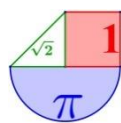
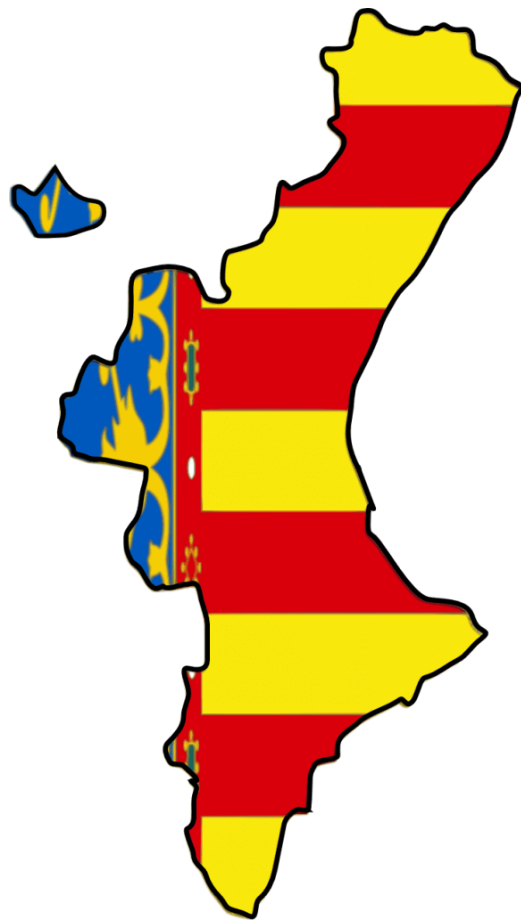


MATEMÁTICAS APLICADAS
A LAS CIENCIAS SOCIALES II
PAU
COMUNIDAD VALENCIANA
Años 2017 al 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas PAU de la Comunidad Valenciana desde el año 2017 al 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Julio 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	3
PAU Julio Reserva 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	15
PAU Junio 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	25
PAU Junio Reserva 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	38
PAU Julio 2024 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	50
PAU Junio 2024 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	65
PAU Julio 2023 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	79
PAU Junio 2023 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	91
PAU Julio 2022 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	104
PAU Junio 2022 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	117
PAU Julio 2021 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	129
PAU Junio 2021 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	142
PAU Septiembre 2020 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	154
PAU Julio 2020 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	164
PAU Julio 2019 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	177
PAU Junio 2019 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	191
PAU Julio 2018 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	204
PAU Junio 2018 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	214
PAU Julio 2017 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	225
PAU Junio 2017 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana	237

PAU Julio 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025	CONVOCATORIA: JULIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

- ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
- ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

Problema 1. B. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

- Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. (1 punto)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste D_A tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la

función $D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste D_B para un neumático B tras x meses de uso,

para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

- Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)
- Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)
- Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0,5 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0,5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. Una ciudad está implementando un programa de sostenibilidad ambiental. Como parte de este programa, los residentes tienen la opción de participar en dos actividades: limpieza de parques y plantación de árboles. Para evaluar el impacto de esta iniciativa, se realizó una encuesta a 2.000 ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Seleccionamos al azar a uno de estos ciudadanos.

- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades. (0,75 puntos)
- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en plantación de árboles. (0,75 puntos)
- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades. (0,75 puntos)
- Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques. (0,75 puntos)

Soluciones

Problema 1. A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

- a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de excursiones a la montaña e “y” al número de excursiones a la playa. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Autobuses	Guías	Beneficio
Excursiones a montaña (x)	2x	2x	700x €
Excursiones a playa (y)	2y	y	500y €
TOTALES	2x + 2y	2x + y	700x + 500y

La función a maximizar son los beneficios: $B(x, y) = 700x + 500y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones” $\rightarrow$
 $2x + 2y \leq 10$, $2x + y \leq 8$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 5$$

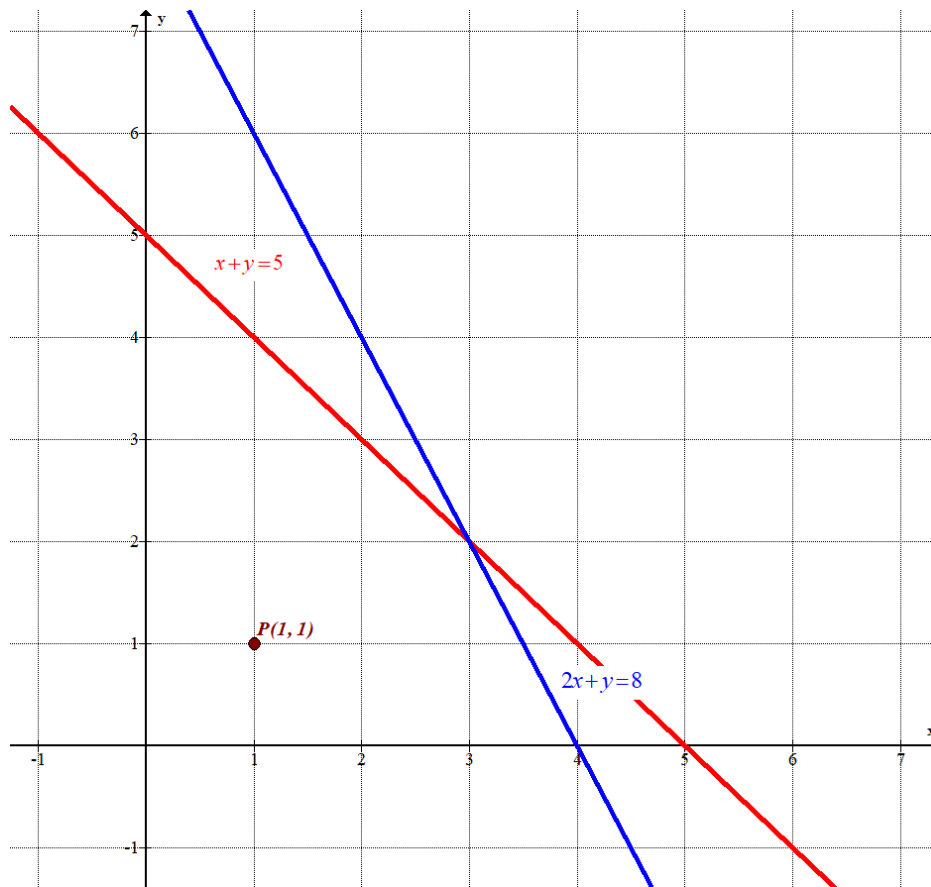
x	y = 5 - x
0	5
3	2
5	0

$$2x + y = 8$$

x	y = 8 - 2x
0	8
3	2
4	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

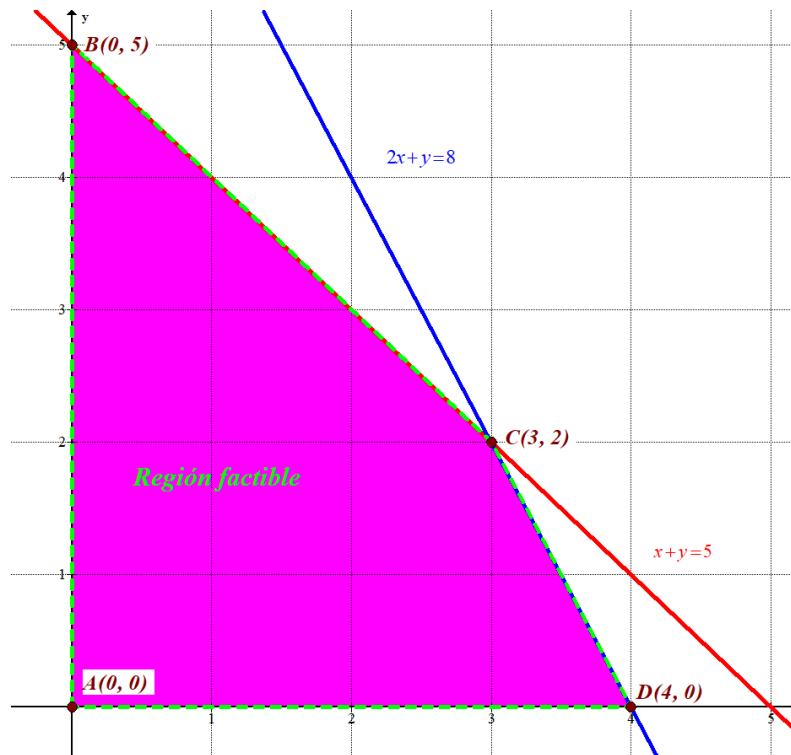


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 1 \leq 5 \\ 2 + 1 \leq 8 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 700x + 500y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 5) \rightarrow B(0, 5) = 700 \cdot 0 + 500 \cdot 5 = 2500$$

$$C(3, 2) \rightarrow B(3, 2) = 700 \cdot 3 + 500 \cdot 2 = 3100 \text{ Máximo}$$

$$D(4, 0) \rightarrow B(4, 0) = 700 \cdot 4 + 500 \cdot 0 = 2800$$

El valor más alto que se pueden obtener en la región factible es 3100 y se obtiene en el punto $C(3, 2)$.

Los beneficios más altos se consiguen con 3 excursiones a la montaña y 2 a la playa.

b) Los beneficios más altos que se pueden conseguir son de 3100 euros.

Problema 1. B. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. (1 punto)

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$2XA + B^t C = I \Rightarrow 2XA = I - B^t C \Rightarrow XA = \frac{1}{2}(I - B^t C) \Rightarrow X = \frac{1}{2}(I - B^t C)A^{-1}$$

Determinamos, si existe, la inversa de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 6 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} I - B^t C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3-4 & 0-2 & 3-0 \\ -1+0 & 0+0 & 1+0 \\ 0-4 & 0-2 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \frac{1}{2}(I - B^t C)A^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 48 & 48+9 & -16+4-3 \\ 6 & 6+3 & -2+2-1 \\ 24 & 24-3 & -8+4+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 48 & 57 & -15 \\ 6 & 9 & -1 \\ 24 & 21 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 19/4 & -5/4 \\ 1/2 & 3/4 & -1/12 \\ 2 & 7/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

b) Determinamos la expresión de la matriz AD.

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1+2z \\ 0 & 0 & 1-2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz AD sea diagonal deben ser nulos los elementos situados fuera de la diagonal principal $\rightarrow -1+2z=0 \rightarrow z = \frac{1}{2}$.

Para $z = \frac{1}{2}$ la matriz queda $AD = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Siendo una matriz diagonal.

Problema 2. A. Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste D_A tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste D_B para un neumático B tras x meses de uso,

para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

- Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)
- Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)
- Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

a) Averiguamos el valor de x para el que $D_A(x) = D_B(x)$.

$$D_A(x) = D_B(x) \Rightarrow \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \Rightarrow 30 + 29x = x^2 \Rightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(-30)}}{2} = \frac{29 \pm 31}{2} = \begin{cases} \frac{29+31}{2} = \boxed{30 = x} \\ \frac{29-31}{2} = -1 \notin [0, 50] \end{cases}$$

Cuando han pasado 30 meses el desgaste de los dos tipos de neumáticos es el mismo.

b) El desgaste solo coincide en $x = 30$. Averiguamos si $D_A(x) < D_B(x)$ antes de este valor o después de este valor.

- En el intervalo $[0, 30)$ tomamos $x = 10$ y tenemos que $D_A(10) = \frac{1}{100} + \frac{290}{3000} = \frac{320}{3000}$ y

$$D_B(10) = \frac{10^2}{3000} = \frac{100}{3000}, \text{ por lo que } D_A(x) > D_B(x) \text{ para } x \in [0, 30).$$

- En el intervalo $(30, 50]$ tomamos $x = 40$ y tenemos que $D_A(40) = \frac{1}{100} + \frac{1160}{3000} = \frac{1190}{3000}$ y

$$D_B(40) = \frac{40^2}{3000} = \frac{1600}{3000}, \text{ por lo que } D_A(x) < D_B(x) \text{ para } x \in (30, 50].$$

Entre los meses 30 y 50 el desgaste de los neumáticos del tipo A es menor que el desgaste de los de tipo B.

c) Calculamos el área del recinto limitado por las dos gráficas entre 30 y 50. Como las gráficas solo se cortan en $x = 30$ el área es el valor de la integral definida entre 30 y 50 de $D_B(x) - D_A(x)$.

$$\text{Área} = \int_{30}^{50} D_B(x) - D_A(x) dx = \int_{30}^{50} \frac{x^2}{3000} - \frac{1}{100} - \frac{29x}{3000} dx = \left[\frac{x^3}{9000} - \frac{x}{100} - \frac{29x^2}{6000} \right]_{30}^{50} =$$

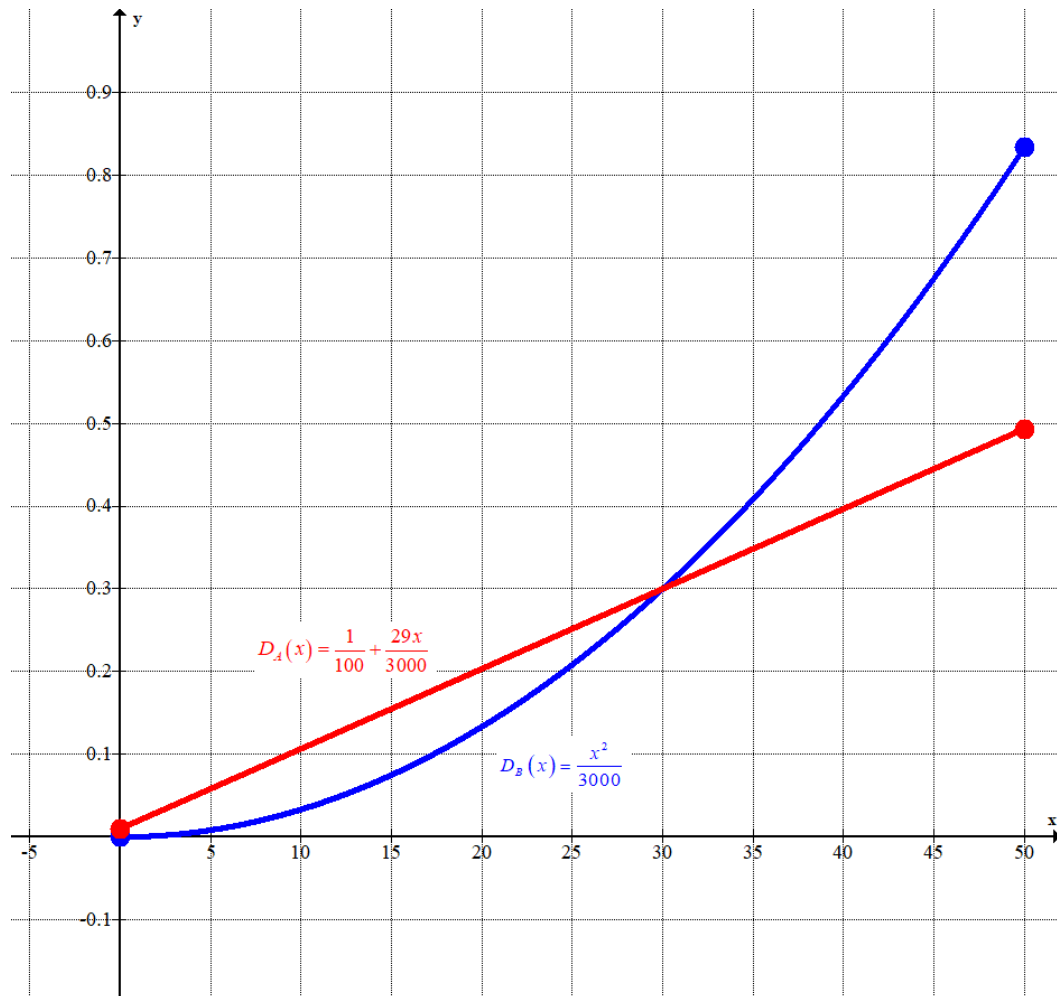
$$= \left[\frac{50^3}{9000} - \frac{50}{100} - \frac{29 \cdot 50^2}{6000} \right] - \left[\frac{30^3}{9000} - \frac{30}{100} - \frac{29 \cdot 30^2}{6000} \right] =$$

$$= \frac{250000 - 9000 - 217500 - 54000 + 5400 + 78300}{18000} = \boxed{\frac{133}{45} \approx 2.9556 \text{ u}^2}$$

Calculamos el área del recinto limitado por las dos gráficas entre 0 y 30. Obtenemos el área como el valor de la integral definida entre 0 y 30 de $D_A(x) - D_B(x)$.

$$\text{Área} = \int_0^{30} D_A(x) - D_B(x) dx = \int_0^{30} \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \frac{x^2}{3000} dx = \left[\frac{x}{100} + \frac{29x^2}{6000} - \frac{x^3}{9000} \right]_0^{30} =$$

$$= \left[\frac{30}{100} + \frac{29 \cdot 30^2}{6000} - \frac{30^3}{9000} \right] - \left[\frac{0}{100} + \frac{29 \cdot 0^2}{6000} - \frac{0^3}{9000} \right] = \frac{5400 + 78300 - 54000}{18000} = \boxed{\frac{33}{20} = 1.65 \text{ u}^2}$$



Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x(2x+4)+2 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Punto de corte con el eje OY:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1+0^2}{0(2 \cdot 0+4)+2} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ \text{eje OY} \rightarrow x=0 \end{array} \right\}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} \Rightarrow \\ \text{eje OX} \rightarrow y=0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+2 = 2+2x^2 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

El único punto de corte con los ejes coordenados es $A(0,0)$.

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+(-1)^2}{(-1)(2(-1)+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{0} = \frac{1}{2} - \infty = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

- c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1+x^2}{(1+x)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{2x(1+x)^2 - 2(1+x)(1+x^2)}{(1+x)^4} \right) = \frac{1}{2} \left(- \frac{2x(1+x) - 2(1+x^2)}{(1+x)^3} \right) =$$

$$= - \frac{x+x^2-1-x^2}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{(1+x)^3} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La función presenta un punto crítico en $x=1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 1 y -1 (excluido del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x=-11$ y la derivada vale

$$f'(-11) = \frac{1-(-11)}{(1-11)^3} = -0.012 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{1-0}{(1+0)^3} = 1 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=9$ y la derivada vale $f'(9) = \frac{1-9}{(1+9)^3} = -0.008 < 0$.

La función decrece en $(1, +\infty)$.

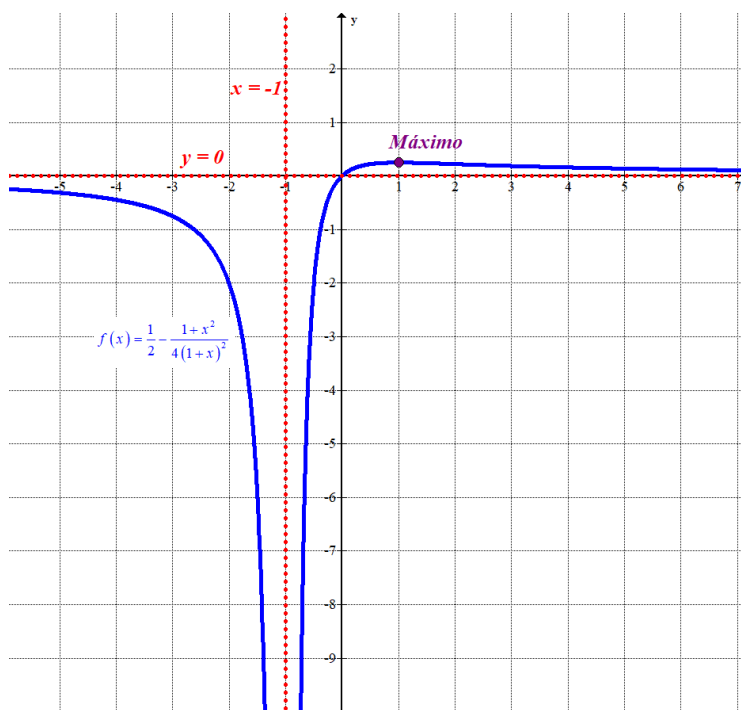
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

La función presenta un máximo local en $x=1$. Como $f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1+1^2}{(2+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ el

máximo local tiene coordenadas $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

d) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$
-3	-0.75
-2	-2
0	0
1	0.25
2	0.22
3	0.1875



Problema 3. Una ciudad está implementando un programa de sostenibilidad ambiental. Como parte de este programa, los residentes tienen la opción de participar en dos actividades: limpieza de parques y plantación de árboles. Para evaluar el impacto de esta iniciativa, se realizó una encuesta a 2.000 ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Seleccionamos al azar a uno de estos ciudadanos.

- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades. (0,75 puntos)
- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en plantación de árboles. (0,75 puntos)
- Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades. (0,75 puntos)
- Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques. (0,75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Plantación de árboles	No plantación	
Limpieza de parques	300		800
No limpieza		100	
TOTALES	1400		2000

Completamos la tabla

	Plantación de árboles	No plantación	
Limpieza de parques	300	500	800
No limpieza	1100	100	1200
TOTALES	1400	600	2000

Con estos datos obtenidos y la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

- Hay 100 ciudadanos que no participan en ninguna actividad, por lo que $2000 - 100 = 1900$ participan en alguna actividad. La probabilidad de que el ciudadano elegido al azar participe en al menos una de las dos actividades vale $\frac{1900}{2000} = \frac{19}{20} = 0.95$.
- De los 2000 ciudadanos hay 500 ciudadanos que participan en la limpieza y no plantan árboles. La probabilidad de que el ciudadano elegido al azar participe en la limpieza y no plante árboles vale $\frac{500}{2000} = \frac{1}{4} = 0.25$.
- De los 2000 ciudadanos 500 participan en la limpieza y no plantan árboles y otros 1100 plantan árboles y no participan en la limpieza. La probabilidad de que el ciudadano elegido al azar participe solo en una de las actividades vale $\frac{500 + 1100}{2000} = \frac{4}{5} = 0.8$.
- Hay 600 ciudadanos que no participan en la plantación de árboles y de estos 100 tampoco han participado en la limpieza. La probabilidad de que el ciudadano elegido entre los que no participan en la plantación de árboles tampoco haya participado en la limpieza de jardines vale $\frac{100}{600} = \frac{1}{6} \approx 0.16667$.

PAU Julio Reserva 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JULIOL 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JULIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Esta semana una chica ha consumido 1.470 megabytes de datos de su móvil conectándose a redes sociales, a periódicos y a la universidad. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad. Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos. Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad. ¿Cuántos megabytes consume una hora de conexión a redes sociales?; ¿cuántos una hora de conexión a periódicos?; ¿cuántos una hora de conexión a la universidad?

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Problema 1. B. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C . (0,75 puntos)
- Calcula la inversa de la matriz $B - A$. (1,25 puntos)
- Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X . (1,5 puntos)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

- ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor? (0,75 puntos)
- ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor? (0,75 puntos)

- c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros? (1,25 puntos)
d) Calcula la siguiente integral: (0,75 puntos)

$$\int_3^8 B(t) dt$$

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0.5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. Una empresa de mantenimiento de automóviles evalúa los coches haciéndoles dos controles; si los dos salen negativos entonces el coche se califica como no adecuado y si los dos salen positivos entonces se califica como adecuado. Sin embargo, si uno de los controles sale positivo y el otro negativo, entonces se le hace un tercer control; si este sale positivo la calificación es de coche adecuado, y en caso contrario la calificación es de no adecuado. Se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8 y que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control. Seleccionamos al azar un coche de esta marca para su evaluación.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado? (1 punto)
b) Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control? (1 punto)
c) Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado? (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. Esta semana una chica ha consumido 1.470 megabytes de datos de su móvil conectándose a redes sociales, a periódicos y a la universidad. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad. Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos. Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad. ¿Cuántos megabytes consume una hora de conexión a redes sociales?; ¿cuántos una hora de conexión a periódicos?; ¿cuántos una hora de conexión a la universidad?

Llamamos “x” el consumo en megabytes de una hora de conexión a redes sociales, “y” el consumo en megabytes de una hora de conexión a periódicos y “z” el consumo en megabytes de una hora de conexión a la universidad.

“Una chica ha consumido 1.470 megabytes de datos de su móvil conectándose a redes sociales, a periódicos y a la universidad. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad” $\rightarrow 10x + 4y + 6z = 1470$.

“Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos” $\rightarrow x = 1.2y$

“Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad” $\rightarrow y = 30 + z$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 4y + 6z = 1470 \\ x = 1.2y \\ y = 30 + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 735 \\ x = 1.2y \\ y - 30 = z \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot 1.2y + 2y + 3(y - 30) = 735 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y + 2y + 3y - 90 = 735 \Rightarrow 11y = 825 \Rightarrow y = \frac{825}{11} = 75 \Rightarrow \begin{cases} x = 1.2 \cdot 75 = 90 \\ z = 75 - 30 = 45 \end{cases}$$

Una hora de conexión a redes sociales consume 90 megabytes. Una hora de conexión a periódicos consume 75 megabytes. Una hora de conexión a la universidad consume 45 megabytes.

Problema 1. B. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C . (0,75 puntos)
 b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$. (1,25 puntos)
 c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X . (1,5 puntos)

a) Calculamos AC^t .

$$AC^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6+2 & 1 \\ 3+2 & 9+10+4 & 5 \\ 1+1 & 3+6+2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que la matriz tiene determinante no nulo y calculamos su inversa.

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|B - A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 6 + 1 - 3 - 0 = 3 \neq 0$$

$$(B - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(B - A)^T}{|B - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(B - A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos X^t en la ecuación matricial.

$$X^t A + C = X^t B \Rightarrow C = X^t B - X^t A \Rightarrow X^t (B - A) = C \Rightarrow X^t = C (B - A)^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz X^t .

$$X^t = C(B-A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+7 & -1-1 & 1+4 \\ 3-6+14 & -3-2 & 3-6+8 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 11 & -5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } X^t = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } X = (X^t)^t = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

- a) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor? (0,75 puntos)
 b) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor? (0,75 puntos)
 c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros? (1,25 puntos)
 d) Calcula la siguiente integral: (0,75 puntos)

$$\int_3^8 B(t) dt$$

- a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(t) = -t^2 + 12t - 11 \Rightarrow B'(t) = -2t + 12$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6 \in [2, 9]$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(t) = -2t + 12 \Rightarrow B''(t) = -2 \Rightarrow B''(6) = -2 < 0$$

La segunda derivada es negativa para $t = 6$, la función tiene un máximo relativo en este valor.

Para $t = 6$ la función vale $B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 11 = 25$.

La empresa alcanza su valor máximo a los 6 años siendo este valor máximo de 25 millones de euros.

- b) La función es continua y alcanza un máximo relativo en $t = 6$. La función crece de 2 a 6 y decrece de 6 a 9. Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición que es donde se alcanza el mínimo valor de la empresa.

$$\left. \begin{aligned} B(2) &= -2^2 + 12 \cdot 2 - 11 = 9 \\ B(9) &= -9^2 + 12 \cdot 9 - 11 = 16 \end{aligned} \right\}$$

El mínimo valor de la empresa es de 9 millones de euros que se alcanzan en el segundo año.

- c) Averiguamos cuando $B(t) = 24$.

$$\left. \begin{aligned} B(t) &= 24 \\ B(t) &= -t^2 + 12t - 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -t^2 + 12t - 11 = 24 \Rightarrow t^2 - 12t + 35 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{12-2}{2} = 5 = t \\ \frac{12+2}{2} = 7 = t \end{cases}$$

El valor de la empresa es de 24 millones en el año 5, su valor aumenta hasta el año 6 que alcanza un valor de 25 millones y luego baja hasta el año 7 que vuelve a valer 24 millones de euros.

Del año 5 al 7 la empresa tiene un valor superior a 24 millones de euros.

- d) Calculamos la integral pedida.

$$\int_3^8 B(t) dt = \int_3^8 -t^2 + 12t - 11 dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 6t^2 - 11t \right]_3^8 =$$

$$= \left[-\frac{8^3}{3} + 6 \cdot 8^2 - 11 \cdot 8 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 6 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 \right] = -\frac{512}{3} + 384 - 88 + 9 - 54 + 33 = \frac{340}{3}$$

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Punto de corte con el eje OY:

$$\left. f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 27}{0^2 + 0 - 2} = \frac{27}{2} \Rightarrow \boxed{A\left(0, \frac{27}{2}\right)}$$

eje OY $\rightarrow x = 0$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

eje OX $\rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(-3, 0)} \\ \boxed{C(3, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $A\left(0, \frac{27}{2}\right)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, 0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3(-2)^2 - 27}{(-2)^2 - 2 - 2} = \frac{-15}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 27}{1^2 + 1 - 2} = \frac{-24}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$y = 3$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(3x^2 - 27)}{(x^2 + x - 2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 6x^2 - 12x - 6x^3 + 54x - 3x^2 + 27}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3(x^2 + 14x + 9)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3(x^2 + 14x + 9)}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 14x + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-14 \pm 4\sqrt{10}}{2} = \begin{cases} x = -7 + 2\sqrt{10} = -0.67 \\ x = -7 - 2\sqrt{10} = -13.32 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos, 1 y -2 (excluidos del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, -7 - 2\sqrt{10})$ tomamos $x = -20$ y la derivada vale

$$f'(-20) = \frac{3((-20)^2 + 14(-20) + 9)}{((-20)^2 - 20 - 2)^2} = 0.002 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -7 - 2\sqrt{10}).$$

- En el intervalo $(-7 - 2\sqrt{10}, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{3((-3)^2 + 14(-3) + 9)}{((-3)^2 - 3 - 2)^2} = -8 < 0. \text{ La función decrece en } (-7 - 2\sqrt{10}, -2).$$

- En el intervalo $(-2, -7 + 2\sqrt{10})$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{3((-1)^2 + 14(-1) + 9)}{((-1)^2 - 1 - 2)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, -7 + 2\sqrt{10}).$$

- En el intervalo $(-7 + 2\sqrt{10}, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{3(0^2 + 14 \cdot 0 + 9)}{(0^2 + 0 - 2)^2} = \frac{27}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-7 + 2\sqrt{10}, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{3(2^2 + 14 \cdot 2 + 9)}{(2^2 + 2 - 2)^2} = \frac{+}{16} > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en $(-7 - 2\sqrt{10}, -2) \cup (-2, -7 + 2\sqrt{10})$ y crece en $(-\infty, -7 - 2\sqrt{10}) \cup (-7 + 2\sqrt{10}, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función presenta un máximo local en $x = -7 - 2\sqrt{10}$.

Como $f(-7 - 2\sqrt{10}) = \frac{3(-7 - 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 - 2\sqrt{10})^2 - 7 - 2\sqrt{10} - 2} = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{3} \approx 3.117$ el máximo local tiene

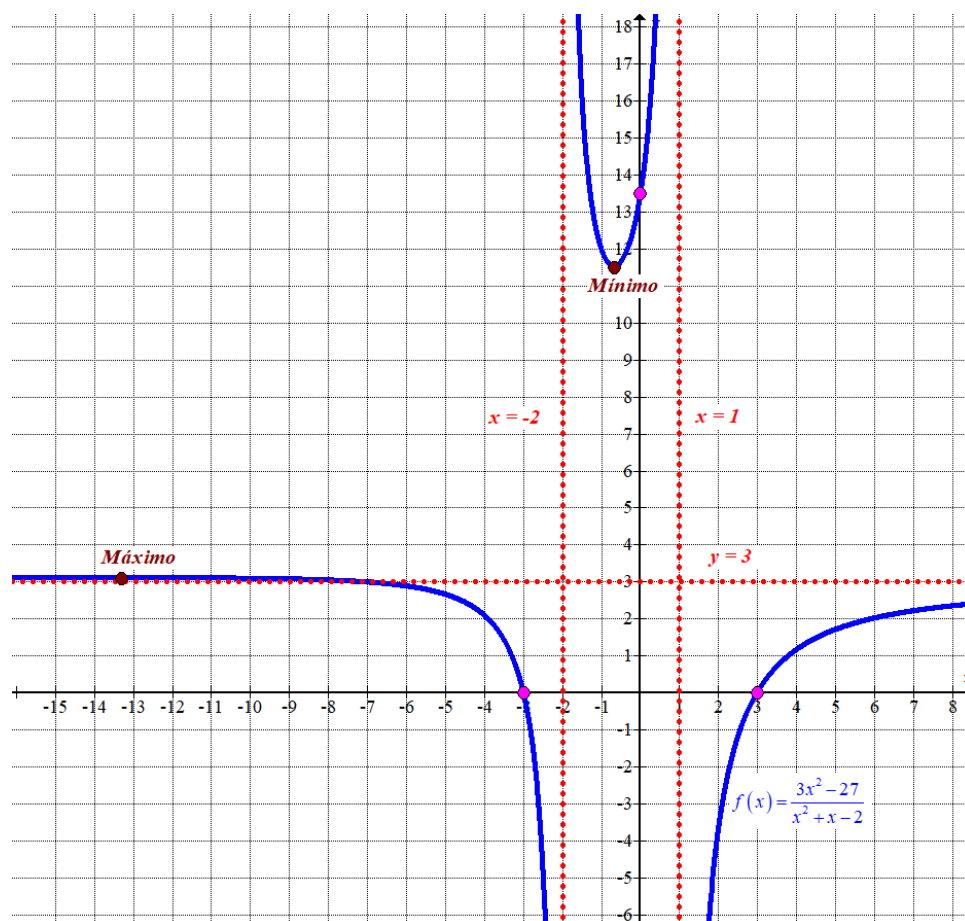
coordenadas $\left(-7 - 2\sqrt{10}, \frac{22 - 4\sqrt{10}}{3}\right)$.

La función presenta un mínimo local en $x = -7 + 2\sqrt{10}$.

Como $f(-7 + 2\sqrt{10}) = \frac{3(-7 + 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 + 2\sqrt{10})^2 - 7 + 2\sqrt{10} - 2} = \frac{22 + 4\sqrt{10}}{3} \approx 11.55$ el mínimo local tiene

coordenadas $\left(-7 + 2\sqrt{10}, \frac{22 + 4\sqrt{10}}{3}\right)$.

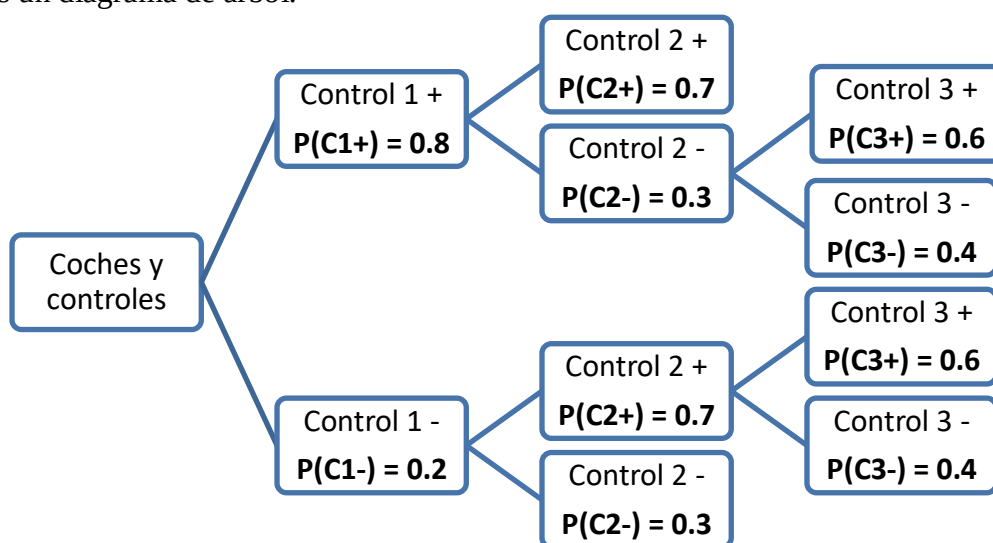
d) Representamos la gráfica de la función.



Problema 3. Una empresa de mantenimiento de automóviles evalúa los coches haciéndoles dos controles; si los dos salen negativos entonces el coche se califica como no adecuado y si los dos salen positivos entonces se califica como adecuado. Sin embargo, si uno de los controles sale positivo y el otro negativo, entonces se le hace un tercer control; si este sale positivo la calificación es de coche adecuado, y en caso contrario la calificación es de no adecuado. Se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8 y que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control. Seleccionamos al azar un coche de esta marca para su evaluación.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado? (1 punto)
- b) Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control? (1 punto)
- c) Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado? (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Para que sea calificado como adecuado puede pasar de tres formas distintas.

$$P(\text{Adecuado}) = P(C1+)P(C2+) + P(C1-)P(C2+)P(C3+) + P(C1+)P(C2-)P(C3+) = 0.8 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.788}$$

- b) Debemos calcular $P(C1+/\text{Adecuado})$.

$$P(C1+/\text{Adecuado}) = \frac{P(C1+ \cap \text{Adecuado})}{P(\text{Adecuado})} = \frac{0.8 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6}{0.788} = \frac{176}{197} \approx 0.8934$$

- c) Si solo se le han hecho dos controles es porque han salido los dos negativos o los dos positivos. Para ser calificado como adecuado debe de haber obtenido dos controles positivos.

Nos piden calcular $P((C1+ \cap C2+)/((C1+ \cap C2+) \cup (C1- \cap C2-)))$.

$$P((C1+ \cap C2+)/((C1+ \cap C2+) \cup (C1- \cap C2-))) = \frac{P(C1+ \cap C2+)}{P((C1+ \cap C2+) \cup (C1- \cap C2-))} = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.3} = \frac{28}{31} \approx 0.9032$$

PAU Junio 2025 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025	CONVOCATORIA: JUNIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas.. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

- a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

(Planteamiento correcto, 1,5 puntos - Resolución correcta 2 puntos)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. (0,75 puntos)
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. (1,5 puntos)
- c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)
- d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x=8$ y la recta de ecuación $x=9$. (0,75 puntos)

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

- a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. (1 punto)
- b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. (1 punto)
- c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

- a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

- a) Llamamos “x” al número de días de funcionamiento de la planta A e “y” al número de días de funcionamiento de la planta B.
 Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Lotes P1	Lotes P2	Lotes P3	Coste (miles)
Días planta A (x)	x	2x	x	60x €
Días planta B (y)	y	y	5y	75y €
TOTALES	x + y	2x + y	x + 5y	60x + 75y

La función a minimizar son los costes de funcionamiento de las dos fábricas, expresados en miles de euros: $C(x, y) = 60x + 75y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3” $\rightarrow x + y \geq 6$, $2x + y \geq 8$, $x + 5y \geq 10$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 6$$

x	y = 6 - x
0	6
2	4
5	1
6	0

$$2x + y = 8$$

x	y = 8 - 2x
0	8
2	4
3	2
4	0

$$x + 5y = 10$$

x	y = $\frac{10 - x}{5}$
0	2
5	1
10	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



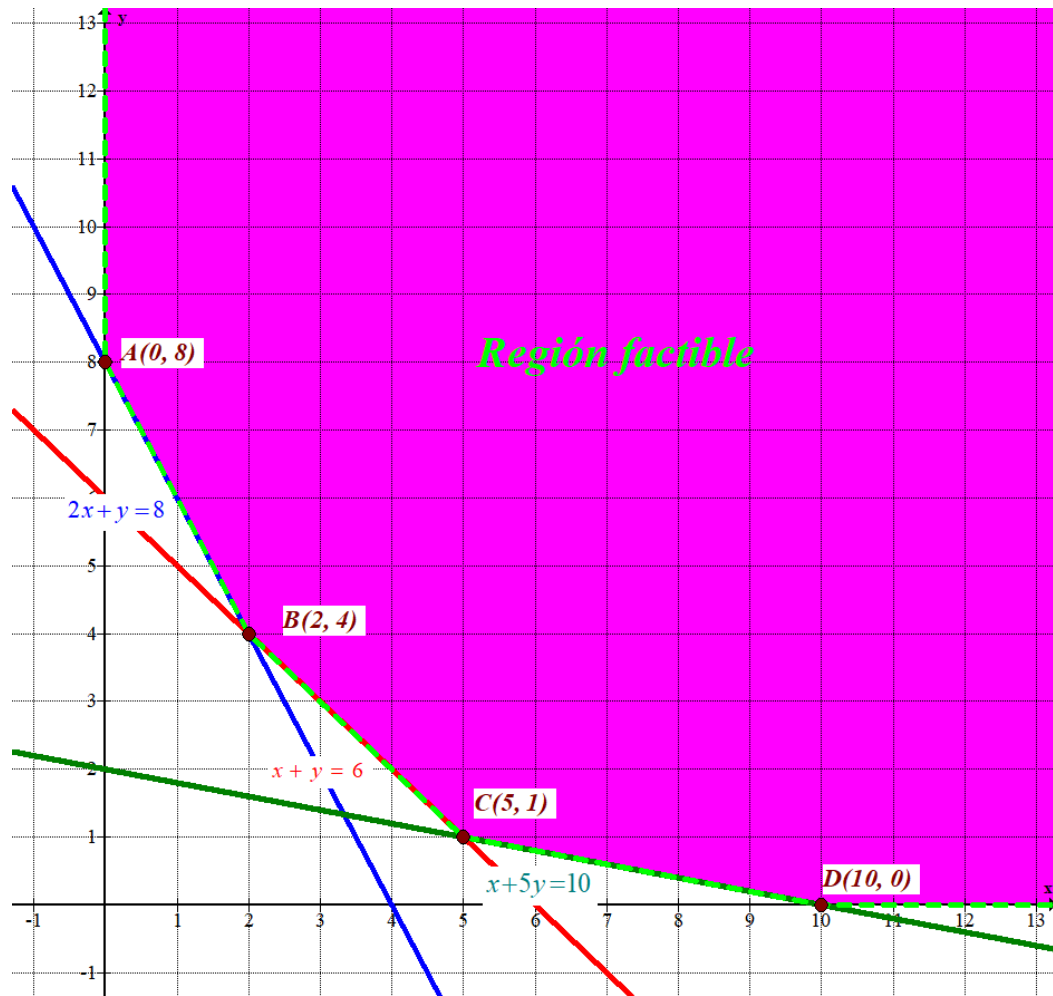
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada

por encima de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 6 \\ 20 + 10 \geq 8 \\ 10 + 50 \geq 10 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función costes $C(x, y) = 60x + 75y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(0, 8) \rightarrow C(0, 8) = 60 \cdot 0 + 75 \cdot 8 = 600$$

$$B(2, 4) \rightarrow C(2, 4) = 60 \cdot 2 + 75 \cdot 4 = 420$$

$$C(5, 1) \rightarrow C(5, 1) = 60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 375 \text{ Mínimo}$$

$$D(10, 0) \rightarrow C(10, 0) = 60 \cdot 10 + 75 \cdot 0 = 600$$

Los mínimos costes que se pueden obtener en la región factible son de 375 y se obtienen en el punto $C(5, 1)$.

Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

- b) Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

Llamamos “x” al número de espectadores menores de 5 años que han pagado el 20 % de la entrada, “y” al número de espectadores con edad entre 5 y 16 años que han pagado el 50% de la entrada, y “z” al número de espectadores mayores de 16 años y que han pagado la entrada completa.

“A un espectáculo circense acuden 500 espectadores” $\rightarrow x + y + z = 500$.

“La recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años han pagado el 20% de 9 €, es decir, $0.2 \cdot 9 = 1.8$ €, los que tienen entre 5 y 16 años han pagado el 50% de 9 €, es decir, $0.5 \cdot 9 = 4.5$, el resto ha pagado 9 €” $\rightarrow 1.8x + 4.5y + 9z = 2115$.

“El número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa” $\rightarrow x = 2z$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 1.8x + 4.5y + 9z = 2115 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 500 \\ 1.8 \cdot 2z + 4.5y + 9z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 500 \\ 4.5y + 12.6z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 500 - 3z \\ 4.5y + 12.6z = 2115 \end{array} \right\} \Rightarrow 4.5(500 - 3z) + 12.6z = 2115 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2250 - 13.5z + 12.6z = 2115 \Rightarrow -0.9z = -135 \Rightarrow \boxed{z = \frac{135}{0.9} = 150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 150 = 300} \\ \boxed{y = 500 - 3 \cdot 150 = 50} \end{array} \right.$$

Han pagado el 20 % de la entrada 300 espectadores, el 50% lo han pagado 50 espectadores y la entrada completa la han pagado 150 espectadores.

Problema 2, A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2x+4 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 3x+60-x^2 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. (0,75 puntos)
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. (1,5 puntos)
- c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. (0,5 puntos)
- d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX , la recta de ecuación $x=8$ y la recta de ecuación $x=9$. (0,75 puntos)

- a) La función en el intervalo $[0,4)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$. Es una función continua pues el denominador se anula para $x=-1$ que no pertenece al intervalo de definición.
- La función en el intervalo $(4,8)$ tiene la expresión $f(x) = 2x+4$. Es una función continua pues es una función lineal.
- La función en el intervalo $(8,9)$ tiene la expresión $f(x) = 3x+60-x^2$. Es una función continua pues es una función polinómica.
- Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

$$\left. \begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4 + 4 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 2x + 4 = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+4^2}{1+4} = \frac{17}{5} = 3.4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 12 \neq 3.4 = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} f(8) &= 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 60 - x^2 = 20 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} 2x + 4 = 2 \cdot 8 + 4 = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(8) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20$$

La función no es continua en $x=4$ y es continua en $x=8$.

La función es continua en $[0,4) \cup (4,9]$.

- b) Analizamos la evolución de la función en cada intervalo.

La función en el intervalo $[0,4)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$. Calculamos su derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-1-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} = 0.41 \in [0, 4) \\ -1 - \sqrt{2} = -2.41 \notin [0, 4) \end{cases}$$

- En el intervalo $[0, -1 + \sqrt{2})$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$$f'(0.1) = \frac{2 \cdot 0.1 - 1}{(1 + 0.1)^2} = \frac{-80}{121} < 0. \text{ La función decrece en } [0, -1 + \sqrt{2}).$$

- En el intervalo $(-1 + \sqrt{2}, 4)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{4} > 0$. La función crece en $(-1 + \sqrt{2}, 4)$.

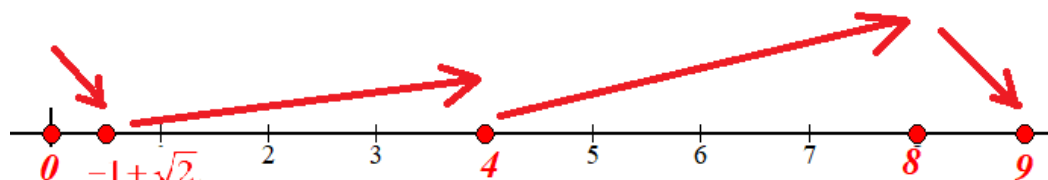
La función en el intervalo $(4, 8)$ tiene la expresión $f(x) = 2x + 4$ y su derivada es $f'(x) = 2 > 0$. La función es creciente en $(4, 8)$.

La función en el intervalo $(8, 9)$ tiene la expresión $f(x) = 3x + 60 - x^2$ y su derivada es $f'(x) = 3 - 2x$. Esta derivada se anula para $x = \frac{3}{2} = 1.5 \notin (8, 9)$. La derivada no cambia de signo en el intervalo $(8, 9)$.

Como $f'(8.5) = 3 - 2 \cdot 8.5 = -14 < 0$ la función es decreciente en $(8, 9)$.

La función es decreciente en $[0, -1 + \sqrt{2}) \cup (8, 9)$ y creciente en $(-1 + \sqrt{2}, 4) \cup (4, 8)$.

La función sigue el esquema siguiente.



- c) Por el estudio anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x = -1 + \sqrt{2}$ y un máximo local en $x = 8$.

Como $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + (-1 + \sqrt{2})^2}{1 - 1 + \sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2}$ y $f(8) = 3 \cdot 8 + 60 - 8^2 = 20$ las coordenadas del mínimo local son $(-1 + \sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2})$ y las del máximo local son $(8, 20)$.

- d) En el intervalo $(8, 9)$ la función tiene la expresión $f(x) = 3x + 60 - x^2$.

Comprobamos si la función corta el eje OX.

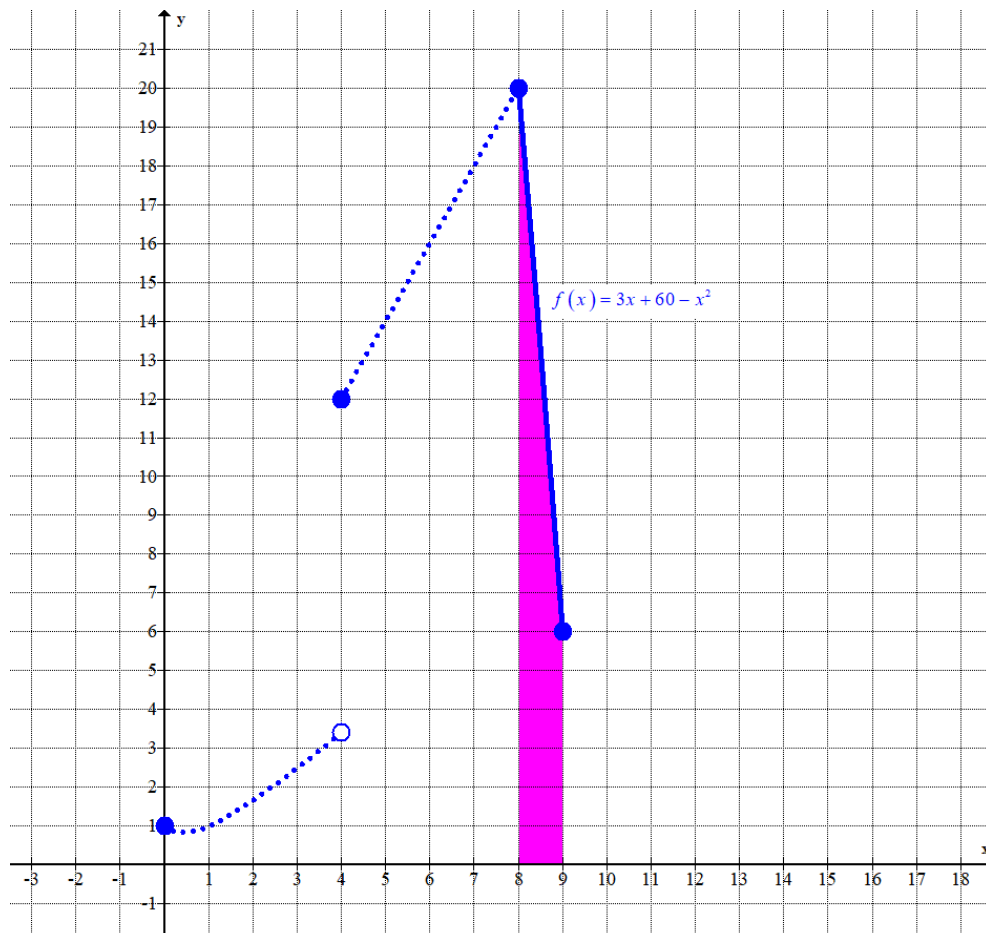
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3x + 60 - x^2 \\ \text{eje OX} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + 3x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)60}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{249}}{-2} = \begin{cases} \frac{-3 + \sqrt{249}}{-2} = -6.3 \notin (8,9) \\ \frac{-3 - \sqrt{249}}{-2} = 9.39 \notin (8,9) \end{cases}$$

La función no corta el eje OX en el intervalo (8, 9), por lo que el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x=8$ y la recta de ecuación $x=9$ es el valor absoluto de la integral definida entre 8 y 9 de la función.

$$\begin{aligned} \int_8^9 f(x) dx &= \int_8^9 3x + 60 - x^2 dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 60x - \frac{x^3}{3} \right]_8^9 = \\ &= \left[\frac{3}{2}9^2 + 60 \cdot 9 - \frac{9^3}{3} \right] - \left[\frac{3}{2}8^2 + 60 \cdot 8 - \frac{8^3}{3} \right] = \\ &= \frac{243}{2} + 540 - 243 - 96 - 480 + \frac{512}{3} = \boxed{\frac{79}{6} \approx 13.1667} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{79}{6} \approx 13.1667$ unidades cuadradas.



Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 2x - 8 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 = x \\ \frac{2-6}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$$

Punto de corte con el eje OY:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \\ \text{eje OY} &\rightarrow x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{9}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{9}{2}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \\ \text{eje OX} &\rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} B(-3, 0) \\ C(3, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: $A\left(0, \frac{9}{2}\right)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, 0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4(-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} = \frac{-20}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4 \cdot 4^2 - 36}{4^2 - 2 \cdot 4 - 8} = \frac{28}{0} = \infty$$

$x = 4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$y = 4$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x(x^2 - 2x - 8) - (2x - 2)(4x^2 - 36)}{(x^2 - 2x - 8)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{8x^3} - 16x^2 - 64x - \cancel{8x^3} + 72x + 8x^2 - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-8x^2 + 8x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-8(x^2 - x + 9)}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8(x^2 - x + 9)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-35}}{2} = \text{No existe}$$

La derivada nunca se anula por lo que estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de -2 y 4 (excluidos del dominio).

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{-8((-4)^2 - (-4) + 9)}{((-4)^2 - 2(-4) - 8)^2} = \frac{-28}{32} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-8(0^2 - 0 + 9)}{(0^2 - 2 \cdot 0 - 8)^2} = \frac{-9}{8} < 0$

. La función decrece en $(-2, 4)$.

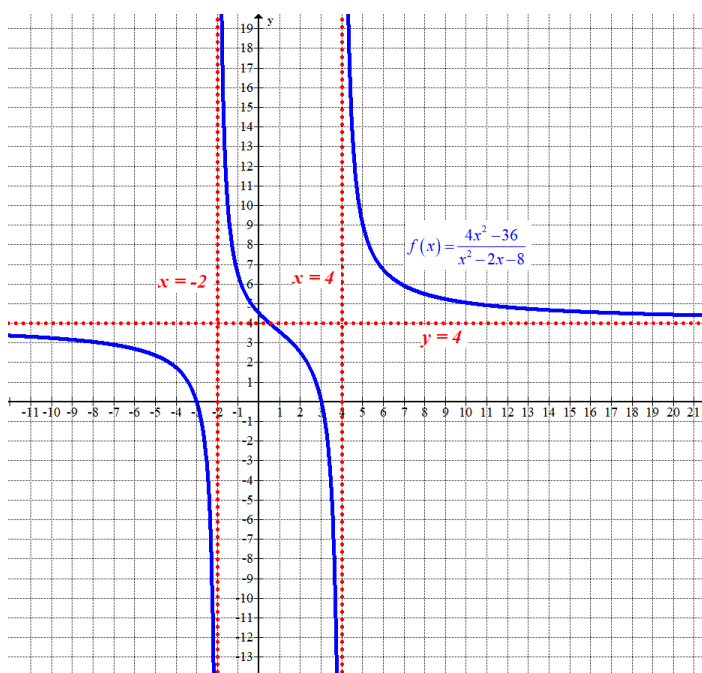
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$f'(5) = \frac{-8(5^2 - 5 + 9)}{(5^2 - 2 \cdot 5 - 8)^2} = \frac{-232}{49} < 0. \text{ La función decrece en } (4, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio.
Al ser siempre decreciente no presenta ni máximos ni mínimos locales.

d) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$
-4	1.75
-3	0
0	4.5
2	2.5
5	9.14
6	6.75



Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad.

(1 punto)

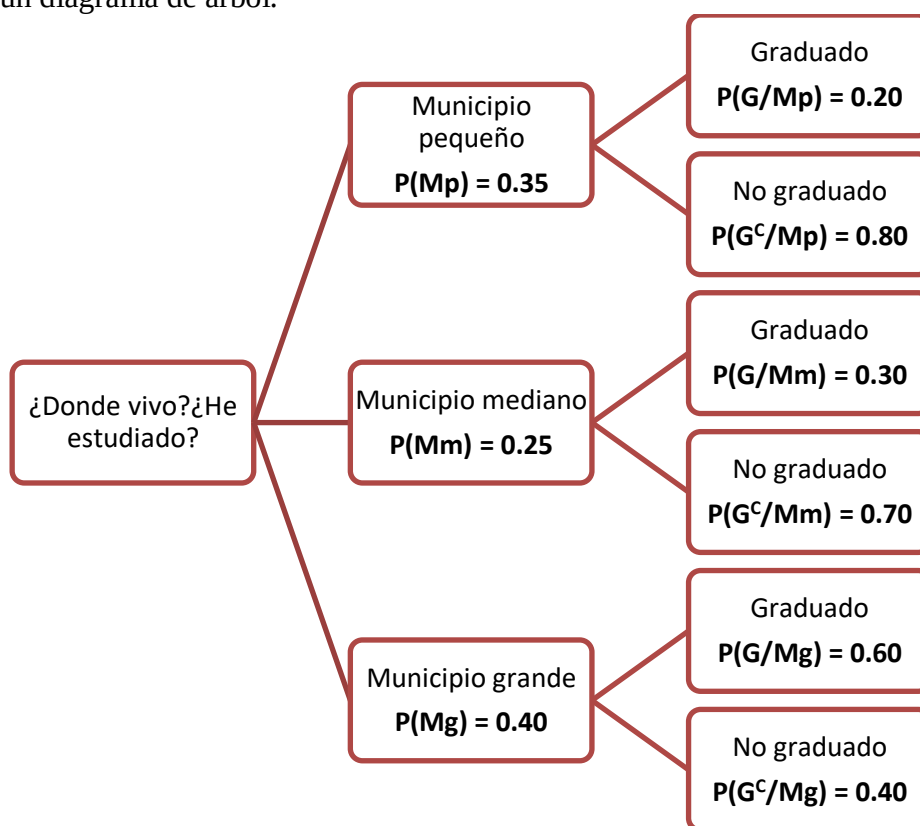
b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes.

(1 punto)

c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes".

(1 punto)

Construimos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(Mp)P(G/Mp) + P(Mm)P(G/Mm) + P(Mg)P(G/Mg) =$$

$$= 0.35 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.6 = \boxed{0.385}$$

b) Nos piden calcular $P(Mp^c / G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(Mp^c / G) &= 1 - P(Mp / G) = 1 - \frac{P(Mp \cap G)}{P(G)} = \\ &= 1 - \frac{P(Mp)P(G/Mp)}{P(G)} = 1 - \frac{0.35 \cdot 0.2}{0.385} = \boxed{\frac{9}{11} \approx 0.8182} \end{aligned}$$

Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes es de $\frac{9}{11} \approx 0.8182$.

- c) El suceso "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" es el suceso $Mg^C = Mm \cup Mp$.

El suceso "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" es el suceso $G \cup Mp^C = G \cup Mm \cup Mg$.

La intersección de los dos sucesos es $(Mm \cup Mp) \cap (G \cup Mm \cup Mg) = Mm \cup (Mp \cap G)$.

La intersección es el suceso "el seleccionado es de un pueblo mediano o es de un pueblo pequeño y está graduado".

$$P(Mm \cup (Mp \cap G)) = P(Mm) + P(Mp \cap G) =$$

$$= P(Mm) + P(Mp)P(G / Mp) = 0.25 + 0.35 \cdot 0.2 = 0.32$$

La probabilidad pedida tiene un valor de 0.32.

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado c)

Representamos el suceso "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" de color rojo.

	Graduado	No graduado	
Pueblo habitantes < 10000			35%
Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$			25%
Pueblo $50000 < \text{habitantes}$			
			100%

Representamos el suceso "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes" de color azul.

	Graduado	No graduado	
Pueblo habitantes < 10000			
Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$			25%
Pueblo $50000 < \text{habitantes}$			40%
			100%

La intersección de los sucesos lo coloreamos de rosa.

	Graduado	No graduado	
Pueblo habitantes < 10000	$0.20 \cdot 35 = 7\%$		35%
Pueblo $10001 \leq \text{hab} \leq 50000$			25%
Pueblo $50000 < \text{habitantes}$			40%
			100%

La probabilidad de la intersección de los dos sucesos es $7\% + 25\% = 32\%$.

La La probabilidad de la intersección de los dos sucesos es 0.32.



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: JUNY 2025 (reserva)	CONVOCATORIA: JUNIO 2025 (reserva)
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas.. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. En época de regalos navideños, con 225 euros se pueden comprar dos libros, tres plumas estilográficas y un reloj inteligente. Sin embargo, en época de rebajas nos descuentan 5 euros de cada artículo, lo que nos permite comprar un libro más con ese mismo dinero. Después, en febrero, pasada la época de rebajas, cada artículo cuesta 5 euros más que en la época navideña, de manera que, con ese mismo dinero, podemos comprar tres plumas y tres libros, pero ningún reloj inteligente. ¿Cuál es el precio del libro, de la pluma estilográfica y del reloj inteligente en época navideña?

(Planteamiento correcto, 1,5 puntos - Resolución correcta 2 puntos)

Problema 1. B. Un creador de contenido desea invertir en publicidad hasta 10 000 euros. Ha considerado dos empresas, A y B. La empresa de publicidad A es más agresiva, y garantiza un incremento anual en número de seguidores del 10% de lo que se invierte; la B es más tradicional y el incremento en número de seguidores que garantiza es del 7% de lo que se invierte. Así pues, el creador desea invertir al menos 2.000 euros en la empresa B y un máximo de 6.000 euros en la A, invirtiendo siempre en la A al menos lo invertido en la B.

- ¿Cuánto dinero tiene que asignar a cada empresa para que el incremento de seguidores sea máximo? (3 puntos)
- ¿Cuál es dicho incremento de seguidores máximo? (0,5 puntos)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. La temperatura, T , de un motor depende de las revoluciones, r , del mismo de forma que entre 0 y 100 revoluciones evoluciona siguiendo una tendencia lineal tal que: $T(r) = \frac{r}{4} + 25$. Sin embargo, a partir de 100 revoluciones la temperatura depende del cuadrado de las revoluciones, de forma que: $T(r) = Ar^2 + B$, siendo A y B números reales.

- Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r = 1.600$ vale 4, determina A y B . (1,5 puntos)

- b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones? Justifica la respuesta. (1 punto)
- c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5m - 0.15m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos. (1 punto)

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. Una prueba diagnóstica para detectar la artritis reumatoide da positiva en el 96% de los casos cuando se tiene la enfermedad, y da negativa en el 94% de los casos cuando no se tiene la enfermedad. Entre los habitantes de un cierto pueblo, se sabe que uno de cada ciento cuarenta y cinco tiene la enfermedad sin saberlo. Se escoge al azar un habitante de este pueblo y se le aplica la prueba.

- a) Calcula la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide y la prueba haya dado negativa. (1 punto)
- b) Si el resultado de la prueba ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide? (1 punto)
- c) Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea correcto. (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. En época de regalos navideños, con 225 euros se pueden comprar dos libros, tres plumas estilográficas y un reloj inteligente. Sin embargo, en época de rebajas nos descuentan 5 euros de cada artículo, lo que nos permite comprar un libro más con ese mismo dinero. Después, en febrero, pasada la época de rebajas, cada artículo cuesta 5 euros más que en la época navideña, de manera que, con ese mismo dinero, podemos comprar tres plumas y tres libros, pero ningún reloj inteligente. ¿Cuál es el precio del libro, de la pluma estilográfica y del reloj inteligente en época navideña?

Llamamos “x” al precio de un libro, “y” al precio de una pluma estilográfica, y “z” al precio de un reloj inteligente.

“Con 225 euros se pueden comprar dos libros, tres plumas estilográficas y un reloj inteligente”
 $\rightarrow 2x + 3y + z = 225$.

“En época de rebajas nos descuentan 5 euros de cada artículo, lo que nos permite comprar un libro más con ese mismo dinero” $\rightarrow 3(x - 5) + 3(y - 5) + z - 5 = 225$.

“Pasada la época de rebajas, cada artículo cuesta 5 euros más que en la época navideña, de manera que, con ese mismo dinero, podemos comprar tres plumas y tres libros, pero ningún reloj inteligente” $\rightarrow 3(x + 5) + 3(y + 5) = 225$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 225 \\ 3(x - 5) + 3(y - 5) + z - 5 = 225 \\ 3(x + 5) + 3(y + 5) = 225 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 225 \\ 3x - 15 + 3y - 15 + z - 5 = 225 \\ 3x + 15 + 3y + 15 = 225 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 225 \\ \Rightarrow 3x + 3y + z = 260 \\ 3x + 3y = 195 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 225 - 2x - 3y \\ 3x + 3y + z = 260 \\ x + y = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 225 - 2x - 3y = 260 \\ x + y = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 35 \\ x + y = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow 35 + y = 65 \Rightarrow y = 30 \Rightarrow z = 225 - 2 \cdot 35 - 3 \cdot 30 = 65$$

En época de regalos navideños un libro cuesta 35 euros, una pluma estilográfica cuesta 30 € y un reloj inteligente cuesta 65 euros.

Problema 1. B. Un creador de contenido desea invertir en publicidad hasta 10 000 euros. Ha considerado dos empresas, A y B. La empresa de publicidad A es más agresiva, y garantiza un incremento anual en número de seguidores del 10% de lo que se invierte; la B es más tradicional y el incremento en número de seguidores que garantiza es del 7% de lo que se invierte. Así pues, el creador desea invertir al menos 2.000 euros en la empresa B y un máximo de 6.000 euros en la A, invirtiendo siempre en la A al menos lo invertido en la B.

a) ¿Cuánto dinero tiene que asignar a cada empresa para que el incremento de seguidores sea máximo?

(3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho incremento de seguidores máximo?

(0,5 puntos)

a) Llamamos “x” al dinero asignado a la empresa A e “y” al dinero asignado a la empresa B.

La función a maximizar es el incremento de seguidores: $I(x, y) = 0.1x + 0.07y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“Un creador de contenido desea invertir en publicidad hasta 10 000 euros” $\rightarrow x + y \leq 10000$.

“El creador desea invertir al menos 2.000 euros en la empresa B y un máximo de 6.000 euros en la A, invirtiendo siempre en la A al menos lo invertido en la B” $\rightarrow$

$y \geq 3000, x \leq 6000, x \geq y$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 10000$$

$$y = 3000$$

x	y = 10000 - x
0	10000
5000	5000
6000	4000
10000	0

x	y = 3000
0	3000
3000	3000
6000	3000
7000	3000

$$x = 6000$$

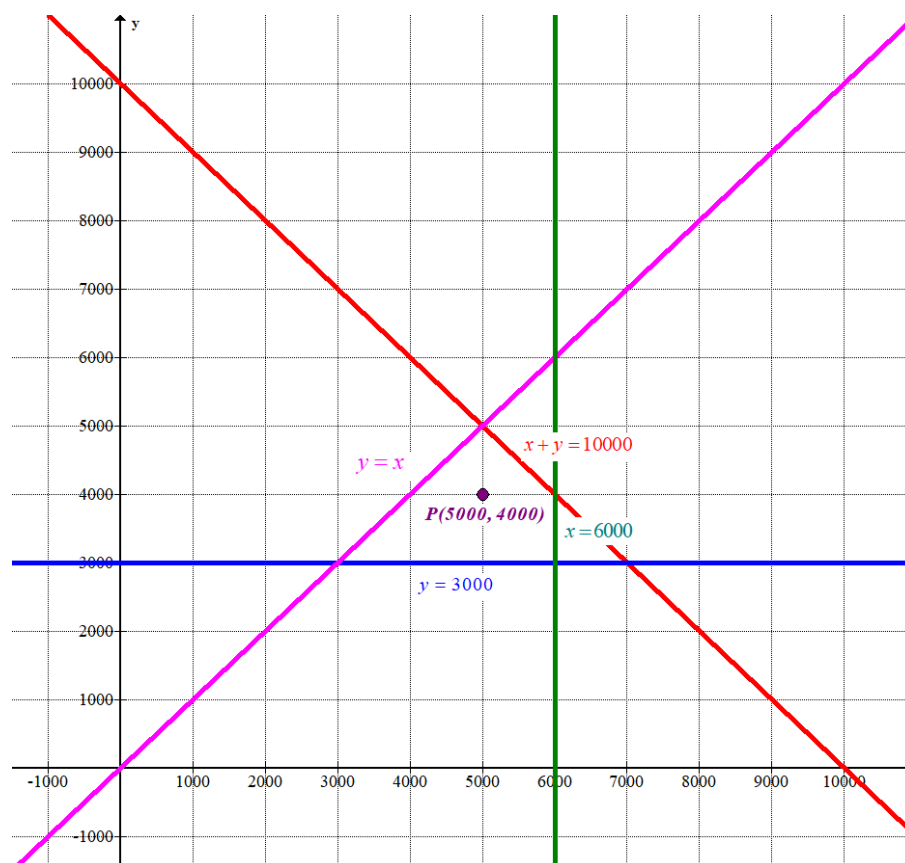
$$y = x$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x = 6000	y
6000	0
6000	3000
6000	4000

x	y = x
0	0
3000	3000
5000	5000
6000	6000

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

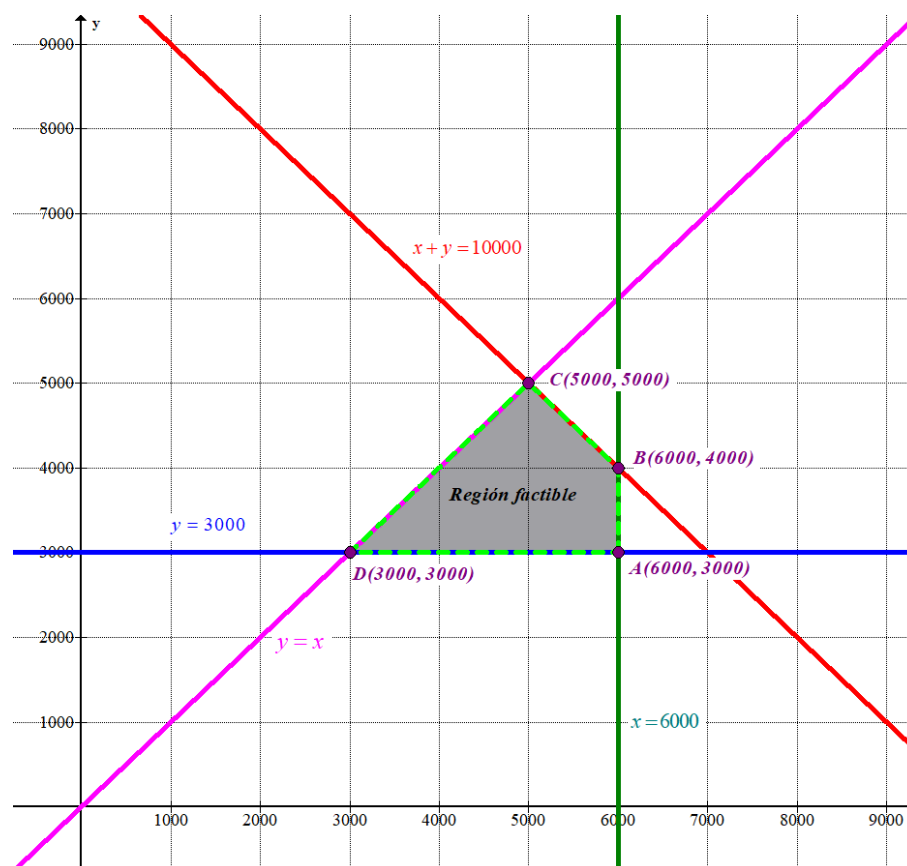
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 6000 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de la recta azul, por debajo de las rectas rosa y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto $P(5000, 4000)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5000 + 4000 \leq 10000 \\ 4000 \geq 3000 \\ 5000 \leq 6000 \\ 5000 \geq 4000 \\ 5000 \geq 0; 4000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función $I(x, y) = 0.1x + 0.07y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(6000, 3000) \rightarrow I(6000, 3000) = 0.1 \cdot 6000 + 0.07 \cdot 3000 = 810$$

$$B(6000, 4000) \rightarrow I(6000, 4000) = 0.1 \cdot 6000 + 0.07 \cdot 4000 = 880 \text{ Máximo}$$

$$C(5000, 5000) \rightarrow I(5000, 5000) = 0.1 \cdot 5000 + 0.07 \cdot 5000 = 850$$

$$D(3000, 3000) \rightarrow I(3000, 3000) = 0.1 \cdot 3000 + 0.07 \cdot 3000 = 510$$

El máximo incremento de seguidores que se puede obtener en la región factible son de 880 y se obtiene en el punto B(6000, 4000).

El máximo incremento de seguidores que se puede obtener es de 880 seguidores y se consiguen con la inversión de 6000 euros en la empresa A y 4000 en la empresa B.

- b) El máximo incremento de seguidores que se puede obtener cumpliendo con las restricciones planteadas es de 880 seguidores.

Problema 2. A. La temperatura, T , de un motor depende de las revoluciones, r , del mismo de forma que entre 0 y 100 revoluciones evoluciona siguiendo una tendencia lineal tal que: $T(r) = \frac{r}{4} + 25$. Sin embargo, a partir de 100 revoluciones la temperatura depende del cuadrado de las revoluciones, de forma que: $T(r) = Ar^2 + B$, siendo A y B números reales.

- a) Teniendo en cuenta que la función debe ser continua y que la derivada de $T(r)$ en $r = 1.600$ vale 4, determina A y B . (1,5 puntos)
- b) ¿Existen máximos o mínimos para la temperatura en función de las revoluciones? Justifica la respuesta. (1 punto)
- c) Un operario utiliza el motor durante 30 minutos de forma que en el minuto m las revoluciones que tiene el motor vienen dadas por la expresión $r(m) = 5m - 0.15m^2$. Determina en qué minutos las revoluciones son máximas y mínimas, el valor de estas y el valor de la temperatura en esos momentos. (1 punto)

a) La función tiene la siguiente expresión.

$$T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ Ar^2 + B & \text{si } r > 100 \end{cases}$$

Para que la función sea continua debe serlo en $r = 100$ y para ello se debe cumplir que

$$\lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) = \lim_{r \rightarrow 100^+} T(r) = T(100).$$

$$\left. \begin{aligned} T(100) &= \frac{100}{4} + 25 = 50 \\ \lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) &= \lim_{r \rightarrow 100^-} \frac{r}{4} + 25 = 50 \\ \lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) &= \lim_{r \rightarrow 100^-} Ar^2 + B = A \cdot 100^2 + B = 10000A + B \\ \lim_{r \rightarrow 100^-} T(r) &= \lim_{r \rightarrow 100^+} T(r) = T(100) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{50 = 10000A + B}$$

También debe cumplirse que la derivada de $T(r)$ en $r = 1.600$ valga 4.

$$\left. \begin{aligned} T'(r) &= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ 2Ar & \text{si } r > 100 \end{cases} \\ T'(1600) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 = 2 \cdot 1600A \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3200} = \frac{1}{800}}$$

Sustituimos el valor obtenido en la primera ecuación obtenida.

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{800} \\ 50 &= 10000A + B \end{aligned} \right\} \Rightarrow 50 = \frac{10000}{800} + B \Rightarrow \boxed{B = 50 - \frac{25}{2} = \frac{75}{2}}$$

Los valores buscados son $A = \frac{1}{800}$ y $B = \frac{75}{2}$.

b) La función queda $T(r) = \begin{cases} \frac{r}{4} + 25 & \text{si } 0 \leq r \leq 100 \\ \frac{r^2}{800} + \frac{75}{2} & \text{si } r > 100 \end{cases}.$

La función en el intervalo $[0, 100)$ es $T(r) = \frac{r}{4} + 25$ cuya derivada es $T'(r) = \frac{1}{4} > 0$ que es siempre positiva. La función es creciente en el intervalo $[0, 100)$.

La función en el intervalo $(100, +\infty)$ es $T(r) = \frac{r^2}{800} + \frac{75}{2}$ cuya derivada es $T'(r) = \frac{2r}{800} = \frac{r}{400}$ que es siempre positiva en el intervalo $(100, +\infty)$. La función es creciente en el intervalo $(100, +\infty)$.

Como la función es continua y siempre es creciente no presenta máximos. Tiene su valor mínimo para $r = 0$ siendo este valor mínimo de $T(0) = \frac{0}{4} + 25 = 25$.

c) Derivamos la función $r(m) = 5m - 0.15m^2$ y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} r'(m) = 5 - 0.3m \\ r'(m) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 - 0.3m = 0 \Rightarrow 0.3m = 5 \Rightarrow \boxed{m = \frac{5}{0.3} = \frac{50}{3}}$$

Obtenemos el signo de la segunda derivada para $m = \frac{50}{3}$.

$$r''(m) = -0.3 \Rightarrow r''\left(\frac{50}{3}\right) = -0.3 < 0$$

Las revoluciones son máximas en el minuto $\frac{50}{3} \approx 16.6667$.

Valoramos las revoluciones en el minuto 0, en el minuto $\frac{50}{3}$ y en el minuto 30.

$$\left. \begin{array}{l} r(0) = 5 \cdot 0 - 0.15 \cdot 0^2 = 0 \\ r\left(\frac{50}{3}\right) = 5 \cdot \frac{50}{3} - 0.15 \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{125}{3} \approx 41.66 \\ r(30) = 5 \cdot 30 - 0.15 \cdot 30^2 = 15 \end{array} \right\}$$

Las revoluciones máximas son $\frac{125}{3} \approx 41.6667$ y se consiguen en el minuto $\frac{50}{3} \approx 16.667$.

Las revoluciones mínimas son 0 y se consiguen en el minuto 0.

En el minuto $\frac{50}{3}$ se alcanzan unas revoluciones de $\frac{125}{3} \approx 41.6667$. Para estas revoluciones la

temperatura es $T\left(\frac{125}{3}\right) = \frac{125/3}{4} + 25 = \frac{425}{6} \approx 35.4167$.

En el minuto 0 las revoluciones son 0 y la temperatura es 25.

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

Punto de corte con el eje OY:

$$\left. f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1-0^2} - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

eje OY $\rightarrow x = 0$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x \right\} \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} - x = 0 \Rightarrow \frac{x-x+x^3}{1-x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

eje OX $\rightarrow y = 0$

El único punto de corte con los ejes es $A(0,0)$.

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{-1}{1-(-1)^2} - (-1) = \frac{-1}{0} + 1 = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{1}{1-1^2} - 1 = \frac{1}{0} - 1 = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

- c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} - x = \frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - (-2x)x^3}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{(3-x^2)x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(3-x^2)x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos (puntos críticos) y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{(3-(-2)^2)(-2)^2}{(1-(-2)^2)^2} = \frac{-4}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, -1)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale

$$f'(-1.5) = \frac{(3-(-1.5)^2)(-1.5)^2}{(1-(-1.5)^2)^2} = \frac{27}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\sqrt{3}, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(3-(-0.5)^2)(-0.5)^2}{(1-(-0.5)^2)^2} = \frac{121}{36} > 0. \text{ La función crece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{(3-0.5^2)0.5^2}{(1-0.5^2)^2} = \frac{121}{36} > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, \sqrt{3})$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{(3-1.5^2)1.5^2}{(1-1.5^2)^2} = \frac{27}{25} > 0$

. La función crece en $(1, \sqrt{3})$.

- En el intervalo $(\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{(3-2^2)2^2}{(1-2^2)^2} = \frac{-4}{9} < 0$.

La función decrece en $(\sqrt{3}, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y crece en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

La función decrece antes de $x = -\sqrt{3}$ y crece después. La función tiene un mínimo local en

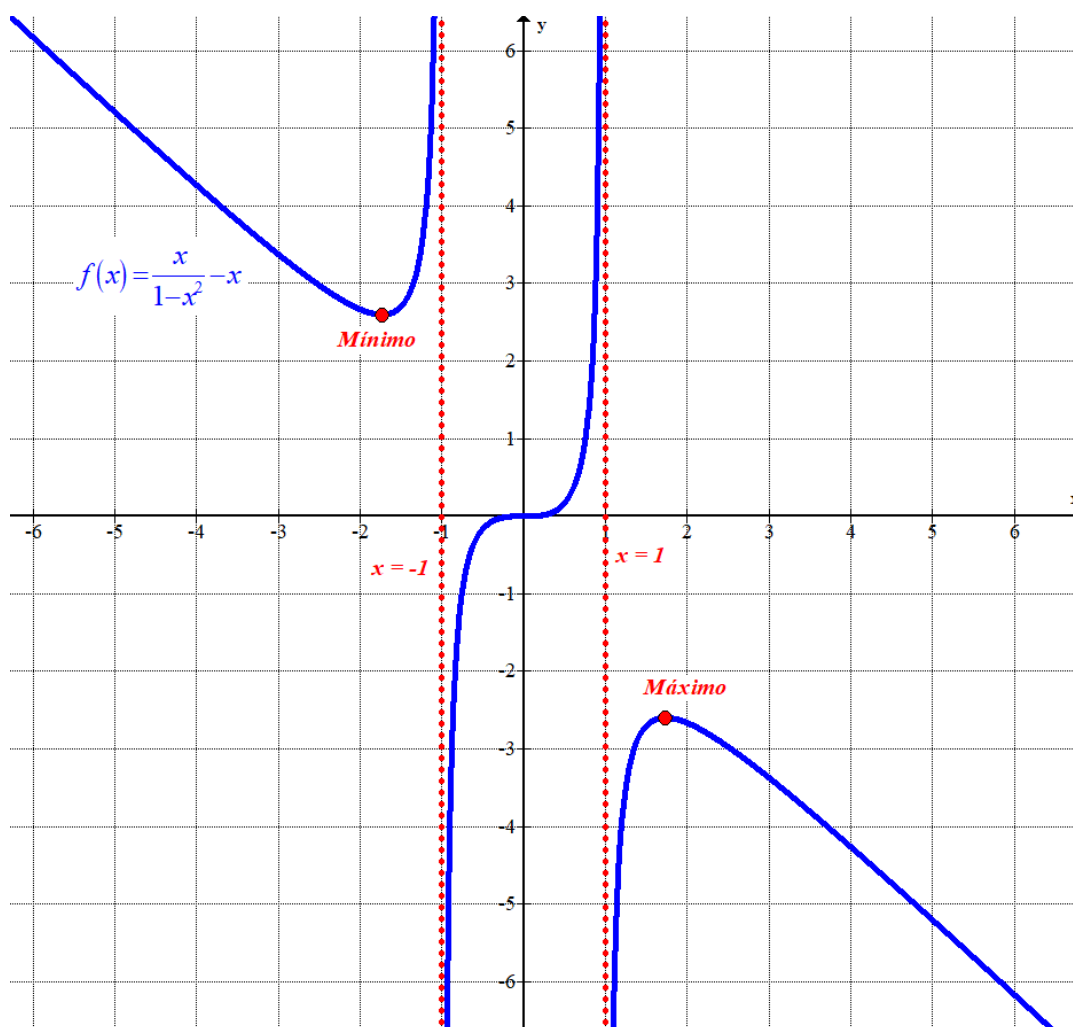
$x = -\sqrt{3}$. Como $f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-(-\sqrt{3})^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{1-3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ las coordenadas del mínimo local son

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

La función crece antes de $x = \sqrt{3}$ y decrece después. La función tiene un máximo local en $x = \sqrt{3}$. Como $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{1-3} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ las coordenadas del máximo local son $\left(\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$.

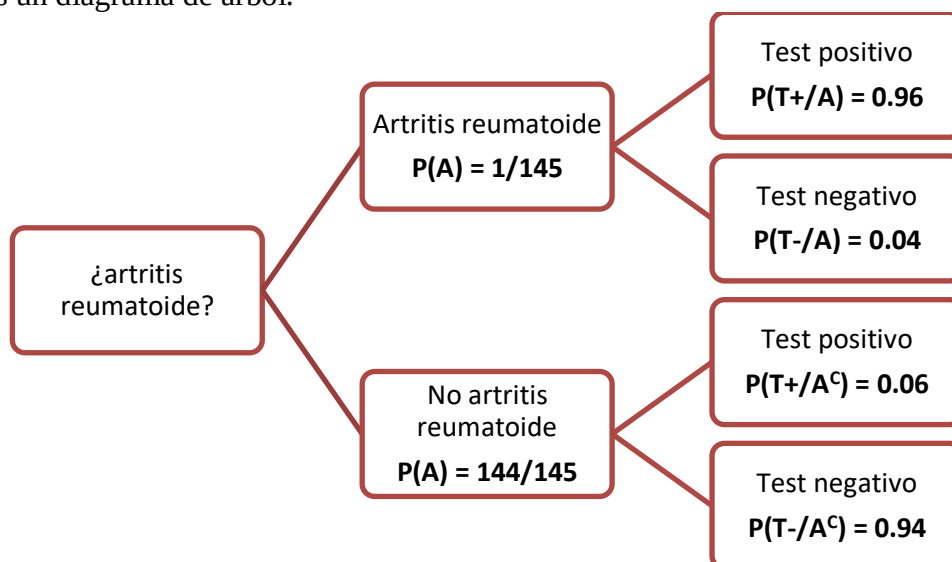
d) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
-3	3.375
-2	2.66
-0.5	-0.16
0	0
0.5	0.16
2	-2.66
3	-3.375



- Problema 3.** Una prueba diagnóstica para detectar la artritis reumatoide da positiva en el 96% de los casos cuando se tiene la enfermedad, y da negativa en el 94% de los casos cuando no se tiene la enfermedad. Entre los habitantes de un cierto pueblo, se sabe que uno de cada ciento cuarenta y cinco tiene la enfermedad sin saberlo. Se escoge al azar un habitante de este pueblo y se le aplica la prueba.
- Calcula la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide y la prueba haya dado negativa. (1 punto)
 - Si el resultado de la prueba ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el habitante seleccionado padezca artritis reumatoide? (1 punto)
 - Calcula la probabilidad de que el resultado de la prueba sea correcto. (1 punto)

Construimos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A \cap T -)$.

$$P(A \cap T -) = P(A)P(T - / A) = \frac{1}{145} \cdot 0.04 = \frac{1}{3625} \approx 0.000276$$

- b) Nos piden calcular $P(A / T +)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(A / T +) &= \frac{P(A / T +)}{P(T +)} = \frac{P(A)P(T + / A)}{P(A)P(T + / A) + P(A^c)P(T + / A^c)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{145} \cdot 0.96}{\frac{1}{145} \cdot 0.96 + \frac{144}{145} \cdot 0.06} = \boxed{0.1}
 \end{aligned}$$

- c) Para que el resultado de la prueba sea correcto debe dar el test positivo cuando la persona tiene artritis reumatoide o dar negativo cuando la persona no tiene artritis reumatoide.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Resultado correcto}) &= P(A \cap T +) + P(A^c \cap T -) = P(A)P(T + / A) + \\
 &+ P(A^c)P(T - / A^c) = \frac{1}{145} \cdot 0.96 + \frac{144}{145} \cdot 0.94 = \boxed{\frac{3408}{3625} \approx 0.9401}
 \end{aligned}$$



PAU Julio 2024 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana
COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA
UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

- a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)
 b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Analiza si la matriz $AB - 2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)
 b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (4 puntos)

- c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$.

(3 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
 b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
 c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
 d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
 e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

- a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)
- b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios? ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)
- c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)
- b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)
- c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

- a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)
- b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)
- c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

- a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)
 b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

a) Llamamos x = número de bolígrafos verdes sencillos e y = número de bolígrafos verdes sofisticados.

Realizamos una tabla.

	Unidades de tinta	Unidades de plástico	Ganancias
Nº bolis sencillos (x)	x	x	$0.5x$
Nº bolis sofisticados (y)	y	$1.5y$	$0.7y$
TOTALES	$x + y$	$x + 1.5y$	$0.5x + 0.7y$

La función objetivo que deseamos maximizar son las ganancias $G(x, y) = 0.5x + 0.7y$.

Las restricciones son:

“Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico” $\rightarrow x + y \leq 2500$; $x + 1.5y \leq 3000$

“No se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos” $\rightarrow x \leq 2000$.

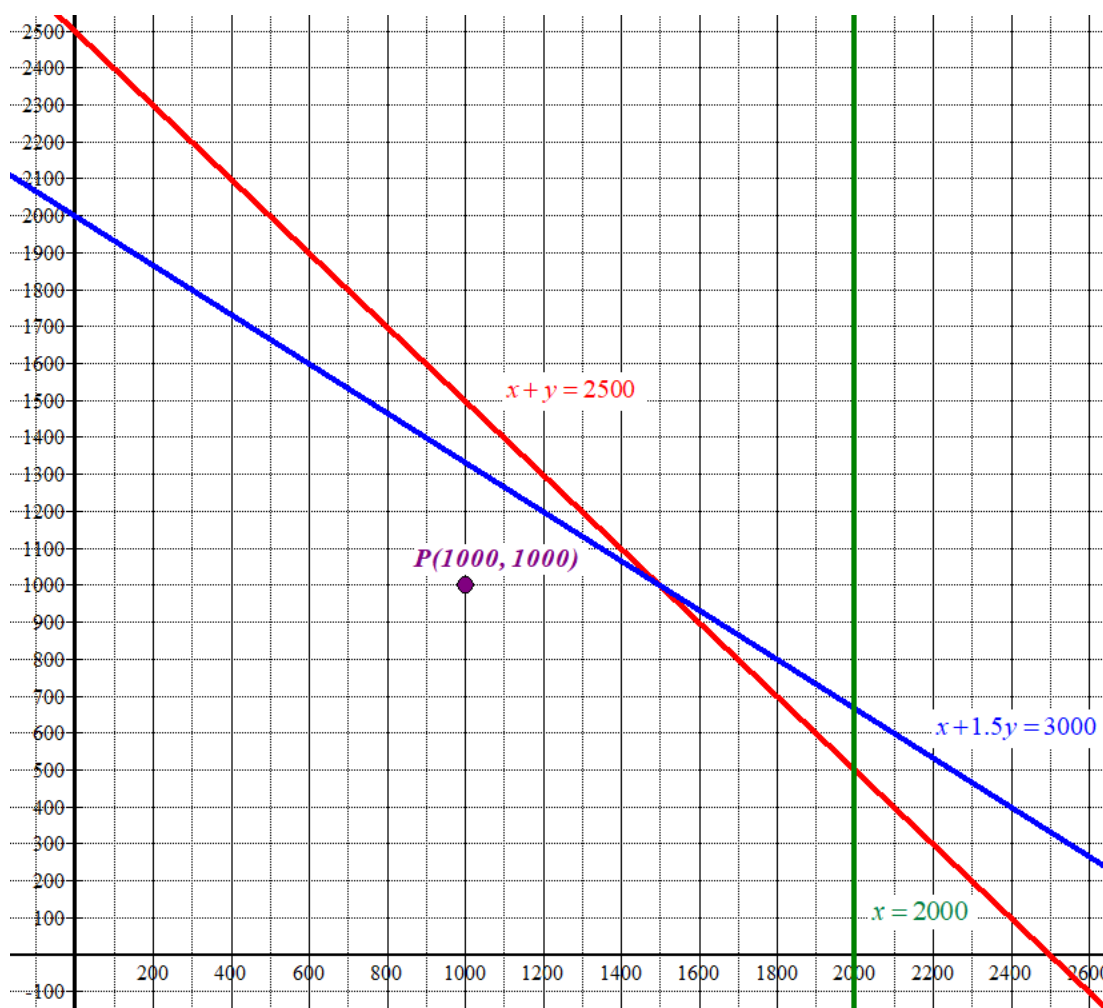
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 2500 \\ x + 1.5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 2500$		$x + 1.5y = 3000$		$x = 2000$	$x \geq 0; y \geq 0$	
x	$y = 2500 - x$	x	$y = \frac{3000 - x}{1.5}$	$x = 2000$	y	Primer cuadrante
0	2500	0	2000	2000	0	
1500	1000	1500	1000	2000	500	
2000	500	3000	0	2000	1000	
2500	0					



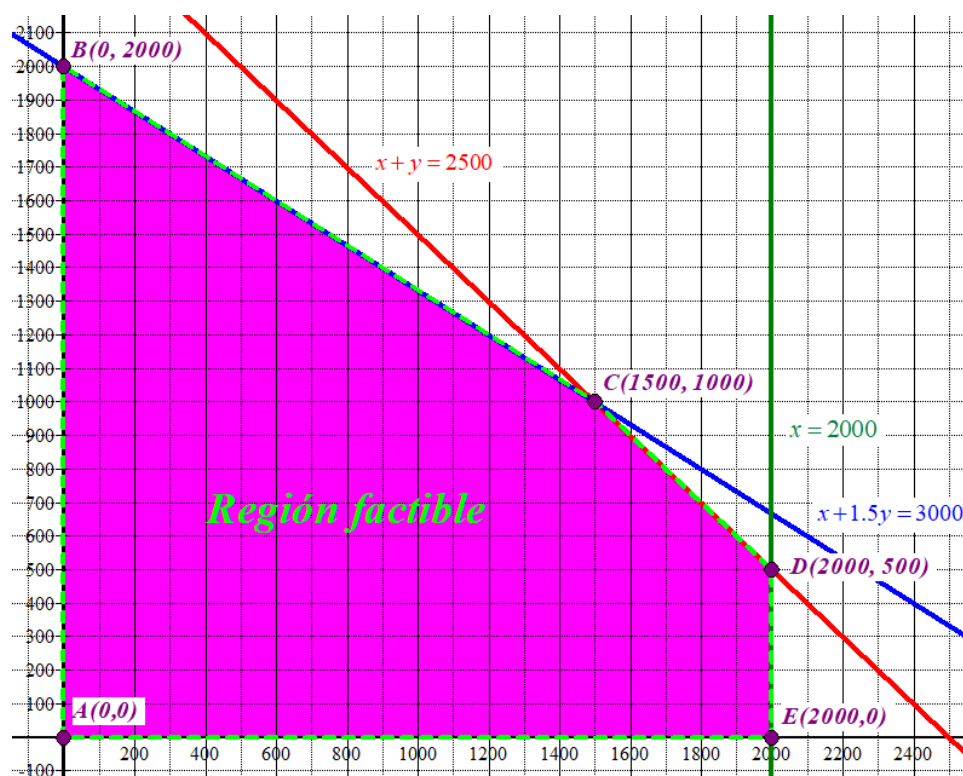
Como las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 2500 \\ x + 1.5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde.}$$

Comprobamos que el punto $P(1000, 1000)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1000 + 1000 \leq 2500 \\ 1000 + 1.5 \cdot 1000 \leq 3000 \\ 1000 \leq 2000 \\ 1000 \geq 0; 1000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son $A(0, 0)$; $B(0, 2000)$, $C(1500, 1000)$, $D(2000, 500)$ y $E(2000, 0)$.

Valoramos la función objetivo ganancias $G(x, y) = 0.5x + 0.7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow G(0, 0) = 0$$

$$B(0, 2000) \rightarrow G(0, 2000) = 0.5 \cdot 0 + 0.7 \cdot 2000 = 1400$$

$$C(1500, 1000) \rightarrow G(1500, 1000) = 0.5 \cdot 1500 + 0.7 \cdot 1000 = 1450 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(2000, 500) \rightarrow G(2000, 500) = 0.5 \cdot 2000 + 0.7 \cdot 500 = 1350$$

$$E(2000, 0) \rightarrow G(2000, 0) = 0.5 \cdot 2000 + 0.7 \cdot 0 = 1000$$

El valor máximo de la función ganancias se obtiene en el vértice $C(1500, 1000)$. Se deben producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados para maximizar las ganancias.

b) Las ganancias máximas que se pueden obtener son 1450 €.

Problema 2. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Analiza si la matriz $AB - 2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)
- b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (4 puntos)
- c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$. (3 puntos)

- a) Obtenemos la expresión de la matriz $AB - 2I$.

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4+6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si su determinante es nulo o no.

$$|AB - 2I| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 - 0 + 18 = 30 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo la matriz $AB - 2I$ es invertible.

- b) Despejamos X en la ecuación matricial $A + 2XC = B^t$.

$$A + 2XC = B^t \Rightarrow 2XC = B^t - A \Rightarrow XC = \frac{1}{2}(B^t - A) \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1}$$

Hallamos la expresión de X .

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A)C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4-3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

c) Veamos cuando se cumple $CD = DC$.

$$\begin{aligned} CD = DC &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases} \Rightarrow -3+z=1 \Rightarrow \boxed{z=4} \end{aligned}$$

Se cumple lo pedido para $z = 4$.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(3x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{+\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

Punto de corte con el eje OY:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} \\ \text{eje OY} \rightarrow x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = 1 \Rightarrow \boxed{A(0,1)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} \\ \text{eje OX} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{1 = 0} \text{ ¡Imposible!} \Rightarrow \text{Sin punto de corte}$$

El único punto de corte con los ejes es A(0, 1).

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}/3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}/3} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{\left(3 \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 \right)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical.

¿ $x = \frac{+\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow +\sqrt{3}/3} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\sqrt{3}/3} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{\left(3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - 1 \right)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = \frac{+\sqrt{3}}{3}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0(3x^2 - 1)^2 - 2(3x^2 - 1)(6x)}{(3x^2 - 1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (excluidos del dominio) y 0 (punto crítico).

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-12(-1)}{(3(-1)^2 - 1)^3} = \frac{12}{8} > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{-12(-0.5)}{(3(-0.5)^2 - 1)^3} = -384 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right).$$

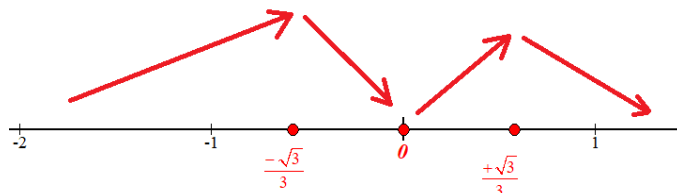
- En el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{-12(0.5)}{(3(0.5)^2 - 1)^3} = 384 > 0$

. La función crece en $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-12(1)}{(3(1)^2 - 1)^3} = \frac{-12}{8} < 0$.

La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



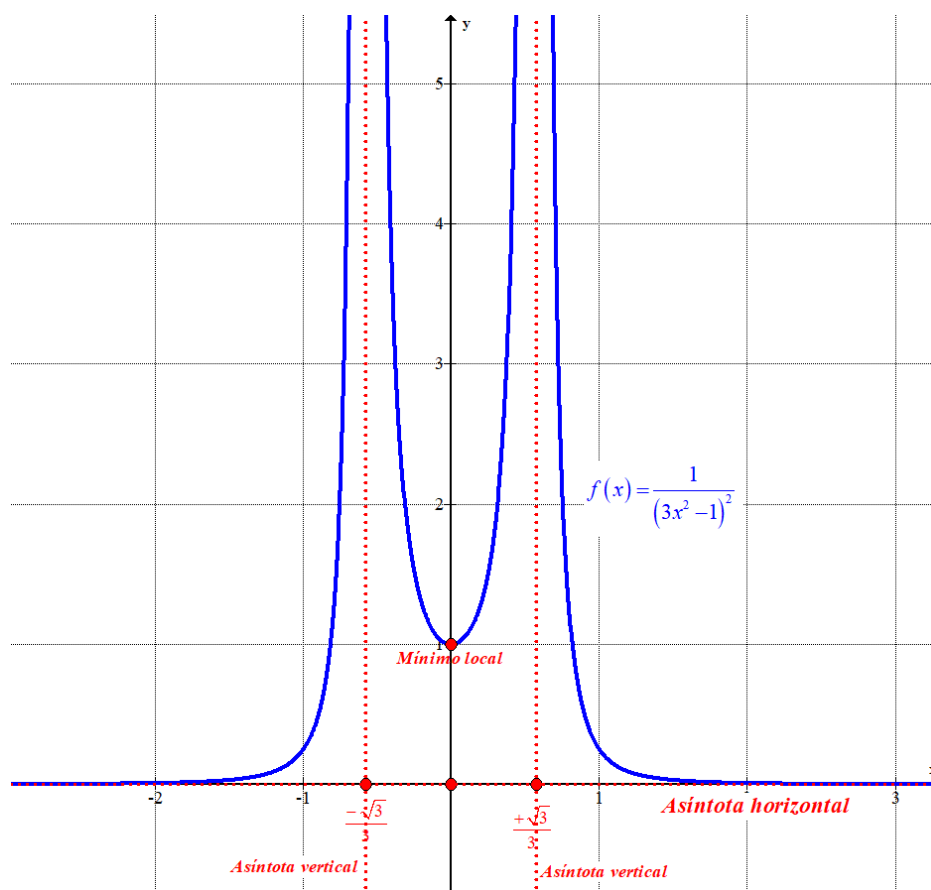
La función crece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

d) Observando el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x=0$. Como $f(0)=1$, las coordenadas del mínimo local son $A(0,1)$.

Los valores $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $+\frac{\sqrt{3}}{3}$ no pertenecen al dominio. No hay máximo local.

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$
-1	0.25
-0.5	16
0	1
0.5	16
1	0.25



Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

- a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)
- b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)
- c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

a) Derivamos la función ingresos $I(x) = -x^2 + 60x + 100$ y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} I'(x) = -2x + 60 \\ I'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 60 = 0 \Rightarrow 2x = 60 \Rightarrow \boxed{x = \frac{60}{2} = 30}$$

Tenemos un punto crítico de la función en $x = 30$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$I'(x) = -2x + 60 \Rightarrow I''(x) = -2 \Rightarrow I''(30) = -2 < 0$$

Como el valor de la derivada segunda para $x = 30$ es negativo la función ingresos presenta un máximo relativo en $x = 30$. Calculamos los ingresos para este valor.

$$I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$$

Con 30 kilos de abono se maximizan los ingresos siendo estos ingresos máximos de 1000 €.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes. Obtenemos su expresión.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Costes} \rightarrow C(x) = 12x \\ I(x) = -x^2 + 60x + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow B(x) = I(x) - C(x) = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$$

Derivamos la función $B(x) = -x^2 + 48x + 100$ y buscamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 48 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 48 = 0 \Rightarrow 2x = 48 \Rightarrow \boxed{x = \frac{48}{2} = 24}$$

Tenemos un punto crítico de la función en $x = 24$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 48 \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(24) = -2 < 0$$

Como el valor de la derivada segunda para $x = 24$ es negativo la función beneficio presenta un máximo relativo en $x = 24$. Calculamos los beneficios para este valor.

$$B(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$$

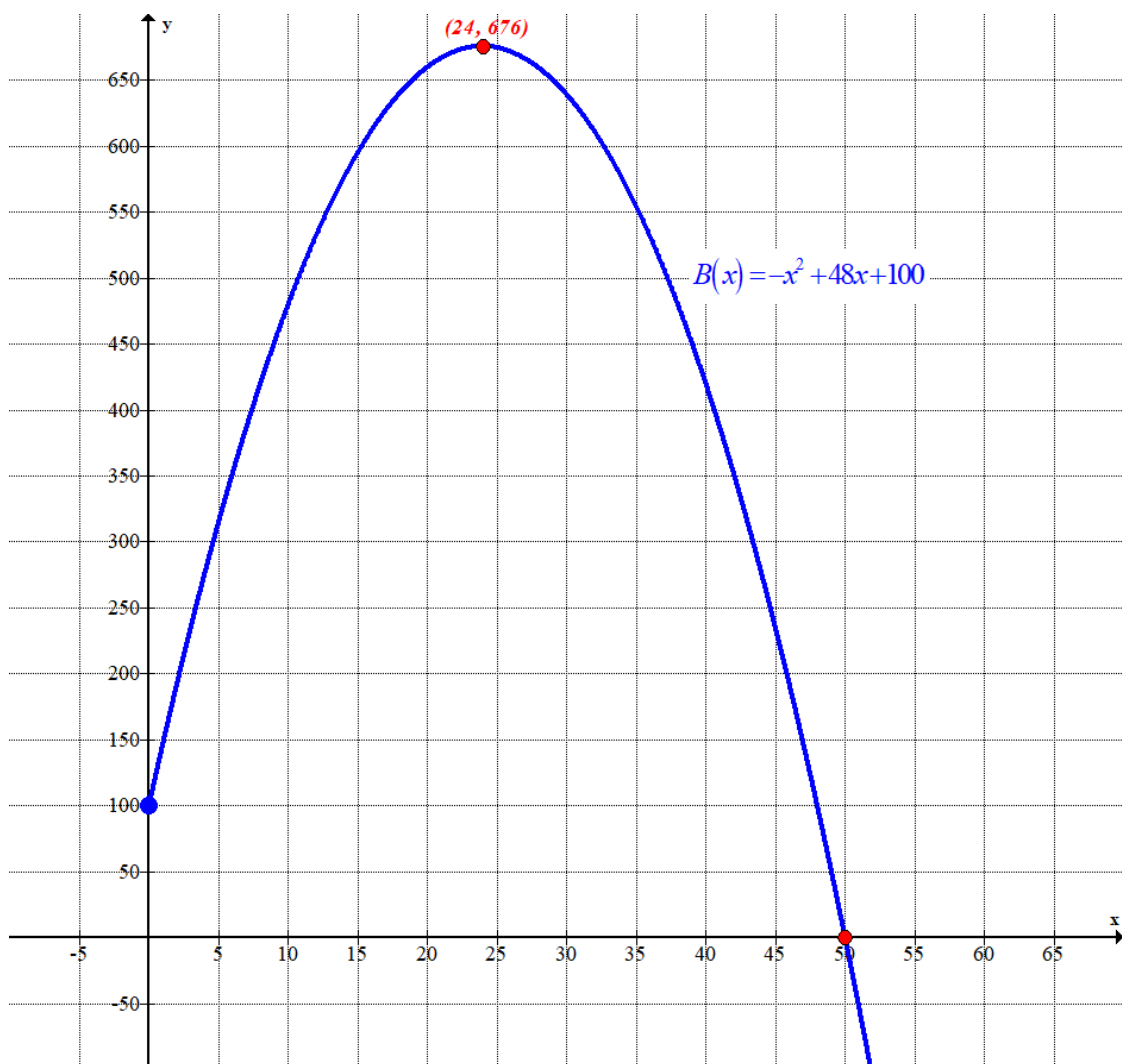
Con 24 kilos de abono se maximiza el beneficio siendo este beneficio máximo de 676 €.

c) Buscamos cuando se anulan los beneficios.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 48x + 100 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 48x + 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(-1)(100)}}{2(-1)} = \frac{-48 \pm 52}{-2} = \begin{cases} \frac{-48 + 52}{-2} = -2 < 0 \text{ ¡No válido!} \\ \frac{-48 - 52}{-2} = 50 = x \end{cases}$$

La función beneficio es continua, tiene un punto máximo (30, 676) y para $x = 50$ la función vale 0. A partir de este valor el beneficio es negativo y entre 0 y 50 kg de abono el beneficio es positivo.



Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)
- b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)
- c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Fútbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60		310
Alumnos de Bachillerato (A^C)			8	
	300			400

Completamos la tabla.

	Fútbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60	20	310
Alumnos de Bachillerato (A^C)	70	12	8	90
	300	72	28	400

- a) Nos piden calcular $P(A \cup M)$. Hay 400 alumnos en el instituto, de los cuales 310 son de ESO y 8 alumnos de Bachillerato han elegido música. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A \cup M) = \frac{310 + 8}{400} = \frac{159}{200} = 0.795$$

La probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música” tiene un valor de 0.795.

- b) Hay $300 + 72 = 372$ alumnos que han elegido extraescolar deportiva. De ellos $230 + 60 = 290$ son alumnos de ESO. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A / (F \cup B)) = \frac{290}{372} = \frac{145}{186} \approx 0.7796$$

La probabilidad de que un alumno que ha elegido extraescolar deportiva sea alumno de ESO es de $\frac{145}{186} \approx 0.7796$.

- c) Los sucesos A^C y B^C son independientes si se cumple $P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A^C \cap B^C) &= \frac{70 + 8}{400} = \frac{39}{200} = \frac{390}{2000} \\ P(A^C)P(B^C) &= \frac{90}{400} \cdot \frac{300 + 28}{400} = \frac{369}{2000} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A^C \cap B^C) = \frac{390}{2000} \neq \frac{369}{2000} = P(A^C)P(B^C)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

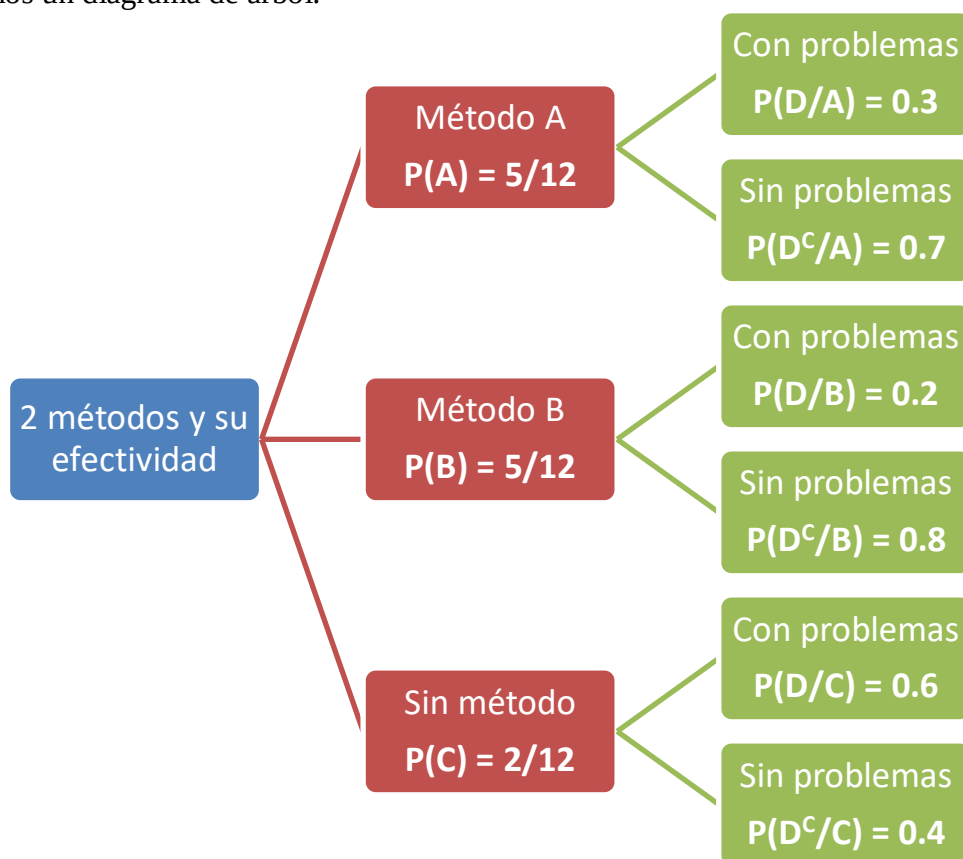
- La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)
- La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)
- La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. (3 puntos)

Llamamos A = “a la vaca se le aplica el método A”, B = “a la vaca se le aplica el método B”, C = “a la vaca no se le aplica ningún método” y D a “la vaca tiene problemas respiratorios durante los 4 meses siguientes”.

Sabemos que $P(A) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$, $P(C) = \frac{100}{600} = \frac{2}{12}$, $P(D/A) = 0.3$,

$P(D/B) = 0.2$, $P(D/C) = 0.6$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot 0.3 + \frac{5}{12} \cdot 0.2 + \frac{2}{12} \cdot 0.6 = \frac{37}{120} \approx 0.3083$$

La probabilidad de que una res elegida al azar hay tenido problemas respiratorios tiene un valor de $\frac{37}{120} \approx 0.3083$.

b) Nos piden calcular $P(B/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D^c) = \frac{P(B \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(B)P(D^c/B)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot 0.8}{1 - \frac{37}{120}} = \boxed{\frac{40}{83} \approx 0.4819}$$

La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B es de $\frac{40}{83} \approx 0.4819$.

c) Nos piden calcular $P(C \cap D)$.

$$P(C \cap D) = P(C)P(D/C) = \frac{2}{12} \cdot 0.6 = \boxed{\frac{1}{10} = 0.1}$$

PAU Junio 2024 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA
UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2024	CONVOCATORIA: JUNIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemes de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos - Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)
- Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)
- Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$. (2 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)
- b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $]-9/2, -3/2[$. (4 puntos)
- c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX . (4 puntos)

Problema 5. Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)
- b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)
- c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”. (4 puntos)
- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Llamamos “x” al número de televisores *ULED* vendidos, “y” al número de televisores *QLED* y “z” al número de televisores *LD*.

“Se han vendido 220 televisores” $\rightarrow x + y + z = 220$.

Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Un televisor *QLED* cuesta $1250 \cdot 0.90 = 1125 \text{€}$ y un televisor *LD* cuesta $1250 \cdot 0.80 = 1000 \text{€}$. “Una tienda de televisores ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores” $\rightarrow 1250x + 1125y + 1000z = 247250$.

“Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos” $\rightarrow y + z = 3x$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ y + z = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ 250x + 225y + 200z = 49450 \\ y + z = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ \Rightarrow 50x + 45y + 40z = 9890 \\ y + z = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ 10x + 9y + 8z = 1978 \\ y + z = 3x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 220 \\ \Rightarrow 10x + 9y + 8z = 1978 \\ y = 3x - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3x - z + z = 220 \\ 10x + 9(3x - z) + 8z = 1978 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 4x = 220 \\ 10x + 27x - 9z + 8z = 1978 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{220}{4} = 55 \\ 37x - z = 1978 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37 \cdot 55 - z = 1978 \Rightarrow \boxed{z = 2035 - 1978 = 57} \Rightarrow \boxed{y = 3 \cdot 55 - 57 = 108}$$

Se han vendido 55 televisores *ULED*, 108 televisores *QLED* y 57 televisores *LD*.

Problema 2. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)
- b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)
- c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$. (2 puntos)

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X^{-1}A + A = B \Rightarrow X^{-1}A = B - A \Rightarrow XX^{-1}A = X(B - A) \Rightarrow A = X(B - A) \Rightarrow A(B - A)^{-1} = X$$

Hallamos la matriz inversa de $B - A$.

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B - A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(B - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B - A)^T)}{|B - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X .

$$X = A(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Despejamos Y de la ecuación matricial.

$$(A - B)Y - AY = I \Rightarrow AY - BY - AY = I \Rightarrow -BY = I \Rightarrow BY = -I \Rightarrow Y = -B^{-1}I = -B^{-1}$$

Hallamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz Y.

$$Y = -B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos Z de la ecuación matricial.

$$AZA^{-1} = I \Rightarrow Z = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

La matriz buscada es $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-3) + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Punto de corte con el eje OY:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0(0-3) + (0+1)} = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ \text{eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \\ \text{eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \boxed{B(3,0)} \end{array} \right.$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 0) y B(3, 0).

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} = \frac{1^2 - 3}{1(1-3) + (1+1)} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x(x-3) + (x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0 - 0}{1 - 0 - 0} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)(x^2 - 3x)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 3 - (2x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 6x)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} - 4x^2 + 2x - \cancel{3x^2} + 6x - 3 - \cancel{2x^3} + 6x^2 + 2x^2 - \cancel{6x}}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 2x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 2x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = \boxed{1 = x} \\ \frac{-2 - 4}{2} = \boxed{-3 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 1 (excluido del dominio) y -3 (punto crítico).

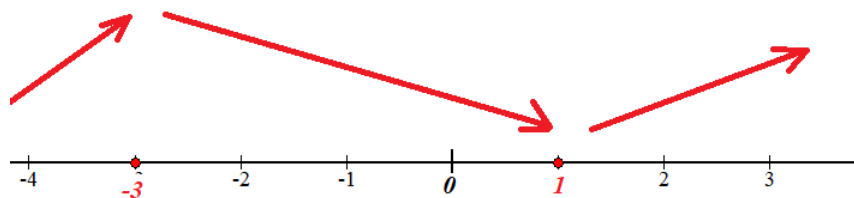
- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{(-4)^2 + 2(-4) - 3}{((-4)^2 - 2(-4) + 1)^2} = \frac{5}{+} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0^2 + 2(0) - 3}{(0^2 - 2(0) + 1)^2} = -3 < 0$. La función decrece en $(-3, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 3}{(2^2 - 2 \cdot 2 + 1)^2} = 5 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-3, 1)$.

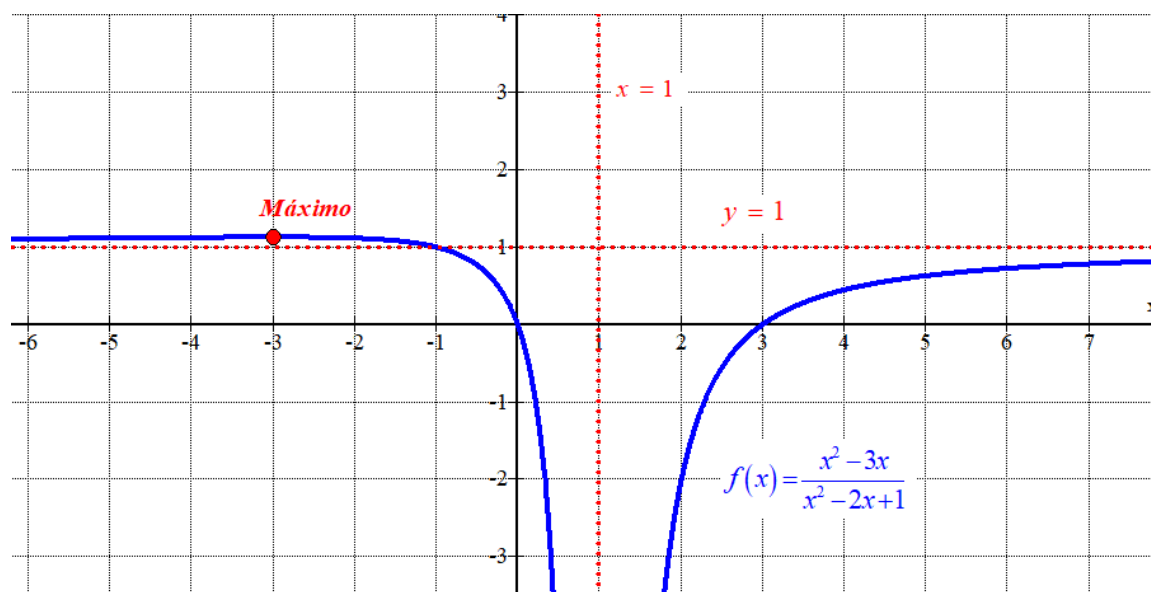
d) Observando el esquema anterior podemos afirmar que la función tiene un máximo local en $x = -3$.

El valor $x = 1$ no pertenece al dominio. No hay mínimo local.

Como $f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3(-3)}{(-3)(-3-3) + (-3+1)} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ las coordenadas del máximo local son $(-3, 1.125)$.

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1}$
-4	1.12
-3	1.125
0	0
2	-2
3	0



Problema 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)
- b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $] -9/2, -3/2[$. (4 puntos)
- c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX . (4 puntos)

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = -1$.

- Existe $f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -25 + a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 + ax^2 + 24x = -25 + a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)^2 + 3 = (-1-1)^2 + 3 = 7$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow -25 + a = 7 \Rightarrow \boxed{a = 32}$

Para que la función sea continua debe ser $a = 32$.

b) Si $a = 9$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

En el intervalo $] -9/2, -3/2[$ la función es $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$.

Hallamos sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-6+2}{2} = -2 = x \\ \frac{-6-2}{2} = -4 = x \end{cases}$$

Sustituimos los valores de los puntos críticos: $x = -4$ y $x = -2$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 \Rightarrow f''(x) = 6x + 18 \Rightarrow \begin{cases} f''(-4) = 6(-4) + 18 = -6 < 0 \\ f''(-2) = 6(-2) + 18 = 6 > 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo local en $x = -4$ y un mínimo local en $x = -2$.

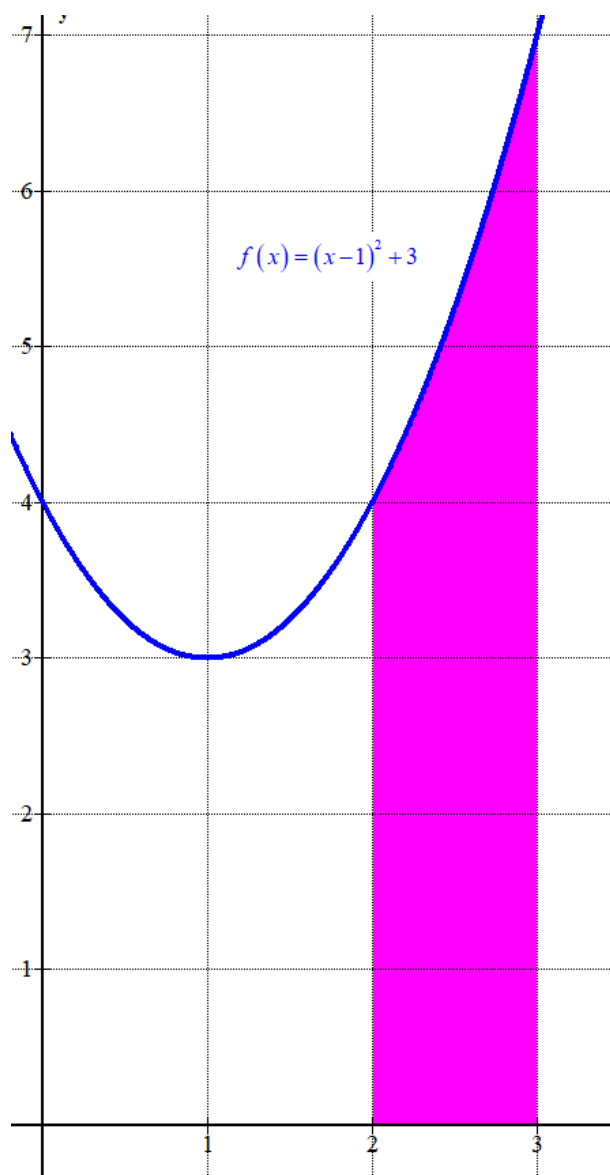
c) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

Entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 + 1 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 4$. En el intervalo $(2, 3)$ la función es positiva.

El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX es el valor de la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 x^2 - 2x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_2^3 = \\ &= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 4 \cdot 3 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 4 \cdot 2 \right] = 9 - 9 + 12 - \frac{8}{3} + 4 - 8 = \boxed{\frac{16}{3} \approx 5.33 u^2} \end{aligned}$$

El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX tiene un valor de $16/3$ unidades cuadradas.



Problema 5. Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

- a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)
 b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)
 c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

- a) Llamamos I al suceso “El directivo de la empresa sabe inglés”, A al suceso “El directivo de la empresa sabe alemán”.

Sabemos que $P(I \cap A) = 0.30$, $P(I) = 0.40$ y $P(I / A) = 0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(I / A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0.40 = \frac{0.30}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

La probabilidad de que un directivo sepa alemán es de 0.75.

- b) Realizamos una tabla de contingencia.

	Sabe alemán (A)	No sabe alemán (A^c)	
Sabe inglés (I)	30		40
No sabe inglés (I^c)			
	75		100

Completamos la tabla.

	Sabe alemán (A)	No sabe alemán (A^c)	
Sabe inglés (I)	30	10	40
No sabe inglés (I^c)	45	15	60
	75	25	100

La probabilidad de que un directivo sepa alemán y no inglés es de 0.45.

- c) Nos piden calcular $P(I / A^c)$. Hay un 25 % de directivos que no saben alemán y un 10 % que saben inglés y no alemán.

$$P(I / A^c) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0.10}{0.25} = 0.4$$

La probabilidad de que un directivo sepa inglés, sabiendo que no habla alemán es de 0.4.

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

- a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”.

(4 puntos)

- c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”?

(3 puntos)

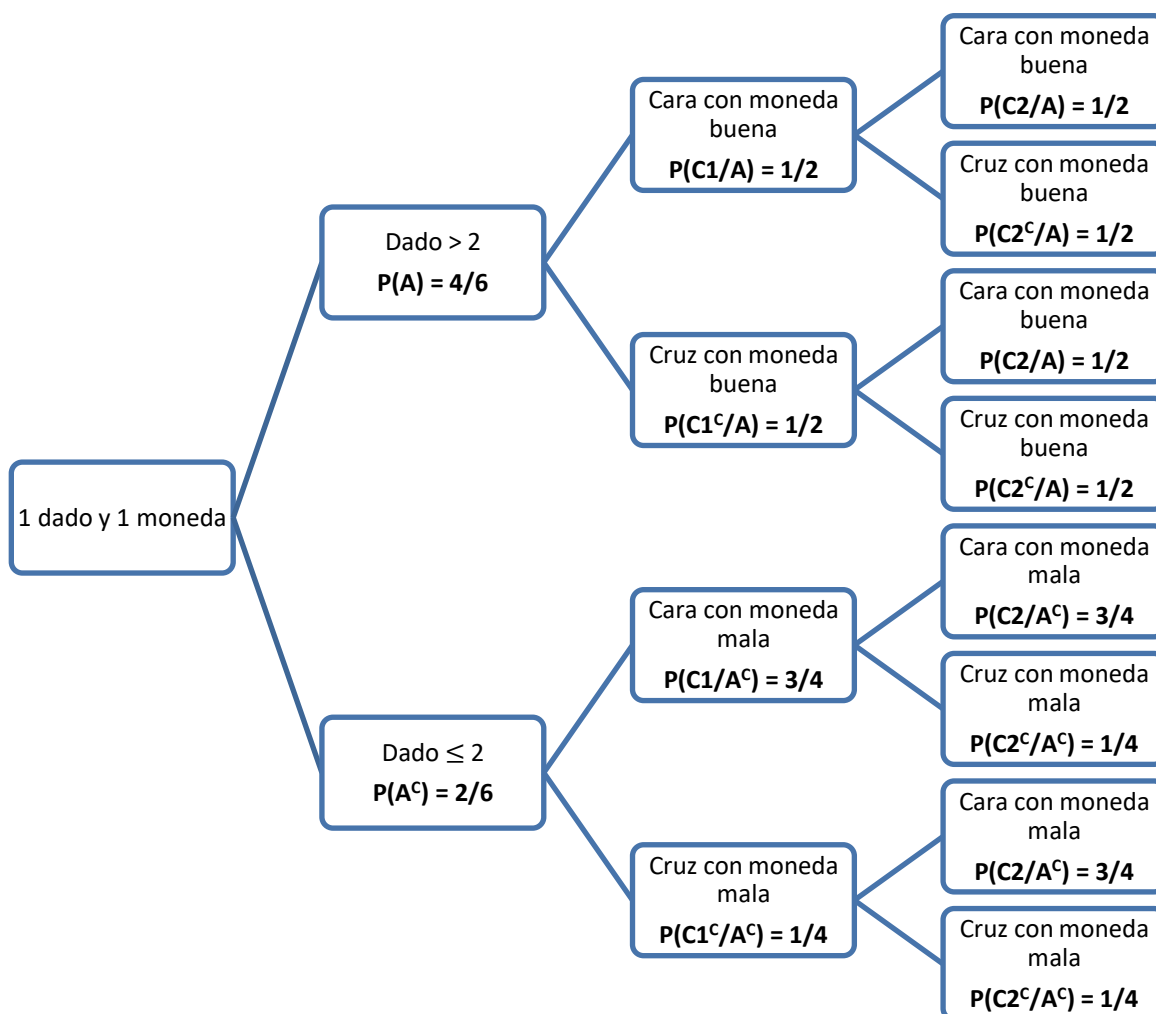
Llamamos A = “sacar un número mayor que 2 al lanzar un dado” y $C1$, $C2$ a “sacar cara al lanzar una moneda en un primer o segundo lanzamiento”.

Como $A = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{6}$; $P(A^c) = \frac{2}{6}$

Con la moneda buena la probabilidad de sacar cara es $1/2 \rightarrow P(C1/A) = P(C2/A) = \frac{1}{2}$.

Con la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor (3x) que la de obtener cruz (x) $\rightarrow 3x + x = 1 \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4}$. Tenemos que $P(C1/A^c) = P(C2/A^c) = \frac{3}{4}$

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A/(Dos\ caras))$. Calculamos la probabilidad de sacar dos caras.

$$\begin{aligned} P(\text{Obtener dos caras}) &= P(A \cap C1 \cap C2) + P(A^c \cap C1 \cap C2) = \\ &= P(A)P(C1/A)P(C2/A) + P(A^c)P(C1/A^c)P(C2/A^c) = \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{48} \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/(Dos\ caras)) = \frac{P(A \cap (Dos\ caras))}{P(Dos\ caras)} = \frac{P(A \cap C1 \cap C2)}{P(Dos\ caras)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{48}} = \boxed{\frac{8}{17} \approx 0.4706}$$

b) Nos piden calcular $P(A^c \cup (Una\ o\ dos\ caras))$. Calculamos la probabilidad de sacar una o dos caras. Utilizamos su suceso complementario “obtener dos cruces”.

$$\begin{aligned} P(\text{Una o dos caras}) &= 1 - P(\text{Dos cruces}) = 1 - [P(A \cap C1^c \cap C2^c) + P(A^c \cap C1^c \cap C2^c)] = \\ &= 1 - [P(A)P(C1^c/A)P(C2^c/A) + P(A^c)P(C1^c/A^c)P(C2^c/A^c)] = \\ &= 1 - \left[\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right] = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\begin{aligned} P(A^c \cup (Una\ o\ dos\ caras)) &= P(A^c) + P(\text{Una o dos caras}) - P(A^c \cap (Una\ o\ dos\ caras)) = \\ &= \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - [P(A^c \cap C1 \cap C2) + P(A^c \cap C1^c \cap C2) + P(A^c \cap C1 \cap C2^c)] = \\ &= \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - \left[\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{2}{6} + \frac{13}{16} - \frac{15}{48} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333} \end{aligned}$$

c) Llamamos S al suceso “obtener 6 al lanzar un dado” y D a “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”.

Tenemos que $P(S) = \frac{1}{6}$. Calculamos $P(D)$ y $P(S \cap D)$.

$$P(S \cap D) = P(S)P(C1^c/A)P(C2^c/A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P(C1^C / A)P(C2^C / A) + P(A^C)P(C1^C / A^C)P(C2^C / A^C) = \\&= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

Comprobamos si se cumple la igualdad $P(S \cap D) = P(S)P(D)$.

$$\left. \begin{array}{l}P(S \cap D) = \frac{1}{24} \\ P(S)P(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{32}\end{array} \right\} \Rightarrow P(S \cap D) = \frac{1}{24} \neq \frac{1}{32} = P(S)P(D)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

PAU Julio 2023 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CONVOCATORIA: JULIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz A^2 y su inversa. (5 puntos)
- b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$. (5 puntos)

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0, 6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6, 18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18, 24] \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 24]$. (3 puntos)
- Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? (4 puntos)
- Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 puntos)

Problema 5. Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? (2 puntos)
- Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
- ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? (3 puntos)

Problema 6. En una población hay dos compañías, A y B , que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

- Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A . (3 puntos)
- Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B ? (4 puntos)
- Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A ” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa.

(5 puntos)

b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

(5 puntos)

a) Determinamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1+2+0 & 0-2+0 \\ 0+0+2 & 0+4-0 & 0-4-2 \\ -1+0-1 & -1+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz A^2 tiene inversa y la calculamos.

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 36 + 4 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^2)^T)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2A^2X = 4B \Rightarrow A^2X = 2B \Rightarrow X = 2(A^2)^{-1}B$$

Sustituimos y determinamos la matriz X.

$$X = 2(A^2)^{-1}B = 2 \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6+1+0 & 4-4+0 & -2-2-10 \\ 30+3+0 & -20-12+0 & 10-6+2 \\ 18+5+0 & -12-20+0 & 6-10-2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos “x” al dinero que recibe la hija mayor, “y” a lo que recibe la mediana y “z” lo que recibe la menor.

“A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow x = 9 + \frac{y+z}{2}$

“A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow y = \frac{x+z}{2}$

“A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos” $\rightarrow z = 0.35(x+y)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = 9 + \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = 0.35(x+y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 18 + y + z \\ 2y = x + z \\ 100z = 35x + 35y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 20z = 7x + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 18 \\ x = 2y - z \\ 20z = 7x + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(2y - z) - y - z = 18 \\ 20z = 7(2y - z) + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - 2z - y - z = 18 \\ 20z = 14y - 7z + 7y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y - 3z = 18 \\ 27z = 21y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z = 6 \rightarrow y = 6 + z \\ 9z = 7y \end{array} \right\} \Rightarrow 9z = 7(6 + z) \Rightarrow 9z = 42 + 7z \Rightarrow 2z = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{42}{2} = 21} \Rightarrow \boxed{y = 6 + 21 = 27} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot 27 - 21 = 33}$$

El millonario le ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones a la mediana y 21 millones a la menor.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Puntos de corte con el eje OY ($x = 0$):

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0 - 5}{2(0^2 - 1)} = 2.5 \Rightarrow A(0, 2.5)$$

Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$):

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = 0 \Rightarrow 4x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4} = 1.25 \Rightarrow B(1.25, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 2.5) y B(1.25, 0).

- b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4(-1)-5}{2((-1)^2-1)} = \frac{-9}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4(1)-5}{2(1^2-1)} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{2\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{4}{\infty} - \frac{5}{\infty}}{2\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{0}{2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal.

- c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)} = \frac{4x-5}{2x^2-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4)(2x^2-2) - (4x-5)(4x-5)}{(2x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{8x^2-8-16x^2+20x}{(2x^2-2)^2} = \frac{-8x^2+20x-8}{(2x^2-2)^2} = \frac{4(-2x^2+5x-2)}{4(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+5x-2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)(-2)}}{2(-2)} = \frac{-5 \pm 3}{-4} = \begin{cases} \frac{-5+3}{-4} = \boxed{\frac{1}{2} = x} \\ \frac{-5-3}{-4} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de -1 (excluido del dominio), 0.5 (punto crítico), 1 (excluido del dominio) y 2 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-2(-2)^2 + 5(-2) - 2}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{-20}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-2}{(0^2 - 1)^2} = -2 < 0$. La función decrece en $(-1, 0.5)$.

- En el intervalo $(0.5, 1)$ tomamos $x = 0.9$ y la derivada vale

$$f'(0.9) = \frac{-2 \cdot 0.9^2 + 5 \cdot 0.9 - 2}{(0.9^2 - 1)^2} = \frac{0.88}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0.5, 1).$$

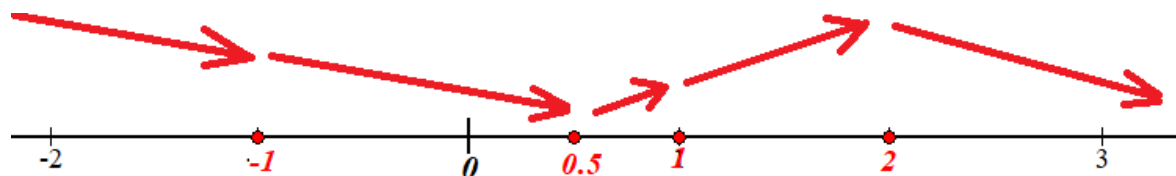
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-2 \cdot 1.5^2 + 5 \cdot 1.5 - 2}{(1.5^2 - 1)^2} = \frac{1}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-2 \cdot 3^2 + 15 - 2}{(3^2 - 1)^2} = \frac{-5}{64} < 0$.

La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



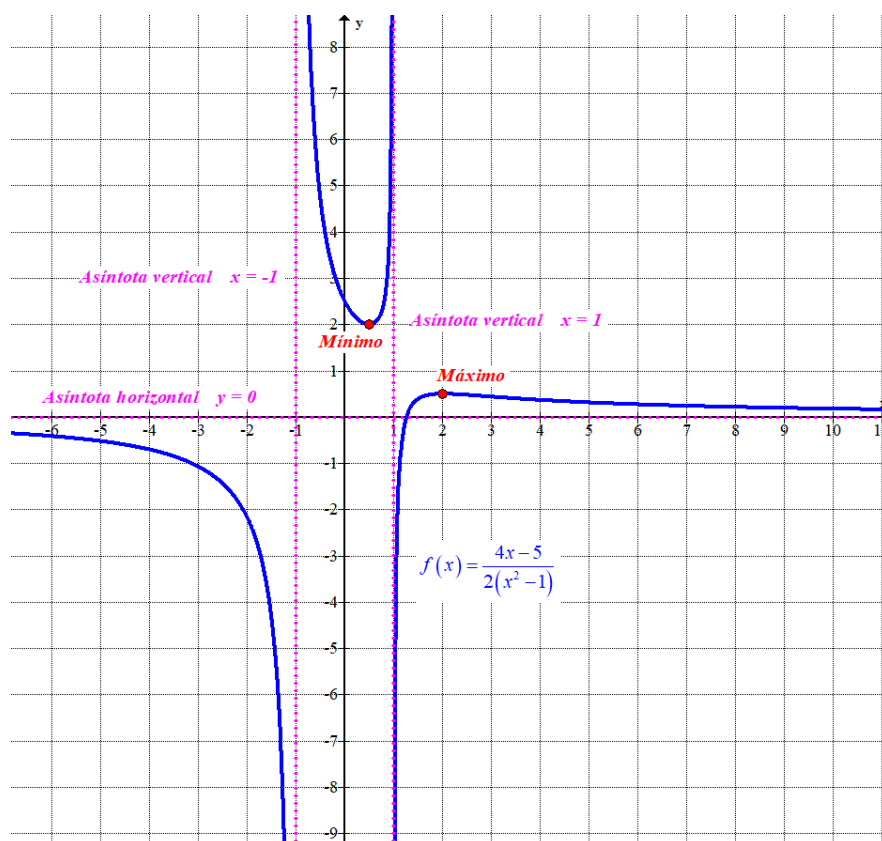
La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0.5) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0.5, 1) \cup (1, 2)$.

- d) Observando el esquema de evolución de la función podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x = 0.5$ y un máximo local en $x = 2$.

Como $f(0.5) = \frac{4 \cdot 0.5 - 5}{2(0.5^2 - 1)} = 2$ y $f(2) = \frac{4 \cdot 2 - 5}{2(2^2 - 1)} = 0.5$ las coordenadas del mínimo local son $(0.5, 2)$ y del máximo local son $(2, 0.5)$

- e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$
-2	-2.16
0	2.5
0.5	2 Mínimo
0.8	2.5
1.5	0.4
2	0.5 Máximo
3	0.43
4	0.36



Problema 4. El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2+24x-82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x+34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$. (3 puntos)
 b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? (4 puntos)
 c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. (3 puntos)

- a) La función en cada intervalo es continua por ser expresiones de funciones polinómicas. Para que sea continua debe serlo en los cambios de definición: $x = 6$ y $x = 18$.

¿Es continua en $x = 6$?

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= 2 \cdot 6 + 14 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} 2x + 14 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} -x^2 + 24x - 82 = -6^2 + 24 \cdot 6 - 82 = 26 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 26$$

La función es continua en $x = 6$.

¿Es continua en $x = 18$?

$$\left. \begin{aligned} f(18) &= -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^-} -x^2 + 24x - 82 = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 18^+} -x + 34 = -18 + 34 = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(18) = \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x) = 26 \neq 16 = \lim_{x \rightarrow 18^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 18$.

Resumiendo: La función es continua en $[0,18) \cup (18,24]$.

- b) En el intervalo $[0, 6]$ la función es $f(x) = 2x + 14$ que es una función lineal con pendiente $2 > 0$, por lo que es creciente.

En el intervalo $(6, 18]$ la función es $f(x) = -x^2 + 24x - 82$ que es una función parabólica.

Derivamos e igualamos a cero en busca de su vértice.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2x + 24 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2x + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{2} = 12 \in (6, 18]$$

En $x = 12$ hay un máximo relativo pues la segunda derivada es negativa.

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(12) = -2 < 0$$

En el intervalo $]18, 24]$ la función es $f(x) = -x + 34$ que es una función lineal con pendiente $-1 < 0$, por lo que es decreciente.

Valoramos la función en 0, 6, 12, 18 y 24 en busca de su valor máximo y mínimo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0 + 14 = 14 \\ f(6) &= 2 \cdot 6 + 14 = 26 \\ f(12) &= -12^2 + 24 \cdot 12 - 82 = 62 \text{ ¡Máximo!} \\ f(18) &= -18^2 + 24 \cdot 18 - 82 = 26 \\ f(24) &= -24 + 34 = 10 \text{ ¡Mínimo!} \end{aligned} \right\}$$

El consumo máximo se produce a las 12 horas y el mínimo a las 24 horas.

El máximo consumo es de 62 Mwh y el mínimo de 10 Mwh.

c) En el intervalo $[8, 10]$ la función es $f(x) = -x^2 + 24x - 82$.

Comprobamos si la función corta el eje en dicho intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 24x - 82 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -x^2 + 24x - 82 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-1)(-82)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-24 \pm 2\sqrt{62}}{-2} = \begin{cases} \frac{-24 + 2\sqrt{62}}{-2} = 12 - \sqrt{62} \approx 4.1 \notin (8, 10] \\ \frac{-24 - 2\sqrt{62}}{-2} = 12 + \sqrt{62} \approx 19.87 \notin (8, 10] \end{cases}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es el valor de la integral definida entre 8 y 10 de la función.

$$\text{Consumo} = \int_8^{10} f(x) dx = \int_8^{10} -x^2 + 24x - 82 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x \right]_8^{10} =$$

$$= \left[-\frac{10^3}{3} + 12 \cdot 10^2 - 82 \cdot 10 \right] - \left[-\frac{8^3}{3} + 12 \cdot 8^2 - 82 \cdot 8 \right] =$$

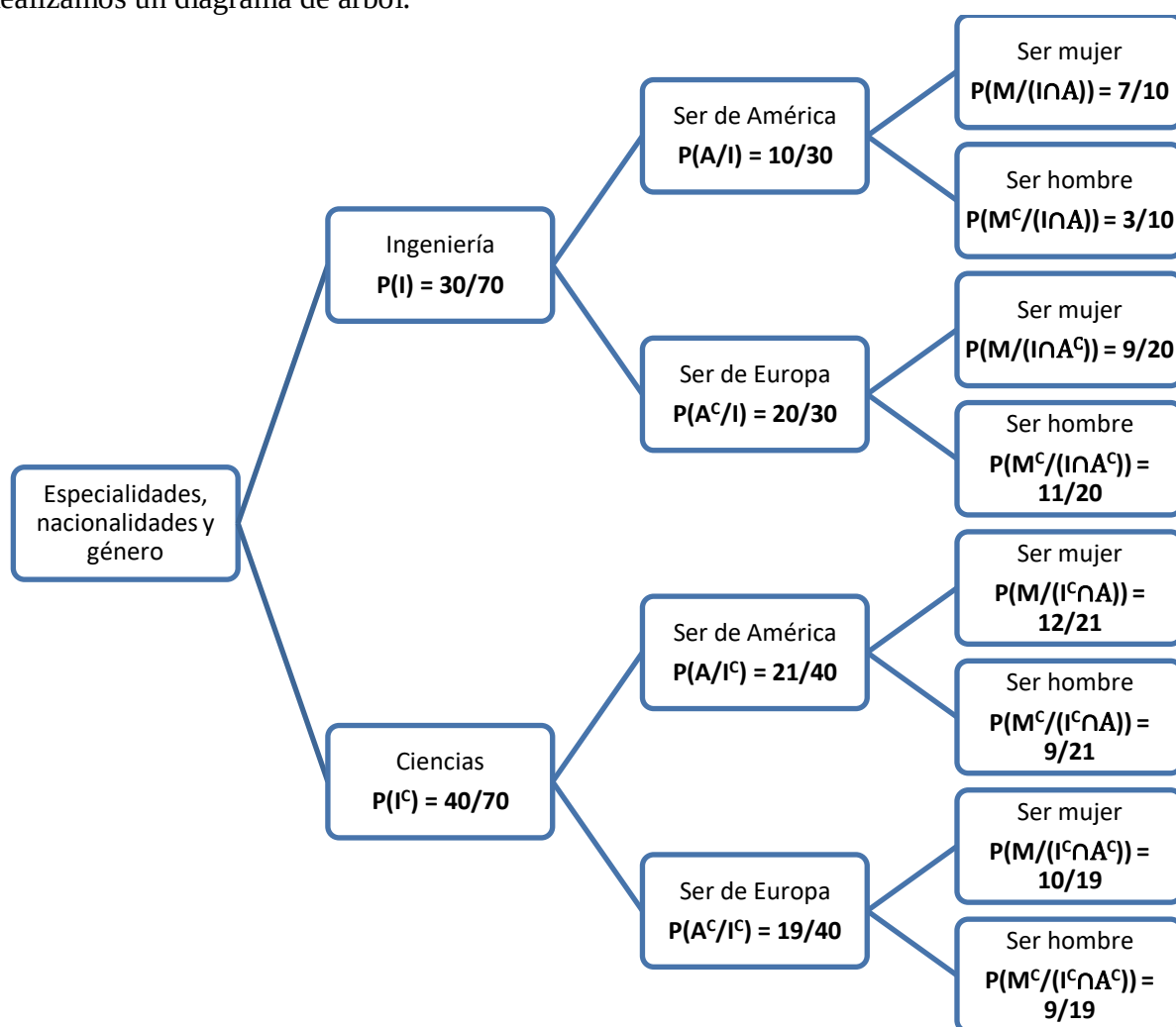
$$= -\frac{1000}{3} + 1200 - 820 + \frac{512}{3} - 768 + 656 = \boxed{\frac{316}{3} \approx 105.33 \text{ Mwh}}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es, aproximadamente, de 105.33 Mwh.

- Problema 5.** Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? (2 puntos)
 - ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? (2 puntos)
 - Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
 - ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? (3 puntos)

Llamamos I al suceso “Ser especialista en ingeniería”, A al suceso “ser de América” y M al suceso “Ser mujer”.

Hay $10 + 20 = 30$ especialistas de ingeniería y $21 + 19 = 40$ especialistas en ciencias. Un total de 70 especialistas. De los 70 especialistas son $7 + 9 + 12 + 10 = 38$ mujeres y $70 - 38 = 32$ hombres. Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos regla de Laplace. Hay 70 especialistas y $20 + 19 = 39$ son de Europa.

$$P(A^c) = \frac{39}{70} \approx 0.5571$$

- b) Nos piden calcular $P(M^c \cap I^c)$. Observando los datos del diagrama de árbol este suceso se cumple en dos de sus ramas (la última y la antepenúltima)

$$P(M^c \cap I^c) = P(I^c \cap A \cap M^c) + P(I^c \cap A^c \cap M^c) =$$

$$= \frac{40}{70} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{9}{21} + \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{70} + \frac{9}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \approx 0.2571}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Se puede resolver aplicando la regla de Laplace. De los 70 especialistas hay $40 - (12 + 10) = 18$ que son hombres de ciencias.

$$P(M^c \cap I^c) = \frac{18}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \approx 0.2571}$$

- c) Calculamos las dos probabilidades $P(I/M)$ y $P(I^c/M)$ y comparamos estos valores. Calculamos $P(I/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I/M) = \frac{P(I \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{7+9}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{16}{38} = \boxed{\frac{8}{19} \approx 0.4211}$$

Calculamos $P(I^c/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I^c/M) = \frac{P(I^c \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{12+10}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{22}{38} = \boxed{\frac{11}{19} \approx 0.5789}$$

Como $P(I^c/M) = \frac{11}{19} \geq \frac{8}{19} = P(I/M)$ es más probable que la mujer elegida sea del grupo de especialistas de ciencias.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hay $7 + 9 = 16$ mujeres en el grupo de especialistas de ingeniería y $10 + 12 = 22$ en el grupo de especialistas de ciencias. Por lo que es más probable que la mujer sea del grupo de ciencias por tener más mujeres dicho grupo.

- d) ¿Son independientes los sucesos M = “ser mujer” e I = “ser especialista en ingeniería”? Para que se cumpla debe cumplirse que $P(M \cap I) = P(M)P(I)$.

$$\left. \begin{aligned} P(M \cap I) &= \frac{7+9}{70} = \frac{16}{70} = \frac{1120}{4900} \\ P(M)P(I) &= \frac{7+9+12+10}{70} \cdot \frac{30}{70} = \frac{1140}{4900} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M \cap I) = \frac{1120}{4900} \neq \frac{1140}{4900} = P(M)P(I)$$

Los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería” no son independientes.

Problema 6. En una población hay dos compañías, A y B , que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

- Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A . (3 puntos)
- Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B ? (4 puntos)
- Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A ” y C el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup C)$. (3 puntos)

Llamamos A = “Tener contratado el servicio de internet con la compañía A ”, B = “Tener contratado el servicio de internet con la compañía B ” y C = “Tener contratada la televisión de pago”.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener de forma rápida todos los datos necesarios para responder a las preguntas del ejercicio.

	Televisión de pago (C)	Sin televisión de pago	
Internet con A			70
Internet con B			30
Totales	65		100

La mitad de los clientes de la compañía B (30%) ha contratado televisión de pago $\rightarrow$ 15% de las personas con conexión a internet están con la compañía B y con televisión de pago. Completamos la tabla.

	Televisión de pago (C)	Sin televisión de pago	
Internet con A	50	20	70
Internet con B	15	15	30
Totales	65	35	100

- Representan un 20% de las personas con contrato de internet.

	Televisión de pago	Sin televisión de pago	
Internet con A	50	20	70
Internet con B	15	15	30
Totales	65	35	100

- Nos piden $P(B/\bar{C})$

$$P(B/\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

- Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{70}{100} + \frac{65}{100} - \frac{50}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$

PAU Junio 2023 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2023	CONVOCATORIA: JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemes de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

- ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (8 puntos)
- ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? (2 puntos)

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

- Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (4 puntos)
- Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^t X - C$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. (6 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2}$. Se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

- ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh?
(2 puntos)
- Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica.
(5 puntos)
- Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas.
(3 puntos)

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin ataque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin ataque el Banco de París ese día y que no suene la alarma?
(4 puntos)
- Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París?
(3 puntos)
- Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París?
(3 puntos)

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

- Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado?
(3 puntos)
- Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$.
(3 puntos)
- Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes?
(4 puntos)

Soluciones

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas *A* y *B* de comida para perros. Una lata de la marca *A* contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca *B* contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca *A* cuesta 10 euros y la lata de la marca *B* cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio?

(8 puntos)

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar?

(2 puntos)

a) Llamamos “*x*” al número de latas marca *A* e “*y*” al número de latas marca *B*.

Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
Nº latas <i>A</i> (<i>x</i>)	4 <i>x</i>	6 <i>x</i>	<i>x</i>	10 <i>x</i>
Nº latas <i>B</i> (<i>y</i>)	2 <i>y</i>	20 <i>y</i>	12 <i>y</i>	16 <i>y</i>
TOTALES	4 <i>x</i> + 2 <i>y</i>	6 <i>x</i> + 20 <i>y</i>	<i>x</i> + 12 <i>y</i>	10 <i>x</i> + 16 <i>y</i>

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste: $C(x, y) = 10x + 16y$.

Las restricciones del problema son:

“Mi perro debe tomar diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas” $\rightarrow 4x + 2y \geq 8$;

$$6x + 20y \geq 46; \quad x + 12y \geq 12$$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y \geq 8 \\ 6x + 20y \geq 46 \\ x + 12y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 4 \\ 3x + 10y \geq 23 \\ x + 12y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

$$2x + y = 4$$

$$3x + 10y = 23$$

$$x + 12y = 12$$

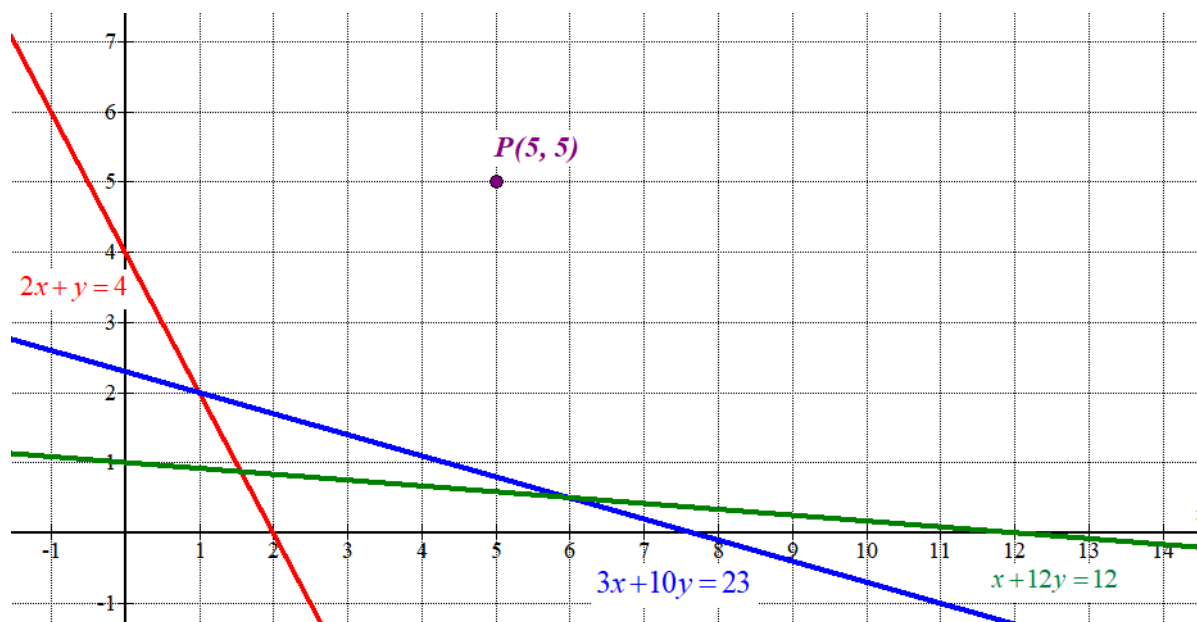
$$x \geq 0; y \geq 0$$

<i>x</i>	<i>y</i> = 4 - 2 <i>x</i>
0	4
1	2
2	0

<i>x</i>	<i>y</i> = $\frac{23-3x}{10}$
1	2
6	0.5
7	0.2

<i>x</i>	<i>y</i> = $\frac{12-x}{12}$
0	1
6	0.5
12	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

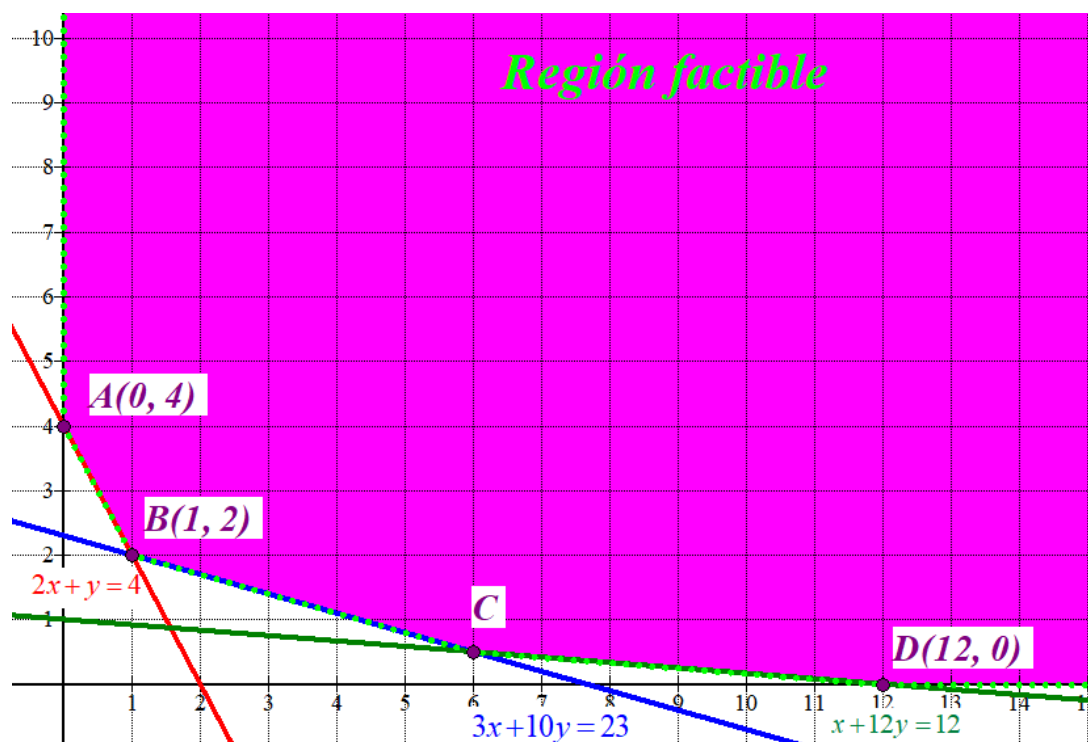
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 4 \\ 3x + 10y \geq 23 \\ x + 12y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por encima de las rectas roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 5 + 5 \geq 4 \\ 3 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \geq 23 \\ 5 + 12 \cdot 5 \geq 12 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} 3x+10y=23 \\ x+12y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+10y=23 \\ x=12-12y \end{cases} \Rightarrow 3(12-12y)+10y=23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36-36y+10y=23 \Rightarrow -26y=-13 \Rightarrow y=\frac{13}{26}=0.5 \Rightarrow x=12-6=6 \Rightarrow \boxed{C(6,0.5)}$$

Valoramos la función coste $C(x,y)=10x+16y$ en cada uno de los vértices en busca del coste mínimo. Al ser una región no acotada valoramos el coste en dos puntos R y Q lejanos.

$$R(0,100) \rightarrow C(0,100)=1600$$

$$A(0,4) \rightarrow C(0,4)=0+64=64$$

$$B(1,2) \rightarrow C(1,2)=10+32=42 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(6,0.5) \rightarrow C(6,0.5)=60+8=68$$

$$D(12,0) \rightarrow C(12,0)=120+0=120$$

$$Q(100,0) \rightarrow C(100,0)=1000$$

El coste mínimo es de 42 € y se produce en el vértice B(1, 2).

Con 1 lata de la marca A y 2 latas de la marca B se satisfacen las necesidades diarias del perro con un coste mínimo de 42 €.

b) El precio mínimo que debo pagar es de 42 €.

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (4 puntos)

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^t X - C$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ puntos})$$

a) Aplicamos a la matriz la igualdad $A^t A = A A^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

$$A^t A = A A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4+1 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \\ 2-x=-2+x \\ 2-x=-2+x \\ 1+x^2=1+x^2 \end{cases} \Rightarrow 2-x=-2+x \Rightarrow 4=2x \Rightarrow \boxed{x=2}$$

La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ es normal si $x = 2$.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX = B^t X - C \Rightarrow AX - B^t X = -C \Rightarrow B^t X - AX = C \Rightarrow (B^t - A)X = C \Rightarrow X = (B^t - A)^{-1} C$$

Comprobamos que la matriz $(B^t - A)$ tiene inversa y la calculamos.

$$B^t - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B^t - A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa}$$

$$(B^t - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B^t - A)^t)}{|B^t - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = (B^t - A)^{-1} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2-3 \\ -1+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

- a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = \boxed{2 = x} \\ \frac{3-5}{4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \end{cases}$$

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-0.5, 2\}$.

Puntos de corte con el eje OY:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 15}{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2} = 7.5 \Rightarrow \boxed{A(0, 7.5)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2+8}{2} = 3 = x \Rightarrow \boxed{B(3, 0)} \\ \frac{-2-8}{2} = -5 = x \Rightarrow \boxed{C(-5, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 7.5), B(3, 0) y C(-5, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -0.5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -0.5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0.5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(-0.5)^2 + 2(-0.5) - 15}{2(-0.5)^2 - 3(-0.5) - 2} = \frac{-15.75}{0} = \infty$$

$x = -0.5$ es asíntota vertical

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{2^2 + 2(2) - 15}{2(2)^2 - 3(2) - 2} = \frac{-7}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{15}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty} - \frac{15}{\infty}}{2 - \frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0 - 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 - 3x - 2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-3x-2) - (4x-3)(x^2+2x-15)}{(2x^2-3x-2)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 6x^2 - 4x + 4x^2 - 6x - 4 - (4x^3 + 8x^2 - 60x - 3x^2 - 6x + 45)}{(2x^2 - 3x - 2)^2} = \\ &= \frac{\cancel{4x^3} - 6x^2 - 4x + 4x^2 - \cancel{6x} - 4 - \cancel{4x^3} - 8x^2 + 60x + 3x^2 + \cancel{6x} - 45}{(2x^2 - 3x - 2)^2} = \frac{-7x^2 + 56x - 49}{(2x^2 - 3x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-7x^2 + 56x - 49}{(2x^2 - 3x - 2)^2} = 0 \Rightarrow -7x^2 + 56x - 49 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8+6}{2} = \boxed{7=x} \\ \frac{8-6}{2} = \boxed{1=x} \end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de -0.5 (excluido del dominio), 1 (punto crítico), 2 (excluido del dominio) y 7 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-7(-1)^2 + 56(-1) - 49}{(2(-1)^2 - 3(-1) - 2)^2} = \frac{-112}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -0.5).$$

- En el intervalo $(-0.5, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-7 \cdot 0^2 + 56 \cdot 0 - 49}{(2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2)^2} = \frac{-49}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-0.5, 1).$$

- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-7 \cdot 1.5^2 + 56 \cdot 1.5 - 49}{(2 \cdot 1.5^2 - 3 \cdot 1.5 - 2)^2} = \frac{19.25}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1, 2).$$

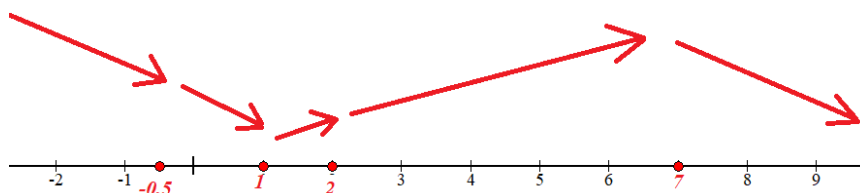
- En el intervalo $(2, 7)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-7 \cdot 3^2 + 56 \cdot 3 - 49}{(2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2)^2} = \frac{56}{+} > 0. \text{ La función crece en } (2, 7).$$

- En el intervalo $(7, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-7 \cdot 10^2 + 56 \cdot 10 - 49}{(2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 2)^2} = \frac{-189}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (7, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.

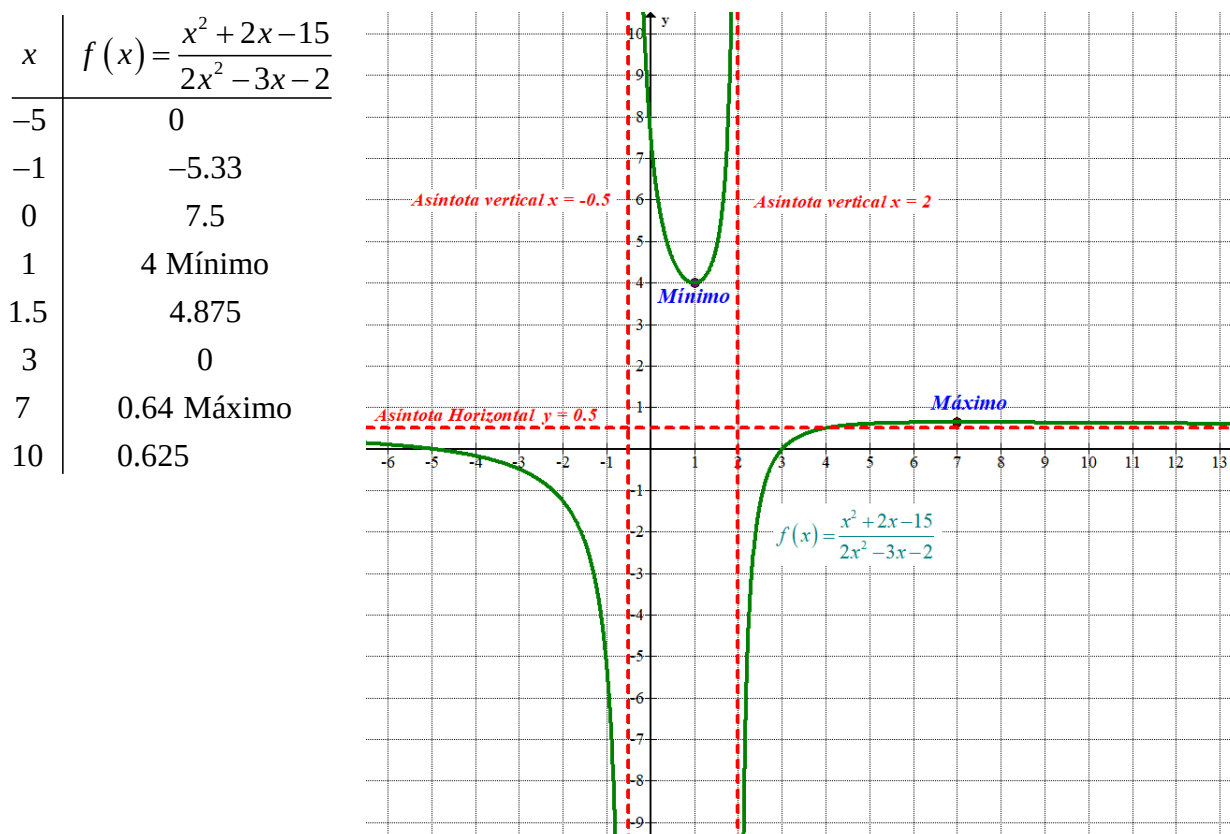


La función decrece en $(-\infty, -0.5) \cup (-0.5, 1) \cup (7, +\infty)$ y crece en $(1, 2) \cup (2, 7)$.

- d) Observando el esquema de evolución de la función podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x = 1$ y un máximo local en $x = 7$.

Como $f(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 15}{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2} = \frac{-12}{-3} = 4$ y $f(7) = \frac{7^2 + 2 \cdot 7 - 15}{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2} = \frac{48}{75} = 0.64$ las coordenadas del mínimo local son $(1, 4)$ y del máximo local son $(7, 0.64)$

- e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.



Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? (2 puntos)

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh.

Dibuja su gráfica.

(5 puntos)

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. (3 puntos)

a) Ese mes pagó la cuota fija de 1200 €, pagó los primeros 250 kwh a razón de 5 € por kwh, los restantes 150 kwh los pagó a razón de 3 € cada kwh, por lo que su factura fue de un importe de $1200 + 250 \cdot 5 + 150 \cdot 3 = 2900 \text{ €}$.

b) Llamamos $I(x)$ al importe a pagar en el mes que se consumen x kwh. Es una función a trozos pues se paga según los tramos de variación de la x .

$$I(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 250 \\ 1200 + 5(250) + 3(x - 250) & \text{si } 250 < x \leq 900 \\ 1200 + 5(250) + 3(650) + 2(x - 900) & \text{si } x > 900 \end{cases}$$

Si simplificamos tenemos la función:

$$I(x) = \begin{cases} 1200 + 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 250 \\ 1700 + 3x & \text{si } 250 < x \leq 900 \\ 2600 + 2x & \text{si } x > 900 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada trozo de recta y dibujamos su gráfica.

$0 \leq x \leq 250$

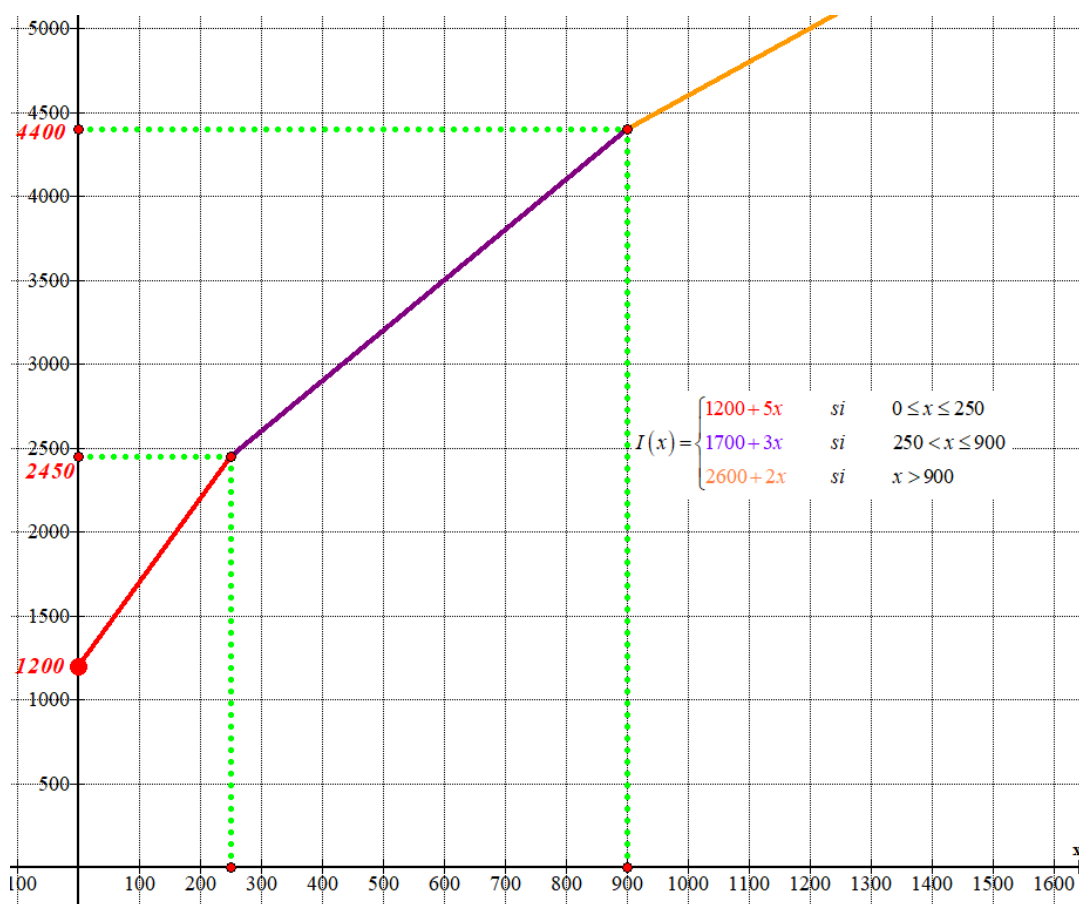
x	$y = 1200 + 5x$
0	1200
250	2450

$250 < x \leq 900$

x	$y = 1700 + 3x$
300	2600
900	4400

$x > 900$

x	$y = 2600 + 2x$
1000	4600
1100	4800



c) La otra empresa cobra por x kwh un importe de $J(x) = 1200 + 3x$.

Averiguamos que mes se pagaría lo mismo con cualquiera de las dos empresas.

$$I(x) = J(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 250 \rightarrow 1200 + 5x = 1200 + 3x \rightarrow 5x = 3x \rightarrow \boxed{x = 0} \\ \text{si } 250 < x \leq 900 \rightarrow 1700 + 3x = 1200 + 3x \rightarrow 500 = 0 \rightarrow \text{¡No es posible!} \\ \text{si } x > 900 \rightarrow 2600 + 2x = 1200 + 3x \rightarrow \boxed{1400 = x} \end{cases}$$

Se pagaría el mismo importe en la factura con las dos empresas cuando el consumo es de 0 kwh o de 1400 kwh.

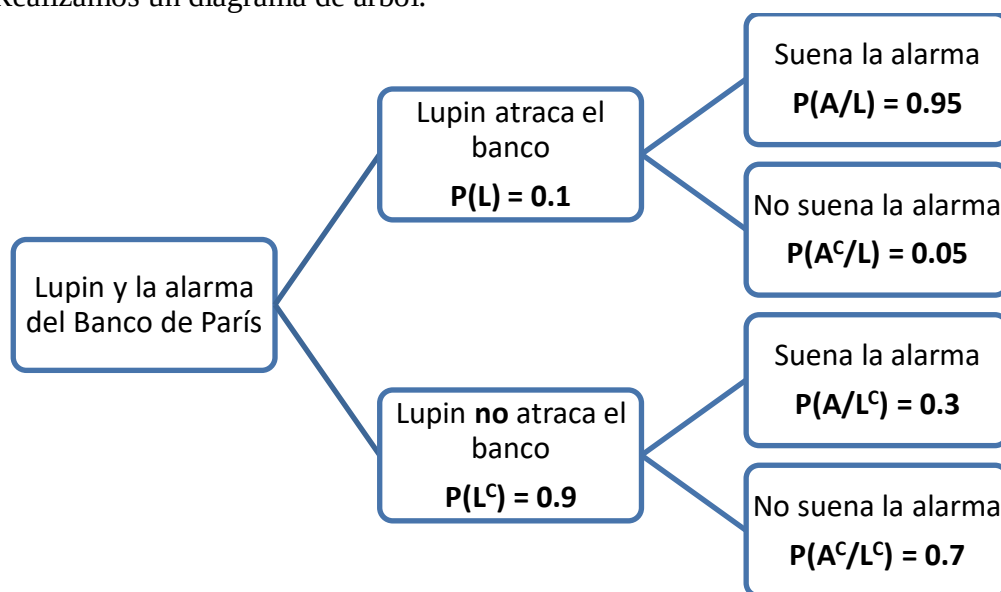
Cuando el consumo es de 1400 kwh se paga una factura en las dos empresas por un importe de 5400 €.

$$\left. \begin{array}{l} J(1440) = 1200 + 3 \cdot 1400 = 5400 \text{ €} \\ I(1440) = 2600 + 2 \cdot 1400 = 5400 \text{ €} \end{array} \right\} \Rightarrow J(1440) = I(1440) = 5400 \text{ €}$$

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? (4 puntos)
- b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? (3 puntos)
- c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? (3 puntos)

- a) Llamamos L al suceso “Arsenio Lupin atraca el banco el 31 de diciembre” y A al suceso “La alarma suena”. Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(L \cap A^c)$.

$$P(L \cap A^c) = P(L)P(A^c / L) = 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.005}$$

- b) Nos piden calcular $P(L^c / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(L^c / A) = \frac{P(L^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(L^c)P(A / L^c)}{P(L)P(A / L) + P(L^c)P(A / L^c)} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.3} = \boxed{\frac{54}{73} \approx 0.7397}$$

- c) Nos piden calcular $P(L / A^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(L / A^c) = \frac{P(L \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(L)P(A^c / L)}{P(L)P(A^c / L) + P(L^c)P(A^c / L^c)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.05}{0.1 \cdot 0.05 + 0.9 \cdot 0.7} = \boxed{\frac{1}{127} \approx 0.0079}$$

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

- a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? (3 puntos)
- b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. (3 puntos)
- c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? (4 puntos)

Llamamos U = "Hacer un viaje al año", D = "Hacer dos viajes al año", T = "Hacer tres o más viajes al año" y C = "Estar casado".

Los datos proporcionados son $P(U) = 0.60$, $P(D) = 0.30$, $P(T) = 0.10$, $P(U \cap C) = 0.54$, $P(C \cap D) = 0.14$, $P(C \cap T) = 0.02$.

Construimos una tabla de contingencia.

	Casado	No casado	
Un viaje	54		60
Dos viajes	14		30
Tres viajes o más	2		10
Totales			100

Completamos la tabla.

	Casado	No casado	
Un viaje	54	6	60
Dos viajes	14	16	30
Tres viajes o más	2	8	10
Totales	70	30	100

- a) Nos piden calcular $P(\bar{C} / (D \cup T))$. Mirando la tabla sabemos que de cada 30 clientes que hacen 2 viajes hay 16 que no están casados y de cada 10 clientes que hacen 3 viajes hay 8 que no están casados.

$$P(\bar{C} / (D \cup T)) = \frac{16+8}{30+10} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

- b) El suceso $G = \bar{C}$ y $H = U \cup D$. Nos piden calcular $P(\bar{C} \cup (U \cup D))$. Sabemos que de cada 100 clientes hay 30 no casados, 54 casados que hacen 1 viaje y 14 casados que hacen dos viajes.

$$P(G \cup H) = P(\bar{C} \cup (U \cup D)) = \frac{30+54+14}{100} = 0.98$$

- c) El suceso $J = C$ y el suceso $K = U \cup T$. Para que J y K sean independientes debe cumplirse que $P(J \cap K) = P(J)P(K)$.

$$\left. \begin{aligned} P(J \cap K) &= P[C \cap (U \cup T)] = \frac{54+2}{100} = 0.54 \\ P(J)P(K) &= P(C)P(U \cup T) = \frac{70}{100} \cdot \frac{60+10}{100} = 0.49 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(J \cap K) = 0.54 \neq 0.49 = P(J)P(K)$$

Los sucesos J y K no son independientes.

PAU Julio 2022 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemes de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.
 - $B + 2CA$ (1 punto)
 - $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC . (2 puntos)
 - CAB (2 puntos)
- Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de C . (5 puntos)

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

- Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. (8 puntos)
- ¿Cuál es dicho ingreso máximo? (2 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$. Se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

- a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? (2 puntos)
- b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? (4 puntos)
- c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? (4 puntos)

Problema 5. Dados dos sucesos A y B , se sabe que $P(B) = 0,4$, $P(A^c \cap B^c) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B , respectivamente. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$. (2,5 puntos)
- b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)
- c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A . (2,5 puntos)
- d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)

Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

- a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? (3 puntos)
- b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? (3 puntos)
- c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? (4 puntos)

Soluciones

Problema 1. Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B + 2CA$ (1 punto)

a.2) $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC . (2 puntos)

a.3) CAB (2 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de C . (5 puntos)

a)

a.1) No se puede calcular.

$$B + 2CA = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -12 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 & -16 \end{pmatrix}$$

Se puede realizar el producto $2CA$ pero la suma no es posible pues no se pueden sumar matrices de dimensiones diferentes.

a.2) Si se puede calcular.

$$BC = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow (BC)^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{2 \times \boxed{1} \cdot \boxed{1} \times 2} 2 \times 2$

$$A - (BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}}$$

a.3) Si se puede calcular.

$$CAB = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & -48 \end{pmatrix} = \boxed{(16)}$$

$\xrightarrow{1 \times \boxed{2} \cdot \boxed{2} \times \boxed{2} \cdot \boxed{2} \times 1} 1 \times 1$

b) Despejo la matriz X en la ecuación.

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T \Rightarrow B + AX = 5C^T \Rightarrow AX = 5C^T - B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(5C^T - B)}$$

Comprobamos que existe la inversa de A , la calculamos y terminamos de resolver la ecuación.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{24} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 5C^T - B = 5 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(5C^T - B) = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -24 \\ -84 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}}$$

$\xrightarrow{2 \times 2 \cdot 2 \times 1} 2 \times 1$

Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. (8 puntos)

b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? (2 puntos)

a) Llamamos “x” al número de kilos de mezcla a partes iguales e “y” a los kilos de mezcla 1 a 3. Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Kilos café colombiano	Kilos café brasileño	Ingresos
Nº kilos a iguales (x)	$x/2$	$x/2$	$15x$
Nº kilos 1 a 3 (y)	$y/4$	$3y/4$	$10y$
TOTALES	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4}$	$\frac{x}{2} + \frac{3y}{4}$	$15x + 10y$

La función objetivo que deseamos maximizar es: $I(x, y) = 15x + 10y$.

Las restricciones del problema son:

“El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño” →

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 100; \quad \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 210$$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 100 \\ \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 210 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 400 \\ 2x + 3y \leq 840 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

$$2x + y = 400$$

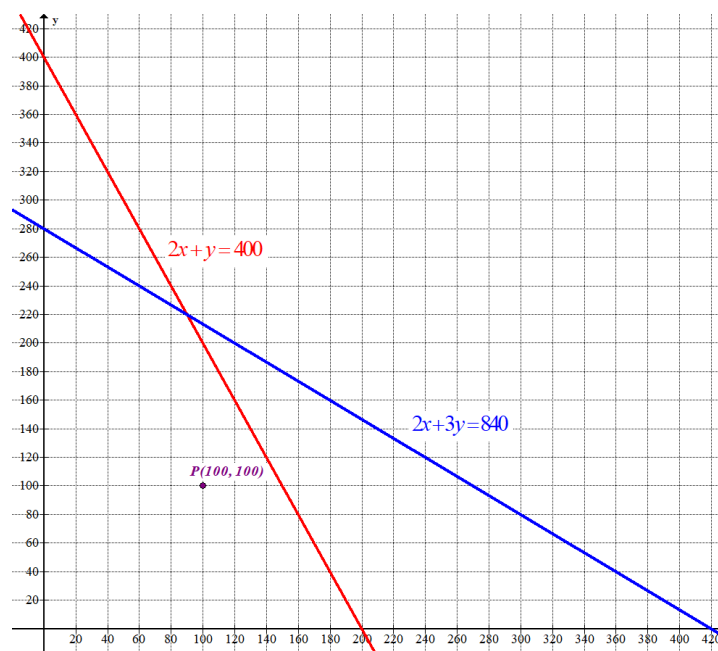
x	$y = 400 - 2x$
0	400
90	220
200	0

$$2x + 3y = 840$$

x	$y = \frac{840 - 2x}{3}$
0	280
90	220
420	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



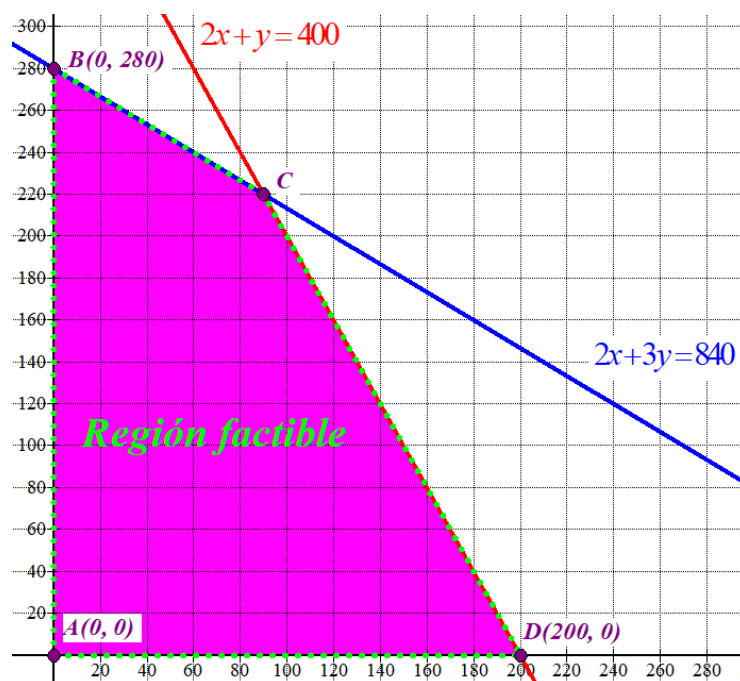
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 400 \\ 2x + 3y \leq 840 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

que está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 100 \leq 400 \\ 200 + 300 \leq 840 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} C \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 840 \\ 2x + y = 400 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 840 \\ y = 400 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3(400 - 2x) = 840 \Rightarrow 2x + 1200 - 6x = 840 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -4x = -360 \Rightarrow x = \frac{360}{4} = 90 \Rightarrow y = 400 - 180 = 220 \Rightarrow \boxed{C(90, 220)} \end{aligned}$$

Valoramos la función $I(x, y) = 15x + 10y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 280) \rightarrow I(0, 280) = 0 + 2800 = 2800$$

$$C(90, 220) \rightarrow I(90, 220) = 1350 + 2200 = 3550 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(200, 0) \rightarrow I(200, 0) = 3000 + 0 = 3000$$

Los ingresos máximos son de 3550 y se producen en el vértice C(90, 220).

Con 90 kilos de café mezclado a partes iguales y 220 kilos del café mezclado 1 a 3 se satisfacen las restricciones con unos ingresos máximos de 3550 €.

b) El ingreso máximo es de 3550 €.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$. Se pide:

- a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = x \\ = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = x \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left. f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 0 - 4}{0^2 - 0 - 1} = 4 \Rightarrow \boxed{A(0, 4)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left. f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} \right\} \Rightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{4 - 8}{6} = \frac{-2}{3} = x \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{-2}{3}, 0\right)} \\ \frac{4 + 8}{6} = 2 = x \Rightarrow \boxed{C(2, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: $A(0, 4)$, $B\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ y $C(2, 0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{3\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) - 4}{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{0} = \infty$$

$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical.

¿ $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \frac{3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 4}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{-3-\sqrt{5}}{0} = \infty$$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - \frac{4}{\infty} - \frac{4}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{3 - 0 - 0}{1 - 0 - 0} = 3$$

$y = 3$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x - 4)(x^2 - x - 1) - (3x^2 - 4x - 4)(2x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - (6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x - 8x + 4)}{(x^2 - x - 1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{6x^3} - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - \cancel{6x^3} + 3x^2 + 8x^2 - 4x + 8x - 4}{(x^2 - x - 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$ (excluidos del dominio) y 0, -2 (puntos críticos).

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 + 2(-3)}{((-3)^2 - (-3) - 1)^2} = \frac{3}{121} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $\left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{((-1)^2 - (-1) - 1)^2} = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^2 + 2(-0.5)}{((-0.5)^2 - (-0.5) - 1)^2} = -12 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

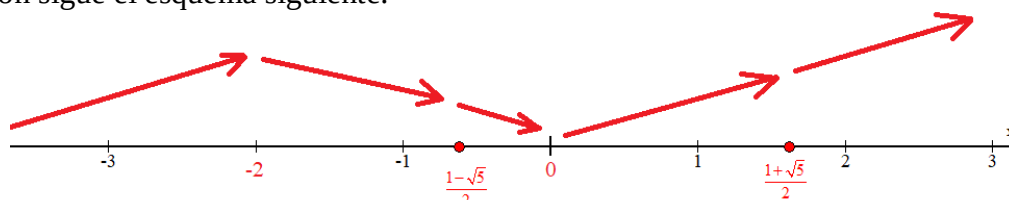
- En el intervalo $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 + 2}{(1^2 - 1 - 1)^2} = 3 > 0$.

La función crece en $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 + 4}{(2^2 - 2 - 1)^2} = 8 > 0$.

La función crece en $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



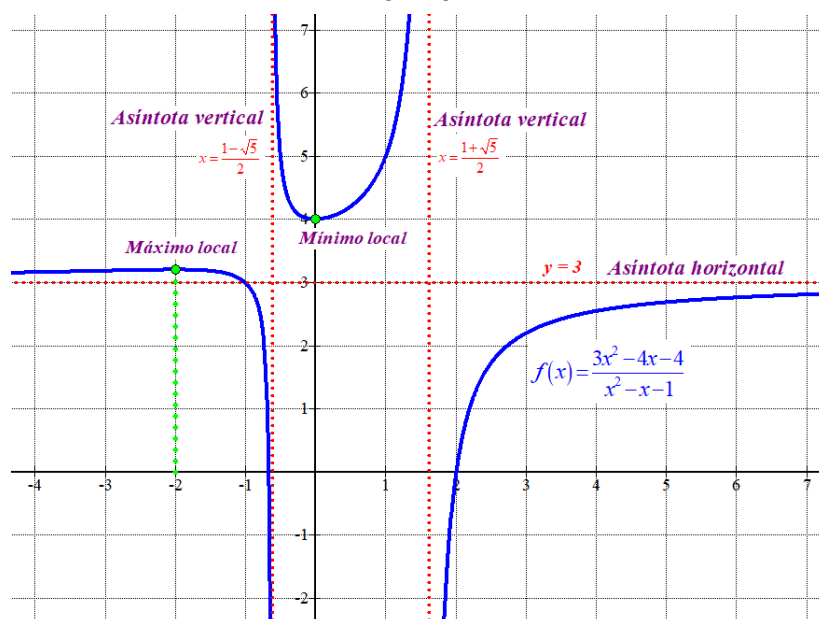
La función crece en $(-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

- d) Observando el esquema de evolución de la función presenta un máximo en $x = -2$.

$$f(-2) = \frac{3(-2)^2 - 4(-2) - 4}{(-2)^2 - (-2) - 1} = \frac{16}{5} = 3.2, \text{ las coordenadas del máximo relativo son } (-2, 3.2).$$

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0-0-4}{0^2-0-1} = 4$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 4)$.

- e) Para realizar la representación gráfica usamos toda la información obtenida sobre la función.



Problema 4. Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

- a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra? (2 puntos)
- b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo? (4 puntos)
- c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%? (4 puntos)

a) Comparamos $f(1)$ y $f(2)$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{10}(800 + 15 + 6 - 1^3) = 82 \\ f(2) &= \frac{1}{10}(800 + 30 + 24 - 2^3) = 84.6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = 82 < 84.6 = f(2)$$

Es falso. El rendimiento es mayor tras 2 meses.

b) Derivamos la función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{10}(15 + 12x - 3x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{10}(15 + 12x - 3x^2) = 0 \Rightarrow 15 + 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{4+6}{2} = 5 = x \\ \frac{4-6}{2} = -1 \notin [0, 12] \end{cases}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{1}{10}(12 - 6x) \Rightarrow f''(5) = \frac{1}{10}(12 - 30) = -1.8 < 0 \rightarrow x = 5 \text{ Máximo local}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[0, 12]$ y en el máximo relativo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{10}(800) = 80 \\ f(5) &= \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = 90 \\ f(12) &= \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 12 + 6 \cdot 12^2 - 12^3) = 11.6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 5 \text{ es máximo absoluto en } [0, 12]$$

El máximo rendimiento (90 %) se alcanza cinco meses después de su compra.

- c) El valor mínimo absoluto de la función se produce en el quinto mes y es del 11.6 %. Esto significa que la función se mantiene por encima de este valor en todo el año.
No se alcanza en ningún momento un rendimiento inferior al 10%.

Problema 5. Dados dos sucesos A y B , se sabe que $P(B) = 0,4$, $P(A^c \cap B^c) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B , respectivamente. Se pide:

a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$. (2,5 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)

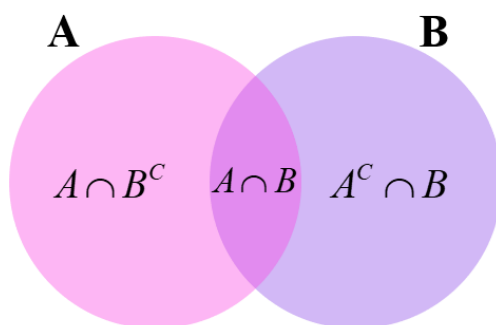
c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A . (2,5 puntos)

d) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)

a) Aplicamos la ley de Morgan $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A^c \cap B^c) = 0,2 \\ P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,2 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0,8}$$

b) Nos piden calcular $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,3 = 0,5$



OTRA FORMA DE HACERLO

Nos piden calcular $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$

Calculamos primero $P(A)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,8 = P(A) + 0,4 - 0,3 \Rightarrow P(A) = 0,7$$

Calculamos la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.

$$\begin{aligned} P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - P((A \cap B^c) \cap (A^c \cap B)) = \\ &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - 0 = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,7 - 0,3 + 0,4 - 0,3 = \boxed{0,5} \end{aligned}$$

c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7} \approx 0,4286$$

d) Para que A y B sean independientes debe ocurrir que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

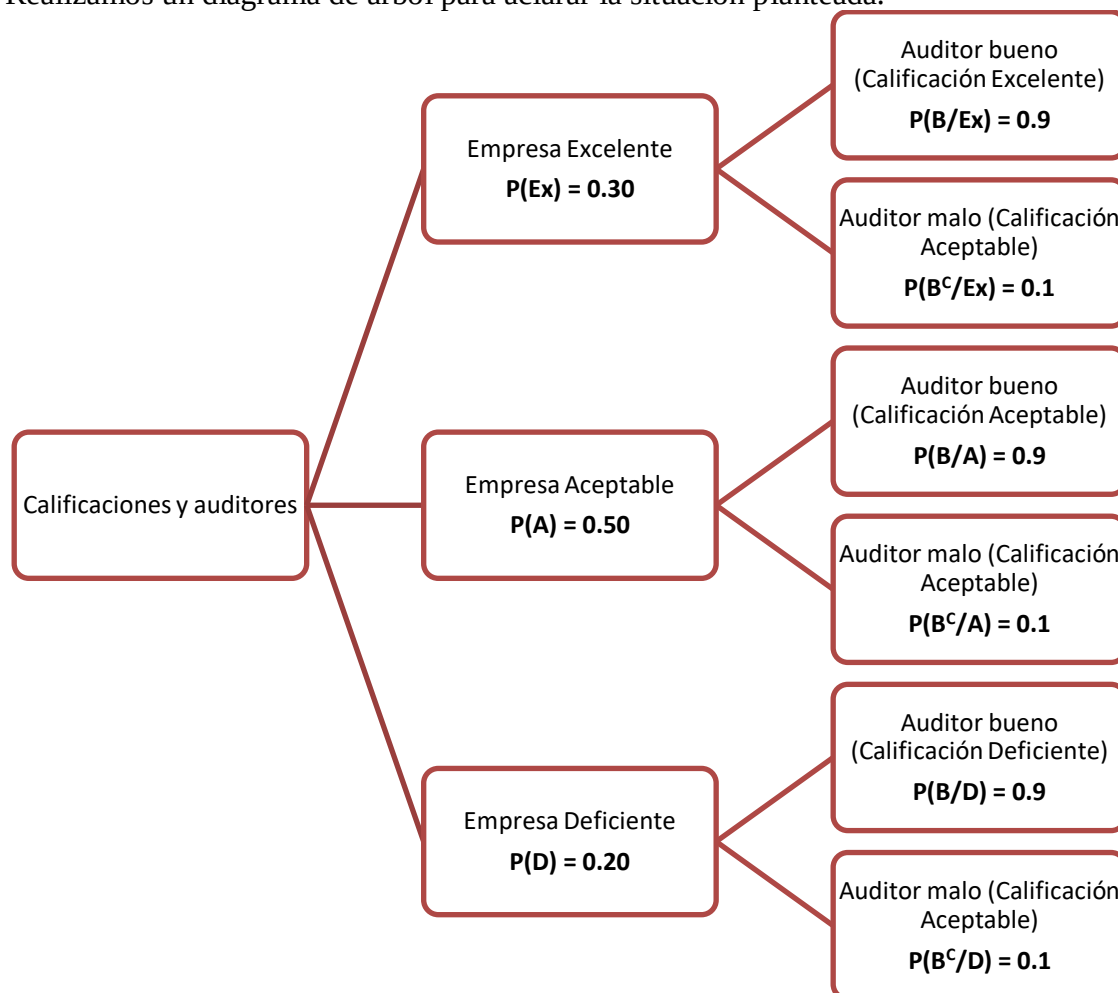
$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,3 \\ P(A) = 0,7 \\ P(B) = 0,4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \neq 0,7 \cdot 0,4 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

Problema 6. El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

- a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»? (3 puntos)
- b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece? (3 puntos)
- c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente? (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Calificación Deficiente}) = P(D)P(B/D) = 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.18}$$

El 18 % de las empresas auditadas obtiene calificación “Deficiente”

- b) Nos piden calcular $P(Ex \cap B) + P(A) + P(D \cap B)$.

$$P(E_x \cap B) + P(A) + P(D \cap B) = P(E_x)P(B/E_x) + P(A) + P(D)P(B/D) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.9 + 0.5 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.27 + 0.5 + 0.18 = \boxed{0.95}$$

El 95 % de las empresas auditadas obtienen una calificación correcta.

c) Nos piden calcular $P(\text{Auditor bueno} / \text{Calificación Aceptable})$.

$$P(\text{Auditor bueno} / \text{Calificación Aceptable}) = \frac{P(\text{Auditor bueno} \cap \text{Calificación Aceptable})}{P(\text{Calificación Aceptable})} =$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(E_x)P(B^c/E_x) + P(A) + P(D)P(B^c/D)} = \frac{0.5 \cdot 0.9}{0.3 \cdot 0.1 + 0.5 + 0.2 \cdot 0.1} = \boxed{\frac{9}{11} \simeq 0.818}$$

PAU Junio 2022 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemes de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

- ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 puntos)
- ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$. Se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$, donde x es la inversión en publicidad ($x \geq 0$) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

- Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)
- Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)
- ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

Problema 5. Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30% tiene menos de 30 años, un 55% tiene entre 30 y 60 años, y el 15% restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

- Llamemos A al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$. (3 puntos)
- Llamemos C al suceso “el cliente seleccionado tiene 30 años o más” y D al suceso “el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(C \cap D)$. (3 puntos)
- Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. (4 puntos)

Problema 6. En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (2,5 puntos)
- Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? (2,5 puntos)
- Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? (2,5 puntos)
- Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)

Soluciones

Problema 1. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos x , y , z a las cantidades que la empresa ha cobrado por el alquiler del primer local, del segundo local y del tercer local por mes.

“Ha cobrado en total 1650 euros en este mes” $\rightarrow x + y + z = 1650$

“La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia” $\rightarrow$ Esto significa que el 5% del primer local más el 10% del segundo, más el 20% del tercero son 132 € $\rightarrow$

$$\frac{5}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z = 132$$

“El alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos” $\rightarrow x = 2(y + z)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ \frac{5}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z = 132 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ 5x + 10y + 20z = 13200 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ x + 2y + 4z = 2640 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + y + z = 1650 \\ 2y + 2z + 2y + 4z = 2640 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 1650 \\ 4y + 6z = 2640 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 550 \\ 2y + 3z = 1320 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 550 - z \\ 2y + 3z = 1320 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(550 - z) + 3z = 1320 \Rightarrow 1100 - 2z + 3z = 1320 \Rightarrow \boxed{z = 220} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 550 - 220 = 330} \Rightarrow \boxed{x = 660 + 440 = 1100}$$

El alquiler es de 1100, 330 y 220 € al mes por el primer, segundo y tercer local, respectivamente.

Problema 2. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)

a) Llamamos “x” al número de cajas tipo A e “y” al número de cajas tipo B.

Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Miel de romero	Miel de azahar	Miel multifloral	Beneficio
Nº cajas A (x)	2x	2x	x	7x
Nº cajas B (y)	y	2y	2y	5y
TOTALES	2x + y	2x + 2y	x + 2y	7x + 5y

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio: $B(x, y) = 7x + 5y$.

Las restricciones del problema son:

“La empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral” $\rightarrow 2x + y \leq 280$; $2x + 2y \leq 300$; $x + 2y \leq 250$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 280 \\ 2x + 2y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 280 \\ x + y \leq 150 \\ x + 2y \leq 250 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

$$2x + y = 280$$

$$x + y = 150$$

$$x + 2y = 250$$

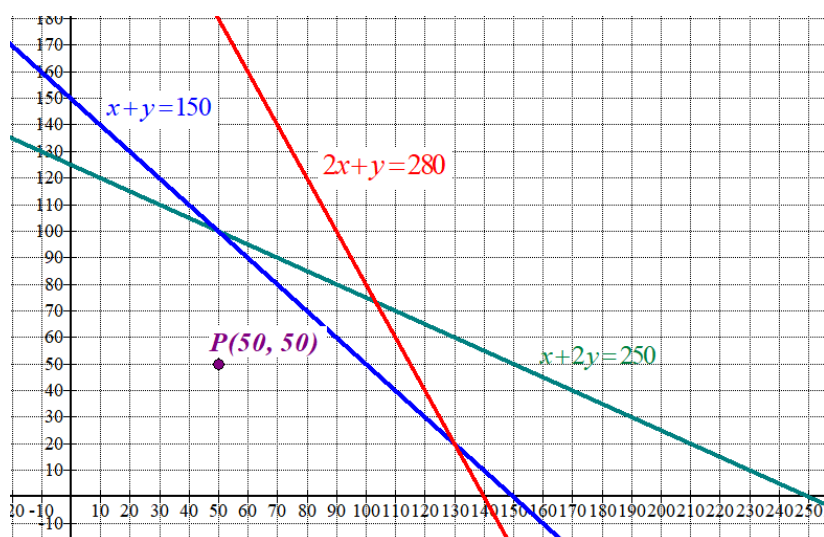
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	y = 280 - 2x
0	280
140	0

x	y = 150 - x
0	150
150	0

x	y = $\frac{250 - x}{2}$
0	125
250	0

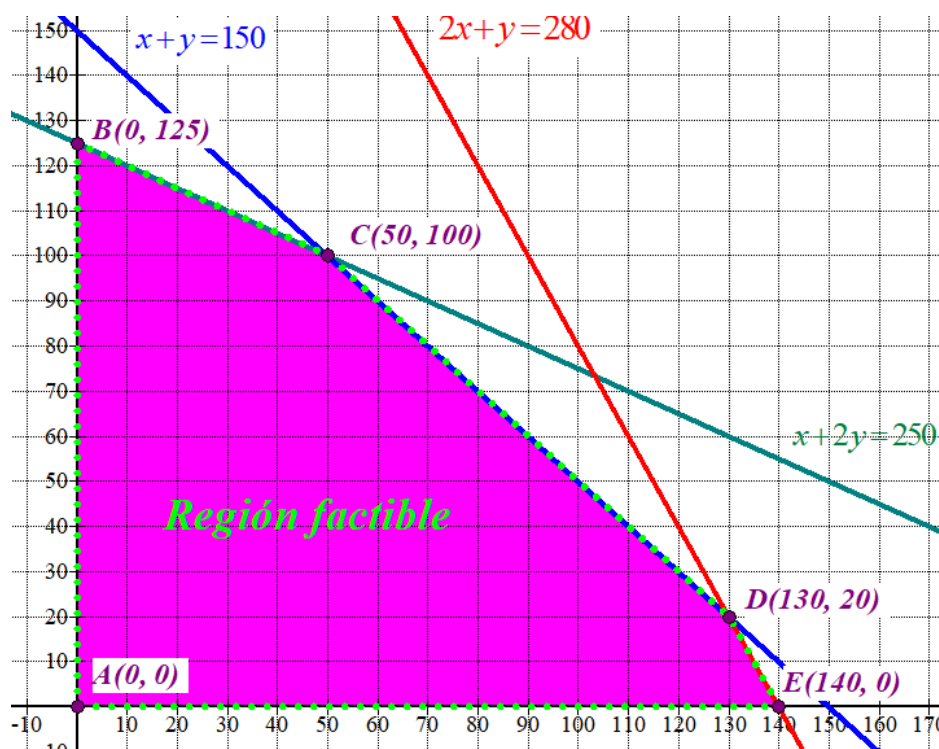
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 280 \\ x + y \leq 150 \\ x + 2y \leq 250 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas roja, verde y azul.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices se obtienen de resolver los sistemas de ecuaciones.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 150 \\ x + 2y = 250 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 150 - y \\ x + 2y = 250 \end{array} \right\} \Rightarrow 150 - y + 2y = 250 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow \boxed{C(50, 100)}$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 150 \\ 2x + y = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 150 - x \\ 2x + y = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 150 - x = 280 \Rightarrow x = 130 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow \boxed{D(130, 20)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 7x + 5y$ en cada uno de los vértices en busca del beneficio máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 125) \rightarrow B(0, 125) = 0 + 625 = 625$$

$$C(50, 100) \rightarrow B(50, 100) = 350 + 500 = 850$$

$$D(130, 20) \rightarrow B(130, 20) = 910 + 100 = 1010 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(140, 0) \rightarrow B(140, 0) = 980 + 0 = 980$$

El beneficio máximo es de 1010 y se produce en el vértice D(130, 20).

Con 130 cajas del tipo A y 20 del tipo B se satisfacen las restricciones con un beneficio máximo de 1010 €.

b) El beneficio máximo es de 1010 €.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$. Se pide:

- a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} \Bigg|_{x=0} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 0 - 2}{(0+1)^2} = -2 \Rightarrow \boxed{A(0, -2)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} \Bigg|_{y=0} \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \Rightarrow \boxed{B(1, 0)} \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \Rightarrow \boxed{C(-2, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, -2), B(1, 0) y C(-2, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^2 - 1 - 2}{(-1+1)^2} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}{\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^2} = \frac{1 + 0 - 0}{(1+0)^2} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + x - 2)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)[(2x+1)(x+1) - 2(x^2 + x - 2)]}{(x+1)^4} = \frac{(2x+1)(x+1) - 2(x^2 + x - 2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{2x} + x + 1 - \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + 4}{(x+1)^3} = \frac{x+5}{(x+1)^3}$$

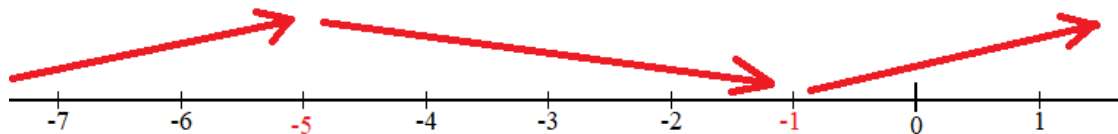
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+5}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -5}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de -1 (excluido del dominio) y -5 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -5)$ tomamos $x = -6$ y la derivada vale $f'(-6) = \frac{-6+5}{(-6+1)^3} = \frac{1}{125} > 0$.
- La función crece en $(-\infty, -5)$.
- En el intervalo $(-5, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-2+5}{(-2+1)^3} = -3 < 0$.
- La función decrece en $(-5, -1)$.
- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0+5}{(0+1)^3} = 5 > 0$.

La función crece en $(-1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ y decrece en $(-5, -1)$.

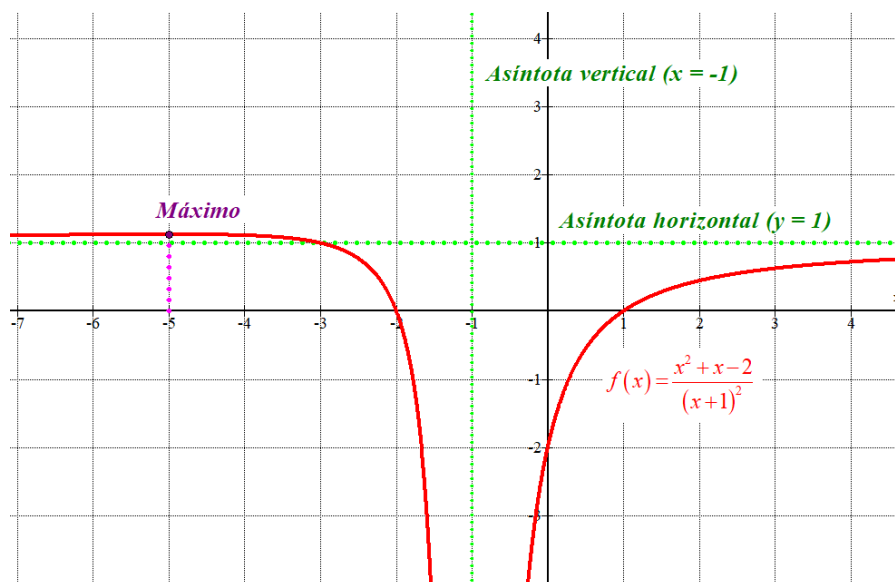
d) Observando el esquema de evolución de la función presenta un máximo en $x = -5$. Como

$$f(-5) = \frac{(-5)^2 - 5 - 2}{(-5+1)^2} = 1.125 \text{ las coordenadas del máximo relativo son } (-5, 1.125).$$

La función no tiene mínimo relativo ($x = -1$ excluido del dominio).

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x+1)^2}$
-6	1.12
-5	1.125
-2	0
0	-2
1	0
2	0.44



Problema 4. En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$, donde x es la inversión en publicidad ($x \geq 0$) y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

- a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)
- b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)
- c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

a) Derivamos la función y buscamos cuando se anula.

$$B(x) = 50000 + 40x - \frac{1}{100}x^2 \Rightarrow B'(x) = 40 - \frac{2}{100}x = 40 - \frac{1}{50}x$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 40 - \frac{1}{50}x = 0 \Rightarrow 2000 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2000}$$

Para averiguar si es un máximo, mínimo o punto de inflexión estudio el signo de la derivada antes y después de 2000.

- Antes de $x = 2000$ probamos con $x = 1000$, la derivada vale

$$B'(1000) = 40 - \frac{1000}{50} = 20 > 0. \text{ La función crece de 0 a 2000 euros de inversión.}$$

- Después de $x = 2000$ probamos con $x = 3000$, la derivada vale

$$B'(3000) = 40 - \frac{3000}{50} = -20 < 0. \text{ La función decrece a partir de 2000 euros de inversión.}$$

Los beneficios tienen un valor máximo con una inversión de 2000 €.

$$B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \left(\frac{2000}{10}\right)^2 = 90000.$$

Se obtiene un beneficio máximo de 90 000 €.

b) Según lo estudiado en el apartado a) tenemos que de 0 € a 2000 € de inversión en publicidad la función beneficios crece y en cantidades superiores a 2000 € de gasto en publicidad los beneficios van decreciendo.

c) Los beneficios para una inversión $x = 0$ son $B(0) = 50000$.

Averiguamos si la función alcanza ese valor en otro momento.

$$\left. \begin{aligned} B(x) &= 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 \\ B(x) &= 50000 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 0 \Rightarrow 40x - \frac{x^2}{100} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4000x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4000 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \boxed{x = 4000} \end{cases}$$

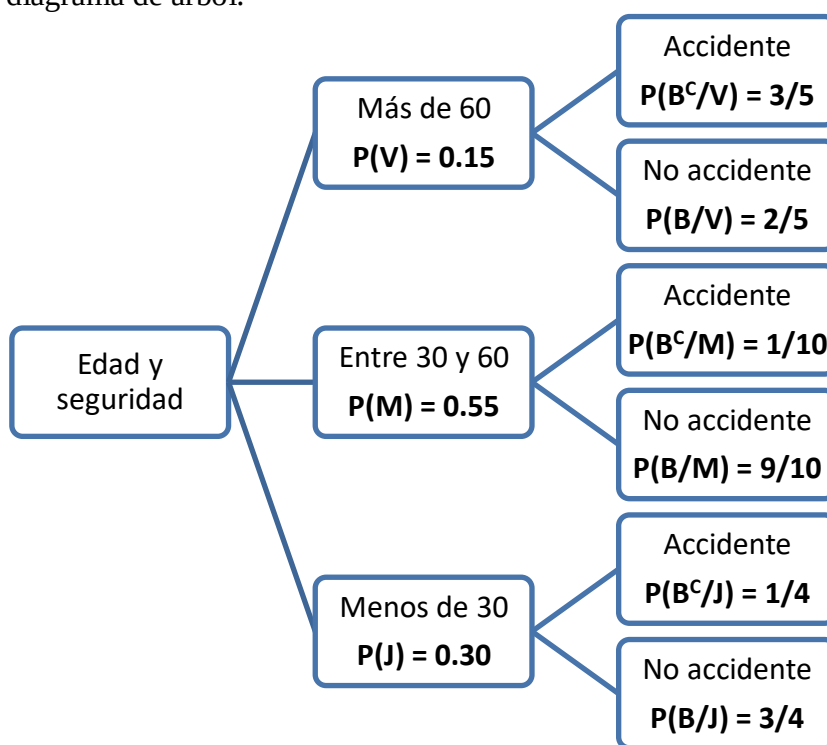
Con una inversión de 4000 € en publicidad se consiguen unos beneficios de 50000. Como la función beneficios decrece a partir de 2000 € podemos afirmar que invirtiendo más de 4000 € en publicidad consigues menos beneficios que si no inviertes nada.

Problema 5. Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30% tiene menos de 30 años, un 55% tiene entre 30 y 60 años, y el 15% restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

- Llamemos A al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$. (3 puntos)
- Llamemos C al suceso “el cliente seleccionado tiene 30 años o más” y D al suceso “el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(C \cap D)$. (3 puntos)
- Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. (4 puntos)

Llamamos V al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años”, M al suceso “el cliente seleccionado tiene entre 30 y 60 años”, J al suceso “el cliente seleccionado tiene menos de 30 años” y B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente año pasado”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Tenemos que $A = V$.

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(V \cup B) = P(V) + P(B) - P(V \cap B) = \\
 &= 0.15 + \left[\cancel{P(V)P(B^c/V)} + P(M)P(B/M) + P(J)P(B/J) \right] - \cancel{P(V)P(B^c/V)} = \\
 &= 0.15 + 0.55 \cdot \frac{9}{10} + 0.30 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{0.87}
 \end{aligned}$$

- b) Tenemos que $C = J^c$. El suceso C es el contrario del suceso J .
También $D = B^c$. El suceso D es el contrario de B .

$$P(C \cap D) = P(J^c \cap B^c) = P(V \cap B^c) + P(M \cap B^c) =$$

$$= P(V)P(B^c/V) + P(M)P(B^c/M) = 0.15 \cdot \frac{3}{5} + 0.55 \cdot \frac{1}{10} = \boxed{0.145}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(V^c/B^c) &= \frac{P(V^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(J \cap B^c) + P(M \cap B^c)}{P(V)P(B^c/V) + P(M)P(B^c/M) + P(J)P(B^c/J)} = \\ &= \frac{P(J)P(B^c/J) + P(M)P(B^c/M)}{P(V)P(B^c/V) + P(M)P(B^c/M) + P(J)P(B^c/J)} = \\ &= \frac{0.55 \cdot \frac{1}{10} + 0.3 \cdot \frac{1}{4}}{0.15 \cdot \frac{3}{5} + 0.55 \cdot \frac{1}{10} + 0.3 \cdot \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{13}{22} \approx 0.59} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Cambiamos las probabilidades a valores absolutos.

Suponemos una población de 100 personas o múltiplo de esta cantidad. Supongamos 200 clientes. Aumentamos el número para evitar los decimales.

Menos de 30 años son el 30 %, es decir $0.30 \cdot 200 = 60$ clientes menores de 30 años.

Entre 30 y 60 son el 55 %, es decir $0.55 \cdot 200 = 110$ clientes entre 30 y 60 años.

Mayores de 60 son el 15 %, es decir $0.15 \cdot 200 = 30$ clientes mayores de 60 años.

Entre los clientes de menos de 30 años (60), 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado $\rightarrow \frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ menores de 30 años y no presentaron parte de accidente.

Entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años (110), 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado $\rightarrow \frac{9}{10} \cdot 110 = 99$ tienen entre 30 y 60 y no presentaron parte.

Entre los clientes de más de 60 años (30), 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado $\rightarrow \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$ tienen más de 60 años y no presentaron parte de accidente.

Para facilitar la claridad y disponibilidad de los datos los ponemos en una tabla.

	Menos de 30 años	Entre 30 y 60 años	Más de 60 años	
No presentan parte (B)	45	99	12	
Presentan parte (D)				
	60	110	30	200

Completamos la tabla.

	Menos de 30 años	Entre 30 y 60 años	Más de 60 años	
No presentan parte (B)	45	99	12	156
Presentan parte (D)	15	11	18	44
	60	110	30	200

Podemos aplicar la regla de Laplace para responder a lo planteado.

$$\text{a) } P(A \cup B) = P(\text{Más de 60 años o No presenta parte}) = \frac{45 + 99 + 12 + 18}{200} = \boxed{0.87}$$

$$\text{b) } P(C \cap D) = P(\text{Más de 30 años y Presenta parte}) = \frac{11 + 18}{200} = \boxed{0.145}$$

$$\text{c) } P(\text{Tiene 60 años o menos / Presentó parte}) = \frac{15 + 11}{44} = \boxed{\frac{13}{22} \approx 0.59}$$

Problema 6. En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (2,5 puntos)
- b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? (2,5 puntos)
- c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? (2,5 puntos)
- d) Llamemos A al suceso “el jugador no gana” y llamemos B al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)

Los sucesos lanzar moneda o dado son independientes $\rightarrow$

$$P(\text{cara, cara, 2}) = P(\text{cara}) \cdot P(\text{cara}) \cdot P(2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Ganar}) &= P(\text{Cara}) \cdot P(\text{Cara}) \cdot P(\text{Par}) + P(\text{Cara}) \cdot P(\text{Cruz}) \cdot P(5 \text{ o } 6) + \\ &+ P(\text{Cruz}) \cdot P(\text{Cara}) \cdot P(5 \text{ o } 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \boxed{\frac{7}{24} \approx 0.2917} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(\text{Sacar dos caras} / \text{Ha ganado}) =$$

$$= \frac{P(\text{Gana sacando dos caras})}{P(\text{Gana})} = \frac{P(\text{Cara})P(\text{Cara})P(\text{Par})}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

$$\text{c) } P(\text{Sacar un 5} / \text{Ha ganado}) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(\text{Gana sacando un 5})}{P(\text{Gana})} = \frac{P(\text{Cruz})P(\text{Cara})P(5) + P(\text{Cara})P(\text{Cruz})P(5)}{\frac{7}{24}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \boxed{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

$$\text{d) Para que } A \text{ y } B \text{ sean independientes deba cumplirse } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

$$P(A) = P(\text{No gana}) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24} \qquad P(B) = P(\text{Sacar un 6}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{No ganar sacando un 6}) = P(\text{Cruz, Cruz, 6}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$\text{¿} P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{?} \Rightarrow \text{¿} \frac{1}{24} = \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{6} \text{?} \Rightarrow \text{¿} \frac{1}{24} = \frac{17}{144} \text{?} \quad \text{¡No es cierto!}$$

A y B no son independientes.

PAU Julio 2021 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2021	CONVOCATORIA: JULIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniano, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcula la inversa de la matriz $A-B$. (3 puntos)
- Calcula la matriz X de dimensión 2×3 , que satisface la ecuación $XA + C = XB$. (4 puntos)
- ¿Es posible hacer el producto BC ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 4x^2 + 800x. \quad \text{Gastos: } G(x) = 6x^2 + 460x + 672.$$

- a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? (4 puntos)
- b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? (3 puntos)
- c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

- a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. (4 puntos)
- b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. (3 puntos)
- c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? (3 puntos)

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

- a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. (2,5 puntos)
- b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. (2,5 puntos)
- c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. (2,5 puntos)
- d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso? (2,5 puntos)

Soluciones

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniano, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Llamamos “x” a los kilos de café colombiano de la mezcla, “y” a los kilos de café brasileño y “z” a los kilos de café keniano.

Supongamos que hacemos 100 kg de café con la mezcla pedida $\rightarrow x + y + z = 100$

El precio de la mezcla es 8,5 €/kg, el café colombiano a 10 €/kg, a 6 €/kg el brasileño y a 8 €/kg el keniano $\rightarrow 10x + 6y + 8z = 8.5 \cdot 100$

La cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño $\rightarrow x = 3y$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 6y + 8z = 8.5 \cdot 100 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 6y + 8z = 850 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y + z = 100 \\ 30y + 6y + 8z = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 100 \\ 36y + 8z = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 100 - 4y \\ 36y + 8z = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow 36y + 8(100 - 4y) = 850 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36y + 800 - 32y = 850 \Rightarrow 4y = 50 \Rightarrow \boxed{y = \frac{50}{4} = 12.5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 100 - 4 \cdot 12.5 = 50} \\ \boxed{x = 3 \cdot 12.5 = 37.5} \end{array} \right.$$

La solución del sistema es $x = 37.5$, $y = 12.5$, $z = 50$.

Los porcentajes de cada café en la mezcla es 37.5 % de café colombiano, 12.5 % de café brasileño y 50 % de café keniano.

De 8 partes se echan 4 de café keniano, 3 de café brasileño y 1 de café colombiano.

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. (3 puntos)
 b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3 , que satisface la ecuación $XA+C=XB$. (4 puntos)
 c) ¿Es posible hacer el producto BC ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

a) Calculamos la expresión de la matriz $A-B$.

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$|A-B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0. \text{ Existe la inversa.}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A-B)^T)}{|A-B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XA+C=XB \Rightarrow XA-XB=-C \Rightarrow X(A-B)=-C \Rightarrow X=-C(A-B)^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices y hacemos las operaciones para obtener X .

$$X = -C(A-B)^{-1}$$

$$X = - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5-2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}+1 & 2-\frac{2}{3} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

c) Comprobamos si es posible el producto BC.

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow \text{¡¡¡¡NOOO!!!!} \quad \text{¡¡}3 \neq 2\text{!!}$

No es posible hacer BC, pues el número de columnas de B (3) no coincide con el número de filas de C (2).

Comprobamos si es posible calcular la matriz CB.

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3 \quad \text{¡¡¡¡SIIII!!!!} \quad \text{¡¡}3 = 3\text{!!}$

Si es posible hacer CB, pues el número de columnas de C (3) es igual al número de filas de B (3). Realizamos el producto.

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 10+3 \\ 1 & 1+6 & 4+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

- a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

a) La función $f(x)$ es un cociente de dos polinomios, su dominio lo forman todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} = -2 \\ \frac{2+6}{2} = 4 \end{cases}$$

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

Puntos de corte con los ejes coordenados.

Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 36}{0^2 - 0 - 8} = \frac{36}{8} = 4.5$. El punto de corte es $(0, 4.5)$.

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} = \pm 6$. Los puntos de corte son $(-6, 0)$ y $(6, 0)$

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(-2)^2 - 36}{(-2)^2 - 2(-2) - 8} = \frac{-32}{0} = \infty$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical

¿ $x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4^2 - 36}{4^2 - 2(4) - 8} = \frac{-20}{0} = \infty$$

La recta $x = 4$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{36}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{8}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{36}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}} = \frac{1 - \frac{36}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} - \frac{8}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$.

c) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x - 8) - (2x - 2)(x^2 - 36)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 4x^2 - 16x - \cancel{2x^3} + 72x + 2x^2 - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 56x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 56x - 72}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 56x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 - 28x + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 144}}{2} = \frac{28 \pm 8\sqrt{10}}{2} = 14 \pm 4\sqrt{10} = \begin{cases} 14 - 4\sqrt{10} \approx \boxed{1.35} \\ 14 + 4\sqrt{10} \approx \boxed{26.65} \end{cases}$$

Veamos cómo evoluciona el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos. Añadimos los puntos de discontinuidad ($x = -2$ y $x = 4$)

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-2(-3)^2 + 56(-3) - 72}{((-3)^2 - 2(-3) - 8)^2} = \frac{-258}{49} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2)$$

- En $(-2, 14 - 4\sqrt{10})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-72}{(-8)^2} < 0$.

La función decrece en $(-2, 14 - 4\sqrt{10})$

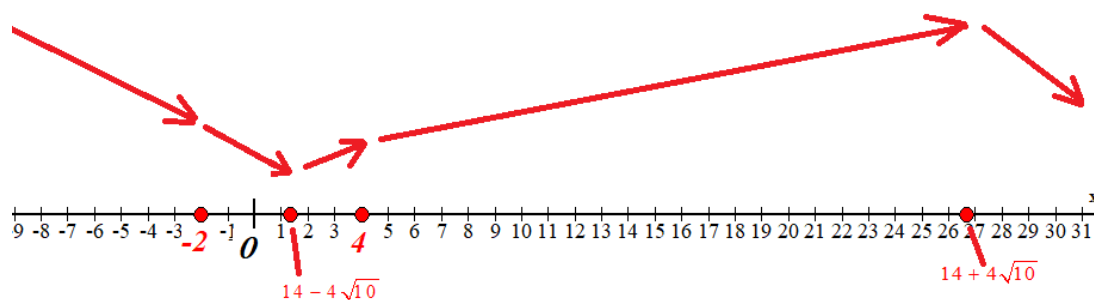
- En $(14 - 4\sqrt{10}, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-18 + 168 - 72}{(9 - 6 - 8)^2} = \frac{78}{25} > 0$. La función crece en $(14 - 4\sqrt{10}, 4)$

- En $(4, 14 + 4\sqrt{10})$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = \frac{-200 + 560 - 72}{(100 - 20 - 8)^2} = \frac{288}{72^2} > 0$. La función crece en $(4, 14 + 4\sqrt{10})$

- En $(14 + 4\sqrt{10}, +\infty)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale

$$f'(100) = \frac{-20000 + 5600 - 72}{(10000 - 200 - 8)^2} = \frac{-14472}{(10000 - 200 - 8)^2} < 0. \text{ La función decrece en } (14 + 4\sqrt{10}, +\infty)$$

La función sigue el esquema siguiente.

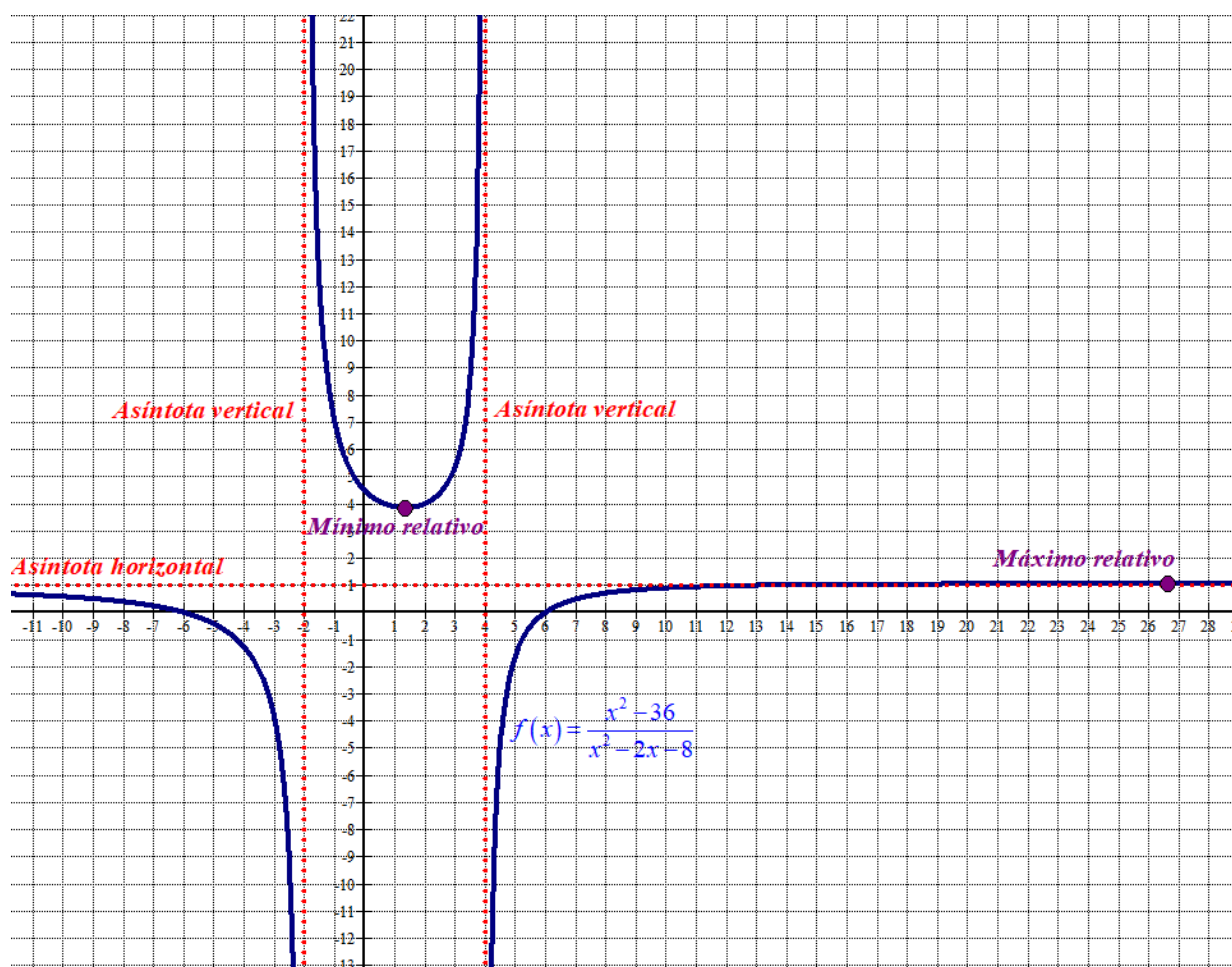


La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 14 - 4\sqrt{10}) \cup (14 + 4\sqrt{10}, +\infty)$ y crece en $(14 - 4\sqrt{10}, 4) \cup (4, 14 + 4\sqrt{10})$.

- d) Por el análisis anterior la función presenta un mínimo relativo en $x = 14 - 4\sqrt{10}$, pues en este punto cambia de decrecer a crecer. Y un máximo relativo en $x = 14 + 4\sqrt{10}$ pues en este punto la función cambia de crecer a decrecer.

Como $f(14 - 4\sqrt{10}) \approx 3.84$ y $f(14 + 4\sqrt{10}) \approx 1.039$ las coordenadas del mínimo relativo son (1.35, 3.84) y las del máximo relativo son (26.65, 1.039).

- e) Dibujamos las asíntotas, marcamos el máximo y el mínimo relativo y representamos.



Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 4x^2 + 800x. \quad \text{Gastos: } G(x) = 6x^2 + 460x + 672.$$

- a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? (4 puntos)
- b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? (3 puntos)
- c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

a) El beneficio $B(x)$ es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - (6x^2 + 460x + 672)$$

$$B(x) = 4x^2 + 800x - 6x^2 - 460x - 672 = -2x^2 + 340x - 672$$

Comprobamos cuando es mayor o igual que 0.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 340x - 672 = 0 \Rightarrow x^2 - 170x + 336 = 0 \Rightarrow x = \frac{170 \pm \sqrt{(-170)^2 - 4(336)}}{2}$$

$$x = \frac{170 \pm 166}{2} = \begin{cases} \frac{170 - 166}{2} = 2 \\ \frac{170 + 166}{2} = 168 \end{cases}$$

Para $x < 2$, por ejemplo, $x = 1 \rightarrow B(1) = -2 + 340 - 672 = -334 < 0$ los beneficios son negativos.

Para $2 < x < 168$, por ejemplo, $x = 10 \rightarrow B(10) = -200 + 3400 - 672 = 2528 > 0$ los beneficios son positivos.

El mínimo de unidades a fabricar para que el beneficio sea positivo es de 2 unidades.

b) Derivamos la función beneficio e igualamos a cero.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -4x + 340 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -4x + 340 = 0 \Rightarrow x = \frac{340}{4} = 85$$

Sustituimos en la segunda derivada $x = 85$.

$$B'(x) = -4x + 340 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(85) = -4 < 0$$

La función $B(x)$ presenta un máximo en $x = 85$.

Como $B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$ tenemos que el beneficio máximo se consigue con 85 unidades y dicho beneficio máximo es de 13778 €.

c) Sabemos que a partir de $x = 85$ la función es decreciente. Si la cantidad mínima a producir es de 100 unidades con estas unidades se obtendrá el máximo beneficio.

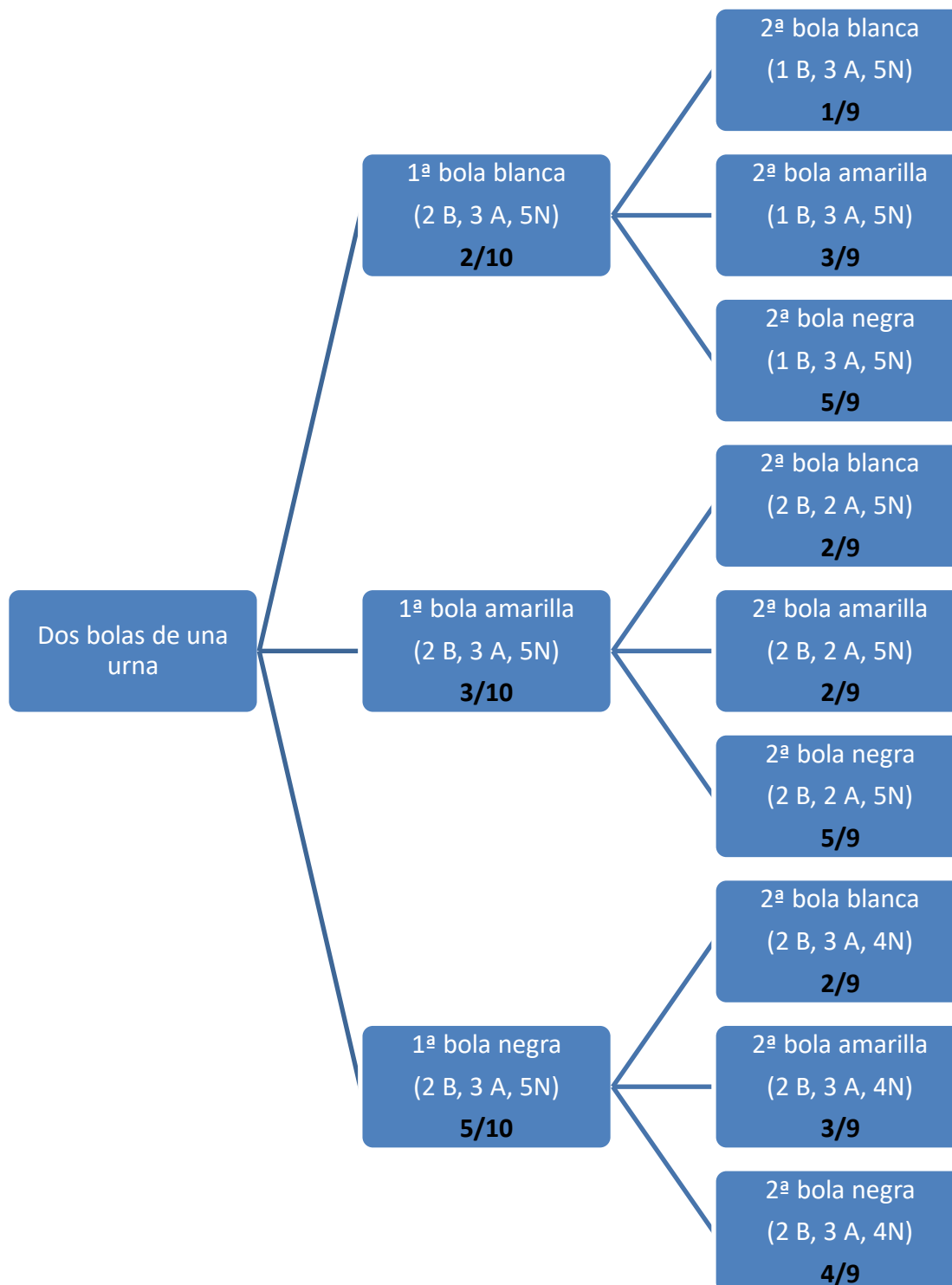
$$B(100) = -20000 + 34000 - 672 = 13328$$

El beneficio máximo pasa a ser de 13328 € con la fabricación de 100 unidades.

Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

- a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. (4 puntos)
 b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. (3 puntos)
 c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B1 y B2 a sacar bola blanca en primera o segunda extracción respectivamente. De forma análoga llamamos A1 y A2 a sacar amarilla y N1 y N2 a sacar negra en primera o segunda extracción.

- a) Para conseguir el primer o segundo premio debe sacar dos blancas o dos amarillas.

$$\begin{aligned} P((B1 \cap B2) \cup (A1 \cap A2)) &= P(B1 \cap B2) + P(A1 \cap A2) = \\ &= P(B1)P(B2 / B1) + P(A1)P(A2 / A1) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{4}{45} \approx 0.089} \end{aligned}$$

- b) Consigue el tercer premio si una bola es blanca y la otra no.

Esto se consigue de 4 formas distintas: $B1 \cap A2$, $B1 \cap N2$, $A1 \cap B2$ y $N1 \cap B2$.

La probabilidad del suceso es la suma de la probabilidad de cada uno de los enumerados.

$$\begin{aligned} P(\text{Una sola bola blanca}) &= P(B1 \cap A2) + P(B1 \cap N2) + P(A1 \cap B2) + P(N1 \cap B2) = \\ &= P(B1)P(A2 / B1) + P(B1)P(N2 / B1) + P(A1)P(B2 / A1) + P(N1)P(B2 / N1) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{16}{45} \approx 0.356} \end{aligned}$$

- c) La probabilidad de obtener el primer, segundo o tercer premio es la suma de las probabilidades de los dos apartados anteriores.

$$P(\text{Obtener premio}) = \frac{4}{45} + \frac{16}{45} = \frac{20}{45}$$

La probabilidad pedida es una probabilidad condicionada. Aplicamos teorema de Bayes.

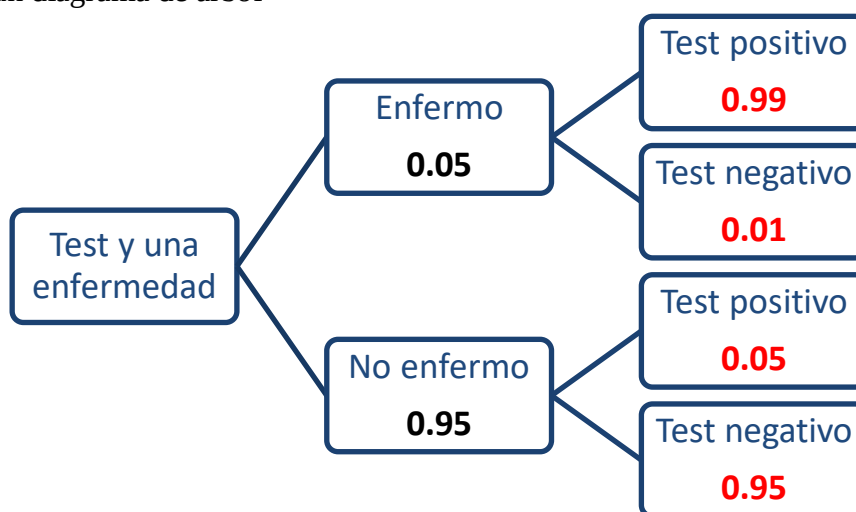
$$P(\text{Obtener premio 3º} / \text{Ha obtenido premio}) = \frac{P(\text{Obtener premio 3º y obtener premio})}{P(\text{Obtener premio})} =$$

$$= \frac{P(\text{Obtener premio 3º})}{P(\text{Obtener premio})} = \frac{\frac{16}{45}}{\frac{20}{45}} = \frac{16}{20} = \boxed{\frac{4}{5} = 0.8}$$

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

- La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. (2,5 puntos)
- La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. (2,5 puntos)
- Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso? (2,5 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol



Llamamos A = Estar enfermo, $\bar{A}$ = No enfermo. B = Test positivo, $\bar{B}$ = Test negativo

- a) Nos piden calcular $P(A/B)$, es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.99}{0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.05} = \boxed{\frac{99}{194} \approx 0.51}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A})}{P(A)P(\bar{B}/A) + P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A})} =$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.95}{0.05 \cdot 0.01 + 0.95 \cdot 0.95} = \boxed{\frac{1805}{1806} \approx 0.9994}$$

- c) Dar el resultado correcto es que dé positivo cuando estás enfermo y dar negativo cuando no estas enfermo.

$$\begin{aligned}P\left((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A}) = \\&= 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.95 = \boxed{\frac{119}{125} = 0.952}\end{aligned}$$

d) Si cambiamos la probabilidad de estar enfermo a 0.01 entonces la probabilidad de no estarlo es de 0.99. Cambiamos estos datos en lo realizado en el apartado a).

$$\begin{aligned}P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A})} = \\&= \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.05} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.167}\end{aligned}$$

PAU Junio 2021 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT CONVOCATÒRIA: JUNY 2021	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CONVOCATORIA: JUNIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II
BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

- ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? (8 puntos)
- ¿cuál sería dicho coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2. En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

- Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. (2 puntos)
- Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). (4 puntos)
- Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100},$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 puntos)

Problema 5. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B/A) = 0,25$ y $P(B^c) = 0,75$, se pide

- ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué? (2,5 puntos)
- Calcula $P(A \cup B)$. (2,5 puntos)
- Calcula $P(A/B^c)$. (2,5 puntos)
- Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$. (2,5 puntos)

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Problema 6. Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30% de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40% de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

- Si el 34% de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. (4 puntos)
- Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)
- Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

- a) ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? (8 puntos)
- b) ¿cuál sería dicho coste mínimo? (2 puntos)

a) Llamamos “x” al número de sacos semanales a comprar de la marca A e “y” al número de sacos semanales a comprar de B.

Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Kg de origen animal	Kg de origen vegetal	Coste semanal
Nº sacos A (x)	7x	3x	12x
Nº sacos B (y)	6y	4y	11y
TOTALES	7x + 6y	3x + 4y	12x + 11y

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste semanal: $C(x, y) = 12x + 11y$.

Las restricciones del problema son:

“Se necesitan diariamente como mínimo $100 \cdot 5 = 500$ kg de pienso de origen animal. A la semana harán falta $7 \cdot 500 = 3500$ kg” $\rightarrow 7x + 6y \geq 3500$

“Se necesitan diariamente como mínimo $100 \cdot 3 = 300$ kg de pienso de origen vegetal. A la semana harán falta $7 \cdot 300 = 2100$ kg” $\rightarrow 3x + 4y \geq 2100$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

$$7x + 6y = 3500$$

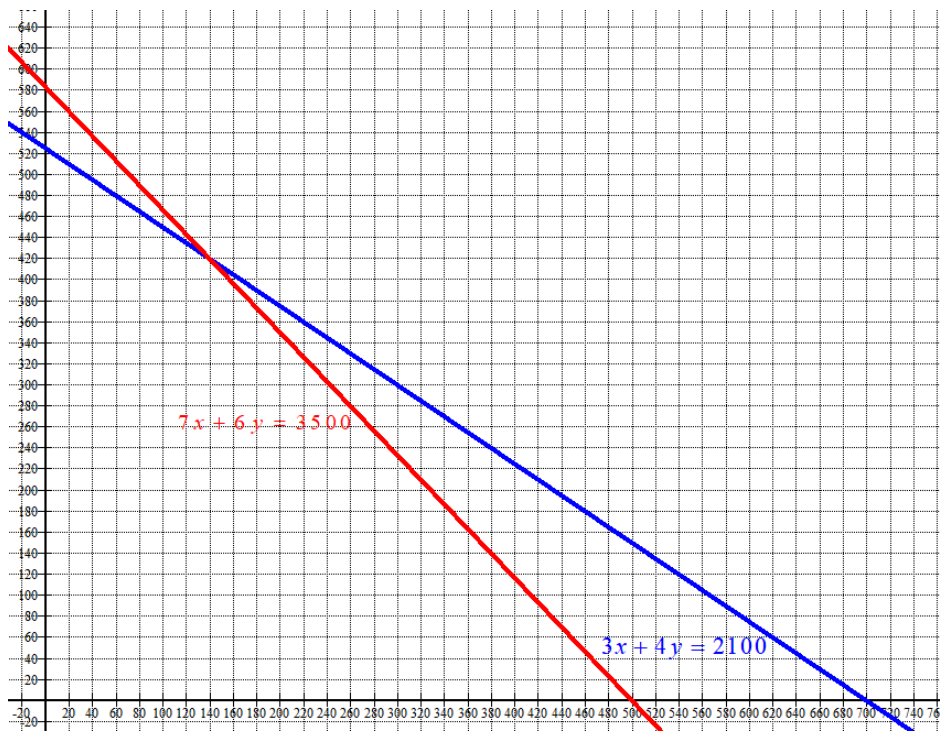
x	y = $\frac{3500 - 7x}{6}$
500	0
140	420

$$3x + 4y = 2100$$

x	y = $\frac{2100 - 3x}{4}$
0	525
140	420

$$x \geq 0; y \geq 0$$

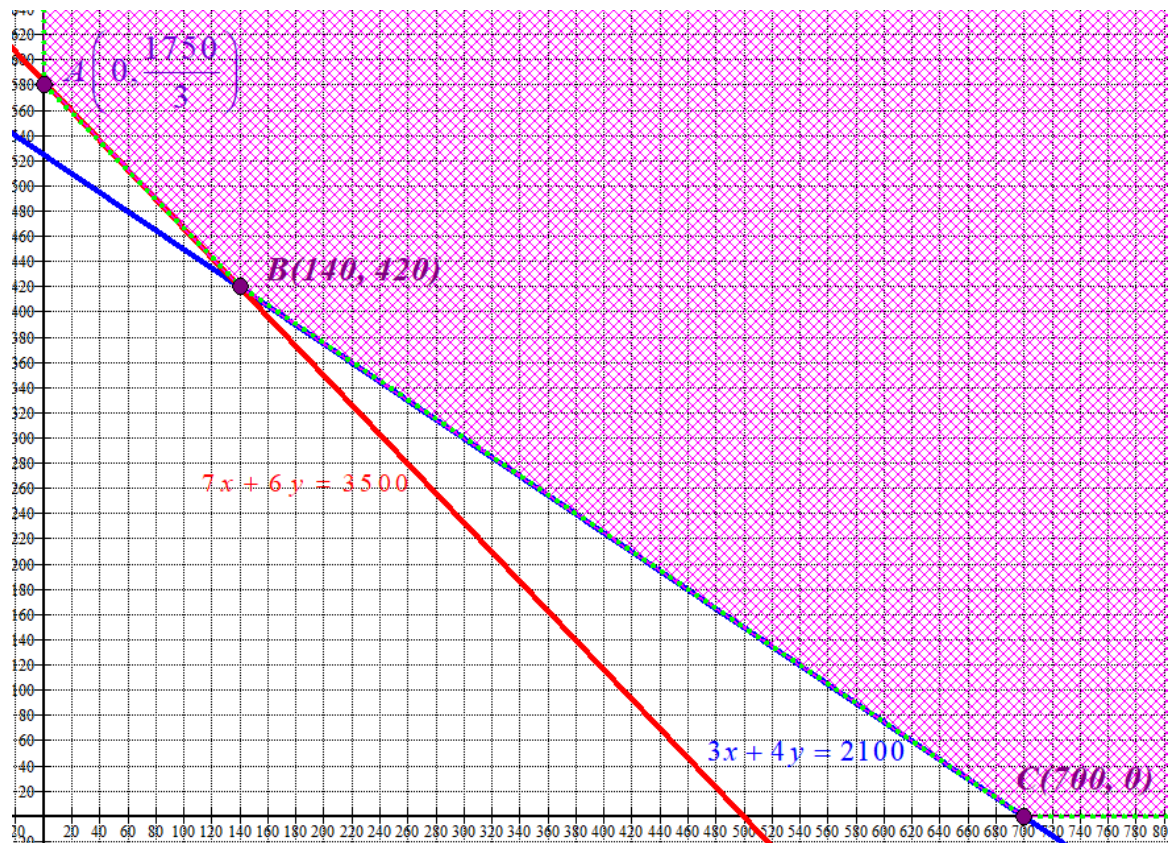
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer

cuadrante que está por encima de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices se obtienen de resolver los sistemas de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 6y = 3500 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y = 3500 \Rightarrow y = \frac{3500}{6} = \frac{1750}{3} \Rightarrow \boxed{A\left(0, \frac{1750}{3}\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 6y = 3500 \\ 3x + 4y = 2100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplico por 3 la ecuación 1ª} \\ \text{multiplico por } -7 \text{ la ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 21x + 18y = 10500 \\ -21x - 28y = -14700 \end{array} \right\}$$

$$\hline -10y = -4200$$

$$\Rightarrow y = \frac{4200}{10} = 420 \Rightarrow 3x + 4 \cdot 420 = 2100 \Rightarrow 3x = 2100 - 1680 = 420 \Rightarrow x = \frac{420}{3} = 140$$

$$\boxed{B(140, 420)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 2100 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 2100 \Rightarrow x = \frac{2100}{3} = 700 \Rightarrow \boxed{C(700, 0)}$$

Valoramos la función coste semanal $C(x, y) = 12x + 11y$ en cada uno de los vértices en busca del coste mínimo.

$$A\left(0, \frac{1750}{3}\right) \rightarrow C\left(0, \frac{1750}{3}\right) = 11 \frac{1750}{3} = 6416,66$$

$$B(140, 420) \rightarrow C(140, 420) = 6300$$

$$C(700, 0) \rightarrow C(700, 0) = 8400$$

El coste mínimo semanal se produce en el vértice B(140, 420).

Con 140 sacos de A y 420 de B se satisfacen las restricciones con un coste semanal mínimo (6300 €)

b) El coste mínimo es de 6300 €.

Problema 2. En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos “x” al número de trabajadores de categoría A, “y” a los de categoría B y “z” a los de categoría C.

“Es una empresa de 57 trabajadores” $\rightarrow x + y + z = 57$

“El gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros, siendo el salario de los trabajadores de la categoría A de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros” $\rightarrow$
 $800x + 1000y + 2000z = 62000$

“Como el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A el nuevo salario es de $800 \cdot 1.04 = 832$ euros, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C y será de $2000 \cdot 0.90 = 1800$ euros y con este cambio el gasto en salario baja un 2 % por lo que es $62000 \cdot 0.98 = 60760$ euros” $\rightarrow$
 $832x + 1000y + 1800z = 60760$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000 \\ 832x + 1000y + 1800z = 60760 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ 4x + 5y + 10z = 310 \\ 104x + 125y + 225z = 7595 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 57 - y - z \\ \Rightarrow 4x + 5y + 10z = 310 \\ 104x + 125y + 225z = 7595 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4(57 - y - z) + 5y + 10z = 310 \\ 104(57 - y - z) + 125y + 225z = 7595 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 228 - 4y - 4z + 5y + 10z = 310 \\ 5928 - 104y - 104z + 125y + 225z = 7595 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 6z = 82 \\ 21y + 121z = 1667 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 82 - 6z \\ 21y + 121z = 1667 \end{array} \right\} \Rightarrow 21(82 - 6z) + 121z = 1667 \Rightarrow 1722 - 126z + 121z = 1667 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z = 55 \Rightarrow \boxed{z = \frac{55}{5} = 11} \Rightarrow \boxed{y = 82 - 6 \cdot 11 = 16} \Rightarrow \boxed{x = 57 - 16 - 11 = 30}$$

En la empresa hay 30 trabajadores de la categoría A, 16 de B y 11 de C.

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

- a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio contiene a todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \boxed{\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$$

Si $x=0$ entonces $f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4} = -0.25$. Un punto de corte con el eje OY es $A(0, -0.25)$.

Si $y=0$ entonces $0 = \frac{1-x^2}{x^2-4} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$. Los puntos de corte con el eje OX son $B(1, 0)$ y $C(-1, 0)$

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

$\{x = -2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-(-2)^2}{(-2)^2-4} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

$\{x = 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2^2}{2^2-4} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{-1}{1} = -1$$

La asíntota horizontal es $y = -1$

c) Derivamos e igualamos a cero.

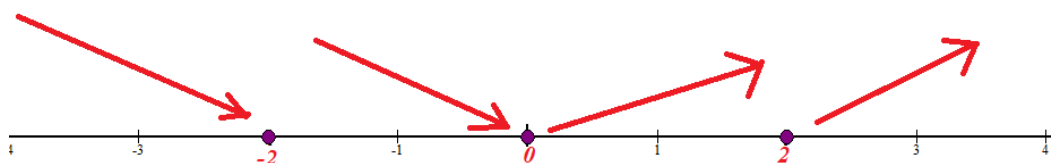
$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(x^2-4) - 2x(1-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x=0$, añadiendo en el estudio los valores excluidos del dominio, pues son puntos de discontinuidad de la función.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{-18}{((-3)^2 - 4)^2} = -\frac{18}{25} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -2)$.
- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-6}{((-1)^2 - 4)^2} = -\frac{6}{9} < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{6}{(1^2 - 4)^2} = \frac{6}{9} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{18}{(3^2 - 4)^2} = \frac{18}{25} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



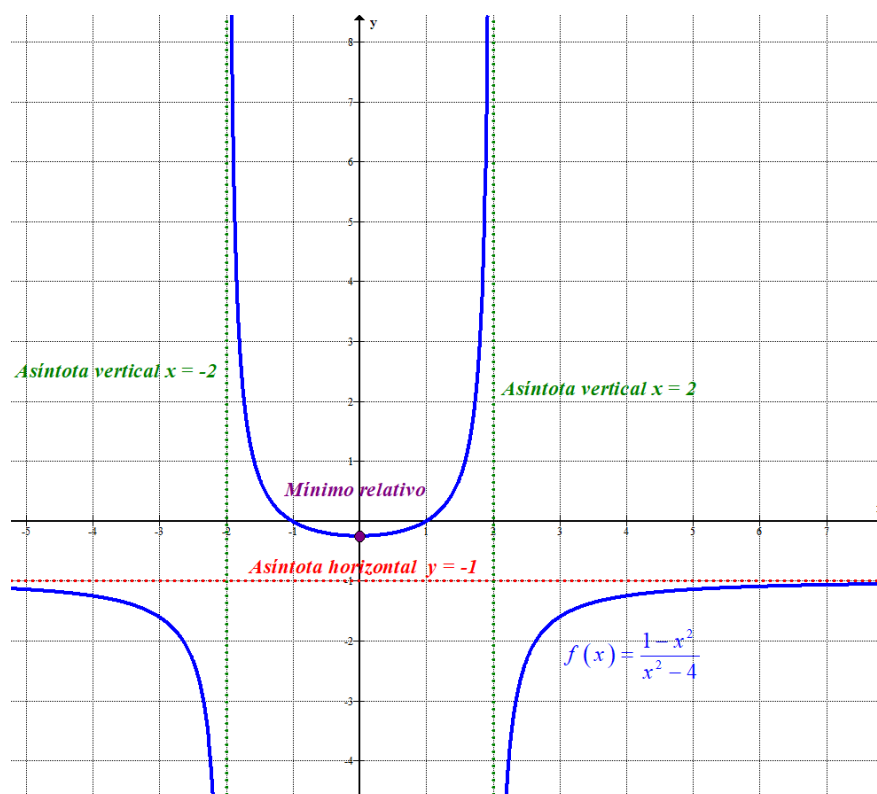
La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

d) Por el esquema anterior sabemos que la función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4} = -0.25$ el mínimo relativo tiene coordenadas $A(0, -0.25)$.

e) Con toda la información obtenida podemos dibujar la gráfica de la función, solo añadimos una tabla de valores.

x	$y = \frac{1-x^2}{x^2-4}$
-4	-1.25
-3	-1.6
-1	0
0	-0.25 Mínimo
1	0
3	-1.6
4	-1.25



Problema 4. Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

- a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. (2 puntos)
 b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). (4 puntos)
 c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100},$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 puntos)

- a) Nos piden calcular $f(0)$.

$$f(0) = 36600 + 1500 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 = 36600$$

La capacidad es de 36.600.000 m³.

- b) Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \Rightarrow f'(x) = 1500 - 30x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1500 - 30x = 0 \Rightarrow x = \frac{1500}{30} = 50 \text{ es un punto crítico de la función}$$

$$f''(x) = -30 \Rightarrow f''(50) = -30 < 0 \rightarrow x = 50 \text{ es un máximo relativo}$$

Han de pasar 50 años para alcanzar la capacidad máxima.

Como $f(50) = 36600 + 1500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 = 74100$, tenemos que la capacidad máxima será de 74.100.000 m³ de gas.

- c) Consideramos que la explotación deja de ser rentable cuando los beneficios son iguales o menores que 0. Averiguamos en que momento los beneficios son nulos.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100} \\ g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - \frac{3x^2}{12100} = 0 \Rightarrow 3 = \frac{3x^2}{12100} \Rightarrow 36300 = 3x^2 \Rightarrow \frac{36300}{3} = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12100 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{12100} = \pm 110$$

No tenemos en cuenta el valor negativo de x .

El beneficio es 0 para $x = 110$. Vemos como son los beneficios antes y después de los 110 años.

En $(0, 110)$ tomamos $x = 10$ y el beneficio es $g(10) = 3 - \frac{3 \cdot 10^2}{12100} = 2.975 > 0$. Es rentable.

En $(110, +\infty)$ tomamos $x = 120$ y el beneficio es $g(120) = 3 - \frac{3 \cdot 120^2}{12100} = -0.57 < 0$. No es rentable.

La explotación deja de ser rentable a los 110 años y su capacidad en dicho momento es de $f(110) = 36600 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$ miles de metros cúbicos de gas.

Problema 5. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0,4$, $P(B/A) = 0,25$ y $P(B^c) = 0,75$, se pide

a) ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué? (2,5 puntos)

b) Calcula $P(A \cup B)$. (2,5 puntos)

c) Calcula $P(A/B^c)$. (2,5 puntos)

d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$. (2,5 puntos)

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

a) Para ser independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{aligned} P(B/A) = 0,25 &\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,25 \\ P(A) = 0,4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0,4} = 0,25 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= 0,1 \\ P(A)P(B) &= 0,4 \cdot 0,25 = 0,1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

b) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 0,1 = \boxed{0,55}$$

c) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)P(B^c/A)}{P(B^c)} = \frac{P(A)[1 - P(B/A)]}{P(B^c)} = \frac{0,4[1 - 0,25]}{0,75} = \boxed{0,4}$$

d) Utilizamos las leyes de Morgan y lo obtenido en los apartados anteriores.

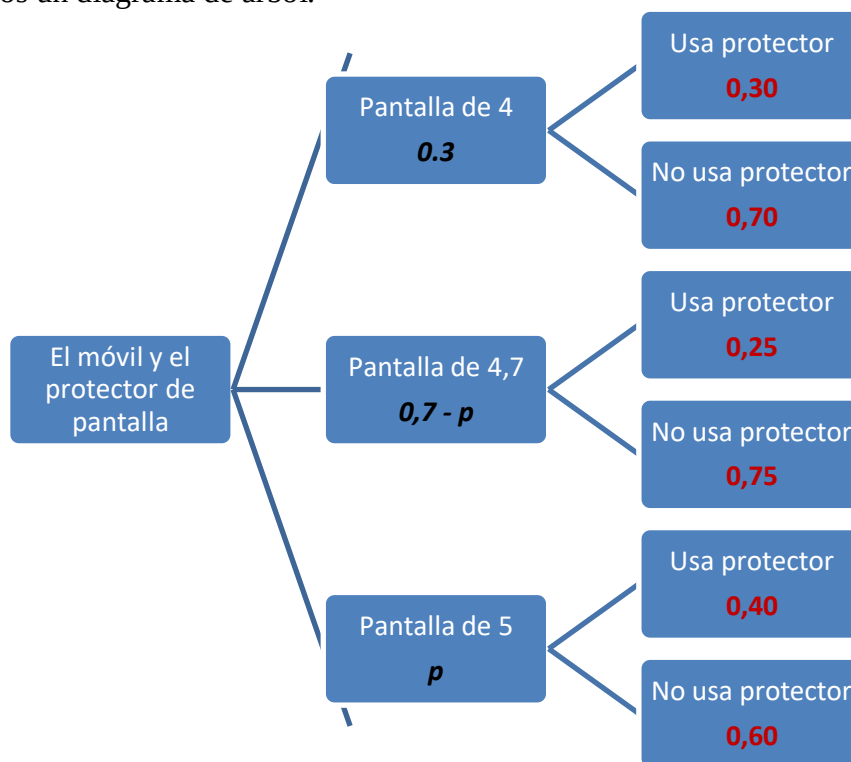
$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = \boxed{0,9}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,55 = \boxed{0,45}$$

Problema 6. Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30% de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40% de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

- Si el 34% de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. (4 puntos)
- Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)
- Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)

- Llamamos p a la probabilidad de que al elegir a una persona use un teléfono de 5 pulgadas. Ese valor es el porcentaje expresado en tanto por uno. La probabilidad de elegir a alguien con un teléfono de 4,7 pulgadas es $1 - 0,3 - p = 0,7 - p$. Hacemos un diagrama de árbol.



Llamemos A = Usar pantalla de 4 pulgadas, B = Usar pantalla de 4,7 pulgadas y C = Usar pantalla de 5 pulgadas.

Pr = Usar protector de pantalla, $\overline{\text{Pr}}$ = No usar protector de pantalla.

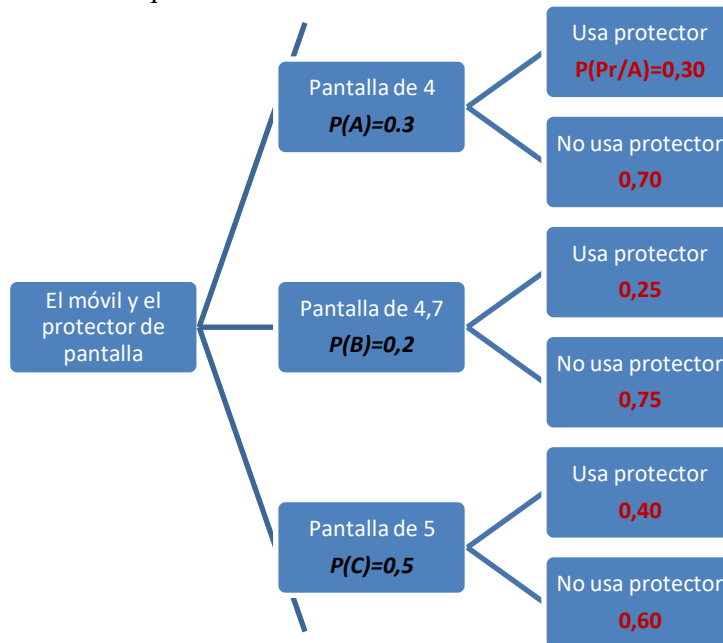
$$P(\text{Pr}) = 0,34 \Rightarrow P(A)P(\text{Pr}/A) + P(B)P(\text{Pr}/B) + P(C)P(\text{Pr}/C) = 0,34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3 \cdot 0,3 + (0,7 - p)0,25 + p \cdot 0,4 = 0,34 \Rightarrow 0,09 + 0,175 - 0,25p + 0,4p = 0,34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,15p = 0,075 \Rightarrow p = \frac{0,075}{0,15} = 0,5$$

Hay un 50 % de las personas que tienen pantalla de 5 pulgadas y el 20 % usan pantallas de 4,7 pulgadas.

b) El diagrama de árbol queda:

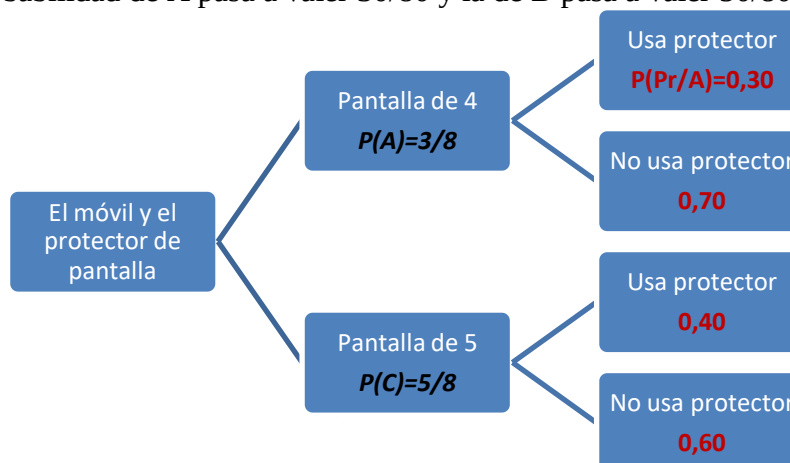


Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos teorema de Bayes.

$$P(C / \text{Pr}) = \frac{P(C \cap \text{Pr})}{P(\text{Pr})} = \frac{P(C)P(\text{Pr}/C)}{P(\text{Pr})} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,34} = \frac{10}{17} \approx 0,59$$

c) Rehacemos el diagrama de árbol quitando las personas con móvil de 4,7 pulgadas. Considerando que hay 30 personas con móvil de 4 pulgadas y 50 con móvil de 5 pulgadas, serían un total de 80 personas.

La probabilidad de A pasa a valer 30/80 y la de B pasa a valer 50/80.



Nos piden calcular $P(C/\text{Pr})$.

$$P(C / \text{Pr}) = \frac{P(C \cap \text{Pr})}{P(\text{Pr})} = \frac{P(C)P(\text{Pr}/C)}{P(A)P(\text{Pr}/A) + P(C)P(\text{Pr}/C)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot 0,4}{\frac{3}{8} \cdot 0,3 + \frac{5}{8} \cdot 0,4} = \frac{20}{29} \approx 0,69$$

PAU Septiembre 2020 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2020	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3. De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,8$ y $P(A^c \cup B^c) = 0,7$, donde A^c y B^c representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B , respectivamente. Se pide:

- a) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)
- b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)
- c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c . (2,5 puntos)
- d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B . (2,5 puntos)

Problema 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)
- b) Calcula $C + AB$. (2 puntos)
- c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$? (4 puntos)

Problema 5. Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000,$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

- a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo. (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)
- c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. (2.5 puntos)
- d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior? (2.5 puntos)

Problema 6. En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal *Panoramix*. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal *Panoramix*. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

- a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal *Panoramix*.
- b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal *Panoramix*.
- c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal *Panoramix*?
- d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal *Panoramix*, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Soluciones

Problema 1. Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos “c” al número de camiones, “m” al número de marionetas y “r” al número de rompecabezas.

Realizamos una tabla.

	Kg de madera	Horas de trabajo
Nº camiones (c)	2c	3c
Nº de marionetas (m)	0,5m	4m
Nº de rompecabezas (r)	0,8r	3,5r
TOTALES	$2c + 0,5m + 0,8r$	$3c + 4m + 3,5r$

“Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes” $\rightarrow c + m + r = 89$

“Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera” $\rightarrow 2c + 0,5m + 0,8r = 91$

“Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando 313 horas de trabajo” $\rightarrow 3c + 4m + 3,5r = 313$

Juntamos las ecuaciones formando un sistema que pasamos a resolver.

$$\left. \begin{array}{l} c + m + r = 89 \\ 2c + 0,5m + 0,8r = 91 \\ 3c + 4m + 3,5r = 313 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 \cdot \text{Ecuación } 2^a \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \\ 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} c + m + r = 89 \\ \Rightarrow 20c + 5m + 8r = 910 \\ 6c + 8m + 7r = 626 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 20 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 20c \quad +5m \quad +8r \quad = 910 \\ -20c \quad -20m \quad -20r \quad = -1780 \\ \hline -15m \quad -12r \quad = -870 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 6 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 6c \quad +8m \quad +7r \quad = 626 \\ -6c \quad -6m \quad -6r \quad = -534 \\ \hline 2m \quad +r \quad = 92 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} c + m + r = 89 \\ \Rightarrow -15m - 12r = -870 \\ 2m + r = 92 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 30m \quad +15r \quad = 1380 \\ -30m \quad -24r \quad = -1740 \\ \hline -9r \quad = -360 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} c + m + r = 89 \\ -15m - 12r = -870 \\ -9r = -360 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c + m + r = 89 \\ -15m - 12r = -870 \\ \boxed{r = \frac{360}{9} = 40} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c + m + 40 = 89 \\ -15m - 480 = -870 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} c + m = 49 \\ -15m = -390 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c + m = 49 \\ \boxed{m = \frac{390}{15} = 26} \end{array} \right\} \Rightarrow c + 26 = 49 \Rightarrow \boxed{c = 23}$$

Se producen 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio son todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$$

Si $x = 0$ entonces $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0 \rightarrow P(0, 0)$ es punto de corte con el eje OY.

Si $y = 0$ entonces $\frac{x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow P(0,0)$ es el punto de corte con el eje OX.

El único punto de corte con los ejes de coordenadas es $P(0,0)$

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

c) Determino la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1 \cdot x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

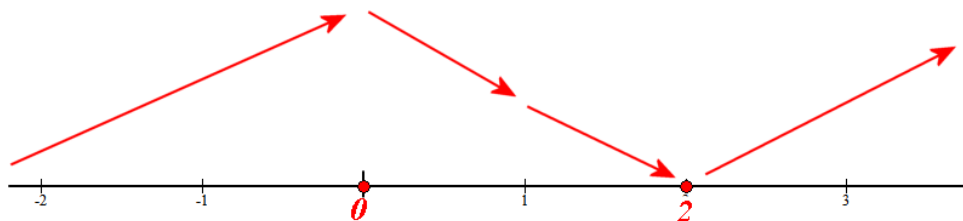
Igualamos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Veamos cómo evoluciona la función antes, entre y después de los puntos críticos obtenidos. Incluimos $x = 1$ excluido del dominio de la función.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 1}{(0.5-1)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.

- En $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{1.5^2 - 3}{(1.5 - 1)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(1,2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2 - 8}{(4 - 1)^2} = \frac{8}{9} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.



La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

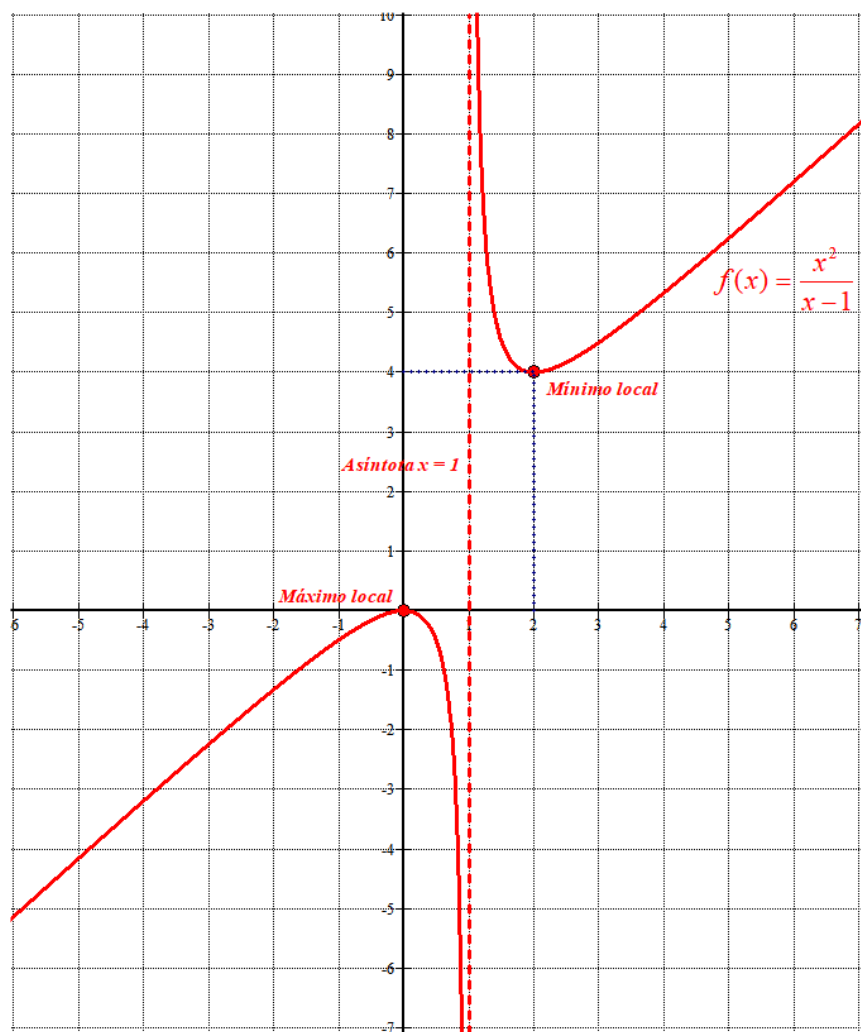
- d) Atendiendo al esquema anterior se observa que hay un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 2$.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0. \text{ Máximo local en el punto } P(0, 0)$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4. \text{ Mínimo local en el punto } B(2, 4)$$

- e) Realizamos una tabla y con los datos obtenidos previamente dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{x^2}{x-1}$
-2	-1,33
-1	-0,5
0,5	-0,5
1,5	4,5
2	4
3	4,5



Problema 3. De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,8$ y $P(A^c \cup B^c) = 0,7$, donde A^c y B^c representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B , respectivamente. Se pide:

- a) ¿Son independientes los sucesos A y B ? (2,5 puntos)
 b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)
 c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c . (2,5 puntos)
 d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B . (2,5 puntos)

a) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A^c \cup B^c) = 0,7 \Rightarrow P((A \cap B)^c) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = 0,8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8 \Rightarrow 0,4 + P(B) - 0,3 = 0,8 \Rightarrow P(B) = 0,7$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0,3 \\ P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \neq 0,28 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes

b) Nos piden que calculemos $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$.

$$\begin{aligned} P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - P((A \cap B^c) \cap (A^c \cap B)) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) - 0 = 0,4 - 0,3 + 0,7 - 0,3 = \boxed{0,5} \end{aligned}$$

c) $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = \boxed{0,3}$

d) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c / B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,7 - 0,3}{0,7} = \boxed{\frac{4}{7} = 0,571}$$

Problema 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)b) Calcula $C + AB$. (2 puntos)c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$? (4 puntos)a) Veamos si existe la inversa de AB .

$$\text{La matriz } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4-3 & 0+4-3 \\ -2+2-1 & 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Su determinante vale } |AB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Existe la inversa de AB y la calculamos.

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^T)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hallamos la expresión de $C + AB$.

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculemos el valor de las dos expresiones y comparémoslas.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^T)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $(C + AB)^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ya que $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ y la inversa de la identidad es ella misma.

Son iguales las matrices resultantes de cada expresión.

Problema 5. Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000,$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

- Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo. (3 puntos)
- ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)
- Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. (2.5 puntos)
- ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior? (2.5 puntos)

a) Utilizamos la derivada de la función.

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \Rightarrow f'(x) = 350 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 350 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{350}{2} = 175$$

$$f'(x) = 350 - 2x \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(175) = -2 < 0$$

Para $x = 175$ se anula la primera derivada de $f(x)$ y toma valor negativo la segunda derivada, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = 175$.

El número de bicicletas que se deben alquilar para obtener un beneficio máximo es 175.

- b) $f(175) = 350 \cdot 175 - 175^2 - 15000 = 15625$. El beneficio máximo que se puede obtener es de 15625 €.

- c) ¿Puede ser negativa la función? ¿Incluso para $x > 175$?

Averiguamos donde se anula la función.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 350x - x^2 - 15000 = 0 \Rightarrow -x^2 + 350x - 15000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-350 \pm \sqrt{350^2 - 60000}}{-2} = \frac{-350 \pm 250}{-2} = \begin{cases} \frac{-350 + 250}{-2} = 50 \\ \frac{-350 - 250}{-2} = 300 \end{cases}$$

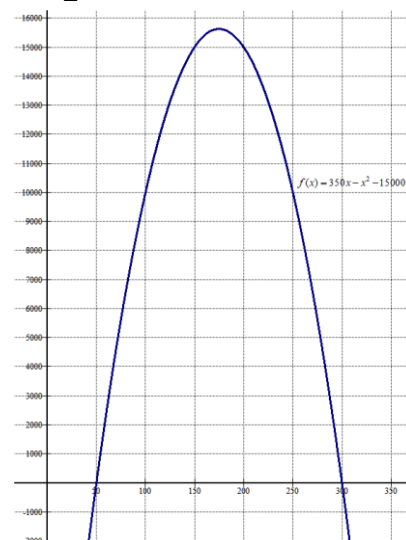
Para valores entre 50 y 300 la función es positiva.

$$f(175) = 15625 > 0$$

- d) Para valores mayores de 300, por ejemplo 310 la función beneficio es negativa, lo que indica que hay pérdidas.

$$f(310) = 350 \cdot 310 - 310^2 - 15000 = -2600 < 0$$

Alquilando más de 300 bicicletas la empresa tiene pérdidas.



Problema 6. En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal *Panoramix*. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal *Panoramix*. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

- Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal *Panoramix*.
- Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal *Panoramix*.
- Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal *Panoramix*?
- Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal *Panoramix*, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos.

	Suscrito a Panoramix	No suscrito a Panoramix	
Hogar con más de una persona	20		80
Hogar con una única persona			
	30		100

Completamos la tabla.

	Suscrito a Panoramix	No suscrito a Panoramix	
Hogar con más de una persona	20	60	80
Hogar con una única persona	10	10	20
	30	70	100

Utilizamos la regla de Laplace con los datos de la tabla y respondemos a lo pedido.

$$a) P(\text{No suscrito a Panoramix}) = \frac{70}{100} = 0,7$$

$$b) P(\text{Hogar formado por una única persona y suscrito a Panoramix}) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$c) P(\text{Suscrito a Panoramix} / \text{Hogar de una única persona}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$d) P(\text{Hogar con más de una persona} / \text{Suscrito a Panoramix}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0,66$$

PAU Julio 2020 Matemáticas CC. SS. II en la Comunidad Valenciana



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2020	CONVOCATORIA: JULIO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

- ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)
- ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3. Si un habitante de la ciudad de *Megalópolis* es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

- La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.
- La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
- La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
- La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Halla la matriz inversa de A . (3 puntos)
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$. (3 puntos)

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

- a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)
- b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)
- c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)
- d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

- a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)
- b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)
- c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

Soluciones

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

- a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)
 b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

a) Llamamos “x” al número de kilos del fertilizante A e “y” al número de kilos del fertilizante B. Realizamos una tabla para establecer de forma más sencilla las restricciones y la función objetivo.

	Kilos de nitrógeno	Kilos de fósforo	Coste
Kilos de fertilizante A (x)	0,25x	0,15x	1,2x
Kilos de fertilizante B (y)	0,16y	0,4y	1,6y
TOTALES	0,25x + 0,16y	0,15x + 0,4y	1,2x + 1,6y

La función objetivo es el coste $\rightarrow f(x, y) = 1,2x + 1,6y$

Las restricciones son:

“La parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo” $\rightarrow$
 $0,25x + 0,16y \geq 120$; $0,15x + 0,4y \geq 110$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 0,15x + 0,4y \geq 110 \\ 0,25x + 0,16y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 40y \geq 11000 \\ 25x + 16y \geq 12000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 8y \geq 2200 \\ 25x + 16y \geq 12000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

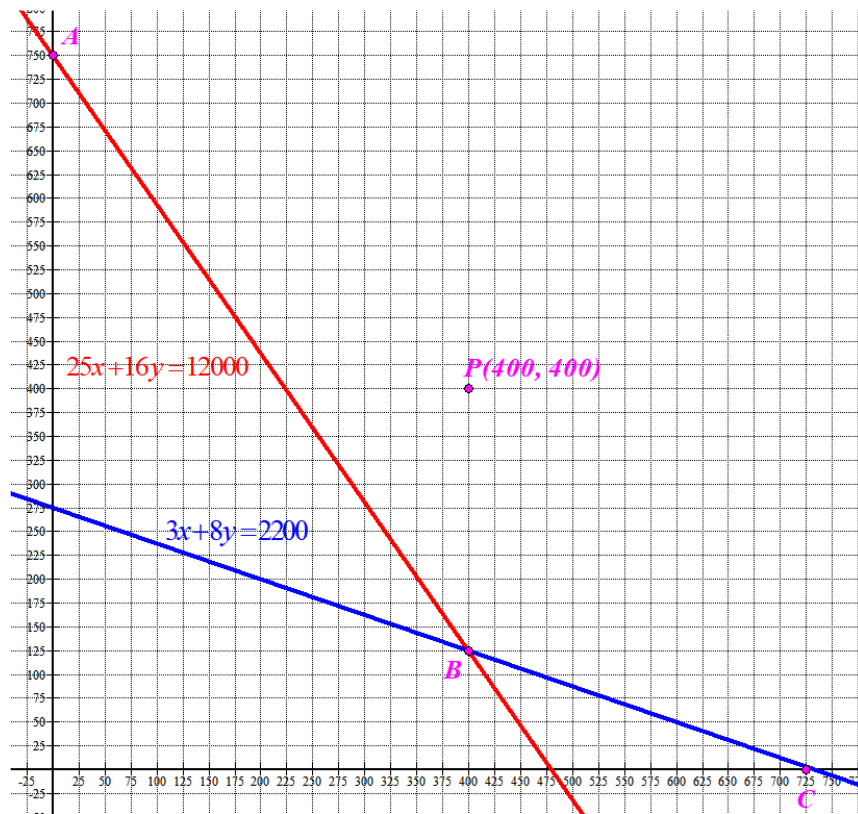
$$3x + 8y = 2200$$

$$25x + 16y = 12000$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Primer cuadrante}$$

x	$y = \frac{2200 - 3x}{8}$
0	275
400	125
600	50

x	$y = \frac{12000 - 25x}{16}$
0	750
400	125



Como las restricciones son

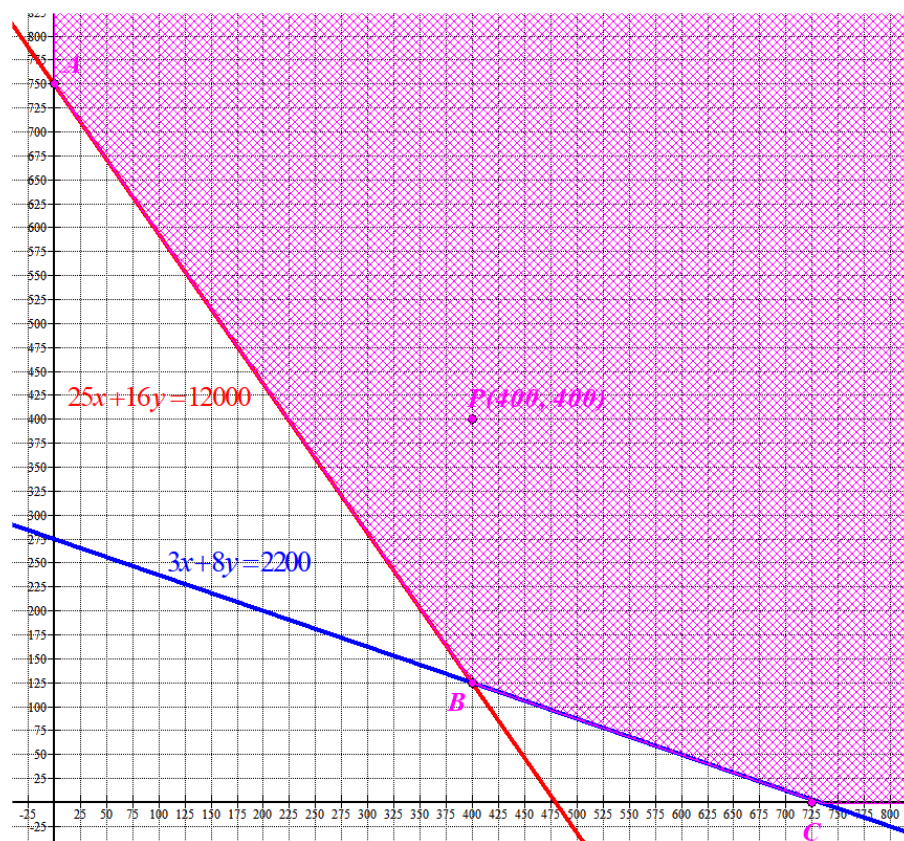
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 8y \geq 2200 \\ 25x + 16y \geq 12000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante situada por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos si el punto $P(400, 400)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1200 + 3200 \geq 2200 \\ 10000 + 6400 \geq 12000 \\ 400 \geq 0 \\ 400 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas las desigualdades.}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y C.

$$\begin{cases} 25x + 16y = 12000 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 16y = 12000 \Rightarrow y = 750 \rightarrow A(0, 750)$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 2200 \\ 25x + 16y = 12000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 16y = -4400 \\ 25x + 16y = 12000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{¿B?} \rightarrow & 19x = 7600 \Rightarrow x = 400 \Rightarrow 1200 + 8y = 2200 \\ & 8y = 1000 \Rightarrow y = \frac{1000}{8} = 125 \rightarrow B(400, 125) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 2200 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = 2200 \Rightarrow x = \frac{2200}{3} \Rightarrow C\left(\frac{2200}{3}, 0\right)$$

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible.

- $A(0, 750) \rightarrow f(0, 750) = 0 + 1,6 \cdot 750 = 1200$
- $B(400, 125) \rightarrow f(400, 125) = 1,2 \cdot 400 + 1,6 \cdot 125 = 680$
- $C\left(\frac{2200}{3}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{2200}{3}, 0\right) = 1,2 \cdot \frac{2200}{3} + 0 = 880$

El mínimo coste se produce en el vértice B(400, 125).

Con 400 kilos del fertilizante A y 125 del fertilizante B el coste de fertilizar la parcela es mínimo.

b) Ese coste mínimo es de 680 €.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$

Puntos de corte.

- $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{5}{-1} = -5$. El punto de corte con el eje OY es P(0, -5)

- $y = 0 \rightarrow$

$$\frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 40}}{-6} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{-6} = \text{No existe}$$

No hay punto de corte con eje OX.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

Probamos con los valores excluidos del dominio.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y buscamos los puntos críticos de la función igualando la derivada a cero.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x - 3)(x^2 - 1) - 2x(2x^2 - 3x + 5)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 4x - 3x^2 + 3 - 4x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 36}}{6} = \frac{14 \pm \sqrt{160}}{6}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes de $\frac{14 - \sqrt{160}}{6} = 0,225$, entre $\frac{14 - \sqrt{160}}{6}$ y $\frac{14 + \sqrt{160}}{6} = 4,44$ y después de $\frac{14 + \sqrt{160}}{6}$. No tenemos en cuenta los valores -1 y 1 , pues no están en el dominio, pero no afectan al signo de la derivada.

- En $\left(-\infty, \frac{14 - \sqrt{160}}{6}\right)$ tomamos $x = -2$, la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{3(-2)^2 - 14(-2) + 3}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{43}{9} > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{14 - \sqrt{160}}{6}\right).$$

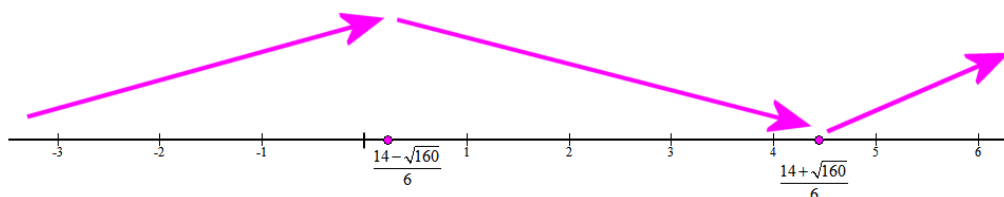
- En $\left(\frac{14 - \sqrt{160}}{6}, \frac{14 + \sqrt{160}}{6}\right)$ tomamos $x = 1$, la derivada vale

$$f'(2) = \frac{3(2)^2 - 14(2) + 3}{((2)^2 - 1)^2} = \frac{-13}{9} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{14 - \sqrt{160}}{6}, \frac{14 + \sqrt{160}}{6}\right).$$

- En $\left(\frac{14 + \sqrt{160}}{6}, +\infty\right)$ tomamos $x = 6$, la derivada vale

$$f'(6) = \frac{3 \cdot 6^2 - 14 \cdot 6 + 3}{(6^2 - 1)^2} = \frac{27}{35^2} > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{14 + \sqrt{160}}{6}, +\infty\right).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{14 - \sqrt{160}}{6}\right) \cup \left(\frac{14 + \sqrt{160}}{6}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{14 - \sqrt{160}}{6}, 1\right) \cup \left(1, \frac{14 + \sqrt{160}}{6}\right)$

d) El máximo local está en $x = \frac{14 - \sqrt{160}}{6}$ y el mínimo en $x = \frac{14 + \sqrt{160}}{6}$.

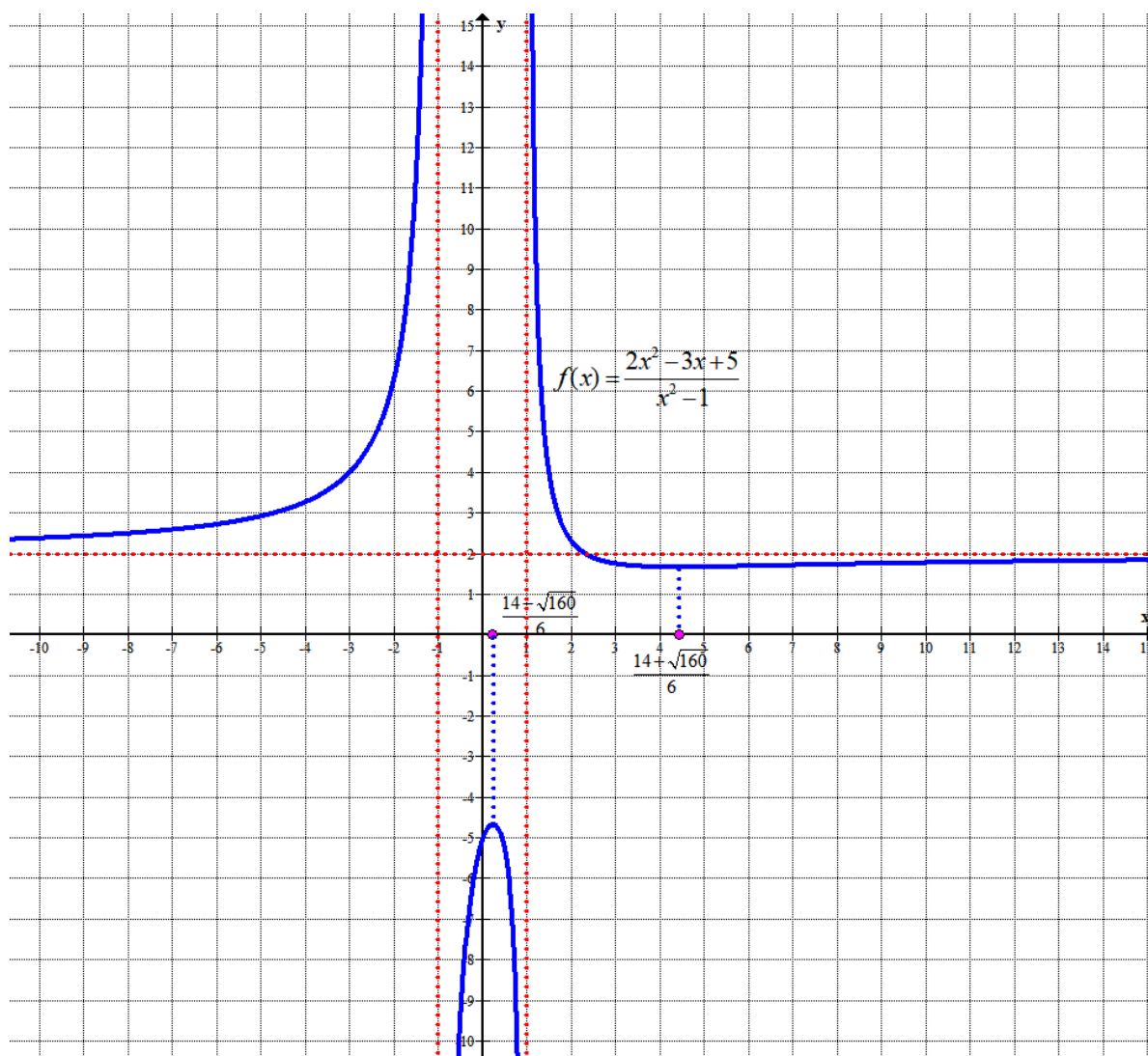
$$\text{Como } f\left(\frac{14 - \sqrt{160}}{6}\right) = -4,66 \text{ y } f\left(\frac{14 + \sqrt{160}}{6}\right) = 1,662$$

$$\text{El punto máximo local es } \left(\frac{14 - \sqrt{160}}{6}, -4.66\right)$$

El punto mínimo local es $\left(\frac{14+\sqrt{160}}{6}, 1.662\right)$

- e) Tenemos las asíntotas, el dominio, como crece y decrece y el máximo y mínimo relativos. Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$	
-3	4	
-2	6.3	
0.5	-5.3	
0	-5	
0.225	-4.66	Máximo
2	2.3	
4.44	1.662	Mínimo
5	1.666	

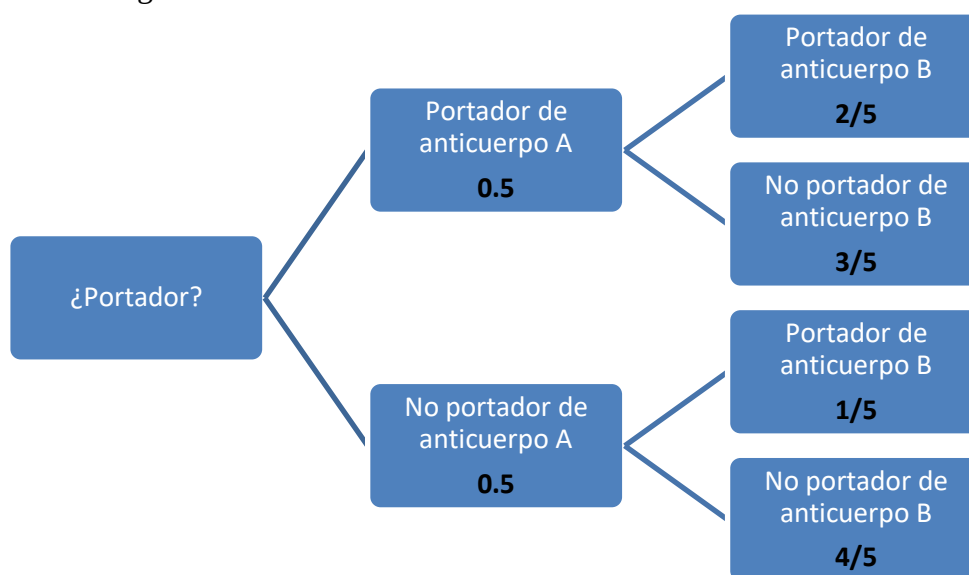


Problema 3. Si un habitante de la ciudad de *Megalópolis* es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

- La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.
- La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
- La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
- La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Con estos datos respondemos a las preguntas.

- a) Miramos en el árbol que ramas cumplen lo pedido y calculamos las probabilidades.

$$P(\text{Portador de anticuerpo B}) = 0.5 \cdot \frac{2}{5} + 0.5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0,3$$

- b) Es una probabilidad a posteriori, aplico teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea portador de anticuerpo A} / \text{Es portador de anticuerpo B}) =$$

$$= \frac{P(\text{Sea portador de anticuerpo A} \cap \text{Es portador de anticuerpo B})}{P(\text{Sea portador de anticuerpo B})} = \frac{0.5 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3} = 0.66$$

- c) Es una probabilidad a posteriori, aplico teorema de Bayes.

$$P(\text{No sea portador de anticuerpo A} \mid \text{No es portador de anticuerpo B}) =$$

$$= \frac{P(\text{No sea portador de anticuerpo A} \cap \text{No es portador de anticuerpo B})}{P(\text{No es portador de anticuerpo B})} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{10}} = \boxed{\frac{4}{7} = 0.571}$$

d) Miramos en el árbol y buscamos la rama que cumple lo pedido.

$$P(\text{Sea portador de anticuerpo A y no sea portador del anticuerpo B}) = 0.5 \cdot \frac{3}{5} = \boxed{\frac{3}{10} = 0.3}$$

Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Halla la matriz inversa de A. (3 puntos)
 b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)
 c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)
 d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$. (3 puntos)

a) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos si el determinante de B es nulo o no.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0. \text{ El determinante de B es nulo y no tiene inversa.}$$

c) Calculamos la expresión de la matriz AB y vemos si su determinante se anula.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5 & 8+10 \\ 2+2 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 72 - 72 = 0$$

El determinante de AB es cero, por lo que no existe su inversa.

d) Despejamos X en la ecuación utilizando la inversa de la matriz A.

$$AB - AX = BA \Rightarrow -AX = BA - AB \Rightarrow AX = -BA + AB \Rightarrow X = A^{-1}(-BA + AB)$$

Determinamos la expresión de X.

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5. Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

- ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)
- ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)
- Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)
- ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

a) Nos piden el valor de la función en $x = 6 \rightarrow B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$ euros.

b) Nos piden averiguar cuando la función es positiva. Para ello averiguo primero cuando es cero.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 220}}{-2} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-16+6}{-2} = 5 \\ \frac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Como la función beneficio es continua, vemos si es positiva la función antes de 5, entre 5 y 11, o después de 11 probando con un valor en cada intervalo o semirrecta.

- En $(0,5)$ tomamos $x = 1$ y el beneficio es $B(1) = -40 < 0$. El beneficio es negativo en $(0,5)$.
- En $(5,11)$ tomamos $x = 6$ y el beneficio es $B(6) = 5 > 0$. El beneficio es positivo en $(5,11)$.
- En $(11,+\infty)$ tomamos $x = 12$ y el beneficio es $B(12) = -12^2 + 192 - 55 = -7 < 0$. El beneficio es negativo a partir de 11.

Para que el beneficio sea positivo se debe fijar un precio mayor que 5 € y menor que 11 € por caja.

c) Es el vértice de la parábola, lo hallamos con la derivada.

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \Rightarrow B'(x) = -2x + 16$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 16 = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Como } B''(x) = -2 \Rightarrow B''(8) = -2 < 0$$

El beneficio es máximo en $x = 8$. El beneficio es máximo con un precio por caja de 8 €.

Este beneficio máximo tiene un valor de $B(8) = -8^2 + 128 - 55 = 9$ euros.

d) La derivada vale 0 en $x = 8$, vemos cuando crece y cuando decrece.

- En $(0,8)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $B'(6) = -12 + 16 = 4 > 0$. La función beneficio crece en $(0,8)$.
- En $(8,+\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $B'(10) = -20 + 16 = -4 < 0$. La función beneficio decrece en $(8,+\infty)$.

El beneficio crece con un precio de 0 a 8 € y decrece a partir de 8 €.

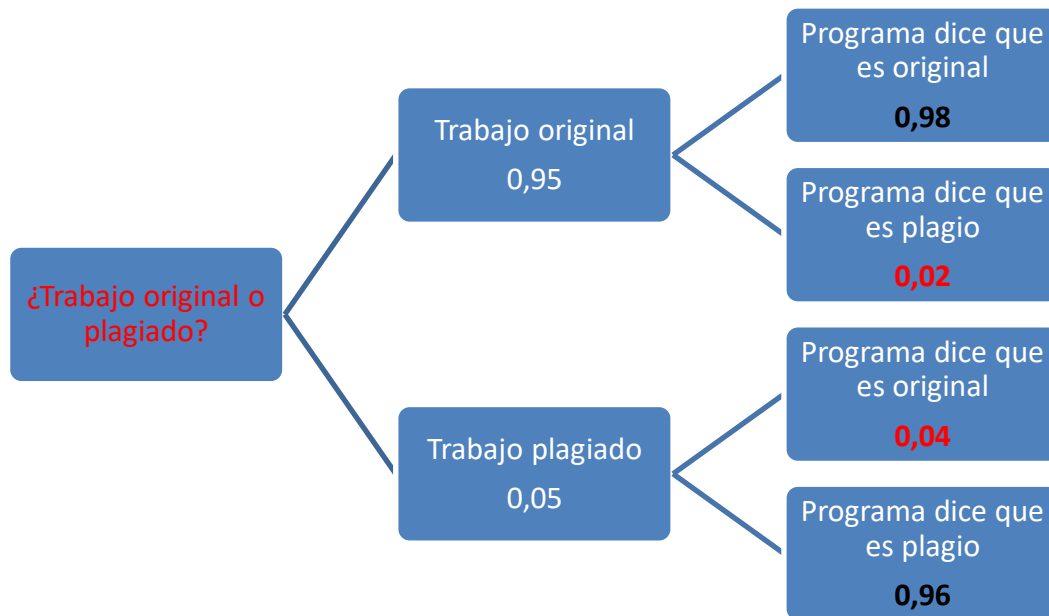
Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aparece esta posibilidad en dos ramas, multiplicamos en horizontal y sumamos en vertical.

$$P(\text{El programa clasifica el trabajo como plagio}) = 0,95 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,96 = \boxed{0,067}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea un plagio} / \text{El programa lo clasifica como original}) =$$

$$= \frac{P(\text{Sea un plagio} \cap \text{El programa lo clasifica como original})}{P(\text{El programa lo clasifica como original})} = \frac{0,05 \cdot 0,04}{1 - 0,067} = \boxed{0,0021}$$

c) $P(\text{Trabajo es plagio y el programa dice que es plagio}) = 0,05 \cdot 0,96 = 0,048$

El porcentaje es el del 4,8%.



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2019	CONVOCATORIA: JULIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.

Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?

¿Cuál es dicho ingreso máximo?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3. Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25% de los coches son de motor híbrido. El 20% son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15% de los de tipo Van y el 40% de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

- a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido. (2,5 puntos)
- b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido. (2,5 puntos)
- c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv. (2,5 puntos)
- d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido. (2,5 puntos)

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el determinante de A . (2 puntos)
- b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. (4 puntos)
- c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{ax^2}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio. (2 puntos)
- b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. (3 puntos)
- c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- d) Calcula $\int_{-2}^1 f(x) dx$ (3 puntos)

Problema 3. Un estudiante acude a la universidad el 70% de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1% de las veces que acude andando, el 3% de las que lo hace en transporte público y el 6% de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

- a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente. (3 puntos)
- b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde. (3 puntos)
- c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.

Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?

¿Cuál es dicho ingreso máximo?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos x = unidades fabricadas del producto A, y = unidades fabricadas del producto B.

Pasemos los minutos a horas, $30 \text{ min.} = \frac{1}{2} \text{ h}$, $40 \text{ min.} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \text{ h}$.

Los datos del problema podemos resumirlo en la tabla siguiente:

	Número unidades	Montar	Pintar	Coste
A	x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{2}{3}x$	$40x$
B	y	$\frac{2}{3}y$	$\frac{1}{2}y$	$35y$
TOTALES		$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$	$40x + 35y$

El problema proporciona las siguientes restricciones:

“Cada día, como máximo, 10h para montar piezas” $\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 10 \rightarrow 3x + 4y \leq 60$.

“Cada día, como máximo 11h para pintar piezas” $\rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \leq 11 \rightarrow 4x + 3y \leq 66$.

Como las variables x e y representan número de unidades deben ser números naturales.

El beneficio viene dado por la función: $B(x, y) = 40x + 35y$

El problema a resolver es:

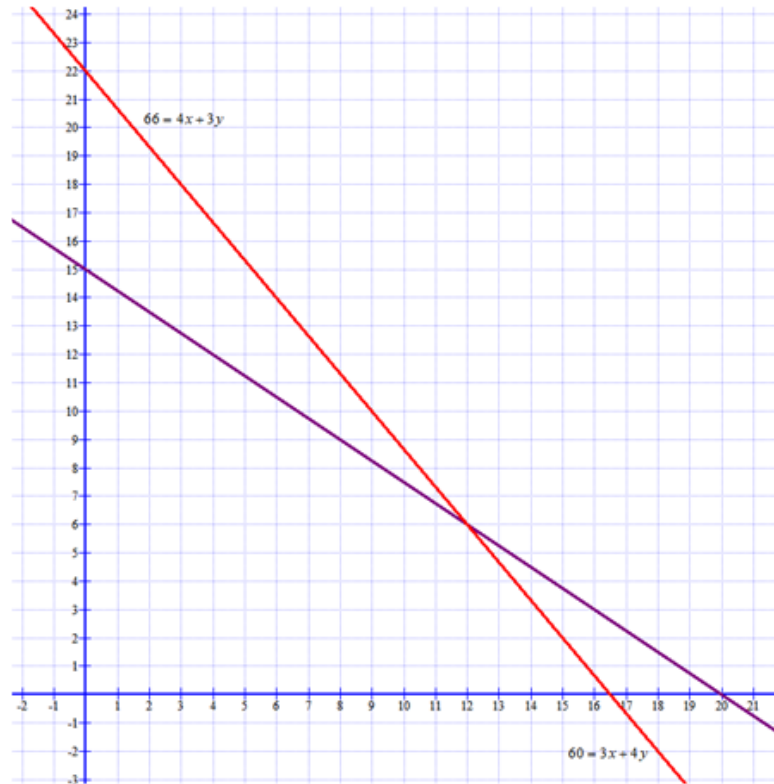
Maximizar $B(x, y) = 40x + 35y$

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

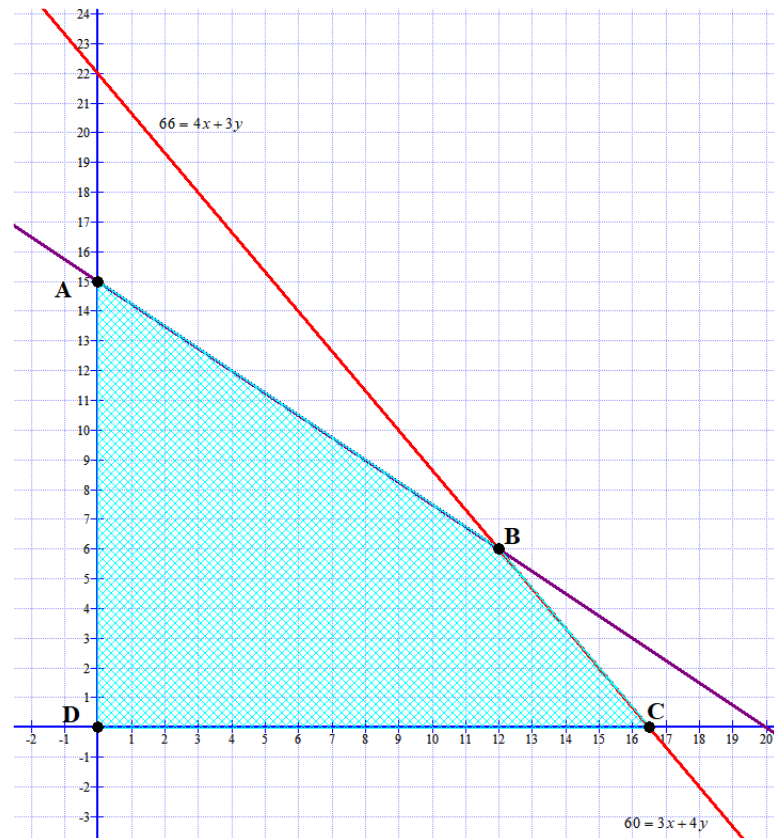
Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$\begin{array}{cc|cc} 3x + 4y \leq 60 & & 4x + 3y \leq 66 & \\ x & 60 = 3x + 4y & x & 66 = 4x + 3y \\ \hline 0 & 15 & 0 & 22 \\ 20 & 0 & 16,5 & 0 \end{array}$$

La representación gráfica será:



El punto (0,0) cumple las restricciones $\begin{cases} 0 + 0 \leq 60 \\ 0 + 0 \leq 66 \\ 0 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \end{cases}$, por lo que la zona o región válida es:



Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los valores que anulen el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

Los puntos de corte con los ejes son:

- $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 0 - 3}{0 + 0 - 2} = \frac{3}{2}$. Con el eje OY el punto de corte es (0, 1.5).
- $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$

Con eje OX los puntos de corte son (3, 0) y (-1, 0).

b) **Asíntotas verticales.** $x = a$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$, por lo que las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{-4}{0} = \infty$$

Asíntotas horizontales. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$.

c) La derivada de la función es

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

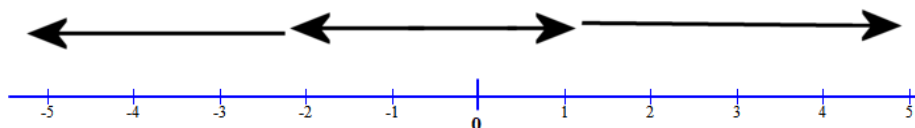
$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} - 4x - \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + 4 - \cancel{2x^3} + 4x^2 + 6x - x^2 - \cancel{2x} + 3}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 7}{(x^2 + x - 2)^2}$$

Igualamos a cero para averiguar los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + 7}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 84}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6}$$

No es posible encontrar valores que anulen la derivada primera, por lo que no existen puntos críticos.

Veamos por tanto su signo en los tres intervalos en que se divide la recta real considerando los puntos excluidos del dominio: $x = -2$ y $x = 1$.



- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos el valor $x = -4$ y la derivada vale

$$f'(-4) = \frac{3 \cdot 16 - 8 + 7}{(16 - 4 - 2)^2} = \frac{47}{+} > 0, \text{ la función crece.}$$

- En el intervalo $(-2, 1)$ tomamos el valor $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{0 + 0 + 7}{(0 - 2)^2} = \frac{7}{+} > 0, \text{ la función crece.}$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos el valor $x = 2$ y la derivada vale

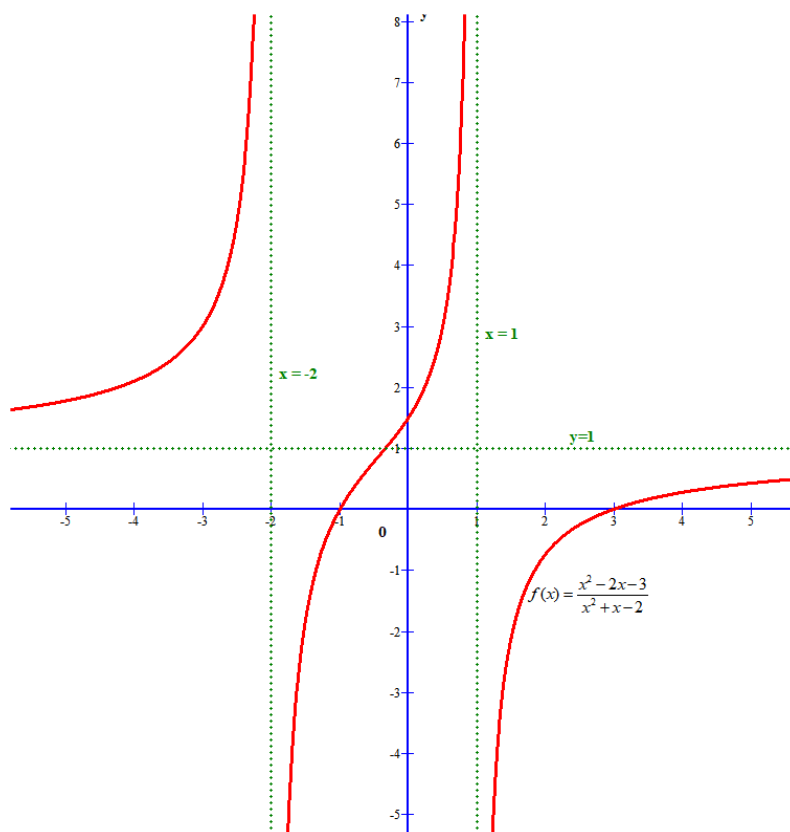
$$f'(2) = \frac{3 \cdot 4 + 4 + 7}{(16 - 4 - 2)^2} = \frac{23}{+} > 0, \text{ la función crece.}$$

La función es creciente en todo su dominio.

d) No existen máximos, ni mínimos locales, ya que la función siempre crece.

e) Realizamos una tabla de valores y con ella y los datos de los apartados anteriores dibujamos la gráfica.

x	$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2}$
-4	2.1
-3	3
-1	0
0	1.5
2	-0.75
3	0



Problema 3. Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25% de los coches son de motor híbrido. El 20% son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15% de los de tipo Van y el 40% de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

- a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido. (2,5 puntos)
 b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido. (2,5 puntos)
 c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv. (2,5 puntos)
 d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido. (2,5 puntos)

Considerando todos los datos del enunciado construyamos una tabla de contingencia,

	Van	Urban	Suv	
Híbrido				25
No híbrido				
	20	40		100

Como el 15% de los 20 Van son híbridos, esto es $\frac{15 \cdot 20}{100} = 3$ coches de los Van son híbridos.

De la misma manera el 40% de los 40 Urban son híbridos, esto es $\frac{40 \cdot 40}{100} = 16$ coches de los Urban son híbridos.

La tabla queda

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16		25
No híbrido				
	20	40		100

Completamos la tabla, sabiendo que lo que aparece en la parte inferior o en el lateral derecho es la suma de lo que lo precede.

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16	6	25
No híbrido	17	24	34	75
	20	40	40	100

Utilizando la regla de Laplace y los datos de la tabla respondemos a las preguntas del ejercicio.

- a) Dejamos en blanco las celdas que contienen los datos a utilizar.

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16	6	25
No híbrido	17	24	34	75
	20	40	40	100

$$P(\text{Sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido}) = \frac{16}{25} = \boxed{0,64}$$

- b) Dejamos en blanco las celdas que contienen los datos a utilizar.

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16	6	25
No híbrido	17	24	34	75
	20	40	40	100

$$P(\text{Sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido}) = \frac{17}{75} = \boxed{0,2267}.$$

c) Dejamos en blanco las celdas que contienen los datos a utilizar.

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16	6	25
No híbrido	17	24	34	75
	20	40	40	100

$$P(\text{Sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv}) = \frac{6}{40} = \boxed{0,15}.$$

d) Dejamos en blanco las celdas que contienen los datos a utilizar.

	Van	Urban	Suv	
Híbrido	3	16	6	25
No híbrido	17	24	34	75
	20	40	40	100

$$P(\text{No sea de tipo Van ni tampoco híbrido}) = \frac{24+34}{100} = \frac{58}{100} = \boxed{0,58}.$$

OPCIÓN B

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A .

(2 puntos)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

(4 puntos)

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4 puntos)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} (4 + 4 + 4 + 8 + 8 - 1) = \frac{27}{27} = 1$$

$$b) \text{ La matriz traspuesta de } A \text{ es } A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Su determinante es no nulo, por lo que tiene inversa y la calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj(A^t)}{1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{6}{9} \\ -\frac{6}{9} & \frac{6}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Podemos comparar y comprobar que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^T$

c) Para resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ multiplicamos por la matriz inversa y nos queda:

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2-2 \\ -2+2+1 \\ 2+1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{5}{3}}$$

Problema 2. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{ax^2}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio. (2 puntos)
- b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. (3 puntos)
- c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- d) Calcula $\int_{-2}^1 f(x) dx$ (3 puntos)

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y para ello se debe cumplir:

- Existe $f(1) = 1^2 - 3 + 3 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 3 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2}{x^2 + 1} = \frac{a}{2}$
- Los tres valores coinciden. Debe cumplirse que $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$.

b) Para $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y es continua.

- Para $x \leq 1$ la función es $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Buscamos los puntos críticos de la función $f(x)$. Su derivada es $f'(x) = 2x - 3$.

Igualemos a cero la derivada. $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, que no pertenece a la zona de definición de la función ($x \leq 1$).

En el intervalo $(-\infty, 1)$ si tomamos $x = 0$ la derivada vale $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$, la función decrece en $(-\infty, 1)$.

- Para $x > 1$ la función es $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ y la derivada es

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}. \text{ Igualamos a cero la derivada.}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \text{ que no pertenece a la zona de definición de}$$

la función ($x > 1$).

En el intervalo $(1, +\infty)$ si tomamos $x = 2$ la derivada vale $f'(2) = \frac{8}{(4+1)^2} = \frac{8}{25} > 0$, la

función crece en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: la función decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

c) **Asíntotas verticales.** No tiene ya que el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas horizontales. $y = b$.

Comprobamos en $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

Una asíntota horizontal es $y = 2$ cuando x tiende a $+\infty$.

Comprobamos en $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x + 3 = +\infty$$

No hay más asíntotas horizontales cuando x tiende a $-\infty$.

d) La función en el intervalo $(-2, 1)$ es $f(x) = x^2 - 3x + 3$, por lo que la integral pedida queda:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) dx &= \int_{-2}^1 x^2 - 3x + 3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left[\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 3 \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 3\frac{(-2)^2}{2} + 3(-2) \right] = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 + \frac{8}{3} + \frac{12}{2} + 6 = 3 + 3 + 6 + 6 - \frac{3}{2} = \boxed{16,5} \end{aligned}$$

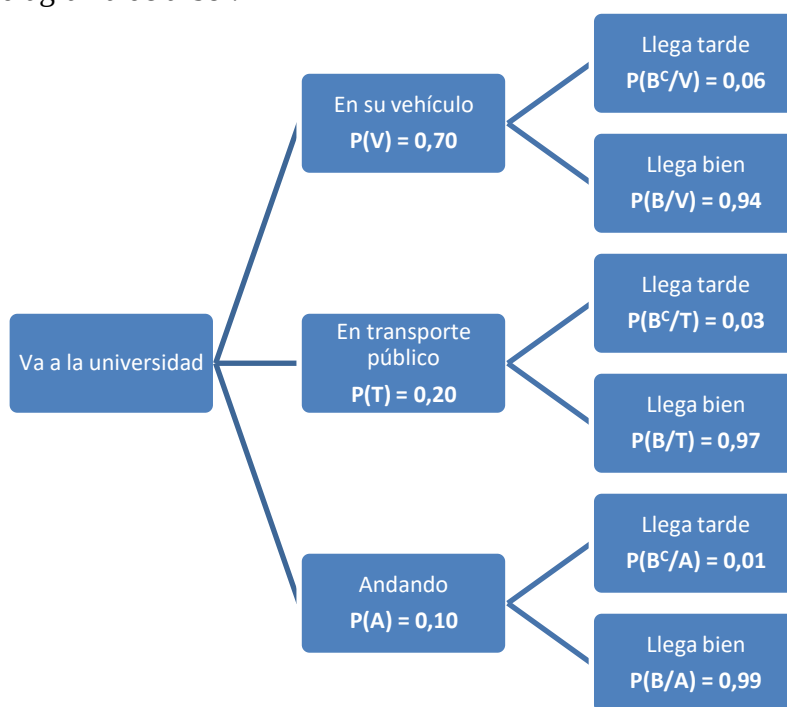
Problema 3. Un estudiante acude a la universidad el 70% de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1% de las veces que acude andando, el 3% de las que lo hace en transporte público y el 6% de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

- La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente. (3 puntos)
- La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde. (3 puntos)
- La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente. (4 puntos)

Si de cada 100 veces 70 usa su propio vehículo, andando y en transporte público va unas 30 veces, cómo va el doble de veces en transporte público que andando, va 20 veces en transporte público y 10 veces andando.

Llamamos V = “Viaja en su vehículo”, T = “Viaja en transporte público”, A = “Viaja andando”, B = “Llega bien”, B^C = “Llega tarde”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(V) \cdot P(B/V) + P(T) \cdot P(B/T) + P(A) \cdot P(B/A) = 0,7 \cdot 0,94 + 0,2 \cdot 0,97 + 0,1 \cdot 0,99 = \boxed{0,951}$$

- b) Nos piden calcular $P(T/B^C)$.

$$P(T/B^C) = \frac{P(T \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(T)P(B^C/T)}{1 - P(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{1 - 0,951} = \boxed{0,1224}$$

- c) Nos piden calcular $P(A^C/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos Bayes.

$$P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(V \cap B) + P(T \cap B)}{P(B)} = \frac{P(V)P(B/V) + P(T)P(B/T)}{P(B)} = \frac{0,7 \cdot 0,94 + 0,2 \cdot 0,97}{0,951} = \boxed{0,8959}$$



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7% y la del producto B del 6,3%.

- ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? (8 puntos)
- ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? (2 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3. En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago? (3 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago? (3 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago? (4 puntos)

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcular $(AB)^{-1}$. (3 puntos)
- b) Calcular $AB^t - A^tB$. (3 puntos)
- c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$. (4 puntos)

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B , respectivamente.

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

- a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. (3 puntos)
- b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? (2+1 puntos)
- c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? (2+1 puntos)
- d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. (1 punto)

Problema 3. Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

- a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros. (3 puntos)
- b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer? (3 puntos)
- c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros? (4 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7% y la del producto B del 6,3%.

- a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? (8 puntos)
 b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? (2 puntos)

Llamamos x = cantidad invertida en el producto A; y = cantidad invertida en el producto B
 Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:

“Un inversor dispone de 9000 euros” $\rightarrow x + y \leq 9000$

“La inversión en A debe superar los 5000 euros” $\rightarrow x \geq 5000$

“La inversión en A debe ser el doble, al menos, que en B” $\rightarrow x \geq 2y$

“Como las variables x e y representan dinero deben ser mayores o iguales a cero” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

A tiene una rentabilidad del 2,7 % y B el 6,3%.

La función que deseamos maximizar es la rentabilidad total: $B(x, y) = \frac{2.7}{100}x + \frac{6.3}{100}y$.

Dibujamos la región factible. Empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

$$x + y = 9000$$

$$x = 2y$$

$$x = 5000$$

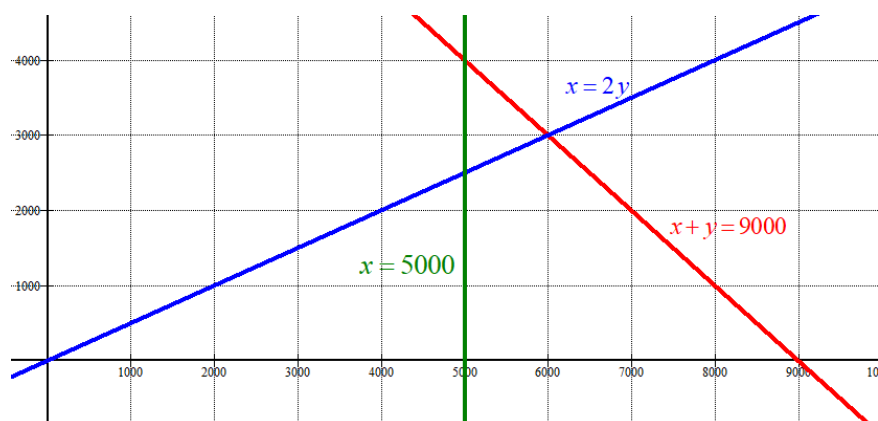
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 9000 - x$
0	9000
3000	6000
5000	4000

x	$y = x / 2$
0	0
3000	6000
5000	2500

$x = 5000$	y
5000	2500
5000	4000

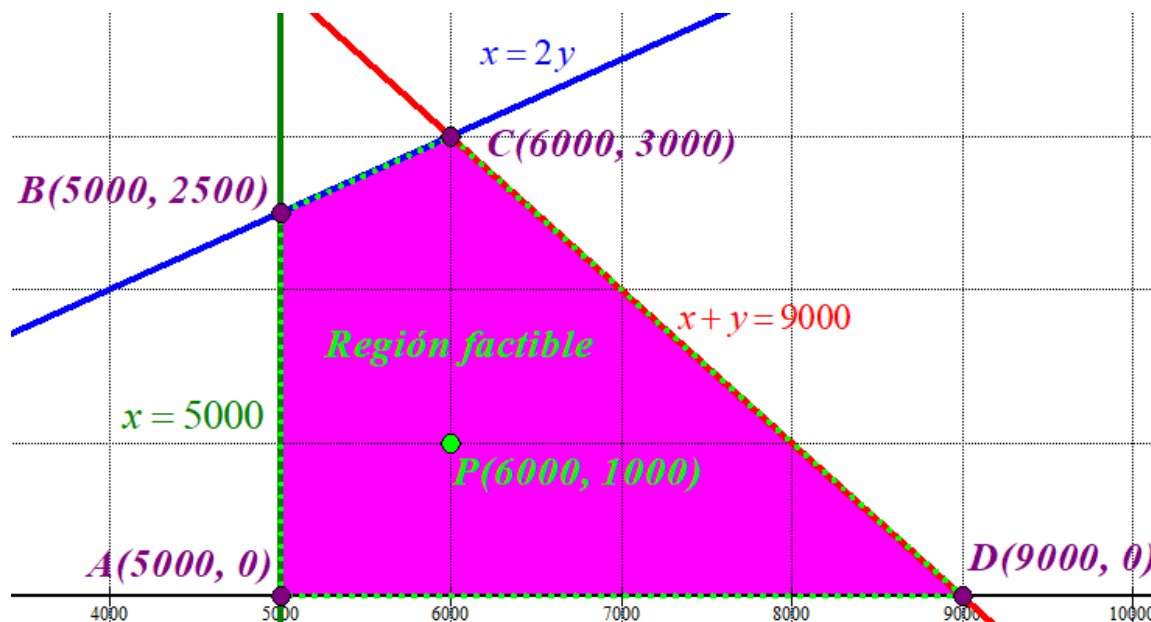
Primer cuadrante



Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región está por debajo de la recta roja, a la}$$

derecha de la recta vertical verde y por debajo de la azul, todo dentro del primer cuadrante. La región factible es la región coloreada del dibujo siguiente.



Comprobamos que un punto cualquiera de la región cumple todas las restricciones, por ejemplo P(6000, 1000).

$$\left. \begin{array}{l} 6000 + 1000 \leq 9000 \\ 6000 \geq 5000 \\ 6000 \geq 2000 \\ 6000 \geq 0; 1000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Valoramos la función objetivo " $B(x, y) = \frac{2.7}{100}x + \frac{6.3}{100}y$ " en cada vértice y localizamos el valor máximo de la misma.

$$A(5000, 0) \rightarrow B(5000, 0) = \frac{2.7}{100} \cdot 5000 + \frac{6.3}{100} \cdot 0 = 135$$

$$B(5000, 2500) \rightarrow B(5000, 2500) = \frac{2.7}{100} \cdot 5000 + \frac{6.3}{100} \cdot 2500 = 292.5$$

$$C(6000, 3000) \rightarrow B(6000, 3000) = \frac{2.7}{100} \cdot 6000 + \frac{6.3}{100} \cdot 3000 = 351 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(9000, 0) \rightarrow B(9000, 0) = \frac{2.7}{100} \cdot 9000 + \frac{6.3}{100} \cdot 0 = 243$$

a) El máximo se alcanza en el punto C(6000, 3000). Lo que significa invertir 6000 € en producto A y 3000 € en producto B.

b) La rentabilidad máxima se ha obtenido en el apartado anterior y es de 351 €.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$, pues $x = 2$ anula el denominador.

Si $x = 0$ entonces $f(0) = \frac{0^2}{2-0} = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un punto de corte con el eje Y.

Si $y = 0$ entonces $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2-x} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, sale el mismo punto de corte con el eje X.

El único punto de corte con los ejes coordenados es el $(0, 0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = 2$

Del dominio de la función se deduce que una posible asíntota vertical es $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = \frac{2^2}{2-2} = \frac{4}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 2$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

c) Buscamos donde se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2-x) - (-1)x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4-x = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

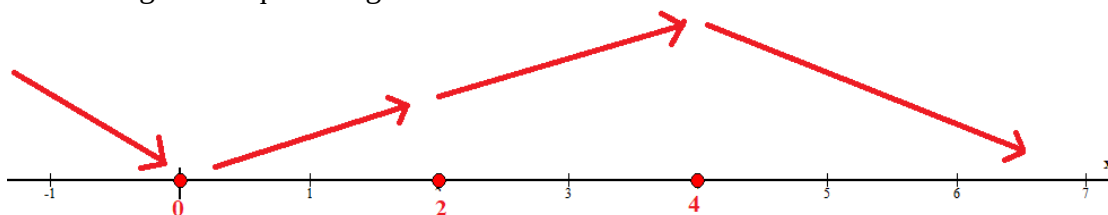
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos puntos críticos obtenidos, añadimos también $x = 2$ excluido del dominio.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-4 - (-1)^2}{(2+1)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La

función decrece en $(-\infty, 0)$.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4-1^2}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} = 3 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, 4)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{12-2^2}{(2-3)^2} = \frac{8}{1} = 8 > 0$. La función crece en $(2, 4)$.
- En $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{20-5^2}{(2-5)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



La función crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

- d) Según el esquema obtenido en el apartado anterior la función presenta un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 4$.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{2-0} = 0. \text{ El mínimo local es el punto de coordenadas } (0, 0).$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{4^2}{2-4} = -8. \text{ El máximo local es el punto de coordenadas } (4, -8).$$

- e) Para la representación gráfica añadimos a lo obtenido una tabla de valores y la asíntota oblicua que no hemos calculado pues no la piden, pero nos ayudará a representar mejor la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2-x} - (-x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{2-x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-x} = -2 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = -x - 2$.

Asíntota oblicua

x	$y = -x - 2$
-----	--------------

0	-2
---	----

2	-4
---	----

4	-6
---	----

La función

x	$y = \frac{x^2}{2-x}$
-----	-----------------------

-2	1
----	---

-1	$1/3 = 0.33$
----	--------------

0	0 Mínimo
---	-----------------

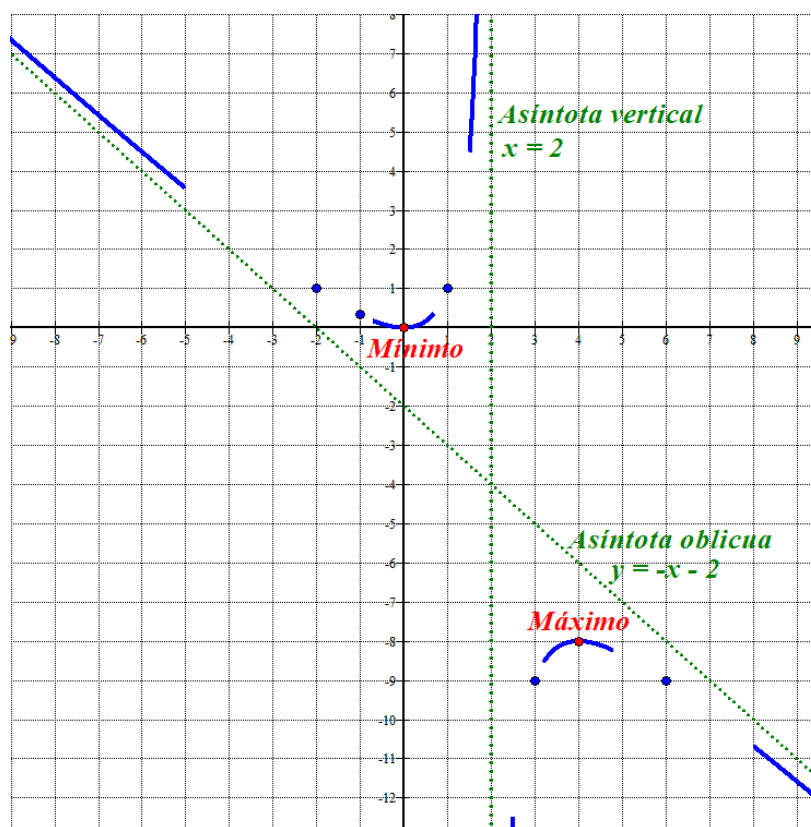
1	1
---	---

2	No existe
---	-----------

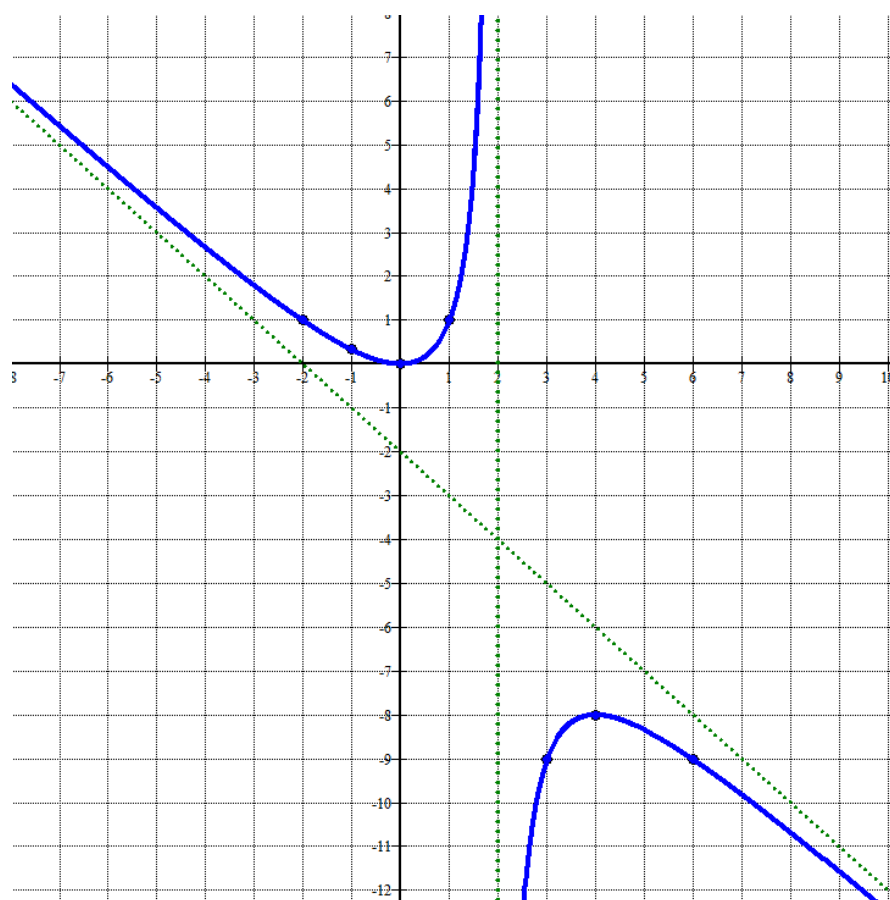
3	-9
---	----

4	-8 Máximo
---	------------------

6	-9
---	----

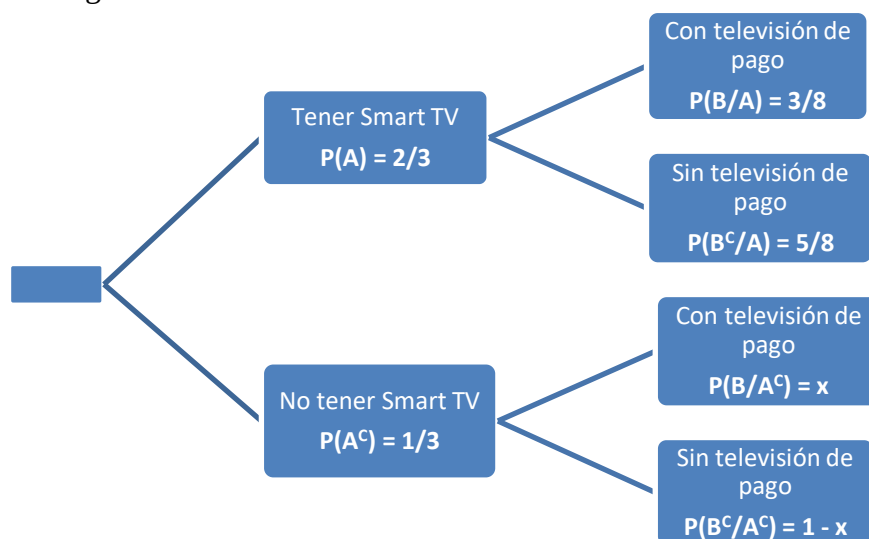


Unimos los tramos y completamos la gráfica.



- Problema 3.** En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar
- ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago? (3 puntos)
 - ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago? (3 puntos)
 - ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago? (4 puntos)

Llamemos A = “Tener Smart TV” y por tanto A^C = “No tener Smart TV”. B = “Contratar algún servicio de pago” y por tanto B^C = “No contratar ningún servicio de pago”
Realizamos un diagrama de árbol.

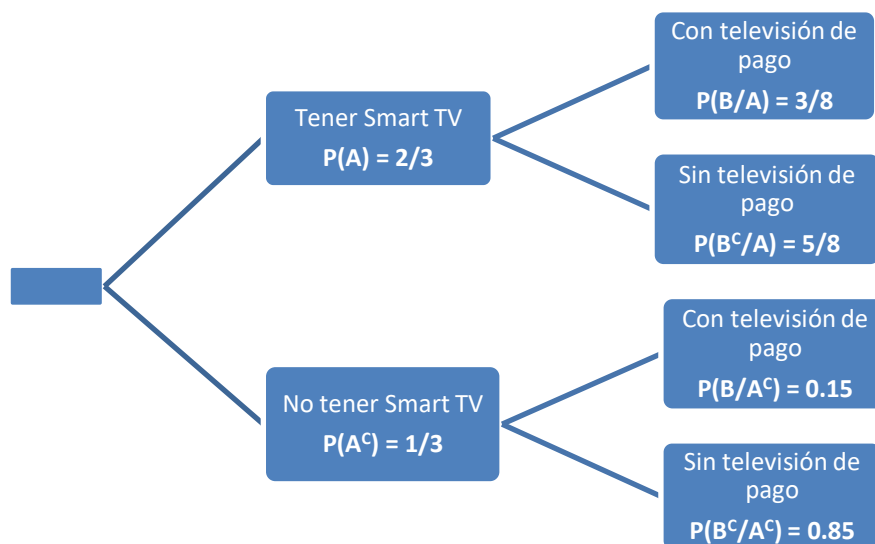


Necesitamos determinar el valor de la probabilidad “x”, para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(A)P(B/A) + P(A^C)P(B/A^C)$$

$$0.30 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3}x \Rightarrow 0.30 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x \Rightarrow 3.6 = 3 + 4x \Rightarrow 4x = 0.6 \Rightarrow x = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

El diagrama de árbol quedaría:



a) Nos piden calcular $P(A^c \cap B)$.

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B/A^c) = \frac{1}{3} \cdot 0.15 = \boxed{0.05}$$

b) Nos piden calcular $P(A/B)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{0.3} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}}{0.3} = \frac{0.25}{0.3} = \boxed{\frac{5}{6} = 0.833}$$

c) Nos piden calcular $P(A^c/B^c)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c)P(B^c/A^c)}{1-0.3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.85}{0.7} = \boxed{\frac{17}{42} = 0.4048}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Consideramos 300 hogares. Nos dicen que dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, es decir, $\frac{2}{3} \cdot 300 = 200$ hogares tienen Smart TV.

De estos 200 hogares las tres octavas partes han contratado algún servicio de TV de pago, es decir, $\frac{3}{8} \cdot 200 = 75$ hogares tienen Smart TV y contratado servicio de televisión de pago.

El 30% de los 300 hogares tienen contratado algún servicio de TV de pago, es decir, $\frac{30}{100} \cdot 300 = 90$ hogares tienen contratado algún servicio de TV de pago.

Ponemos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Servicio de TV de pago (B)	No servicio de TV de pago (B^c)	
Smart TV (A)	75		200
No Smart TV (A^c)			
	90		300

Completamos la tabla.

	Servicio de TV de pago (B)	No servicio de TV de pago (B^c)	
Smart TV (A)	75	125	200
No Smart TV (A^c)	15	85	100
	90	210	300

Con estos datos y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) $P(A^c \cap B) = \frac{15}{300} = \boxed{0.05}$

b) $P(A/B) = \frac{75}{90} = \boxed{\frac{5}{6} = 0.833}$

c) $P(A^c/B^c) = \frac{85}{210} = \boxed{\frac{17}{42} = 0.4048}$

OPCIÓN B**Problema 1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcular $(AB)^{-1}$. (3 puntos)
- b) Calcular $AB^t - A^t B$. (3 puntos)
- c) Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$. (4 puntos)
- siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B , respectivamente.

a) Comprobamos que existe la inversa de la matriz AB y la calculamos.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6+2 \\ -1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 = 4 \neq 0 \text{ Tiene inversa}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB)^t)}{|AB|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz X en la ecuación: $B^t X + A^t B = A^t \Rightarrow B^t X = A^t - A^t B$.Si existe $(B^t)^{-1}$ entonces $X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B^t| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ Existe su inversa.}$$

$$(B^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B^t)^t)}{|B^t|} = \frac{\text{Adj}(B)}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X &= (B^t)^{-1} (A^t - A^t B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8+2 & -14-3 \\ -8 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -17 \\ -8 & 14 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

- a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. (3 puntos)
- b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? (2+1 puntos)
- c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? (2+1 puntos)
- d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. (1 punto)

a) Los beneficios o pérdidas son los valores positivos o negativos de la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, por ello primero buscamos los puntos donde la función se anula.

$$f(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 8t^2 + 15t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 8t + 15) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{8+2}{2} = 5 = t \\ \frac{8-2}{2} = 3 = t \end{cases} \end{cases}$$

Los beneficios son 0 en los años 0, 3 y 5. Veamos que ocurre entre ellos y después de los 5 años.

- De 0 a 3 años considero $t = 2$ y el beneficio es $f(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 30 = 6 > 0$. En todo el intervalo (0, 3) los beneficios son positivos.
- De 3 a 5 años considero $t = 4$ y el beneficio es $f(4) = 4^3 - 8 \cdot 4^2 + 60 = -4 < 0$. En todo el intervalo (3, 5) los beneficios son negativos.
- De 5 años en adelante considero $t = 6$ y el beneficio es $f(6) = 6^3 - 8 \cdot 6^2 + 90 = 18 > 0$. A partir de los 5 años los beneficios son positivos.

La empresa tiene beneficios durante los 3 primeros años y a partir del quinto año. Y pérdidas entre los años 3 y 5.

b) Para determinar el momento y la cuantía del beneficio máximo utilizo la derivada.

$$f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 16t + 15$$

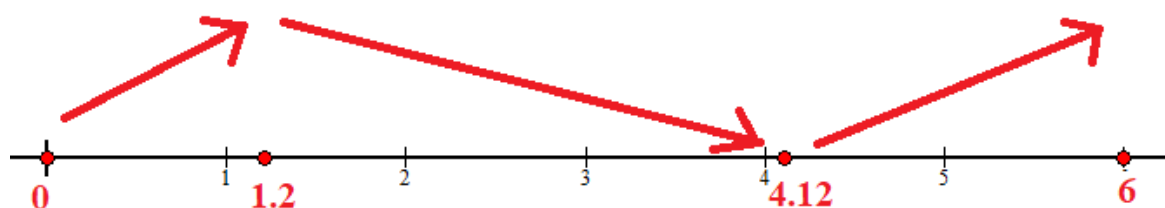
$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 16t + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{6} = \begin{cases} \frac{16 + \sqrt{76}}{6} = 4.1196 = t \\ \frac{16 - \sqrt{76}}{6} = 1.2137 = t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en los distintos tramos en que se divide el intervalo $(0, 6)$.

- En $(0, 1.2)$ tomo $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 16 + 15 = 2 > 0$. La función crece en $(0, 1.2)$.
- En $(1.2, 4.12)$ tomo $t = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 32 + 15 = -5 < 0$. La función decrece en $(1.2, 4.12)$.
- En $(4.12, 6)$ tomo $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 80 + 15 = 10 > 0$. La función crece en $(4.12, 6)$.

La función sigue el esquema siguiente:



El máximo relativo del beneficio se alcanza en $t = 1.2$, pero la función crece a partir de $t = 4.12$, por lo que en $t = 6$ situado en el extremo del intervalo la función puede alcanzar un valor más alto que el máximo local.

Averiguamos el beneficio en esos dos momentos y decidimos el máximo absoluto de la función beneficio.

$$f(1.2) = 1.2^3 - 8 \cdot 1.2^2 + 15 \cdot 1.2 = 8.2088$$

$$f(6) = 6^3 - 8 \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 = 18$$

El máximo beneficio se obtiene en el año 6 y es de 180000 €.

- c) La máxima pérdida será el mínimo absoluto de la función. Por el esquema anterior, la función tiene un mínimo relativo en $t = 4.12$, pero en $t = 0$ también hay un valor bajo del beneficio. Averiguamos el beneficio en esos dos momentos y decidimos el momento de máxima pérdida (beneficio negativo).

$$f(4.12) = 4.12^3 - 8 \cdot 4.12 + 15 \cdot 4.12 = -4.0607$$

$$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 = 0$$

Las máximas pérdidas se producen a los 4.12 años y son pérdidas por valor de 40607 €.

- d) Al principio hemos estudiado la fluctuación del beneficio entre positivo y negativo y no se ha apreciado ningún cambio de signo a partir del año 5. A partir del año 6 el beneficio seguirán siendo positivo y creciente.

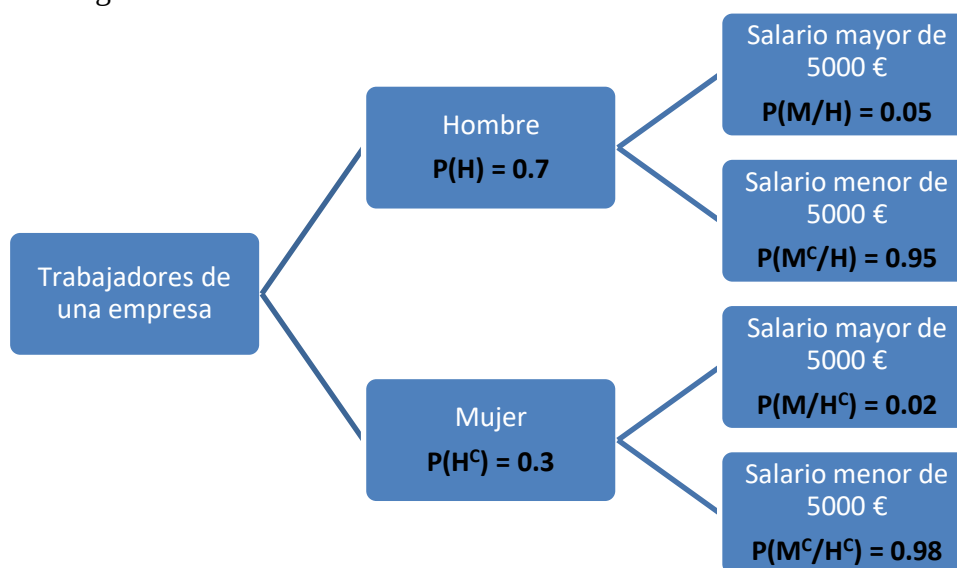
Problema 3. Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

- a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros. (3 puntos)
- b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer? (3 puntos)
- c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros? (4 puntos)

Llamemos H = “Ser hombre”, $\bar{H}$ = “Ser mujer”

M = “Salario mayor de 5000 €”, $\bar{M}$ = “Salario menor de 5000 €”

Hacemos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(H \cap M) + P(\bar{H} \cap M) = P(H)P(M/H) + P(\bar{H})P(M/\bar{H}) =$$

$$= 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.02 = \boxed{0.041}$$

- b) Nos piden calcular $P(\bar{H}/M)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{H}/M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(\bar{H})P(M/\bar{H})}{P(M)} = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.041} = \boxed{\frac{6}{41} = 0.1463}$$

- c) Necesitamos calcular $P(H \cap M)$

$$P(H \cap M) = P(H)P(M/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

La probabilidad de que un trabajador sea hombre y gane más de 5000 € es de 0.035.

Por tanto, el 3.5% de los trabajadores de la empresa son hombres y ganan más de 5000 € mensuales.



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2018	CONVOCATORIA: JULIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

- Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)
- Determina el vector x que verifica $Ax = B^t c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B . (4 puntos)

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4x - 9, \quad C(x) = 0,01x^2 + 3x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

- Calcula la función de beneficios. (1 punto)
- ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? (1 punto)
¿Cuál es dicho beneficio máximo? (1 punto)
- Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. (5 puntos)
- Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. (2 puntos)

Problema 3. Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

- Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11. (3 puntos)
- Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (4 puntos)

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

- a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
- b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
- c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2. Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ Toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

- a) Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor. *(5 puntos)*
- b) Si se necesita extraer como mínimo 10 Toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si en el año $t = 40$ es rentable. *(2 puntos)*
- c) ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta. *(3 puntos)*

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, d, e\}$ y siendo $\bar{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\bar{B}$ el suceso contrario o complementario de B , calcula:

- a) $P(A \cap B)$. *(2 puntos)*
- b) $P(A \cup \bar{B})$. *(2 puntos)*
- c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. *(2 puntos)*
- d) $P(A/\bar{B})$. *(2 puntos)*
- e) $P(B/A)$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES**OPCIÓN A****Problema 1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)b) Determina el vector x que verifica $Ax = B^t c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B . (4 puntos)a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 4 + 3 = 1 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo existe A^{-1} . Calculamos la expresión de la inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos x de la ecuación matricial $Ax = B^t c$.

$$Ax = B^t c \Rightarrow x = A^{-1} B^t c$$

Hallamos la expresión del vector x .

$$x = A^{-1} B^t c = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+0 & -3-2+12 & 6+1+18 \\ 2+2+0 & -2-2+10 & 4+1+15 \\ 2+2+0 & -2-2+8 & 4+1+12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 25 \\ 4 & 6 & 20 \\ 4 & 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10-7+75 \\ -8-6+60 \\ -8-4+51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4x - 9, \quad C(x) = 0,01x^2 + 3x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

- Calcula la función de beneficios. (1 punto)
- ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? (1 punto)
¿Cuál es dicho beneficio máximo? (1 punto)
- Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. (5 puntos)
- Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. (2 puntos)

a) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y el coste.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 4x - 9 - (0,01x^2 + 3x) = -0,01x^2 + x - 9$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función $B(x) = -0,01x^2 + x - 9$.

$$B(x) = -0,01x^2 + x - 9 \Rightarrow B'(x) = -0,02x + 1$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0,02x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{-0,02} = 50$$

La función beneficio tiene un punto crítico en $x = 50$. Comprobamos el signo de la segunda derivada en dicho valor.

$$B'(x) = -0,02x + 1 \Rightarrow B''(x) = -0,02 \Rightarrow B''(50) = -0,02 < 0$$

La derivada segunda en $x = 50$ es negativa, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = 50$.

Para este valor del precio de una mochila el beneficio es $B(50) = -0,01 \cdot 50^2 + 50 - 9 = 16$.

El beneficio es máximo para un precio de la mochila de 50 €. Se consigue un beneficio máximo de 16000 €.

c) Determinamos los puntos de corte con los ejes.

Eje OX ($y = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -0,01x^2 + x - 9 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0,01x^2 + x - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0,01)(-9)}}{2(-0,01)} = \frac{-1 \pm \frac{4}{5}}{-0,02} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 + \frac{4}{5}}{-0,02} = 10 \rightarrow A(10, 0) \\ \frac{-1 - \frac{4}{5}}{-0,02} = 90 \rightarrow B(90, 0) \end{array} \right.$$

Eje OY ($x = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -0,01x^2 + x - 9 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B(0) = -0,01 \cdot 0^2 + 0 - 9 = -9 \Rightarrow C(0, -9)$$

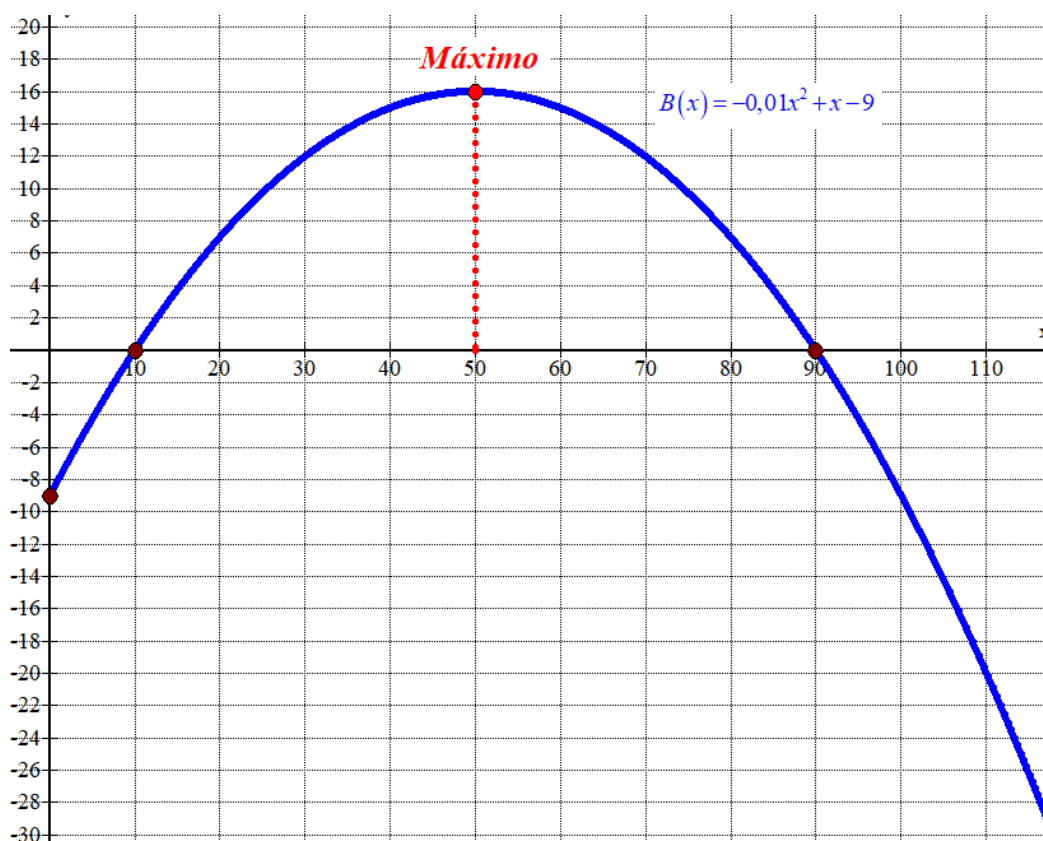
Los puntos de corte con los ejes son los puntos A(10, 0), B(90, 0) y C(0, -9).

En el apartado anterior hemos encontrado el punto crítico de la función: $x = 50$. También hemos visto que es un máximo relativo, lo que implica que la función crece antes de $x = 50$ y decrece después de este valor.

El beneficio crece en el intervalo $(0, 50)$ y decrece en $(50, +\infty)$.

Obtenemos una tabla de valores de la parábola $B(x) = -0,01x^2 + x - 9$ y la representamos.

x	$B(x) = -0,01x^2 + x - 9$
0	-9
10	0
50	16 Máximo relativo
90	0
100	-9



- d) A la vista de la gráfica la empresa tiene pérdidas con un precio entre 0 y 10 € por mochila y a partir de un precio de 90 € por mochila.

Problema 3. Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

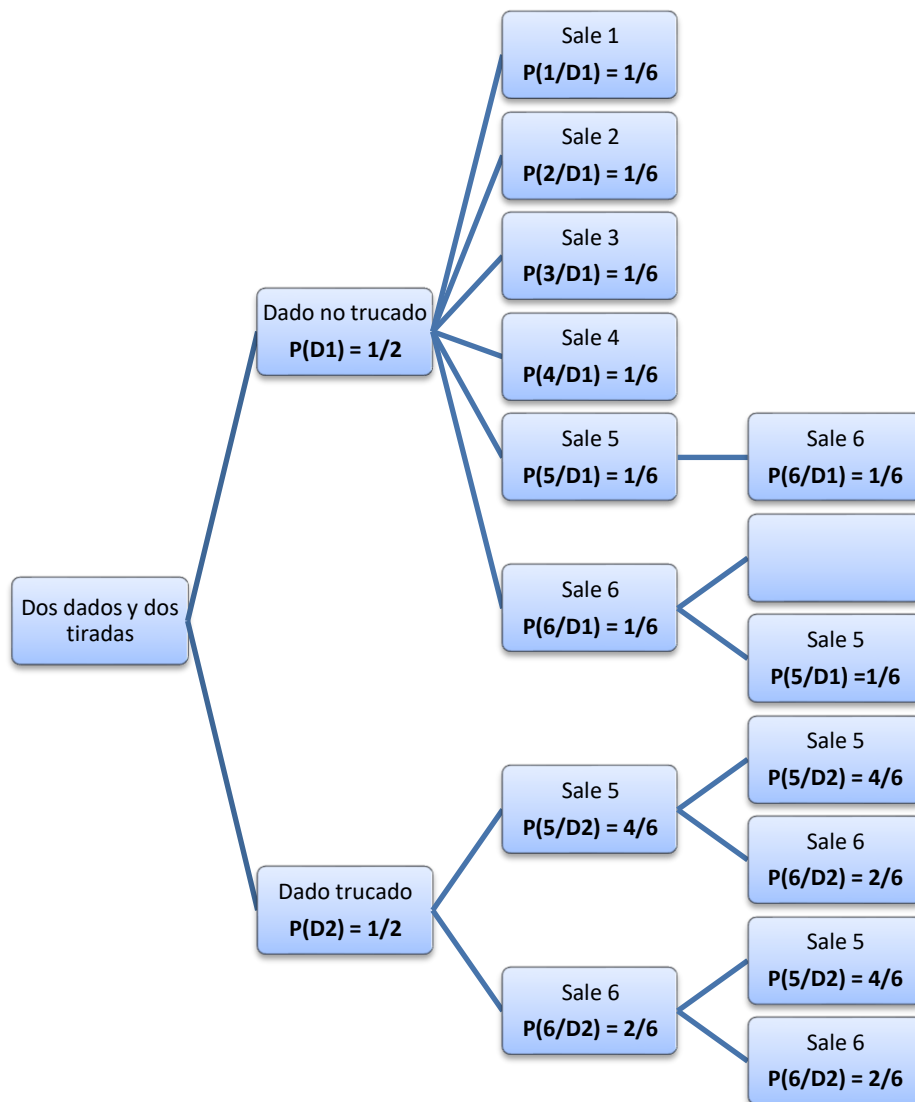
a) Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda. (3 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11. (3 puntos)

c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (4 puntos)

Llamamos D1 al suceso “Elegir dado no trucado” y D2 a “Elegir dado trucado”.

Realizamos un diagrama de árbol de la primera tirada que nos ayude a entender el experimento aleatorio planteado. El árbol con las dos tiradas es muy grande, solo rellenamos lo básico.



a) Para obtener un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda tenemos dos formas distintas de realizarlo y su probabilidad es:

$$P(65) = P(D1)P(65/D1) + P(D2)P(65/D2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$$

b) Para obtener suma 11 debemos obtener un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda o viceversa. La probabilidad de 6 en primera y 5 en segunda la hemos calculado y vale 1/8. Calculamos la probabilidad de sacar 5 en primera tirada y 6 en segunda.

$$P(56) = P(D1)P(56/D1) + P(D2)P(56/D2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{8}$$

Por lo que la probabilidad de sacar 11 en la suma de los dos lanzamientos de uno de los dados es:

$$P(65) + P(56) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D2/65) = \frac{P(D2 \cap 65)}{P(65)} = \frac{P(D2)P(65/D2)}{P(65)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}}{1/8} = \frac{8}{9}$$

OPCIÓN B

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

- a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
- b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
- c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos x = cantidad invertida en cuenta de ahorro (rentabilidad del 5%), y = cantidad invertida en depósito (rentabilidad del 7%), z = cantidad invertida en bonos (rentabilidad del 9%). De los datos del problema obtenemos las siguientes ecuaciones.

“Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos” $\rightarrow$

$$x + y + z = 42000$$

“Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €” $\rightarrow$

$$0.05x + 0.07y + 0.09z = 2600$$

“Los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones” $\rightarrow 0.05x = 0.07y + 0.09z - 200$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ 0.05x + 0.07y + 0.09z = 2600 \\ 0.05x = 0.07y + 0.09z - 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ 5x + 7y + 9z = 260000 \\ 5x = 7y + 9z - 20000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ 5x + 7y + 9z = 260000 \\ 5x - 7y - 9z = -20000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 5 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \hline 5x \quad +7y \quad +9z \quad = 260000 \\ -5x \quad -5y \quad -5z \quad = -210000 \\ \hline 2y \quad +4z \quad = 50000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 5 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ \hline 5x \quad -7y \quad -9z \quad = -20000 \\ -5x \quad -5y \quad -5z \quad = -210000 \\ \hline -12y \quad -14z \quad = -230000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ \Rightarrow 2y + 4z = 50000 \\ -12y - 14z = -230000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ y + 2z = 25000 \\ -6y - 7z = -115000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + 6 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ \hline -6y \quad -7z \quad = \quad -115000 \\ 6y \quad +12z \quad = \quad 150000 \\ \hline 5z \quad = \quad 35000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 42000 \\ y + 2z = 25000 \\ 5z = 35000 \rightarrow z = \frac{35000}{5} = 7000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 7000 = 42000 \\ y + 14000 = 25000 \rightarrow y = 25000 - 14000 = 11000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 11000 + 7000 = 42000 \Rightarrow x = 42000 - 18000 = 24000$$

Se han invertido 24000 € en cuenta de ahorros, 11000 € en depósito a plazo fijo y 7000 € en bonos.

Problema 2. Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ Toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

- Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor. (5 puntos)
- Si se necesita extraer como mínimo 10 Toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si en el año $t = 40$ es rentable. (2 puntos)
- ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta. (3 puntos)

a) Hallamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3 \Rightarrow f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{800}t^2$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{800}t^2 = 0 \Rightarrow 1200 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1200}{3} = 400 \Rightarrow t = \sqrt{400} = 20$$

La función tiene un punto crítico en $t = 20$. Sustituimos este valor en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo relativo.

$$f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{800}t^2 \Rightarrow f''(t) = -\frac{6}{800}t \Rightarrow f''(20) = -\frac{6}{800}20 = -\frac{3}{20} < 0$$

Al ser negativo la función presenta un máximo relativo en $t = 20$.

Para este valor la función vale $f(20) = 30 + \frac{3}{2}20 - \frac{1}{800}20^3 = 50$.

El máximo de extracción es de 50 toneladas y se alcanza a los 20 años de inicio de la explotación.

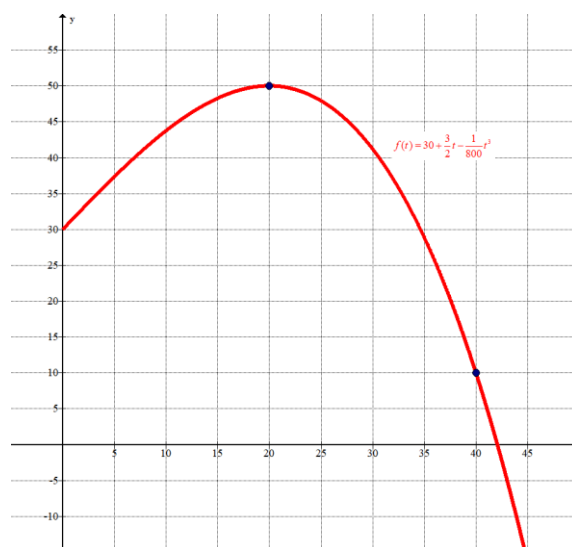
b) En el año $t = 40$ tenemos que $f(40) = 30 + \frac{3}{2}40 - \frac{1}{800}40^3 = 10$. En el año 40 se extraen 10 toneladas de carbón y la explotación es rentable.

c) A partir de $t = 40$ la derivada de la función $f'(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{800}t^2$ es negativa, lo que significa que las toneladas de extracción van disminuyendo desde las 10 toneladas del año 40, por lo que la explotación deja de ser rentable a partir de los 40 años.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Representamos la gráfica de la explotación minera.

A partir del año 40 la extracción es de menos de 10 toneladas, por lo que deja de ser rentable.



Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, d, e\}$ y siendo $\bar{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\bar{B}$ el suceso contrario o complementario de B , calcula:

- a) $P(A \cap B)$. (2 puntos)
- b) $P(A \cup \bar{B})$. (2 puntos)
- c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. (2 puntos)
- d) $P(A/\bar{B})$. (2 puntos)
- e) $P(B/A)$. (2 puntos)

Determinamos $P(b)$. Como Ω es el espacio muestral del experimento tenemos:

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(b) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

a) El suceso es $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, d, e\} = \{b\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{6}$

b) Si $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{b, d, e\}$ entonces $\bar{B} = \{a, c\}$.

$$A \cup \bar{B} = \{a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}.$$

Por lo que $P(A \cup \bar{B}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$

c) Si $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{a, b, c\}$ entonces $\bar{A} = \{d, e\}$.

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{d, e\} \cap \{a, c\} = \emptyset. \text{ Por lo que } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\emptyset) = 0$$

d) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \left\{ \begin{array}{l} A \cap \bar{B} = \{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\} \\ P(A \cap \bar{B}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \bar{B} = \{a, c\} \\ P(\bar{B}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

e) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} A = \{a, b, c\} \\ P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12} \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2018	CONVOCATORIA: JUNIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas EXTRA incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que las cajas denominadas DELUXE contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B.

Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas EXTRA, e y al número de cajas DELUXE que vende, se pide:

- Calcula la función de beneficios de la pastelería. (2 puntos)
- Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. (6 puntos)
- Calcula dicho beneficio máximo. (2 puntos)

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

- Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)
- La representación gráfica de la función. (2 puntos)

Problema 3. En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15% de las compras superan los 500 € y ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces. Calcula la probabilidad de que:

- Una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo. (3 puntos)
- Una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito. (4 puntos)
- Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €. (3 puntos)

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula A^{-1} . (5 puntos)
- b) Calcula una matriz X , de orden 3×3 , que cumpla $AX = C$. (5 puntos)

Problema 2. La caída de un meteorito en la Antártida provocó el deshielo de una superficie con una extensión en km^2 que viene dada por $f(t) = \frac{10t + 21}{t + 3}$, siendo t el número de días transcurridos desde el impacto.

- a) ¿Cuál fue la superficie deshelada después de 6 días del impacto? ¿Y después de 87 días? (2 puntos)
- b) Estudia si la superficie deshelada crece o decrece a lo largo del tiempo. (3 puntos)
- c) Otro científico afirmó que la superficie deshelada venía dada por la función

$$g(t) = 10 - \frac{9}{t + 3}.$$

- Comprueba si hay o no diferencias entre las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$. (2 puntos)
- d) ¿Tiene algún límite la extensión del deshielo? (3 puntos)

Problema 3. En una casa hay tres llaveros. El primer llavero (AZUL) tiene 5 llaves. El segundo (ROJO) tiene 4 llaves y el tercero (VERDE) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

- a) Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido. (3 puntos)
- b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE? (4 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero? (3 puntos)

OPCIÓN A

Problema 1. Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas EXTRA incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que las cajas denominadas DELUXE contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B.

Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas EXTRA, e y al número de cajas DELUXE que vende, se pide:

- a) Calcula la función de beneficios de la pastelería. (2 puntos)
 b) Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. (6 puntos)
 Calcula dicho beneficio máximo. (2 puntos)

Llamamos $x = n^{\circ}$ de cajas EXTRA, $y = n^{\circ}$ de cajas DELUXE

Los datos del problema podemos organizarlos en la siguiente tabla:

	Bombones A	Bombones B
Nº cajas EXTRA (x)	$15x$	$30x$
Nº cajas DELUXE (y)	$30y$	$15y$
TOTAL	$15x + 30y$	$30x + 15y$
Beneficio	$(15x + 30y)0.5$	$(30x + 15y)0.4$

- a) El beneficio total viene dado por la suma de los beneficios por cada tipo de bombón. La función es $B(x, y) = (15x + 30y)0.5 + (30x + 15y)0.4$. La simplificamos.

$$B(x, y) = (15x + 30y)0.5 + (30x + 15y)0.4 = 7.5x + 15y + 12x + 6y = 19.5x + 21y$$

- b) Es un problema de programación lineal. Las restricciones son:

“Dispone de 450 bombones de cada tipo” $\rightarrow 15x + 30y \leq 450$; $30x + 15y \leq 450$

El número de cajas es un número positivo y entero $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 30y \leq 450 \\ 30x + 15y \leq 450 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 30 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 30$$

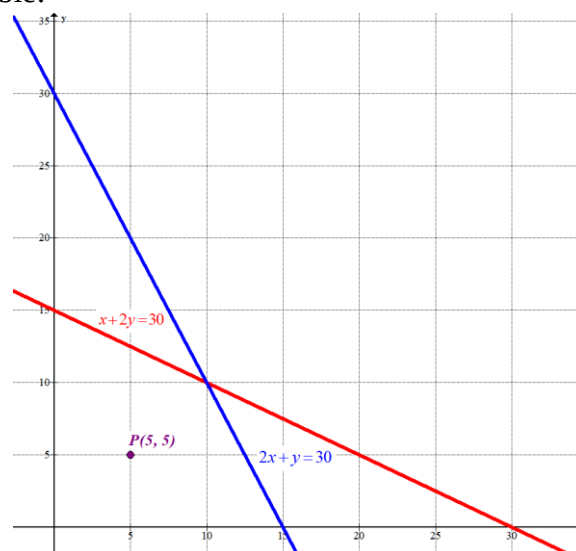
$$2x + y = 30$$

x	$y = \frac{30-x}{2}$
0	15
10	10
30	0

x	$y = 30 - 2x$
0	30
10	10
15	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

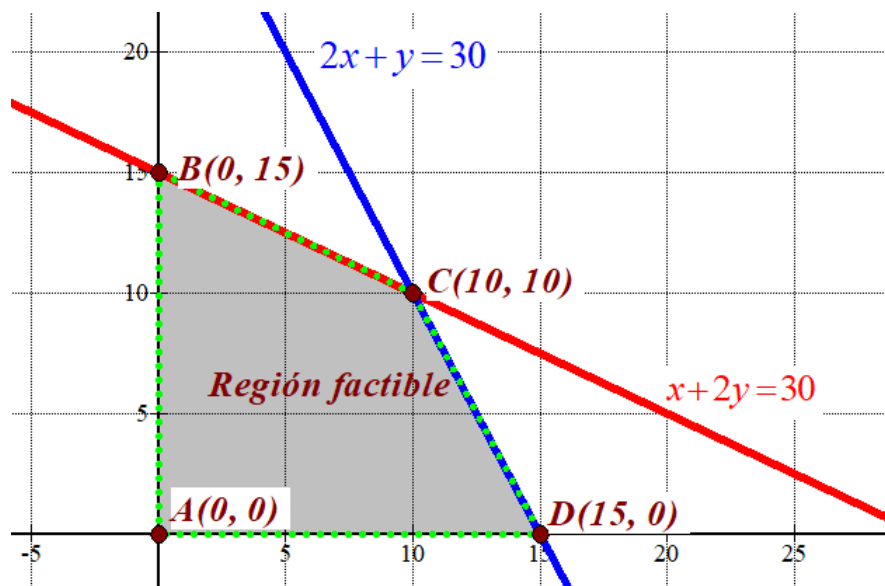


Al ser las restricciones $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 30 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las dos rectas. Comprobamos que el punto $P(5, 5)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 2 \cdot 5 \leq 30 \\ 2 \cdot 5 + 5 \leq 30 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos la región factible e indicamos sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 19.5x + 21y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 15) \rightarrow B(0, 15) = 19.5 \cdot 0 + 21 \cdot 15 = 315$$

$$C(10, 10) \rightarrow B(10, 10) = 19.5 \cdot 10 + 21 \cdot 10 = 405 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(15, 0) \rightarrow B(15, 0) = 19.5 \cdot 15 + 21 \cdot 0 = 292.5$$

El beneficio máximo que se puede obtener tiene un valor de 405 € y se consigue fabricando 10 cajas de bombones de cada clase.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

- | | |
|---|------------|
| a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. | (2 puntos) |
| b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. | (2 puntos) |
| c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. | (2 puntos) |
| d) Los máximos y mínimos locales. | (2 puntos) |
| e) La representación gráfica de la función. | (2 puntos) |

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Con el eje OY } (x = 0) \Rightarrow f(0) = \frac{0-1}{(0-2)^2} = \frac{-1}{4} \Rightarrow A\left(0, \frac{-1}{4}\right)$$

$$\text{Con el eje OX } (y = 0) \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{(x-2)^2} \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes son $A\left(0, \frac{-1}{4}\right)$ y $B(1, 0)$.

- b) **Asíntotas verticales.** $x = a$

El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$, por lo que la asíntota vertical es $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

- c) Veamos cómo evoluciona en el dominio el signo de la derivada primera de la función.
La derivada es

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(x-2)^2 - 2(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 4x - 2(x^2 - 2x - x + 2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 + 4 - 4x - 2x^2 + 4x + 2x - 4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-2)^2}$$

Igualamos a cero para averiguar los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow -x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

El valor $x = 2$ está excluido del dominio, pero estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos el valor $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^2 + 2(-1)}{(-1-2)^2} = \frac{-3}{9} < 0, \text{ la función decrece.}$$

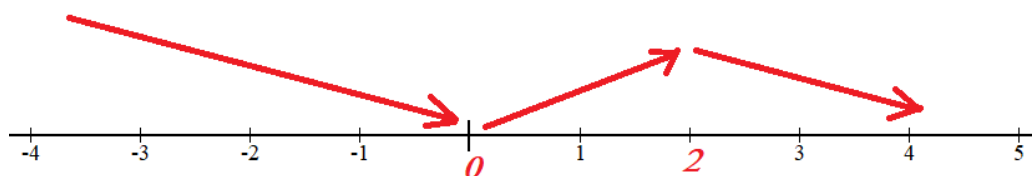
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos el valor $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1^2 + 2}{(1-2)^2} = 1 > 0$, la función crece.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos el valor $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-3^2 + 2 \cdot 3}{(3-2)^2} = -3 < 0, \text{ la función decrece.}$$

La función es creciente en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

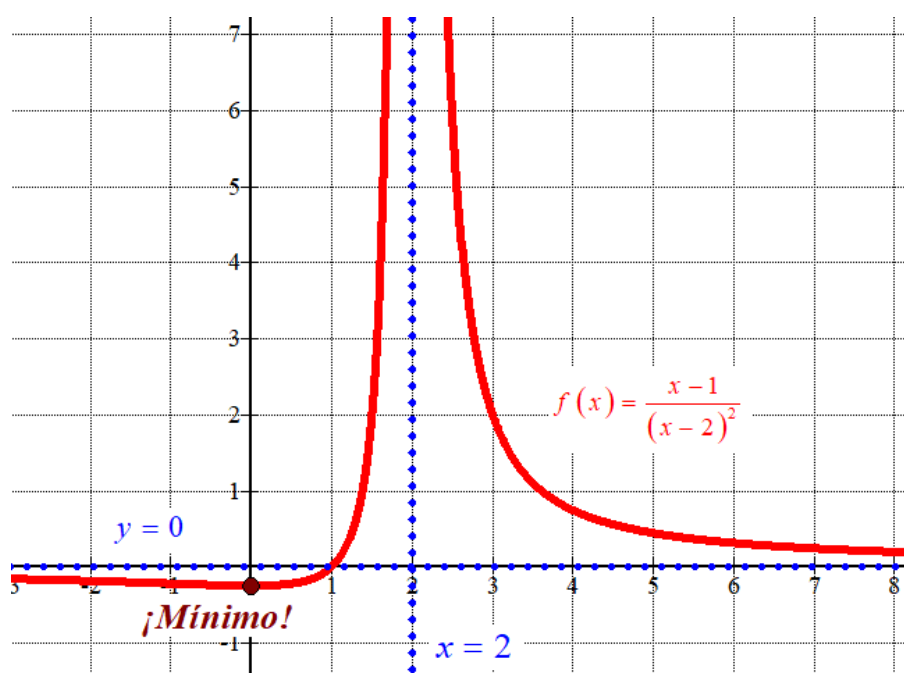
d) Con el estudio anterior podemos decir que la función sigue el esquema siguiente.



Como el valor $x = 2$ está excluido del dominio de la función solo existe un mínimo relativo en $x = 0$. El mínimo relativo tiene coordenadas $A\left(0, \frac{-1}{4}\right)$. La función no tiene máximo relativo.

e) Realizamos una tabla de valores y con ella y los datos de los apartados anteriores dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{x-1}{(x-2)^2}$
-2	-0.1875
0	-0.25
1	0
1.5	2
2.5	6
3	2



Problema 3. En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68% de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15% de las compras superan los 500 € y ambas circunstancias (una compra supera los 500 € y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5% de las veces. Calcula la probabilidad de que:

- a) Una compra no supere los 500 € y se pague en efectivo. (3 puntos)
 b) Una compra no pase de 500 € si no se ha pagado con tarjeta de crédito. (4 puntos)
 c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 €. (3 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Superan los 500 € (S)	No superan los 500 € ($\bar{S}$)	
Con tarjeta de crédito (C)	5		68
Sin tarjeta de crédito ($\bar{C}$)			
	15		100

Completamos la tabla.

	Superan los 500 € (S)	No superan los 500 € ($\bar{S}$)	
Con tarjeta de crédito (C)	5	63	68
Sin tarjeta de crédito ($\bar{C}$)	10	22	32
	15	85	100

Con estos datos y la regla de Laplace respondemos a las preguntas que se plantean.

a) Nos piden calcular $P(\bar{S} \cap \bar{C})$. $P(\bar{S} \cap \bar{C}) = \frac{22}{100} = 0.22$

b) Nos piden calcular $P(\bar{S} / \bar{C})$.

$$P(\bar{S} / \bar{C}) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16} = 0.6875$$

c) Nos piden calcular $P(C / \bar{S})$.

$$P(C / \bar{S}) = \frac{63}{85} \approx 0.7412$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Utilizando fórmulas de probabilidad. Llamamos C al suceso “pagar con tarjeta de crédito” y S al suceso “la compra supera los 500 €”. Sabemos que $P(C) = 0.68$; $P(S) = 0.15$;

$$P(S \cap C) = 0.05$$

a) Nos piden calcular $P(\bar{S} \cap \bar{C})$.

$$\begin{aligned} P(\bar{S} \cap \bar{C}) &= P(\overline{S \cup C}) = 1 - P(S \cup C) = 1 - (P(S) + P(C) - P(S \cap C)) = \\ &= 1 - (0.15 + 0.68 - 0.05) = 0.22 \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(\bar{S} / \bar{C})$.

$$P(\bar{S} / \bar{C}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{C})}{1 - P(C)} = \frac{0.22}{1 - 0.68} = 0.6875$$

c) Nos piden calcular $P(C / \bar{S})$.

$$P(C / \bar{S}) = \frac{P(C \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(C) - P(C \cap S)}{1 - P(S)} = \frac{0.68 - 0.05}{1 - 0.15} = \frac{63}{85} \approx 0.7412$$

OPCIÓN B

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula A^{-1} . (5 puntos)
 b) Calcula una matriz X , de orden 3×3 , que cumpla $AX = C$. (5 puntos)

a) Comprobamos si existe la inversa de A determinando el valor de su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 10 + 15 - 25 + 9 + 4 = 19 \neq 0$$

Al ser el determinante no nulo la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{19} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Como existe la inversa de A y la hemos calculado la utilizamos para el cálculo de la matriz X .

$$AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$$

$$X = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 35+8-24 & 20-8-12 & 5+32-18 \\ -133-19+152 & -76+19+76 & -19-76+114 \\ -14-7+40 & -8+7+20 & -2-28+30 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 0 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2. La caída de un meteorito en la Antártida provocó el deshielo de una superficie con una extensión en km^2 que viene dada por $f(t) = \frac{10t+21}{t+3}$, siendo t el número de días transcurridos desde el impacto.

- a) ¿Cuál fue la superficie deshelada después de 6 días del impacto? ¿Y después de 87 días? (2 puntos)
 b) Estudia si la superficie deshelada crece o decrece a lo largo del tiempo. (3 puntos)
 c) Otro científico afirmó que la superficie deshelada venía dada por la función

$$g(t) = 10 - \frac{9}{t+3}.$$

- Comprueba si hay o no diferencias entre las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$. (2 puntos)
 d) ¿Tiene algún límite la extensión del deshielo? (3 puntos)

- a) Nos piden calcular $f(6)$ y $f(87)$.

$$f(6) = \frac{10 \cdot 6 + 21}{6 + 3} = 9 \qquad f(87) = \frac{10 \cdot 87 + 21}{87 + 3} = 9.9$$

La superficie deshelada después de 6 días del impacto es de 9 km^2 . Después de 87 días del impacto la superficie deshelada es de 9.9 km^2 .

- b) Calculamos la derivada de $f(t)$.

$$f(t) = \frac{10t+21}{t+3} \Rightarrow f'(t) = \frac{10(t+3) - 1 \cdot (10t+21)}{(t+3)^2} = \frac{10t+30-10t-21}{(t+3)^2} = \frac{9}{(t+3)^2}$$

Al ser el numerador positivo y el denominador positivo la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre crece.

La superficie deshelada crece a lo largo del tiempo

- c) Simplificamos la función $f(t)$.

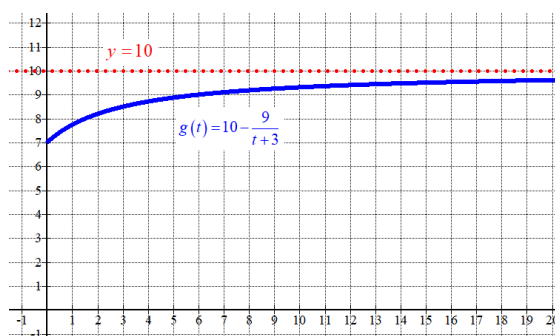
$$f(t) = \frac{10t+21}{t+3} = \frac{10t+30-9}{t+3} = \frac{10t+30}{t+3} - \frac{9}{t+3} = \frac{10\cancel{(t+3)}}{\cancel{t+3}} - \frac{9}{t+3} = 10 - \frac{9}{t+3} = g(t)$$

Las dos funciones son la misma.

- d) Calculamos el límite de la función $f(t) = g(t)$ cuando t crece indefinidamente.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 10 - \frac{9}{t+3} = 10 - \frac{9}{\infty} = 10 - 0 = 10$$

La superficie deshelada siempre crece, pero la tendencia tiene la limitación indicada por el límite calculado. La superficie deshelada tiene un límite de 10 km^2 .

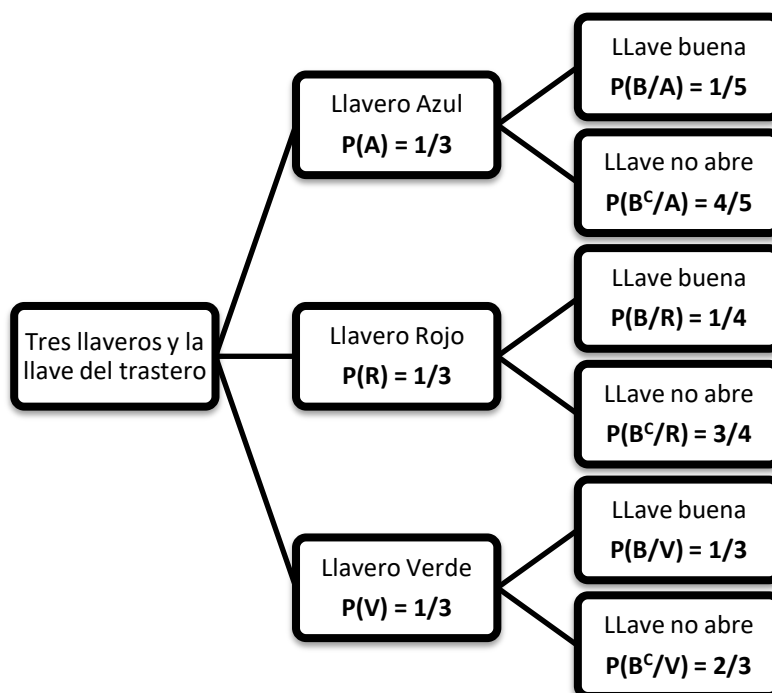


Problema 3. En una casa hay tres llaveros. El primer llavero (AZUL) tiene 5 llaves. El segundo (ROJO) tiene 4 llaves y el tercero (VERDE) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

- Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido. (3 puntos)
- Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero VERDE? (4 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí que lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero? (3 puntos)

Llamamos A al suceso “elegir llavero Azul”, R al suceso “elegir llavero Rojo”, V a “elegir llavero Verde”, B al suceso “elegir llave Buena que abre la puerta del trastero”.

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio planteado.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

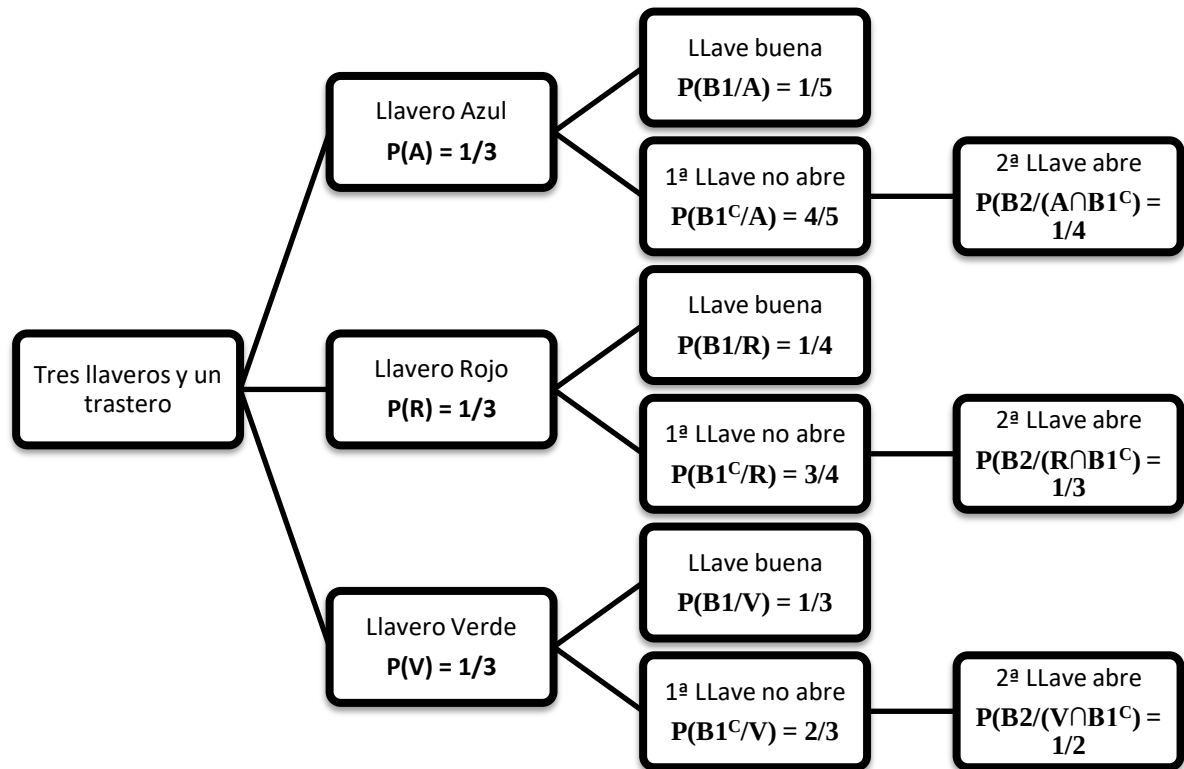
$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(R)P(B/R) + P(V)P(B/V) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{180} \approx 0.261$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{P(V)P(B/V)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47} \approx 0.425$$

- c) El suceso del que tenemos que hallar la probabilidad sucede cuando elegimos un llavero, de él elegimos una primera llave y no abre, después elegimos una segunda llave del mismo llavero y abre el trastero. Completamos el diagrama de árbol superior con la segunda elección de llave.



$$P(B1^c \cap B2) = P(A)P(B1^c / A)P(B2 / (A \cap B1^c)) +$$

$$+ P(R)P(B1^c / R)P(B2 / (R \cap B1^c)) +$$

$$+ P(V)P(B1^c / V)P(B2 / (V \cap B1^c)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{47}{180} \approx 0.261$$



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2017	CONVOCATORIA: JULIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}, \quad x \in [0, 8]$$

donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

- Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?
- Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{a-x} & x > 3 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
- b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

OPCIÓN A

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Representamos las rectas que delimitan la región.

$$x = 10$$

$x = 10$	y
10	0
10	10
10	30

$$x = 20$$

$x = 20$	y
20	0
20	20
20	60

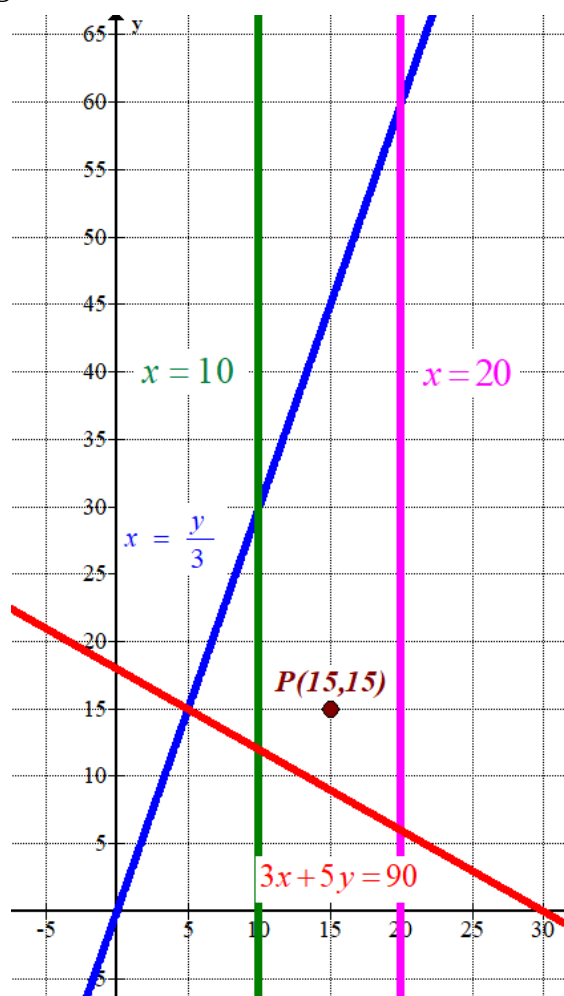
$$x = \frac{y}{3}$$

$$12x + 20y = 360$$

$$3x + 5y = 90$$

x	$y = 3x$
0	0
10	30
20	60

x	$y = \frac{90 - 3x}{5}$
10	10
20	6
30	0

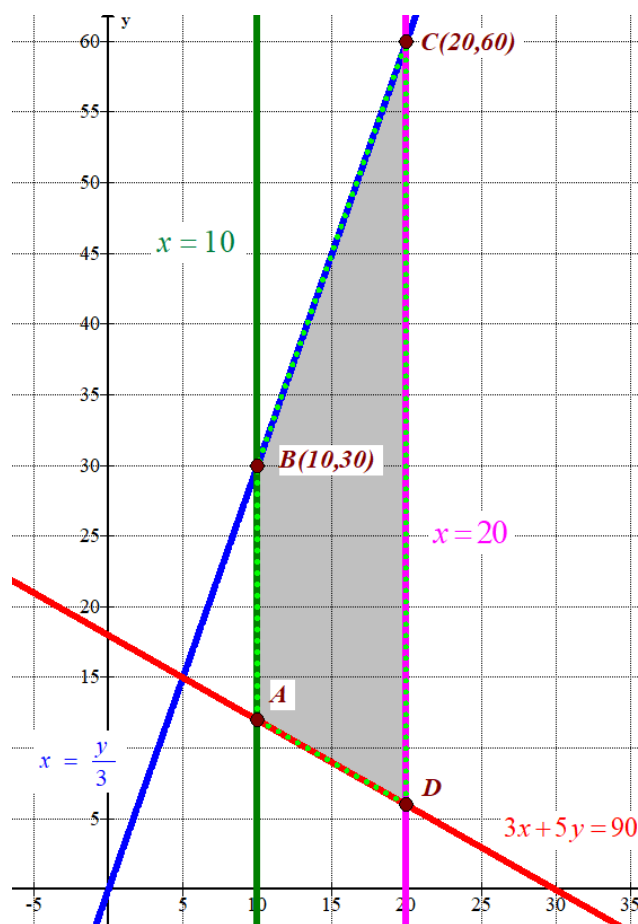


Como las restricciones son $\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 3x + 5y \geq 90 \end{cases}$ la región es la zona del plano

situada entre las dos rectas verticales, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto $P(15, 15)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 15 \geq 10 \\ 15 \leq 20 \\ 15 \geq \frac{15}{3} \\ 12 \cdot 15 + 20 \cdot 15 \geq 360 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos la región en el siguiente dibujo e indicamos sus vértices.



Determinamos las coordenadas de los vértices A y D.

$$A \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ 3x+5y=90 \end{cases} \Rightarrow 30+5y=90 \Rightarrow 5y=60 \Rightarrow y=\frac{60}{5}=12 \Rightarrow A(10,12)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x=20 \\ 3x+5y=90 \end{cases} \Rightarrow 60+5y=90 \Rightarrow 5y=30 \Rightarrow y=\frac{30}{5}=6 \Rightarrow D(20,6)$$

Valoramos la función $f(x,y)=x-2y$ en cada uno de sus vértices en busca del valor mínimo.

$$A(10, 12) \rightarrow f(10,12)=10-2 \cdot 12=-14$$

$$B(10, 30) \rightarrow f(10,30)=10-2 \cdot 30=-50$$

$$C(20, 60) \rightarrow f(20,60)=20-2 \cdot 60=-100 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(20, 6) \rightarrow f(20,6)=20-2 \cdot 6=8$$

El valor mínimo que alcanza la función en la región es -100 y lo alcanza en el punto $C(20, 60)$.

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}, \quad x \in [0,8]$$

donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

- Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

a) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21} \Rightarrow f'(x) = 35,7 \frac{1 \cdot (x^2+21) - (2x)(x+2)}{(x^2+21)^2} = 35,7 \frac{x^2+21-2x^2-4x}{(x^2+21)^2}$$

$$f'(x) = 35,7 \frac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 35,7 \frac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-4x+21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-1)(21)}}{2(-1)} = \frac{4 \pm 10}{-2} = \begin{cases} \frac{4+10}{-2} = -7 \notin [0,8] \\ \frac{4-10}{-2} = 3 \in [0,8] \end{cases}$$

Determinamos la evolución del signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

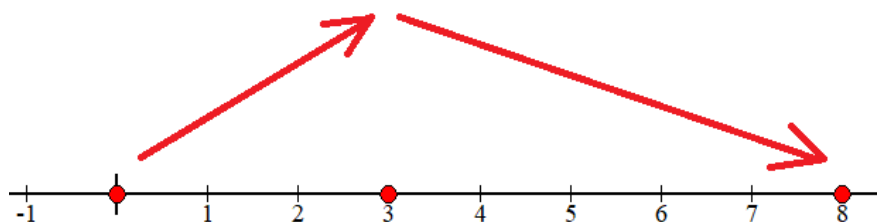
- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 35,7 \frac{-1^2-4 \cdot 1+21}{(1^2+21)^2} = 1.18 > 0. \text{ La función crece en } [0,3).$$

- En el intervalo $(3,8]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = 35,7 \frac{-4^2-4 \cdot 4+21}{(4^2+21)^2} = -0.28 < 0. \text{ La función decrece en } (3,8].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 3$. Como $f(3) = 35,7 \frac{3+2}{3^2+21} = 5.95$

podemos decir que la acción consigue un precio máximo de 5.95 € al cabo de 3 horas de apertura de la sesión del día.

- b) A partir del estudio realizado en el apartado anterior podemos apreciar que el valor mínimo de la función se alcanza en uno de los extremos del intervalo de definición $[0,8]$. Valoramos la función en cada uno de los extremos y determinamos el valor mínimo.

$$f(0) = 35,7 \frac{0+2}{0^2+21} = 3.4$$

$$f(8) = 35,7 \frac{8+2}{8^2+21} = 4.2$$

El precio mínimo de la acción es de 3.4 € y se alcanza al inicio de la sesión ($x = 0$).

- c) Si se compran las acciones al inicio de la sesión su precio será de 3.4 € por acción. Esto hace un gasto total de $20 \cdot 3.4 = 68$ €. Si vende las 20 acciones al final de la sesión cuando su precio era de 4.2 € por acción lo que recibe es un total de $20 \cdot 4.2 = 84$ €, al venderlas más caras de lo que la compró se obtienen ganancias. Estas ganancias tienen un valor de $84 - 68 = 16$ €.

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?
- Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

Si se sabe que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto (x), un 87,5% tiene experiencia y estos son el 70 % $\rightarrow 87.5 \cdot x = 70 \Rightarrow x = \frac{70}{87.5} = 0.8$.

Esto significa que el 80 % de los solicitantes tienen formación acorde con el puesto. Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados y obtenemos el resto de información.

	Formación acorde con el puesto (F)	Formación no acorde con el puesto ($\bar{F}$)	
Tiene experiencia (X)	70	20	
No tiene experiencia ($\bar{X}$)			
	80		100

Completamos la tabla.

	Formación acorde con el puesto (F)	Formación no acorde con el puesto ($\bar{F}$)	
Tiene experiencia (X)	70	20	90
No tiene experiencia ($\bar{X}$)	10	0	10
	80	20	100

Respondemos a lo planteado en el problema.

- En la tabla se observa que hay un 10 % de solicitantes sin experiencia. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida es 0.10.
- En la tabla observamos la primera fila y vemos que hay 90 solicitantes con experiencia, de los cuales 70 tienen formación acorde con el puesto. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(F / X) = \frac{70}{90} = \frac{7}{9} \approx 0.778$$

- En la tabla observamos que hay un 0 % de solicitantes sin experiencia ni formación acorde con el puesto, Por lo que la probabilidad pedida es 0.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Utilizamos las fórmulas de la probabilidad.

Sabemos que $P(X \cap F) = 0.70$, $P(X \cap \bar{F}) = 0.20$.

Como entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia entonces:

$$P(X / F) = 0.875 \Rightarrow \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = 0.875 \Rightarrow P(F) = \frac{P(X \cap F)}{0.875} = \frac{0.7}{0.875} = 0.80$$

a) Nos piden calcular $P(\overline{X})$.

$$P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 1 - [P(X \cap F) + P(X \cap \overline{F})] = 1 - [0.70 + 0.20] = 0.10$$

b) Nos piden calcular $P(F / X)$.

$$P(F / X) = \frac{P(F \cap X)}{P(X)} = \frac{P(F \cap X)}{1 - P(\overline{X})} = \frac{0.70}{1 - 0.10} = \frac{7}{9} \approx 0.778$$

c) Nos piden calcular $P(\overline{F} \cap \overline{X})$.

$$P(\overline{F} \cap \overline{X}) = P(\overline{F \cup X}) = 1 - P(F \cup X) = 1 - [P(F) + P(X) - P(F \cap X)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P(F) = 0.80 \\ P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - 0.1 = 0.9 \\ P(X \cap F) = 0.70 \end{array} \right\} = 1 - [0.80 + 0.90 - 0.7] = 0$$

OPCIÓN B

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Llamamos x, y, z a la puntuación obtenida en la primera, segunda y tercera pregunta.

“Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas” $\rightarrow x + y + z = 7.5$

“En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda” $\rightarrow z = y + 1$

“Los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas” $\rightarrow x = 5(z - x)$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ z = y + 1 \\ x = 5(z - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + y + 1 = 7.5 \\ x = 5(y + 1 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 6.5 \\ x = 5y + 5 - 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6.5 - 2y \\ 6x = 5y + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(6.5 - 2y) = 5y + 5 \Rightarrow 39 - 12y = 5y + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 34 = 17y \Rightarrow \boxed{y = \frac{34}{17} = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 6.5 - 2 \cdot 2 = 2.5} \\ \boxed{z = 2 + 1 = 3} \end{array} \right.$$

Obtuvo 2.5 puntos en la primera pregunta, 2 puntos en la segunda y 3 en la tercera.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ z = y + 1 \rightarrow -y + z = 1 \\ x = 5(z - x) \rightarrow x = 5z - 5x \rightarrow 6x - 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ -y + z = 1 \\ 6x - 5z = 0 \end{array} \right\}$$

Con el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7.5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{37.5 + 5}{5 + 6 + 6} = \frac{42.5}{17} = 2.5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 45 - 6}{17} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7.5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{17} = \frac{6 + 45}{17} = \frac{51}{17} = 3$$

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{a-x} & x > 3 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
 b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
 c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

a) Para que la función sea continua en $x = 3$ debe cumplirse:

- Existe $f(3) \rightarrow f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 20 = -2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 - 3x - 20 = -2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{a-x} = \frac{2}{a-3}$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow -2 = \frac{2}{a-3} \rightarrow a-3 = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow a = -1+3 = 2$

El valor buscado es $a = 2$.

b) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{-x} & x > 3 \end{cases}$. Estudiamos el signo de la derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < 3 \\ \frac{0 - 2(-1)}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 & x < 3 \\ \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} & x > 3 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 3)$ estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

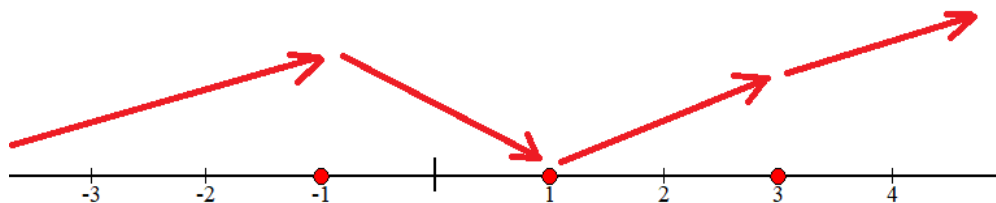
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$.
La función decrece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.

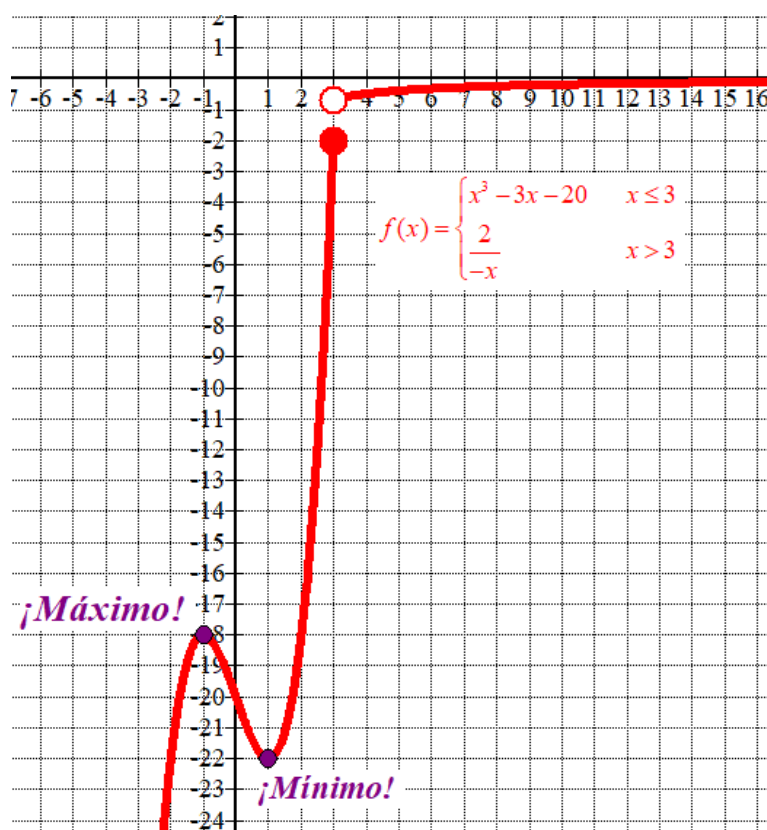
En el intervalo $(3, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ que siempre es positiva. La función crece en $(3, +\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

c) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{-x} & x > 3 \end{cases}$. Hemos visto en el apartado anterior que la función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 20 = -18$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = -22$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, -18)$ y el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -22)$.

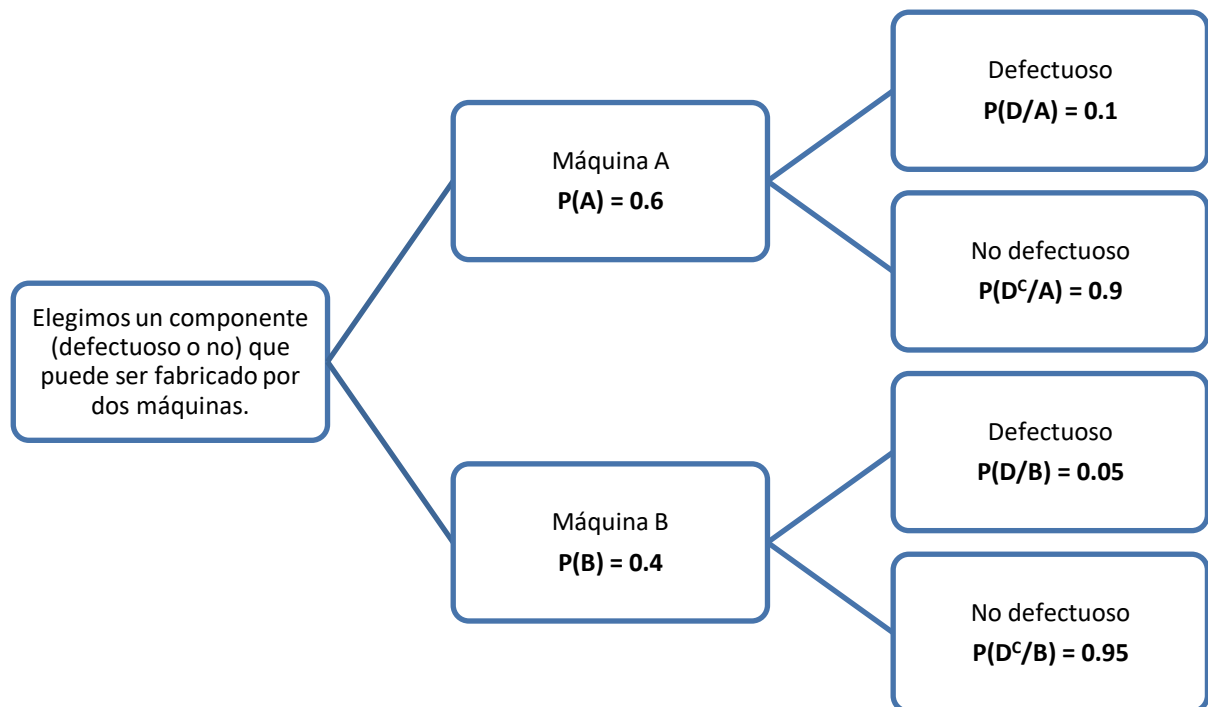


Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

Llamamos A al suceso “el componente electrónico procede de la máquina A”, B al suceso “el componente electrónico procede de la máquina B” y D al suceso “el componente electrónico es defectuoso”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 = 0.08$$

- b) Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.9}{1 - 0.08} = \frac{27}{46} \approx 0.587$$

- c) Nos piden calcular $P(D \cap B)$.

$$P(D \cap B) = P(B)P(D/B) = 0.4 \cdot 0.05 = 0.02$$



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2017	CONVOCATORIA: JUNIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Problema 2. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica.
- A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene un máximo y un mínimo local.

Problema 3. Imagina cinco sillas alineadas 1, 2, 3, 4, 5 y que un individuo está sentado inicialmente en la silla central (número 3). Se lanza una moneda al aire y, si el resultado es cara, se desplaza a la silla situada a su derecha, mientras que si el resultado es cruz, se desplaza a la situada a su izquierda. Se realizan sucesivos lanzamientos (y los cambios de silla consecutivos correspondientes) teniendo en cuenta que si tras alguno de ellos llega a sentarse en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5), permanecerá sentado en ella con independencia de los resultados de los lanzamientos posteriores. Se pide:

- Dibujar el diagrama de árbol para cuatro lanzamientos de moneda.
- La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado de nuevo en la silla central (3).
- La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).
- La probabilidad de que tras los **cuatro** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$X + 2Y = A^t + B$$

$$X - Y = AB$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Un analista pronostica que el beneficio $B(x)$ en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión:

$$B(x) = \begin{cases} -0,01x^2 + 0,09x + 0,1 & 0 < x \leq 8 \\ 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02 & x > 8 \end{cases}.$$

- Estudia la continuidad de $B(x)$.
- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio?
¿Cuál será dicho beneficio máximo?
- Si se invierte un capital muy elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

Problema 3. Una compañía de transporte interurbano cubre el desplazamiento a tres municipios distintos. El 35% de los recorridos diarios realizados por los autobuses de esta compañía corresponden al destino 1, el 20% al destino 2 y el 45% al destino 3. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un recorrido de autobús sufra un retraso es del 2%, 5% y 3% para cada uno de los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

- ¿Qué porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía llegan con puntualidad a su destino?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido seleccionado al azar corresponda al destino 2 y haya experimentado un retraso?
- Si seleccionamos un recorrido al azar y resulta que sufrió un retraso, ¿cuál era el destino más probable de dicho recorrido?

OPCIÓN A

Problema 1. Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Llamamos x = litros diarios de cerveza del tipo A e y = litros diarios de cerveza del tipo B. Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:

“La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios” $\rightarrow x \geq 200$

“La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A” $\rightarrow y \geq 2x$

“La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza” $\rightarrow x + y \leq 900$

Como las variables x e y representan litros deben ser mayores o iguales a cero $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

El beneficio viene dado por la función: $B(x, y) = 2x + 2.5y$

El problema a resolver es:

$$\text{Maximizar } B(x, y) = 2x + 2.5y \text{ sometido a las restricciones } \left. \begin{array}{l} x \geq 200 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 900 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x = 200$$

$x = 200$	y
200	0
200	100
200	800

$$y = 2x$$

x	$y = 2x$
0	0
300	600
400	800

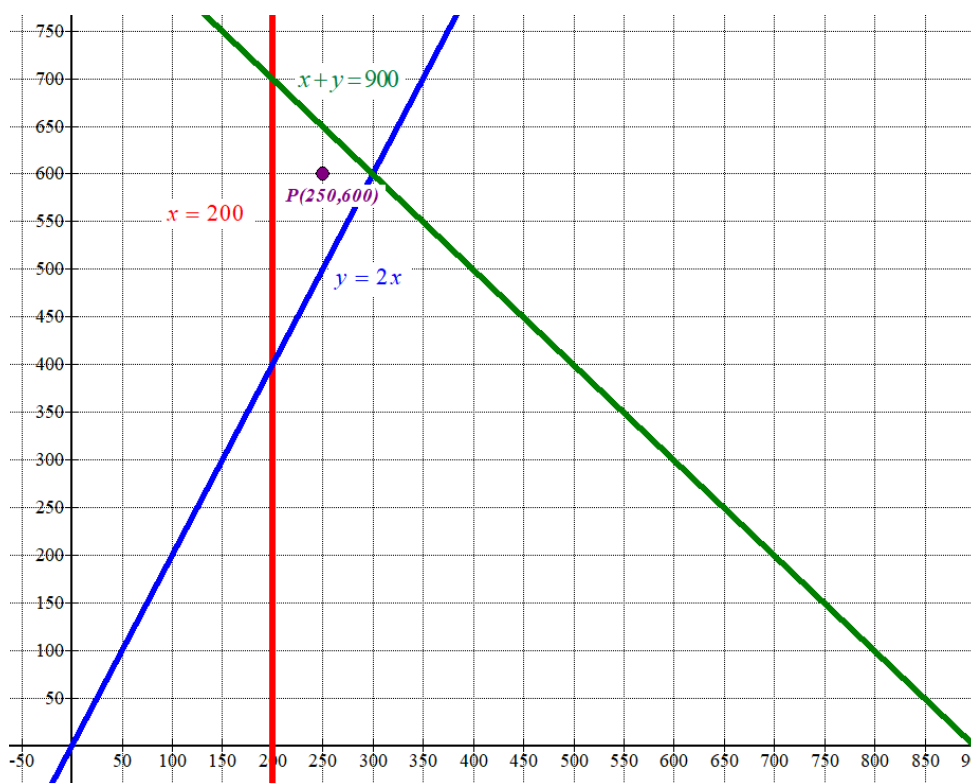
$$x + y = 900$$

x	$y = 900 - x$
0	900
300	600
900	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer

cuadrante



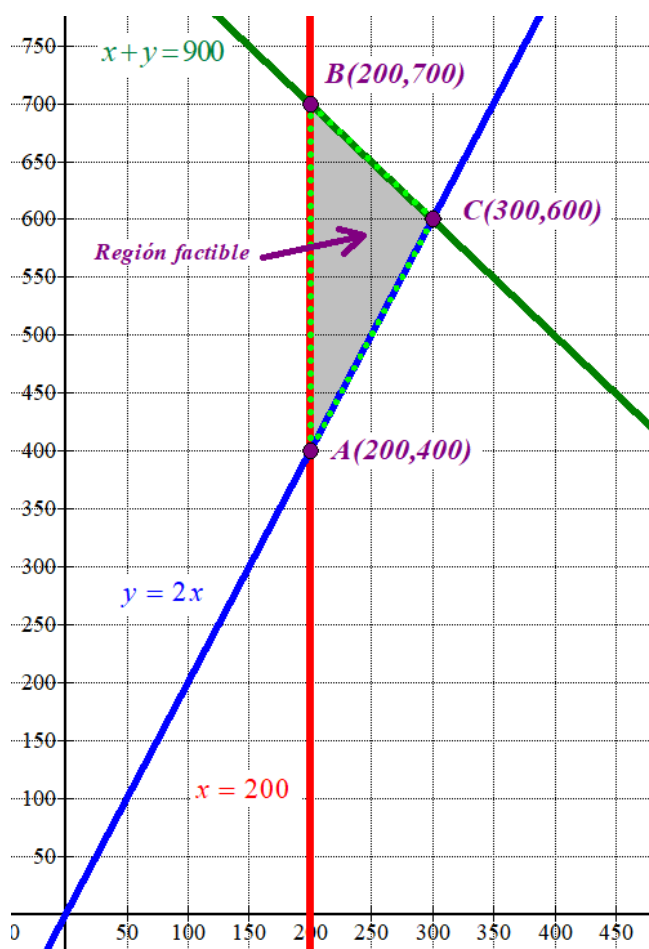
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 200 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 900 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada a la derecha de la recta vertical, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde. Comprobamos que el punto $P(250, 600)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 250 \geq 200 \\ 600 \geq 2 \cdot 250 \\ 250 + 600 \leq 900 \\ 250 \geq 0; 600 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 2x + 2.5y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(200, 400) \rightarrow B(200, 400) = 2 \cdot 200 + 2.5 \cdot 400 = 1400$$

$$B(200, 700) \rightarrow B(200, 700) = 2 \cdot 200 + 2.5 \cdot 700 = 2150 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(300, 600) \rightarrow B(300, 600) = 2 \cdot 300 + 2.5 \cdot 600 = 2100$$

El máximo beneficio tiene un valor de 2150 € y se obtiene con la producción diaria de 200 litros de cerveza del tipo A y 700 litros del tipo B.

Problema 2. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, se pide:

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica.
- A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, razona en qué puntos la función $g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene un máximo y un mínimo local.

- a) Al ser una función polinómica su dominio son todos los números reales.

Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 2x^2 + x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Los puntos de corte con el eje OX son A(0, 0) y B(1, 0).

Puntos de corte con el eje OY ($x = 0$)

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

El punto de corte con el eje OY es A(0, 0).

- b) La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Buscamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

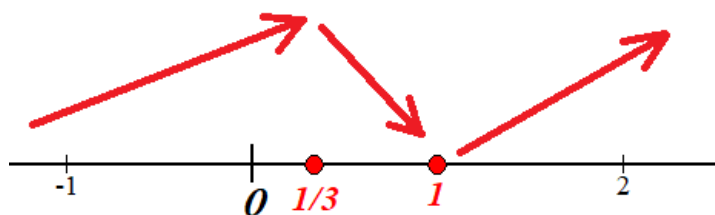
$$f'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 4 \cdot 0.5 + 1 = -0.25 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función crece en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

- c) Con el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento realizado en el apartado anterior podemos decir que la función sigue el esquema siguiente.

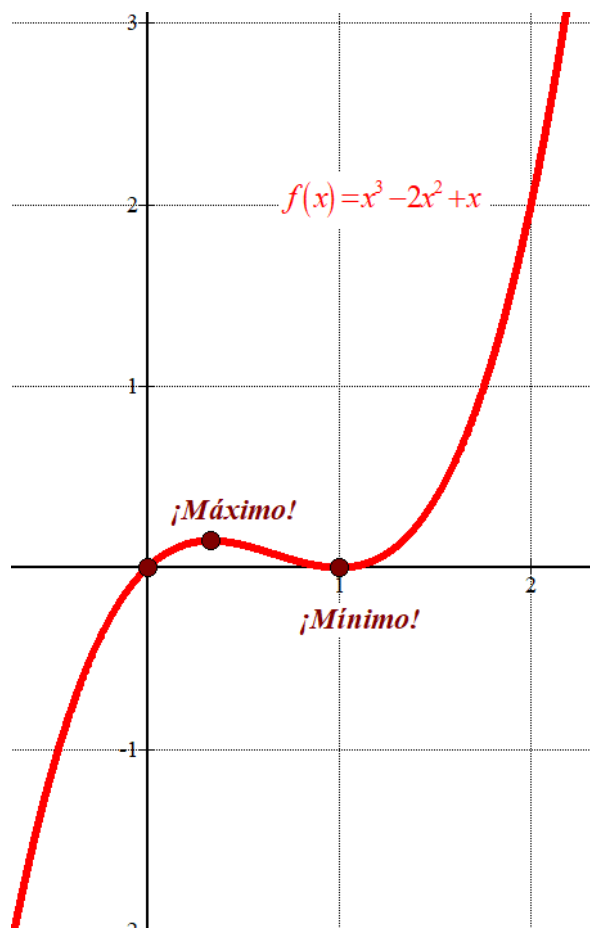


La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ y $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ y las del mínimo relativo son $(1, 0)$.

- d) Determinamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
0	0
$1/3$	$4/27$
$1/2$	$1/8$
1	0
2	2



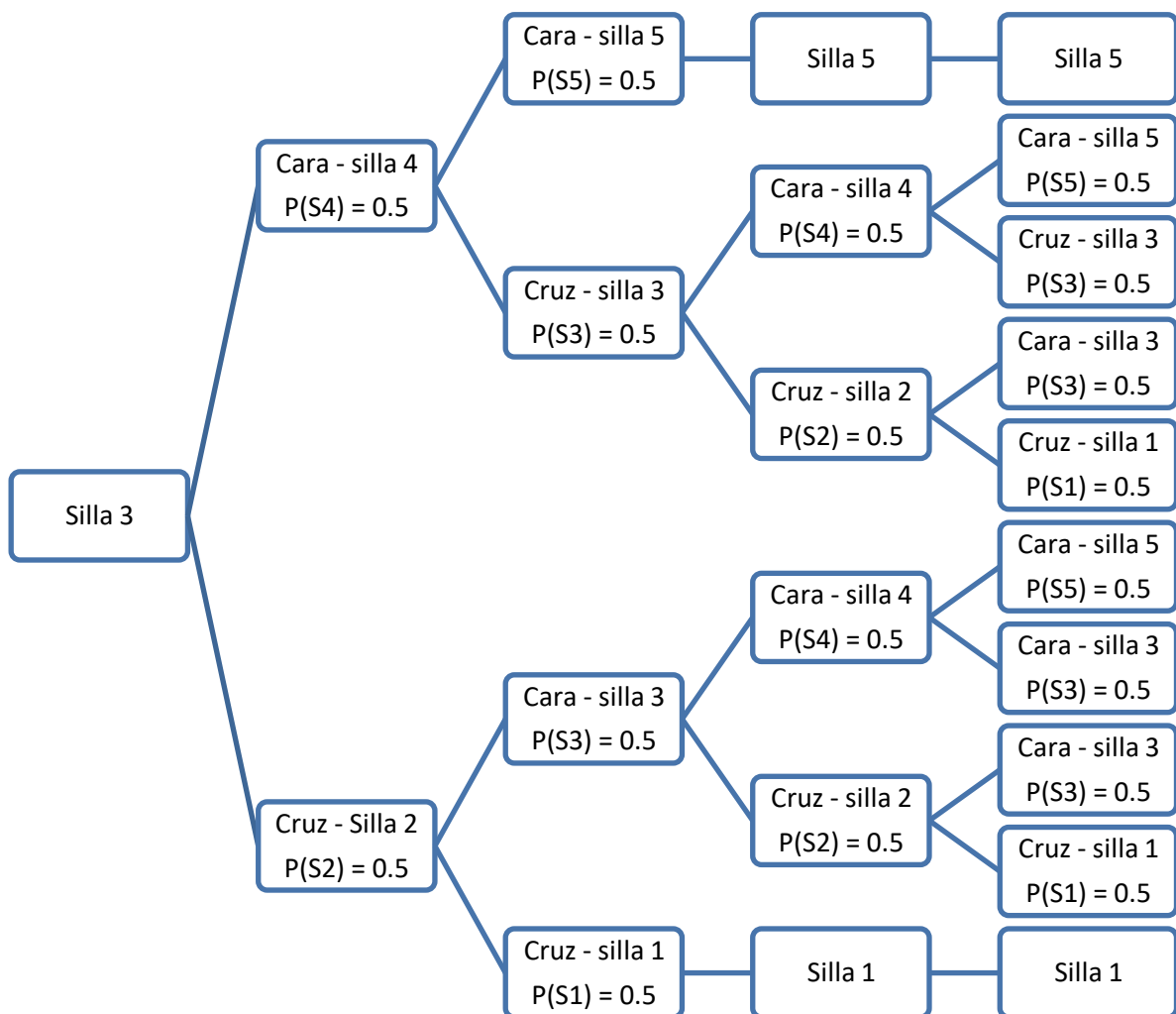
- e) La función $g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + x - 2$ tiene los mismos valores que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ pero desplazados dos unidades a la derecha. Es decir $g(x) = f(x-2)$.
 $g(2) = f(2-2) = f(0)$.

La función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1/3$ y un mínimo en $x = 1$. La función $g(x)$ tiene un máximo en $x = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ y un mínimo en $x = 1 + 2 = 3$.

Problema 3. Imagina cinco sillas alineadas 1, 2, 3, 4, 5 y que un individuo está sentado inicialmente en la silla central (número 3). Se lanza una moneda al aire y, si el resultado es cara, se desplaza a la silla situada a su derecha, mientras que si el resultado es cruz, se desplaza a la situada a su izquierda. Se realizan sucesivos lanzamientos (y los cambios de silla consecutivos correspondientes) teniendo en cuenta que si tras alguno de ellos llega a sentarse en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5), permanecerá sentado en ella con independencia de los resultados de los lanzamientos posteriores. Se pide:

- Dibujar el diagrama de árbol para cuatro lanzamientos de moneda.
- La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado de nuevo en la silla central (3).
- La probabilidad de que tras los **tres** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).
- La probabilidad de que tras los **cuatro** primeros lanzamientos esté sentado en alguna de las sillas de los extremos (1 o 5).

a)



- b) Observando el diagrama de árbol vemos que no es posible. Con tres lanzamientos o estás en la silla 1, 2, 4 o 5.
- c) Vemos que ocurre de dos formas distintas tras los dos primeros lanzamientos.

$$P(\text{Sentado extremos}) = P(S4)P(S5) + P(S2)P(S1) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

- d) Observando el diagrama de árbol vemos que puede pasar tras los dos primeros lanzamientos o tras los primeros cuatro lanzamientos.

$$\begin{aligned}P(\text{Sentado extremos}) &= P(S4)P(S5) + P(S2)P(S1) + P(S4)P(S3)P(S4)P(S5) + \\&+ P(S4)P(S3)P(S2)P(S1) + P(S2)P(S3)P(S4)P(S5) + P(S2)P(S3)P(S2)P(S1) = \\&= 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = \frac{3}{4} = 0.75\end{aligned}$$

OPCIÓN B

Problema 1. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$X + 2Y = A^t + B$$

$$X - Y = AB$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{array}{l} X + 2Y = A^t + B \\ X - Y = AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X + 2Y = A^t + B \\ X = Y + AB \end{array} \right\} \Rightarrow Y + AB + 2Y = A^t + B \Rightarrow 3Y = A^t + B - AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{3}[A^t + B - AB] \Rightarrow X = \frac{1}{3}[A^t + B - AB] + AB = \frac{1}{3}[A^t + B] - \frac{1}{3}AB + AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3}[A^t + B] + \frac{2}{3}AB = \frac{1}{3}[A^t + B + 2AB]$$

Sustituimos las matrices y realizamos las operaciones indicadas para obtener X e Y .

$$A^t + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2+12 & 2-4+4 & 0-2+0 \\ 8+3+0 & -4+6+0 & 0+3+0 \\ 4+0+6 & -2+0+2 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}[A^t + B + 2AB] = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 4 & -3 \\ 21 & 9 & 7 \\ 27 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3}[A^t + B - AB] = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 4/3 & -1 \\ 7 & 3 & 7/3 \\ 9 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 1 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Un analista pronostica que el beneficio $B(x)$ en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión:

$$B(x) = \begin{cases} -0,01x^2 + 0,09x + 0,1 & 0 < x \leq 8 \\ 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02 & x > 8 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de $B(x)$.
- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?
- Si se invierte un capital muy elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

a) La función en el intervalo $(0, 8)$ es $B(x) = -0,01x^2 + 0,09x + 0,1$. Como es una función polinómica es continua.

La función en el intervalo $(8, +\infty)$ es $B(x) = 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02$. El denominador se anula en

$x = -1$ y $x = 1$, pero no están incluidos en el intervalo, por lo que la función es continua.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición: $x = 8$.

- Existe $B(8) = -0,01 \cdot 8^2 + 0,09 \cdot 8 + 0,1 = 0,18$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 8^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} -0,01x^2 + 0,09x + 0,1 = -0,01 \cdot 8^2 + 0,09 \cdot 8 + 0,1 = 0,18$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 8^+} B(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02 = 1,26 \frac{8}{8^2 - 1} + 0,02 = 0,18$
- Los tres valores son iguales: $B(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} B(x) = 0,18$.

La función es continua en $x = 8$.

La función es continua en su dominio de definición $(0, +\infty)$

b) Determinamos la derivada de la función.

$$B'(x) = \begin{cases} -0,02x + 0,09 & 0 < x < 8 \\ 1,26 \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = 1,26 \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 1,26 \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} & x > 8 \end{cases}$$

Igualamos a cero la derivada en busca de puntos críticos.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0,02x + 0,09 = 0 \rightarrow x = \frac{0,09}{0,02} = 4,5 & 0 < x < 8 \\ 1,26 \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{No existe} & x > 8 \end{cases}$$

En el intervalo $(0, 8)$ tenemos un punto crítico: $x = 4,5$, estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, 4,5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$B'(1) = -0,02 \cdot 1 + 0,09 = 0,07 > 0. \text{ La función crece en } (0, 4,5).$$

- En el intervalo $(4,5, 8)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale

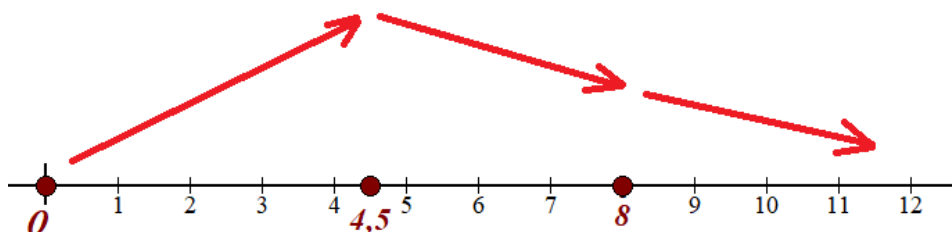
$$B'(6) = -0,02 \cdot 6 + 0,09 = -0,03 < 0. \text{ La función decrece en } (4,5, 8).$$

En el intervalo $(8, +\infty)$ la derivada es $B'(x) = 1,26 \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$ que siempre es negativa, por lo que la función decrece.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow -x^2 - 1 < 0 \\ (x^2 - 1)^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B'(x) = 1,26 \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

Resumiendo: La función crece en $(0, 4,5)$ y decrece en $(4,5, +\infty)$.

- c) Según el estudio del apartado anterior la función beneficio sigue el esquema siguiente.



Se aprecia en el dibujo que la función tiene un máximo absoluto en $x = 4,5$.

Como $B(4,5) = -0,01 \cdot 4,5^2 + 0,09 \cdot 4,5 + 0,1 = 0,3025$ podemos afirmar que el máximo es el punto de coordenadas $(4,5, 0,3025)$.

Se obtiene un máximo beneficio de 302,5 € invirtiendo 4500 €.

- d) Calculamos el límite del beneficio cuando la inversión se hace muy grande.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,26 \frac{x}{x^2 - 1} + 0,02 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,26 \frac{x}{x^2} + 0,02 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1,26 \frac{1}{x} + 0,02 = \\ &= 1,26 \frac{1}{\infty} + 0,02 = 1,26 \cdot 0 + 0,02 = 0,02 \end{aligned}$$

El beneficio va decreciendo conforme se invierte más dinero, pero nunca desciende por debajo de 20 €.

Problema 3. Una compañía de transporte interurbano cubre el desplazamiento a tres municipios distintos. El 35% de los recorridos diarios realizados por los autobuses de esta compañía corresponden al destino 1, el 20% al destino 2 y el 45% al destino 3. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un recorrido de autobús sufra un retraso es del 2%, 5% y 3% para cada uno de los destinos 1, 2 y 3, respectivamente.

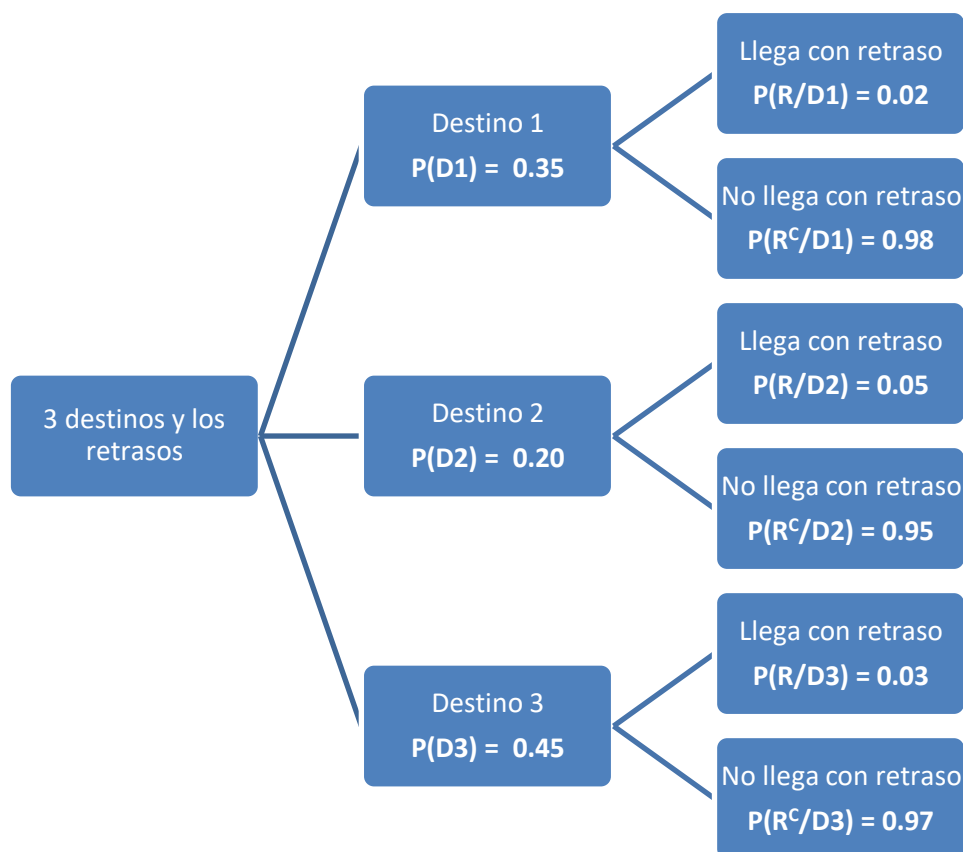
- ¿Qué porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía llegan con puntualidad a su destino?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido seleccionado al azar corresponda al destino 2 y haya experimentado un retraso?
- Si seleccionamos un recorrido al azar y resulta que sufrió un retraso, ¿cuál era el destino más probable de dicho recorrido?

Consideramos los siguientes sucesos:

D1 = autobús al destino 1 D2 = autobús al destino 2 D3 = autobús al destino 3

R = el autobús sufre retraso R^c = el autobús no sufre retraso

Realizamos un diagrama de árbol de la elección al azar de un recorrido del autobús y la llegada con retraso o no.



- El porcentaje de recorridos que llegan con puntualidad estará entre el 95% del destino 2 y el 98% del destino 1. Hallamos con mayor exactitud este porcentaje realizando una media ponderada.

$$\frac{35 \cdot 98 + 20 \cdot 95 + 45 \cdot 97}{100} = 96.95$$

El porcentaje de los recorridos diarios de esta compañía que llegan con puntualidad a su destino es del 96.95%.

También se puede resolver aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}P(R^c) &= P(D1)P(R^c / D1) + P(D2)P(R^c / D2) + P(D3)P(R^c / D3) = \\&= 0.35 \cdot 0.98 + 0.20 \cdot 0.95 + 0.45 \cdot 0.97 = 0.9695\end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(D2 \cap R)$.

$$P(D2 \cap R) = P(D2)P(R / D2) = 0.20 \cdot 0.05 = 0.01$$

c) Calculamos $P(D1 / R)$; $P(D2 / R)$; $P(D3 / R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D1 / R) = \frac{P(D1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(D1)P(R / D1)}{1 - P(R^c)} = \frac{0.35 \cdot 0.02}{1 - 0.9695} = \frac{14}{61} \approx 0.2295$$

$$P(D2 / R) = \frac{P(D2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(D2)P(R / D2)}{1 - P(R^c)} = \frac{0.20 \cdot 0.05}{1 - 0.9695} = \frac{20}{61} \approx 0.3279$$

$$P(D3 / R) = \frac{P(D3 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(D3)P(R / D3)}{1 - P(R^c)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{1 - 0.9695} = \frac{27}{61} \approx 0.4426 \text{ ¡Mayor!}$$

Es más probable que el autobús que llegue con retraso haya hecho el recorrido con destino 3.