{1}$$

- Los tres valores son iguales.

Se cumplen todas las condiciones anteriores y la función es continua en $x = -2$

En $x = -2$ estudiamos su derivabilidad.

$$\left. \begin{aligned} f'(-2^-) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2 \\ f'(-2^+) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x + 2 = -4 + 2 = -2 \end{aligned} \right\}$$

Como no son iguales no es derivable en $x = -2$.

En $x = 1$ estudiamos su continuidad.

- Existe $f(1) = -1^2 + 2 = -1 + 2 = \boxed{1}$

- Existe el límite lateral por izquierda en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x + 1 = 1 + 2 + 1 = \boxed{4}$$

- Existe el límite lateral por derecha en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 2 = \boxed{1}$$

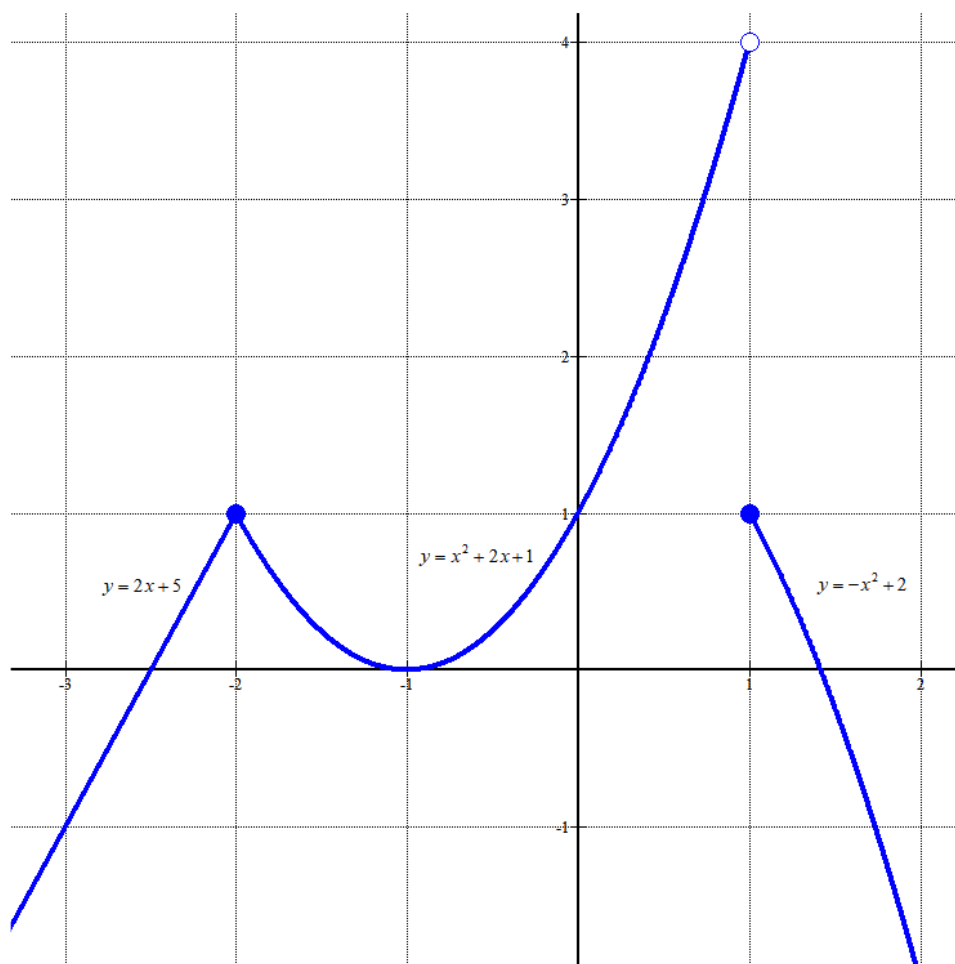
- Los tres valores son iguales. **No se cumple**

No es continua en $x = 1$

En $x = 1$ no es necesario estudiar su derivabilidad, pues si no es continua no es derivable.

ii) Para dibujar su gráfica hacemos una tabla de valores para cada rama de la función.

x	$y = 2x + 5$	x	$y = x^2 + 2x + 1$	x	$y = -x^2 + 2$
-3	-1	-2	1(●)	1	1(●)
-2	1(○)	-1	0	2	-2
		0	1	3	-7
		1	4(○)	4	-14



iii) En el entorno de $x = 3$ la función a trozos es la función $f(x) = -x^2 + 2$.

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 2 - (-3^2 + 2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(9 + h^2 + 6h) + 2 + 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - h^2 - 6h + 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 6h}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(-h-6)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} -h - 6 = \boxed{-6}
 \end{aligned}$$

La derivada de $f(x)$ en $x = 3$ vale -6 .

EJERCICIO 3:

El salario medio correspondiente a una muestra aleatoria de 900 personas de una población dada es de 1190 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal con desviación típica de 150 euros.

i) Calcule el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional. (1.5 puntos)

ii) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo sea la misma, con un nivel de confianza del 97%? (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

i) Llamemos $X = \text{Salario}$. $X = N(\mu, 150)$

La media muestral es $\bar{x} = 1190$ € y el tamaño de la muestra es $n = 900$.

Para un nivel de confianza del 95% averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error se obtiene con la fórmula:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{150}{\sqrt{900}} = \frac{1,96 \cdot 150}{30} = 1,96 \cdot 5 = 9,8 \text{ €}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (1190 - 9,8, 1190 + 9,8)$$

El intervalo de confianza es $(1180,2, 1199,8)$

ii) Para un nivel de confianza del 97 % averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,17}$$

Como debemos mantener la amplitud del intervalo el error debe ser el mismo:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9,8 \Rightarrow 2,17 \cdot \frac{150}{\sqrt{n}} = 9,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,17 \cdot \frac{150}{9,8} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,17 \cdot \frac{150}{9,8} \right)^2 = 1103,19$$

El tamaño mínimo es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 1104 personas.

OPCIÓN B**EJERCICIO 1:**

Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- i) Despeje la matriz X. (1 punto)
 ii) Calcule la matriz X. (2.5 puntos)

i) Despejamos la matriz X en la ecuación.

$$AX + 2B = 2I \cdot X \Rightarrow AX - 2I \cdot X = -2B \Rightarrow (A - 2I)X = -2B$$

Comprobemos si la matriz $A - 2I$ tiene inversa, lo cual facilita despejar la matriz X de la ecuación planteada.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - 2I| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 8 = 16 \neq 0$$

Como su determinante es no nulo, la matriz $A - 2I$ tiene inversa, la calculamos.

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A - 2I)^t\right)}{|A - 2I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}{16} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de despejar la matriz X en la ecuación.

$$(A - 2I)X = -2B \Rightarrow (A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = -2(A - 2I)^{-1}B \Rightarrow$$

$$\boxed{X = -2(A - 2I)^{-1}B}$$

ii) Hacemos las operaciones indicadas y obtenemos X.

$$X = -2(A - 2I)^{-1}B = -2 \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$X = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -12 - 4 \\ -2 & 4 + 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -16 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -3/2 & 4 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i) $f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}$ (1 punto)

ii) $g(x) = 3\operatorname{sen}^2 x - \ln(x^3 + 2)$ (1 punto)

iii) $h(x) = 4 \operatorname{tg} x^2 + \exp(2x^2 + x)$ (1 punto)

i) Modificamos la apariencia de la función antes de derivar.

$$f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} = 3 + \sqrt{2}(x-1)^{-1/2}$$

Y ahora derivamos la función con su nueva expresión.

$$f'(x) = 0 + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (x-1)^{-1/2-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (x-1)^{-3/2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$

ii) Obtenemos la derivada de $g(x)$.

$$g(x) = 3\operatorname{sen}^2 x - \ln(x^3 + 2) \Rightarrow g'(x) = 6\operatorname{sen} x \cos x - \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

iii) Obtenemos la derivada de $h(x)$.

$$h(x) = 4 \operatorname{tg} x^2 + \exp(2x^2 + x) = 4 \operatorname{tg} x^2 + e^{2x^2+x}$$

$$h'(x) = 4 \frac{1}{\cos^2(x^2)} 2x + e^{2x^2+x} (4x+1) = \frac{8x}{\cos^2(x^2)} + (4x+1)e^{2x^2+x}$$

EJERCICIO 3:

En un almacén hay 300 cerraduras del modelo A, 400 del modelo B, 100 del modelo C y 200 del modelo D. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0.04 si es del modelo A, 0.02 si es del modelo B, 0.05 si es del modelo C y 0.03 si es del modelo D. Se toma una cerradura al azar.

- i) Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee. (1.5 puntos)
 ii) Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo B. (2 puntos)

- i) Hay $300 + 400 + 100 + 200 = 1000$ cerraduras.

$$P(\text{Sea del modelo A}) = 300/1000 = 0,3$$

$$P(\text{Sea del modelo B}) = 400/1000 = 0,4$$

$$P(\text{Sea del modelo C}) = 100/1000 = 0,1$$

$$P(\text{Sea del modelo D}) = 200/1000 = 0,2$$

Calculemos la probabilidad pedida aplicando del teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Cerradura se bloquee}) =$$

$$\begin{aligned} &= P(\text{Sea del modelo A})P(\text{Cerradura se bloquee}|\text{Sea del modelo A}) + \\ &+ P(\text{Sea del modelo B})P(\text{Cerradura se bloquee}|\text{Sea del modelo B}) + \\ &+ P(\text{Sea del modelo C})P(\text{Cerradura se bloquee}|\text{Sea del modelo C}) + \\ &+ P(\text{Sea del modelo D})P(\text{Cerradura se bloquee}|\text{Sea del modelo D}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{300}{1000} \cdot 0,04 + \frac{400}{1000} \cdot 0,02 + \frac{100}{1000} \cdot 0,05 + \frac{200}{1000} \cdot 0,03 = 0,012 + 0,008 + 0,005 + 0,006 = \boxed{0,031}$$

- ii) Aplicamos el teorema de Bayes.

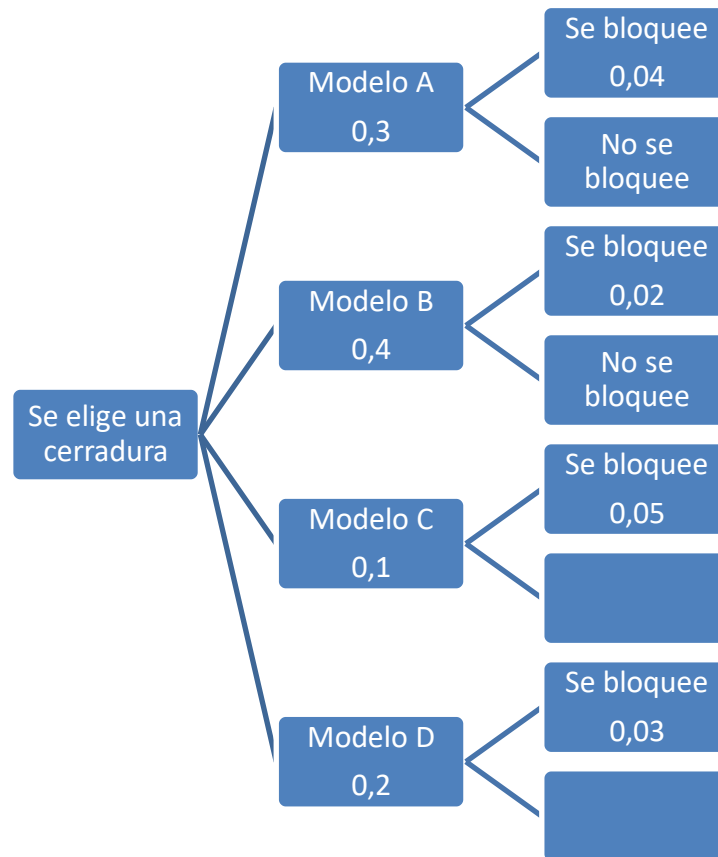
$$P(\text{No sea del modelo B} / \text{Se ha bloqueado}) =$$

$$= \frac{P(\text{No sea del modelo B y Se ha bloqueado})}{P(\text{Se ha bloqueado})} =$$

$$= \frac{P(\text{Sea modelo A y Se bloquee}) + P(\text{Sea C y Se bloquee}) + P(\text{Sea D y Se bloquee})}{P(\text{Se ha bloqueado})} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03}{0,031} = \frac{0,023}{0,031} = \frac{23}{31} = \boxed{0,74}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO (aunque realmente se hacen los mismos cálculos)
 Construyendo un diagrama de árbol.



i) $P(\text{Bloquee}) = \{\text{Suma de las 4 ramas donde ocurre}\} =$
 $= 0,3 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03 = \boxed{0,031}$

ii) $P(\text{No sea del modelo B} / \text{se ha bloqueado}) =$

$$= \frac{\text{La suma de las 3 ramas donde se bloquea sin ser del modelo B}}{\text{La suma de las ramas donde se bloquea (4 ramas)}} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03}{0,031} = \boxed{0,74}$$