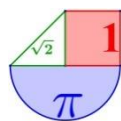


Matemáticas II

PAU Islas Baleares 2017 a 2025



WWW.PBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas PBAU de las Islas Baleares desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	15
PBAU Extraordinaria 2024	27
PBAU Ordinaria 2024	42
PBAU Extraordinaria 2023	58
PBAU Ordinaria 2023	74
PBAU Extraordinaria 2022	87
PBAU Ordinaria 2022	104
PBAU Extraordinaria 2021	116
PBAU Ordinaria 2021	131
PBAU Extraordinaria 2020	148
PBAU Ordinaria 2020	165
PBAU Extraordinaria 2019	182
PBAU Ordinaria 2019	194
PBAU Extraordinaria 2018	206
PBAU Ordinaria 2018	218
PBAU Extraordinaria 2017	231
PBAU Ordinaria 2017	248

PAU Extraordinaria 2025

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

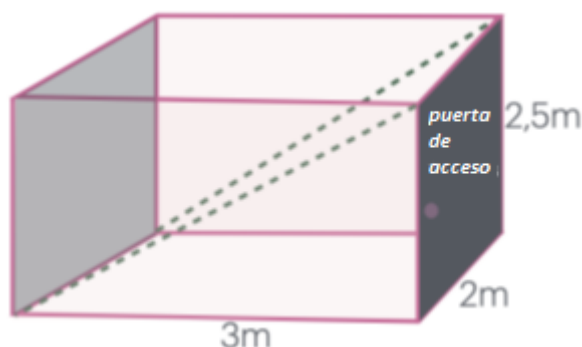
Model 1

La prueba consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, sólo se evaluará al primero.

Justificad las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- [1 punto]** Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- [1 punto]** Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.
- [0.5 puntos]** Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

- [1.5 puntos]** Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.
- [1 punto]** Resuelve el sistema cuando sea posible.

Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

- (a) **[1 punto]** ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.
- (b) **[1.5 puntos]** Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

- (a) **[1 punto]** Calcula la recta tangente, r , a la curva y en el punto $(2, 0)$.
- (b) **[1.5 puntos]** Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

Problema C2. — La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función

$$H(t) = \frac{20}{1 + e^{-t}},$$

donde el tiempo está medido en segundos.

- (a) **[0.5 puntos]** ¿Cuál es la concentración inicial?
- (b) **[1 punto]** Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.
- (c) **[1 punto]** Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45% de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40% han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los productos no averiados, se sabe que el 55% también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

- (a) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?
- (b) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?
- (c) **[1 punto]** Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

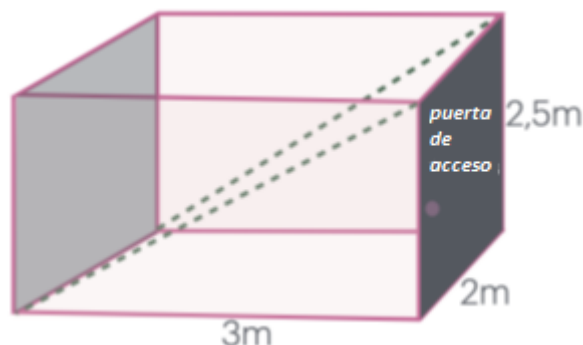
Problema D2. — Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A' y B' los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0.75$, $P(B') = 0.45$ y $P(A - B) = 0.3$, calcula:

- (a) **[0.75 puntos]** $P(A \cap B)$.
- (b) **[0.75 puntos]** $P(B - A)$.
- (c) **[1 punto]** $P(A' \cap B')$.

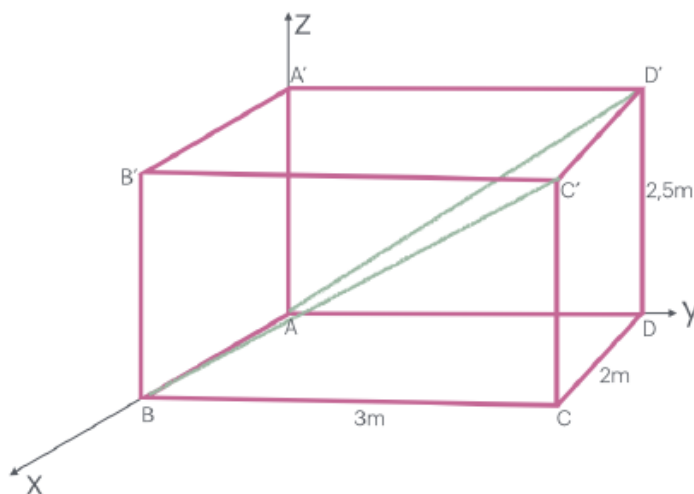
SOLUCIONES

Problema A1. — Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- (a) **[1 punto]** Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- (b) **[1 punto]** Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.
- (c) **[0.5 puntos]** Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?

(a) Colocamos el origen de coordenadas como indica el dibujo.



Hemos nombrado cada vértice con una letra. Las coordenadas de cada uno son $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $A'(0, 0, 2.5)$, $B'(2, 0, 2.5)$, $C'(2, 3, 2.5)$ y $D'(0, 3, 2.5)$.

- (b) Las dos vigas tienen la misma longitud. Una de las vigas es la diagonal del rectángulo $BB'C'C$. Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener su longitud.

$$\overline{BC'}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CC'}^2 \Rightarrow \overline{BC'}^2 = 3^2 + 2.5^2 = 15.25 \Rightarrow \overline{BC'} = \sqrt{15.25} = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3.9 \text{ metros}$$

Cada una de las vigas tiene una longitud de $\frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3.9$ metros.

El plano π que contiene las dos vigas contiene el punto $A(0, 0, 0)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi \\ \overrightarrow{AD} = (0,3,2.5) - (0,0,0) = (0,3,2.5) \\ \overrightarrow{AB} = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 3 & 2.5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5y - 6z = 0}$$

El plano que contiene las vigas tiene ecuación $\pi: 5y - 6z = 0$.

- (c) Hallamos la longitud de la diagonal de la puerta de entrada. Esta será la longitud máxima que puede pasar por la puerta. Si es mayor o igual a 2.75 la lámina podrá entrar en el contenedor (suponemos que la lámina es muy delgada).

$$d^2 = 2^2 + 2.5^2 \Rightarrow d^2 = 10.25 \Rightarrow d = \sqrt{10.25} \approx 3.2016 \text{ metros}$$

La diagonal de la puerta de entrada tiene una longitud mayor de 2.75. La lámina puede entrar en el contenedor, y como la longitud de la base también es mayor de 2.75 puede entrar en su totalidad al contenedor. La lámina puede entrar en el contenedor y debe ser colocada de forma diagonal pues uno de los lados de la base tiene de longitud 2 metros, menor de 2.75 metros.

Problema B1. — Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

(a) **[1.5 puntos]** Discute, según el parámetro k , el número de soluciones que tiene el sistema.

(b) **[1 punto]** Resuelve el sistema cuando sea posible.

(a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2 + 3 + k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1) \cdot 3}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2.3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Estudiamos el rango de $A = \begin{pmatrix} 2.3 & 1 & 0 \\ 0 & 2.3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor que resulta de quitar

la primera columna y la última fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2.3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 2.3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2.3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \neq 0. \text{ El rango de la matriz } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1.3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Estudiamos el rango de $A = \begin{pmatrix} -1.3 & 1 & 0 \\ 0 & -1.3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor que resulta de

quitar la primera columna y la última fila $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1.3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1.3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1.3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1-\sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \neq 0. \text{ El rango de la matriz } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ o $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

(b) Resolvemos el sistema para $k \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Esto implica que $-k^2 + k + 3 \neq 0$.

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - kx \\ (k-1)y + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)(1-kx) + 3x = 0 \Rightarrow k - k^2x - 1 + kx + 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-k^2 + k + 3)x = 1 - k \Rightarrow \{-k^2 + k + 3 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 - k \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3} = 1 - \frac{k - k^2}{-k^2 + k + 3} = \frac{-k^2 + k + 3 - k + k^2}{-k^2 + k + 3} = \boxed{\frac{3}{-k^2 + k + 3} = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -k \frac{3}{-k^2 + k + 3} = \frac{-3k}{-k^2 + k + 3}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{1 - k}{-k^2 + k + 3}$, $y = \frac{3}{-k^2 + k + 3}$, $z = \frac{-3k}{-k^2 + k + 3}$.

Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

(a) **[1 punto]** ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

(b) **[1.5 puntos]** Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

(a) Llamamos “x”, “y” y “z” al número de perritos calientes, hamburguesas y refrescos vendidos en un día. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información de que disponemos.

“Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 € y se han recaudado 328 €” $\rightarrow 3.5x + 4y + 1.5z = 328$.

“Se han vendido 132 artículos al cabo del día” $\rightarrow x + y + z = 132$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 3.5x + 4y + 1.5z = 328 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\}$$

Tenemos 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones. Nos falta información para obtener el precio de cada artículo. Intentamos resolverlo y obtenemos la expresión de las soluciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 132 \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 132 - y - x \\ 7x + 8y + 3z = 656 \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 8y + 3(132 - y - x) = 656 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 8y + 396 - 3y - 3x = 656 \Rightarrow 4x + 5y = 260 \Rightarrow \boxed{y = \frac{260 - 4x}{5} = 52 - \frac{4x}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 132 - 52 + \frac{4x}{5} - x = 80 - \frac{x}{5}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 52 - \frac{4x}{5} \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right.$$

Como el número de artículos tiene que ser entero y positivo solo podemos afirmar que x debe ser múltiplo de 5, que $52 - \frac{4x}{5} \geq 0 \rightarrow 52 \geq \frac{4x}{5} \rightarrow 260 \geq 4x \rightarrow x \leq \frac{260}{4} = 65$ y que

$80 - \frac{x}{5} \geq 0 \rightarrow 80 \geq \frac{x}{5} \rightarrow 400 \geq x$. El número de perritos calientes debe ser un múltiplo de 5 menor o igual a 65.

(b) Añadimos al sistema el valor $y = 20$ y obtenemos el resto de valores.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 52 - \frac{4x}{5} = 20 \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4x}{5} = -32 \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x = 160 \rightarrow \boxed{x = \frac{160}{4} = 40} \\ z = 80 - \frac{x}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{z = 80 - \frac{40}{5} = 72}$$

Se vendieron 40 perritos calientes, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

Problema C1. — Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

(a) **[1 punto]** Calcula la recta tangente, r , a la curva y en el punto $(2, 0)$.

(b) **[1.5 puntos]** Calcula el área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r .

(a) Hallamos la ecuación de la recta tangente pedida.

$$\left. \begin{array}{l} y(2) = 0 \\ y'(x) = 2x \rightarrow y'(2) = 4 \\ y - y(2) = y'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 4x - 8}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = 4x - 8$.

(b) Obtenemos los puntos de corte de la recta tangente y la curva. Sabemos que al menos se cortan en $x = 2$. También determinamos los puntos de corte de la curva con el eje OY.

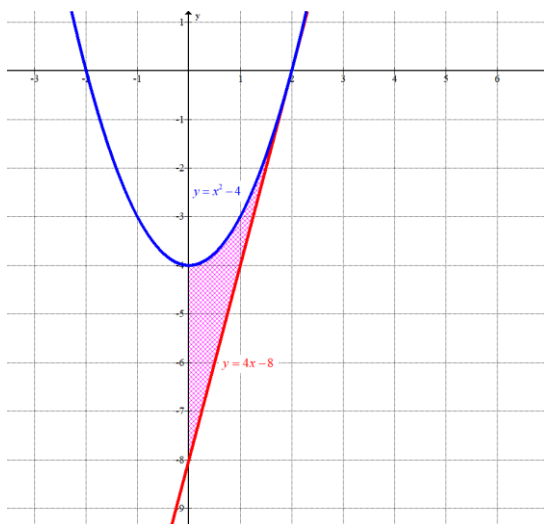
$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 4 \\ y = 4x - 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 4x - 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(0) = 0^2 - 4 = -4$$

El área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r es el valor absoluto de la integral definida de la curva menos la tangente entre 0 y 2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 - 4 - (4x - 8) dx &= \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \right] = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.6667} \end{aligned}$$

El área de la región comprendida entre la curva y , el eje OY y la recta r tiene un valor de $\frac{8}{3} \simeq 2.6667$ unidades cuadradas.



Problema C2. — La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo ($t \geq 0$), por la función

$$H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}},$$

donde el tiempo está medido en segundos.

(a) **[0.5 puntos]** ¿Cuál es la concentración inicial?

(b) **[1 punto]** Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

(c) **[1 punto]** Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

(a) Hallamos el valor de la concentración para $t=0$: $H(0) = \frac{20}{1+e^{-0}} = \frac{20}{2} = 10$.

La concentración inicial es del 10%.

(b) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}} \Rightarrow H'(t) = \frac{0 - (-e^{-t})20}{(1+e^{-t})^2} = \frac{20e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{20}{e^t(1+e^{-t})^2}$$

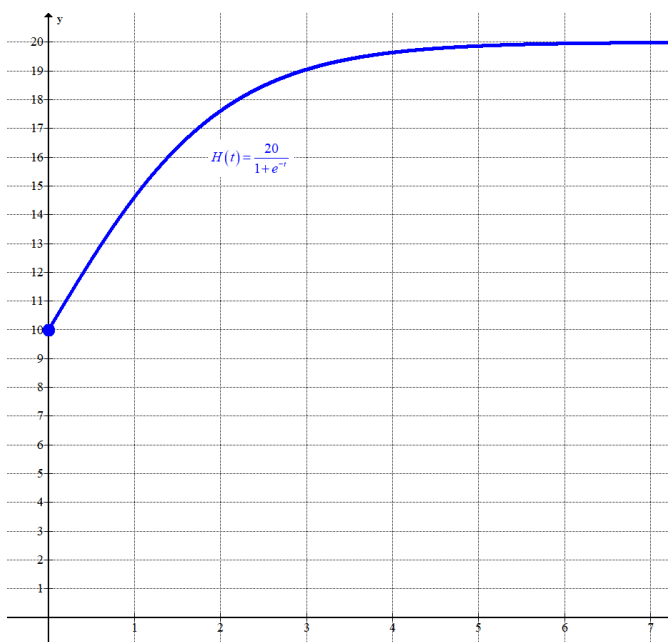
Esta expresión de la derivada nunca se anula. Además, el denominador es siempre positivo por lo que la derivada siempre es positiva y la función siempre es creciente.

$$\left. \begin{array}{l} 20 > 0 \\ e^t > 0 \\ e^{-t} > 0 \rightarrow (1+e^{-t})^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow H'(t) = \frac{20}{e^t(1+e^{-t})^2} > 0$$

(c) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{1+e^{-t}} = \frac{20}{1+e^{-\infty}} = \frac{20}{1+0} = 20$$

La concentración a medida que pasa el tiempo tiende a acercarse al 20%.



Problema D1. — Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45% de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40% han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los productos no averiados, se sabe que el 55% también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

- (a) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?
- (b) **[0.75 puntos]** Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?
- (c) **[1 punto]** Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

Llamamos A al suceso “el dron se avería antes de los 5 años” y M a “el dron ha tenido un mal uso”. Sabemos que $P(A) = 0.45$, $P(M/A) = 0.40$ y $P(M/\bar{A}) = 0.55$.

- (a) Nos piden calcular $P(\bar{A})$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.45 = \boxed{0.55}$$

- (b) Debemos calcular $P(\bar{M}/\bar{A})$.

$$P(\bar{M}/\bar{A}) = 1 - P(M/\bar{A}) = 1 - 0.55 = \boxed{0.45}$$

- (c) Nos piden calcular $P(\bar{A}/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}/M) &= \frac{P(\bar{A} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(\bar{A})(M/\bar{A})}{P(M)} = \frac{P(\bar{A})(M/\bar{A})}{P(\bar{A})(M/\bar{A}) + P(A)(M/A)} = \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.45}{0.55 \cdot 0.45 + 0.45 \cdot 0.4} = \boxed{\frac{121}{163} \approx 0.6269} \end{aligned}$$

Problema D2. — Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A' y B' los sucesos complementarios de A y B , respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B .

Dadas las probabilidades $P(A) = 0.75$, $P(B') = 0.45$ y $P(A - B) = 0.3$, calcula:

(a) [0.75 puntos] $P(A \cap B)$.

(b) [0.75 puntos] $P(B - A)$.

(c) [1 punto] $P(A' \cap B')$.

El suceso $A - B$ se puede expresar también como $A \cap B'$. Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados y que nos permitirá obtener el resto de información.

	B	B'	
A		0.3	0.75
A'			
		0.45	1

Completamos la tabla

	B	B'	
A	0.45	0.3	0.75
A'	0.10	0.15	0.25
	0.55	0.45	1

(a) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(A \cap B) = 0.45$.

(b) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(B - A) = P(B \cap A') = 0.1$.

(c) Observando los datos de la tabla tenemos que $P(A' \cap B') = 0.15$.

PAU Ordinaria 2025

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

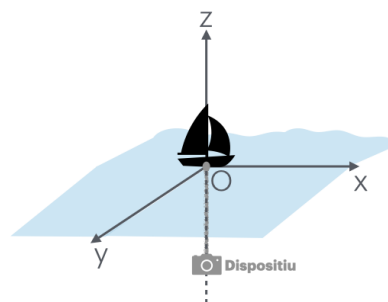
Model 2

La prueba consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, sólo se evaluará al primero.

Justificad las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos en una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) [1 punto] Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) [0.5 puntos] Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) [1 punto] Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x + y - z = 40$ €,

Producto 2: $x - y + 2z = 90$ €,

Producto 3: $x + 2y = 70$ €,

Producto 4: $x - y + z = 50$ €.

- (a) **[0.5 puntos]** Describe qué significa la ecuación del producto 1.
 (b) **[2 puntos]** Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x, y, z ? Justifica tu respuesta.

Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- (a) **[1 punto]** Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B .
 (b) **[1.5 puntos]** Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

- (a) **[1.5 puntos]** Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.

Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.

- (b) **[1 punto]** Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

Problema C2. — Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) **[1 punto]** Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.
 (b) **[1.5 puntos]** Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$.

Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99% y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

- (a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
 (b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

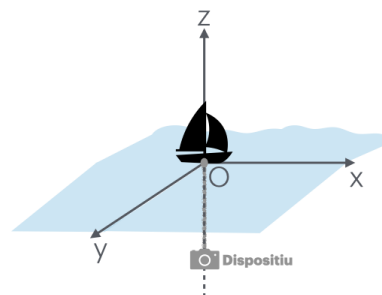
Problema D2. — En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- (a) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
 (b) **[1 punto]** Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
 (c) **[0.75 puntos]** Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

SOLUCIONES

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos en una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) **[1 punto]** Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) **[0.5 puntos]** Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) **[1 punto]** Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

- a) Partimos del punto O(0, 0, 0) y descendemos en vertical 315 metros hasta alcanzar el punto A(0, 0, -315). Desde este punto A nos desplazamos una longitud de 37 metros sobre una recta. Hallamos un vector director de la recta con módulo 37 y le sumamos al punto A este vector obteniendo un punto B que se supone estará a 350 metros de profundidad. Hallamos un vector director de la recta.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 35y = -3780 - 12z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3780}{35} - \frac{12}{35}z = -108 - \frac{12}{35}z \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -108 - \frac{12}{35}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -108, 0) \\ \vec{v}_r = \left(0, -\frac{12}{35}, 1\right) \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = 35\vec{v}_r = 35\left(0, -\frac{12}{35}, 1\right) = (0, -12, 35) \end{aligned}$$

Hallamos un vector con módulo 37 en la dirección de $\vec{u}_r = (0, -12, 35)$.

$$\vec{u} = a\vec{u}_r = a(0, -12, 35) = (0, -12a, 35a)$$

$$|\vec{u}| = 37 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (-12a)^2 + (35a)^2} = 37 \Rightarrow 144a^2 + 1225a^2 = 1369 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1369a^2 = 1369 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (0, -12, 35) \\ \vec{u}_2 = (0, 12, -35) \end{cases}$$

Como debe descender más (hasta los 350 metros) tomamos el vector $\vec{u}_2 = (0, 12, -35)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (0, 12, -35) \\ A(0, 0, -315) \end{array} \right\} \Rightarrow B = A + \vec{u}_2 = (0, 0, -315) + (0, 12, -35) = (0, 12, -350)$$

El punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento es $B = (0, 12, -350)$.

b) Debemos hallar el plano que contiene el punto $B = (0, 12, -350)$ con vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (0, 0, 1) \\ B = (0, 12, -350) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : z + D = 0 \\ B = (0, 12, -350) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -350 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 350 \Rightarrow \pi : z + 350 = 0$$

El plano por el que debe moverse tiene ecuación $\pi : z + 350 = 0$.

c) Debemos comprobar si la recta corta el plano $\pi : z + 350 = 0$. Intentamos resolver el sistema formado por la ecuación del plano y la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : z + 350 = 0 \\ \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -380 + 10\lambda + 350 = 0 \Rightarrow 10\lambda = 30 \Rightarrow \lambda = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 4 \cdot 3 = 17 \\ y = 10 + 3 = 13 \\ z = -380 + 10 \cdot 3 = -350 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(17, 13, -350)}$$

Si podrían colisionar, siendo el punto de posible colisión $P(17, 13, -350)$.

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

$$\text{Producto 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €},$$

$$\text{Producto 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €},$$

$$\text{Producto 3: } x + 2y = 70 \text{ €},$$

$$\text{Producto 4: } x - y + z = 50 \text{ €}.$$

(a) [0.5 puntos] Describe qué significa la ecuación del producto 1.

(b) [2 puntos] Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

(a) La ecuación $2x + y - z = 40$ € significa que el gasto en el producto 1 se debe repartir de forma que 2 kg de madera más 1 kg de hierro menos 1 kg de plástico sean iguales a 40 €.

O dicho de otra manera $2x + y = 40 + z$ que las cantidades para construir el producto 1 cumplen que 2 kg de madera más 1 kg de hierro supera en 40 € el precio de 1 kg de plástico.

(b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 40 \\ x - y + 2z = 90 \\ x + 2y = 70 \\ x - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 40 \\ x - y + 2z = 90 \\ x = 70 - 2y \\ x - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 140 - 4y + y - z = 40 \\ 70 - 2y - y + 2z = 90 \\ 70 - 2y - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y - z = -100 \\ -3y + 2z = 20 \\ -3y + z = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y + 100 = z \\ -3y + 2z = 20 \\ -3y + z = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y - 6y + 200 = 20 \\ -3y - 3y + 100 = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -9y = -180 \\ -6y = -120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{-180}{-9} = 20 \\ y = \frac{-120}{-6} = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = -3 \cdot 20 + 100 = 40 \\ x = 70 - 2 \cdot 20 = 30 \end{array} \right\}$$

El sistema se puede resolver y se pueden calcular los valores de x , y , z que cumplen las condiciones impuestas.

El problema planteado tiene como solución: el precio del kg de madera a 30 €, el kg de hierro a 20 € y el kg de plástico a 40 €.

Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) [1 punto] Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B.

(b) [1.5 puntos] Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

(a) Despejamos I de la igualdad.

$$AB + I = A \Rightarrow I = A - AB = A(I - B) \Rightarrow I - B = A^{-1}$$

La inversa de la matriz A es $A^{-1} = I - B$.

(b) Hemos obtenido en el apartado anterior que si $AB + I = A$ entonces $A^{-1} = I - B$, Obtenemos la expresión de la matriz B.

$$A^{-1} = I - B \Rightarrow B = I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz B tiene la expresión $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 + \frac{3}{4} + 0 - 0 + \frac{1}{4} = 1 \neq 0$$

La matriz B es invertible.

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

- (a) **[1.5 puntos]** Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.

Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.

- (b) **[1 punto]** Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

- (a) Buscamos el valor “ x ” tal que $A(x) = 0$.

$$A(x) = 0 \Rightarrow -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200 = 0 \Rightarrow x^3 - 500x^2 - 40000x + 2000000 = 0 \Rightarrow$$

Esta ecuación es difícil de resolver. Lo intentamos de otra manera. No nos piden hallar el punto solo demostrar que existe.

Comprobamos el signo de la función en los extremos del intervalo $[0, 500]$.

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= -0.0001 \cdot 0^3 + 0.05 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 200 = 200 > 0 \\ A(500) &= -0.0001 \cdot 500^3 + 0.05 \cdot 500^2 - 4 \cdot 500 + 200 = -1800 < 0 \end{aligned} \right\}$$

La función es continua en el intervalo $[0, 500]$, pues es una función polinómica. La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0, 500)$ tal que $A(c) = 0$.

- (b) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200 \Rightarrow A'(x) = -0.0003x^2 + 0.1x - 4$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -0.0003x^2 + 0.1x - 4 = 0 \Rightarrow 0.003x^2 - x + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0.003 \cdot 40}}{2 \cdot 0.003} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \begin{cases} \frac{1 + \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \frac{5 + \sqrt{13}}{0.03} \approx 286.85 \\ \frac{1 - \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03} \approx 46.48 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left[0, \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03}\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = -0.0003 \cdot 10^2 + 0.1 \cdot 10 - 4 = -3.03 < 0. \text{ La función decrece en } \left[0, \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right)$ tomamos $x=100$ y la derivada vale

$$A'(100) = -0.0003 \cdot 100^2 + 0.1 \cdot 100 - 4 = 3 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right]$ tomamos $x=400$ y la derivada vale

$$A'(400) = -0.0003 \cdot 400^2 + 0.1 \cdot 400 - 4 = -12 < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right].$$

La función decrece en $\left[0, \frac{5-\sqrt{13}}{0.03}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right]$ y crece en $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{5-\sqrt{13}}{0.03} \simeq 46.48$ y un máximo relativo en

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{0.03} \simeq 286.85.$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos máximo y mínimo relativo.

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 200 > 0 \\ A(46.48) &= -0.0001 \cdot 46.48^3 + 0.05 \cdot 46.48^2 - 4 \cdot 46.48 + 200 = 112.06 > 0 \\ A(286.85) &= -0.0001 \cdot 286.85^3 + 0.05 \cdot 286.85^2 - 4 \cdot 286.85 + 200 = 806.46 > 0 \\ A(500) &= -1800 < 0 \end{aligned} \right\}$$

Como la función es continua y tenemos que la función empieza siendo positiva en $x=0$, luego decrece hasta $x=46.48$ de 200 a 112.06 que sigue siendo positivo no corta el eje de abscisas en el intervalo $[0, 46.48]$.

Luego crece desde $x=46.48$ hasta $x=286.85$ alcanzando la función un valor de 806.46. Tampoco puede cortar la gráfica de la función el eje de abscisas pues la función siempre es positiva.

En el intervalo $[286.85, 500]$ la función decrece desde un valor de 806.46 hasta un valor negativo -1800 por lo que la función corta el eje de abscisas en este intervalo $[286.85, 500]$.

Además, este punto de corte es único pues de haber otro punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[286.85, 500]$ debería haber un punto en ese intervalo donde se anule la derivada y ese punto no existe (teorema de Rolle).

Problema C2. — Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) **[1 punto]** Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.
- (b) **[1.5 puntos]** Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$.

- (a) El dominio de la función son todos los valores reales que hacen que $2x > 0$. El dominio es $(0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0.

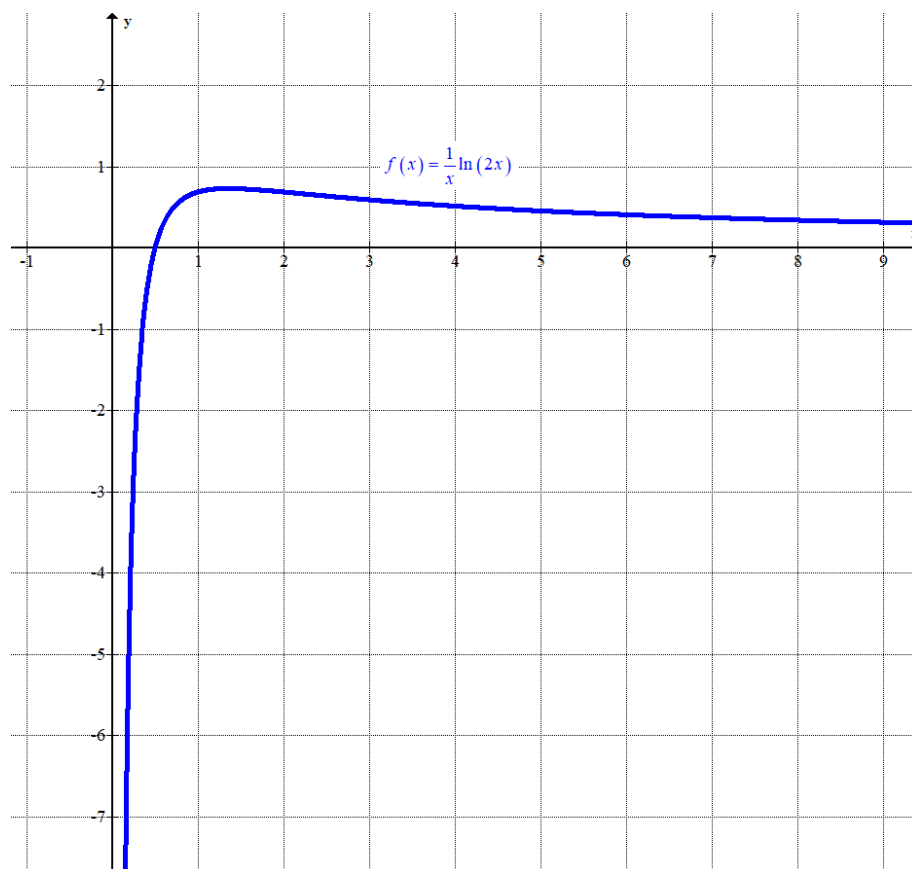
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(2x) = \frac{1}{0^+} \cdot (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = \boxed{-\infty}$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.



(b) Hallamos el punto de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x) \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Como el punto de corte está en $x = \frac{1}{2}$ y la función es positiva en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ el área del recinto es el valor de la integral definida de la función entre $\frac{1}{2}$ y 5.

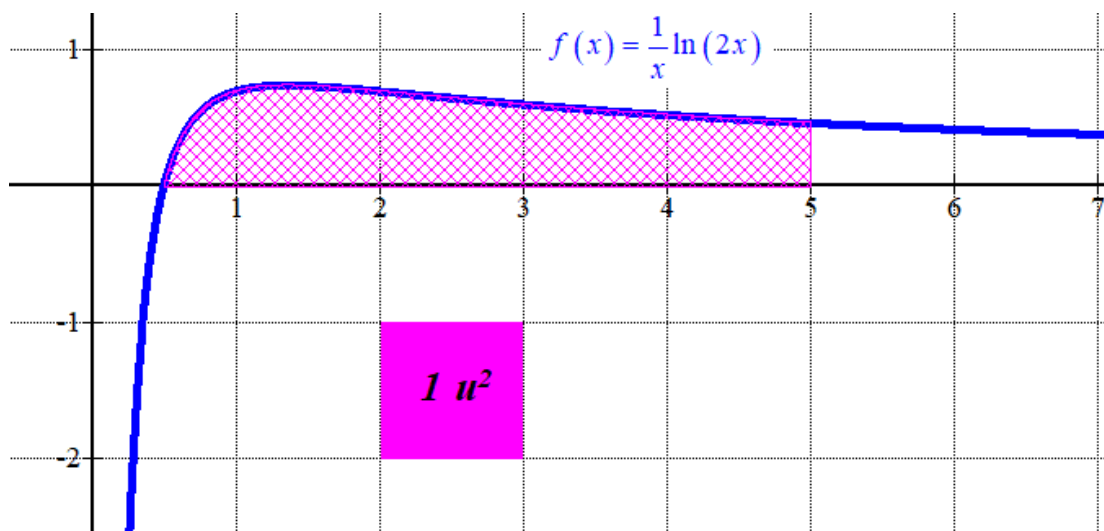
Hallamos primero la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x} \ln(2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(2x) = t \rightarrow \frac{2}{2x} dx = \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow dx = x dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{x} t x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln(2x))^2}{2} + C \end{aligned}$$

Usamos este resultado para calcular el valor del área.

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^5 f(x) dx &= \left[\frac{(\ln(2x))^2}{2} \right]_{1/2}^5 = \frac{(\ln(2 \cdot 5))^2}{2} - \frac{(\ln(2 \cdot \frac{1}{2}))^2}{2} = \\ &= \frac{(\ln 10)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln 10)^2}{2} \approx 2.65} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de $\frac{(\ln 10)^2}{2} \approx 2.65$ unidades cuadradas.



Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99% y la probabilidad de que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

- (a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
- (b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

Llamamos T a “tener la Tuberculosis”, $D+$ a “dar positivo en la prueba” y $D-$ a “dar negativo en la prueba”. Sabemos que $P(T) = 0.0005$, $P(T^c) = 1 - 0.0005 = 0.9995$, $P(D+/T) = 0.99$ y $P(D-/T^c) = 0.99$.

- (a) Nos piden calcular $P(D+/T^c)$.

$$P(D+/T^c) = 1 - P(D-/T^c) = 1 - 0.99 = \boxed{0.01}$$

- (b) Debemos calcular $P(T/D-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(T/D-) &= \frac{P(T \cap D-)}{P(D-)} = \frac{P(T)P(D-/T)}{P(T)P(D-/T) + P(T^c)P(D-/T^c)} = \\ &= \frac{0.0005 \cdot (1 - 0.99)}{0.0005 \cdot (1 - 0.99) + 0.9995 \cdot 0.99} = \boxed{\frac{1}{197902} \approx 0.000005} \end{aligned}$$

La probabilidad es muy baja, prácticamente es nula. La prueba es muy fiable.

Problema D2. — En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- (a) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
 (b) **[1 punto]** Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
 (c) **[0.75 puntos]** Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Supongamos que hay 10000 alumnos en la universidad. El 55% son mujeres, es decir, hay 5500 mujeres universitarias y 4500 hombres universitarios. El 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, es decir, $0.13 \cdot 5500 = 715$ mujeres estudian una carrera STEM. El 37 % de los hombres estudian una carrera STEM, es decir, $0.37 \cdot 4500 = 1665$ hombres estudian una carrera STEM.

- (a) De los 10000 estudiantes hay $715 + 1665 = 2380$ que estudian una STEM. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM es de

$$\frac{2380}{10000} = 0.238.$$

- (b) Hay 2380 estudiantes de una carrera STEM y de ellos 715 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que sea mujer el universitario elegido que estudia STEM

$$\text{es de } \frac{715}{2380} = \frac{143}{476} \approx 0.3004.$$

- (c) Hay $10000 - 2380 = 7620$ estudiantes que NO estudian STEM y de ellos son $5500 - 715 = 4785$ las mujeres que no estudian STEM. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de

$$\text{que sea mujer el universitario que NO estudia STEM elegido es de } \frac{4785}{7620} = \frac{319}{508} \approx 0.628.$$

PBAU Extraordinaria 2024

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M = A^T A - BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.
- (b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM + A = C$.

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B = 3A - kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.
- (b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.
- (c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

P3.– Sean $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ y $R = (-4, 1, 5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.
- (b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.
- (c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S = (a, 1, 0)$ es coplanario con P, Q y R.

P4.– Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

- (a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.
- (b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s , y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

- (a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto $(49, 91)$.

- (b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

P6.– **[10 puntos]** Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
- (b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
- (c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuenta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

- (a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
- (b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
- (c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

SOLUCIONES

P1.– Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M = A^T A - B B^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.
- (b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM + A = C$.

(a) Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de M.

$$M = A^T A - B B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M tiene la expresión $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) La matriz M es invertible si su determinante es no nulo.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$$

Al ser el determinante no nulo la matriz M es invertible. Hallamos su inversa para utilizarla en la resolución de los sistemas.

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el primer sistema.

$$M \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es $a = -\frac{1}{2}$ y $c = 1$.

Resolvemos el segundo sistema.

$$M \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución es $b = 1$ y $d = -1$.

(c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XM + A = C \Rightarrow XM = C - A \Rightarrow X = (C - A)M^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de X.

$$\begin{aligned} X = (C - A)M^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 - 3 & 1 + 3 \\ 1/2 + 1 & -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$.

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B = 3A - kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k .
 (b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k .
 (c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B ? Justifica la respuesta.

(a) Realizamos las operaciones indicadas.

$$B = 3A - kI_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}$$

(b) El rango de la matriz B es 3, 2 o 1. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{vmatrix} = -k(3-k)^2$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -k(3-k)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ 3-k=0 \Rightarrow k=3 \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de B es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$.

En este caso el determinante de B es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de

quitar la fila primera y la columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. El rango de B es 2.

CASO 3. $k = 3$.

En este caso el determinante de B es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la primera fila es nula y la segunda y

tercera fila son proporcionales, por lo que el rango de B es 1.

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 3$ el rango de B es 3, si $k = 0$ el rango es 2 y si $k = 3$ el rango de B es 1.

(c) La inversa de B se puede calcular cuando su determinante es no nulo. Como se ha visto en el apartado anterior B tiene inversa para cualquier valor de k distinto de 0 y de 3.

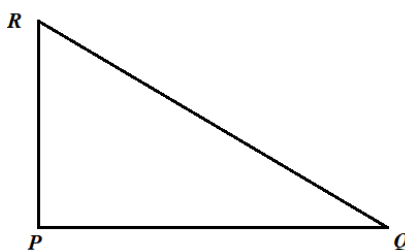
P3.– Sean $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ y $R = (-4, 1, 5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.
- (b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.
- (c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S = (a, 1, 0)$ es coplanario con P, Q y R.

- (a) Hallamos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (7, 1, 7) - (-1, 1, 1) = (8, 0, 6) \\ \overrightarrow{PR} = (-4, 1, 5) - (-1, 1, 1) = (-3, 0, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (8, 0, 6) \cdot (-3, 0, 4) = -24 + 24 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo indica que los puntos no están alineados y el triángulo PQR es rectángulo en el vértice P.



El ángulo es recto en el vértice P.

- (b) Para que añadiendo un vértice más tengamos un cuadrado debe ser la longitud del lado PQ igual a la del lado PR.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (8, 0, 6) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{8^2 + 0^2 + 6^2} = 10 \\ \overrightarrow{PR} = (-3, 0, 4) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = 10 \neq 5 = |\overrightarrow{PR}|$$

No es posible construir el cuadrado pedido.

- (c) Hallamos el plano π definido por los puntos P, Q y R.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (8, 0, 6) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-3, 0, 4) \\ P(-1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 8 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 18(y-1) + 0 - 0 - 32(y-1) + 0 = 0 \Rightarrow -40(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y-1=0}$$

¿El punto $S = (a, 1, 0)$ pertenece al plano π ?

$$\left. \begin{array}{l} S = (a, 1, 0) \in \pi \\ \pi: y-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-1=0$$

Es cierta la igualdad y el punto S pertenece al plano definido por los puntos P, Q y R, es decir, los puntos P, Q, R y S son coplanarios para cualquier valor de a .

P4.– Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad y \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

- (a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.
- (b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s , y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

(a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ Q_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas sus vectores directores deben de tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

Al no tener coordenadas proporcionales las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 1, 0) - (-1, 0, 1) = (0, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 = 7 \neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas se cruzan.

Averiguamos si el producto escalar de sus vectores directores es nulo (90°).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{u}_s = (-2, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = -2 + 2 = 0$$

Las rectas se cruzan perpendicularmente. Están en planos paralelos formando un ángulo de 90° .

- (b) El plano paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-2, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ A(2, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 + 0 - 4(z - 1) - z + 1 + 2(y - 2) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 - 4z + \cancel{4} - z + 1 + 2y - \cancel{4} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y - 5z - 1 = 0}$$

El plano paralelo a las dos rectas r y s , y que pasa por el punto $A = (2, 2, 1)$ tiene ecuación $\pi : x + 2y - 5z - 1 = 0$.

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) [5 puntos] Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto $(49, 91)$.

(b) [5 puntos] Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

(a) Si la función pasa por el punto $(49, 91)$ significa que $f(49) = 91$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b\sqrt{x} \\ f(49) = 91 \end{array} \right\} \Rightarrow 91 = 49a + b\sqrt{49} \Rightarrow 91 = 49a + 7b \Rightarrow \boxed{13 = 7a + b}$$

Si la función tiene un máximo en $x = 100$ significa que $f'(100) = 0$ y que $f''(100) < 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = a + b \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(100) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{20} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{20} = -a \Rightarrow \boxed{b = -20a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 13 = 7a + b \\ b = -20a \end{array} \right\} \Rightarrow 13 = 7a - 20a \Rightarrow 13 = -13a \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = 20}$$

La función queda $f(x) = -x + 20\sqrt{x}$.

Comprobamos que se cumple $f''(100) < 0$.

$$f'(x) = -1 + \frac{20}{2\sqrt{x}} = -1 + 10x^{-1/2} \Rightarrow f''(x) = 10 \cdot \frac{-1}{2} x^{-1/2-1} = -5x^{-3/2} = -5 \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(100) = -5 \frac{1}{\sqrt{100^3}} = \frac{-5}{1000} < 0$$

Se cumple y los valores buscados son $a = -1$ y $b = 20$.

(b) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador (hacen imposible realizar la división) y los que hacen imposible la raíz (los valores negativos).

Como el denominador se anula para $x = -1$ y $x = 1$ el dominio de la función es $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$. Calculamos el límite de la función cuando se acerca a 1 para ver qué tipo de discontinuidad presenta.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como el límite es finito la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$. Se podría redefinir la función para que fuese continua en su dominio.

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 6x - x^2 \\ g(x) = x^2 - 2x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

El área de la región comprendida entre las dos gráficas es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia de las dos funciones.

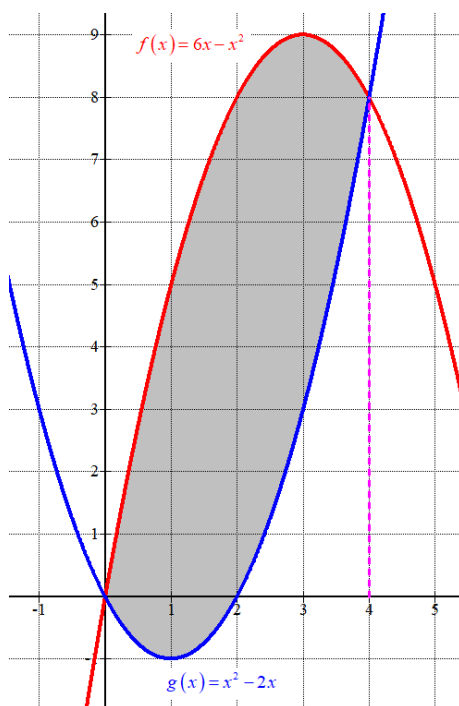
Comprobamos cual de las dos funciones toma valores mayores en el intervalo (0, 4).

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 6 - 1^2 = 5 \\ g(1) = 1^2 - 2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) > g(1) \Rightarrow f(x) > g(x) \text{ para todo } x \in (0, 4)$$

Calculamos el valor del área pedida como la integral definida entre 0 y 4 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 f(x) - g(x) dx = \int_0^4 6x - x^2 - (x^2 - 2x) dx = \int_0^4 6x - x^2 - x^2 + 2x dx = \\ &= \int_0^4 -2x^2 + 8x dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \left[-2 \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[-2 \frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0^2 \right] = \boxed{\frac{64}{3} \approx 21.33 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{64}{3} \approx 21.33$ unidades cuadradas.



P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
 (b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
 (c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

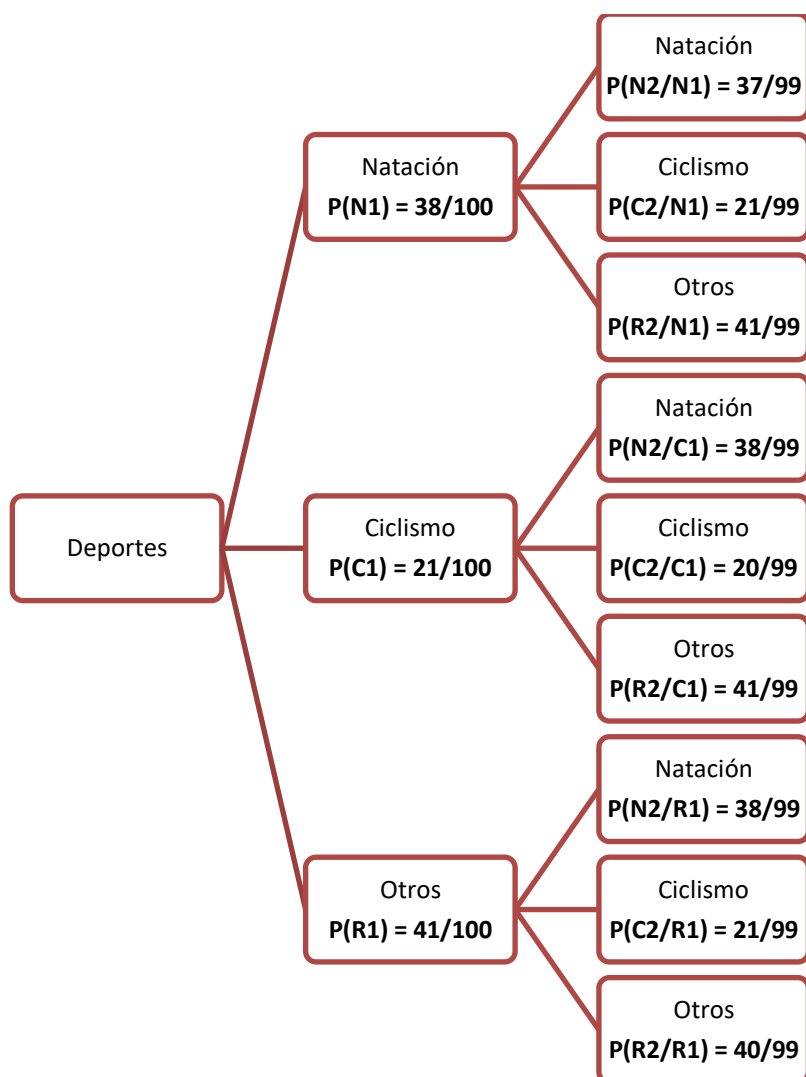
Llamamos N a “el habitante de un pueblo prefiere la natación”, C a “el habitante prefiere el ciclismo” y R a “el habitante prefiere otros deportes”. Como se eligen dos habitantes sin reemplazamiento llamaremos N1 y N2 al suceso en primera y segunda elección. Sabemos que en la primera elección las probabilidades son:

$$P(N1) = \frac{38}{100}, P(C1) = \frac{21}{100} \text{ y } P(R1) = 1 - \frac{38}{100} - \frac{21}{100} = \frac{41}{100}$$

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de la segunda elección que depende de lo ocurrido en la primera. Supondremos una población de 100 habitantes, si no fuese así obtendríamos probabilidades distintas, aunque parecidas. Si fuesen 1000 habitantes

tendríamos que $P(N2/N1) = \frac{38-1}{100-1} = \frac{37}{99} \approx 0.379$ y con 100 habitantes tenemos que

$$P(N2/N1) = \frac{38-1}{100-1} = \frac{37}{99} \approx 0.374.$$



(a) Nos piden calcular $P(N1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$P(N1 \cap N2) = P(N1)P(N2 / N1) = \frac{38}{100} \cdot \frac{37}{99} = \boxed{\frac{703}{4950} \approx 0.142}$$

La probabilidad de que las dos personas elegidas sean aficionadas a la natación es de 0.142.

(b) Nos piden calcular $P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$\begin{aligned} P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) &= P(N1)P(C2 / N1) + P(C1)P(N2 / C1) = \\ &= \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} + \frac{21}{100} \cdot \frac{38}{99} = 2 \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} = \boxed{\frac{133}{825} \approx 0.1612} \end{aligned}$$

La probabilidad de que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación es de 0.1612.

(c) Nos piden calcular $P((N2 \cup R2) / C1)$.

$$P((N2 \cup R2) / C1) = P(N2 / C1) + P(R2 / C1) = \frac{38}{99} + \frac{41}{99} = \boxed{\frac{79}{99} \approx 0.798}$$

La probabilidad de que la segunda persona no prefiera el ciclismo sabiendo que la primera prefiere el ciclismo es de 0.798.

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuenta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a)[6 puntos] El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

(b)[2 puntos] El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

(c)[2 puntos] El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

X = El peso, en gramos, de las judías en lata. $X = N(\mu, 7.8)$.

(a) Sabemos que $P(X \leq 200) = 0.10$.

$$P(X \leq 200) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{7.8} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} < 0.5 \\ \frac{200 - \mu}{7.8} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{200 - \mu}{7.8}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{200 - \mu}{7.8} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285 \Rightarrow -200 + \mu = 1.285 \cdot 7.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 1.285 \cdot 7.8 + 200 = 210.023$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

La media es de 210 gramos por lata.

(b) Nos piden calcular $P(X \geq 225)$.

$$P(X \geq 225) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{225 - 210}{7.8}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1.92) = 1 - P(Z \leq 1.92) = 1 - 0.9726 = 0.0274$$

El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías es de 2.74%.

	0	1	2	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.63
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.66
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.76
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.82
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.84
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.90
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.93
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.94
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.95
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.97

(c) Nos piden calcular $P(190 \leq X \leq 225)$.

$$\begin{aligned}
 P(190 \leq X \leq 225) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{190-210}{7.8} \leq Z \leq \frac{225-210}{7.8}\right) = \\
 &= P(-2.56 \leq Z \leq 1.92) = P(Z \leq 1.92) - P(Z \leq -2.56) = \\
 &= P(Z \leq 1.92) - P(Z \geq 2.56) = P(Z \leq 1.92) - [1 - P(Z \leq 2.56)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N}(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9726 - 1 + 0.9948 = \boxed{0.9674}
 \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.
2.6	0.9952	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959	0.9960	0.

El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías es de 96.74 %.

PBAU Ordinaria 2024

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Modelo 2

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

- (a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.
- (b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?
- (c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A + I = A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- (a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A .
- (b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A + 3AX = 5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I , la matriz X . ¿Qué dimensión tiene la matriz X ? Justifica la respuesta.

- (c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

- (a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que $ABDC$ es un paralelogramo.
- (b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.
- (c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

P4.– (a) [5 puntos] Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) [5 puntos] Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π , siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

P6.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & x \leq 0 \\ ax^2 + b(x+3) & 0 < x \leq 1 \\ a \cos(\pi x) + 7bx & x > 1 \end{cases}$$

(a) [5 puntos] Calcula los valores a y b para que la función $f(x)$ es continua.

(b) [5 puntos] Sea $a = 3$ y $b = 2$, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cap B^c) = 0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) [3 puntos] $P(A)$.

(b) [3 puntos] $P(B)$.

(c) [2 puntos] $P(A^c \cup B^c)$.

(d) [2 puntos] ¿Son A y B sucesos independientes?

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) [4 puntos] ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) [6 puntos] Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.

SOLUCIONES

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

(a) Llamamos “x” al precio de la botella de vino tinto, “y” al precio de la botella de vino blanco y “z” al precio de la botella de vino rosado.

Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 € $\rightarrow 3x + 2y = 67$

Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 € $\rightarrow 2x + 4y + z = 85$.

Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 € $\rightarrow x + z = 21$.

Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 € $\rightarrow 4y + 5z = 85$.

El sistema de ecuaciones que permite obtener los precios quedaría:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ x + z = 21 \\ 4y + 5z = 85 \end{cases}$$

Puesto en forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) El sistema tiene tres incógnitas y cuatro ecuaciones. No es necesaria una de las ecuaciones. Se supone que nos han cobrado bien y una de las informaciones es innecesaria.

(c) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ x + z = 21 \\ 4y + 5z = 85 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 3}^a \leftrightarrow \text{Ecuación 1}^a \} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 21 \\ 3x + 2y = 67 \\ 2x + 4y + z = 85 \\ 4y + 5z = 85 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x + 2y = 67 \\ -3x \quad -3z = -63 \\ \hline 2y - 3z = 4 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x + 4y + z = 85 \\ -2x \quad -2z = -42 \\ \hline 4y - z = 43 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 21 \\ 2y - 3z = 4 \\ 4y - z = 43 \\ 4y + 5z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 4ª} - \text{Ecuación 3ª} \\ 4y + 5z = 85 \\ -4y + z = -43 \\ \hline 6z = 42 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 4ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 4y - z = 43 \\ -4y + 6z = -8 \\ \hline 5z = 35 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z = 21 \\ 2y - 3z = 4 \\ 5z = 35 \rightarrow \boxed{z = 7} \\ 6z = 42 \rightarrow \boxed{z = 7} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 7 = 21 \\ 2y - 21 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 21 - 7 = 14} \\ 2y = 25 \rightarrow \boxed{y = \frac{25}{2} = 12.5} \end{array} \right\}$$

La botella de vino tinto cuesta 14 euros, la de vino blanco cuesta 12.5 euros y la de vino rosado cuesta 7 euros.

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A + I = A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A .

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A + 3AX = 5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I , la matriz X . ¿Qué dimensión tiene la matriz X ? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

(a) Suponemos que la matriz A tiene inversa. Multiplicamos por la inversa de A la igualdad.

$$3A + I = A^2 \Rightarrow 3AA^{-1} + IA^{-1} = AAA^{-1} \Rightarrow 3I + A^{-1} = A \cdot I \Rightarrow 3I + A^{-1} = A \Rightarrow \boxed{A^{-1} = A - 3I}$$

(b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A + 3AX = 5I \Rightarrow A - 5I = -3AX \Rightarrow A^{-1}A - 5A^{-1}I = -3A^{-1}AX \Rightarrow I - 5A^{-1} = -3IX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I - 5A^{-1} = -3X \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sabemos que} \\ A^{-1} = A - 3I \end{array} \right\} \Rightarrow I - 5(A - 3I) = -3X \Rightarrow I - 5A + 15I = -3X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X = 5A - 16I \Rightarrow \boxed{X = \frac{5}{3}A - \frac{16}{3}I}$$

(c) La matriz A debe cumplir la igualdad $3A + I = A^2$.

$$3A + I = A^2 \Rightarrow 3 \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a+1 = a^2+1 \\ 3 = a+b \\ 3b+1 = b^2+1 \\ 3c+1 = c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 3a = 0 \rightarrow a(a-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases} \\ a + b = 3 \\ b^2 - 3b = 0 \rightarrow b(b-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ y } b = 3 \\ a = 3 \text{ y } b = 0 \end{cases}$$
$$c^2 - 3c - 1 = 0 \rightarrow c = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Las soluciones del sistema son:

1ª solución: $a = 0$, $b = 3$ y $c = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

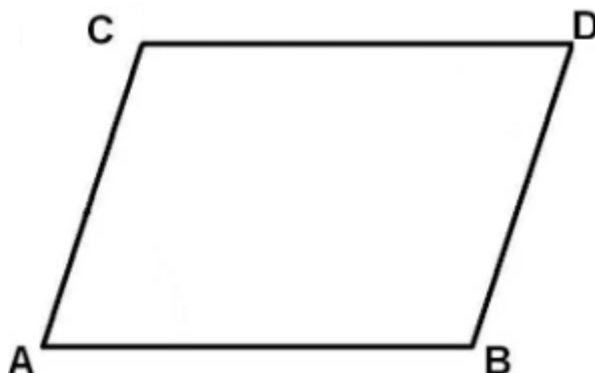
2ª solución: $a = 0$, $b = 3$ y $c = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$

3ª solución: $a = 3$, $b = 0$ y $c = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

4ª solución: $a = 3$, $b = 0$ y $c = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$,

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

- (a) [3 puntos] Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.
 (b) [4 puntos] Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.
 (c) [3 puntos] Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.



- (a) Para que ABDC sea un paralelogramo los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ deben tener las mismas coordenadas. También podemos hallar el punto D sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1)$$

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) + (-1, 2, 1) = (1, 1, 4)$$

El punto D tiene coordenadas $(1, 1, 4)$.

- (b) Para que la recta AE sea perpendicular al plano ABC el vector $\overrightarrow{AE}$ debe ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, por lo que debe ser proporcional al producto vectorial de ambos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) - (0, 0, 0) = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (-1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - 3j + 4k - k - 2j - 6i = -7i - 5j + 3k = (-7, -5, 3)$$

El vector $\overrightarrow{AE}$ tiene coordenadas $(-7a, -5a, 3a)$.

Como además piden que la distancia entre los puntos A y E sea 1 el módulo del vector $\overrightarrow{AE}$ debe ser 1.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AE} = (-7a, -5a, 3a) \\ |\overrightarrow{AE}| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{(-7a)^2 + (-5a)^2 + (3a)^2} = 1 \Rightarrow 49a^2 + 25a^2 + 9a^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 83a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{83} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{83}} = \frac{1}{\sqrt{83}}$$

El vector $\overrightarrow{AE}$ tiene coordenadas $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}}, \frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$.

Como el punto A tiene coordenadas (0, 0, 0) el punto E tiene las mismas coordenadas que el vector $\overrightarrow{AE}$.

El punto E tiene coordenadas $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}}, \frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$ o $\left(\frac{7}{\sqrt{83}}, \frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{-3}{\sqrt{83}}\right)$

(c) Hallamos la ecuación del plano ABC.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1) \\ A(0, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 3y + 4z - z - 2y - 6x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -7x - 5y + 3z = 0}$$

Un plano π' paralelo al plano ABC tiene como ecuación $\pi': -7x - 5y + 3z + D = 0$.

Como los planos son paralelos la distancia entre ellos es la distancia del punto A del plano π al plano π' . Esta distancia debe valer 1.

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -7x - 5y + 3z + D = 0 \\ A(0, 0, 0) \in \pi \\ \pi \parallel \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|0 + 0 + 0 + D|}{\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{83}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = \sqrt{83} \Rightarrow \begin{cases} D = \sqrt{83} \rightarrow \boxed{\pi': -7x - 5y + 3z + \sqrt{83} = 0} \\ o \\ D = -\sqrt{83} \rightarrow \boxed{\pi': -7x - 5y + 3z - \sqrt{83} = 0} \end{cases}$$

P4.– (a) [5 puntos] Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) [5 puntos] Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π , siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

(a) Hallamos el vector normal de cada plano.

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3, a, -1)$$

$$\pi_2 : 6x + y - 2z = b \Rightarrow \vec{n}_2 = (6, 1, -2)$$

Para que los planos sean paralelos o coincidentes los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (3, a, -1) \\ \vec{n}_2 = (6, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{1}{a} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow 1 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Se nos plantean dos situaciones distintas:

CASO 1. $a = \frac{1}{2}$

Los vectores normales tienen coordenadas proporcionales y los planos son paralelos o coincidentes.

Los planos quedan $\pi_1 : 3x + 0.5y - z = 1$ y $\pi_2 : 6x + y - 2z = b$.

Multiplicamos la ecuación del plano π_1 por 2 y las ecuaciones de los planos son:

$$\pi_1 : 6x + y - 2z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Existen dos posibilidades diferentes:

Si $b = 2$ los planos tienen la misma ecuación y son coincidentes y si $b \neq 2$ los planos son paralelos.

CASO 2. $a \neq \frac{1}{2}$

En este caso las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos no son ni paralelos ni coincidentes, por lo que son secantes.

Comprobamos si son perpendiculares calculando el producto escalar de sus vectores normales. Si este producto es nulo significa que son perpendiculares, en caso contrario no serán perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (3, a, -1) \\ \vec{n}_2 = (6, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (3, a, -1)(6, 1, -2) = 18 + a + 2 = 20 + a$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow 20 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -20}$$

Los planos son perpendiculares para $a = -20$.

Resumiendo: Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$ los planos son coincidentes, si $a = \frac{1}{2}$ y $b \neq 2$ los planos son paralelos y si $a \neq \frac{1}{2}$ los planos son secantes, en particular para $a = -20$ son perpendiculares.

(b) Hallamos la ecuación general del plano.

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ \frac{y}{3} = \beta \\ z - 1 = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = 2 + 4(z - 1) - \frac{y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 + 4z - 4 - \frac{y}{3} \Rightarrow x = 4z - 2 - \frac{y}{3} \Rightarrow 3x = 12z - 6 - y \Rightarrow \boxed{\pi: 3x + y - 12z + 6 = 0}$$

Hallamos la ecuación en paramétricas de la recta.

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 2, -1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto P de corte entre la recta s y el plano π .

$$\pi: 3x + y - 12z + 6 = 0$$

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 3(1 + 2\lambda) + 2\lambda - 12(1 - \lambda) + 6 = 0 \Rightarrow 3 + 6\lambda + 2\lambda - 12 + 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 20\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{20} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{26}{20} \\ y = 2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{6}{20} \\ z = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{26}{20}, \frac{6}{20}, \frac{17}{20}\right)$$

La recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π es la recta t con vector director el vector normal del plano y que pasa por el punto P.

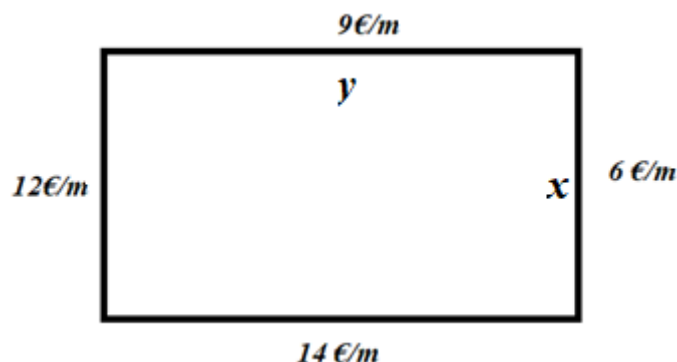
$$\pi: 3x + y - 12z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, 1, -12)$$

$$\vec{v}_t = \vec{n} = (3, 1, -12)$$

$$P\left(\frac{26}{20}, \frac{6}{20}, \frac{17}{20}\right) \in t \Rightarrow t: \begin{cases} x = \frac{13}{10} + 3\lambda \\ y = \frac{3}{10} + \lambda \\ z = \frac{17}{20} - 12\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m, 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

La situación planteada es la del dibujo.



El coste del vallado sería:

$$C(x, y) = 6x + 9y + 12x + 14y = 18x + 23y$$

Como el gasto debe ser 1000 € tenemos:

$$C(x, y) = 18x + 23y = 1000 \Rightarrow 23y = 1000 - 18x \Rightarrow y = \frac{1000 - 18x}{23}$$

El área del campo rectangular es $A(x, y) = xy$. Sustituimos “y” y nos queda una expresión del área que depende solo de “x”.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{1000 - 18x}{23} \\ A(x, y) = xy \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{1000 - 18x}{23} = \frac{1000x - 18x^2}{23}$$

Hallamos el máximo de esta función usando la derivada.

$$A(x) = \frac{1000x - 18x^2}{23} \Rightarrow A'(x) = \frac{1000 - 36x}{23}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1000 - 36x}{23} = 0 \Rightarrow 1000 - 36x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{36} = \frac{250}{9} \approx 27.77 \text{ m}$$

Averiguamos si este punto crítico es máximo sustituyendo su valor en la derivada segunda.

$$A'(x) = \frac{1000 - 36x}{23} \Rightarrow A''(x) = \frac{-36}{23} \Rightarrow A''\left(\frac{250}{9}\right) = \frac{-36}{23} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo relativo en

$$x = \frac{250}{9} \approx 27.77 \text{ m}.$$

Para $x = \frac{250}{9} \approx 27.77 \text{ m}$ el valor de “y” es:

$$y = \frac{1000 - 18 \frac{250}{9}}{23} = \frac{1000 - 500}{23} = \frac{500}{23} \approx 21.74 \text{ m}$$

Las dimensiones del campo con área máxima y cumpliendo lo pedido en el problema tiene aproximadamente 21.74 metros de ancho y 27.77 de largo.

P6.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & x \leq 0 \\ ax^2 + b(x+3) & 0 < x \leq 1 \\ a \cos(\pi x) + 7bx & x > 1 \end{cases}$$

(a)[5 puntos] Calcula los valores a y b para que la función $f(x)$ es continua.

(b)[5 puntos] Sea $a = 3$ y $b = 2$, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

(a) La función debe ser continua en $x = 0$, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} be^x + a + 1 = be^0 + a + 1 = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b(x+3) = a \cdot 0^2 + b(0+3) = 3b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b + 1 = 3b \Rightarrow \boxed{a = 2b - 1}$$

La función debe ser continua en $x = 1$, por lo que deben coincidir los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + b(x+3) = a \cdot 1^2 + b(1+3) = a + 4b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a \cos(\pi x) + 7bx = a \cos(\pi) + 7b = -a + 7b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 4b = -a + 7b \Rightarrow \boxed{2a - 3b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a &= 2b - 1 \\ 2a - 3b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(2b - 1) - 3b = 0 \Rightarrow 4b - 2 - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow \boxed{a = 4 - 1 = 3}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = 3$ y $b = 2$.

(b) Si $a = 3$ y $b = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 4 & x \leq 0 \\ 3x^2 + 2(x+3) & 0 < x \leq 1 \\ 3\cos(\pi x) + 14x & x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $[-1, 0]$ la función es $f(x) = 2e^x + 4$.

Averiguamos si corta el eje OX en este intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2e^x + 4 \\ \text{OX} \rightarrow y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2e^x + 4 = 0 \Rightarrow e^x + 2 = 0 \Rightarrow e^x = -2 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no corta el eje OX y el área será el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de la función.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2e^x + 4 dx = \left[2e^x + 4x \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[2e^0 + 4 \cdot 0 \right] - \left[2e^{-1} + 4(-1) \right] = 2 - \frac{2}{e} + 4 = 6 - \frac{2}{e} \approx 5.26 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $6 - \frac{2}{e} \approx 5.26$ unidades cuadradas.

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cap B^c) = 0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

- (a) [3 puntos] $P(A)$.
 (b) [3 puntos] $P(B)$.
 (c) [2 puntos] $P(A^c \cup B^c)$.
 (d) [2 puntos] ¿Son A y B sucesos independientes?

(a) Usamos la fórmula $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B^c) = 0.35 \\ P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(A) = 0.1 + 0.35 = 0.45}$$

(b) Utilizamos la fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.7 \\ P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) = 0.45 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.7 = 0.45 + P(B) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = 0.7 - 0.45 + 0.1 = 0.35}$$

(c) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = \boxed{0.9}$$

(d) Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A)P(B) = 0.45 \cdot 0.35 = 0.1575 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.1575 = P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a)[4 puntos] ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b)[6 puntos] Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

X = La duración de los embarazos humanos en días. $X = N(266, 16)$.

(a) Nos piden calcular $P(240 \leq X \leq 270)$.

$$P(240 \leq X \leq 270) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{240 - 266}{16} \leq Z \leq \frac{270 - 266}{16}\right) = P(-1.625 \leq Z \leq 0.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.25) - P(Z \leq -1.625) = P(Z \leq 0.25) - P(Z \geq 1.625) = P(Z \leq 0.25) - [1 - P(Z \leq 1.625)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5987 - \left[1 - \frac{0.9474 + 0.9484}{2} \right] = \boxed{0.5466}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368

La proporción de todos los embarazos que durarán entre 240 y 270 días es de 54.66 %.

(b) Nos piden hallar “a” tal que $P(X \geq a) = 0.70$.

$$P(X \geq a) = 0.70 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 266}{16}\right) = 0.7 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La probabilidad es mayor que 0.5} \\ \frac{a - 266}{16} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 266}{16}\right) = 0.7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a - 266}{16} = \frac{0.52 + 0.53}{2} = 0.525 \Rightarrow -a + 266 = 16 \cdot 0.525 \Rightarrow -a = -257.6 \Rightarrow \boxed{a = 257.6}$$

El 70 % de los embarazos que más duran es a partir de 257.6 días.

PBAU Extraordinaria 2023



Universitat
de les Illes Balears
Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Model 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases},$$

- (a) [7 puntos] Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m .
(b) [3 puntos] Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

P2.– Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

- (a) [3 puntos] ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

- (b) [3 puntos] Calcula la inversa de A
(c) [4 puntos] Comprueba que se cumple la igualdad $A(B + A) - I = A(B - I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ coeficientes reales.

P3.– Sean los puntos $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$.

- (a) [4 puntos] Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A , B y C .
(b) [4 puntos] Determina si los puntos A , B , C y D son coplanarios.
(c) [2 puntos] ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

P4.– Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

- (a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π ? Justifica la respuesta.
(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a $3/4$ partes de P y a $1/4$ parte de Q
(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π .

P5.– La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

- (a) **[4 puntos]** ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.
- (b) **[4 puntos]** ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?
- (c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

P6.– **[10 puntos]** Calcula la integral de la función $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

P7.– En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol.

- (a) **[3 puntos]** Sea F = “juega a fútbol” y sea B = “juega a básquet”, escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.
- (b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,
 - (b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.
 - (b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.
 - (b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet)
 - (b.4) **[2 puntos]** No juegue ni a fútbol ni a básquet.

P8.– (a) **[5 puntos]** En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 8 y desviación típica 2?

(b) **[5 puntos]** En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ .

SOLUCIONES**P1.**– Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases},$$

(a) [7 puntos] Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m .(b) [3 puntos] Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

(a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 + 0 + 0 + m - 2m - 0 = m^3 - m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Distinguimos cuatro casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$.En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema tiene una única solución.**CASO 2.** $m = 0$ En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

CASO 3. $m = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la ampliada, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 4. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 1}^{A/B} & & \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & -2 \end{array} \right)$$

La matriz A tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$ el sistema tiene una única solución, si $m = 0$ o $m = -1$ tiene cero soluciones y si $m = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

(b) Para $m = 1$ resolvemos el sistema a partir del sistema equivalente triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2z + 1 = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 + 2z - z = 1 \Rightarrow x = -z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

P2.– Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A

(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B + A) - I = A(B - I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ coeficientes reales.

(a) Comprobamos si se cumple $M^2 + M = I$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

La matriz M cumple la igualdad del enunciado. Comprobamos si es invertible. Para ello comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

La matriz M es invertible. Se cumplen las dos condiciones del enunciado.

(b) Usamos la igualdad que cumple la matriz A .

$$A^2 + A = I \Rightarrow A \cdot A + A \cdot I = I \Rightarrow A(A + I) = I \Rightarrow A + I \text{ es la inversa de } A!$$

(c) Volvemos a partir de la igualdad que cumple la matriz A .

$$A^2 + A = I \rightarrow A^2 - I = -A$$

$$A(B + A) - I = AB + A^2 - I = AB - A = AB - A \cdot I = A(B - I)$$

Quedando demostrada la igualdad.

P3.– Sean los puntos $A=(1,2,0)$, $B=(-1,0,1)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(3,1,2)$.

- (a) **[4 puntos]** Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A , B y C .
 (b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A , B , C y D son coplanarios.
 (c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

(a) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A=(1,2,0) \in \pi \\ B=(-1,0,1) \in \pi \\ C=(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) - (1,2,0) = (-2,-2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,0,1) - (1,2,0) = (-1,-2,1) \\ C=(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - y + 4(z-1) - 2(z-1) + 2y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - y + 4z - 4 - 2z + 2 + 2y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y + 2z - 2 = 0}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A , B y C tiene como vector director el vector normal del plano π .

$$\pi: y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0,1,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (0,1,2) \\ D=(3,1,2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) Para que los puntos A , B , C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano $\pi: y + 2z - 2 = 0$ que contiene los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: y + 2z - 2 = 0 \\ \text{¿} D=(3,1,2) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 1 + 2 \cdot 2 - 2 = 0? \Rightarrow \text{¿} 3 = 0?$$

El punto D no pertenece al plano que contiene los puntos A , B y C . Los puntos A , B , C y D no son coplanarios.

(c) El punto D pertenece a la recta r , pues así está definida, pero este punto no pertenece al plano, lo hemos visto en el apartado (b), por lo que no es el punto de corte de recta y plano.

Para comprobarlo hallamos las coordenadas del punto de corte de r y π .

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x=3 \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \\ \pi: y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + 4 + 4\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 5\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5} \\ z=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(3, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)}$$

El punto de corte de recta y plano es $P\left(3, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ diferente al punto $D=(3,1,2)$.

P4.– Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

- (a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π ? Justifica la respuesta.
 (b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a $3/4$ partes de P y a $1/4$ parte de Q
 (c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π .

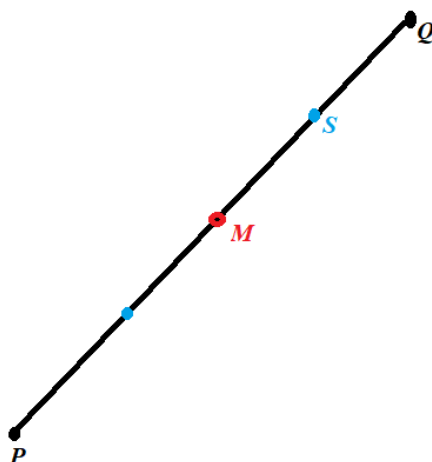
(a) Los puntos P y Q pertenecen al plano π si satisfacen su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(0, 1, 1) \in \pi? \\ \pi : 3x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 \cdot 0 + 1 + 1 = 2? \rightarrow \text{¡Cierto! } P \in \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} Q(2, -1, -3) \in \pi? \\ \pi : 3x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 \cdot 2 - 1 - 3 = 2? \rightarrow \text{¡Cierto! } Q \in \pi$$

Los puntos P y Q pertenecen al plano π .

(b) El punto S es un punto de la recta PQ tal que $d(P, S) = 3d(Q, S)$.



Hallamos el punto medio M del segmento PQ.

$$\left. \begin{array}{l} P(0,1,1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{(0,1,1) + (2,-1,-3)}{2} = \frac{(2,0,-2)}{2} = (1,0,-1)$$

El punto S buscado es el punto medio del segmento MQ.

$$\left. \begin{array}{l} M(1,0,-1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{(1,0,-1) + (2,-1,-3)}{2} = \frac{(3,-1,-4)}{2} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

El punto S buscado es $S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Hallamos la ecuación de la recta PQ.

$$\left. \begin{array}{l} P(0,1,1) \in r \\ Q(2,-1,-3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-3) - (0,1,1) = (2,-2,-4) \rightarrow \vec{v}_r = (1,-1,-2) \\ P(0,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El punto S pertenece a la recta r y tiene coordenadas $S(\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda)$

Aplicamos la igualdad $d(P, S) = 3d(Q, S)$.

$$\left. \begin{array}{l} S(\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda) \\ P(0,1,1) \\ Q(2,-1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda) - (0,1,1) = (\lambda, -\lambda, -2\lambda) \\ \overrightarrow{QS} = (\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda) - (2,-1,-3) = (\lambda-2, 2-\lambda, 4-2\lambda) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (\lambda, -\lambda, -2\lambda) \\ \overrightarrow{QS} = (\lambda-2, 2-\lambda, 4-2\lambda) \\ d(P, S) = 3d(Q, S) \end{array} \right\} \Rightarrow |\overrightarrow{PS}| = 3|\overrightarrow{QS}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-2\lambda)^2} = 3\sqrt{(\lambda-2)^2 + (2-\lambda)^2 + (4-2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = 3\sqrt{\lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 4 - 4\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 16\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6\lambda^2} = 3\sqrt{6\lambda^2 - 24\lambda + 24} \Rightarrow 6\lambda^2 = 9(6\lambda^2 - 24\lambda + 24) \Rightarrow$$

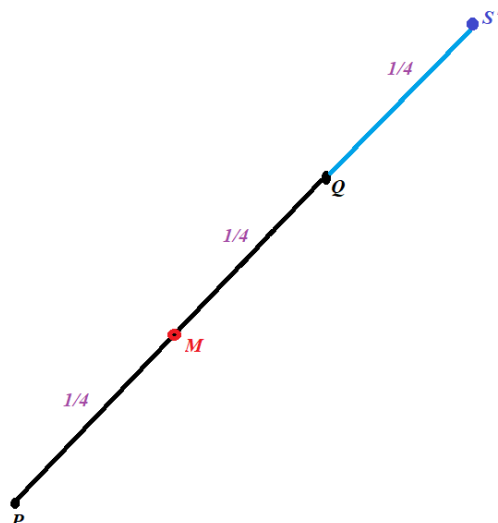
$$\Rightarrow 6\lambda^2 = 54\lambda^2 - 216\lambda + 216 \Rightarrow 48\lambda^2 - 216\lambda + 216 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(9)}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{9+3}{4} = 3 = \lambda \\ \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} S(\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda) \\ \lambda = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{S'(3, -2, -5)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} S(\lambda, 1-\lambda, 1-2\lambda) \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \rightarrow S\left(\frac{3}{2}, 1-\frac{3}{2}, 1-3\right) \rightarrow \boxed{S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)}$$

El punto S' obtenido es el punto del dibujo siguiente.



(c) La recta s que pasa por P y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 3x + y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (3, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (3, 1, 1) \\ P(0, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z - 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3(z - 1) = 3z - 3 \\ y = 1 + z - 1 \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

P5.– La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

- (a)[4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.
 (b)[4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?
 (c)[2 puntos] ¿Hay algún momento en el que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

(a) Nos piden hallar $f(0) \rightarrow f(0) = e^{-0}(2 \cdot 0 + 1) = 1$. Inicialmente hay 1 millón de insectos.

Nos piden calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(2x+1) = e^{-\infty}(+\infty+1) = 0(+\infty) = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Significa que inicialmente había un millón de insectos y con el paso del tiempo acaban desapareciendo todos los insectos.

(b) Buscamos los puntos críticos de la función $f(x)$.

$$f(x) = e^{-x}(2x+1) \rightarrow f'(x) = -e^{-x}(2x+1) + e^{-x}(2) = e^{-x}(-2x+1)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(-2x+1) \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{-x}(-2x+1) = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow -2x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda para determinar si es máximo o mínimo.

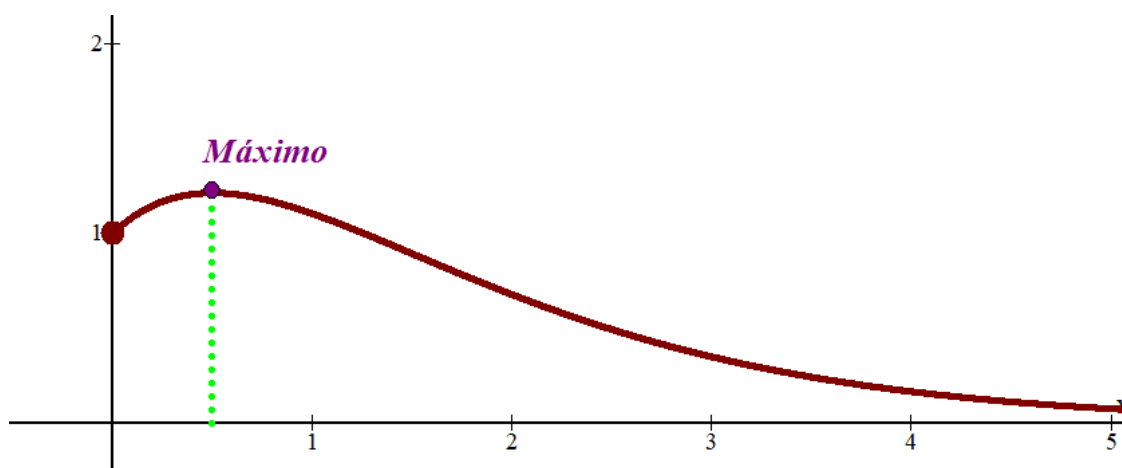
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(-2x+1) \Rightarrow f''(x) = -e^{-x}(-2x+1) + e^{-x}(-2) = e^{-x}(2x-3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) &= e^{-1/2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-3\right) = -2e^{-1/2} < 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ es máximo} \end{aligned}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1/2$. Es decir, al cabo de medio mes se obtiene la máxima cantidad de insectos, siendo esta cantidad de $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}(1+1) \approx 1.213061$.

Este máximo relativo es máximo absoluto de la función, pues empieza en $x = 0$ con 1 millón de insectos, sube a 1.2 millones al cabo de medio mes y desciende continuamente hasta acercarse a 0. La función es continua y por tanto no pasa por valores superiores a 1.2 millones de insectos.

El máximo número de insectos es de 1.213.061 insectos y se produce a mitad del primer mes.

(c) La población de insectos no supera en ningún momento los 2 millones, pues el máximo absoluto es de 1.2 millones.



P6.- [10 puntos] Calcula la integral de la función $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} dx = \dots$$

$$\begin{array}{r} x^4 \qquad \qquad +2x+6 \quad |x^2+x-2 \\ -x^4 - x^3 + 2x^2 \qquad \qquad x^2 - x + 3 \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 2x - 6 \\ x^3 + x^2 - 2x \\ \hline 3x^2 \qquad -6 \\ -3x^2 - 3x + 6 \\ \hline -3x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} = x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2 + x - 2}$$

$$\dots = \int x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2 + x - 2} dx = \int x^2 - x + 3 dx - \int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx = \dots$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A=1 \\ x=-2 \rightarrow -6 = -3B \rightarrow B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

$$\dots = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x+2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+2} dx = \boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + K}$$

P7.– En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol.

- (a) **[3 puntos]** Sea F = “juega a fútbol” y sea B = “juega a básquet”, escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.
- (b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,
- (b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.
- (b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.
- (b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet)
- (b.4) **[2 puntos]** No juegue ni a fútbol ni a básquet.

(a) El 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet $\rightarrow P(F \cup B) = 0.60$

El 10% practica los dos $\rightarrow P(F \cap B) = 0.10$

Hay un 60% de alumnos que no juega al fútbol $\rightarrow P(F^c) = 0.60$

(b)

(b.1) $P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - 0.60 = \boxed{0.4}$

(b.2) Nos piden calcular $P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(F \cup B) = 0.60 \\ P(F \cap B) = 0.10 \\ P(F) = 0.40 \\ P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.6 = 0.4 + P(B) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = \boxed{0.3}$$

(b.3) Nos piden calcular $P(B \cap F^c)$.

$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap F^c) \Rightarrow 0.3 = 0.1 + P(B \cap F^c) \Rightarrow \boxed{P(B \cap F^c) = 0.3 - 0.1 = 0.2}$$

(b.4) Nos piden calcular $P(B^c \cap F^c)$

$$P(B^c \cap F^c) = \{Leyes de Morgan\} = P((B \cup F)^c) = 1 - P(B \cup F) = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$$

- P8.– (a) [5 puntos]** En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 8 y desviación típica 2?
- (b) [5 puntos]** En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ .

(a) X = Nota en un examen de tecnología. $X = N(8, 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(5 \leq X \leq 7) &= P(X \leq 7) - P(X \leq 5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(Z \leq \frac{7-8}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{5-8}{2}\right) = P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.5) = \\
 &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \geq 0.5) = P(Z \leq 0.5) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6915 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.383}
 \end{aligned}$$

	0	1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611

(b) X = Nota en un examen de filosofía. $X = N(\mu, \sigma)$.

Sabemos que $P(X \geq 6) = 0.35$ y que $P(X \leq 4) = 0.51$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 6) &= 0.35 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.35 = 0.65 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385 \Rightarrow 6 - \mu = 0.385\sigma \Rightarrow \boxed{6 - 0.385\sigma = \mu}
 \end{aligned}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879

$$P(X \leq 4) = 0.51 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 0.51 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4 - \mu}{\sigma} = 0.025 \Rightarrow \boxed{4 - \mu = 0.025\sigma}$$

	0	1	2	3	
0.0	0.4980	0.5040	0.5080	0.5120	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 6 - 0.385\sigma = \mu \\ 4 - \mu = 0.025\sigma \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 6 + 0.385\sigma = 0.025\sigma \Rightarrow 0.385\sigma - 0.025\sigma = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.360\sigma = 2 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2}{0.36} = \frac{50}{9} \approx 5.5556} \Rightarrow \mu = 6 - 0.385 \cdot \frac{50}{9} = \boxed{\frac{139}{36} \approx 3.8611}$$

La media de notas es 3.86 puntos y la desviación típica es 5.5 puntos.

PBAU Ordinaria 2023



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Considera la matriz M y el vector b ,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Respectivamente.

- (a) [3 puntos] Indica para que valores de a la matriz M es invertible.
- (b) [3 puntos] Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M .
- (c) [4 puntos] Calcula, para el caso $a = 0$, el vector x tal que $Mx = b$

P2.– Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2 .

- (a) [4 puntos] Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.
- (b) [3 puntos] Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A - B)Y = O$
- (c) [3 puntos] Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = O$

P3.– Considera el plano $\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$.

- (a) [3 puntos] Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.
- (b) [3 puntos] Calcula el área del triángulo anterior.
- (c) [4 puntos] Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A .

P4.– Sean a y b dos constantes reales no nulas.

Consideremos el plano $\pi: x + ay - 2z = 3$ y la recta

$$r: \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

- (a) [4 puntos] ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π ? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π , y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
- (b) [3 puntos] ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π ?

- (c) [3 puntos] ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π ?

P5.– La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

- (a) [4 puntos] ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.
 (b) [4 puntos] ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?
 (c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

P6.– [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = 0$ y $x = 7$. Calcula su área.

P7.– Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B . Sabiendo que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(A^c) = 0.4$ (siendo A^c el suceso complementario), calcula:

- (a) [2 puntos] $P(B/A)$.
 (b) [3 puntos] $P(B)$.
 (c) [3 puntos] $P(A^c \cap B^c)$.
 (d) [2 puntos] ¿Son A y B sucesos independientes?

P8.– El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.1 \text{ kg}$ y desviación típica σ desconocida. Se sabe que sólo el 30.5% de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

- (a) [4 puntos] ¿Cuál es la desviación típica?
 (b) [3 puntos] Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?
 (c) [3 puntos] Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

SOLUCIONES**P1.**– Considera la matriz M y el vector b ,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Respectivamente.

(a) **[3 puntos]** Indica para que valores de a la matriz M es invertible.(b) **[3 puntos]** Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M .(c) **[4 puntos]** Calcula, para el caso $a = 0$, el vector x tal que $Mx = b$ (a) La matriz M es invertible si su determinante es distinto de 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + a(a+1) - 0 - (a+1) - 2 = 1 + a^2 + a - a - 1 - 2 = a^2 - 2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{2}}$$

La matriz M es invertible para cualquier valor de a distinto de $-\sqrt{2}$ y de $+\sqrt{2}$.(b) Si $a \neq \pm\sqrt{2}$ calculamos su inversa.

$$|M| = a^2 - 2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}}{a^2 - 2} = \frac{1}{a^2 - 2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & a+1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & a+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 - 2} \begin{pmatrix} -1 & -1+a & 1 \\ -a & 2-a & -2+a(a+1) \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2 - 2} \begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & 2-a & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}}$$

(c) Para $a = 0$ la matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Para este valor la matriz M tiene inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{0^2 - 2} \begin{pmatrix} -1 & 0-1 & 1 \\ -0 & 2-0 & 0^2+0-2 \\ 0+1 & -1 & -0-1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Despejamos “x” de la ecuación $Mx = b$.

$$Mx = b \Rightarrow x = M^{-1}b$$

Realizamos el producto y obtenemos la expresión de “x”.

$$x = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2 \\ -1 + 1 \\ 1/2 + 1/2 \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

P2.– Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.

(a) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.

(b) **[3 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A - B)Y = O$

(c) **[3 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = O$

(a) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz A - I tiene inversa y la calculamos.

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - I)^T}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Como su determinante es nulo no existe su inversa.

La matriz Y es de orden 2x2. La matriz es $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(A - B)Y = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2c = 0 \\ b - 2d = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ -b + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ a = 2c \\ b = 2d \\ b = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 2d \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Una solución no nula del problema puede ser tomando $c = 1$ y $d = 1 \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) La matriz Z debe ser de orden 2×2 . Consideramos $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AZ = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - c = 0 \\ 3b - d = 0 \\ 3c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0} \\ 3d = 0 \rightarrow \boxed{d = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ 3b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

La única matriz solución de la ecuación es la matriz nula.

P3.– Considera el plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

- (a) **[3 puntos]** Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.
 (b) **[3 puntos]** Calcula el área del triángulo anterior.
 (c) **[4 puntos]** Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

(a) Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \rightarrow \begin{cases} \pi : 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ OX : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{A(3, 0, 0)}$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi : 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ OY : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{B(0, 2, 0)}$$

$$C \rightarrow \begin{cases} \pi : 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ OZ : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow z - 6 = 0 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow \boxed{C(0, 0, 6)}$$

(b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 0, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12i + 6k + 18j = (12, 18, 6)$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \boxed{3\sqrt{14} \approx 11.22 \text{ unidades cuadradas}}$$

(c) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, 3, 1) \\ A(3, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

P4.– Sean a y b dos constantes reales no nulas.

Consideremos el plano $\pi: x + ay - 2z = 3$ y la recta

$$r: \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

- (a) **[4 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π ? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π , y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
- (b) **[3 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π ?
- (c) **[3 puntos]** ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π ?

- (a) La recta r es perpendicular al plano π cuando las coordenadas del vector director de la recta son proporcionales a las coordenadas del vector normal del plano.

$$r: \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - bz \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - b\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \\ \vec{v}_r = (-b, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi: x + ay - 2z = 3 \Rightarrow \vec{n} = (1, a, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-b, 0, 1) \\ \vec{n} = (1, a, -2) \\ r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-b}{1} = \frac{0}{a} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{1} = \frac{1}{-2} \rightarrow 2b = 1 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \\ \frac{0}{a} = \frac{1}{-2} \rightarrow \boxed{0 = a} \end{cases}$$

Con los valores $a = 0$; $b = \frac{1}{2}$ recta y plano son perpendiculares.

Hallamos el punto P de corte de recta y plano.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \pi: x - 2z = 3 \\ r: \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 1, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2z \\ 2x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2(3 + 2z) + z = 2 \Rightarrow 6 + 4z + z = 2 \Rightarrow 5z = -4 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{z = \frac{-4}{5}} \Rightarrow \boxed{x = 3 + 2 \cdot \frac{-4}{5} = \frac{15 - 8}{5} = \frac{7}{5}} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-4}{5}\right)} \end{aligned}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-4}{5}\right)$.

No tiene sentido hablar de distancia entre recta y plano pues la recta corta al plano en el punto P.

- (b) La recta r es paralela al plano π cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y si un punto cualquiera de la recta no pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-b, 0, 1) \\ \vec{n} = (1, a, -2) \\ r \parallel \pi \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-b, 0, 1)(1, a, -2) = 0 \Rightarrow -b + 0 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \exists P_r(1, 0, 0) \in \pi? \\ \pi : x + ay - 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists 1 = 3? \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

La recta y el plano son paralelos cuando $b = -2$. El valor de a puede ser cualquier valor real.

(c) El plano debe contener a todos los puntos de la recta. En particular debe contener al punto $P_r(1, 0, 0)$ que pertenece a la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + ay - 2z = 3 \\ \exists P_r(1, 0, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 3 \text{ ¡Imposible!}$$

No existen valores que hagan que la recta esté contenida en el plano.

P5.— La cantidad de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

- (a) **[4 puntos]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.
 (b) **[4 puntos]** ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?
 (c) **[2 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

(a) Nos piden hallar $f(0) \rightarrow f(0) = e^{-0} + 0.15 \cdot 0 + 1 = 2$. Inicialmente hay infectadas 2 toneladas de agua.

Calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = e^{-\infty} + 0.15 \cdot (+\infty) + 1 = 0 + \infty + 1 = +\infty$$

Significa que con el paso del tiempo acaba infectándose toda el agua.

(b) Buscamos el mínimo de la función $f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -e^{-x} + 0.15 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -e^{-x} + 0.15 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0.15 \Rightarrow -x = \ln 0.15 \Rightarrow x = -\ln 0.15 \approx 1.9$$

$$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f''(-\ln 0.15) = e^{\ln 0.15} = 0.15 > 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1.9$.

$$f(-\ln 0.15) = e^{\ln 0.15} + 0.15(-\ln(0.15)) + 1 = 0.15 - 0.15 \ln 0.15 + 1 = 1.15 - 0.15 \ln(0.15) \approx 1.43$$

En el momento de mínima cantidad de agua infectada hay, aproximadamente, 1.43 toneladas de agua infectada.

(c) Estudiamos si la función se anula.

$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 = \frac{1}{e^x} + 0.15x + 1$. Esta función para $x \geq 0$ siempre es positiva. Nunca se anula.

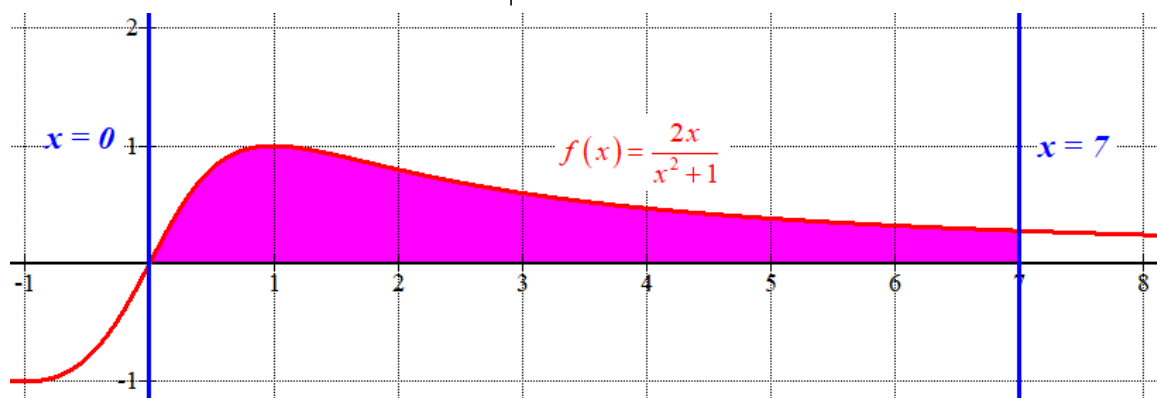
OTRA FORMA DE RAZONARLO.

La función es continua. En $x = 0$ vale 2, disminuye hasta su valor mínimo 1.43 y vuelve a crecer hasta $+\infty$. Nunca alcanza el valor 0.

P6.– [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = 0$ y $x = 7$. Calcula su área.

La función es continua. Hacemos una tabla de valores y la representamos en el intervalo $[0, 7]$.

x	$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
0	0
1	1
2	$4/5 = 0.8$
3	0.6
4	$8/17 \approx 0.47$
5	$10/26 \approx 0.38$
6	$12/37 \approx 0.43$
7	$14/50 = 0.28$



El área se calcula con la integral definida de la función entre 0 y 7.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^7 f(x) dx = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1} dx = \left[\ln(x^2+1) \right]_0^7 = \\ &= \left[\ln(7^2+1) \right] - \left[\ln(0^2+1) \right] = \boxed{\ln 50 \approx 3.91 \text{ unidades cuadradas}} \end{aligned}$$

- P7.**– Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(A^c) = 0.4$ (siendo A^c el suceso complementario), calcula:
- (a) [2 puntos] $P(B/A)$.
- (b) [3 puntos] $P(B)$.
- (c) [3 puntos] $P(A^c \cap B^c)$.
- (d) [2 puntos] ¿Son A y B sucesos independientes?

(a)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{1 - P(A^c)} = \frac{0.3}{1 - 0.4} = \boxed{0.5}$$

(b)

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(A/B) = P(B/A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0.6}$$

(c)

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.6 + 0.6 - 0.3] = \boxed{0.1}$$

(d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 \neq 0.36 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

P8.– El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media $\mu = 3.1\text{ kg}$ y desviación típica σ desconocida. Se sabe que sólo el 30.5% de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

(a) **[4 puntos]** ¿Cuál es la desviación típica?

(b) **[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.7 kg?

(c) **[3 puntos]** Suponiendo que $\sigma = 1.3725$, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg?

X = El peso de un recién nacido. $X = N(3.1, \sigma)$.

(a) Sabemos que $P(X \geq 3.8) = 0.305$.

$$P(X \geq 3.8) = 0.305 \Rightarrow P(X \leq 3.8) = 1 - 0.305 = 0.695 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 0.695 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0.7}{\sigma} = 0.51 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.7}{0.51} \approx 1.3725}$$

	0	1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291

La desviación típica es, aproximadamente, $\sigma = 1.3725$.

(b) X = El peso de un recién nacido. $X = N(3.1, 1.3725)$.

$$P(X \leq 2.7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{2.7 - 3.1}{1.3725}\right) = P(Z \leq -0.29) = P(Z \geq 0.29) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.29) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6141 = \boxed{0.3859}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517

(c) X = El peso de un recién nacido. $X = N(3.1, 1.3725)$.

$$P(2.7 \leq X \leq 3.5) = P(X \leq 3.5) - P(X \leq 2.7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) - 0.3859 =$$

$$= P(Z \leq 0.29) - 0.3859 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6141 - 0.3859 = \boxed{0.2282}$$

La probabilidad de que un recién nacido pese entre 2.7 y 3.5 kg es de 0.2282.

PBAU Extraordinaria 2022



Matemàtiques II

2022

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\lambda \quad 3\lambda \quad 6)$$

- (a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
- (b) En función del parámetro λ , halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
- (c) Para el valor de $\lambda = 1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1} . (3 puntos)
- (d) Para el valor de $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA = B$. (3 puntos)

2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

- (a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
- (b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$. (3 puntos)
- (c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$.

- (a) Representélas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)
- (b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)
- (c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)

4. Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

- (a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes. (2 puntos)
- (b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- (c) Compruebe que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle? (3 puntos)
- (d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (3 puntos)

5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

- (a) el punto P pertenece a la recta r . (1 punto)
- (b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. (3 puntos)
- (c) la recta r está contenida en el plano π . (3 puntos)
- (d) la recta r es perpendicular al plano π . (3 puntos)

6. Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ y $E(0, 0, 0)$.

- (a) Compruebe que los puntos A , B y C determinan un único plano, π . (2 puntos)
- (b) Averigüe si el triángulo de vértices A , B y C es rectángulo en el vértice A . (3 puntos)
- (c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π . (3 puntos)
- (d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

7. Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

- (a) Que un individuo no padezca la enfermedad. (1 punto)
- (b) Que la prueba dé resultado positivo. (3 puntos)
- (c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo. (3 puntos)
- (d) Que el resultado de la prueba sea erróneo. (3 puntos)

8. Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

- (a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja. (3 puntos)
- (b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. (3 puntos)
- (c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra. (4 puntos)

SOLUCIONES

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = (\lambda \quad 3\lambda \quad 6)$$

- (a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
 (b) En función del parámetro λ , halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
 (c) Para el valor de $\lambda = 1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1} . (3 puntos)
 (d) Para el valor de $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA = B$. (3 puntos)

(a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - \lambda^2 + 4 + \lambda + \lambda = \boxed{-\lambda^2 + 2\lambda}$$

(b) El rango de A es 3 si su determinante es no nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ o \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

El rango de A es 3 si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$.Si $\lambda = 2$ el rango de A es menor que 3, pues su determinante vale 0.La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como se aprecia las columnas 1ª y 2ª son iguales, tambiénson iguales las filas 2ª y 3ª. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y columna 1ª, calculamos su determinante $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Si $\lambda = 0$ el rango de A es menor que 3, pues su determinante vale 0.La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar lafila y columna 3ª, calculamos su determinante $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$ el rango de A es 3 y si $\lambda = 2$ o $\lambda = 0$ el rango de A es 2.

(c) Para el valor de $\lambda = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 1 + 4 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \text{ Existe la inversa.}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Para el valor de $\lambda = 1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación $XA = B \rightarrow X = BA^{-1}$. Sustituimos los valores de las matrices A y B y calculamos la expresión de X.

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3-18 & 3+6 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -22 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

- (a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
- (b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$. (3 puntos)
- (c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

- (a) Llamamos “a” al número de vehículos A, “b” al número de vehículos B, “c” al número de vehículos C.

“vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C” $\rightarrow a + b + c = 21000$

“vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros” $\rightarrow$
 $10000a + 15000b + 20000c = 332000000$

“se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A” $\rightarrow 21000 = b + \lambda a$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 10000a + 15000b + 20000c = 332000000 \\ 21000 = b + \lambda a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ \lambda a + b = 21000 \end{array} \right\}$$

- (b) Si $\lambda = 3$ el sistema queda $\left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ 3a + b = 21000 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ 3a + b = 21000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ b = 21000 - 3a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + 21000 - 3a + c = 21000 \\ 2a + 3(21000 - 3a) + 4c = 66400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a + c = 0 \\ 2a + 63000 - 9a + 4c = 66400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 2a \\ -7a + 4c = 3400 \end{array} \right\} \Rightarrow -7a + 8a = 3400 \Rightarrow \boxed{a = 3400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c = 6800} \\ \boxed{b = 21000 - 10200 = 10800} \end{array} \right.$$

Se han vendido 3400 coches del modelo A, 10800 del modelo B y 6800 del modelo C.

$$(c) \text{ Estudiamos la compatibilidad del sistema } \left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ \lambda a + b = 21000 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4\lambda + 2 - 3\lambda - 0 - 4 = \lambda - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda - 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Si $\lambda \neq 2$ el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

Veamos que ocurre para $\lambda = 2$.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ 2a + b = 21000 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ 2a + b = 21000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 21000 \\ 2a + 3b + 4c = 66400 \\ b = 21000 - 2a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + 21000 - 2a + c = 21000 \\ 2a + 3(21000 - 2a) + 4c = 66400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -a + c = 0 \\ 2a + 63000 - 6a + 4c = 66400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = a \\ -4a + 4c = 3400 \end{array} \right\} \Rightarrow -4a + 4a = 3400 \Rightarrow \text{¡¡}0 = 3400\text{!!}$$

Nos queda una igualdad imposible. El sistema no tiene solución para $\lambda = 2$.

Para $\lambda = 2$ la situación planteada no es posible.

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$.

- (a) Representélas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas. (5 puntos)
 (b) Calcule los puntos de corte de ambas gráficas. (2 puntos)
 (c) Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones. (3 puntos)

(a) La gráfica de $f(x) = x^2 - 4x$ es una parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2} \text{ Vértice de la parábola}$$

x	$y = x^2 - 4x$
0	0
1	-3
2	-4 Vértice
3	-3
4	0

La gráfica de $g(x) = 4 - 4x$ es una recta decreciente.

x	$y = 4 - 4x$
0	4
1	0

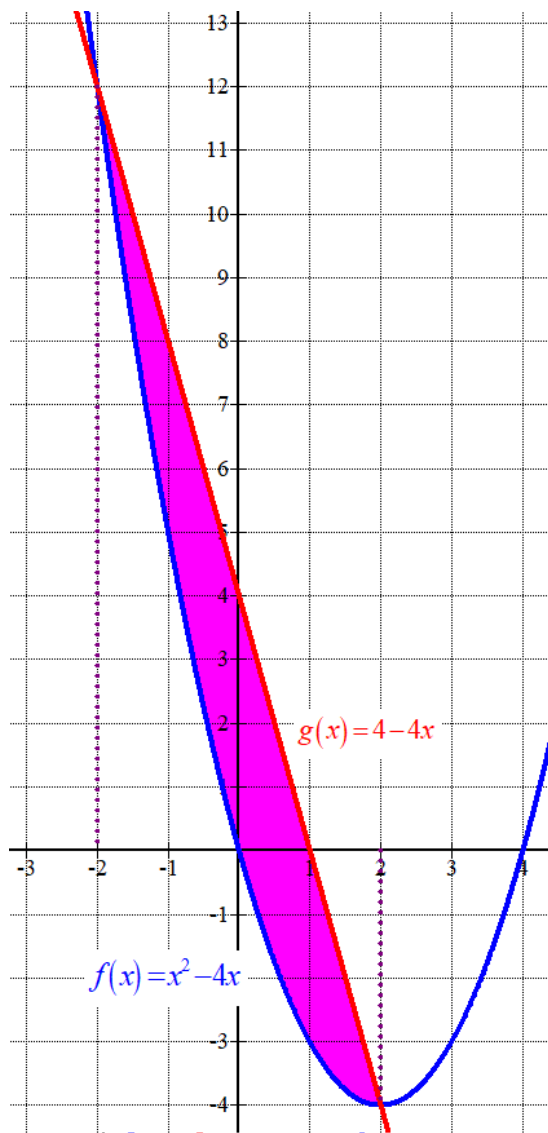


(b) Resolvemos la ecuación que nos permite hallar los puntos de corte.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Como $g(-2) = 4 - 4(-2) = 12$ y $g(2) = 4 - 4(2) = -4$ las coordenadas de los puntos de corte son $(-2, 12)$ y $(2, -4)$

(c) El área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es la del dibujo y se calcula con la integral definida entre -2 y 2 de $g(x) - f(x)$.



$$\text{Área} = \int_{-2}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-2}^2 4 - 4x - (x^2 - 4x) dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \left[-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2) \right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.67 \text{ u}^2}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones tiene un valor aproximado de 10.667 unidades cuadradas.

4. Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

(a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes. (2 puntos)

(b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

(c) Compruebe que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle? (3 puntos)

(d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (3 puntos)

(a) El dominio son todos los números reales, pues la raíz cúbica siempre existe.

Puntos de corte con los ejes.

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1 \Rightarrow \boxed{A(0, 1)}$$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow 0 = 1 - \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(1, 0)} \\ \boxed{C(-1, 0)} \end{cases}$$

(b) Calculamos la derivada de la función para $x \neq 0$.

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - x^{2/3} \Rightarrow f'(x) = 0 - \frac{2}{3} x^{2/3-1} = -\frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}, \text{ para } x \neq 0$$

Calculamos la derivada en $x = 0$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2/3-1} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1/3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

No existe $f'(0)$.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$, para $x \neq 0$.

Esa derivada no existe para $x = 0$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{-1}} = \frac{2}{3} > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{-2}{3} < 0$. La función decrece en el intervalo $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

(c)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - 1 = 0 \\ f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$$

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$, para $x \neq 0$. Esta expresión de la derivada nunca se anula y tampoco en el intervalo $[-1, 1]$.

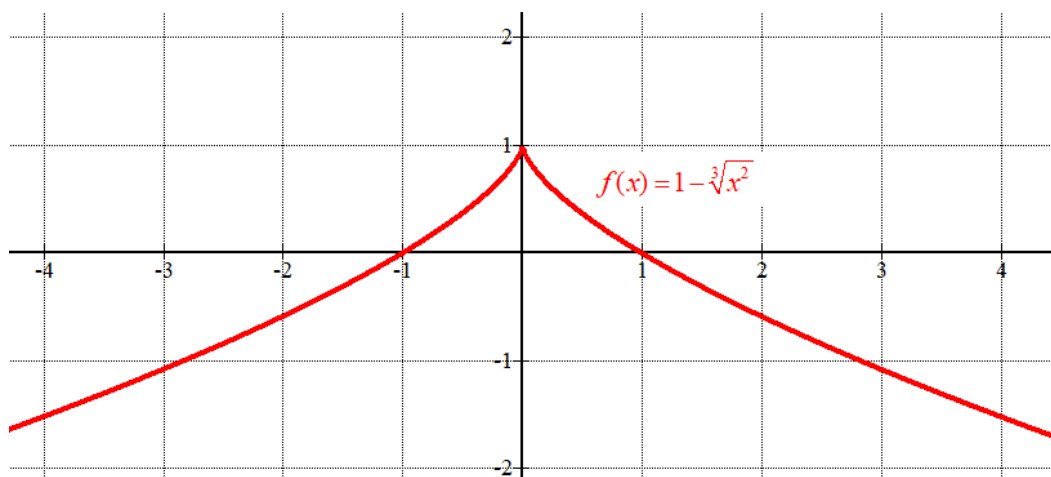
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow -2 = 0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

Para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$ la función debe ser continua en el intervalo (lo es) y derivable en $(-1, 1)$. Esta última condición no se cumple en el intervalo, pues la función no es derivable en $x = 0 \in (-1, 1)$.

No podemos aplicar el teorema de Rolle y por lo tanto no existe contradicción.

(d) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	$y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$
-2	-0.59
-1	0
0	1
1	0
2	-0.59



5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

- | | |
|--|------------|
| (a) el punto P pertenece a la recta r . | (1 punto) |
| (b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. | (3 puntos) |
| (c) la recta r está contenida en el plano π . | (3 puntos) |
| (d) la recta r es perpendicular al plano π . | (3 puntos) |

(a) El punto P debe satisfacer las ecuaciones de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 1 - a \cdot 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Se cumplen las igualdades independientemente del valor de " a ".

El punto P pertenece al plano para cualquier valor de " a ".

(b) Recta y plano son secantes si el vector normal del plano y el director de la recta no son perpendiculares, es decir, si su producto escalar no es cero.

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 1 + az \end{cases} \Rightarrow y = 1 + az \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (a, a, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 3x - 2y - z = 4 \Rightarrow \vec{n} = (3, -2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, -2, -1) \\ \vec{v}_r = (a, a, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (3, -2, -1) \cdot (a, a, 1) = 3a - 2a - 1 = a - 1$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Recta y plano se cortan en un único punto si el valor de " a " es distinto de 1.

(c) Para que la recta esté contenida en el plano debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

Esto ocurre cuando $a = 1$.

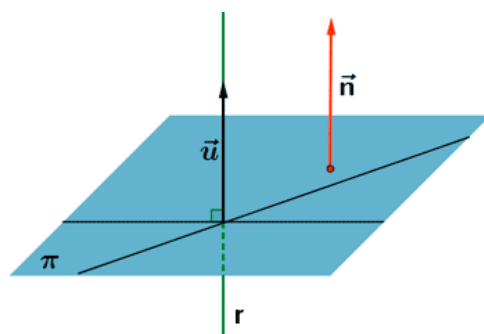
Pero la recta puede ser paralela o estar contenida en el plano. Para comprobar si esta contenida en el plano vemos si el punto de la recta $P_r(1, 1, 0)$ pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(1, 1, 0) \in \pi? \\ \pi \equiv 3x - 2y - z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 4? \Rightarrow \text{¿} 1 = 4? \text{ ¡No se cumple!}$$

La recta no está contenida en el plano para $a = 1$. La recta es paralela al plano para $a = 1$.

La recta no está contenida en el plano para ningún valor de " a ".

(d) La recta r es perpendicular al plano π cuando las coordenadas del vector normal del plano y el director de la recta son proporcionales.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (a, a, 1) \\ \vec{n} = (3, -2, -1) \\ r \perp \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{a}{-2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -a = 3 \Rightarrow \boxed{a = -3} \\ \frac{a}{-2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow \boxed{a = 2} \end{cases}$$

No es posible para ningún valor de “a” pues se obtienen dos igualdades que son imposibles de cumplir de forma simultánea.

6. Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ y $E(0, 0, 0)$.
- (a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π . (2 puntos)
- (b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A. (3 puntos)
- (c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π . (3 puntos)
- (d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

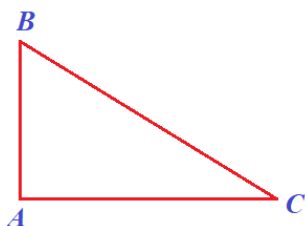
(a) Los puntos A, B y C determinan un único plano si no están alineados.

Los puntos están alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ indican la misma dirección, es decir, tienen las coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 0, -2) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 0) - (1, 1, 1) = (1, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{-3}{-1}$$

Los puntos no están alineados y los puntos A, B y C definen un único plano.

(b) Para que sea rectángulo en A los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben ser perpendiculares y por tanto, el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ debe ser cero.



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 0, -2) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 0) - (1, 1, 1) = (1, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -3) \cdot (1, -2, -1) = -1 + 2 + 3 = 4 \neq 0$$

El triángulo de vértices A, B y C no es rectángulo en A.

(c) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, -1, -3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -2, -1) \\ B(0, 0, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 2z + 4 + z + 2 - y - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -5x - 4y + 3z + 6 = 0}$$

La recta que pasa por los puntos A y D tiene como vector director el vector $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AD} = (-1, 2, -1) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -2)$$

Hallamos el ángulo que forma el vector normal del plano y el vector director de la recta $\overrightarrow{AD}$.

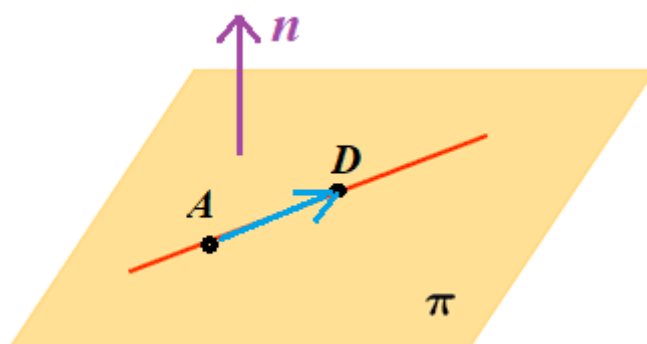
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (-2, 1, -2) \\ \pi \equiv -5x - 4y + 3z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-5, -4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\vec{n}|}$$

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = \frac{(-2, 1, -2)(-5, -4, 3)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{10 - 4 - 6}{15\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AD}, \vec{n}) = 90^\circ$$

La recta y el plano forman un ángulo de $90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$.

La recta puede ser paralela o estar contenida en el plano.

La recta está contenida en el plano pues el punto A pertenece al plano π .



- (d) El volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, -1, -3) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -2, -1) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 3 + 12 - 2 - 1 = 0$$

El volumen es 0. Significa que realmente no definen un tetraedro. Esto ocurre por que el punto D pertenece al plano $\pi \equiv -5x - 4y + 3z + 6 = 0$ definido por los puntos A, B y C, como se ha visto en el apartado (c). Por lo que los cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios.

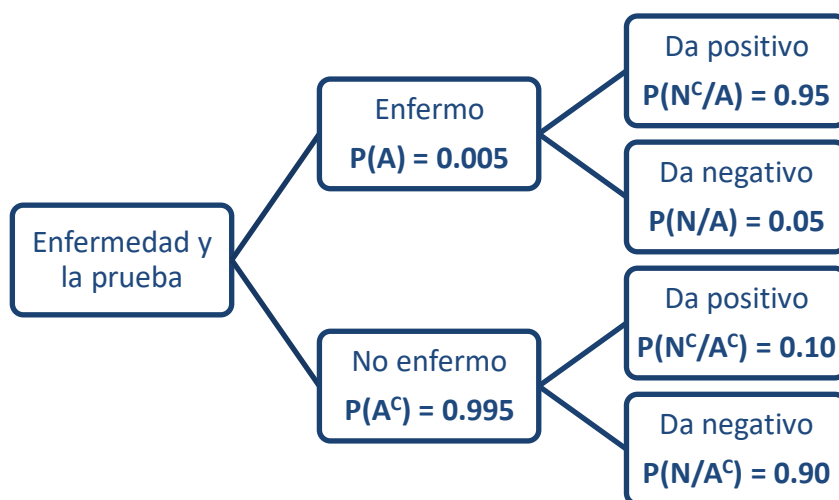
7. Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada 10000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

- (a) Que un individuo no padezca la enfermedad. (1 punto)
 (b) Que la prueba dé resultado positivo. (3 puntos)
 (c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo. (3 puntos)
 (d) Que el resultado de la prueba sea erróneo. (3 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol para clarificar la situación planteada.

Llamamos N = “dar negativo en la prueba diagnóstica”, A = “Padece la enfermedad”.

Tenemos que $P(A) = \frac{50}{10000} = \frac{1}{200} = 0.005$, $P(N/A) = 0.05$, $P(N^c/A^c) = 0.10$



(a) Nos piden $P(A^c)$.

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.005 = \boxed{0.995}$$

(b) Nos piden $P(N^c)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N^c) = P(A)P(N^c/A) + P(A^c)P(N^c/A^c) = 0.005 \cdot 0.95 + 0.995 \cdot 0.1 = \boxed{\frac{417}{4000} = 0.10425}$$

(c) Nos piden $P(A^c/N)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/N) = \frac{P(A^c \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A^c)P(N/A^c)}{1 - P(N^c)} = \frac{0.995 \cdot 0.9}{1 - 0.10425} = \boxed{\frac{3582}{3583} \approx 0.99972}$$

(d) Que el resultado sea erróneo puede ocurrir estando enfermo y dar negativo o también no estando enfermo y dar positivo. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de cada forma en que puede ocurrir.

$$\begin{aligned} P(\text{Dar resultado erróneo en la prueba}) &= P(A \cap N) + P(A^c \cap N^c) = \\ &= P(A)P(N/A) + P(A^c)P(N^c/A^c) = 0.005 \cdot 0.05 + 0.995 \cdot 0.1 = \boxed{\frac{399}{4000} = 0.09975} \end{aligned}$$

8. Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas rojas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento.

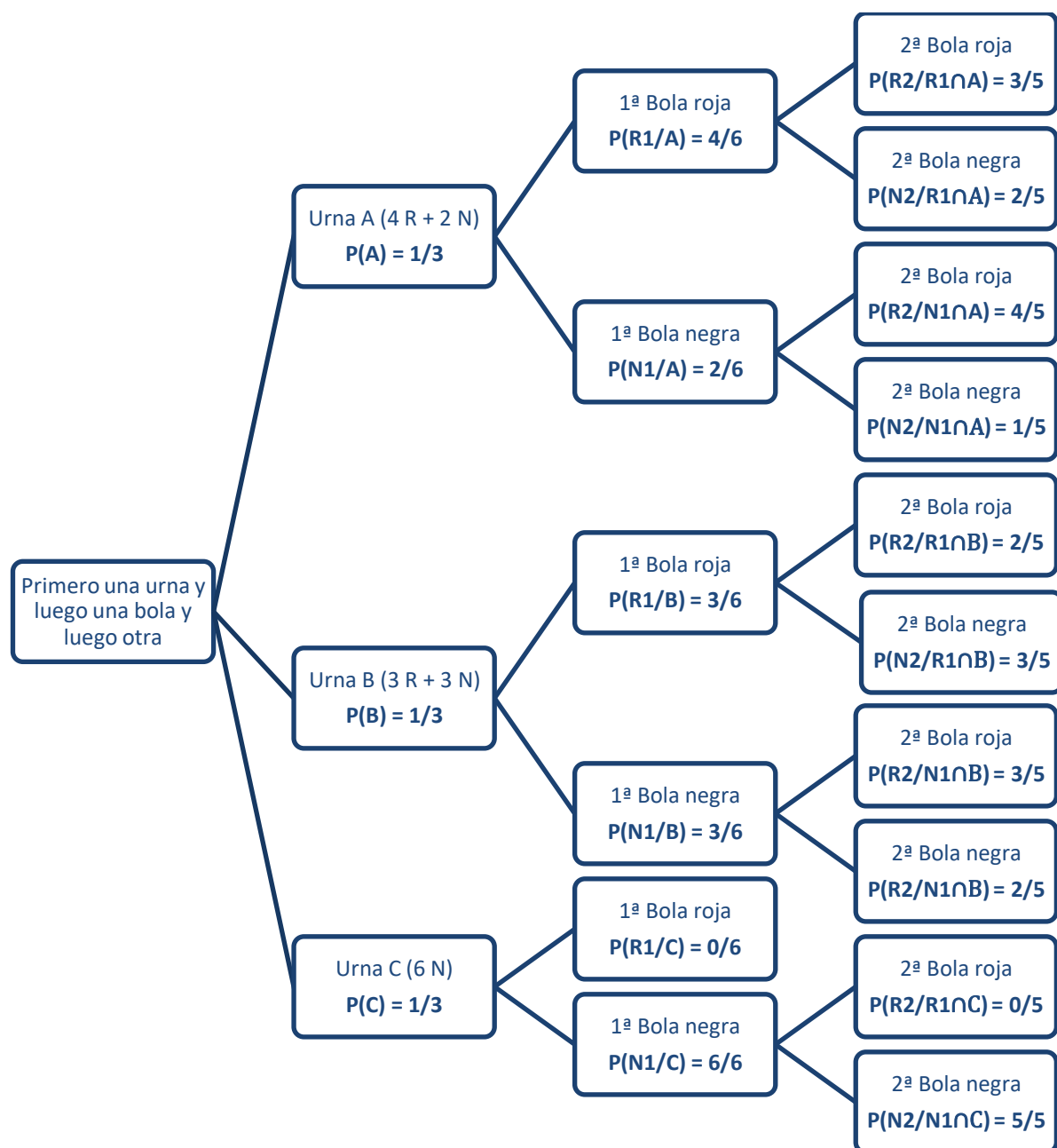
(a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja. (3 puntos)

(b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. (3 puntos)

(c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la segunda sea negra. (4 puntos)

Llamamos A = “elegir urna A”, B = “elegir urna B”, C = “elegir urna C”, R1 = “sacar 1ª bola roja”, N1 = “sacar 1ª bola negra”, R2 = “sacar 2ª bola roja”, N2 = “sacar 2ª bola negra”

Hacemos un diagrama de árbol explicativo de la situación planteada.



(a) Solo hacemos una primera extracción de bola.

$$\begin{aligned}P(R1) &= P(A)P(R1/A) + P(B)P(R1/B) + P(C)P(R1/C) = \\&= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{6} = \boxed{\frac{7}{18} \approx 0.389}\end{aligned}$$

(b) Ahora utilizamos el diagrama inicial que contempla la extracción de dos bolas consecutivas y sin reemplazamiento.

$$\begin{aligned}P(R1 \cap N2) &= P(A)P(R1/A)P(N2/(A \cap R1)) + P(B)P(R1/B)P(N2/(B \cap R1)) = \\&= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \boxed{\frac{17}{90} \approx 0.189}\end{aligned}$$

(c) Utilizamos lo obtenido en los apartados anteriores.

$$P(N2/R1) = \frac{P(N2 \cap R1)}{P(R1)} = \frac{17/90}{7/18} = \boxed{\frac{17}{35} \approx 0.486}$$

PBAU Ordinaria 2022



Matemàtiques II

2022

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.

(a) Calcule la matriz $A - \lambda I$. (2 puntos)

(b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$. (3 puntos)

(c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$ (5 puntos)

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a ,

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ ay = -3 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Discuta el sistema según el parámetro a . (4 puntos)

(b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

3. Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$.

(a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $3/e$. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)

(b) Calcule el $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$. (2 puntos)

(c) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (2 puntos)

(d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$. (2 puntos)

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2x - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea continua. (3 puntos)
- (b) Calcule $f'(x)$. (4 puntos)
- (c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea derivable. (3 puntos)

5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, -1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, -2).

- (a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
- (b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
- (c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
- (d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)

6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r , (2 puntos)
- (b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s . (3 puntos)
- (c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ (2 puntos)
- (d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s . (3 puntos)

7. Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$, $P(\overline{B}) = 0.4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.58$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.

- (a) $P(\overline{A})$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes? (4 puntos)
- (b) $P(A \cup B)$ (1 punto)
- (c) $P(B \cap \overline{A})$ (3 puntos)
- (d) $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$ (2 puntos)

8. El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8.8 meses con una desviación típica de 3 meses.

- (a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses? (3 puntos)
- (b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses? (3 puntos)
- (c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones? (4 puntos)

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.(a) Calcule la matriz $A - \lambda I$. (2 puntos)(b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$. (3 puntos)(c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$ (5 puntos)

$$\text{a) } A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

b)

$$(A - \lambda I)^2 = (A - \lambda I)(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 + 1 & -\lambda + 1 - \lambda & -\lambda - \lambda \\ -\lambda + 1 - \lambda & 1 + (1 - \lambda)^2 & 1 \\ -\lambda - \lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda^2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & 1 + 1 + \lambda^2 - 2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 2 + \lambda^2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}$$

c)

$$(A - \lambda I)^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 + \lambda^2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & 2 + \lambda^2 - 2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \lambda^2 = 6 \\ 1 - 2\lambda = -3 \\ -2\lambda = -4 \\ 2 + \lambda^2 - 2\lambda = 2 \\ 1 + \lambda^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 4 \\ -2\lambda = -4 \\ -2\lambda = -4 \\ \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ \lambda^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 4 \rightarrow \lambda = \sqrt{4} = \pm 2 \\ -2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = 2 \\ \lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ o \\ \lambda = 2 \end{cases} \end{cases}$$

El único valor de λ que hace que se cumplan todas las igualdades es $\lambda = 2$.

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a ,

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ ay = -3 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

(a) Discuta el sistema según el parámetro a . (4 puntos)

(b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

(a) Analizamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 9a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Estudiamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a = 0$

Vemos como queda el sistema con este valor.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 0 = -3 \\ 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La segunda ecuación es ¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

(b) El sistema tiene solución solo para $a \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ ay = -3 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ y = \frac{-3}{a} \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2\frac{-3}{a} = 4 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + \frac{6}{a} = 4 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3ax + 6 = 4a \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3ax = 4a - 6 \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{4a}{3a} - \frac{6}{3a} \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{4}{3} - \frac{2}{a} \\ ax + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{a}\right) + 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z = -\frac{4a}{3} + 2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-4}{9}a + \frac{2}{3}}$$

Para $a \neq 0$ la solución es $x = \frac{4}{3} - \frac{2}{a}$; $y = \frac{-3}{a}$; $z = \frac{-4}{9}a + \frac{2}{3}$.

3. Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$.

- (a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $3/e$. Halle la ecuación de esta recta tangente. (4 puntos)
- (b) Calcule el $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$. (2 puntos)
- (c) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$. (2 puntos)
- (d) Calcule el área de la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$. (2 puntos)

a) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada.

$$f(x) = e^{3x-2} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x-2}$$

Igualemos la derivada a $3/e$.

$$f'(x) = \frac{3}{e} = 3e^{-1} \Rightarrow 3e^{3x-2} = 3e^{-1} \Rightarrow e^{3x-2} = e^{-1} \Rightarrow 3x-2 = -1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Sustituimos en la función para obtener las coordenadas del punto.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{3}{3}-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Las coordenadas del punto son $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$

La recta tangente tiene ecuación $y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{e} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{e} \\ y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{e} + \frac{3}{e}x - \frac{3}{3e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{e}x}$$

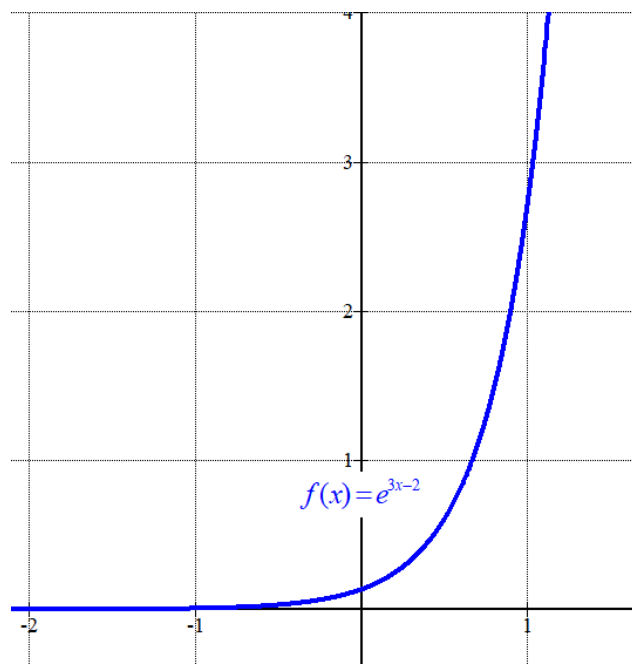
b)

$$\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4} = \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \frac{1-e^0}{4-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = \frac{-3e^{2-2}}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

c) Hacemos una tabla de valores.

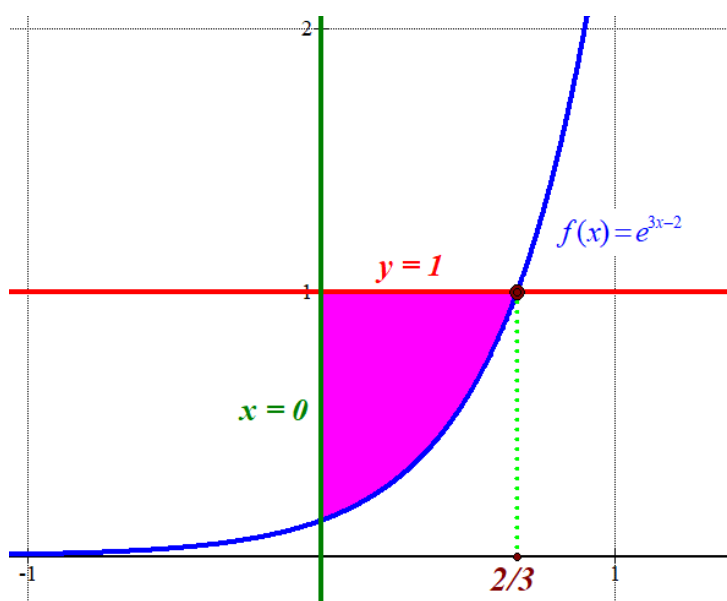
x	$f(x) = e^{3x-2}$
-2	0.0003
-1	0.0067
0	0.135
1	2.71
2	54.598



d) El área pedida es la del dibujo.

Hallamos los puntos de corte de $y = f(x)$ y la recta $y = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{3x-2} \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{3x-2} = 1 = e^0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$



Calculamos el área como la integral definida entre 0 y $2/3$ de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{2/3} 1 - e^{3x-2} dx = \left[x - \frac{e^{3x-2}}{3} \right]_0^{2/3} = \\ &= \left[\frac{2}{3} - \frac{e^{2-2}}{3} \right] - \left[0 - \frac{e^{0-2}}{3} \right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^{-2}}{3} = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{e^{-2}}{3} \approx 0.378 u^2} \end{aligned}$$

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2x - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea continua. (3 puntos)
- (b) Calcule $f'(x)$. (4 puntos)
- (c) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y = f(x)$ sea derivable. (3 puntos)

- a) Para ser continua en $x = 0$ debe cumplirse que los límites laterales coincidan con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + a}{2x - 4} = -\frac{a}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 10x^2 + x + b = b \\ f(0) &= -\frac{a}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{a}{4}}$$

Se debe cumplir: $a = -4b$

- b) Calculamos la derivada de la función.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 + a}{2x - 4} \Rightarrow y' = \frac{2x(2x - 4) - 2(x^2 + a)}{(2x - 4)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 - 2a}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 2a}{(2x - 4)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 - 4x - a)}{2^2(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - a}{2(x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x - a}{2(x - 2)^2} & \text{si } x < 0 \\ 20x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- c) Para que sea derivable primero debe ser continua, por lo que $b = -\frac{a}{4}$.

Para ser derivable debe serlo en $x = 0$ y para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 4x - a}{2(x - 2)^2} & \text{si } x < 0 \\ 20x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x - a}{2(x - 2)^2} = \frac{-a}{8} \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 20x + 1 = 1 \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{8} = 1 \Rightarrow -a = 8 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

Sustituimos $a = -8$ en $b = -\frac{a}{4}$ y tenemos $b = -\frac{-8}{4} = 2$. Los valores son $a = -8$ y $b = 2$.

5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, -1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, -2).

- (a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
 (b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
 (c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
 (d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)



a)

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} &= (4, 3, -2) - (1, 0, -1) = (3, 3, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{(1, 1, 1)(3, 3, -1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{3+3-1}{\sqrt{3}\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}}}$$

b) El punto medio es la semisuma de sus extremos.

$$M = \frac{(1, 0, -1) + (4, 3, -2)}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

c) Si D(x, y, z) se debe cumplir que el vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{DC} &= (4, 3, -2) - (x, y, z) = (4-x, 3-y, -2-z) \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1, 1, 1) = (4-x, 3-y, -2-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 4 - x \\ 1 = 3 - y \\ 1 = -2 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 1 = 3 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = -2 - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(3, 2, -3)}$$

d) El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} &= (3, 2, -3) - (1, 0, -1) = (2, 2, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2i + 2j + 2k - 2k + 2j - 2i$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = -4i + 4j = (-4, 4, 0)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \boxed{\sqrt{32} \simeq 5.66 u^2}$$

6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r , (2 puntos)
 (b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s . (3 puntos)
 (c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ (2 puntos)
 (d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s . (3 puntos)

a)

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ -z = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ z = -1 + 2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r \equiv (x, y, z) = (0, 3, -1) + t(1, -1, 2), t \in \mathbb{R}}$$

b) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0, 3, -1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(1, 0, -4) \\ \vec{v}_s = (1, -1, -1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{-1}$$

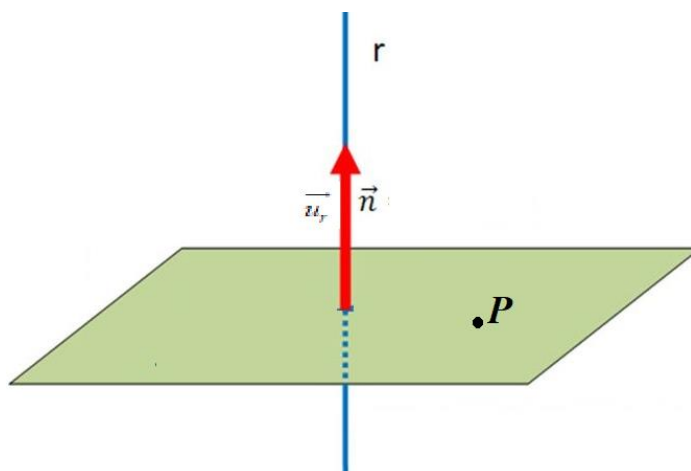
Las rectas se cortan o cruzan. Comprobemos si el producto mixto de $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_r Q_s}$ es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, -4) - (0, 3, -1) = (1, -3, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 6 + 2 - 3 - 3$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = -6 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (tienen distinta dirección, pero en distintos planos).

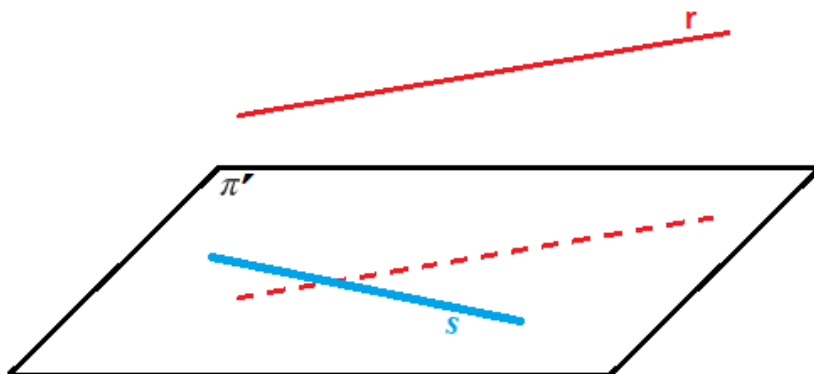
c) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ P(2, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x - y + 2z + D = 0 \\ P(2, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 0 + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x - y + 2z = 0}$$

d) El plano π' paralelo a r tiene como vector director el director de r , como además contiene a la recta s el otro vector director del plano es el director de la recta s .



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, -1, -1) \\ Q_s(1, 0, -4) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z+4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 2y - \cancel{x} - \cancel{4} + \cancel{x} + \cancel{4} + y + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \pi': 3x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - 1 = 0}$$

7. Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58$, donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades.

- (a) $P(\bar{A})$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes? (4 puntos)
- (b) $P(A \cup B)$ (1 punto)
- (c) $P(B \cap \bar{A})$ (3 puntos)
- (d) $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$ (2 puntos)

a)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = \boxed{0.3}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.4 = \boxed{0.6}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.58 \Rightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0.58 \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.58 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 1 - 0.58 = 0.42}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.42 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.42 = P(A) \cdot P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.42 = \boxed{0.88}$

c) $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow 0.6 = 0.42 + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow \boxed{P(B \cap \bar{A}) = 0.6 - 0.42 = 0.18}$

d) Calculamos las probabilidades condicionadas.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.42}{0.6} = \boxed{0.7}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.18}{0.6} = \boxed{0.3}$$

8. El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8.8 meses con una desviación típica de 3 meses.

(a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses? (3 puntos)

(b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses? (3 puntos)

(c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones? (4 puntos)

X = Tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa (en meses). $X = N(8.8, 3)$

a) Calculamos $P(X > 10)$.

$$P(X > 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 8.8}{3} > \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la tabla} \\ \text{de } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

El 34.46 % de las actualizaciones supera los 10 meses.

b) Calculamos $P(7 < X < 10)$.

$$P(7 < X < 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7 - 8.8}{3} < \frac{X - 8.8}{3} < \frac{10 - 8.8}{3}\right) = P(-0.6 < Z < 0.4) =$$

$$= P(Z \leq 0.4) - P(Z < -0.6) = P(Z \leq 0.4) - P(Z > 0.6) = P(Z \leq 0.4) - (1 - P(Z \leq 0.6)) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la tabla} \\ \text{de } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6554 - (1 - 0.7257) = \boxed{0.3811}$$

El 38.11 % de las actualizaciones se mantiene entre 7 y 10 meses.

c) Sabemos que $P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0.98$

$$P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = P(X < 8.8 + c) - P(X < 8.8 - c) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{X - 8.8}{3} < \frac{8.8 + c - 8.8}{3}\right) - P\left(\frac{X - 8.8}{3} < \frac{8.8 - c - 8.8}{3}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - P\left(Z > \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right) =$$

$$= 2P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0.98 \Rightarrow 2P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 1.98 \Rightarrow P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{c}{3} = 2.326 \Rightarrow \boxed{c = 6.978}$$

PBAU Extraordinaria 2021

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2021

Modelo 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula los determinantes: $\det(A)$, $\det(B)$. (2 puntos)
- (b) Calcula la matriz producto $B \cdot A$, la matriz traspuesta $(B \cdot A)^t$. (3 puntos)
- (c) Para que se cumpla la relación $A \cdot X = B \cdot A$, ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz X ? (2 puntos)
- (d) Calcula la matriz X que satisface la relación $A \cdot X = B \cdot A$. (3 puntos)

2. Una empresa fabrica tres tipos de bombilla: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas a diario es veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar a diario.

- (a) Si $x = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:
 - (i) plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema. (3 puntos)
 - (ii) clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar. (4 puntos)
 - (b) Si $x = 3$, y la empresa fabrica a diario 1000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. (2 puntos)
- En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar? (1 punto)

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x_0 \neq 0$. (3 puntos)
- (b) Calcula la relación que ha de haber entre a y b para que f sea una función continua en el punto $x_0 = 0$. (5 puntos)
- (c) Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable en el punto $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 puntos)

4. El número de individuos de una población en un determinado instante de tiempo, t , expresado en millones de individuos, viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

donde la variable real $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000.

- (a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000. (2 puntos)
- (b) Prueba de que el número de individuos de la población alcanza un mínimo. ¿Qué año se alcanza ese mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo? (4 puntos)
- (c) Calcula el tamaño de la población, esto es el número de individuos, que habrá a largo plazo. (4 puntos)

5. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II). (1 punto)
- (b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I). (3 puntos)
- (c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$. (3 puntos)
- (d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen. (3 puntos)

6. Dados los puntos

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad R = (0, 1, 1).$$

- (a) Comprueba que P, Q y R no están alineados. (2 puntos)
- (b) Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P, Q y R. (3 puntos)
- (c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P, Q y R. (3 puntos)
- (d) Calcula, de forma razonada, la condición que han de cumplir a, b y c para que los puntos P, Q, R y S = (a, b, c) pertenecen a un mismo plano. (2 puntos)

7. En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) A = "las dos bolas son rojas" (2 puntos)
- (b) B = "las dos bolas son del mismo color" (3 puntos)
- (c) C = "al menos una bola es roja" (3 puntos)
- (d) D = "ninguna de las dos bolas es roja" (2 puntos)

8. La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de promedio 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, elegida al azar una persona de la clase, su altura:

- (a) sobrepase los 170 cm. (3 puntos)
- (b) sea menor que 155 cm. (3 puntos)
- (c) esté comprendida entre 155 cm y 170 cm (4 puntos)

SOLUCIONES

1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula los determinantes: $\det(A)$, $\det(B)$. (2 puntos)
 (b) Calcula la matriz producto $B \cdot A$, la matriz traspuesta $(B \cdot A)^t$. (3 puntos)
 (c) Para que se cumpla la relación $A \cdot X = B \cdot A$, ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz X ? (2 puntos)
 (d) Calcula la matriz X que satisface la relación (3 puntos)

$$A \cdot X = B \cdot A$$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = \boxed{-2}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 2 = \boxed{-17}$$

b)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+0 \\ 2-5 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Si la matriz X tiene “m” filas y “n” columnas, tenemos que:

$$A \cdot X = B \cdot A$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

Para poder realizar el producto $A \cdot X$ debe ser $2 = m$, la matriz X debe tener 2 filas.

El resultado del producto de $A \cdot X$ es una matriz de orden $2 \times n$, como la matriz $B \cdot A$ es de dimensiones 2×2 , tenemos que $n = 2$. La matriz X debe tener 2 columnas.

La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

d) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \cdot A \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

Hallamos la inversa de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial.

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix} = X$$

2. Una empresa fabrica tres tipos de bombilla: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas a diario es veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar a diario.

- (a) Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:
- (i) plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema. (3 puntos)
 - (ii) clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar. (4 puntos)
- (b) Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica a diario 1000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. (2 puntos)
- En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar? (1 punto)

- (a) Llamamos “x” al número de bombillas tipo A, “y” al número de bombillas tipo B y “z” al número de bombillas tipo C.

Extraemos de la información las ecuaciones.

“La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED, y la tipo C tiene 50 puntos LED. Esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED” $\rightarrow 10x + 20y + 50z = 30000$

“Esta empresa fabrica 1300 bombillas” $\rightarrow x + y + z = 1300$

“El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas diariamente es λ veces el número de bombillas de 50 puntos LED” $\rightarrow x = \lambda z$. Como $\lambda = 2$, entonces $x = 2z$

(i)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ 10x + 20y + 50z = 30000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\}$$

(ii)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 5 + 0 - 2 + 2 + 0 = 1 \neq 0$$

Como su determinante es no nulo, el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 1300 \\ 2z + 2y + 5z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 1300 \\ 2y + 7z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1300 - 3z \\ 2y + 7z = 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1300 - 3z) + 7z = 3000 \Rightarrow 2600 - 6z + 7z = 3000 \Rightarrow \boxed{z = 400} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 \cdot 400 = 800} \\ \boxed{y = 1300 - 1200 = 100} \end{cases}$$

Se fabrican 800 bombillas tipo A, 100 de tipo B y 400 de tipo C.

(b) Si $\lambda = 3$, el número de bombillas es 1000 y el número de puntos LED es “n” el nuevo sistema de ecuaciones queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ 10x + 20y + 50z = n \\ x = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = \frac{n}{10} \\ x - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5 + 0 - 2 + 3 + 0 = 0$$

Como su determinante es nulo el rango de A no es 3.

El rango de A es 2 pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene

determinante no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 2 & 5 & n/10 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 3 que se obtiene

al quitar la columna primera y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 5 & n/10 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 6000 - 0 - 0 + \frac{3n}{10} = \frac{-60000 + 3n}{10}$$

$$\frac{-60000 + 3n}{10} = 0 \Rightarrow -60000 + 3n = 0 \Rightarrow n = 20000$$

Nos planteamos dos posibilidades:

Opción 1. Si $n = 20000$.

En este caso el menor de orden 3 de A/B tiene determinante nulo y el rango de A/B es 2, al igual que el rango de A, pero menor que el número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Opción 2. Si $n \neq 20000$

En este caso el determinante del menor de orden 3 de la matriz ampliada es no nulo y el rango de la matriz ampliada es 3, como el rango de la matriz de coeficientes es 2, tenemos que los rangos son distintos, por lo que el sistema es incompatible y no tiene solución.

Lo resolvemos para $n = 20000$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ 10x + 20y + 50z = 20000 \\ x = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = 2000 \\ \boxed{x = 3z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3z + y + z = 1000 \\ 3z + 2y + 5z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 4z = 1000 \\ 2y + 8z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 4z = 1000 \\ y + 4z = 1000 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 4z = 1000 \Rightarrow \boxed{y = 1000 - 4z}$$

La solución es $x = 3z$; $y = 1000 - 4z$; $z = z$.

Tomando como partida el número de bombillas del tipo C (z) el número de bombillas de tipo A son el triple ($3z$) y las de tipo B son $1000 - 4z$.

Como el número de bombillas debe ser positivo tenemos que z no puede ser superior a 250 pues haría que el número de bombillas de tipo B fuese negativo.

El número de bombillas de tipo C no puede ser mayor de 250.

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x_0 \neq 0$. (3 puntos)
- (b) Calcula la relación que ha de haber entre a y b para que f sea una función continua en el punto $x_0 = 0$. (5 puntos)
- (c) Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable en el punto $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 puntos)

(a) La función para $x \neq 0$ es $f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{2x}$ que es cociente de una función exponencial (continua) y de una polinómica (continua), como el denominador no se anula este cociente es continuo si $x \neq 0$.

(b) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{2} \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = b \Rightarrow \boxed{a = 2b}$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ el valor de “a” debe ser el doble del valor de “b”.

(c) Para $a = 2$ y $b = 1$ se cumple que $a = 2b$ por lo que la función es continua en $x = 0$.

La función es $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La derivada en $x \neq 0$ es $f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot 2x - 2(e^{2x} - 1)}{(2x)^2} = \frac{4xe^{2x} - 2e^{2x} + 2}{4x^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{2x^2}$

Calculamos el límite de esta derivada cuando x se acerca a 0 como el valor de $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{2x^2} = \frac{0-1+1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{2x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} = e^0 = \boxed{1} \end{aligned}$$

Se obtiene que $f'(0) = 1$.

4. El número de individuos de una población en un determinado instante de tiempo, t , expresado en millones de individuos, viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$$

donde la variable real $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000.

- (a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000. (2 puntos)
 (b) Prueba de que el número de individuos de la población alcanza un mínimo. ¿Qué año se alcanza ese mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo? (4 puntos)
 (c) Calcula el tamaño de la población, esto es el número de individuos, que habrá a largo plazo. (4 puntos)

(a) $P(0) = \frac{15+0^2}{(0+1)^2} = 15$. Había una población de 15 millones de personas.

(b) Derivamos e igualamos a cero.

$$P'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - 2(t+1)(15+t^2)}{(t+1)^4} = \frac{(t+1)[2t(t+1) - 2(15+t^2)]}{(t+1)^4}$$

$$P'(t) = \frac{2t(t+1) - 2(15+t^2)}{(t+1)^3} = \frac{\cancel{2t^2} + 2t - 30 - \cancel{2t^2}}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow 2t-30 = 0 \Rightarrow \boxed{t=15}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de los 15 años.

- En $(0,15)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{2-30}{(1+1)^3} = -\frac{15}{8} < 0$. La función decrece en $(0,15)$.
- En $(15,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale $P'(20) = \frac{40-30}{(20+1)^3} = \frac{10}{9261} > 0$. La función crece en $(15,+\infty)$.

En $t = 15$ existe un mínimo de $P(t)$. $P(15) = \frac{15+15^2}{(15+1)^2} = 0.937500$.

A los 15 años hay un mínimo de población siendo esta de 937500 habitantes.

(c) Calculamos el límite de $P(t)$ cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{15+t^2}{t^2+2t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{2t}{t^2} + \frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{t^2} + 1}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{15}{\infty} + 1}{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0+1}{1+0+0} = \boxed{1} \end{aligned}$$

La población tiende a ser 1 millón de personas.

5. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II). (1 punto)
 (b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I). (3 puntos)
 (c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$. (3 puntos)
 (d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen. (3 puntos)

(a)

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ P_1(0, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I) \equiv (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2); \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\beta \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ Q_2\left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (II) \equiv (x, y, z) = \left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) + \beta(2, 0, 1); \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

Como los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales entonces no son ni paralelas ni coincidentes.

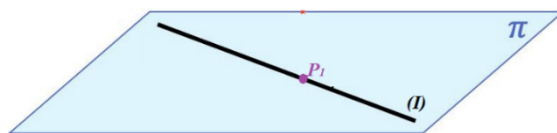
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{2}{1}$$

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{u}_2$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$.

$$\overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) - (0, 3, 2) = \left(3, -\frac{7}{2}, -2\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = \left(3, -\frac{7}{2}, -2\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{7}{2} & -2 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 4 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan y es posible hallar el plano pedido.



Si el plano π es paralelo a la recta (II) entonces tiene como uno de sus vectores directores el director de la recta $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ y al contener a la recta (I) otro de sus vectores directores es el director de la recta (I) $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$ y pasa por el punto $P_1(0, 3, 2)$ de la recta (I).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \\ P_1(0, 3, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y - 3 + 2z - 4 - 4y + 12 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}$$

(c) Si el plano π' es perpendicular a la recta (II) entonces su vector normal es el director de la recta (II) $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ y pasa por $(-1, 0, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ (-1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + z + D = 0 \\ (-1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1) + 2 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + z = 0}$$

(d) Si la recta (III) es perpendicular a ambas rectas tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_3 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_3 = (-1, -3, 2) \\ (0, 0, 0) \in (III) \end{array} \right\} \Rightarrow (III) \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -3\alpha, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

6. Dados los puntos

$$P = (1, 0, 1), Q = (1, 1, 0) \text{ y } R = (0, 1, 1).$$

- (a) Comprueba que P, Q y R no están alineados. (2 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P, Q y R. (3 puntos)
 (c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P, Q y R. (3 puntos)
 (d) Calcula, de forma razonada, la condición que han de cumplir a, b y c para que los puntos P, Q, R y S = (a, b, c) pertenecen a un mismo plano. (2 puntos)

(a) Hallamos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Comprobamos que no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0) - (1, 0, 1) = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0}$$

Por lo tanto, los puntos no están alineados.

(b) El plano π tendrá como vectores directores a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, pasando por $P = (1, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0) \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

(c) El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\text{Área } PQR = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

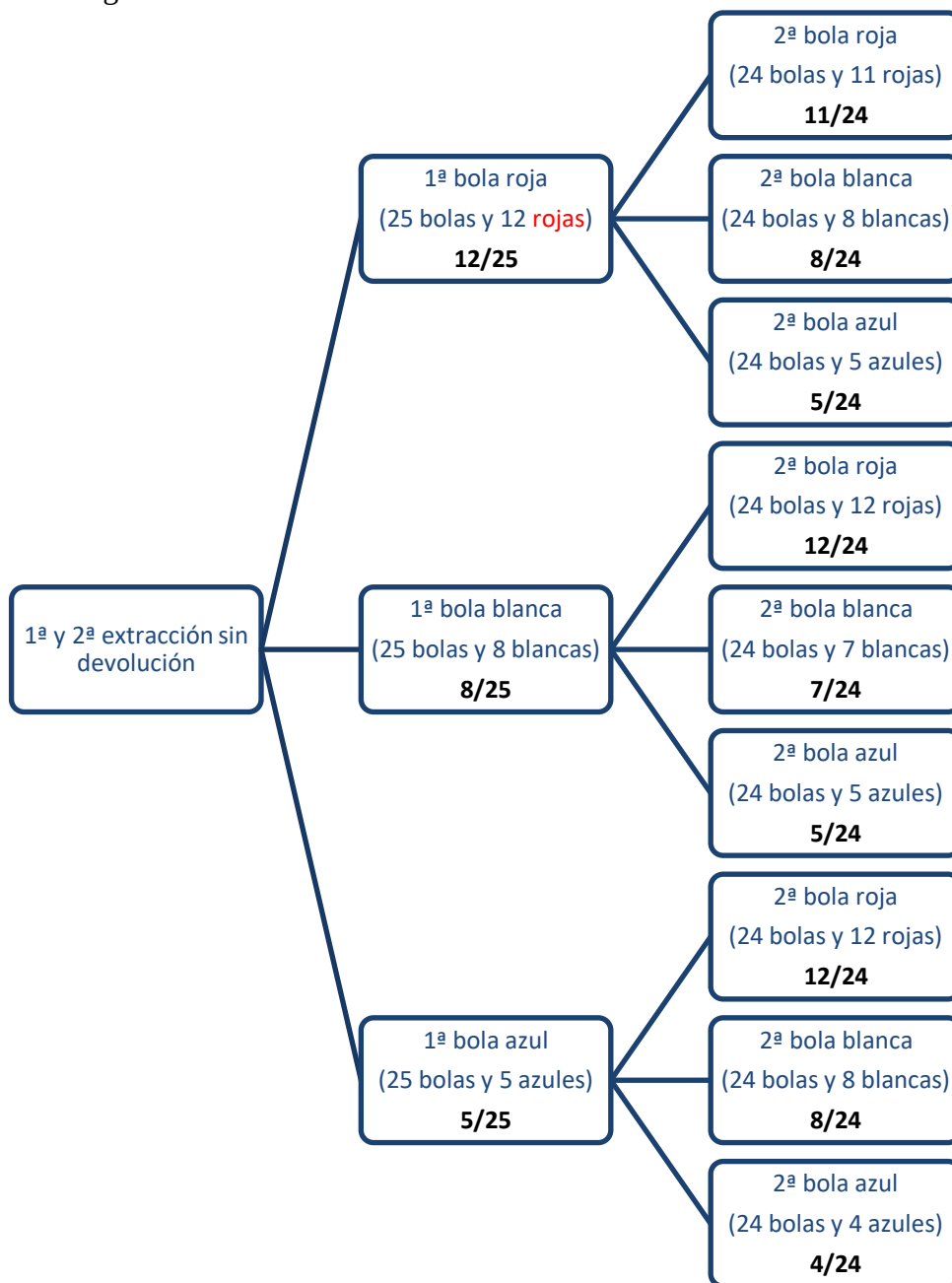
(d) Tenemos la ecuación $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ del plano que contiene a los puntos P, Q y R, por lo que el punto S = (a, b, c) está en el mismo plano que los otros puntos cuando el punto S está en el plano π y por lo tanto cumple su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z - 2 = 0 \\ S(a, b, c) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a + b + c - 2 = 0}$$

7. En una urna hay 12 bolas rojas, 8 bolas blancas y 5 bolas azules. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución en la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (a) $A =$ "las dos bolas son rojas" (2 puntos)
 (b) $B =$ "las dos bolas son del mismo color" (3 puntos)
 (c) $C =$ "al menos una bola es roja" (3 puntos)
 (d) $D =$ "ninguna de las dos bolas es roja" (2 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos R_1 y R_2 a sacar una bola roja en 1ª y 2ª extracción respectivamente. Análogamente llamamos B_1 y B_2 a sacar blanca en 1ª y 2ª extracción. Y, por último, A_1 y A_2 a sacar azul en 1ª y 2ª extracción.

(a)

$$P(A) = P(R1 \cap R2) = P(R1)P(R2 / R1) = \{\text{Miramos el diagrama de árbol}\} =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \boxed{\frac{11}{50} = 0.22}$$

(b)

$$P(B) = P((R1 \cap R2) \cup (B1 \cap B2) \cup (A1 \cap A2)) =$$

$$= P(R1 \cap R2) + P(B1 \cap B2) + P(A1 \cap A2) =$$

$$= P(R1)P(R2 / R1) + P(B1)P(B2 / B1) + P(A1)P(A2 / A1) =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \boxed{\frac{26}{75} \approx 0.347}$$

(c)

$$P(C) = P((R1 \cap R2) \cup (R1 \cap B2) \cup (R1 \cap A2) \cup (B1 \cap R2) \cup (A1 \cap R2)) =$$

$$= P(R1 \cap R2) + P(R1 \cap B2) + P(R1 \cap A2) + P(B1 \cap R2) + P(A1 \cap R2) =$$

$$= P(R1)P(R2 / R1) + P(R1)P(B2 / R1) + P(R1)P(A2 / R1) + \\ + P(B1)P(R2 / B1) + P(A1)P(R2 / A1) =$$

$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} = \boxed{\frac{37}{50} = 0.74}$$

(d) Que ninguna de las dos bolas sea roja contempla muchos casos favorables, calculamos su probabilidad usando el suceso complementario que es “Al menos una bola es roja” que ya tenemos calculada su probabilidad en el apartado c).

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{37}{50} = \boxed{\frac{13}{50} = 0.26}$$

8. La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de promedio 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, elegida al azar una persona de la clase, su altura:

- (a) sobrepase los 170 cm. (3 puntos)
 (b) sea menor que 155 cm. (3 puntos)
 (c) esté comprendida entre 155 cm y 170 cm (4 puntos)

X = Altura en cm de una persona. $X = N(160, 10)$

(a) Nos piden calcular $P(X > 170)$.

$$P(X > 170) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{170-160}{10}\right) = P(Z > 1) = \dots$$

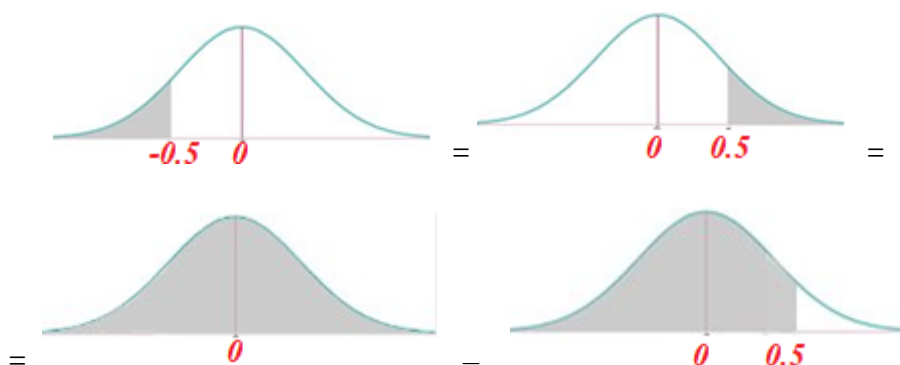


$$\dots = 1 - P(Z \leq 1) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

		0	
0.0	0.5000	0.5	
0.1	0.5398	0.6	
0.2	0.5793	0.7	
0.3	0.6179	0.8	
0.4	0.6554	0.9	
0.5	0.6915	1.0	
0.6	0.7257	1.1	
0.7	0.7580	1.2	
0.8	0.7881		
0.9	0.8159		
1.0	0.8413		
1.1	0.8643		
1.2	0.8849		

(b) Nos piden calcular $P(X < 155)$.

$$P(X < 155) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{155-160}{10}\right) = P(Z < -0.5) = \dots$$



$$\dots = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

	0	
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7

(c) Nos piden calcular $P(155 < X < 170)$.

$$\begin{aligned}
 P(155 < X < 170) &= P(X < 170) - P(X < 155) = 1 - P(X \geq 170) - P(X < 155) = \\
 &= \{\text{calculado en los apartados a) y b)}\} = 1 - 0.1587 - 0.3085 = \boxed{0.5328}
 \end{aligned}$$

PBAU Ordinaria 2021



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2021

Modelo 3

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

- (a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a . (6 puntos)
- (b) Determina para que valores de a la matriz A es invertible. (1 punto)
- (c) Para el valor de $a = -1$ calcula la solución, X , de la ecuación matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcula A^t , A^2 y A^{-1} , donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)
- (b) Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

- (c) Calcula todas las matrices B para las cuales se tiene que
- $$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ puntos})$$

3. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

- (a) Representala gráficamente. (7 puntos)
- (b) Comprueba que $f(2) = f(-2)$. (1 punto)
- (c) Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)
- (d) ¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle? (1 punto)

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 puntos)

(b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, y el eje X. (5 puntos)

5. Considera los puntos,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4)$$

(a) Determina el valor del parámetro a para el cual los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el punto B. (3 puntos)

(b) Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)

(c) Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)

6. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}.$$

(a) Calcula el valor de m tal que se cortan en un punto. (7 puntos)

(b) Calcula el punto de corte. (3 puntos)

7. Se dispone de dos urnas: U1 y U2.

En U1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.

En U2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.

Al azar se quita una bola de U1 y se introduce en U2, a continuación, se extrae al azar una bola de

U2. Calcula la probabilidad de que:

(a) salga una bola roja de U2. (3 puntos)

(b) la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra. (3 puntos)

(c) salga al menos una bola roja. (4 puntos)

8. Una compañía aérea observó que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación típica de 0,4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:

(a) pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)

(b) pese entre 7,8 kg y 8 kg. (3 puntos)

(c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg? (3 puntos)

SOLUCIONES

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a . (6 puntos)(b) Determina para que valores de a la matriz A es invertible. (1 punto)(c) Para el valor de $a = -1$ calcula la solución, X, de la ecuación matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

(a) El rango de la matriz A es 3 o menos. Para que sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^4 - a^2 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2(a^4 - 2a^2 + 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2(a^4 - 2a^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ 0 \\ a^4 - 2a^2 + 1 = 0 \rightarrow a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \\ \rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{cases}$$

Tenemos 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = 0$ La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues tiene una columna con todo ceros.

Su rango es 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 1ª tiene

$$\text{determinante no nulo} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $a = -1$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo. Su rango es 1, pues la 2ª y la 3ª fila son iguales y la 1ª y la 2ª son proporcionales. El rango de A es 1.

CASO 4. $a=1$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ su rango no es 3 pues su determinante es nulo. Su rango es 1, pues las tres filas son iguales. El rango de A es 1.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3, si $a = 0$ el rango de A es 2 y si $a = \pm 1$ el rango de A es 1.

(b) A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = \pm 1 \end{cases}$$

La matriz tiene inversa cuando $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$

(c) Para $a = -1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene inversa. Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2ª} = \text{Ecuación 3ª} \\ \text{Ecuación 1ª} = - \text{Ecuación 2ª} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{El sistema se reduce a una sola ecuación} \} \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t , A^2 i A^{-1} , donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)

(b) Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ puntos})$$

(c) Calcula todas las matrices B para las cuales se tiene que

$$A \cdot B = B \cdot A^t \quad (4 \text{ puntos})$$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+1 \\ 2+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Antes de calcular la inversa de A compruebo que su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Pasamos a calcular A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Despejamos la matriz X y luego realizamos las operaciones necesarias para obtener su expresión.

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -2AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - I - A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - I - A^2 \right] = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1+2 & -1+4 \\ 2-2 & 2-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(c) Para poder realizar los productos de la ecuación $A \cdot B = B \cdot A^t$ la matriz B debe ser de dimensión

$$2 \times 2 \rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y la convertimos en un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = 2a+b \\ 2a+c = c+d \\ 2b+d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=2a \\ 2a=d \\ 2b=2c \rightarrow b=c \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=2a \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

3. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

- (a) Representala gráficamente. (7 puntos)
 (b) Comprueba que $f(2) = f(-2)$. (1 punto)
 (c) Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)
 (d) ¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle? (1 punto)

(a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

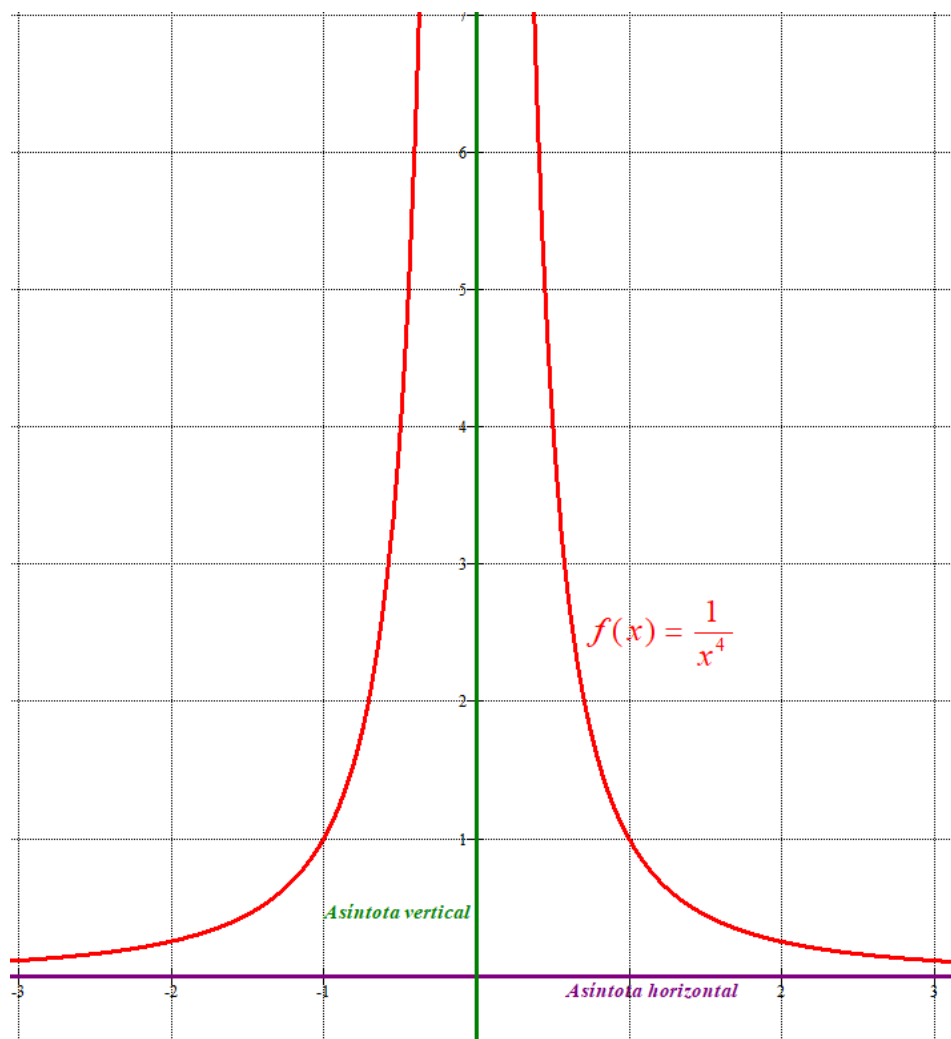
Asíntota horizontal: $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \frac{1}{x^4}$
-2	0.0625
-1	1
-0.5	16
0.5	16
1	1
2	0.0625



(b)

$$f(x) = \frac{1}{x^4} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = \frac{1}{2^4} = 0.0625 \\ f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = 0.0625 \end{cases} \Rightarrow f(2) = f(-2) = 0.0625$$

(c) Observando la gráfica se comprueba que la función no tiene ningún $c \in [-2, 2]$ donde la derivada se anule, pues eso implicaría que en dicho valor la función ni crece ni decrece.

Si calculamos su derivada $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$. Esta expresión no se anula nunca, aunque si que cambia de signo en el intervalo $[-2, 2]$.

En la gráfica de la función se aprecia que es creciente ($f'(x) > 0$) en $(-2, 0)$ y decreciente ($f'(x) < 0$) en $(0, 2)$.

(d) El teorema de Rolle dice que si una función $f(x)$ es CONTINUA en $[a, b]$ y DERIVABLE en (a, b) y además es $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero nuestra función $f(x) = \frac{1}{x^4}$ no es continua en $[-2, 2]$, pues es discontinua en $x = 0$, ni es derivable en $(-2, 2)$, pues no es derivable en $x = 0$. Por lo que no podemos aplicarle el teorema de Rolle y no existe ninguna contradicción.

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 puntos)(b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, y el eje X. (5 puntos)

$$(a) \quad F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{-x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln|4-x^2| + K, \text{ con } K \in \mathbb{R}$$

Estas es la expresión de todas las primitivas de $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$.

Una de ellas resulta tomando $K = 0 \rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \ln|4-x^2|$

(b) Vemos si la función corta el eje X.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{4-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

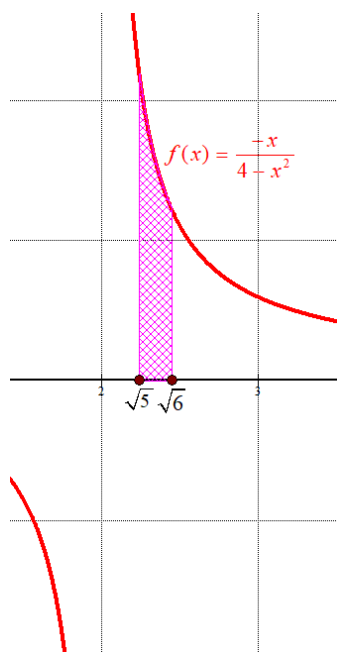
Pero $x = 0$ pertenece al intervalo $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ de la función $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$.

$$\text{Área} = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} f(x) dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|4-x^2| \right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|4-(\sqrt{6})^2| \right] - \left[\frac{1}{2} \ln|4-(\sqrt{5})^2| \right] = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 = \boxed{\frac{\ln 2}{2} \approx 0.34 \text{ u}^2}$$

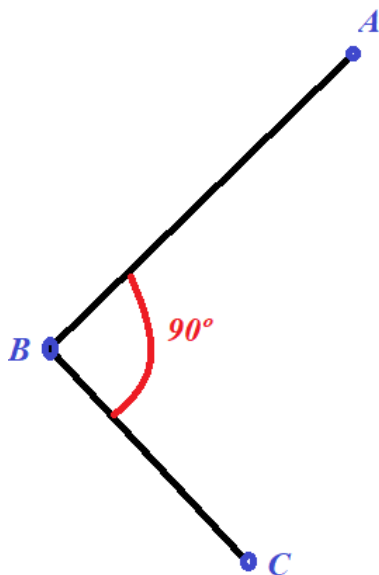
Lo comprobamos dibujando el recinto.



5. Considera los puntos,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4)$$

- (a) Determina el valor del parámetro a para el cual los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el punto B. (3 puntos)
- (b) Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
- (c) Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)



- (a) Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar sea cero.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (5, a, 7) - (3, -1, 7) = (2, a+1, 0) \\ \overrightarrow{BC} &= (6, 5, 4) - (3, -1, 7) = (3, 6, -3) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2, a+1, 0) \cdot (3, 6, -3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 6a + 6 = 0 \Rightarrow 6a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

- (b) Para $a = -2$ el punto A es $A = (5, -2, 7)$ y el triángulo es rectángulo en el vértice B.

El área del triángulo lo podemos hallar con el producto vectorial o hallando la longitud de la base y la de altura del triángulo.

Lo hacemos de esta última forma.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (2, -1, 0) \rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{BC} &= (3, 6, -3) \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{270}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{30}}{2} \approx 8.21 u^2}$$

(c) Para $a = 5$ el punto A es $A = (5, 5, 7)$

Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son:

$$\left. \begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (3, -1, 7) - (5, 5, 7) = (-2, -6, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (6, 5, 4) - (5, 5, 7) = (1, 0, -3)\end{aligned}\right\}$$

Aplicamos el producto escalar para determinar el ángulo entre ambos vectores.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow (-2, -6, 0)(1, 0, -3) = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 = \sqrt{40} \sqrt{10} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow -2 = 20 \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-2}{20} = -0.1 \Rightarrow \boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos(-0.1) \simeq 95^\circ}$$

6. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de m tal que se cortan en un punto.

(7 puntos)

(b) Calcula el punto de corte.

(3 puntos)

(a) Para que sean secantes las rectas deben tener distinta dirección y que el producto mixto de sus vectores directores y un vector que una un punto de una recta (r) con un punto de la otra recta (s) sea nulo.

Necesitamos un punto y el vector director de cada recta.

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(m, -10, -3) \\ \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=1 \\ y=6+4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(1, 6, -1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \end{cases}$$

¿Tienen r y s distinta dirección?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{-1}{0} = \frac{4}{4} = \frac{1}{2} \text{? ¡No son ciertas!}$$

Al no tener coordenadas proporcionales los vectores directores no tienen la misma dirección y las rectas no son paralelas.

¿Son secantes o se cruzan?

$$\left. \begin{array}{l} P_r(m, -10, -3) \\ P_s(1, 6, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r P_s} = (1, 6, -1) - (m, -10, -3) = (1-m, 16, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 4, 1) \\ \vec{v}_s = (0, 4, 2) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (1-m, 16, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 8 - 8m - 4 + 4m + 32 = -4m + 28$$

Para que sean secantes debe cumplirse que $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = 0$

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = 0 \Rightarrow -4m + 28 = 0 \Rightarrow m = \frac{-28}{-4} = 7$$

(b) El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones con $m=7$.

$$r: \frac{x-7}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 7 - \alpha \\ y = -10 + 4\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 - \alpha = 1 \\ -10 + 4\alpha = 6 + 4\lambda \\ -3 + \alpha = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 7 - 1 = 6} \\ -16 + 4\alpha = 4\lambda \\ -2 + \alpha = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 + 24 = 4\lambda \\ -2 + 6 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 4\lambda \\ 4 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 8 = 14 \\ z = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1, 14, 3)}$$

El punto de corte de las rectas r y s es $A(1, 14, 3)$

7. Se dispone de dos urnas: U1 y U2.

En U1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.

En U2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.

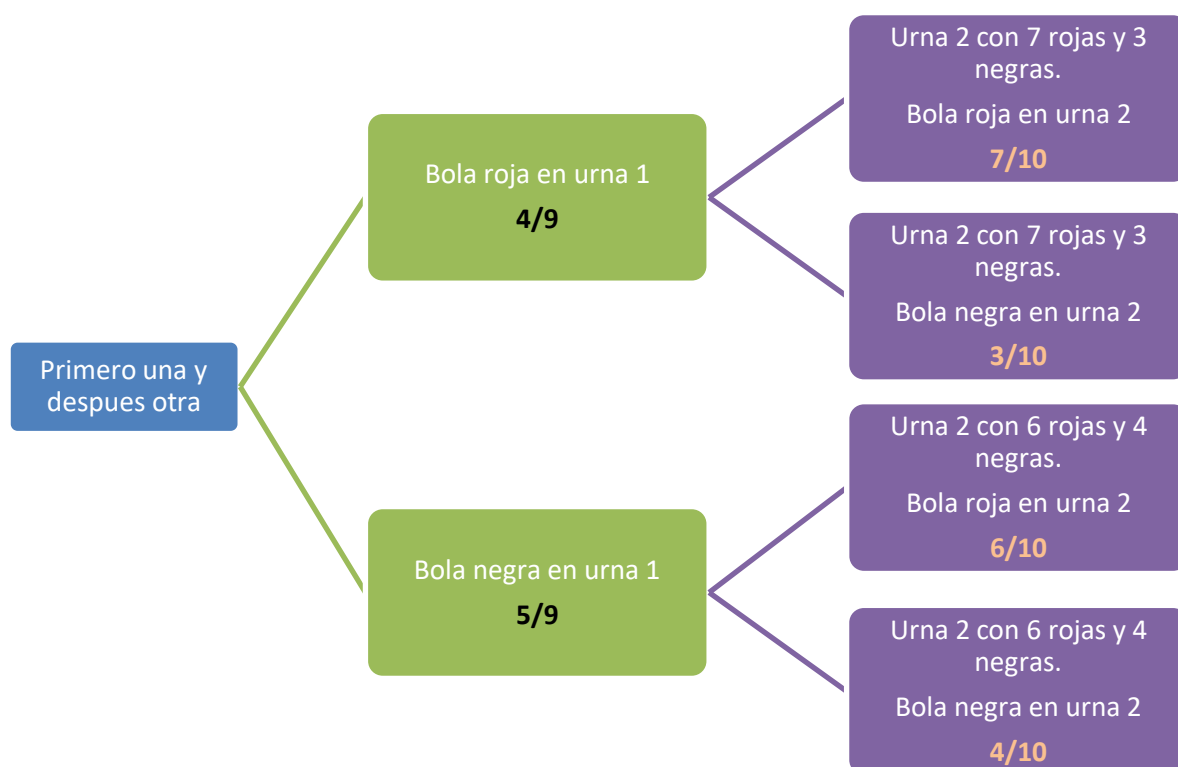
Al azar se quita una bola de U1 y se introduce en U2, a continuación, se extrae al azar una bola de U2. Calcula la probabilidad de que:

(a) salga una bola roja de U2. (3 puntos)

(b) la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra. (3 puntos)

(c) salga al menos una bola roja. (4 puntos)

Tras sacar la bola de la urna 1 al introducirla en la urna 2 esta pasa a tener 10 bolas, pero dependiendo que haya salido roja o negra en la extracción en la urna 1 tendremos en la urna 2 o una bola roja más o una negra. Lo reflejamos en el diagrama de árbol siguiente.



Damos nombre a los distintos sucesos de este experimento.

$R1$ = “Sacar roja en urna 1”, $N1$ = “Sacar negra en urna 1”

$R2$ = “Sacar roja en urna 2”, $N2$ = “Sacar negra en urna 2”

(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R2) = P(R1 \cap R2) + P(N1 \cap R2) = P(R1)P(R2/R1) + P(N1)P(R2/N1) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \boxed{\frac{58}{90} \approx 0.644}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{1 - P(R2)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}}{1 - \frac{58}{90}} = \boxed{\frac{5}{8} = 0.625}$$

(c) El suceso “Sacar al menos una bola roja en las dos extracciones sucesivas” es el suceso contrario a “Sacar las dos bolas negras en las dos extracciones”.

$$P(N1 \cap N2) = P(N1)P(N2/N1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{9}$$

La probabilidad de sacar al menos una bola roja es $1 - \frac{2}{9} = \boxed{\frac{7}{9} \approx 0.78}$

8. Una compañía aérea observó que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación típica de 0,4 kg. Calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:

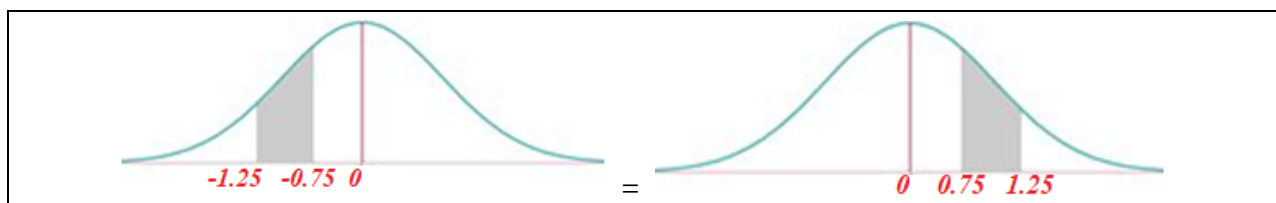
- (a) pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)
 (b) pese entre 7,8 kg y 8 kg. (3 puntos)
 (c) Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas es de esperar que pesen al menos 8,1 kg? (3 puntos)

X = Peso en kg de una maleta. $X = N(7.5, 0.4)$

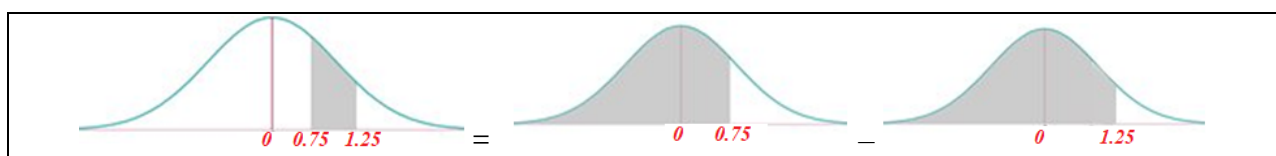
(a) Nos piden calcular $P(7 < X < 7.2)$.

$$P(7 < X < 7.2) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7-7.5}{0.4} < Z < \frac{7.2-7.5}{0.4}\right) =$$

$$= P(-1.25 < Z < -0.75) = P(0.75 < Z < 1.25) = \dots$$



$$\dots = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = \dots$$



$$\dots = \{\text{Mirando en la tabla } N(0,1)\} = 0.8944 - 0.7734 = \boxed{0.121}$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9

(b)

$$P(7.8 < X < 8) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{7.8-7.5}{0.4} < Z < \frac{8-7.5}{0.4}\right) =$$

$$= P(0.75 < Z < 1.25) = \{\text{hecho en apartado a)}\} = \boxed{0.121}$$

(c)

$$P(X > 8.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{8.1 - 7.5}{0.4}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$



Si una maleta tiene una probabilidad de 0.0668 de pesar más de 8.1 kg en un total de 90 maletas habrán $90 \cdot 0.0668 = 6.012$ maletas que cumplen lo mismo.

De las 90 maletas aproximadamente unas 6 maletas superarán el peso de 8.1 kg.

	0	1
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869
1.3	0.9032	0.9049
1.4	0.9192	0.9207
1.5	0.9332	0.9345
1.6	0.9452	0.9463

PBAU Extraordinaria 2020



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Modelo 3

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Dada la ecuación matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

donde X es la matriz incógnita y

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? (1 punto)
- (b) Calcula la matriz inversa de M. (3 puntos)
- (c) Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible. (3 puntos)
- (d) Para los valores de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. (3 puntos)

2. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

- (a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica. (1 punto)
- (c) Obtén los valores de A y B para los cuales (3 puntos)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

- (d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. (4 puntos)

3. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector posición y un vector director de cada una. (4 puntos)
- (b) Calcula la ecuación vectorial de cada una. (2 puntos)
- (c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores posición obtenidos. (2 puntos)
- (d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas. (2 puntos)

4. Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 roja; la tercera, 2 bolas rojas. Hagamos el experimento aleatorio "Elegimos una urna al azar y extraemos una bola"

Supone que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

- (a) Calcula la probabilidad del suceso $R = \text{"bola extraída roja"}$ (5 puntos)
- (b) Si la bola extraída resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la tercera? (5 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices A y B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la "t" indica matriz traspuesta. (4 puntos)
- (b) ¿es posible calcular B^2 ? Si lo es, calcúlala. (1 punto)
- (c) para los diferentes valores de x, calcula el rango de la matriz A. (5 puntos)

2. En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

donde la variable t , que es un número real mayor o igual que cero, medirá el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000 y $P(t)$ indica número de individuos, en millares, en el instante de tiempo t . Según el modelo, calcula:

- (a) La población que había el 1 de enero del año 2000 y la población que habrá al final del año 2020. (1 punto)
- (b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)
- (c) El año en el cual se alcanza una población mínima y cuantos individuos habrá. (4 puntos)
- (d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 puntos)

3. Dados los planos

$$(I) 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II) 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III) x + 3y - (a-1)z = 0;$$

- (a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a , no hay dos que sean paralelos. (4 puntos)
- (b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a . (6 puntos)

4. El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

- (a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con peso superior a 57 kg? (3 puntos)
- (b) ¿Cuál es el porcentaje de personas que pesan entre 50 y 57 kg? (4 puntos)
- (c) Si se escoge una persona al azar que está dentro del 70% de las personas que menos pesan, como máximo, ¿cuántos kilos habría de pesar? (3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la ecuación matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

donde X es la matriz incógnita y

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? (1 punto)
 (b) Calcula la matriz inversa de M. (3 puntos)
 (c) Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible. (3 puntos)
 (d) Para los valores de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. (3 puntos)

(a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz M.

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = 0 \Rightarrow -a(1+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1+a = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el determinante no es nulo y existe la matriz inversa de M.(b) Calculamos la inversa de M para $a \neq 0$ y $a \neq -1$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}}{-a - a^2} = \frac{-1}{a + a^2} \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Para $a = 2$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y su inversa $M^{-1} = \frac{1}{2+4} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

$$M \cdot X + N = P \Rightarrow M \cdot X = P - N \Rightarrow X = M^{-1}(P - N) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(d) Siendo $a \neq 0$ y $a \neq -1$

$$\begin{aligned} X = M^{-1}(P - N) &\Rightarrow X = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2} \begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{a(1+a)} (2a) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{1+a} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

(a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 puntos)

(b) Haz un esbozo de la gráfica. (1 punto)

(c) Obtén los valores de A y B para los cuales (3 puntos)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

(d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$. (4 puntos)

(a) El dominio de la función son todos los valores reales excepto los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

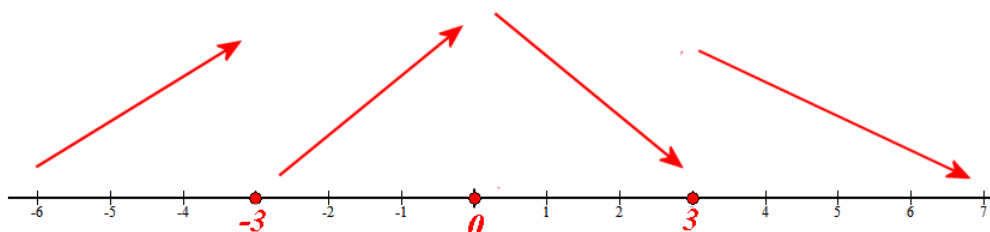
Para estudiar máximos, mínimos y como varía la función utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-9)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Vemos cómo evoluciona la función antes, entre y después de $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

- En $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{8}{((-4)^2-9)^2} = \frac{8}{49} > 0$. La función crece en $(-\infty, -3)$.
- En $(-3, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{2}{((-1)^2-9)^2} = \frac{2}{64} > 0$. La función crece en $(-3, 0)$.
- En $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2}{(1^2-9)^2} = \frac{-2}{64} < 0$. La función decrece en $(0, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-8}{(4^2-9)^2} = \frac{-8}{+} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.



La función crece en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ y decrece en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Presenta un máximo relativo en $x = 0$. $f(0) = \frac{1}{(0-3)(0+3)} = -\frac{1}{9}$.

El máximo relativo es el punto $M\left(0, -\frac{1}{9}\right)$

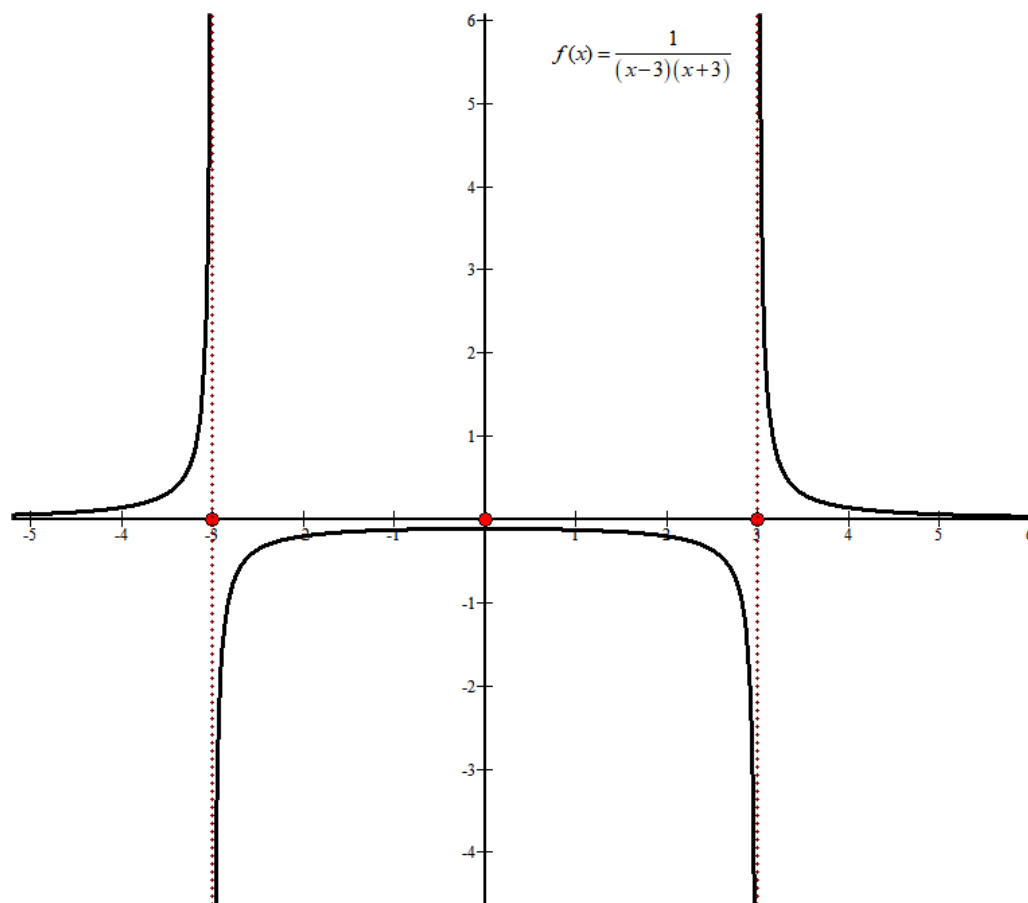
No presenta mínimos relativos, pues $x = -3$ y $x = 3$ no pertenecen al dominio de la función. Y serán posibles asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

(b) Añadimos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{1}{x^2 - 9}$
-10	0.01
-4	0.142
-2	-0.2
0	-0.1
2	-0.2
4	0.14



(c)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

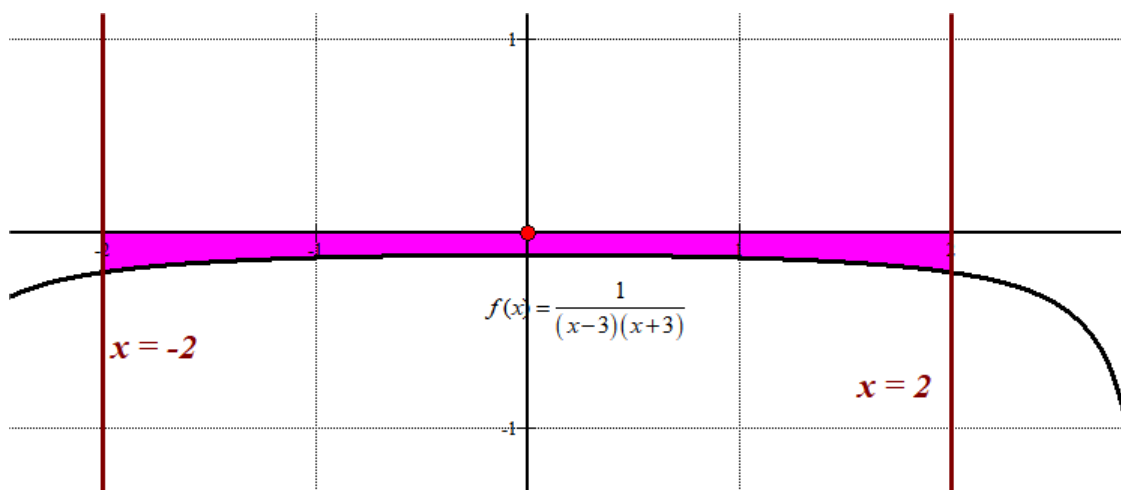
$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$x = -3 \rightarrow 1 = -6B \rightarrow B = -\frac{1}{6}$$

$$x = 3 \rightarrow 1 = 6A \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3}$$

(d) El área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de la función, pues toma valores negativos en este intervalo.



El área toma un valor pequeño como se observa en el dibujo superior.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 \frac{1}{(x-3)(x+3)} dx = \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3} dx = \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x-3} dx - \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x+3} dx = \\ &= \left[\frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| \right]_{-2}^2 = \left[\frac{1}{6} \ln|2-3| - \frac{1}{6} \ln|2+3| \right] - \left[\frac{1}{6} \ln|-2-3| - \frac{1}{6} \ln|-2+3| \right] = \\ &= \left[\frac{1}{6} \ln 1 - \frac{1}{6} \ln 5 \right] - \left[\frac{1}{6} \ln 5 - \frac{1}{6} \ln 1 \right] = -\frac{2}{6} \ln 5 = -\frac{1}{3} \ln 5 \approx -0.36 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{1}{3} \ln 5 = 0.36$ unidades cuadradas.

3. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector posición y un vector director de cada una. (4 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial de cada una. (2 puntos)
 (c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores posición obtenidos. (2 puntos)
 (d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas. (2 puntos)

(a) Calculamos los vectores directores realizando el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen las rectas.

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_I = (15, 12, -14) \times (8, -1, -5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 12 & -14 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -60i - 112j - 15k - 96k + 75j - 14i = -74i - 37j - 111k = (-74, -37, -111)$$

$$\vec{v}_I = (-74, -37, -111) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido las coordenadas entre } -37 \\ \text{y obtenemos un vector director con} \\ \text{coordenadas más manejables.} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_I = (2, 1, 3)$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{II} = (9, 5, -2) \times (24, -2, -13) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 5 & -2 \\ 24 & -2 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -65i - 48j - 18k - 120k + 117j - 4i = -69i + 69j - 138k$$

$$\vec{v}_{II} = (-69, 69, -138) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido las coordenadas entre } -69 \\ \text{y obtenemos un vector director con} \\ \text{coordenadas más manejables.} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_{II} = (1, -1, 2)$$

Obtenemos un punto de cada recta dando un valor concreto a la incógnita z.

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 8x - y = 23 + 5z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14z \\ 96x - 12y = 276 + 60z \end{cases}$$

$$\frac{111x}{111x} = \frac{259 + 74z}{111x} \Rightarrow 3x = 7 + 2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{7 + 2z}{3} \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{3} = 3} \Rightarrow 24 - y - 5 = 23 \Rightarrow 24 - 23 - 5 = y \Rightarrow \boxed{y = -4}$$

$$(II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 5 + 2z \\ 24x - 2y = 67 + 13z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x + 10y = 10 + 4z \\ 120x - 10y = 335 + 65z \end{cases}$$

$$\frac{138x}{138x} = \frac{345 + 69z}{138x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 5 + z \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{5+z}{2} \\ z = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{0}{3} = 0} \Rightarrow 0 - 2y + 65 = 67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 - 67 = 2y \Rightarrow -2 = 2y \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

Los vectores y los puntos de cada recta son $\vec{u}_I = (2, 1, 3)$; $\vec{u}_{II} = (1, -1, 2)$; $P_I(3, -4, 1)$; $P_{II}(0, -1, -5)$

(b)

$$(I) \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -5 + 2\alpha \end{cases}$$

(c)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_I = (2, 1, 3) \\ \vec{u}_{II} = (1, -1, 2) \\ \overrightarrow{P_I P_{II}} = (0, -1, -5) - (3, -4, 1) = (-3, 3, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Esta matriz tiene rango 3?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 9 - 9 + 6 - 12 = 0$$

No tiene rango 3. ¿Tiene rango 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con

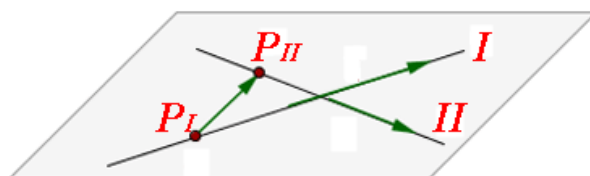
$$\text{determinante} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0.$$

El rango de la matriz es 2.

(d) Al ser 2 el rango de la matriz de los vectores directores de las rectas y el del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra se deduce que las rectas están en un mismo plano. Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_I = (2, 1, 3) \\ \vec{u}_{II} = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{2}$$

por lo que no son paralelas y entonces deben cortarse en un punto. Las rectas son secantes.



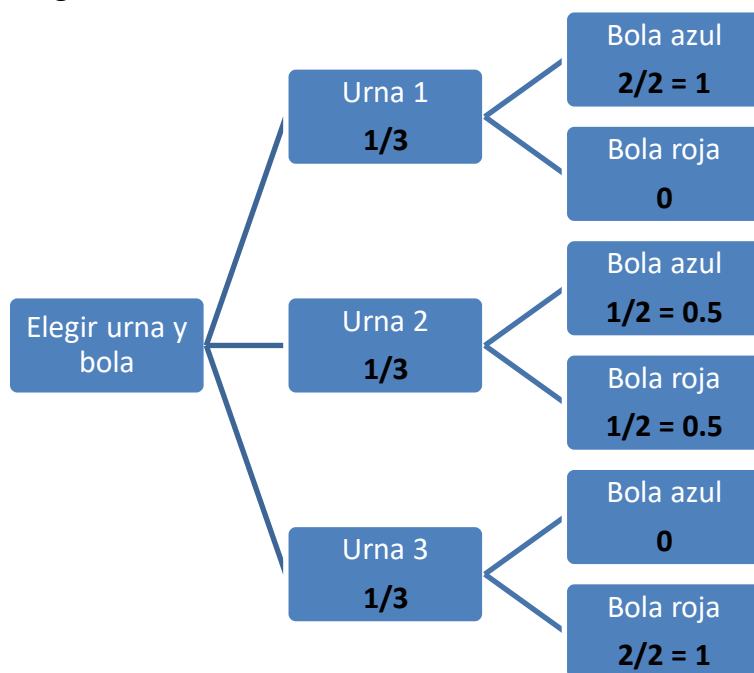
4. Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 roja; la tercera, 2 bolas rojas. Hagamos el experimento aleatorio "Elegimos una urna al azar y extraemos una bola"

Supone que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser escogidas.

- (a) Calcula la probabilidad del suceso $R = \text{"bola extraída roja"}$ (5 puntos)
 (b) Si la bola extraída resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la urna escogida haya sido la tercera? (5 puntos)

Si tenemos la misma probabilidad de elegir a cualquiera de las urnas, la probabilidad de elegir la urna es $1/3$.

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Este suceso se cumple en tres ramas del árbol con las probabilidades que ahora sumamos.

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(\text{Elegir urna 1})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 1}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna 2})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 2}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna 3})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna 3}) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1.5}{3} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haber elegido urna 3}^a / \text{Hemos sacado bola roja}) =$$

$$= \frac{P(\text{Haber elegido urna 3}^a \cap \text{Hemos sacado bola roja})}{P(\text{Sacar bola roja})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{0.5} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.66}$$

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices A y B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la “t” indica matriz traspuesta. (4 puntos)
 (b) ¿es posible calcular B^2 ? Si lo es, calcúlala. (1 punto)
 (c) para los diferentes valores de x , calcula el rango de la matriz A. (5 puntos)

(a)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+x & 4+3+0 \\ 4+0+8 & 8+6+0 \\ 6+0+12 & 12+9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+x & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ? \text{ Es posible?}$$

$\xrightarrow{3 \times \boxed{2} \cdot \boxed{3} \times 2}$ **¡No es posible!**

Para que una matriz se pueda multiplicar por ella misma debe de tener el mismo número de filas que de columnas (debe ser cuadrada).

(c) La matriz A es de dimensión 3×3 . Su rango es 3 o menor.

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 144 + 144 + 36x - 36x - 144 - 144 = 0$$

El determinante siempre es 0 y el rango de A nunca es 3, independientemente del valor de “x”.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª (es proporcional a la 2ª) y

columna 1ª (es proporcional a la 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6x = 0 \Rightarrow x = 4$.

Este menor tiene determinante nulo cuando $x = 4$.Cuando $x = 4$ el rango de A es 1.Cuando $x \neq 4$ el determinante del menor anterior es no nulo y el rango de A es 2.

2. En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

donde la variable t , que es un número real mayor o igual que cero, medirá el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000 y $P(t)$ indica número de individuos, en millares, en el instante de tiempo t . Según el modelo, calcula:

- (a) La población que había el 1 de enero del año 2000 y la población que habrá al final del año 2020. (1 punto)
 (b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo. (3 puntos)
 (c) El año en el cual se alcanza una población mínima y cuantos individuos habrá. (4 puntos)
 (d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 puntos)

(a) Nos piden el valor de $P(0)$ y el valor de $P(20)$.

$P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$. Significa que había 1000 peces al inicio del año 2000.

$P(20) = \sqrt{20+1} - \sqrt{20} = 0,1104$. Significa que había 110 peces a final del año 2020.

(b) A largo plazo es determinar el límite de la función $P(t)$ cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})}{(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t+1})^2 - (\sqrt{t})^2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1-t}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{+\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

La población de peces tiende a ser cero. Tiende a desaparecer.

(c) Utilizamos la derivada de la función para hallar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}} \\ P'(t) &= 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}} = 0 \Rightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{t+1} \Rightarrow (\sqrt{t})^2 = (\sqrt{t+1})^2 \Rightarrow t = t+1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ No es posible.} \end{aligned}$$

No hay ningún punto crítico y por tanto no hay máximo ni mínimo relativo de la función.

Vemos el signo de la derivada en un punto cualquiera y la derivada tendrá el mismo signo en

cualquier otro punto. $t = 9 \rightarrow P'(9) = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{9+1}}{2\sqrt{9^2+9}} = -0,08 < 0$.

Esta función siempre es decreciente, empezando con 1000 peces y decreciendo su número hasta acabar en 0 peces.

(d) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

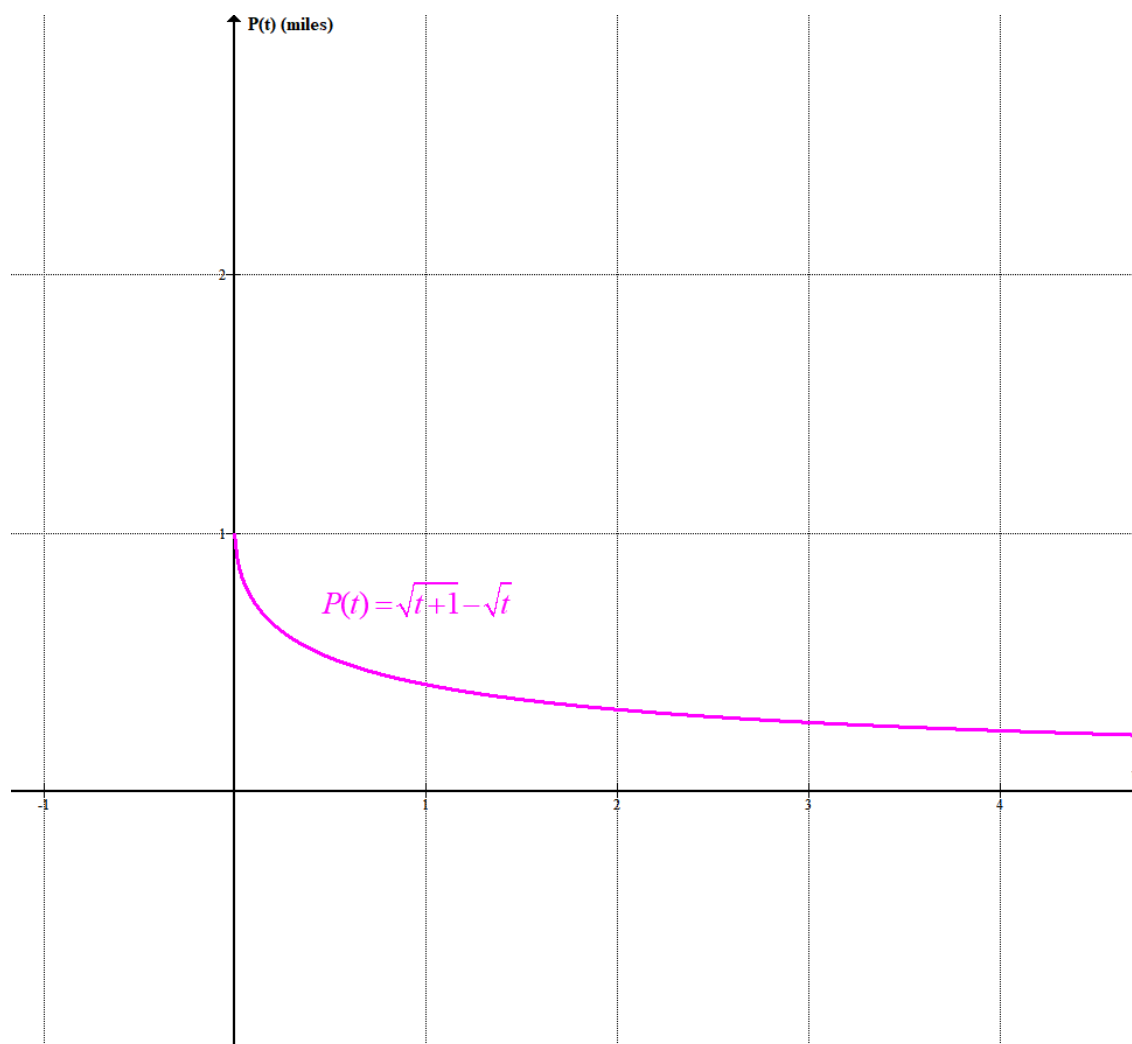
Dominio = $[0, +\infty)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$$

No tiene máximos ni mínimos relativos.

La función siempre decrece.

t	$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$
0	1
1	$\sqrt{2} - 1 = 0.414$
3	$2 - \sqrt{3} = 0.268$
8	$3 - \sqrt{8} = 0.171$
99	$10 - \sqrt{99} = 0.05$



3. Dados los planos

$$(I) \ 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II) \ 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III) \ x + 3y - (a-1)z = 0;$$

(a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a , no hay dos que sean paralelos. (4 puntos)

(b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a . (6 puntos)

(a) Para que sean paralelos deben tener los vectores normales con coordenadas proporcionales y por tanto, tener la misma dirección.

$$\left. \begin{aligned} (I) &\equiv 3x - ay + 2z - (a-1) = 0 \Rightarrow \vec{n}_I = (3, -a, 2) \\ (II) &\equiv 2x - 5y + 3z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{II} = (2, -5, 3) \\ (III) &\equiv x + 3y - (a-1)z = 0 \Rightarrow \vec{n}_{III} = (1, 3, -a+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{¿I / II?} \Rightarrow \text{¿} \frac{3}{2} = \frac{-a}{-5} = \frac{2}{3} \text{?} \rightarrow \text{¿} \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \text{?} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\text{¿II / III?} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3} = \frac{3}{-a+1} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\text{¿I / III?} \Rightarrow \text{¿} \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} = \frac{2}{-a+1} \text{?} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} &\rightarrow 9 = -a \\ \frac{3}{1} = \frac{2}{-a+1} &\rightarrow -3a + 3 = 2 \rightarrow a = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Los planos nunca pueden ser paralelos entre si, pues plano (I) no es paralelo a (II), el plano (II) nunca es paralelo a (III) y tampoco es paralelo el (I) con el (III).

(b) Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{aligned} 3x - ay + 2z - (a-1) &= 0 \\ 2x - 5y + 3z - 1 &= 0 \\ x + 3y - (a-1)z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x - ay + 2z &= a-1 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \\ x + 3y - (a-1)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

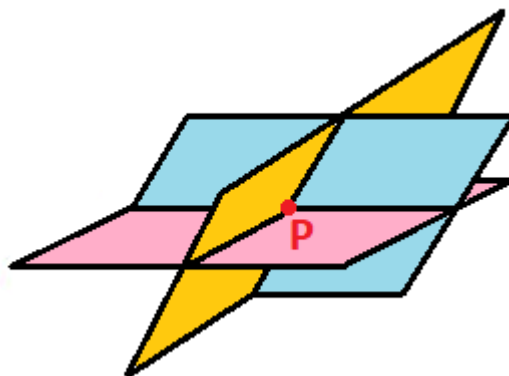
$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{vmatrix} = 15a - 15 - 3a + 12 + 10 - 2a^2 + 2a - 27 = -2a^2 + 14a - 20$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 14a - 20 = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = a \\ \frac{7-3}{2} = 2 = a \end{cases}$$

Primer caso. $a \neq 2$ y $a \neq 5$.

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el rango es 3, al igual que el rango de la ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado. Tiene una solución única. Esta solución única son las coordenadas de un punto P donde coinciden los tres planos.

**Segundo caso.** $a = 2$.

En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 4 = -11 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿Tiene rango 3?}$$

$$\text{Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 5 - 9 - 0 - 2 = 0.$$

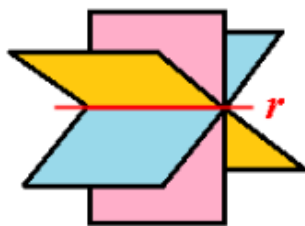
El rango de A/B no es 3, por lo que es igual al rango de A, que es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son la recta en la que coinciden los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 3ª = Ecuación 1ª} \\ \text{Quitamos la ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Coinciden en la recta de ecuación } r: \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right\}$$



Tercer caso. $a = 5$.

En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna } 3^a \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ ¿Tiene rango 3?}$$

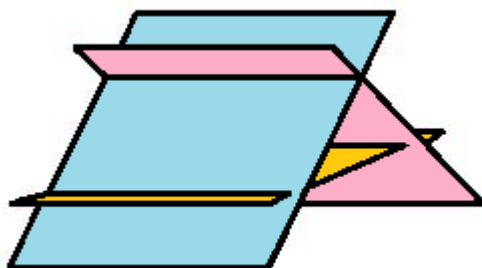
$$\text{Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna } 1^a \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 80 - 36 - 0 - 20 = 30 \neq 0.$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible. No tiene solución. Como entre ellos dos a dos no son paralelos la situación debe ser la del dibujo, definen rectas paralelas dos a dos.



4. El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

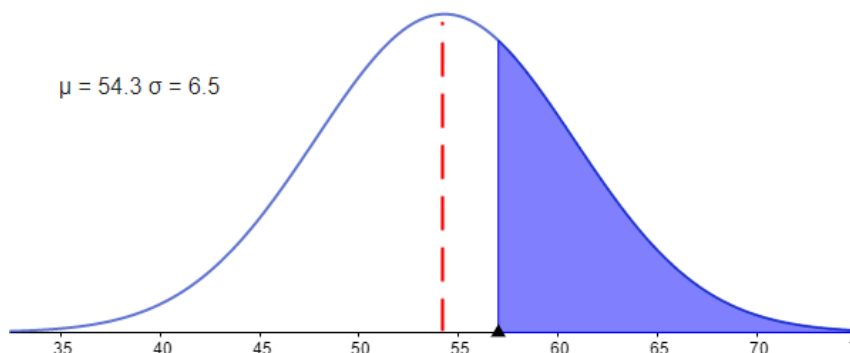
- (a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con peso superior a 57 kg? (3 puntos)
 (b) ¿Cuál es el porcentaje de personas que pesan entre 50 y 57 kg? (4 puntos)
 (c) Si se escoge una persona al azar que está dentro del 70% de las personas que menos pesan, como máximo, ¿cuántos kilos habría de pesar? (3 puntos)

X = Peso de una persona en kg. $X = N(54.3, 6.5)$

(a) Calculamos $P(X > 57)$

$$P(X > 57) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{57 - 54.3}{6.5}\right) = P(Z > 0.415) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.415) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - \frac{0.6591 + 0.6628}{2} = 1 - 0.66095 = \boxed{0.33905}$$



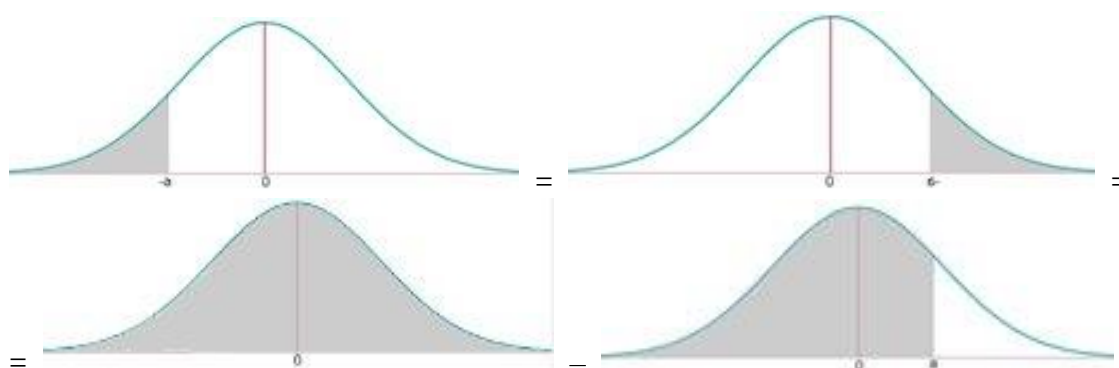
(b) Calculamos $P(50 < X < 57)$.

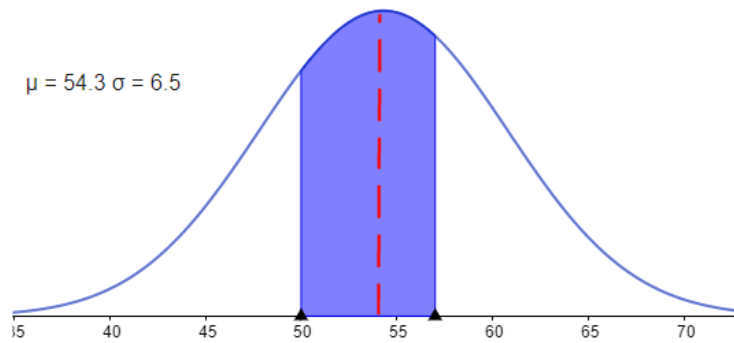
$$P(50 < X < 57) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{50 - 54.3}{6.5} < Z < \frac{57 - 54.3}{6.5}\right) =$$

$$= P(-0.66 < Z < 0.415) = P(Z \leq 0.415) - P(Z \leq -0.66) =$$

$$= P(Z \leq 0.415) - P(Z \geq 0.66) = P(Z \leq 0.415) - (1 - P(Z \leq 0.66)) =$$

$$= 0.66095 - 1 + 0.7454 = \boxed{0.40635}$$





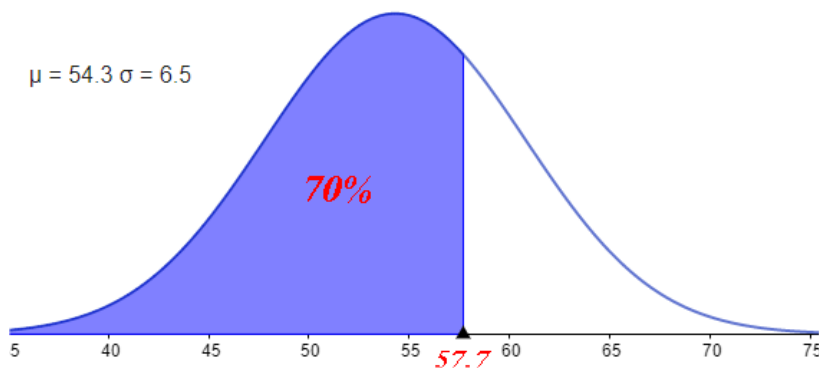
(c) Averiguamos el peso “a” tal que $P(X \leq a) = 0.7$.

$$P(X \leq a) = 0.7 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 54.3}{6.5}\right) = 0.7$$

Buscamos en la tabla $N(0, 1)$ esta probabilidad 0.7

$$\frac{0.52 + 0.53}{2} = \frac{a - 54.3}{6.5} \Rightarrow 0.525 \cdot 6.5 = a - 54.3 \Rightarrow \boxed{a = 57.7125}$$

Debe pesar como mucho 57.7 kilos.



PBAU Ordinaria 2020



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las dos opciones, A y B, propuestas.

Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autoriza el uso de las que puedan almacenar o transmitir información.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1+a)y + az = a + 1, \end{cases}$$

determina el parámetro a , y resuelva siempre que se pueda, de manera que el sistema:

- (a) tenga solución única, (4 puntos)
- (b) tenga infinitas soluciones, (4 puntos)
- (c) no tenga solución. (2 puntos)

2. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

- (a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito. (4 puntos)
- (c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta $y = 2$. (4 puntos)

3. Considera el punto $P = (2, -1, 1)$ y la recta r dada por

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} (r)$$

- (a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r . (2 puntos)
- (b) Calcula la ecuación del plano, π , perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . (2 puntos)
- (c) Calcula el punto, Q , de intersección del plano π con la recta r . (3 puntos)
- (d) De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r . (3 puntos)

4. El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0,75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar una bacteria:

- (a) su número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas. (4 puntos)
- (b) su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas. (4 puntos)

De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B. (2 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Una empresa tiene tres mineas: A, B y C, i en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) e hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

- (a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
- (b) Clasifica el sistema. (2 puntos)
- (c) Resuelve el sistema. (4 puntos)

2. Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

- (a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
- (b) Calcula una primitiva cualquiera de $f(x)$. (4 puntos)
- (c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (3 puntos)

3. Dada la recta r y el plano π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

Busca si existe algún valor del parámetro m para el cual

- (a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)
 - (b) o bien, el plano contiene la recta. (3 puntos)
 - (c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)
- En cada caso, si existe, calcúlalo.

4. Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea (E) y la fábrica asiática (A). El 1% de las impresoras de la fábrica E y el 3% de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80%, mientras que el resto procede de la fábrica A.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de este país tenga el defecto? (4 puntos)
- (b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán el defecto? (2 puntos)
- (c) Si se elige al azar una impresora de ese país y resulta ser una impresora defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1+a)y + az = a + 1, \end{cases}$$

determina el parámetro a , y resuelva siempre que se pueda, de manera que el sistema:

- (a) tenga solución única, (4 puntos)
 (b) tenga infinitas soluciones, (4 puntos)
 (c) no tenga solución. (2 puntos)

Discutimos el sistema y luego respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 - a = -a^2 - a$$

Vemos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - a = 0 \Rightarrow -a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones distintas.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a = 0$.

El determinante de A es 0 y su rango no es 3. Pero no lo vamos a discutir por rangos, dado que al sustituir el valor de $a = 0$ el sistema es muy sencillo de resolver.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \\ x + y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quito ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 0, \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Sus soluciones son $\boxed{x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = 0 \quad t \in \mathbb{R}}$

CASO 3. $a = -1$.

El sistema queda con unas ecuaciones muy sencillas de resolver. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -x + z = 0, \\ x - z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = - \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quitamos ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ -x + z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = x \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Las soluciones son $\boxed{x = t; \quad y = 1 - t; \quad z = t \quad t \in \mathbb{R}}$

(a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 - a = -a^2 - a \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 - a}{-a^2 - a} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0$$

La solución es $\boxed{x = 0; \quad y = 1; \quad z = 0}$

(b) Para $a = 0$ y $a = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Resuelto en la discusión del sistema.

Las soluciones para $a = 0$ son $\boxed{x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = 0 \quad t \in \mathbb{R}}$.

Para $a = -1$ las soluciones son $\boxed{x = t; \quad y = 1 - t; \quad z = t \quad t \in \mathbb{R}}$.

(c) Para ningún valor de a el sistema no tiene solución.

2. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

- (a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. (2 puntos)
- (b) Haz un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito. (4 puntos)
- (c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta $y = 2$. (4 puntos)

(a) Calculamos el valor de la función y la derivada de la función en $x = -1$ y sustituimos en la fórmula de la ecuación de la recta tangente en $x = a \rightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2 \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

(b) Puntos de corte con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 - 0 = 0$$

Un punto de corte es $O(0, 0)$.

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Otros dos puntos de corte con los ejes son $P(-\sqrt{3}, 0)$ y $Q(\sqrt{3}, 0)$

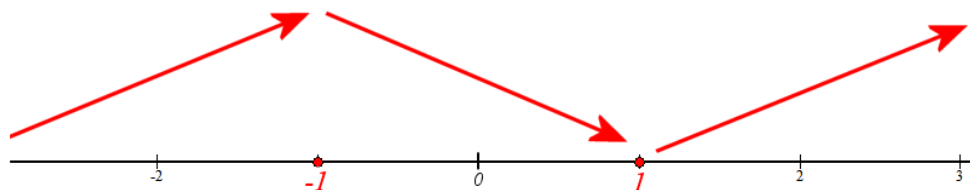
Extremos relativos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los tres puntos críticos encontrados.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, +1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, +1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



La función presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

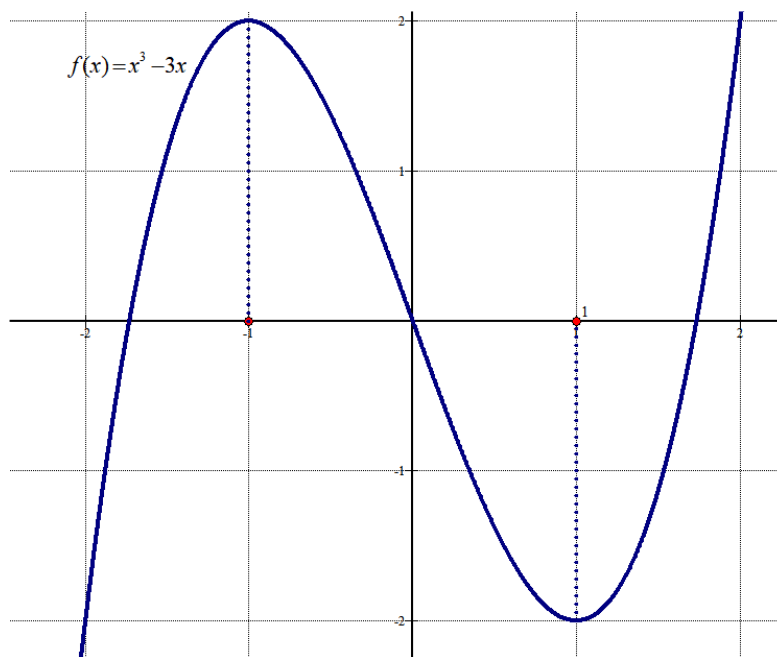
Comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = +\infty$$

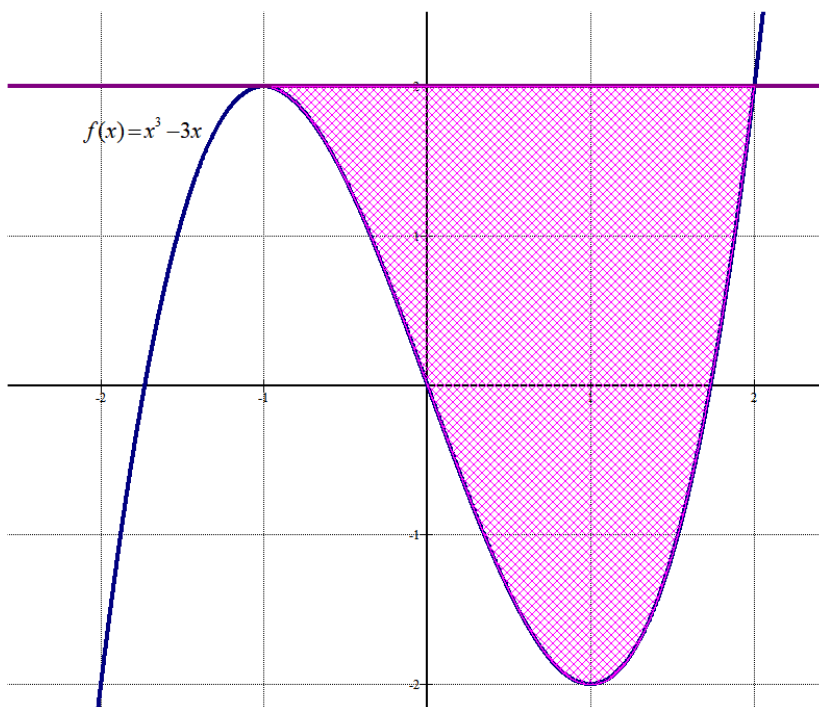
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty$$

Añadimos una tabla de valores.

x	$y = f(x) = x^3 - 3x$
$-\sqrt{3}$	0
-1	2 <i>máximo</i>
0	0
1	-2 <i>mínimo</i>
$\sqrt{3}$	0



- (c) Si al dibujo de la gráfica le añadimos el de la recta horizontal $y = 2$ determinamos el recinto del cual nos piden calcular su área.



Aunque en la gráfica se observa que se cortan en $x = -1$ y en $x = 2$ hallamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - 3x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \boxed{x = -1} \text{ es raíz}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2 = x} & \text{es raíz} \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Contando los cuadrados rayados del dibujo el área tiene un valor entre 6 y 7 u².
Hallamos su valor exacto con el uso de la integral definida entre -1 y 2 de $y = 2$ menos $y = f(x) = x^3 - 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^2 2 - (x^3 - 3x) dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \\ &= \left[4 - \frac{16}{4} + 3\frac{4}{2} \right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^4}{4} + 3\frac{(-1)^2}{2} \right] = \\ &= 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} = \boxed{6.75 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

3. Considera el punto $P = (2, -1, 1)$ y la recta r dada por

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} (r)$$

- (a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r . (2 puntos)
 (b) Calcula la ecuación del plano, π , perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . (2 puntos)
 (c) Calcula el punto, Q , de intersección del plano π con la recta r . (3 puntos)
 (d) De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r . (3 puntos)

(a) Hallamos el vector director de la recta r como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano que define la recta.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (2, -3, 4) \\ \vec{n}' = (1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 9i + 4j + 4k + 3k + 6j - 8i = i + 10j + 7k = (1, 10, 7) \end{aligned}$$

Hallamos un punto de la recta, resolviendo el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x = -2y + 3z + 2 \end{cases} \Rightarrow 2(-2y + 3z + 2) - 3y + 4z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y + 6z + 4 - 3y + 4z - 1 = 0 \Rightarrow -7y + 10z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-3 + 7y}{10}}$$

$$\text{Tomamos } \boxed{y = -1} \Rightarrow \boxed{z = \frac{-3 - 7}{10} = -1} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 3 + 2 = 1} \quad \boxed{P_r(1, -1, -1)}$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 10, 7) \\ P_r(1, -1, -1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{10} = \frac{z+1}{7}}$$

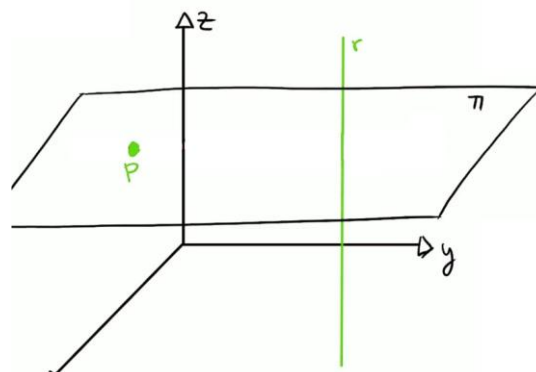
(b) Si el plano π es perpendicular a la recta r entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 10, 7) \\ P = (2, -1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x + 10y + 7z + D = 0 \\ P = (2, -1, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 10 + 7 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$.



(c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

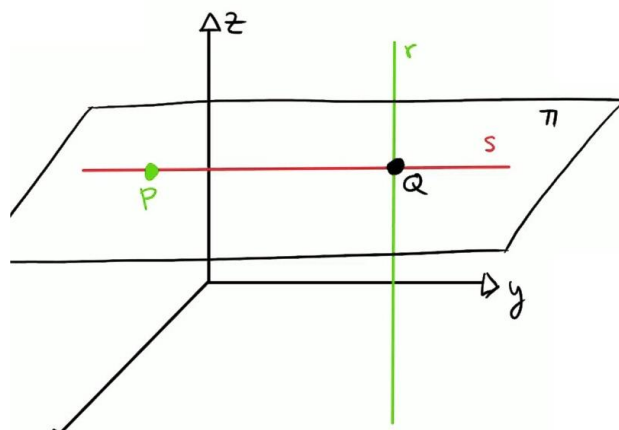
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \pi \equiv x+10y+7z+1=0 \\ 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0 \end{aligned} \right\} (r) \Rightarrow \left. \begin{aligned} x+10y+7z &= -1 \\ 2x-3y+4z &= 1 \\ x+2y-3z &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} & & \\ x & +2y & -3z = 2 \\ -x & -10y & -7z = 1 \\ \hline & -8y & -10z = 3 \end{array} \right\} \\
 & \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} & & \\ 2x & -3y & +4z = 1 \\ -2x & -20y & -14z = 2 \\ \hline & -23y & -10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+10y+7z = -1 \\ -23y-10z = 3 \\ -8y-10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} & & \\ -8y & -10z & = 3 \\ 23y & +10z & = -3 \\ \hline 15y & & = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+10y+7z = -1 \\ -23y-10z = 3 \\ 15y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+10y+7z = -1 \\ -23y-10z = 3 \\ \boxed{y=0} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+7z = -1 \\ -10z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+7z = -1 \\ \boxed{z = \frac{3}{-10}} \end{array} \right\} \Rightarrow x - \frac{21}{10} = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1 + \frac{21}{10} = \frac{11}{10}}
 \end{aligned}$$

El punto de corte tiene coordenadas $Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$

(d) La recta s perpendicular a r está contenida en el plano π . Por lo que la recta s pasa por Q punto de corte de recta y plano. Así la ecuación de la recta pedida es la ecuación de la recta que pasa por P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right) - (2, -1, 1) = \left(\frac{-9}{10}, 1, \frac{-13}{10}\right) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = 10\vec{v} = (-9, 10, -13) \\ P(2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 9\lambda \\ s \equiv y = -1 + 10\lambda \\ z = 1 - 13\lambda \end{array} \right\}$$



4. El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0,75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar una bacteria:

(a) su número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas. (4 puntos)

(b) su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas. (4 puntos)

De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B. (2 puntos)

X = Número de horas de vida de una bacteria tipo A. $X = N(110, 0.75)$

(a) Nos piden calcular $P(X > 112.25)$.

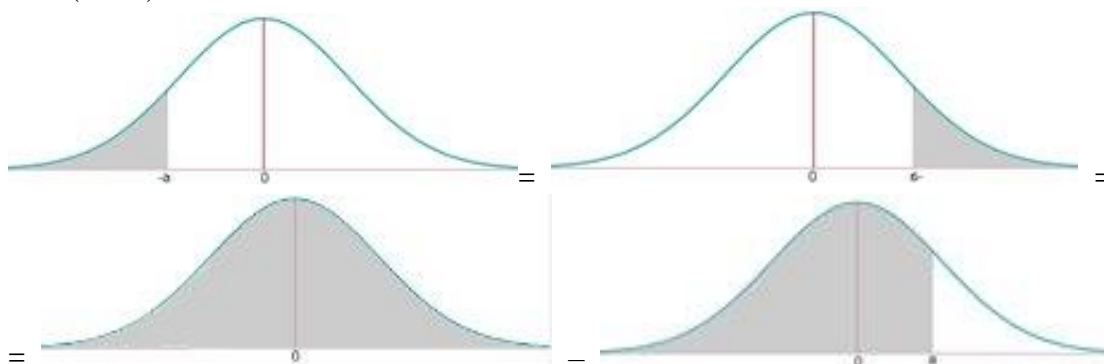
$$P(X > 112.25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{112.25 - 110}{0.75}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

(b) Nos piden calcular $P(X < 109.25)$.

$$P(X < 109.25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{109.25 - 110}{0.75}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$



La nueva distribución es Y = Número de horas de vida de una bacteria tipo B. $Y = N(110, \sigma)$. Sabemos que $P(Y > 125) = 0.1587$. Determinamos el valor de la desviación típica σ .

$$P(Y > 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{125 - 110}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miro en la tabla } N(0,1)\} \Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 15}$$

OPCIÓN B

1. Una empresa tiene tres minas: A, B y C, i en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) e hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

- (a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
- (b) Clasifica el sistema. (2 puntos)
- (c) Resuelve el sistema. (4 puntos)

- (a) Llamamos “x” a las toneladas de mineral extraído de la mina A, “y” a las toneladas de mineral extraído de la mina B y “z” a las toneladas de mineral extraído de la mina C. Hacemos una tabla con los datos.

	Níquel	Cobre	Hierro
Mina A (x)	0,01x	0,02x	0,03x
Mina B (y)	0,02y	0,05y	0,07y
Mina C (z)	0,01z	0,03z	0,01z
TOTALES	0,01x + 0,02y + 0,01z	0,02x + 0,05y + 0,03z	0,03x + 0,07y + 0,01z

Como hay que obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro el sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} 0,01x + 0,02y + 0,01z = 7 \\ 0,02x + 0,05y + 0,03z = 18 \\ 0,03x + 0,07y + 0,01z = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{array} \right\}$$

- (b) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 18 + 14 - 15 - 4 - 21 = 37 - 40 = -3 \neq 0.$$

El rango de la matriz $A = 3 = \text{Rango de } A/B = \text{número de incógnitas}.$

El sistema tiene una única solución.

- (c) Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 700 \\ 2 & 5 & 3 & 1800 \\ 3 & 7 & 1 & 1600 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 700 & 2 & 1 \\ 1800 & 5 & 3 \\ 1600 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3500 + 9600 + 12600 - 8000 - 3600 - 14700}{-3} = \frac{-600}{-3} = 200$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 700 & 1 \\ 2 & 1800 & 3 \\ 3 & 1600 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1800 + 6300 + 3200 - 5400 - 1400 - 4800}{-3} = \frac{-300}{-3} = 100$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 700 \\ 2 & 5 & 1800 \\ 3 & 7 & 1600 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8000 + 10800 + 9800 - 10500 - 6400 - 12600}{-3} = \frac{-900}{-3} = 300$$

Debe extraer 200 toneladas de mineral de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.

2. Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

- (a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)
 (b) Calcula una primitiva cualquiera de $f(x)$. (4 puntos)
 (c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (3 puntos)

(a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento utilizamos la derivada.

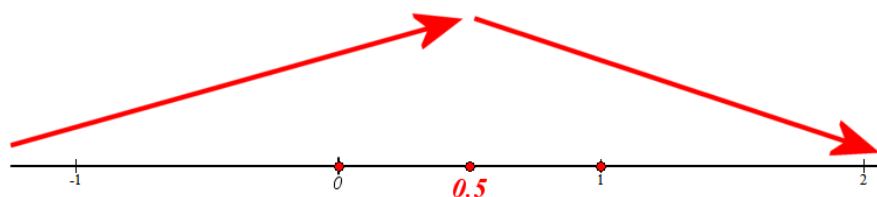
$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 3(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{-6x + 3}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x + 3}{(x^2 - x)^2} = 0 \Rightarrow -6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = 0.5$$

Tenemos a $x = 0.5$ como punto crítico, además tenemos $x = 0$ y $x = 1$ como excluidos del dominio. La recta real se divide en cuatro zonas. Vamos comprobando la monotonía en cada zona.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{9}{(1+1)^2} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 0.5)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale $f'(0.25) = \frac{-1.5 + 3}{(1+1)^2} > 0$. La función crece en $(0, 0.5)$.
- En $(0.5, 1)$ tomamos $x = 0.75$ y la derivada vale $f'(0.75) = \frac{-4.5 + 3}{(1+1)^2} < 0$. La función decrece en $(0.5, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-12 + 3}{(2^2 - 2)^2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (0, 0.5)$ y decrece en $(0.5, 1) \cup (1, +\infty)$



(b) Calculamos la integral indefinida de la función usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{3}{x^2 - x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{3}{x^2 - x} = \frac{3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow 3 = A(x-1) + Bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 3 = -A \rightarrow A = -3 \\ x=1 \rightarrow 3 = B \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{x^2 - x} = \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1}$$

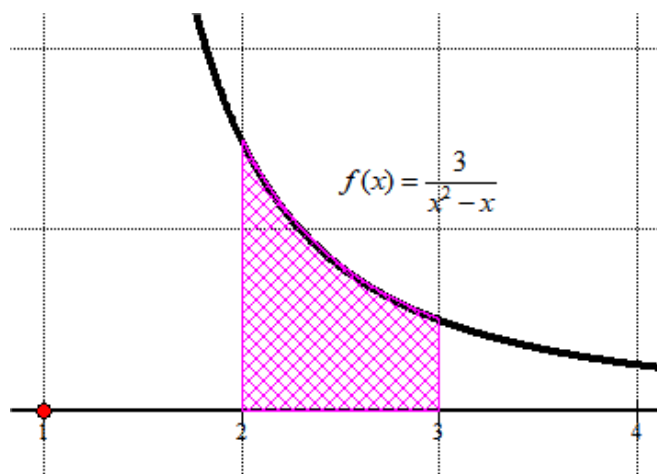
$$\dots = \int \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} dx = -3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + C$$

(c) La función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$ no corta el eje de abscisas, por lo que el área de la región pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$\int_2^3 \frac{3}{x^2 - x} dx = \left[-3 \ln|x| + 3 \ln|x-1| \right]_2^3 =$$

$$= \left[-3 \ln 3 + 3 \ln|3-1| \right] - \left[-3 \ln 2 + 3 \ln|2-1| \right] =$$

$$= -3 \ln 3 + 3 \ln 2 + 3 \ln 2 = \boxed{6 \ln 2 - 3 \ln 3 = 0.86 \text{ u}^2}$$



El área de la zona rayada no llega a ser un cuadradito (1 unidad cuadrada).

3. Dada la recta r y el plano π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

Busca si existe algún valor del parámetro m para el cual

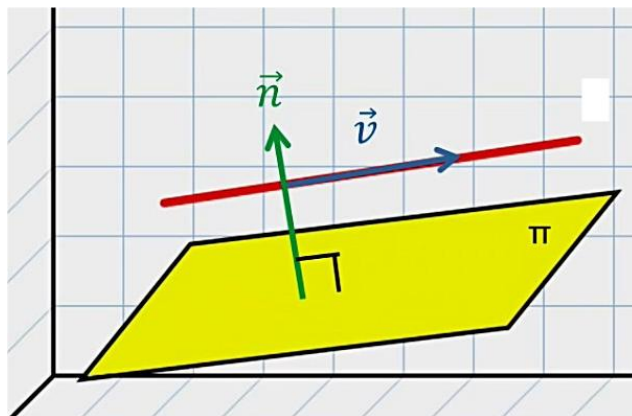
(a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)

(b) o bien, el plano contiene la recta. (3 puntos)

(c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)

En cada caso, si existe, calcúlalo.

(a) Deseamos que plano y recta sean paralelos, por lo que el vector director de recta y el normal del plano deben ser ortogonales y su producto escalar debe ser cero.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, -m, 1) \\ \vec{v} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = (3, -m, 1) \cdot (2, 3, -1) = 0 \Rightarrow 6 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow -3m = -5 \Rightarrow \boxed{m = \frac{5}{3}}$$

Comprobamos que la recta no está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, -2) \in r \\ \exists P_r \in \pi? \\ \pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists 3 - \frac{5}{3}(-1) - 2 = 1? \Rightarrow \exists 3 + \frac{5}{3} - 2 - 1 = 0? \Rightarrow \exists \frac{5}{3} = 0?$$

Evidentemente el punto de la recta no está en el plano y por tanto no lo está ningún punto de la recta. Plano y recta son paralelos.

(b) La recta nunca está contenida en el plano, pues para el único valor de m que hace que vector director de recta y normal del plano sean ortogonales incluye el hecho de que plano y recta son paralelos.

(c) Plano y recta se cortan en un punto para cualquier valor de m distinto de $5/3$.

Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema para $m \neq \frac{5}{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, -2) \\ \vec{v} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 2\lambda) - m(-1 + 3\lambda) - 2 - \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$(\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

$$\Rightarrow 3 + 6\lambda + m - 3m\lambda - 2 - \lambda = 1 \Rightarrow 5\lambda - 3m\lambda = -m \Rightarrow (5 - 3m)\lambda = -m \Rightarrow$$

Como $5 - 3m \neq 0$, entonces puedo despejar $\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-m}{5 - 3m}$

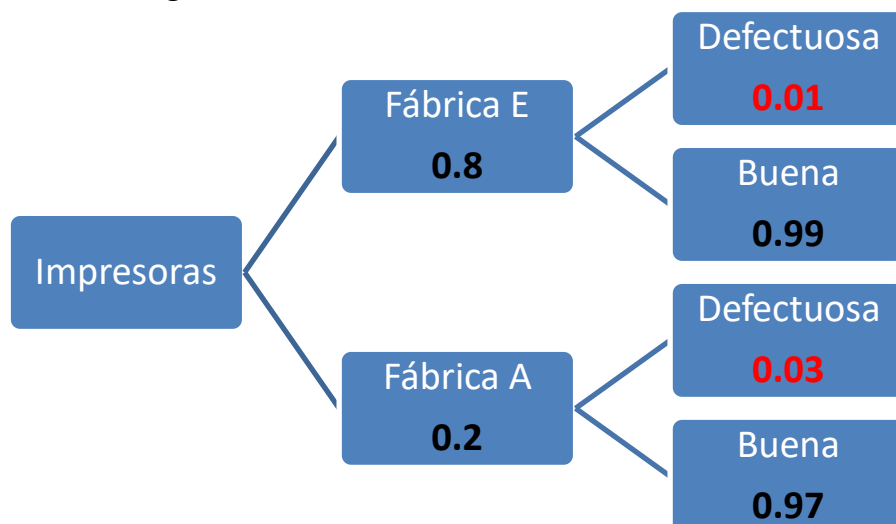
sustituimos en las ecuaciones del principio.

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2 \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{5 - 3m - 2m}{5 - 3m} = \frac{5 - 5m}{5 - 3m} \\ y &= -1 + 3 \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{-5 + 3m - 3m}{5 - 3m} = \frac{-5}{5 - 3m} \\ z &= -2 - \frac{-m}{5 - 3m} = \frac{-10 + 6m + m}{5 - 3m} = \frac{-10 + 7m}{5 - 3m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P\left(\frac{5 - 5m}{5 - 3m}, \frac{-5}{5 - 3m}, \frac{-10 + 7m}{5 - 3m}\right)$$

4. Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea (E) y la fábrica asiática (A). El 1% de las impresoras de la fábrica E y el 3% de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80%, mientras que el resto procede de la fábrica A.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de este país tenga el defecto? (4 puntos)
 (b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán el defecto? (2 puntos)
 (c) Si se elige al azar una impresora de ese país y resulta ser una impresora defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



- (a) Mirando en el diagrama de árbol superior y aplicando el teorema de probabilidad total.

$$P(\text{Una impresora sea defectuosa}) = 0.8 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.03 = 0.008 + 0.006 = \boxed{0.014}$$

- (b) $2000\ 000 \cdot 0.014 = 28\ 000$ impresoras serán defectuosas.

- (c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de fábrica E} / \text{Es defectuosa}) = \frac{P(\text{Sea de fábrica E} \cap \text{Es defectuosa})}{P(\text{Sea defectuosa})} =$$

$$= \frac{0.8 \cdot 0.01}{0.014} = \frac{8}{14} = \boxed{\frac{4}{7} = 0.571}$$

PBAU Extraordinaria 2019



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2019

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = m \\ 6x + 6y + m^2z = -9 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

- b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

2. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 puntos), los intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 puntos) y haz un esbozo de su gráfica para x entre -3 y 3 . (4 puntos)

3. Determina un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right\}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. (10 puntos)

4. El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviación típica $\sigma = 15$ kg. Nos piden:

- ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg. (4 puntos)
- Consideramos al colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si nos dicen que este colectivo representa al 40% de todos los individuos de la comunidad, ¿cuál es el peso máximo de un individuo del colectivo? (6 puntos)

Modelo 2

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z para que se cumpla:

$$A \cdot b - 2c = d$$

(10 puntos)

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Haz un esbozo de la región (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

3. Considere los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ y $C(0, 1, 1)$. Calcula el área del triángulo que forman los puntos A, B y C (5 puntos) y determina el ángulo que forman los vectores AB y AC. (5 puntos)

4. Se ha realizado un estudio sobre el miedo a volar y el nivel de estrés en una cierta comunidad. Nos dicen que el 60% de los individuos no tienen miedo a volar, el 50% tiene un nivel bajo de estrés, el 25%, un nivel medio, y el 5% tiene un nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabiendo, además, que el 5% de los individuos tiene un nivel medio de estrés y no tiene miedo a volar, se pide:

- a) Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo de volar. (3 puntos)
- b) Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés? (3 puntos)
- c) ¿Son independientes los eventos "nivel de estrés bajo" y "miedo a volar"? Razona la respuesta. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = m \\ 6x + 6y + m^2z = -9 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix} = 4m^2 - 18 + 24 - 12 - 6m^2 + 24 = -2m^2 + 18$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 18 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \sqrt{9} = \pm 3$$

Analizamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq 3$ y $m \neq -3$

En este caso la matriz de coeficientes tiene rango 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 3$

La matriz A queda

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor de

orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su

$$\text{determinante es } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 27 + 36 + 18 - 81 = 0. \text{ El rango de A/B no es 3.}$$

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 2ª y 3ª columna y la 3ª fila.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 2}$$

Como $\text{rango A} = \text{rango A/B} = 2 \neq n^\circ \text{ incógnitas}$ el sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m = -3$

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor de}$$

orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} \text{ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su}$$

$$\text{determinante es } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 36 + 18 + 81 = 89 \neq 0. \text{ El rango de A/B es 3.}$$

Como $\text{rango A} \neq \text{rango A/B}$ el sistema es incompatible.

$$\text{b) Es compatible indeterminado para } m = 3 \text{ y el sistema queda } \left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 6x + 6y + 9z = -9 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 6x + 6y + 9z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido entre 3 la ecuación 3ª} \\ \Rightarrow 2x + y - z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ 2x + 2y + 3z = -3 \\ -2x - y + z = -3 \\ \hline y + 4z = -6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ 4x + 2y - 2z = 6 \\ -4x - 3y - 2z = 0 \\ \hline -y - 4z = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ -y - 4z = 6 \\ y + 4z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ y + 4z = -6 \\ -y - 4z = 6 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ -y - 4z = 6 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ -y = 4z + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ y = -4z - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 3(-4z - 6) = -2z \Rightarrow 4x - 12z - 18 = -2z$$

$$4x = 10z + 18 \Rightarrow \boxed{x = \frac{10z + 18}{4} = \frac{5z + 9}{2}}$$

La solución es $x = \frac{9+5t}{2}$; $y = -6 - 4t$; $z = t$.

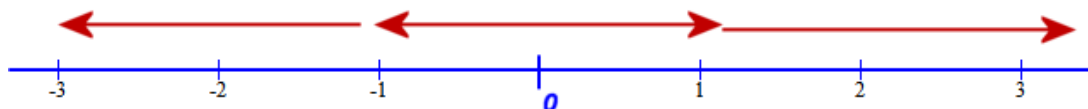
2. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 puntos), los intervalos de crecimiento y decrecimiento (3 puntos) y haz un esbozo de su gráfica para x entre -3 y 3 . (4 puntos)

Calculamos la derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Igualamos a cero la derivada.

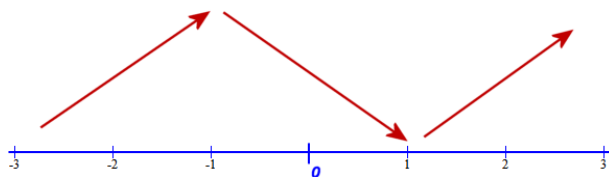
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos los cambios de signo de la derivada antes, entre y después de esos valores.



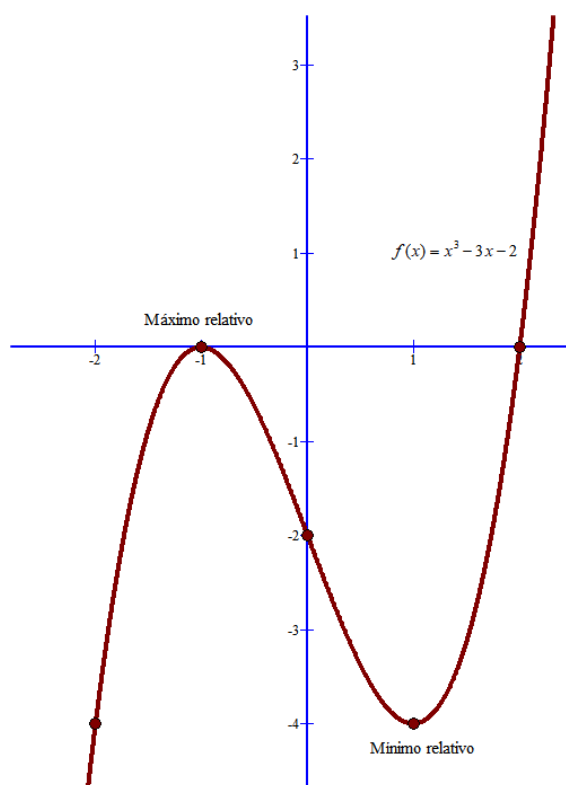
- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos el valor $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos el valor $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos el valor $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$. Para dibujarla hacemos una tabla de valores.

x	$y = x^3 - 3x - 2$
-2	$-8 + 6 - 2 = -4$
-1	$-1 + 3 - 2 = 0$
0	-2
1	$1 - 3 - 2 = -4$
2	$8 - 6 - 2 = 0$



3. Determina un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas (1, 1, 0) y (0, 1, 1). (10 puntos)

Calculamos el vector de la recta dada, despejando y pasando a la ecuación paramétrica de la recta.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

El vector director de la recta es $\vec{v} = (-1, 1, -1)$.

El vector director de la otra recta es $\vec{u} = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) = (1, 0, -1)$

El plano pedido pasa por el punto P(0,0,0) y tiene vectores directores $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ y $\vec{u} = (1, 0, -1)$.

Obtenemos su ecuación.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y - z - y = 0 \Rightarrow -x - 2y - z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y + z = 0}$$

4. El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se modela con una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviación típica $\sigma = 15$ kg. Nos piden:

- ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg. (4 puntos)
- Consideramos al colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si nos dicen que este colectivo representa al 40% de todos los individuos de la comunidad, ¿cuál es el peso máximo de un individuo del colectivo? (6 puntos)

X = Peso de un adulto de 40 años. $X = N(85, 15)$

- a) Calculamos $P(X > 100)$.

$$P(X > 100) = 1 - P(X < 100) = \{\text{Tipificamos}\} = 1 - P\left(\frac{X - 85}{15} < \frac{100 - 85}{15}\right) =$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

El porcentaje de población de 40 años con sobrepeso es de 15,87%

- b) Llamamos p al peso máximo del colectivo. Debe cumplirse $P(X < p) = 0,4$.

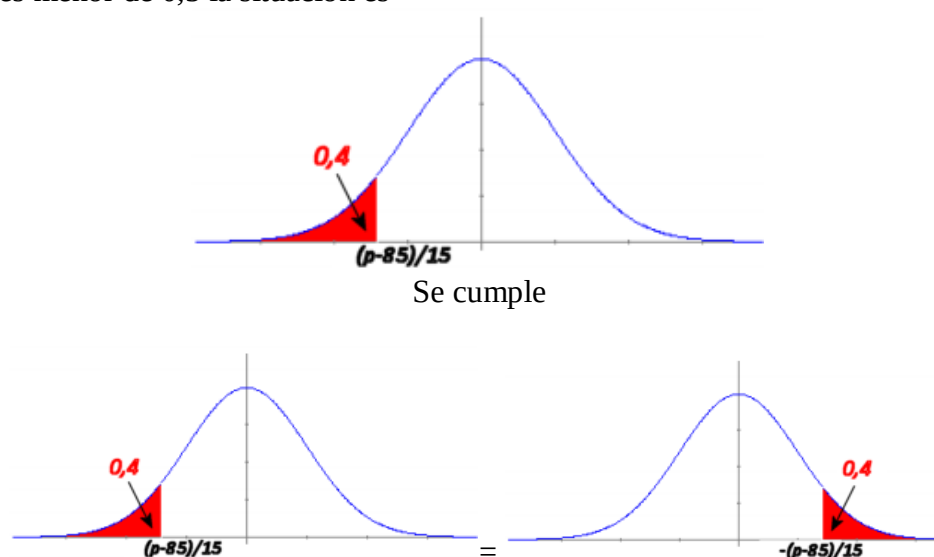
$$P(X < p) = 0,4$$

Tipificamos

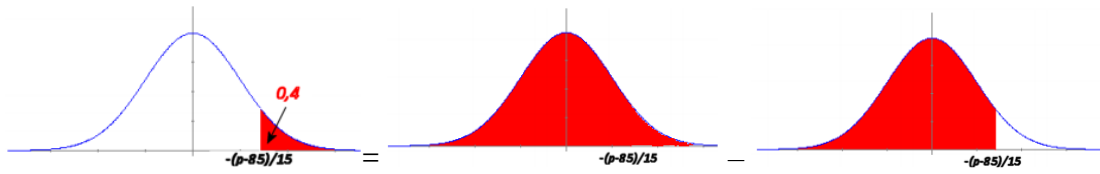
$$P\left(\frac{X - 85}{15} < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$

$$P\left(Z < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$

Como es menor de 0,5 la situación es



$$P\left(Z < \frac{p - 85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z > -\frac{p - 85}{15}\right) = 0,4$$



$$P\left(Z > -\frac{p-85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow 1 - P\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0,6$$

Buscamos en la tabla $N(0, 1)$

$$-\frac{p-85}{15} = \frac{0,25+0,26}{2} \Rightarrow p-85 = -15 \frac{0,25+0,26}{2}$$

$$p = 85 - 15 \cdot 0,266 = 81,175 \text{ kg}$$

El peso máximo del colectivo es de 81.175 kg.

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z para que se cumpla:

$$A \cdot b - 2c = d \quad (10 \text{ puntos})$$

$$A \cdot b - 2c = d \Rightarrow A \cdot b = 2c + d$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + z \\ 2 + z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 + z \\ x + 2y = 2 + z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z + y = 2 + z \\ z + 2y = 2 + z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - z \\ 2y = 2 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - z \\ y = 1 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow$$

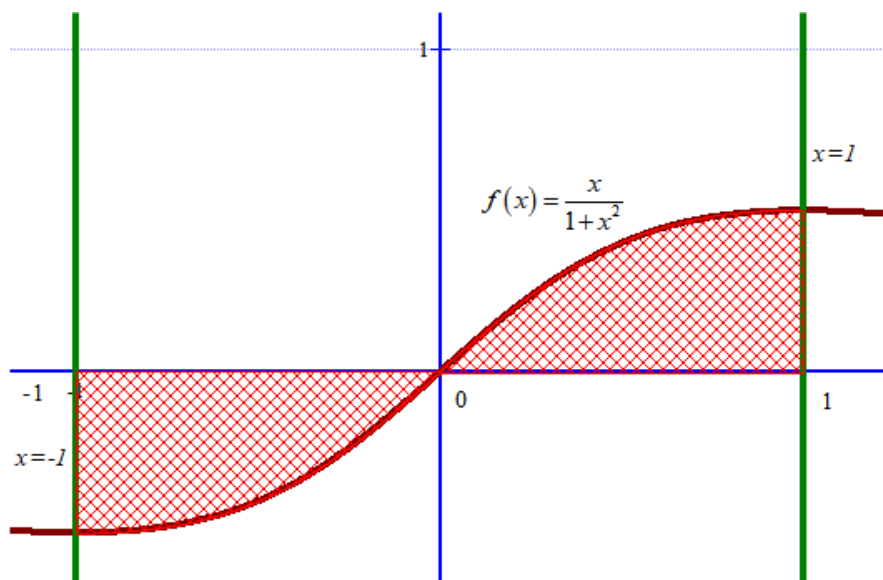
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2 - z \\ y = 1 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La solución es $x = y = z = 1$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Haz un esbozo de la región (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

Para hacer un dibujo de la gráfica entre -1 y 1 , realizamos una tabla de valores

x	$y = \frac{x}{1+x^2}$
-1	$-0,5$
$-0,5$	$-0,4$
0	0
$0,5$	$0,4$
1	$0,5$



Para calcular el área de la región coloreada hay que hacer la integral definida de 0 a 1 de la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y el área pedida será el doble de lo obtenido (por la simetría de la función).

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 \right) = \frac{1}{2} \left(\left[\ln(1+1^2) \right] - \left[\ln(1+0^2) \right] \right) = \frac{1}{2} (\ln 2)$$

Área = $2 \cdot \frac{1}{2} (\ln 2) = \ln 2 = 0,69 u^2$, que coincide aproximadamente con lo que se observa en el dibujo de la gráfica.

3. Considere los puntos A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) y C(0, 1, 1). Calcule el área del triángulo que forman los puntos A, B y C (5 puntos) y determine el ángulo que forman los vectores AB y AC. (5 puntos)

El área del triángulo definido por los puntos dados es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen dichos vértices.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + k - j = i - j + k = (1, -1, 1)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1, -1, 1)|}{2} = \frac{\sqrt{1+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

El ángulo que forman los vectores AB y AC lo calculamos con la fórmula del producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$(1, 1, 0) \cdot (0, 1, 1) = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1} \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$1 = 2 \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$$

El ángulo es de 60°

4. Se ha realizado un estudio sobre el miedo a volar y el nivel de estrés en una cierta comunidad. Nos dicen que el 60% de los individuos no tienen miedo a volar, el 50% tiene un nivel bajo de estrés, el 25%, un nivel medio, y el 5% tiene un nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabiendo, además, que el 5% de los individuos tiene un nivel medio de estrés y no tiene miedo a volar, se pide:

- Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel de estrés medio y miedo de volar. (3 puntos)
- Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés? (3 puntos)
- ¿Son independientes los eventos "nivel de estrés bajo" y "miedo a volar"? Razona la respuesta. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia donde se organicen y visualicen mejor los datos dados.

	Estrés bajo	Estrés medio	Estrés alto	
Miedo a volar			5	
Sin miedo a volar		5		60
	50	25		100

Completamos la tabla, sabiendo que cada línea debe sumar lo que indique el valor total situado a su derecha o debajo.

	Estrés bajo	Estrés medio	Estrés alto	
Miedo a volar	15	20	5	40
Sin miedo a volar	35	5	20	60
	50	25	25	100

Con los datos que nos proporciona esta última tabla respondemos a las preguntas.

a) $P(\text{Tener nivel medio de estrés y miedo a volar}) = 20\% = \boxed{0,2}$

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Nivel bajo de estrés/Tiene miedo a volar}) = \frac{P(\text{Tiene miedo a volar y nivel bajo de estrés})}{P(\text{Tiene miedo a volar})} =$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = \boxed{0,375}$$

c) Para ser independientes debe cumplirse:

$$P(\text{Nivel bajo de estrés y miedo a volar}) = P(\text{Nivel bajo de estrés}) \cdot P(\text{Tiene miedo a volar})$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} \text{?}$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{2000}{10000} \text{?}$$

$$\text{¿} \frac{15}{100} = \frac{20}{100} \text{? No es cierto}$$

Los sucesos "Nivel bajo de estrés" y "Miedo a volar" no son independientes.

PBAU Ordinaria 2019



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2019

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de a el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} (a+2)x + (a-1)y - z = 1 \\ ax - y + z = -1 \\ 11x + ay - z = a \end{array} \right\}; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $a = 0$. (3 puntos)

2. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto $(1, 0)$. Determina los coeficientes a , b y c para que tengan la misma recta tangente en este punto y calcúlala. (10 puntos)

3. Determina la posición relativa del plano $x + y + z = 1$ y la recta de ecuaciones $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2}$ (4 puntos)

Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano. (6 puntos)

4. Las alturas X de los estudiantes de 18 años de los institutos de Palma se modelan según una ley normal de media $\mu = 1.78$ m y desviación típica $\sigma = 0.65$ m. Se pide:

- Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que miden más de 1.90 m. (4 puntos)
- Cogemos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que debe realizar un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado? (6 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcule x e y para qué se verifique:

$$b - A \cdot c = A \cdot d \quad (10 \text{ puntos})$$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ i el eje de abscisas o eje OX.

Haz un esbozo de la región considerada (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

3. Considere la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ y el plano $x-y=0$. Calcula el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

4. En una comunidad de 500 estudiantes de segundo de bachillerato, 200 estudian la opción científica tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican baloncesto (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y baloncesto a la vez). De los que practican baloncesto, 70 estudian la opción científica tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte ni realizan la opción científica tecnológica. Se pide:

- Probabilidad de que un estudiante estudie la opción científica tecnológica y no practique deporte. (3 puntos)
- Sabiendo que un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científica tecnológica? (3 puntos)
- Son independientes los eventos "practicar fútbol" y "estudiar la opción científica tecnológica". Razona la respuesta. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de a el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{rcl} (a+2)x + (a-1)y - z & = & 1 \\ ax - y + z & = & -1 \\ 11x + ay - z & = & a \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvalo para $a = 0$. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix} = a+2+11a-11-a^2-11+a^2-a-a^2-2a = -a^2+9a-20$$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 9a - 20 = 0 \Rightarrow a = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{-2} = \frac{-9 \pm 1}{-2} = \begin{cases} x = \frac{-9+1}{-2} = 4 \\ x = \frac{-9-1}{-2} = 5 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 4$ y $a \neq 5$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 4$

$$\text{El sistema queda } \left. \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ 4x - y + z & = & -1 \\ 11x + 4y - z & = & 4 \end{array} \right\} . \text{ Triangulamos el sistema.}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ 4x - y + z & = & -1 \\ 11x + 4y - z & = & 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} 6 \cdot \text{Ecuación } 2^a - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^a & & & & \\ 24x & -6y & +6z & = & -6 \\ -24x & -12y & +4z & = & -4 \\ \hline & -18y & +10z & = & -10 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 6 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 11 \cdot \text{Ecuación } 1^a & & & & \\ 66x & +24y & -6z & = & 24 \\ -66x & -33y & +11z & = & -11 \\ \hline & -9y & +5z & = & 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} 6x + 3y - z & = & 1 \\ -18y + 10z & = & -10 \\ -9y + 5z & = & 13 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Simplifico la ecuación } 2^a \\ \text{La divido por } -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y - z = 1 \\ +9y - 5z = 5 \\ -9y + 5z = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -9y + 5z = 13 \\ 9y - 5z = 5 \\ \hline 0 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3y - z = 1 \\ +9y - 5z = 5 \\ 0 = 18 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $a = 5$

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 5x - y + z = -1 \\ 11x + 5y - z = 5 \end{array} \right\}$. Triangulamos el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 5x - y + z = -1 \\ 11x + 5y - z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 2^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 35x - 7y + 7z = -7 \\ -35x - 20y + 5z = -5 \\ \hline -27y + 12z = -12 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 \cdot \text{Ecuación } 3^a - 11 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 77x + 35y - 7z = 35 \\ -77x - 44y + 11z = -11 \\ \hline -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ -27y + 12z = -12 \\ -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Simplifico la ecuación } 2^a \\ \text{Divido por } -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 9y - 4z = 4 \\ -9y + 4z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -9y + 4z = 24 \\ 9y - 4z = 4 \\ \hline 0 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x + 4y - z = 1 \\ 9y - 4z = 4 \\ 0 = 28 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 1 \\ -y + z = -1 \\ 11x - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{pmatrix} y |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 11 - 11 = -20$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1+1}{-20} = \frac{2}{-20} = \frac{-1}{10} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2+11-11}{-20} = \frac{2}{-20} = \frac{-1}{10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{11+11}{-20} = \frac{22}{-20} = \frac{-11}{10}$$

2. Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determina los coeficientes a, b y c para qué tengan la misma recta tangente en este punto y calcúlala. (10 puntos)

Si pasan por el punto (1, 0) debe cumplirse:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a1^2 + b = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$$

$$g(1) = 0 \Rightarrow 1 - c1^2 = 0 \Rightarrow 1 - c = 0 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Al tener la misma tangente debe tener la misma pendiente en el punto (1, 0). Es decir, $g'(1) = f'(1)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a + b \\ g'(x) = 1 - 2x \Rightarrow g'(1) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = 4 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -5$$

Nos queda por resolver el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a + b = 0 \\ 2a + b = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -1 - b \\ 2a + b = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1 - b) + b = -5 \Rightarrow -2 - 2b + b = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = -3 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow \boxed{a = -1 - 3 = -4}$$

El valor de los parámetros es $a = -4$, $b = 3$ y $c = 1$.

La tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ en (1,0) es

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x + 3 \Rightarrow f'(1) = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$\text{La recta tangente es } y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$$

3. Determina la posición relativa del plano $x + y + z = 1$ y la recta de ecuaciones $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2}$

(4 puntos)

Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

(6 puntos)

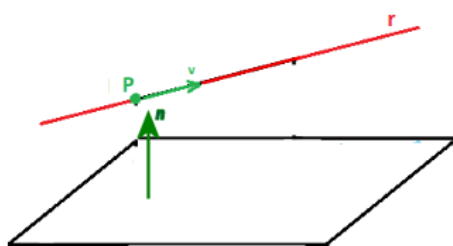
La posición relativa de recta y plano depende (en gran parte) de la posición del vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, 1)$ y del director de la recta $\vec{v} = (1, 1, -2)$.

Veamos si son perpendiculares. En cuyo caso plano y recta son paralelos o el plano contiene a la recta.

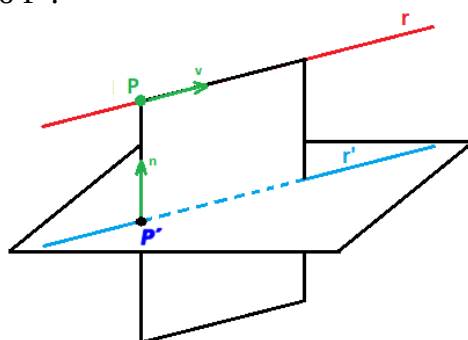
$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, 1, 1)(1, 1, -2) = 1 + 1 - 2 = 0$. Son perpendiculares. Falta ver si la recta está contenida en el plano o no. Basta con ver si uno de sus puntos, por ejemplo, $P(1, 1, 1)$ está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿}1 + 1 + 1 = 1\text{?}$$

Luego recta y plano son paralelos.



La proyección ortogonal de la recta en el plano, se obtiene según indica el dibujo. Basta proyectar el punto $P(1, 1, 1)$ de la recta en el plano y la recta r' pedida será la que tiene como vector director el mismo de r y pasa por ese punto P' :



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Pasa por } P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{array} \right\}$$

El punto P' será el corte del plano y esta recta que acabamos de obtener.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + t + 1 + t + 1 + t = 1 \Rightarrow 3 + 3t = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

El punto P' tiene coordenadas $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$

Y la proyección ortogonal es la recta de ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, 1, -2) \\ \text{Pasa por el punto } P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x - \frac{1}{3}}{1} = \frac{y - \frac{1}{3}}{1} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2} \Rightarrow \boxed{x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}}$$

- 4.** Las alturas X de los estudiantes de 18 años de los institutos de Palma se modelan según una ley normal de media $\mu = 1.78$ m y desviación típica $\sigma = 0.65$ m. Se pide:
- a) Porcentaje de estudiantes de 18 años de los institutos de Palma que miden más de 1.90 m. (4 puntos)
- b) Cogemos una muestra de 100 estudiantes de 18 años de los institutos de Palma y queremos seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que debe realizar un estudiante de 18 años de los institutos de Palma para ser seleccionado? (6 puntos)

X = Estatura de los estudiantes. $X = N(1.78, 0.65)$

- a) Calculamos $P(X > 1.9)$.

$$P(X > 1.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 1.78}{0.65} > \frac{1.9 - 1.78}{0.65}\right) =$$

$$= P(Z > 0.1846) = 1 - P(Z < 0.1846) = 1 - \frac{0.5714 + 0.5753}{2} = 1 - 0.5733 = 0.4266$$

El porcentaje de alumnos de más de 1.90 metros es de 42,66%

- b) Nos piden la altura h para que $P(X > h) = 0.30$. Averigüémoslo, siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior.

$$P(X > h) = 0.30 \Rightarrow P\left(\frac{X - 1.78}{0.65} > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.30 \Rightarrow P\left(Z > \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.3 \Rightarrow P\left(Z < \frac{h - 1.78}{0.65}\right) = 0.7$$

Buscando en la tabla de $N(0, 1)$.

$$\frac{h - 1.78}{0.65} = 0.52 \Rightarrow h = 1.78 + 0.52 \cdot 0.65 = \boxed{2.118 \text{ m}}$$

OPCIÓN B

1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calcule x e y para que se verifique:

$$b - A \cdot c = A \cdot d$$

(10 puntos)

$$b - A \cdot c = A \cdot d \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy + 2y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - xy - 2y^2 \\ \frac{3}{2} - 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - xy - 2y^2 = 6x - 2xy - 2y \\ \frac{3}{2} - 2y^2 = -2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + xy - 2y^2 = 6x - 2y \\ 3 - 4y^2 = -4y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = 6x - xy + 2y^2 + 2y \\ 0 = 4y^2 - 4y - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

$$0 = 4y^2 - 4y - 3 \Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} y = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4-8}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} 2 = 6x - xy + 2y^2 - 2y \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 = 6x - \frac{3}{2}x + 2 \cdot \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow 4 = 12x - 3x + 9 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\dots \Rightarrow \begin{cases} 2 = 6x - xy + 2y^2 - 2y \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 = 6x + \frac{1}{2}x + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow 4 = 12x + x + 1 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{13}$$

Las soluciones son: $x = \frac{1}{9}$ e $y = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1}{13}$ e $y = -\frac{1}{2}$

2. Considere la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ i el eje de abscisas o eje OX. Haz un esbozo de la región considerada (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

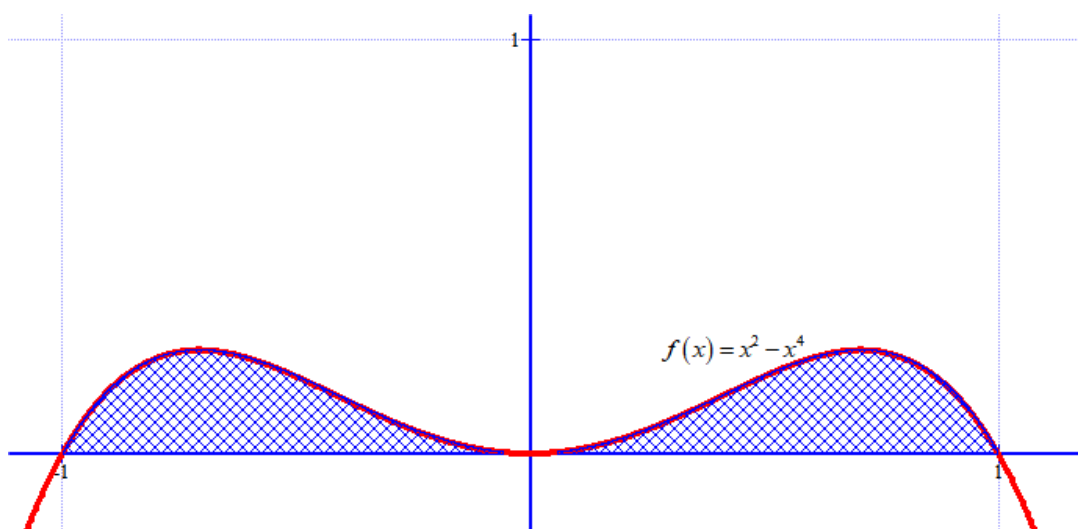
Veamos donde se corta la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x^4$ con el eje X ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x^4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = x^2 - x^4 \Rightarrow 0 = x^2(1 - x^2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

El recinto es el dibujado. Para hacer la gráfica basta con completar la tabla de valores de -1 a 1 . El valor del área es muy pequeño. Por la simetría basta hallar el área entre 0 y 1 y el área del recinto pedida será el doble de lo que se obtenga.

$$\int_0^1 x^2 - x^4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{0^5}{5} \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} u^2$$

El área es $2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15} u^2$



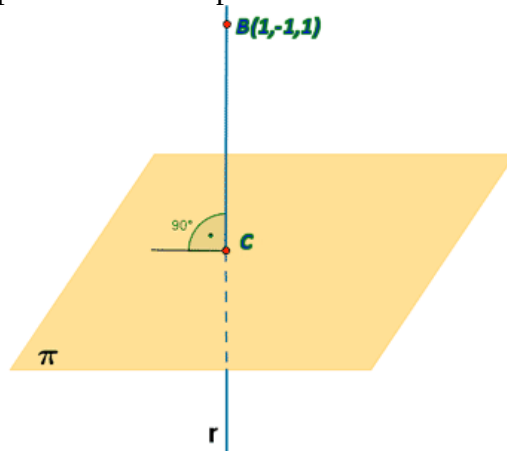
3. Considere la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ y el plano $x-y=0$. Calcule el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

Calculemos las coordenadas de cada uno de los vértices del triángulo del que nos piden su área. El punto de corte de recta y plano lo hallamos resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones, previamente pasamos la ecuación continua de la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{array} \right\} \Rightarrow 1+2t+1-t=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+2t=1-4=-3 \\ y=-1+t=-1-2=-3 \\ z=1-t=1+2=3 \end{array} \right\}$$

El vértice $A(-3, -3, 3)$. El vértice $B(1, -1, 1)$.

La proyección ortogonal del punto B sobre el plano es el otro vértice.



La recta r tiene ecuación

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n} = (1, -1, 0) \\ \text{Pasa por } B(1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{array} \right\}$$

El punto C es el punto de corte de la recta y plano

$$\left. \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=1+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+t+1+t=0 \Rightarrow 2+2t=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1+t=1-1=0 \\ y=-1-t=-1+1=0 \\ z=1 \end{array} \right\}$$

El vértice C tiene coordenadas $C(0,0,1)$

El triángulo de vértices $A(-3, -3, 3)$; $B(1, -1, 1)$ y $C(0,0,1)$ es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los tres vértices, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) - (-3, -3, 3) = (4, 2, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (-3, -3, 3) = (3, 3, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4i - 6j + 12k - 6k + 8j + 6i = 2i + 2j + 6k = (2, 2, 6)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{44}}{2} = \boxed{\sqrt{11} u^2}$$

4. En una comunidad de 500 estudiantes de segundo de bachillerato, 200 estudian la opción científica tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican baloncesto (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y baloncesto a la vez). De los que practican baloncesto, 70 estudian la opción científica tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte ni realizan la opción científica tecnológica. Se pide:

- a) Probabilidad de que un estudiante estudie la opción científica tecnológica y no practique deporte. (3 puntos)
- b) Sabiendo que un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científica tecnológica? (3 puntos)
- c) Son independientes los eventos "practicar fútbol" y "estudiar la opción científica tecnológica". Razona la respuesta. (4 puntos)

Realicemos una tabla de resumen de todos los datos aportados en el ejercicio

	Opción científica tecnológica	No opción científica tecnológica	
Fútbol			150
Baloncesto	70		100
No hacen deporte		150	
	200		500

Completamos la tabla.

	Opción científica tecnológica	No opción científica tecnológica	
Fútbol	30	120	150
Baloncesto	70	30	100
No hacen deporte	100	150	250
	200	300	500

a) $P(\text{No hace deporte y opción científica}) = \frac{100}{500} = \boxed{0,2}$

b) $P(\text{Estudie opción científica} / \text{Practica futbol}) = \frac{30}{150} = \boxed{0,2}$

- c) Para que sean independientes debe cumplirse que la probabilidad de la intersección de los sucesos sea igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos.

$$P(\text{Practique futbol} \cap \text{estudie opción científica}) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50}$$

$$P(\text{Practique futbol}) \cdot P(\text{estudie opción científica}) = \frac{150}{500} \cdot \frac{200}{500} = \frac{30000}{250000} = \frac{3}{25}$$

Evidentemente no son iguales y por tanto son sucesos dependientes.

PBAU Extraordinaria 2018

Universitat
de les Illes BalearsProves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2018

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ mx + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = -2$. (3 puntos)

2. Calcula las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrangular de volumen 64 metros cúbicos de superficie mínima. Comprueba que la solución obtenida es un mínimo. (10 puntos)

3. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta las rectas: (10 puntos)

$$r : x = 2y = z - 1, \quad s : 3x = 2y - 2 = 6z$$

4. En una clase de segundo de bachillerato, el 60% de los alumnos son chicas, el 40% aprobaron Lengua Castellana y el 20% son chicas que aprobaron Lengua Castellana. Se pide:

a) Cuál es la probabilidad de encontrar a una persona que sea chico y suspenda Lengua Castellana? (5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana? (2 puntos)

c) Si un alumno ha aprobado Lengua Castellana, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico? (3 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. Determina que relaciones han de existir entre a , b , c y d para qué se verifique $AM = MA$, siendo A y M las matrices siguientes: (10 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Considera la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X . (4 puntos)

3. Calcula la distancia entre las rectas siguientes: (10 puntos)

$$r: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase se modela con una distribución normal de media 100 pasos y desviación típica 20.5 pasos.

- a) Calcula la probabilidad de que el profesor dé más de 125 pasos durante una clase. (4 puntos)
b) Nos dicen que en el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de x pasos. Encuentre este valor x . (6 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ mx + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = -2$.

(3 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - m + 3m - 1 - m^2 + 12 = -m^2 + 2m + 15$$

Igualemos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 2m + 15 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} m = \frac{-2+8}{-2} = -3 \\ m = \frac{-2-8}{-2} = 5 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$ y $m \neq 5$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = -3$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -3x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 4x + 12y + 4z = 0 \\ -4x + 3y - z = 1 \\ \hline 15y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ -12x + 4y - 4z = 0 \\ 12x - 9y + 3z = -3 \\ \hline -5y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -5y - z = -3 \\ 15y + 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 15y + 3z = 1 \\ -15y - 3z = -9 \\ \hline 0 = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = -1 \\ -5y - z = -3 \\ 0 = -8 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $m=5$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 5y + z = 7 \\ 5x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 5 \cdot \text{Ecuación 3}^a \\ 5x + y - z = 0 \\ -5x - 15y - 5z = 0 \\ \hline -14y - 6z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ 4x + 12y + 4z = 0 \\ -4x - 5y - z = -7 \\ \hline 7y + 3z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y + z = 7 \\ -14y - 6z = 0 \\ 7y + 3z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y + z = 7 \\ -7y - 3z = 0 \\ 7y + 3z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 2}^a \\ 7y + 3z = -7 \\ -7y - 3z = 0 \\ \hline 0 = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y + z = 7 \\ -7y - 3z = 0 \\ \hline 0 = -7 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) Para $m=-2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 6 - 1 - 4 + 12 = 7$$

Obtenemos la solución del sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{7} = 0$$

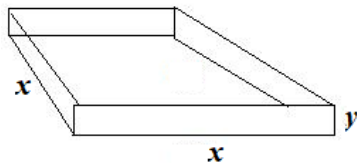
La solución del sistema es $x = y = z = 0$.

OTRA FORMA DE DETERMINAR LA SOLUCIÓN.

Para $m=-2$ el sistema es compatible determinado y queda $\left. \begin{array}{l} 4x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{array} \right\}$. Al ser un sistema

homogéneo tiene la solución trivial y como es única su solución es $x = y = z = 0$.

2. Calcula las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrangular de volumen 64 metros cúbicos de superficie mínima. Comprueba que la solución obtenida es un mínimo. (10 puntos)



El volumen de la caja es $V(x, y) = x^2 \cdot y$. Como debe tener un volumen de 64 metros cúbicos obtenemos la igualdad $x^2 \cdot y = 64$ y despejando tenemos que $y = \frac{64}{x^2}$.

Queremos minimizar la superficie de la caja con tapa. La expresión de esta superficie es la suma de la base, la tapa y las cuatro caras laterales.

$$S(x, y) = x^2 + x^2 + 4xy \Rightarrow S(x, y) = 2x^2 + 4xy \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{64}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$$

Determinamos los puntos críticos de esta función averiguando cuando se anula la derivada.

$$S(x) = 2x^2 + \frac{256}{x} \Rightarrow S'(x) = 4x - \frac{256}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{256}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{256}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 256 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64} = 4}$$

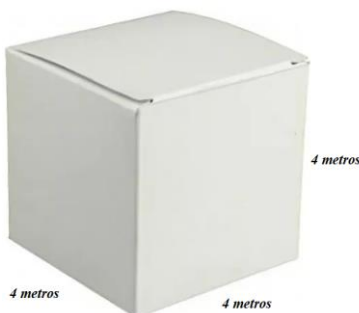
Tenemos un punto crítico de la función superficie de la caja para el lado de la base $x = 4$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = 4x - 256x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 4 + 2 \cdot 256x^{-3} = 4 + \frac{256}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(4) = 4 + \frac{256}{4^3} = 8 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva para $x = 4$, en dicho valor la función presenta un mínimo relativo. Para $x = 4$ tenemos que $y = \frac{64}{4^2} = 4$ metros.

Las dimensiones de la caja de base cuadrangular y con tapa con superficie mínima y con volumen 64 metros cúbicos tiene 4 metros de lado en la base y 4 metros de altura.



3. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta las rectas:

(10 puntos)

$$r: x = 2y = z - 1, \quad s: 3x = 2y - 2 = 6z$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada una de las rectas.

$$r: x = 2y = z - 1 \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 2) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s: 3x = 2y - 2 = 6z \Rightarrow \frac{3x}{6} = \frac{2y-2}{6} = \frac{6z}{6} \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 3, 1) \\ Q_s(0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punto A de la recta r tiene coordenadas $A(2\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$. Un punto B de la recta s tiene coordenadas $B(2\alpha, 1+3\alpha, \alpha)$.

Buscamos los valores de α y λ tales que los puntos O, A y B estén alineados. Para ello se debe cumplir que $\vec{OA} = b \cdot \vec{OB}$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{OA} &= (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) - (0, 0, 0) = (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) \\ \vec{OB} &= (2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) - (0, 0, 0) = (2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) \\ \vec{OA} &= b \cdot \vec{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2\lambda, \lambda, 1+2\lambda) = b(2\alpha, 1+3\alpha, \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 2b\alpha \rightarrow \lambda = b\alpha \\ \lambda = b(1+3\alpha) \rightarrow \lambda = b + 3b\alpha \\ 1+2\lambda = b\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\alpha = b + 3b\alpha \\ 1+2b\alpha = b\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b + 2b\alpha \\ b\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = b + 2(-1) \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow 2\alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1}$$

Sustituyendo λ por -1 el punto A de la recta r es $A(-2, -1, -1)$.

Sustituyendo α por $-\frac{1}{2}$ el punto B de la recta s es $B\left(2 \cdot \frac{-1}{2}, 1 - \frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right) \rightarrow B\left(-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

La recta t pedida pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y tiene como vector director $\vec{OA} = (-2, -1, -1)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_t &= \vec{OA} = (-2, -1, -1) \\ O(0, 0, 0) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = -2\beta \\ y = -\beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

4. En una clase de segundo de bachillerato, el 60% de los alumnos son chicas, el 40% aprobaron Lengua Castellana y el 20% son chicas que aprobaron Lengua Castellana. Se pide:

- a) Cuál es la probabilidad de encontrar a una persona que sea chico y suspenda Lengua Castellana? (5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana? (2 puntos)
- c) Si un alumno ha aprobado Lengua Castellana, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico? (3 puntos)

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Chicos	Chicas	
Aprueban Lengua		20	40
Suspenden Lengua			
		60	100

Completamos la tabla

	Chicos	Chicas	
Aprueban Lengua	20	20	40
Suspenden Lengua	20	40	60
	40	60	100

Hay un 20% de estudiantes que son chicos y suspenden Lengua. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que una persona sea chico y suspenda Lengua es 0.20.

b) Hay un 40 % de chicos y un 20% son chicos que suspenden Lengua.

La probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana es $\frac{20}{40} = 0.5$.

c) Hay un 40 % que aprueban Lengua y un 20% son chicos que aprueban Lengua.

La probabilidad de que sea chico la persona que ha aprobado Lengua es $\frac{20}{40} = 0.5$

OPCIÓN B

1. Determina que relaciones han de existir entre a, b, c y d para que se verifique $AM = MA$, siendo A y M las matrices siguientes: (10 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix}$$

$$AM = MA \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a+b \\ a+c = d \\ b+d = -c+d \rightarrow b = -c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -d = -a - c \\ a+c = d \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = a+c}$$

Las relaciones que deben cumplirse para que $AM = MA$ son; $b = -c$ y $d = a+c$

2. Considera la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$, por lo que en el intervalo $[-1, 1]$ la función existe y es continua.

Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2-x) - (-1)(x^2)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$$

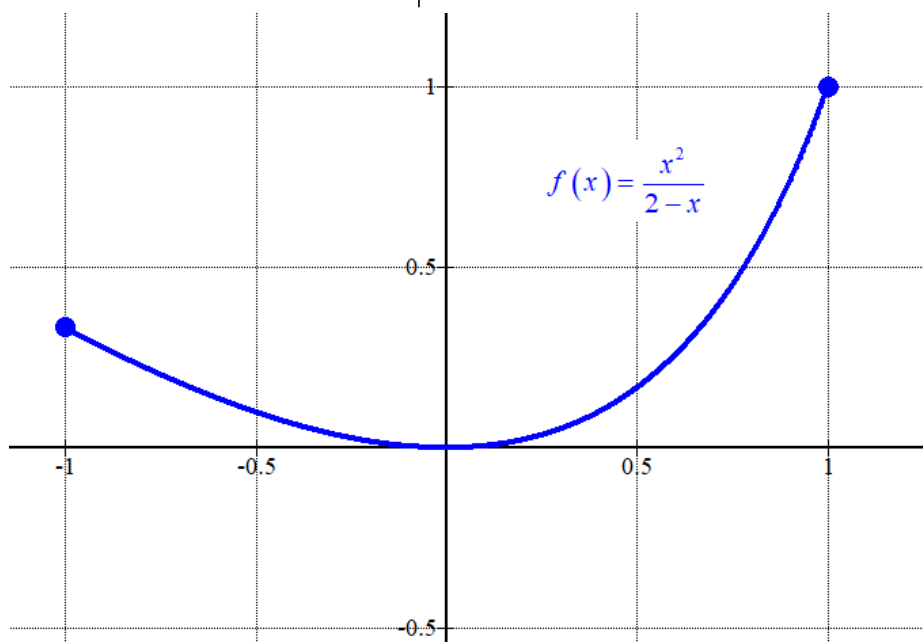
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El punto crítico $x = 0$ pertenece al intervalo $[-1, 1]$. Será un máximo o un mínimo relativo.

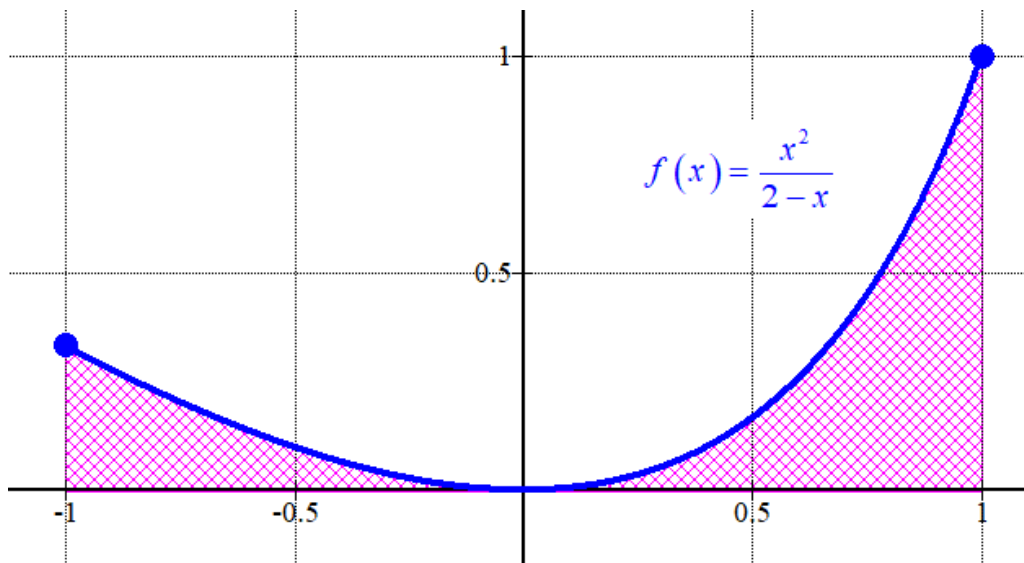
Como $f'(-1) = \frac{4(-1) - (-1)^2}{(2-(-1))^2} = \frac{-5}{9} < 0$ y $f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 1^2}{(2-1)^2} = 3 > 0$ la función decrece antes y crece después de $x = 0$. La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos la gráfica de la función en $[-1, 1]$.

x	$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
-1	1/3
-0.5	0.1
0	0
0.5	0.16
1	1



El área que nos piden calcular es la del dibujo.



Contando cuadraditos el área es muy pequeña, menor de 1 unidad cuadrada.

Calculamos su valor exacto utilizando el cálculo integral.

El área es el valor de la integral definida de la función entre -1 y 1 .

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2-x} dx = \dots$$

$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 2x \\ -2x + 4 \\ \hline 4 \end{array}$	$\frac{2-x}{-x-2}$	$\Rightarrow \frac{x^2}{2-x} = -x - 2 + \frac{4}{2-x}$
---	--------------------	--

$$\dots = \int_{-1}^1 -x - 2 + \frac{4}{2-x} dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x - 4 \ln |2-x| \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left[-\frac{1^2}{2} - 2(1) - 4 \ln |2-1| \right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) - 4 \ln |2-(-1)| \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} - 2 - 4 \ln 1 + \frac{1}{2} - 2 + 4 \ln 3 = \boxed{4 \ln 3 - 4 \approx 0.39}$$

El área tiene un valor aproximado de 0.39 unidades cuadradas.

3. Calcula la distancia entre las rectas siguientes: (10 puntos)

$$r: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Determinamos la posición relativa de las dos rectas. Para ello obtenemos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r: \begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ P_r(0, 1, 4) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 0, 2) \\ Q_s(0, 0, -3) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{0}{0} \neq \frac{0}{2}$$

Las rectas ni son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v}_s = (1, 0, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, -3) - (0, 1, 4) = (0, -1, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia entre las rectas determinamos el plano paralelo a la recta r que contiene la recta s . La distancia entre las dos rectas será la distancia de un punto cualquiera de r al plano hallado.

Empezamos hallando la ecuación del plano π paralelo a la recta r que contiene la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(0, 0, -3) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, 0, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \pi: y = 0$$

Hallamos la distancia del punto $P_r(0, 1, 4)$ al plano $\pi: y = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 1, 4) \\ \pi: y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(P_r, \pi) = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 1$$

La distancia entre las rectas r y s es de 1 unidad.

4. El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase se modela con una distribución normal de media 100 pasos y desviación típica 20.5 pasos.

- a) Calcula la probabilidad de que el profesor dé más de 125 pasos durante una clase. (4 puntos)
 b) Nos dicen que en el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de x pasos. Encuentre este valor x . (6 puntos)

X = El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase. $X = N(100, 20.5)$

a) Nos piden calcular $P(X > 125)$.

$$P(X > 125) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{125-100}{20.5}\right) = P(Z > 1.22) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8888 = 0.1112$$

	0	1	2	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.
1.4	0.9109	0.9127	0.9144	0.

b) Nos dicen que $P(X < x) = 0.45$. Determinamos el valor de x . Al ser la probabilidad menor de 0.5 la cantidad de pasos debe ser menor de la media (100 pasos).

$$P(X < x) = 0.45 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} < 0.5 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x-100}{20.5} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > -\frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{x-100}{20.5}\right) = 0.55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x-100}{20.5} = \frac{0.12 + 0.13}{2} = 0.125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 100 = 0.125 \cdot 20.5 \Rightarrow 100 - 0.125 \cdot 20.5 = x \Rightarrow x = 97.4375$$

	0	1	2	3	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.

En el 45% de las clases que da el profesor éste da menos de 97.4375 pasos.

PBAU Ordinaria 2018



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2018

Modelo 3

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m + 1) \\ 4x + y + z = m \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = 0$. (3 puntos)

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. (5 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. (5 puntos)

3. Determina los puntos A, B y C de la recta $x - 12 = \frac{y + 6}{2} = \frac{z - 6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cual de estos puntos A, B, C está situado entre los otros dos. (4 puntos)

4. Queremos realizar un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Por eso hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y los hemos preguntado qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y al resto otras formaciones políticas.

Sabiendo que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40% de los votantes del PP son chicas y que el 50% de los votantes del PSIB son chicos, se pide:

- La probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica. (4 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP. (2 puntos)
- La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica. (4 puntos)

Modelo 3

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz X que verifica:

$$A \cdot X \cdot B = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ puntos})$$

2. Encuentra los valores a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ (6 puntos). Determine en qué(s) punto(s) se verifica lo que asegura el teorema. (4 puntos)

3. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Encontrar el área del triángulo ABC.

(10 puntos).

4. Consideramos la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio un año determinado. Sea X la variable aleatoria que modela la proporción de estudiantes de la población anterior que elige estudiar un grado de humanidades. Esta variable aleatoria X se modela con una distribución normal de media 0.35 y desviación típica 0.1. Se pide:

- ¿cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera más del 45% de los estudiantes de la población considerada estudien un grado de humanidades? (5 puntos)
- En los últimos 10 años, ¿en cuántos años el porcentaje de estudiantes de la población considerada que han escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30%? (5 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m+1) \\ 4x + y + z = m \end{array} \right\} ; \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo para $m = 0$.

(3 puntos)

a) Consideremos la matriz de los coeficientes del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A| = \begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4m^2 + 1 - 4 - m - 4m = 4m^2 - 5m + 1$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m^2 - 5m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2(4)} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} m = \frac{5+3}{8} = 1 \\ m = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq \frac{1}{4}$

En este caso el rango de la matriz de coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m = 1$

El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y + z = 3 \\ x + y + z = -4 \\ 4x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 4x \quad +y \quad +z \quad = 1 \\ -4x \quad -y \quad -z \quad = -3 \\ \hline 0 \quad = -2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 4x \quad +4y \quad +4z \quad = -16 \\ -4x \quad -y \quad -z \quad = -3 \\ \hline 3y \quad +3z \quad = -19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + y + z = 3 \\ 3y + 3z = -19 \\ 0 = -2 \end{array} \right\}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $m = \frac{1}{4}$

El sistema queda

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} 4x + \frac{1}{4}y + z = \frac{9}{4} \\ x + y + \frac{1}{4}z = -\frac{10}{4} \\ 4x + y + z = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ 4x + 4y + z = -10 \\ 16x + 4y + 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 16x \quad +4y \quad +4z \quad = 1 \\ -16x \quad -y \quad -4z \quad = -9 \\ \hline 3y \quad \quad \quad = -8 \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ 16x \quad +16y \quad +4z \quad = -40 \\ -16x \quad -y \quad -4z \quad = -36 \\ \hline 15y \quad \quad \quad = -76 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ 15y = -76 \\ 3y = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16x + y + 4z = 9 \\ y = \frac{-76}{15} \\ y = \frac{-8}{3} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Este sistema es incompatible. No tiene solución.

- b) Para $m=0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos con la regla de Cramer. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x \quad + z = 2 \\ x + y \quad = -2 \\ 4x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 = 1$$

Obtenemos la solución del sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-2}{1} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8+8-2}{1} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-8+8}{1} = 2$$

La solución del sistema es $x=0$; $y=-2$; $z=2$

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1,1]$. (5 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$. (5 puntos)

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$.

La derivada de la función es $f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

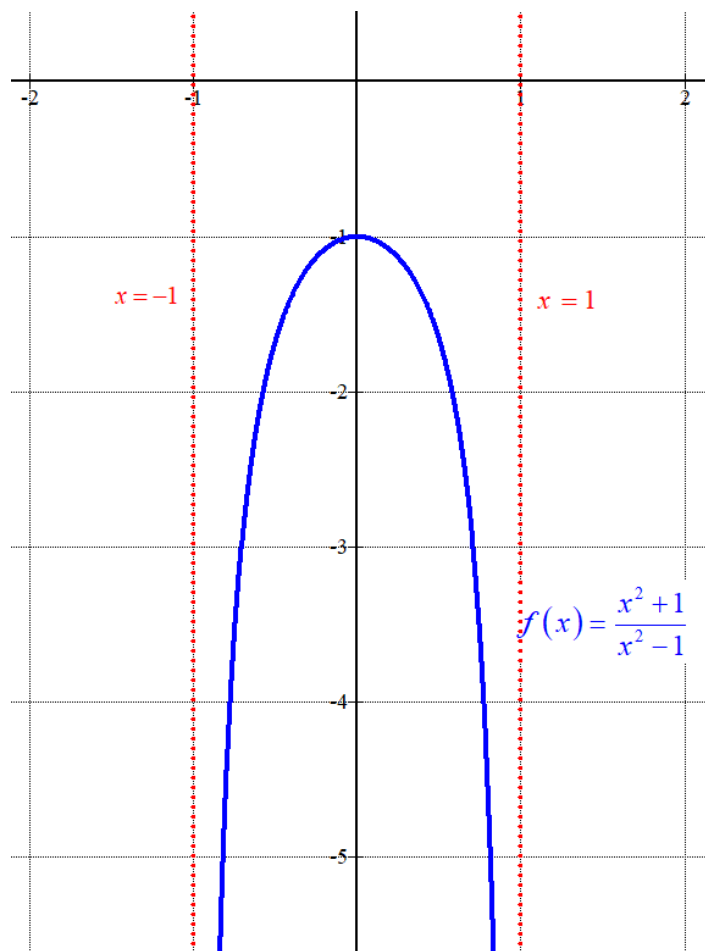
Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

La función presenta un extremo relativo en $x = 0$. Este extremo relativo es un máximo pues la derivada antes de $x = 0$ es positiva y después de $x = 0$ es negativa.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
-0.9	-9.5
-1/2	-1.66
-1/4	-1.13
0	-1
1/4	-1.13
1/2	-1.66
0.9	-9.5



El área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$ es el valor absoluto de la integral definida entre -0.5 y 0.5 de la función. Calculamos primero la integral definida de la función.

$$\int f(x) dx = \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1}{x^2-1} dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1 \\ x = 1 \rightarrow 2 = 2A \rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\dots = x + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + K$$

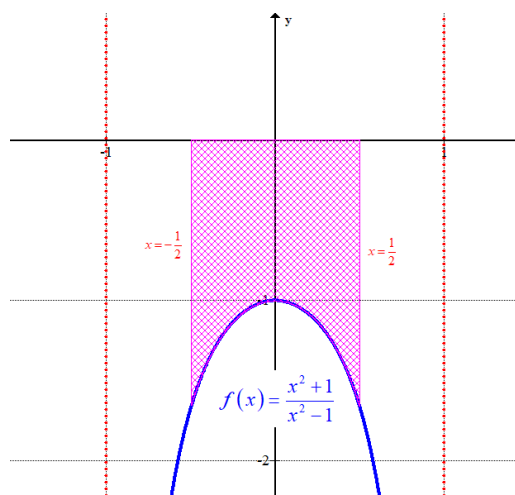
Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$\int_{-0.5}^{0.5} f(x) dx = \left[x + \ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_{-0.5}^{0.5} =$$

$$= \left[0.5 + \ln|0.5-1| - \ln|0.5+1| \right] - \left[-0.5 + \ln|-0.5-1| - \ln|-0.5+1| \right] =$$

$$= 0.5 + \ln 0.5 - \ln 1.5 + 0.5 - \ln 1.5 + \ln 0.5 = 1 + 2 \ln 0.5 - 2 \ln 1.5 \approx -1.197$$

El área tiene un valor aproximado de 1.197 unidades cuadradas.



3. Determina los puntos A, B y C de la recta $x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cuál de estos puntos A, B, C está situado entre los otros dos. (4 puntos)

Los planos coordenados tienen ecuaciones $x=0$, $y=0$ y $z=0$. Hallamos los puntos A, B y C pedidos.

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -12 = \frac{y+6}{2} \rightarrow -24 = y+6 \rightarrow y = -30 \\ -12 = \frac{z-6}{3} \rightarrow -36 = z-6 \rightarrow z = -30 \end{array} \right. \Rightarrow A(0, -30, -30)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-12 = \frac{6}{2} = \frac{z-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-12 = 3 \rightarrow x = 15 \\ 3 = \frac{z-6}{3} \rightarrow 9 = z-6 \rightarrow z = 15 \end{array} \right. \Rightarrow B(15, 0, 15)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3} \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x-12 = \frac{y+6}{2} = \frac{-6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-12 = -2 \rightarrow x = 10 \\ \frac{y+6}{2} = -2 \rightarrow y+6 = -4 \rightarrow y = -10 \end{array} \right. \Rightarrow C(10, -10, 0)$$

Los puntos son $A(0, -30, -30)$, $B(15, 0, 15)$ y $C(10, -10, 0)$.

Averiguamos cuál de los tres puntos está situado entre los otros dos.

Si fuese C el punto situado entre A y B se daría la situación del dibujo.



Los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ deberían tener sentido contrario, por lo que el signo de sus coordenadas debe ser opuesto.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (0, -30, -30) - (10, -10, 0) = (-10, -20, -30) \\ \overrightarrow{CB} = (15, 0, 15) - (10, -10, 0) = (5, 10, 15) \end{array} \right\}$$

Las coordenadas de $\overrightarrow{CA}$ son todas negativas y las de $\overrightarrow{CB}$ son todas positivas. Se cumple lo pedido y el punto C está situado entre A y B.

Existe un error en el dibujo, en la realidad el punto C está más cerca de B que de A.

4. Queremos realizar un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Por eso hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y los hemos preguntado qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y al resto otras formaciones políticas.

Sabiendo que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40% de los votantes del PP son chicas y que el 50% de los votantes del PSIB son chicos, se pide:

- a) La probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica. (4 puntos)
- b) La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP. (2 puntos)
- c) La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica. (4 puntos)

- a) Como 200 estudiantes votaron al PP y de ellos el 40% son chicas tenemos que hay $200 \cdot 0.4 = 80$ chicas que votaron al PP. Como 100 estudiantes votaron al PSIB y el 50 % son chicas tenemos que 50 chicas votaron al PSIB.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Chico	Chica	
PP		$200 \cdot 0.4 = 80$	200
PSIB	$100 \cdot 0.5 = 50$		100
Otros			
	200		500

Completamos la tabla

	Chico	Chica	
PP	120	80	200
PSIB	50	50	100
Otros	30	170	200
	200	300	500

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un estudiante haya votado otras formaciones políticas y sea chica es $\frac{170}{500} = 0.34$.

- b) Hay 200 chicos entre los encuestados y de ellos 120 han votado al PP.

La probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP es $\frac{120}{200} = 0.6$.

- c) A otras formaciones políticas han votado 200 estudiantes y de ellos 170 son chicas.

La probabilidad de que un estudiante que ha votado otras formaciones políticas sea chica es $\frac{170}{200} = 0.85$.

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz X que verifica:

$$A \cdot X \cdot B = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ puntos})$$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X \cdot B = Id \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot Id \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

Hallamos las inversas de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{Adj(B^T)}{|B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & -3-2 \\ -2-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentra los valores a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 5 & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ (6 puntos). Determine en qué(s) punto(s) se verifica lo que asegura el teorema. (4 puntos)

Para que la función verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ debe ser continua en el intervalo $[0, 4]$, derivable en $(0, 4)$ y $f(0) = f(4)$.

Para que la función sea continua en el intervalo $[0, 4]$ debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} cx + 1 = 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + bx + 5 = 4a + 2b + 5 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c + 1 = 4a + 2b + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a + 2b - 2c + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b - c + 2 = 0}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo $[0, 4]$ debe ser derivable en $x = 2$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4a + b \\ f'(2^+) = c \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow 4a + b = c \Rightarrow \boxed{4a + b - c = 0}$$

La tercera condición es que $f(0) = f(4)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(4) &= 4c + 1 \\ f(0) &= f(4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = 4c + 1 \Rightarrow 4c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} \boxed{c = 1} \\ 2a + b - c + 2 &= 0 \\ 4a + b - c &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2a + b - 1 + 2 &= 0 \\ 4a + b - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= -1 - 2a \\ 4a + b - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a - 1 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -1 - 2 = -3}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -3$ y $c = 1$.

Para estos valores la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Buscamos los valores del intervalo $(0, 4)$ que anulan la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{2}{3} \in (-\infty, 2) \\ 1 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

El valor que nos asegura el teorema de Rolle que existe y donde se anula la derivada es

$$x = \frac{2}{3} \in (0, 4).$$

3. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Encontrar el área del triángulo ABC . (10 puntos)

Calculemos las coordenadas de cada uno de los vértices del triángulo del que nos piden su área. El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$ y pasa por el punto medio del segmento PQ . Hallamos su ecuación.

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 6) - (0, 3, 8) = (2, -2, -2)$$

$$\text{Pto medio } PQ = R = \frac{(2, 1, 6) + (0, 3, 8)}{2} = (1, 2, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} R(1, 2, 7) \in \pi \\ \vec{n} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{2} = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} R(1, 2, 7) \in \pi \\ \pi : x - y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 - 7 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D - 8 = 0 \Rightarrow D = 8 \Rightarrow \pi : x - y - z + 8 = 0$$

Hallamos los puntos de corte del plano $\pi : x - y - z + 8 = 0$ con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje } X \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow A(-8, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje } Y \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -y + 8 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - y - z + 8 = 0 \\ \text{Eje } Z \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -z + 8 = 0 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow C(0, 0, 8)$$

El área del triángulo ABC es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ dividido entre 2.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 8, 0) - (-8, 0, 0) = (8, 8, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 8) - (-8, 0, 0) = (8, 0, 8) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64i - 64k - 64j = (64, -64, -64)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{64^2 + (-64)^2 + (-64)^2}}{2} = \boxed{32\sqrt{3} \approx 55.43 \text{ u}^2}$$

4. Consideramos la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio un año determinado. Sea X la variable aleatoria que modela la proporción de estudiantes de la población anterior que elige estudiar un grado de humanidades. Esta variable aleatoria X se modela con una distribución normal de media 0.35 y desviación típica 0.1. Se pide:

- a) ¿cuál es la probabilidad de que en un año cualquier más del 45% de los estudiantes de la población considerada estudien un grado de humanidades? (5 puntos)
- b) En los últimos 10 años, ¿en cuántos años el porcentaje de estudiantes de la población considerada que han escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30%? (5 puntos)

X = Proporción de estudiantes de entre los que han aprobado la selectividad que elige estudiar un grado de humanidades. $X = N(0.35, 0.1)$

a) Nos piden calcular $P(X > 0.45)$.

$$P(X > 0.45) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.45 - 0.35}{0.1}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

0	
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849

b) Calculamos $P(X < 0.3)$.

$$P(X < 0.3) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{0.3 - 0.35}{0.1}\right) = P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

0	
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849

Por tanto, el número de años respecto de los últimos 10 años en el que el porcentaje de estudiantes que ha escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30% está en $10 \cdot 0.3085 = 3.085$. Aproximadamente 3 años.

PBAU Extraordinaria 2017



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

Modelo 1

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. Supongamos que P_1 , P_2 , P_3 y P_4 son las calificaciones de los problemas sobre 10. La calificación final se obtiene de aplicar la fórmula siguiente:

$\frac{4}{15}(P_1 + P_2 + P_3) + \frac{1}{5}P_4$. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

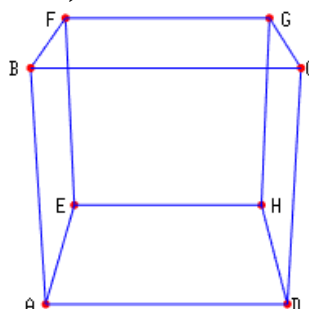
Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años. La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel. Calcula las edades de Joan, Miguel y Gabriel (7 puntos) y qué año nació cada uno. (3 puntos)

2. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres debemos poner otra torreta de 5 metros de altura y debemos extender un cable que una los extremos de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde debemos situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? (7 puntos). ¿Qué vale la longitud del cable en este caso? (3 puntos)

3. Consideramos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas (1, 1, 1), las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Calcula el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos. (3 puntos)
- Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos. (3 puntos)
- Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0.75. Calcula este valor de x minutos. (4 puntos)

Modelo 1

OPCIÓN B

1. a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} ax + y - 2z = -1, \\ -x + ay + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{array} \right\} \quad (6 \text{ puntos})$$

- b) Resuélvelo en el caso que sea compatible. (4 puntos)

2. Considera la función $f(x) = x \cdot |x - 1|$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0, 2]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

3. Dados los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(1, 3, 4)$, determine los puntos situados en el plano $z = 1$ que formen con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

4. Supongamos que los estudiantes de la UIB sólo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: Android e IOS (el de los iPhone). El 80% de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo Android. El 25% de las chicas estudiantes de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45% de los estudiantes de la UIB son chicos.

- a) Calcula la probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil. (6 puntos)
b) Calcula la probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años. La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel. Calcula las edades de Joan, Miquel y Gabriel (7 puntos) y qué año nació cada uno. (3 puntos)

Llamamos “x” a la edad de Joan, “y” a la edad de Miquel y “z” a la edad de Gabriel.

“Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años” $\rightarrow x + y + z = 70$

“La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años” $\rightarrow x + 2y + 3z = 160$.

“La edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel” $\rightarrow z = x + y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x + 2y + 3z = 160 \\ z = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x + 2y + 3z = 160 \\ z - y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z - y + y + z = 70 \\ z - y + 2y + 3z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 70 \rightarrow \boxed{z = \frac{70}{2} = 35} \\ y + 4z = 160 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 4 \cdot 35 = 160 \Rightarrow \boxed{y = 160 - 140 = 20} \Rightarrow$$

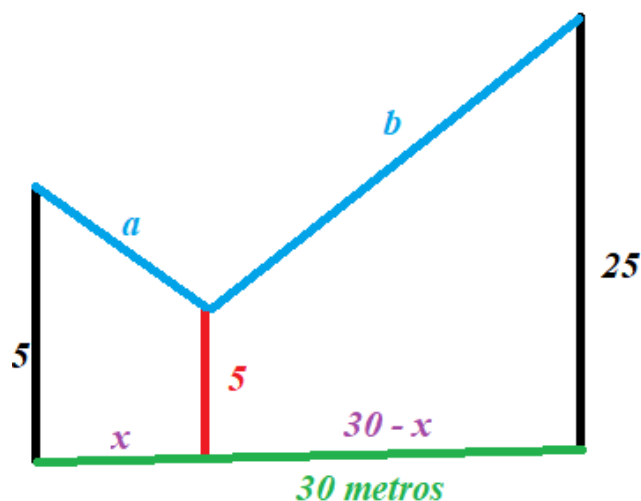
$$\Rightarrow \boxed{x = 35 - 20 = 15}$$

La edad de Joan es 15 años, la de Miquel 20 años y la de Gabriel 35 años.

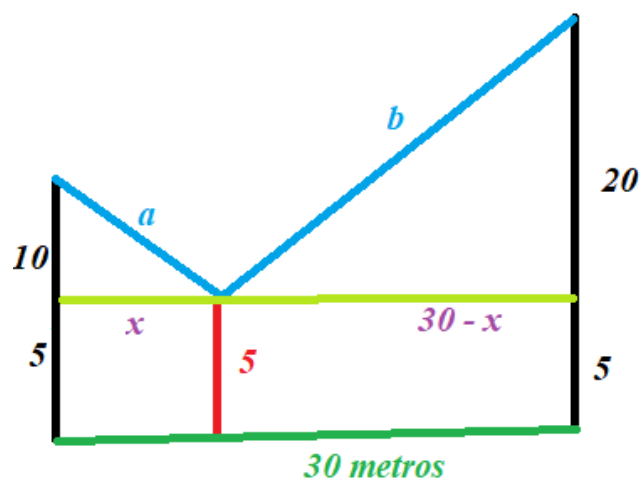
Joan nació en el año $2017 - 15 = 2002$, Miquel nació el año $2017 - 20 = 1997$ y Gabriel nació el año $2017 - 35 = 1982$.

2. Entre dos torres de 15 y 25 metros de altura, respectivamente, hay una distancia de 30 metros. En medio de las dos torres debemos poner otra torreta de 5 metros de altura y debemos extender un cable que una los extremos de arriba de la primera torre con la torreta y los extremos de arriba de ésta con la segunda torre. ¿Dónde debemos situar la torreta de 5 metros para que la longitud total del cable sea mínima? (7 puntos). ¿Qué vale la longitud del cable en este caso? (3 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



Le añadimos una línea imaginaria para obtener triángulos y poder aplicar el teorema de Pitágoras.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos “10” y “x”.

$$10^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{100 + x^2}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos “20” y “30 - x”.

$$20^2 + (30 - x)^2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{400 + x^2 + 900 - 60x} \Rightarrow b = \sqrt{1300 + x^2 - 60x}$$

La longitud del cable es la suma de a y b .

$$L(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{1300 + x^2 - 60x}$$

Derivamos esta función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{100+x^2}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{1300+x^2-60x}} = \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} + \frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} = -\frac{x-30}{\sqrt{1300+x^2-60x}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{100+x^2}} = \frac{30-x}{\sqrt{1300+x^2-60x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{100+x^2})^2} = \frac{(30-x)^2}{(\sqrt{1300+x^2-60x})^2} \Rightarrow \frac{x^2}{100+x^2} = \frac{900+x^2-60x}{1300+x^2-60x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1300+x^2-60x) = (100+x^2)(900+x^2-60x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1300x^2 + \cancel{x^4} - 60x^3 = 90000 + 100x^2 - 6000x + 900x^2 + \cancel{x^4} - 60x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300x^2 + 6000x - 90000 = 0 \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(1)(-300)}}{2} = \frac{-20 \pm 40}{2} = \begin{cases} \frac{-20-40}{2} = -30 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-20+40}{2} = \boxed{10 = x} \end{cases}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 10$.

- Antes de 10 tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$L'(5) = \frac{5}{\sqrt{100+5^2}} + \frac{5-30}{\sqrt{1300+5^2-60 \cdot 5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} + \frac{-25}{5\sqrt{41}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{41}} \approx -0.33 < 0. \text{ La función decrece en } (0, 10).$$

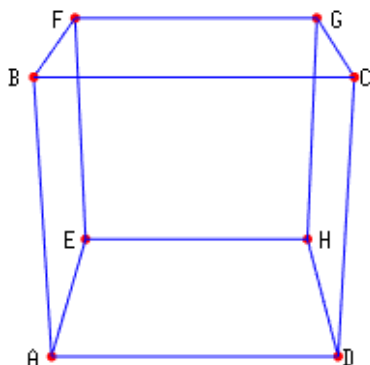
- Después de 10 tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$L'(20) = \frac{20}{\sqrt{100+20^2}} + \frac{20-30}{\sqrt{1300+20^2-60 \cdot 20}} \approx 0.447 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (10, 30).$$

La función tiene un mínimo en $x = 10$. La torreta debe colocarse a 10 metros de la torre más baja.

Como $L(10) = \sqrt{100+10^2} + \sqrt{1300+10^2-60 \cdot 10} = 30\sqrt{2} \approx 42.4264$ la longitud del cable tiene un valor aproximado de 42.4 metros.

3. Consideramos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas (1, 1, 1), las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Calcula el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



El lado AE tiene longitud 2 y es paralelo al eje X por lo que el vector $\overrightarrow{EA} = (2, 0, 0)$.

De la misma manera el vector $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$.

También tenemos que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FB} = (2, 0, 0)$ al ser vectores con la misma dirección, mismo sentido e igual longitud.

De la misma forma $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF} = (0, 0, 2)$.

Hallamos las coordenadas de los vértices del cubo.

El vértice G lo obtenemos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{CG}$:

$$G = C + \overrightarrow{CG} = (1, 1, 1) - \overrightarrow{GC} = (1, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-1, 1, 1)$$

El vértice D lo obtenemos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{CD}$:

$$D = C + \overrightarrow{CD} = (1, 1, 1) - \overrightarrow{DC} = (1, 1, 1) - (0, 0, 2) = (1, 1, -1)$$

El vértice A lo obtenemos sumando al punto D el vector $\overrightarrow{DA}$:

$$A = D + \overrightarrow{DA} = (1, 1, -1) - \overrightarrow{AD} = (1, 1, -1) - (0, 2, 0) = (1, -1, -1)$$

El vértice E lo obtenemos sumando al punto A el vector $\overrightarrow{AE}$:

$$E = A + \overrightarrow{AE} = (1, -1, -1) - \overrightarrow{EA} = (1, -1, -1) - (2, 0, 0) = (-1, -1, -1)$$

Calculamos el plano π que pasa por los puntos A, E, C y G. Este plano tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{EA}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi : \begin{cases} A(1, -1, -1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{EA} = (2, 0, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1) - (1, 1, 1) = (0, -2, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(z+1) + 4(y+1) = 0 \Rightarrow -4z - 4 + 4y + 4 = 0 \Rightarrow 4y - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : y - z = 0}$$

El plano que pasa por los puntos A, E, C y G tiene ecuación $\pi : y - z = 0$.

La recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto D tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0, 1, -1)$$

$$r : \begin{cases} D(1, 1, -1) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{n} = (0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto D tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$$

4. El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas se modela como una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- a) Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de 20 minutos. (3 puntos)
 b) Calcula la probabilidad de que un alumno esté concentrado entre 10 y 30 minutos. (3 puntos)
 c) Nos dicen que la probabilidad de que un alumno esté concentrado más de x minutos vale 0.75. Calcula este valor de x minutos. (4 puntos)

X = El tiempo que un alumno puede estar concentrado y escuchar al profesor en una clase de Matemáticas (en minutos). $X = N(15, 5)$

- a) Nos piden calcular $P(X > 20)$.

$$P(X > 20) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{20-15}{5}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643

- b) Nos piden calcular $P(10 < X < 30)$.

$$P(10 < X < 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{10-15}{5} < Z < \frac{30-15}{5}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1) =$$

$$= P(Z < 3) - P(Z > 1) = P(Z < 3) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9987 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.84}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821
2.2	0.9861
2.3	0.9893
2.4	0.9918
2.5	0.9938
2.6	0.9953
2.7	0.9965
2.8	0.9974
2.9	0.9981
3.0	0.9987

c) Nos dicen que $P(X > x) = 0.75$. Determinamos el valor de x . Al ser la probabilidad mayor de 0.5 la cantidad de minutos debe ser menor de la media (15 minutos).

$$P(X > x) = 0.75 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-15}{5}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} > 0.5 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x-15}{5} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z < -\frac{x-15}{5}\right) = 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x-15}{5} = \frac{0.67 + 0.68}{2} = 0.675 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 15 = 0.675 \cdot 5 \Rightarrow 15 - 0.675 \cdot 5 = x \Rightarrow \boxed{x = 11.625}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.

El 75% de los alumnos puede estar concentrado más de 11.625 minutos.

OPCIÓN B

1. a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{aligned} ax + y - 2z &= -1, \\ -x + ay + z &= 2, \\ 3x + y - z &= 0, \\ y + z &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (6 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso que sea compatible. (4 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ -1 & a & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible los rangos de A y de A/B deben ser iguales, por lo que el determinante de A/B debe ser nulo. En caso contrario el rango de A/B sería 4 y el de A puede ser como mucho 3 (serían distintos).

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2a & 2 & -4 & -2 \\ 2a-1 & a+2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila } 4^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a & & & \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -6 & -3 \\ 3a & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 & -2 & -1 \\ 2a-1 & a+2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3a & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2a-1 & a+2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3a & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(2a-1) - 3a(a+2) - 36 + 9a + 15(a+2) + 4(2a-1) =$$

$$= -10a + 5 - 3a^2 - 6a - 36 + 9a + 15a + 30 + 8a - 4 = -3a^2 + 16a - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 16a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 60}}{2(-3)} = \frac{-16 \pm 14}{-6} = \begin{cases} \frac{-16+14}{-6} = \boxed{\frac{1}{3}} = a \\ \frac{-16-14}{-6} = \boxed{5} = a \end{cases}$$

Analizamos las dos situaciones distintas en las que el sistema puede ser compatible.

CASO 1. $a = \frac{1}{3}$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1/3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la 2ª fila y la 4ª columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} + 0 - 6 + 0 - 3 + \frac{1}{3} = \frac{-25}{3} \neq 0.$$

Este menor de orden 3 con determinante no nulo es válido para el rango de A y el de A/B. El rango de A/B es 3, al igual que el rango de A y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a = 5$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la 2ª fila y la 4ª columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 0 - 6 + 0 - 3 + 5 = 1 \neq 0.$$

Este menor de orden 3 con determinante no nulo es válido para el rango de A y el de A/B. El rango de A/B es 3, al igual que el rango de A y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

b) Para $a = \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} \frac{1}{3}x + y - 2z = -1, \\ -x + \frac{1}{3}y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 6z = -3, \\ -3x + y + 3z = 6, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{cases} \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = -3, \\ -3x + y + 3z = 6, \\ 3x + y - z = 0, \\ y = 3 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3(3 - z) - 6z = -3, \\ -3x + 3 - z + 3z = 6, \\ 3x + 3 - z - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 - 3z - 6z = -3, \\ -3x + 2z = 3, \\ 3x - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 2^a \} \Rightarrow \begin{cases} x - 9z = -12 \\ -3x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9z - 12 \\ -3x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(9z-12)+2z=3 \Rightarrow -27z+36+2z=3 \Rightarrow -25z=-33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{33}{25}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 9\frac{33}{25} - 12 = \frac{-3}{25}} \\ \boxed{y = 3 - \frac{33}{25} = \frac{42}{25}} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = \frac{-3}{25}$; $y = \frac{42}{25}$; $z = \frac{33}{25}$.

Para $a = 5$ el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} 5x + y - 2z = -1, \\ -x + 5y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y + z = 3. \end{array} \right\}$ Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y - 2z = -1, \\ -x + 5y + z = 2, \\ 3x + y - z = 0, \\ y = 3 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3 - z - 2z = -1, \\ -x + 5(3 - z) + z = 2, \\ 3x + 3 - z - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ -x + 15 - 5z + z = 2 \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ -x - 4z = -13 \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 3z = -4 \\ 13 - 4z = x \\ 3x - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(13 - 4z) - 3z = -4 \\ 3(13 - 4z) - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 65 - 20z - 3z = -4 \\ 39 - 12z - 2z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -23z = -69 \\ -14z = -42 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{z = \frac{69}{23} = 3} \\ z = \frac{42}{14} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x = 13 - 4 \cdot 3 = 1} \\ \boxed{y = 3 - 3 = 0} \end{array} \right\}$$

La solución del sistema es $x = 1$; $y = 0$; $z = 3$.

2. Considera la función $f(x) = x \cdot |x-1|$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[0, 2]$. (6 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X. (4 puntos)

Expresamos $f(x)$ como una función a trozos.

$$f(x) = x \cdot |x-1| = \begin{cases} x(1-x) = x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x(x-1) = x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La gráfica son dos trozos de parábola. Hallamos los vértices de las parábolas.

$$f'(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \in (-\infty, 1) \\ 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty) \end{cases}$$

Hay un vértice del primer trozo de parábola en $x = \frac{1}{2}$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función en el intervalo $[0, 2]$.

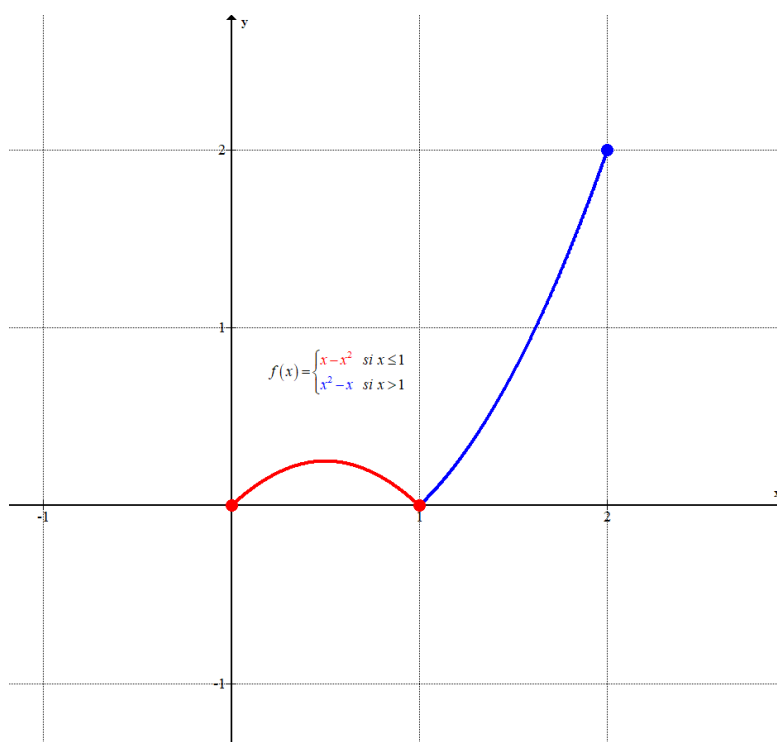
$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$x \leq 1$$

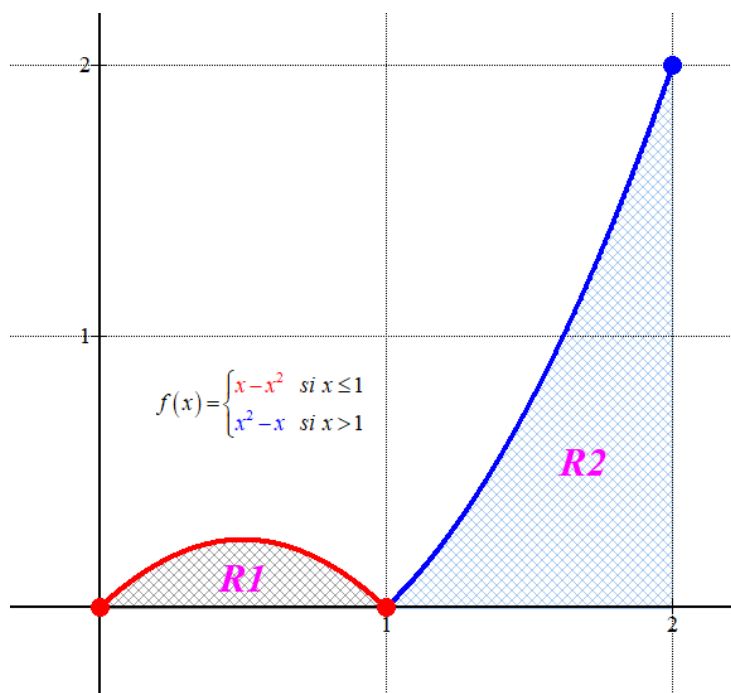
$$x > 1$$

x	$f(x) = x - x^2$
0	0
0.5	0.25
1	0

x	$f(x) = x^2 - x$
1.5	0.75
1.75	1.3125
2	2



El área que nos piden calcular es la del dibujo.



El área de la región R1 es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} \text{Área R1} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

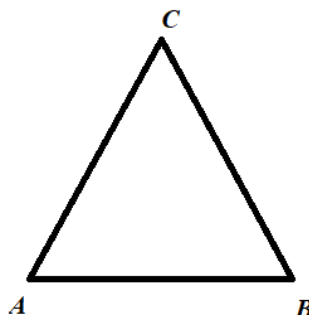
El área de la región R2 es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área R2} &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 - x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right] - \left[\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] = \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

El área total es la suma de las áreas de las dos regiones: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ unidad cuadrada.

3. Dados los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(1, 3, 4)$, determine los puntos situados en el plano $z=1$ que formen con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Calcule el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

Un punto C del plano $z=1$ tiene coordenadas $C(a, b, 1)$.



Un triángulo equilátero tiene todos los lados de la misma longitud. Determinamos dicha longitud averiguando la distancia de A a B (uno de los lados del triángulo).

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 3) \\ B(1, 3, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 3, 4) - (1, 0, 3) = (0, 3, 1)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Aplicamos la condición $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{10}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 3) \\ B(1, 3, 4) \\ C(a, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (a, b, 1) - (1, 0, 3) = (a-1, b, -2) \\ \overrightarrow{BC} = (a, b, 1) - (1, 3, 4) = (a-1, b-3, -3) \end{array} \right.$$

$$d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + b^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-1)^2 + b^2 + 4 = 10 \rightarrow (a-1)^2 = 6 - b^2 \\ (a-1)^2 + (b-3)^2 + 9 = 10 \rightarrow (a-1)^2 + (b-3)^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 6 - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + 9 - 6b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6b = -14 \Rightarrow \boxed{b = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}} \Rightarrow (a-1)^2 = 6 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \Rightarrow (a-1)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow a-1 = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{3}}$$

Existen dos puntos del plano que cumplen lo pedido: $C_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$ y $C_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)$.

El volumen del tetraedro ABC_1O es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_1]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (1, 0, 3) \\ \vec{OB} = (1, 3, 4) \\ \vec{OC}_1 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_1] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 0 + 7 - 9 \frac{3-\sqrt{5}}{3} - 0 - 4 \frac{7}{3} = \frac{9 + 21 - 27 + 9\sqrt{5} - 28}{3} = \frac{-25 + 9\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Volumen } OABC_1 = \frac{1}{6} \frac{|-25 + 9\sqrt{5}|}{3} = \boxed{\frac{25 - 9\sqrt{5}}{18} \approx 0.271 \text{ u}^3}$$

El volumen del tetraedro ABC_2O es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_2]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = (1, 0, 3) \\ \vec{OB} = (1, 3, 4) \\ \vec{OC}_2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 0 + 7 - 9 \frac{3+\sqrt{5}}{3} - 0 - 4 \frac{7}{3} = \frac{9 + 21 - 27 - 9\sqrt{5} - 28}{3} = \frac{-25 - 9\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Volumen } OABC_1 = \frac{1}{6} \frac{|-25 - 9\sqrt{5}|}{3} = \boxed{\frac{25 + 9\sqrt{5}}{18} \approx 2.507 \text{ u}^3}$$

4. Supongamos que los estudiantes de la UIB sólo tienen dos sistemas operativos en sus teléfonos móviles: Android e IOS (el de los iPhone). El 80% de los estudiantes de la UIB tienen el sistema operativo Android. El 25% de las chicas estudiantes de la UIB tienen IOS en su teléfono móvil y el 45% de los estudiantes de la UIB son chicos.

- a) Calcula la probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil. (6 puntos)
 b) Calcula la probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica. (4 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Android	IOS	
Chico			45
Chica		0.25x	x
	80		100

Completamos la tabla.

	Android	IOS	
Chico	38.75	6.25	45
Chica	41.25	0.25·55 = 13.75	55
	80	20	100

- a) Hay un 45 % de chicos en la UIB y un 6.25 tiene IOS en su móvil. La probabilidad de que un chico de la UIB tenga IOS en su teléfono móvil es de $\frac{6.25}{45} = \frac{5}{36} \approx 0.13889$.

- b) Hay un 80 % de los estudiantes con Android y un 41.25 % de chicas con Android. La probabilidad de que un estudiante que tenga Android en el teléfono móvil sea chica es $\frac{41.25}{80} = \frac{33}{64} = 0.515625$

PBAU Ordinaria 2017



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2017

Modelo 2

Conteste de forma clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. Supongamos que P_1 , P_2 , P_3 y P_4 son las calificaciones de los problemas sobre 10. La calificación final se obtiene de aplicar la fórmula siguiente:

$\frac{4}{15}(P_1 + P_2 + P_3) + \frac{1}{5}P_4$. Se valorarán la corrección y claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que lleven información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1. a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} mx + 3z = m, \\ x + 2y - z = 1, \\ 2x + y - z = 2. \end{array} \right\} \quad (7 \text{ puntos})$$

- b) Resuélvelo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

donde t viene dado en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la siguiente semana).

- a) Determine el día de la semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió estos dos días? (6 puntos)
b) Haga un pequeño dibujo de la función anterior durante los 8 días. (4 puntos)

3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

- a) demuestre que se cruzan. (4 puntos)
b) calcule la distancia entre las rectas. (6 puntos)

4. Lanzamos dos dados de 6 caras no trucados y consideramos los siguientes sucesos:

S_7 : "la suma de los resultados de ambos dados es 7".

P : "el producto de los resultados de ambos dados es impar".

- a) Calcula las probabilidades de que ocurran los sucesos anteriores. (6 puntos)
b) ¿Son independientes S_7 y P ? Razona la respuesta. (4 puntos)

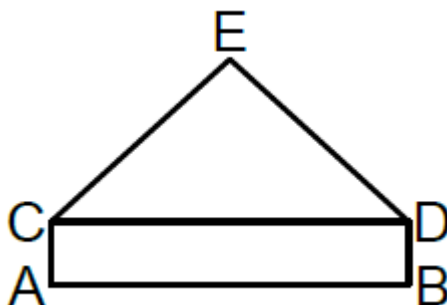
Modelo 2

OPCIÓN B

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito, si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas, y si los utilizamos los tres, tardamos una hora.

Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto, calcule el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

2. Debemos diseñar una ventana como la que sale en la figura adjunta, o sea, el polígono ACEDB, de 30 metros de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima. (10 puntos)



3. Considere las rectas siguientes dependientes de un parámetro λ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda t, \\ r: y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{array} \right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

a) Calcula el valor de λ para que r y s se corten. (4 puntos)

b) Calcula el punto de intersección para el valor de λ calculado. (3 puntos)

4. El test de inteligencia (CI) es una prueba de que en teoría mide la inteligencia del individuo y da un valor que aproximadamente tiene de media 100. O sea, el nivel 100 se supone que es el nivel de inteligencia de una persona normal. Supongamos ahora que el nivel de inteligencia de una determinada población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 10.

a) Calcula el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130. (3 puntos)

b) Calcula el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110. (3 puntos)

c) Nos dicen que el 70% de la población tiene un nivel de inteligencia menor que un cierto umbral. Calcula este umbral. (4 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible.

$$\left. \begin{array}{l} mx + 3z = m, \\ x + 2y - z = 1, \\ 2x + y - z = 2. \end{array} \right\} \quad (7 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) Consideremos la matriz de coeficientes del sistema $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 0 & 3 & m \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2m + 0 + 3 - 12 - 0 + m = -m - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -9}$$

Analizamos las dos situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $m \neq -9$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

El rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $m = -9$

Para este valor hallamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para

obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad -4 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 9 \cdot \text{Fila 2}^a \\ -9 \quad 0 \quad 3 \quad -9 \\ 9 \quad 18 \quad -9 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 18 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad -18 \quad 6 \quad 0 \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-9 \quad 0 \quad 3 \quad -9}^{A/B} \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

El sistema es compatible para cualquier valor de m .

- b) Para $m = -9$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos partiendo de la matriz equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\text{El sistema queda } \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{-9 \quad 0 \quad 3 \quad -9}^{A/B} \\ 0 \quad 18 \quad -6 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -9x + 3z = -9 \\ 18y - 6z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x + z = -3 \\ 3y - z = 0 \end{array} \right\}. \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x + z = -3 \\ 3y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -3 + 3x \\ 3y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + 3 - 3x = 0 \Rightarrow y + 1 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1 + x \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\text{Las soluciones del sistema son } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha ; \alpha \in \mathbb{R} . \\ z = -3 + 3\alpha \end{cases}$$

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10$$

donde t viene dado en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la siguiente semana).

- a) Determine el día de la semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió estos dos días? (6 puntos)
b) Haga un pequeño dibujo de la función anterior durante los 8 días. (4 puntos)

a) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} Q'(t) = -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} \\ Q'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = \boxed{6=t} \\ \frac{8-4}{2} = \boxed{2=t} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: martes y sábado. Sustituimos sus valores en la segunda derivada.

$$Q'(t) = -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} \Rightarrow Q''(t) = -\frac{6t}{8} + \frac{6}{2} = -\frac{3t}{4} + 3 \Rightarrow \begin{cases} Q''(2) = -\frac{3 \cdot 2}{4} + 3 = \frac{6}{4} > 0 \\ Q''(6) = -\frac{3 \cdot 6}{4} + 3 = \frac{-6}{4} < 0 \end{cases}$$

Al ser la segunda derivada positiva en $t = 2$ tenemos un mínimo relativo.

Al ser la segunda derivada negativa en $t = 6$ tenemos un máximo relativo.

Valoramos la función en estos valores y en los extremos del intervalo para determinar el máximo y mínimo absoluto.

$$Q(1) = -\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + 10 = 6.875$$

$$Q(2) = -\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10 = -1 + 6 - 9 + 10 = 6 \text{ ¡Mínimo!}$$

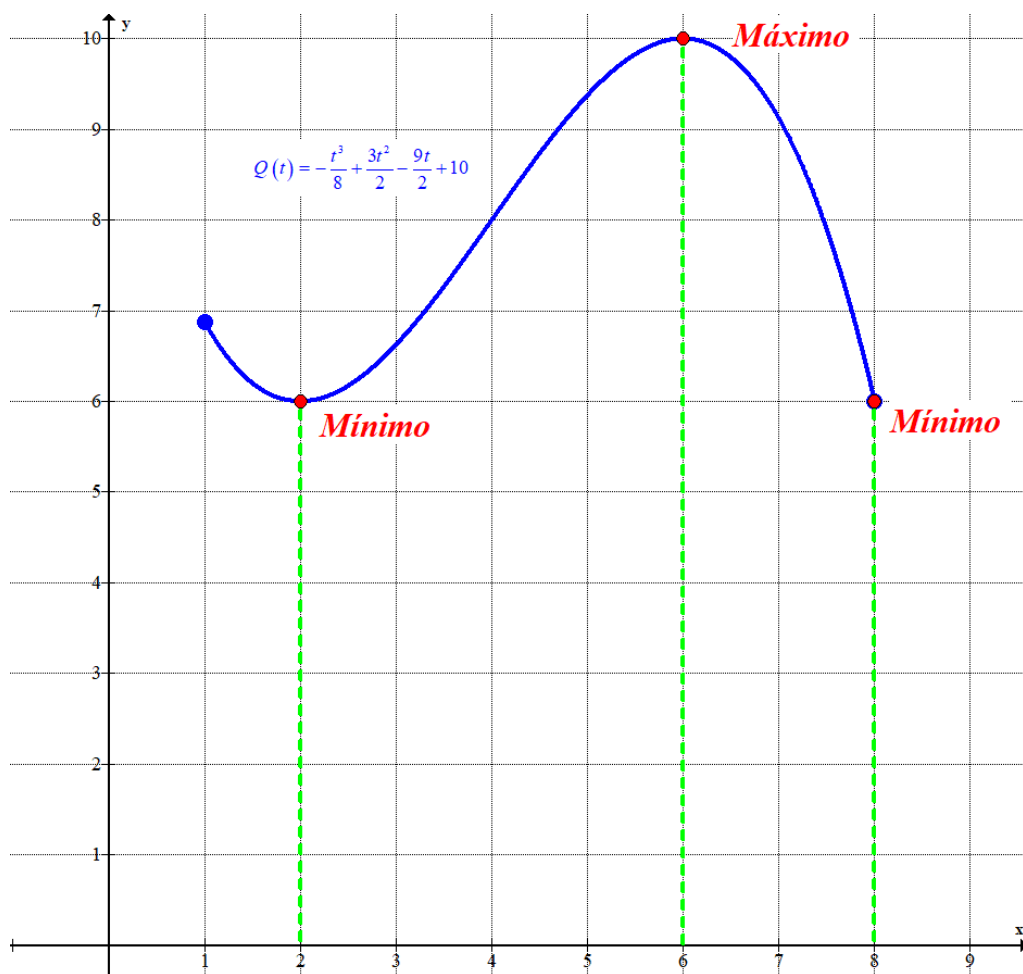
$$Q(6) = -\frac{6^3}{8} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} - \frac{9 \cdot 6}{2} + 10 = -27 + 54 - 27 + 10 = 10 \text{ ¡Máximo!}$$

$$Q(8) = -\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10 = -64 + 96 - 36 + 10 = 6 \text{ ¡Mínimo!}$$

El mínimo de lluvias son 6 litros por metro cuadrado que se produjeron el martes (día 2) y el lunes de la semana siguiente (día 8).

El máximo de lluvias son 10 litros por metro cuadrado que se produjeron el sábado (día 6).

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior podemos esbozar la gráfica de la función.



3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

a) demuestre que se cruzan. (4 puntos)

b) calcule la distancia entre las rectas. (6 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 2, -2) \\ Q_s(0, 2, -1) \end{cases}$$

Comprobamos si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-2}$$

Las coordenadas no son proporcionales y las rectas ni son coincidentes ni paralelas. Las rectas se cortan o cruzan.

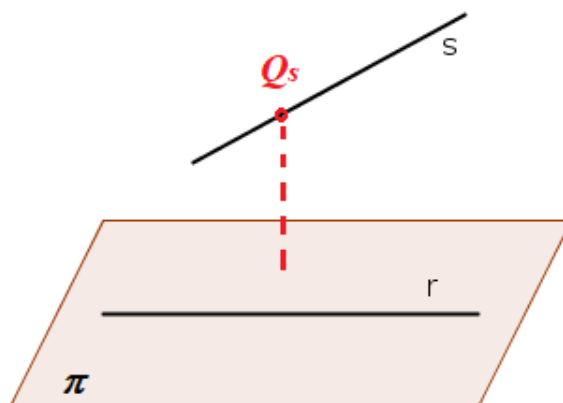
Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 2, -1) - (1, 0, -1) = (-1, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 2 + 8 = 10 \neq 0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan (tienen distinta dirección en planos paralelos)

b) Hallamos el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . La distancia entre las rectas es el valor de la distancia de Q_s al plano π .



El plano π tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,0,-1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (2,3,-1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1,2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6(x-1) - y + 4(z+1) - 3(z+1) + 4y + 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 6 - y + 4z + 4 - 3z - 3 + 4y + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -4x + 3y + z + 5 = 0}$$

Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -4x + 3y + z + 5 = 0 \\ Q_s(0,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r,s) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 1 + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{26}} \approx 1.96 \text{ unidades}$$

4. Lanzamos dos dados de 6 caras no trucados y consideramos los siguientes sucesos:

S_7 : “la suma de los resultados de ambos dados es 7”.

P : “el producto de los resultados de ambos dados es impar”.

a) Calcula las probabilidades de que ocurran los sucesos anteriores. (6 puntos)

b) ¿Son independientes S_7 y P ? Razona la respuesta. (4 puntos)

Al lanzar dos dados no trucados los sucesos elementales que podemos obtener vienen expresados en la tabla siguiente.

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

a) De los 36 resultados posibles sólo hay 6 cuya suma sea 7: 1 6, 2 5, 3 4, 4 3, 5 2 y 6 1. Aplicando

la regla de Laplace tenemos que $P(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$.

Para que el producto sea impar los dos resultados deben ser impares. De los 36 resultados posibles sólo hay 9 en los que ambos sean impares: 1 1, 1 3, 1 5, 3 1, 3 3, 3 5, 5 1, 5 3 y

5 5. Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(P) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$.

b) Para que sean independientes los sucesos debe cumplirse que $P(S_7 \cap P) = P(S_7)P(P)$

$$S_7 \cap P = \{1 6, 2 5, 3 4, 4 3, 5 2, 6 1\} \cap \{1 1, 1 3, 1 5, 3 1, 3 3, 3 5, 5 1, 5 3, 5 5\} = \emptyset$$

Los sucesos S_7 y P no tienen nada en común pues no es posible sumar 7 con dos números impares. La probabilidad del suceso intersección es 0.

$$\left. \begin{array}{l} P(S_7 \cap P) = 0 \\ P(S_7) = \frac{1}{6} \\ P(P) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow P(S_7 \cap P) = 0 \neq \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = P(S_7) \cdot P(P)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos S_7 y P no son independientes.

OPCIÓN B

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito, si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas, y si los utilizamos los tres, tardamos una hora. Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto, calcule el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

Llamamos “x” al caudal del grifo 1 (litros por hora), “y” al caudal del grifo 2, “z” al caudal del grifo 3 y “V” al volumen del depósito.

“Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito” $\rightarrow 10x = V$

“Si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas” $\rightarrow 4x + 4y = V$

“Si los utilizamos los tres, tardamos una hora” $\rightarrow x + y + z = V$

“La suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto” $\rightarrow x + y + z = 60 \cdot 10$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

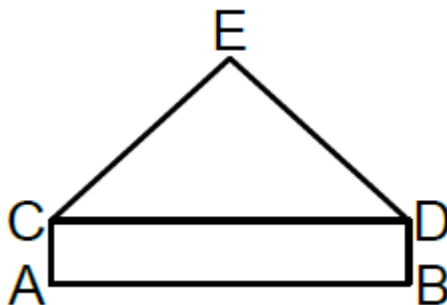
$$\left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ x + y + z = 60 \cdot 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ x + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10x = V \\ 4x + 4y = V \\ x + y + z = V \\ \boxed{V = 600} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 10x = 600 \rightarrow \boxed{x = \frac{600}{10} = 60} \\ \Rightarrow 4x + 4y = 600 \\ x + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 60 + 4y = 600 \\ 60 + y + z = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

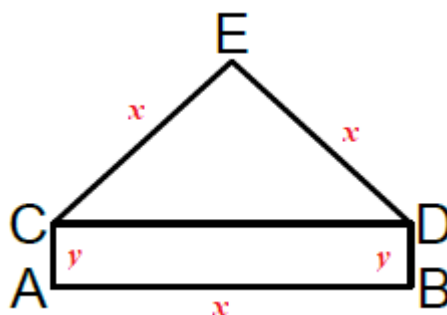
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow 4y = 600 - 240 \rightarrow \boxed{y = \frac{360}{4} = 90} \\ y + z = 600 - 60 = 540 \end{array} \right\} \Rightarrow 90 + z = 540 \Rightarrow \boxed{z = 540 - 90 = 450}$$

El caudal del grifo 1 es de 60 litros por hora, el grifo 2 tiene un caudal de 90 litros por hora y el grifo 3 un caudal de 450 litros por hora.

2. Debemos diseñar una ventana como la que sale en la figura adjunta, o sea, el polígono ACEDB, de 30 metros de perímetro. Se trata de un rectángulo con un triángulo equilátero encima. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima. (10 puntos)



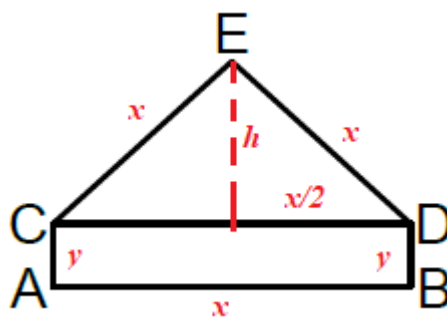
Le ponemos nombre a los lados del polígono.



Igualamos el perímetro a 30: $3x + 2y = 30$. Despejamos “y”.

$$3x + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 30 - 3x \Rightarrow y = \frac{30 - 3x}{2}$$

Determinamos la expresión del área de la ventana como la suma del área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Determinamos primero la expresión de “h”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \Rightarrow x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy + \frac{x \cdot h}{2} \\ y = \frac{30-3x}{2} \\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{30-3x}{2} + \frac{x}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{30x-3x^2}{2} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{60x-6x^2+x^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A(x) = \frac{60x + x^2(-6 + \sqrt{3})}{4}$$

Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{60x + x^2(-6 + \sqrt{3})}{4} \Rightarrow A'(x) = \frac{60 + 2x(-6 + \sqrt{3})}{4} = \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2} = 0 \Rightarrow 30 + x(-6 + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-6 + \sqrt{3}) = -30 \Rightarrow x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}} \approx 7.03$$

Tenemos un punto crítico $x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{30 + x(-6 + \sqrt{3})}{2} \Rightarrow A''(x) = \frac{-6 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow A''(7.03) = \frac{-6 + \sqrt{3}}{2} \approx -2.1 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área presenta un máximo relativo en $x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}$.

Calculamos el valor de “y”.

$$y = \frac{30-3x}{2} = \frac{30-3 \frac{30}{6-\sqrt{3}}}{2} = \frac{180-90\sqrt{3}-90}{2(6-\sqrt{3})} = \frac{90-90\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})} = \frac{30(3-\sqrt{3})}{2(6-\sqrt{3})} = \frac{15(3-\sqrt{3})}{6-\sqrt{3}} \approx 4.4563$$

Las dimensiones del rectángulo que hacen máxima el área son $x = \frac{30}{6 - \sqrt{3}}$ e $y = \frac{15(3 - \sqrt{3})}{6 - \sqrt{3}}$.

3. Considere las rectas siguientes dependientes de un parámetro λ :

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

a) Calcula el valor de λ para que r y s se corten. (4 puntos)

b) Calcula el punto de intersección para el valor de λ calculado. (3 puntos)

a) Determinamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (\lambda, 1, -2) \\ P_r(1, -1, 3) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (\lambda, 2\lambda, -1) \\ Q_s(2, 0, 3) \end{cases}$$

Para que las rectas se corten el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ debe ser nulo.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 0, 3) - (1, -1, 3) = (1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (\lambda, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (\lambda, 2\lambda, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 2\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda = 3\lambda - 1$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0 \Rightarrow 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$$

Comprobamos que para el valor encontrado los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \left(\frac{1}{3}, 1, -2\right) \\ \vec{v}_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{\frac{1}{3}} \neq \frac{-2}{-1}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales y las rectas no son coincidentes ni paralelas.

Para $\lambda = \frac{1}{3}$ los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y el producto mixto

$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ es nulo. Las rectas r y s se cortan.

b) Para hallar el punto de corte de las rectas resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones,

$$s: \frac{x-2}{1/3} = \frac{y}{2/3} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1\right) \\ Q_s(2, 0, 3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}\alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{3}\alpha = 1 + \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{3}\alpha = -1 + t \\ 3 - \alpha = 3 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + \alpha = 3 + t \\ 2\alpha = -3 + 3t \\ \alpha = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2t = 3 + t \\ 4t = -3 + 3t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}(-3) = 0 \\ y = -1 - 3 = -4 \\ z = 3 - 2(-3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0, -4, 9)}$$

El punto de intersección de las dos rectas es $P(0, -4, 9)$.

4. El test de inteligencia (CI) es una prueba de que en teoría mide la inteligencia del individuo y da un valor que aproximadamente tiene de media 100. O sea, el nivel 100 se supone que es el nivel de inteligencia de una persona normal. Supongamos ahora que el nivel de inteligencia de una determinada población sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 10.

- Calcula el porcentaje de la población que se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si tiene un nivel de inteligencia superior a 130. (3 puntos)
- Calcula el porcentaje de la población con un nivel de inteligencia entre 90 y 110. (3 puntos)
- Nos dicen que el 70% de la población tiene un nivel de inteligencia menor que un cierto umbral. Calcula este umbral. (4 puntos)

$X = \text{CI resultado del test de inteligencia. } X = N(100, 10)$

- a) Calculamos $P(X > 130)$.

$$P(X > 130) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{130-100}{10}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821
2.2	0.9861
2.3	0.9893
2.4	0.9918
2.5	0.9938
2.6	0.9953
2.7	0.9965
2.8	0.9974
2.9	0.9981
3.0	0.9987
3.1	0.9990

Hay un 0.13 % de la población que se considera superdotada.

- b) Calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$\begin{aligned}
 P(90 < X < 110) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{90-100}{10} < Z < \frac{110-100}{10}\right) = \\
 &= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = \\
 &= P(Z < 1) - P(Z > 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826}
 \end{aligned}$$

	0
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643

Un 68.26 % de la población tiene un nivel de inteligencia entre 90 y 110.

- c) Nos dicen que $P(X < a) = 0.70$. Determinamos el valor de a . Al ser la probabilidad mayor de 0.5 el nivel de inteligencia debe ser mayor que la media (100).

$$\begin{aligned}
 P(X < a) = 0.70 &\Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-100}{10}\right) = 0.7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{a-100}{10} = \frac{0.52 + 0.53}{2} = 0.525 \Rightarrow a - 100 = 5.25 \Rightarrow \boxed{a = 105.25}
 \end{aligned}$$

	0	1	2	3
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357

El 70% de la población tiene un nivel de inteligencia inferior a 105.25.