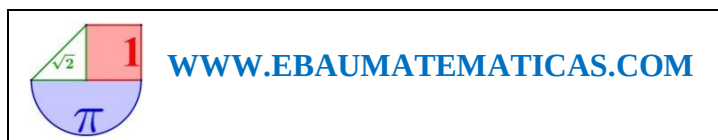


MATEMÁTICAS II

PAU CANARIAS

2017 a 2025



Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas EBAU de las Islas Canarias desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Julio 2025 Matemáticas II en Canarias	3
PAU Junio 2025 Matemáticas II en Canarias	17
EBAU Julio 2024 Matemáticas II en Canarias.....	32
EBAU Junio 2024 Matemáticas II en Canarias.....	47
EBAU Julio 2023 Matemáticas II en Canarias.....	63
EBAU Junio 2023 Matemáticas II en Canarias.....	79
EBAU Julio 2022 Matemáticas II en Canarias.....	94
EBAU Junio 2022 Matemáticas II en Canarias.....	110
EBAU Julio 2021 Matemáticas II en Canarias.....	124
EBAU Junio 2021 Matemáticas II en Canarias.....	135
EBAU Septiembre 2020 Matemáticas II en Canarias	149
EBAU Julio 2020 Matemáticas II en Canarias.....	161
EBAU Julio 2019 Matemáticas II en Canarias.....	175
EBAU Junio 2019 Matemáticas II en Canarias.....	186
EBAU Julio 2018 Matemáticas II en Canarias.....	197
EBAU Junio 2018 Matemáticas II en Canarias.....	208
EBAU Julio 2017 Matemáticas II en Canarias.....	221
EBAU Junio 2017 Matemáticas II en Canarias.....	232



PAU Julio 2025 Matemáticas II en Canarias
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2024–2025

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(4)
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5t}}$$

- a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente? 0.25
- b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado. 0.75
- c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta. 0.75
- d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga? 0.75

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2.5

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad 2.5$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}; \quad \pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r .

1.5

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π .

1

3B. En el espacio tridimensional se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

a) Comprobar que r y s son coplanarias.

1.5

b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

1

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.

1.5

b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

1

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

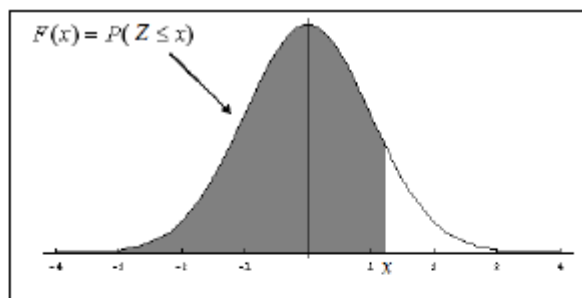
Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.

1.75

b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

0.75



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5t}}$$

- a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente? 0.25
- b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado. 0.75
- c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta. 0.75
- d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga? 0.75

a) El valor de la función para $t = 0$ es $H(0) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 0}} = \frac{6400}{1 + 159} = 40$. Inicialmente en el hormiguero hay 40 hormigas.

b) En el último mes del año hay $H(12) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 12}} \approx 4590.7$. Aproximadamente hay 4591 hormigas.

$$TVM(0,12) = \frac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \frac{4591 - 40}{12} = 379.25$$

La tasa media de crecimiento el primer año la redondeamos como 379 hormigas por mes. Realizamos el cálculo para el segundo año.

$$TVM(12,24) = \frac{H(24) - H(12)}{24 - 12} = \frac{\frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 24}} - 4591}{12} = 150.24$$

La tasa media de crecimiento el segundo año la redondeamos como 150 hormigas por mes.

La tasa de crecimiento pasa de 379 hormigas al mes en el primer año a 150 hormigas al mes el segundo año. Interpretamos que el crecimiento de la colonia se va ralentizando con el paso de los años.

c) Calculamos la derivada de la función y averiguamos si siempre es positiva.

$$H(t) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} \Rightarrow H'(t) = \frac{0 - 6400 \cdot (-0.5 \cdot 159e^{-0.5t})}{(1+159e^{-0.5t})^2} = \frac{508800 \cdot e^{-0.5t}}{(1+159e^{-0.5t})^2}$$

El denominador está elevado al cuadrado y siempre será positivo.

En el numerador tenemos una constante positiva multiplicada por una exponencial, que siempre es positiva. Este cociente es siempre positivo. Al ser la derivada siempre positiva la función es siempre creciente.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{1+159e^{-\infty}} = \frac{6400}{1+159 \cdot 0} = 6400$$

La población de hormigas es siempre creciente pero no sobrepasa los 6400 individuos en el hormiguero.

d) Averiguamos cuando $H(t) = \frac{6400}{2} = 3200$.

$$\left. \begin{array}{l} H(t) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} \\ H(t) = \frac{6400}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{2} \Rightarrow 1+159e^{-0.5t} = 2 \Rightarrow 159e^{-0.5t} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0.5t} = \frac{1}{159} \Rightarrow \ln e^{-0.5t} = \ln\left(\frac{1}{159}\right) \Rightarrow -0.5t = -\ln(159) \Rightarrow t = \frac{\ln(159)}{0.5} \approx 10.14$$

La población de hormigas alcanza la mitad de su capacidad a los 10 meses.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2.5

Llamamos x = cantidad (Kg) de producto vegetal (P1), y = cantidad (Kg) de harina (P2),
 z = cantidad (Kg) de producto cárnico (P3).

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Proteína (kg)	Grasa (kg)	Carbohidratos (kg)
Vegetales (x)	$0.20x$	$0.10x$	$0.10z$
Harina (y)	$0.40y$	$0.20y$	$0.30z$
Carne (z)	$0.60z$	$0.10z$	$0.30z$
TOTALES	$0.2x + 0.4y + 0.6z$	$0.1x + 0.2y + 0.1z$	$0.1x + 0.3y + 0.3z$

En 1000 kg de producto debe haber un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. Debe haber $0.36 \cdot 1000 = 360$ kg de proteína, $0.12 \cdot 1000 = 120$ kg de grasa y $0.20 \cdot 1000 = 200$ kg de carbohidratos.

Nos quedan las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 0.2x + 0.4y + 0.6z = 360 \\ 0.1x + 0.2y + 0.1z = 120 \\ 0.1x + 0.3y + 0.3z = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 6z = 3600 \\ x + 2y + z = 1200 \\ x + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1800 \\ x = 1200 - z - 2y \\ x + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1200 - z - 2y + 2y + 3z = 1800 \\ 1200 - z - 2y + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 600 \\ y + 2z = 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{600}{2} = 300 \\ y = 800 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 800 - 600 = 200} \Rightarrow \boxed{x = 1200 - 300 - 400 = 500}$$

Se necesitan 500 kg de producto vegetal, 200 kg de harina y 300 de productos cárnicos.

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad 2.5$$

Obtenemos la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -18+17 & -8+3 & -12+13 \\ -9+17 & -4+3 & -6+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sustituimos en el sistema matricial y nos queda

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{aligned} 3 \times \rightarrow 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ -2 \times \rightarrow 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 12X - 15Y &= \begin{pmatrix} -3 & -15 & 3 \\ 24 & -3 & 21 \end{pmatrix} \\ -12X - 8Y &= \begin{pmatrix} -20 & -8 & 20 \\ -24 & -20 & -44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\hline -23Y = \begin{pmatrix} -23 & -23 & 23 \\ 0 & -23 & -23 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{-1}{23} \begin{pmatrix} -23 & -23 & 23 \\ 0 & -23 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 6X + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6X = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}; \quad \pi: x-y+2z-5=0$$

a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r . 1.5

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π . 1

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones planteada por las ecuaciones de recta y plano.

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y=-x-z \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+x+z+z=10 \\ x+x+z+2z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \\ \pi: x-y+2z-5=0 &\Rightarrow \begin{cases} 3x+2z=10 \\ 2x+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-4z=-20 \\ 6x+9z=15 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{5z=-5}{5} \Rightarrow \boxed{z=-1} \Rightarrow 2x+3(-1)=5 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x=4} \Rightarrow \boxed{y=-4-(-1)=-3} \end{aligned}$$

La recta corta el plano en un único punto de coordenadas $P(4, -3, -1)$.

La recta s contenida en el plano tiene que ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (1, -1, 2)$. También debe cortar perpendicularmente a la recta r , por lo que debe pasar por el punto P y debe ser perpendicular al vector director de la recta r .

Hallamos el vector director de la recta r .

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z=-x-y \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow 2x-y-x-y=10 \Rightarrow x-2y=10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x=10+2y} \Rightarrow z=-10-2y-y=-10-3y \Rightarrow r: \begin{cases} x=10+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-10-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(10, 0, -10) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -3) \end{cases} \end{aligned}$$

La recta s tiene como vector director el producto vectorial de $\vec{n} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v}_r = (2, 1, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3i + 4j + k + 2k + 3j - 2i = i + 7j + 3k = (1, 7, 3)$$

$$s: \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = (1, 7, 3) \\ P(4, -3, -1) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=4+\alpha \\ y=-3+7\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-1+3\alpha \end{cases}$$

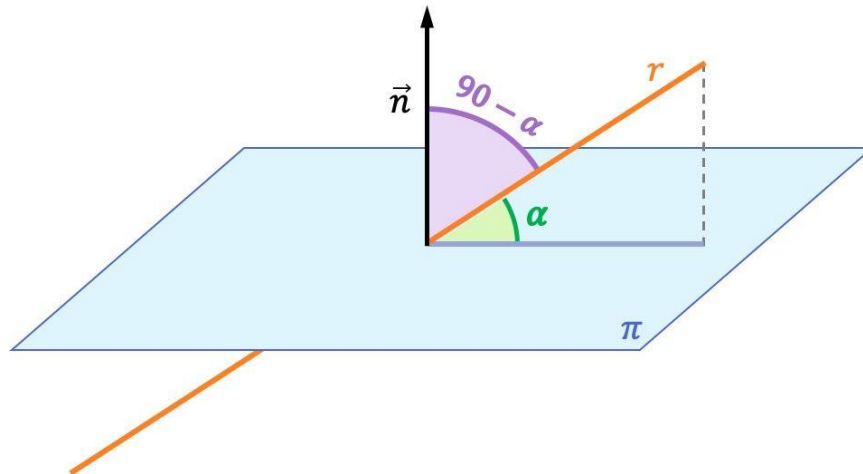
La recta buscada es $s: \begin{cases} x = 4 + \alpha \\ y = -3 + 7\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases}$

b) Hallamos el ángulo que forman el vector normal del plano π y el vector director de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, -1, 2)(2, 1, -3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 - 1 - 6|}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}}$$

$$(\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{84}}\right) \approx 57^\circ$$

El ángulo que forman la recta r y el plano π tiene un valor aproximado de $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$.



3B. En el espacio tridimensional se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \quad s: x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

- | | |
|---|-----|
| a) Comprobar que r y s son coplanarias. | 1.5 |
| b) Hallar la ecuación del plano que las contiene. | 1 |

a) Para que las dos rectas sean coplanarias deben ser coincidentes, paralelas o cortarse en un único punto. Hallamos las ecuaciones paramétricas de las rectas, así como un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-x+2z \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow 2x+3-x+2z-6z=2 \Rightarrow x-4z=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1+4z \Rightarrow y=3+1-4z+2z=4-2z \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r=(4,-2,1) \\ P_r(-1,4,0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s=(1,3,2) \\ Q_s(1,0,-1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(4,-2,1) \\ \vec{u}_s=(1,3,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s}=(1,0,-1)-(-1,4,0)=(2,-4,-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(4,-2,1) \\ \vec{u}_s=(1,3,2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s}=(2,-4,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 8 - 4 - 6 - 2 + 32 = 0$$

El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0$, por lo que las rectas se cortan y por tanto son coplanarias.

- b) El plano π que contiene ambas rectas tiene como vectores directores del plano los vectores directores de las rectas y contiene al punto $Q_s(1,0,-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (1, 3, 2) \\ Q_s(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 + y + 12z + 12 + 2z + 2 - 8y - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x - 7y + 14z + 21 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 2z - 3 = 0}$$

El plano que contiene las rectas r y s tiene ecuación $\pi : x + y - 2z - 3 = 0$.

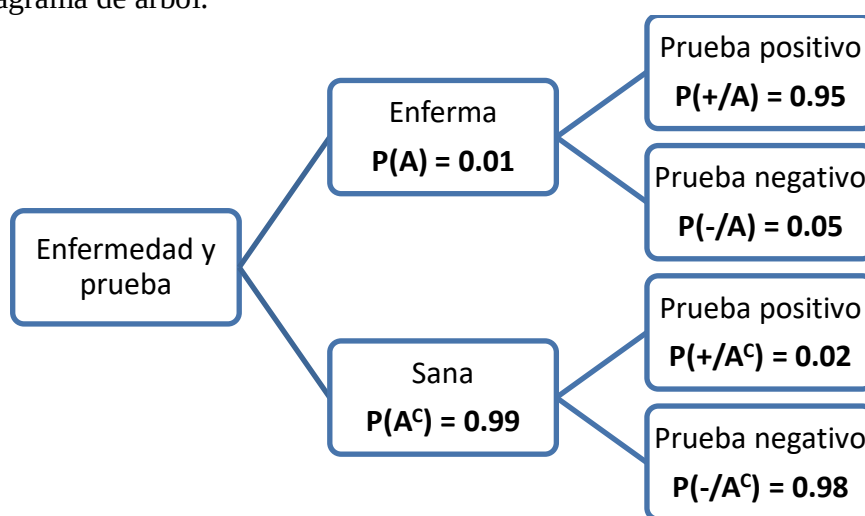
Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo. 1.5

b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test? 1

Dibujamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A/+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/+) = \frac{P(A \cap +)}{P(+)} = \frac{P(A)P(+/A)}{P(A)P(+/A) + P(A^c)P(+/A^c)} =$$

$$= \frac{0.01 \cdot 0.95}{0.01 \cdot 0.95 + 0.99 \cdot 0.02} = \boxed{\frac{95}{293} \approx 0.3242}$$

La probabilidad de que una persona que da positivo en la prueba esté realmente enferma es de 0.3242.

b) Calculamos la probabilidad de que una persona esté enferma cuando da negativo en la prueba, es decir, calculamos $P(A/-)$.

$$P(A/-) = \frac{P(A \cap -)}{P(-)} = \frac{P(A)P(-/A)}{1 - P(+)} = \frac{0.01 \cdot 0.05}{1 - \frac{95}{293}} = \frac{293}{396000} \approx 0.00074$$

En una población de 35000 personas sometidas a esta prueba se espera que

$$\frac{293}{396000} \cdot 35000 = \frac{10255}{396} \approx 25.896 \text{ personas den negativo a pesar de estar enfermas.}$$

Aproximadamente 26 personas. Esta cifra es menor de 50.

No es cierto que se esperen más de 50 personas enfermas con resultado negativo en la prueba.

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria. 1.75

b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida? 0.75

X = número de solicitudes de estudiantes de nuevo ingreso para plazas en residencias de estudiantes de islas no capitalinas.

Las solicitudes enviadas son independientes. La proporción de estos estudiantes que solicitan plaza en una residencia universitaria es $p = 0.27$

$X = B(1800, 0.27)$

Esta binomial la aproximamos con una variable Y normal de media $\mu = np = 1800 \cdot 0.27 = 486$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1800 \cdot 0.27 \cdot 0.73} \approx 18.84$. $Y = N(486, 18.84)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 486 > 5$ y $nq = 1800 \cdot 0.73 = 1314 > 5$.

a) Calculamos $P(460 \leq X \leq 510)$.

$$P(460 < X < 510) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(460.5 \leq Y \leq 509.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{460.5 - 486}{18.84} \leq Z \leq \frac{509.5 - 486}{18.84}\right) = P(-1.35 \leq Z \leq 1.25) =$$

$$= P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -1.35) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 1.35) =$$

$$= P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 1.35)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 1 + 0.9115 = \boxed{0.8059}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8
1,3	0,9049	0,9068	0,9086	0,9104	0,9122	0,9141	0,9

Hay un 80.59% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria. Este porcentaje de 80.59 es **menor** de 90 y no es cierto lo que se afirma.

b) Calculamos la probabilidad de que las solicitudes sean más de 525: $P(X > 525)$.

$$\begin{aligned} P(X > 525) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 525.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{525.5 - 486}{18.84}\right) = P(Z > 2.1) = 1 - P(Z \leq 2.1) = 1 - 0.9821 = \boxed{0.0179} \end{aligned}$$

La probabilidad de que deban acometer la construcción de nuevas residencias universitarias es de 0.0179.



PAU Junio 2025 Matemáticas II en Canarias
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PAU
CURSO 2024–2025

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: JUNIO_VIERNES_6

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que -0.5 ($mg/L/h$). 0.75
- c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 0.75
- d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? 0.5

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} . 1
- b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.5$$

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k . 1.25
 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - I$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$. 0.25
 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1.25

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1, 0, 2); \quad \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r . 1
 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π . 1.5

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

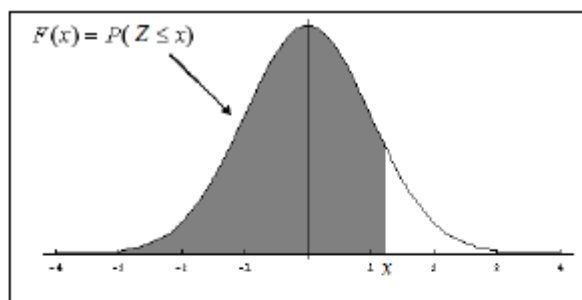
Responder a las siguientes cuestiones:

- a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.
 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?
 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que -0.5 ($mg/L/h$). 0.75
- ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 0.75
- Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? 0.5

a) Esta función en el intervalo $[0, 2)$ es $f(x) = x^2 - 6x + 11$ que es continua.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$, donde el radicando es positivo en el

intervalo indicado: $x > 2 \rightarrow 5x > 10 \rightarrow 5x - 1 > 9$.

Falta estudiar la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{9}{\sqrt{5 \cdot 2 - 1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 6x + 11 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$$

La función es continua en $x = 2$.

La función es continua en su dominio $[0, +\infty)$.

b) En un entorno de $x = 3$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$. Obtenemos la derivada de la función para $x = 3$.

$$f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 9(5x-1)^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = 9 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 5(5x-1)^{-1/2-1} = \frac{-45}{2}(5x-1)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} \Rightarrow f'(3) = \frac{-45}{2\sqrt{(5 \cdot 3 - 1)^3}} = \frac{-45}{2\sqrt{14^3}} = \boxed{\frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.4295 > -0.5}$$

Hemos comprobado que $f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.4295 > -0.5$.

c) Buscamos los puntos donde la derivada se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \rightarrow x=3 \notin [0,2) \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La derivada nunca se anula y el signo de la misma es igual en cada intervalo.

En el intervalo $[0,2)$ la derivada es $f'(x) = 2x-6$ que siempre es negativa para $0 \leq x < 2$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}}$ que también es negativa.

La función siempre decrece.

La función es continua y siempre decrece por lo que la concentración máxima se producirá en $x=0$, siendo esta concentración $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11 \text{ mg/L}$.

d) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

Pasado un largo periodo de tiempo la concentración de la bacteria es 0 mg/L.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} .

b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.5$$

a) Comprobamos el valor del determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de M es distinto de cero e independiente del valor de a , la matriz M es invertible para cualquier valor de a .

Hallamos la expresión de la inversa de la matriz M .

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a-3 & 2-a \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2-a & -a+3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = -1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$MA = B - MX \Rightarrow MX = B - MA \Rightarrow X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - M^{-1}MA = M^{-1}B - A$$

Para $a = -1$ la inversa de la matriz M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinamos la expresión de X .

$$\begin{aligned} X = M^{-1}B - A &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3+4 & 0-8 & -9-4 \\ -1+1 & 0-2 & -3-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k . 1.25

b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

1.25

a) Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k + 8k - 20 = 5k^2 + 16k + 12$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5k^2 + 16k + 12 = 0 \Rightarrow k = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{-16 \pm 4}{10} = \begin{cases} \frac{-16 + 4}{10} = \boxed{-1.2 = k} \\ \frac{-16 - 4}{10} = \boxed{-2 = k} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq -1.2$ y $k \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = -1.2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1.2 & 1 \\ -4 & 4 & -1.2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} -1.2 & 1 \\ 4 & -1.2 \end{vmatrix} = 1.44 - 4 = -2.56 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $k = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. La fila tercera es proporcional a la segunda y la

columna segunda es proporcional a la tercera. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $k \neq -1.2$ y $k \neq -2$ el rango de A es 3 y si $k = -1.2$ o $k = -2$ el rango de A es 2.

b) Para $k = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobamos si se cumple la igualdad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Se observa que se cumple la igualdad $A^2 = 2A - I$.

Comprobamos que se cumple $A^4 = 4A - 3I$.

$$\boxed{A^4} = A^2 A^2 = \{A^2 = 2A - I\} = (2A - I)(2A - I) = 4A \cdot A - 2A - 2A + I \cdot I =$$

$$= 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = \boxed{4A - 3I}$$

Queda demostrado que se cumple la igualdad $A^4 = 4A - 3I$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$. 0.25
- b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
- c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1.25

a) Comprobamos si el punto P pertenece a la recta r_1 .

$$\begin{aligned} & \text{¿} P(2, -1, 1) \in r_1 ? \\ & r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 3 - 3 = 2 \\ 4 + 3 - 6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡SIIIII!} \end{aligned}$$

Se cumplen las dos igualdades y el punto P pertenece a la recta r_1 .Comprobamos si el punto P pertenece a la recta r_2 .

$$\begin{aligned} & \text{¿} P(2, -1, 1) \in r_2 ? \\ & r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+3}{2} = 2 - (-1) = \frac{1+4}{3} \\ \frac{5}{2} = 2 + 1 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{¡NOOOO!} \end{aligned}$$

No se cumplen las igualdades y el punto P no pertenece a la recta r_2 .

b) Hallamos el punto Q de intersección de las dos rectas.

$$r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (2, -1, 3) \\ A(-3, 2, -4) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -4 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \\ & r_2: \begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -4 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(-3 + 2\alpha) + 3(2 - \alpha) - 3(-4 + 3\alpha) = 2 \\ 2(-3 + 2\alpha) - 3(2 - \alpha) - 6(-4 + 3\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 + 8\alpha + 6 - 3\alpha + 12 - 9\alpha = 2 \\ -6 + 4\alpha - 6 + 3\alpha + 24 - 18\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha = -4 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ -11\alpha = -11 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -4 + 3 \cdot 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-1, 1, -1)}$$

El punto de corte de las dos rectas es $Q(-1,1,-1)$.

La distancia del punto P al punto Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(2,-1,1) \\ Q(-1,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1,1,-1) - (2,-1,1) = (-3,2,-2)$$

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{17} \approx 4.12}$$

La distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 vale $\sqrt{17} \approx 4.12$ unidades.

c) Hallamos el ángulo que forman sus respectivos vectores directores.

$$r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \vec{v}_2 = (2,-1,3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2,-1,1) \in r_1 \\ Q(-1,1,-1) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 = \overrightarrow{PQ} = (-3,2,-2)$$

$$\cos(\vec{v}_2, \vec{u}_1) = \frac{|\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1|}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{u}_1|} = \frac{|(2,-1,3) \cdot (-3,2,-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-6-2-6|}{\sqrt{14}\sqrt{17}} = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$(r_1, r_2) = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{14}{17}}\right) \approx 25^\circ$$

El ángulo que forman las rectas tiene un valor aproximado de 25° .

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2); \quad \pi: -x+2y+z+1=0; \quad r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$$

a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r . 1

b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π . 1.5

a) Hallamos un vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y=2z-5 \end{cases} \Rightarrow 4x-14z+35+2z=7 \Rightarrow$$

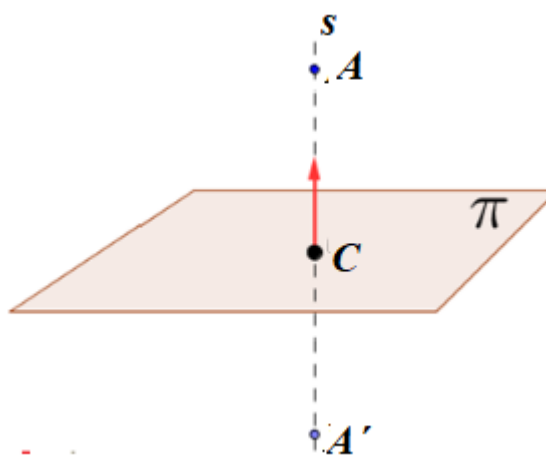
$$\Rightarrow 4x = -28+12z \Rightarrow x = -7+3z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -7+3\lambda \\ y = -5+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (3, 2, 1) \\ P_r(-7, -5, 0) \end{cases}$$

Comprobamos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\pi: -x+2y+z+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (3, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \cdot (3, 2, 1) = -3+4+1 = 2 \neq 0$$

Al ser el producto escalar distinto de cero la recta ni está contenida en el plano ni es paralela al plano. La recta corta al plano en un único punto.

b) Hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto $A(1,0,2)$. Luego hallamos el punto C de corte de recta s y el plano. Por último, determinamos el punto A' simétrico de A respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta s . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n} = (-1, 2, 1)$.

$$\left. \begin{aligned} A(1,0,2) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (-1, 2, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta s y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\pi \equiv -x + 2y + z + 1 = 0$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow -1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 2 \cdot \frac{-1}{3} = \frac{-2}{3} \\ z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico A' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{matrix} C\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ A(1, 0, 2) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) - (1, 0, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$A' = C + \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es $A'\left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

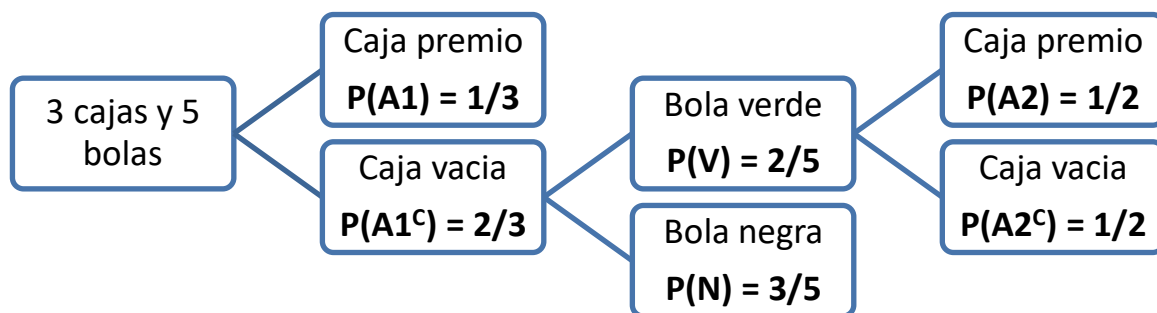
4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

- Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
- Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.
- Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

a) Dibujamos el diagrama de árbol pedido,



b) Hay dos formas de acabar sin premio y otras dos de acabar con premio. Sumamos las probabilidades de las dos formas de conseguir un premio.

$$P(\text{Premio}) = P(A1) + P(A1^c)P(V)P(A2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$$

c) Nos piden calcular $P(V / \text{Premio})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V / \text{Premio}) = \frac{P(V \cap \text{Premio})}{P(\text{Premio})} = \frac{P(A1^c)P(V)P(A2)}{P(\text{Premio})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
- ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?
- Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Sea X = La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante un día del mes de agosto. $X = N(22, 5)$.

- a) Debemos calcular $P(18 \leq X \leq 25)$.

$$\begin{aligned}
 P(18 \leq X \leq 25) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{18-22}{5} \leq Z \leq \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.6) = \\
 &= P(Z \leq 0.6) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.6) - P(Z \geq 0.8) = \\
 &= P(Z \leq 0.6) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7257 - 1 + 0.7881 = \boxed{0.5138}
 \end{aligned}$$

	0	0,0
0	0,5000	0,5040
0,1	0,5098	0,5438
0,2	0,5193	0,5832
0,3	0,6179	0,6211
0,4	0,6454	0,6591
0,5	0,6715	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186

La probabilidad de que un día de agosto las condiciones sean ideales para realizar senderismo vale 0.5138.

- b) Calculamos la probabilidad de que un día de agosto la temperatura supere los 30°C y exista riesgo elevado de insolación: $P(X \geq 30)$.

$$P(X > 30) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z > \frac{30-22}{5}\right) = P(Z > 1.6) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9452 = \boxed{0.0548}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0,1	0.5398	0.5
0,2	0.5793	0.5
0,3	0.6179	0.6
0,4	0.6554	0.6
0,5	0.6915	0.6
0,6	0.7257	0.7
0,7	0.7580	0.7
0,8	0.7881	0.7
0,9	0.8159	0.8
1	0.8413	0.8
1,1	0.8643	0.8
1,2	0.8849	0.8
1,3	0.9032	0.9
1,4	0.9192	0.9
1,5	0.9332	0.9
1,6	0.9452	0.9

Como agosto tiene 31 días el número de días que se espera la temperatura supere los 30° y haya alto riesgo de insolación son $31 \cdot 0.548 = 1.6988$, aproximadamente 2 días.

- c) Hallamos la probabilidad de que un día los visitantes se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos, es decir, que la temperatura diurna sea inferior a 15°: $P(X \leq 15)$.

$$P(X \leq 15) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{15 - 22}{5}\right) = P(Z \leq -1.4) = P(Z \geq 1.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9192 = \boxed{0.0808}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0,1	0.5398	0.5
0,2	0.5793	0.5
0,3	0.6179	0.6
0,4	0.6554	0.6
0,5	0.6915	0.6
0,6	0.7257	0.7
0,7	0.7580	0.7
0,8	0.7881	0.7
0,9	0.8159	0.8
1	0.8413	0.8
1,1	0.8643	0.8
1,2	0.8849	0.8
1,3	0.9032	0.9
1,4	0.9192	0.9
1,5	0.9332	0.9

Como agosto tiene 31 días se espera que la temperatura sea inferior a 15° en $31 \cdot 0.0808 = 2.5048$ días, aproximadamente 3 días.

De los 11000 visitantes diarios realizarán senderismo $11000 \cdot 0.05 = 550$. Como en 3 días habrán temperaturas inferiores a 15° tenemos que $550 \cdot 3 = 1650$ visitantes se verán afectados por cambios meteorológicos bruscos.



EBAU Julio 2024 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: JULIO

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

- a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.
1.75 pts
- b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$.
0.75 pts

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3 - x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es $11/5$. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 pts

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k - 3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

- a) Estudiar el rango de la matriz M_k , dependiendo de los valores del parámetro k . 1.25 pts
- b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \quad r_2 : \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto
- b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 . 1.5 pts

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

- a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que compartan el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 pts
- b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi : x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r : \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 pts

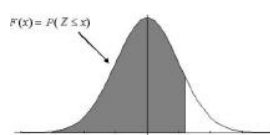
Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

- a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocular el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 pts
- b) Si se inocular un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

- a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 pts
- b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 pts
- c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 pts



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES

1A. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{ax}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.

1.75 pts

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$

0.75 pts

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(0) = \frac{0^2 - 0 + 9}{0^2 + 3} = 3$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} = 3$

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{e^x - 1} + 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + 2e^x - 2}{e^x - 1} = \frac{a \cdot 0 + 2e^0 - 2}{e^0 - 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + 2e^x}{e^x} = \frac{a + 2e^0}{e^0} = a + 2$$

- Los tres valores son iguales $\rightarrow a + 2 = 3 \rightarrow a = 1$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

Calculamos la derivada de la función cuando $x < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 - bx + 9}{x^2 + 3} &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - b)(x^2 + 3) - 2x(x^2 - bx + 9)}{(x^2 + 3)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + 6x - bx^2 - 3b - \cancel{2x^3} + 2bx^2 - 18x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Calculamos la derivada de la función cuando $x > 0$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} = \frac{b \cdot 0^2 - 0 - 3b}{(0^2 + 3)^2} = \frac{-3b}{9} = \boxed{\frac{-b}{3}}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^0 - 1 - e^0 0}{(e^0 - 1)^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^x x - e^x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2(e^x - 1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2e^x} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\frac{-b}{3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Los valores que hacen que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son $a = 1$ y $b = \frac{3}{2}$.

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{e^x - 1} + 2, & x > 0 \end{cases}$.

En un entorno de $x = -1$ la función es $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 3}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$.

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 9}{(-1)^2 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b = -2 \left. \vphantom{\frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2}} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{bx^2 - 12x - 3b}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{-2(-1)^2 - 12(-1) + 6}{((-1)^2 + 3)^2} = \frac{16}{16} = 1$$

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y = x + 1 + 2 \Rightarrow \boxed{y = x + 3}$$

La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x = -1$ es $y = x + 3$.

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 pts

Averiguamos donde se cortan las dos gráficas.

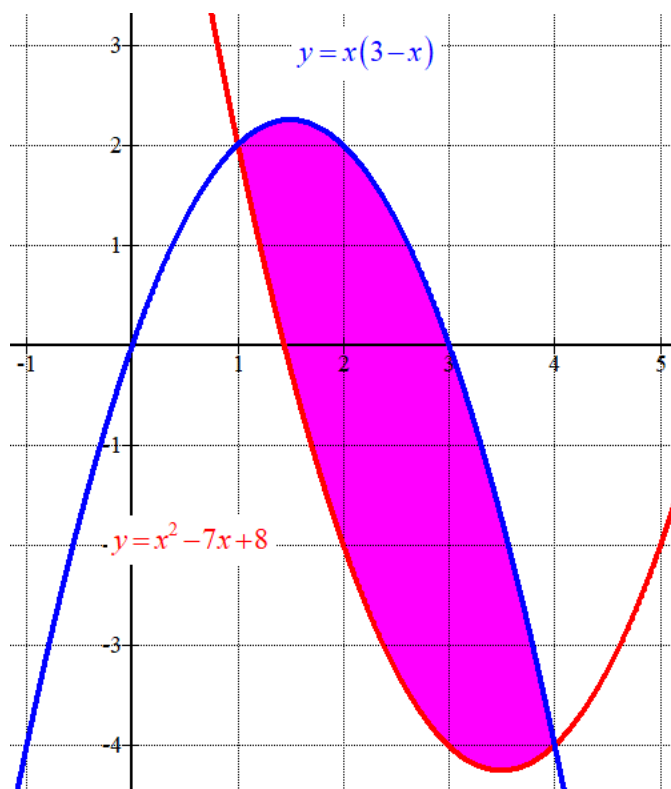
$$x^2 - 7x + 8 = x(3-x) \Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 3x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de las dos parábolas y representamos la región encerrada entre ellas.

x	$y = x(3-x)$
1	2
2	2
3	0
4	-4

x	$y = x^2 - 7x + 8$
1	2
2	-2
3	-2
4	-4



Calculamos el área de la base metálica.

$$\text{Área} = \int_1^4 3x - x^2 - (x^2 - 7x + 8) dx = \int_1^4 3x - x^2 - x^2 + 7x - 8 dx =$$

$$= \int_1^4 10x - 2x^2 - 8 dx = \left[5x^2 - 2\frac{x^3}{3} - 8x \right]_1^4 =$$

$$= \left[5 \cdot 4^2 - 2\frac{4^3}{3} - 8 \cdot 4 \right] - \left[5 \cdot 1^2 - 2\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1 \right] = 80 - \frac{128}{3} - 32 - 5 + \frac{2}{3} + 8 = 9 \text{ m}^2$$

El área es de 9 metros cuadrados que al precio de 65 € el metro cuadrado nos supone un coste de $65 \cdot 9 = 585$ €.

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es $11/5$. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno.

2.5 ptos

Llamamos “x” al dinero de Aythami, “y” al de Besay y “z” al de Chamaida.

“La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y

Besay es $11/5$ ” $\rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5}$.

“La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay” $\rightarrow x - z = 2y$.

“El doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami” $\rightarrow 2(y+z) = x+2$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{11}{5} \\ x-z = 2y \\ 2(y+z) = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+5y = 11x-11y \\ x = 2y+z \\ 2y+2z = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 6x \\ x = 2y+z \\ 2y+2z = x+2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 6(2y+z) \\ 2y+2z = 2y+z+2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 16y = 12y + 6z \rightarrow 4y = 6z \\ z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[y = \frac{12}{4} = 3 \right] \Rightarrow \left[x = 6 + 2 = 8 \right]$$

Aythami tiene 8 €, Besay tiene 3 € y Chamaida tiene 2 €.

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k , dependiendo de los valores del parámetro k . 1.25 pts

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 pts

a) La matriz M_k puede tener rango 3, 2 o 1.

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|M_k| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 + 0 + 0 - k^2(2k-3) - 0 - 0 = k^3 - 2k^3 + 3k^2 = -k^3 + 3k^2$$

$$|M_k| = 0 \Rightarrow -k^3 + 3k^2 = 0 \Rightarrow k^2(-k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ -k+3=0 \rightarrow k=3 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de la matriz es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$.

En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo existe un término no nulo. El rango de M_0 es 1.

CASO 3. $k = 3$.

En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y

columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. El rango de M_3 es 2.

b) La matriz M_1 tiene la expresión $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos las dimensiones de la matriz X .

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X \cdot (M_1 + M_1^T) = B$$

$$m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 \longrightarrow m \times 3$$

Para que sea posible el producto debe ser $n = 3$ y para poder obtener la matriz B de dimensiones 2×3 debe ser $m = 2$, es decir, la matriz X es de dimensiones 2×3 .

Si $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ sustituimos en la ecuación matricial.

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X (M_1 + M_1^T) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = -4 \rightarrow a = -2 \\ 2b = 2 \rightarrow b = 1 \\ 2c = 0 \rightarrow c = 0 \\ 2d = 0 \rightarrow d = 0 \\ 2e = 0 \rightarrow e = 0 \\ 2f = 4 \rightarrow f = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores.

1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 .

1.5 ptos

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r_1: \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 2z - 2 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(3y - 2z - 2) + y - 3z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 4z - 4 + y - 3z = 3 \Rightarrow 7y - 7z = 7 \Rightarrow y - z = 1 \Rightarrow y = 1 + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3(1 + z) - 2z - 2 = 3 + 3z - 2z - 2 = 1 + z \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (1, 1, 1) \\ P_1(1, 1, 0) \end{cases}$$

$$r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2} \Rightarrow r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (-2, 1, -2) \\ Q_2(1, 0, 1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (-2, 1, -2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - 0 + 2 - 2 = 3 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en dos planos paralelos).

b) La recta s perpendicular a ambas rectas tiene como vector director el vector que resulta del producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + k + 2k + 2j - i = -3i + 3k = (-3, 0, 3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{aligned} P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \in s \\ \vec{w}_s = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{v}_2}{3} = \frac{(-3, 0, 3)}{3} = (-1, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de corte de la recta s con la recta r_1 .

$$\left. \begin{aligned} s: & \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \alpha \end{cases} \\ r_1: & \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = -\alpha \\ 1 + \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = -\alpha \\ 1 + \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

El punto A de intersección de la recta s con la recta r_1 tiene coordenadas $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 pts

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 pts

a) No es posible pues el producto escalar tiene un valor muy grande.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ |\vec{u}| = 2 \\ |\vec{v}| = 3 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = 2 \cdot 3 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{8}{6} = 1.333 > 1 \text{ ¡Imposible!!!}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \pi: x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ x = -3 - y - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 - y - 2z + 3y + 2z + 3 = 0 \\ 2(-3 - y - 2z) - 3y - z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \\ -6 - 2y - 4z - 3y - z = 4 \Rightarrow -5y - 5z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow -5z = 10 \Rightarrow \boxed{z = -2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{x = -3 - 0 - 2(-2) = 1} \end{aligned}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto P(1,0,-2).

Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 3, 2)$$

$$r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x = -3 - y - 2z \end{cases} \Rightarrow 2(-3 - y - 2z) - 3y - z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 - 2y - 4z - 3y - z = 4 \Rightarrow -5y - 5z = 10 \Rightarrow y + z = -2 \Rightarrow \boxed{y = -2 - z} \Rightarrow$$

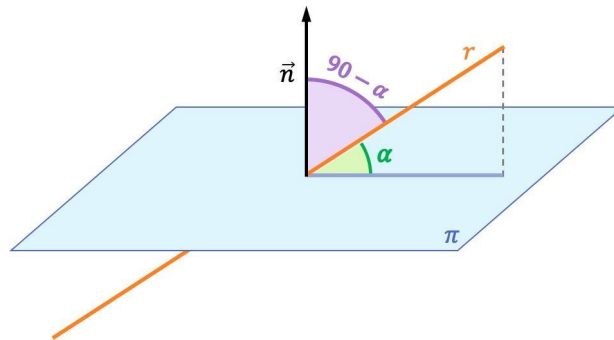
$$\Rightarrow x = -3 + 2 + z - 2z = -1 - z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, -1, 1) \\ Q_r(-1, -2, 0) \end{cases}$$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 3, 2) \\ \vec{v}_r = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, 3, 2)(-1, -1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|-1 - 3 + 2|}{\sqrt{14} \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72.02^\circ$$

Si el ángulo entre vector normal del plano y vector director de la recta es 72.02° entonces el ángulo entre recta y plano es $90^\circ - 72.02^\circ = 17.98^\circ$.



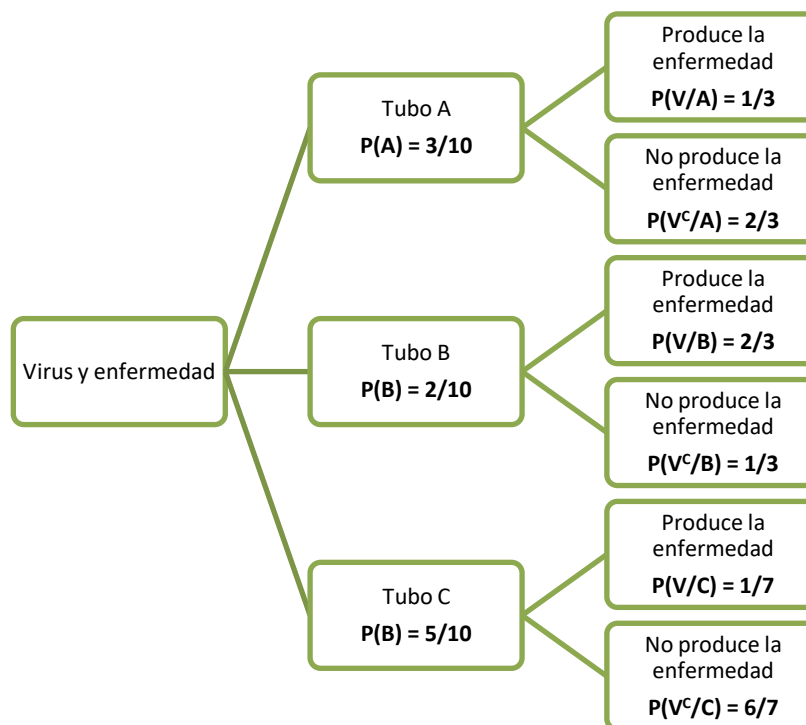
4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca B es $2/3$ y que la produzca C es $1/7$.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inyecta el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 pts

b) Si se inyecta un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

Llamamos A, B y C a los sucesos “se elige un tubo A, B o C”, respectivamente. Llamamos V al suceso “El virus produce la enfermedad”

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{32}{105} \approx 0.3048$$

La probabilidad de que el virus produzca la enfermedad es de $\frac{32}{105} \approx 0.3048$.

b) Nos piden $P(C/V^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/V^c) = \frac{P(C \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{P(C)P(V^c/C)}{1 - P(V)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{6}{7}}{1 - \frac{32}{105}} = \frac{45}{73} \approx 0.616$$

La probabilidad de que se haya inyectado el virus C, sabiendo que no ha producido la enfermedad es de $\frac{45}{73} \approx 0.616$.

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

- a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 pts
 b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 pts
 c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 pts

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de goles marcados de 70 lanzamientos. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de meter gol en un lanzamiento es $p = \frac{3}{5} = 0.6$.

La variable es una variable binomial. $X = B(70, 0.6)$.

Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 45)$.

Como el número de lanzamientos es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 70 \cdot 0.6 = 42$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{70 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \frac{2\sqrt{105}}{5} \approx 4.0988.$$

$Y = N(42, 4.0988)$

Esta aproximación es buena pues $np = 42 > 5$ y $nq = 28 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(40 \leq X \leq 45) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 45.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{39.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}} \leq Z \leq \frac{45.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(-0.61 \leq Z \leq 0.85) = P(Z \leq 0.85) - P(Z \leq -0.61) =$$

$$= P(Z \leq 0.85) - P(Z \geq 0.61) = P(Z \leq 0.85) - [1 - P(Z \leq 0.61)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8023 - 1 + 0.7291 = \boxed{0.5314}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7190	0.7225	0.7259	0.7291	0.7324	0.7357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8188	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8

La probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento es de 0.5314.

- b) Calculamos la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis (35).

$$P(X > 35) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 35.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{35.5 - 42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(Z \geq -1.59) = P(Z \leq 1.59) = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array}\right\} = \boxed{0.9441}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545

La probabilidad de que marque más de la mitad de los lanzamientos es de 0.9441, es decir, un 94.41 %. Al ser mayor del 90% este jugador será seleccionado.

- c) Llamamos X a la variable que cuenta el número de goles marcados en 450 penaltis. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior. La probabilidad de marcar es $p = 0.6$. Esta variable es binomial.
 $X = B(450, 0.6)$.
 Los goles que se espera marcar es la media de la distribución $\rightarrow \mu = np = 450 \cdot 0.6 = 270$.
 Se espera marcar 270 goles en los 450 penaltis.



EBAU Junio 2024 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: JUNIO

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

- a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 pts
- b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 pts
- c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 pts
- d) Calcular: $\int_0^4 C(x) dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 pts

1B. Dada la función definida por: $f(x) = \frac{\ln(x+2) + a}{3x+4}$

- a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 pts
- b) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resolver el siguiente sistema matricial:

2.5 pts

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} kx + y - 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -4 \\ kx + y - kz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k . 1.25 pts

b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4), \quad r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P . 1.5 pts

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π . 1 pto

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . 1.5 pts

b) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s . 1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 pts

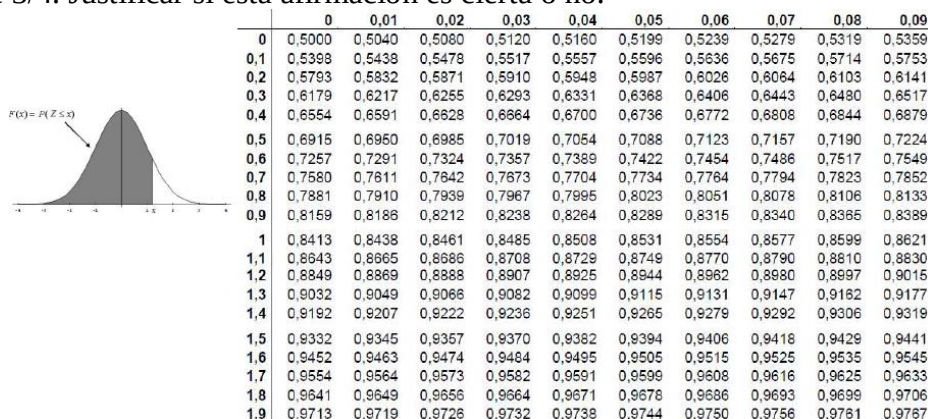
b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 pts

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 pts

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 pts

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que $3/4$. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 pts



SOLUCIONES

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}, \quad x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

- | | |
|---|----------|
| a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. | 0.5 pts |
| b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? | 0.5 pts |
| c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. | 0.75 pts |
| d) Calcular: $\int_0^4 C(x) dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. | 0.75 pts |

- a) Nos piden calcular el coste para 0.001 miles de kilos de plátanos $\rightarrow C(0.001)$.

$$C(0.001) = \frac{3(0.001)}{5\sqrt{(0.001)^2+1}} = 0.0006$$

Como el coste viene expresado en miles de euros podemos decir que el coste de producir 1 kg de plátanos es 0.0006 miles de euros = 0.6 euros.

- b) Calculamos el límite de la función coste cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{5\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{5\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$

El coste de producción de los plátanos tiende a ser 0.6 miles de euros = 600 euros.

- c) Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow C'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ C'(x) &= \frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Esta expresión de la derivada $C'(x) = \frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ nunca se anula y siempre es positiva. La

función crece en su dominio $[0, +\infty)$.

Es falsa la afirmación. El coste siempre aumenta.

d) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int C(x) dx = \int \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \sqrt{x^2+1} + C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^4 C(x) dx = \left[\frac{3}{5} \sqrt{x^2+1} \right]_0^4 = \frac{3}{5} \sqrt{4^2+1} - \frac{3}{5} \sqrt{0^2+1} = \frac{3\sqrt{17}-3}{5} \approx 1.8738.$$

Si dividimos este resultado entre $4 - 0 = 4$ obtendremos un coste promedio de la producción de plátanos cuando esta producción está entre 0 y 4000.

$$\frac{\int_0^4 C(x) dx}{4-0} \approx \frac{1.8738}{4} = 0.4684$$

Cuando se producen entre 0 y 4000 kg de plátanos el coste medio es de 468.4 €.

1B. Dada la función definida por: $f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

- a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 pts
- b) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 pts

- a) Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10 significa que $f'(-1) = 10$.

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(3x+4) - 3(\ln(x+2)+a)}{(3x+4)^2} = \frac{\frac{3x+4}{x+2} - 3\ln(x+2) - 3a}{(3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x+4}{x+2} - 3\ln(x+2) - 3a}{(3x+4)^2} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 10 = \frac{\frac{-3+4}{-1+2} - 3\ln(-1+2) - 3a}{(-3+4)^2} \Rightarrow \\ f'(-1) = 10 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{1-3a}{1} \Rightarrow 3a = 1-10 = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{3} = -3$$

La función queda $f(x) = \frac{\ln(x+2)-3}{3x+4}$.

- b) Para el valor $a = 0$ la función queda $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{3x+4}$. Para que exista la función debe ser $3x+4 \neq 0$ y $x+2 > 0$.

$$3x+4 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq -4 \Rightarrow x \neq \frac{-4}{3}$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

El dominio de la función es $\left(-2, \frac{-4}{3}\right) \cup \left(\frac{-4}{3}, +\infty\right)$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = \frac{-4}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -4/3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4/3} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln\left(\frac{-4}{3}+2\right)}{3\frac{-4}{3}+4} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0} = \infty$$

$x = \frac{-4}{3}$ es asíntota vertical.

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln(0)}{-6+4} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

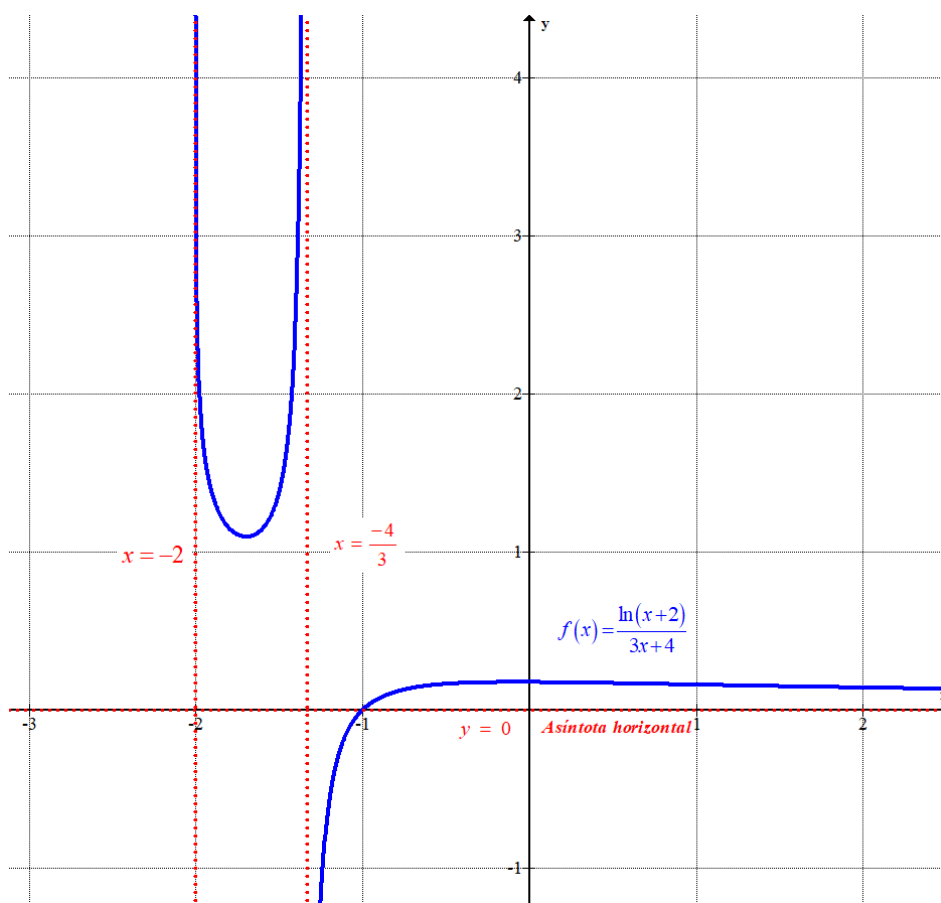
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.



2A. Resolver el siguiente sistema matricial:

2.5 ptos

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\times 4) \rightarrow 20X - 16Y = \begin{pmatrix} 20 & 24 & -4 \\ 16 & -20 & 4 \end{pmatrix} \\ (\times (-5)) \rightarrow -20X + 30Y = \begin{pmatrix} -20 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \Rightarrow 14Y = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4X - 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} kx + y - 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -4 \\ kx + y - kz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k . 1.25 pts
 b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 pts

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + k + 3 + 3k - k - k = -k^2 + 2k + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = \boxed{-1=k} \\ \frac{-2-4}{-2} = \boxed{3=k} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \\ 1 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k = 3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -12 \\ 3 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 0 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \\ -3 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $k = -1$ o $k = 3$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $k = 4$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ 4x + y - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y - 3z = 5 \\ y = -4 + x - z \\ 4x + y - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x - 4 + x - z - 3z = 5 \\ 4x - 4 + x - z - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 4z = 9 \\ 5x - 5z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 4z = 9 \\ x - z = 1 \rightarrow x = 1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow 5(1 + z) - 4z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + 5z - 4z = 9 \Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \boxed{x = 1 + 4 = 5} \Rightarrow \boxed{y = -4 + 5 - 4 = -3}$$

La solución del sistema para $k = 4$ es $x = 5$, $y = -3$ y $z = 4$.

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4), \quad r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P . 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π . 1 pto

a) Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -1 - x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, -1) \\ Q_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta s que es paralela a la recta r (mismo vector director) y pasa por P .

$$\left. \begin{array}{l} P(-7, 3, 4) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de intersección del plano π con la recta s .

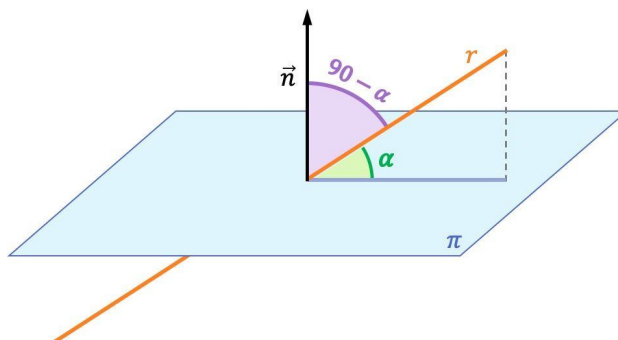
$$s: \begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 + \lambda + 2(3 - \lambda) - 5(4 - \lambda) + 5 = 0 \\ \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -7 + \lambda + 6 - 2\lambda - 20 + 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 4\lambda - 16 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 4 = -3 \\ y = 3 - 4 = -1 \\ z = 4 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3, -1, 0)}$$

El punto A de intersección del plano π con la recta s tiene coordenadas $A(-3, -1, 0)$.

b) Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.



$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y - 5z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -5) \\ \vec{v}_r = (1, -1, -1) \\ \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{(1, 2, -5)(1, -1, -1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1 - 2 + 5}{\sqrt{30} \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{10}}{15}\right) = 65.06^\circ$$

El ángulo que forman los vectores es de 65.06° y el ángulo formado entre recta y plano tiene un valor de $90^\circ - 65.06^\circ = 24.94^\circ$.

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . 1.5 ptos
 b) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s . 1 pto

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} P_s(3, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 1 = z \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 3x + 2y - 1 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 - 5x \Rightarrow z = 3x + 2(-3 - 5x) - 1 = 3x - 6 - 10x - 1 = -7 - 7x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 5\lambda \\ z = -7 - 7\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(0, -3, -7) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \end{cases}$$

El vector director de la recta s : $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$ y el vector director de la recta r : $\vec{u}_r = (1, -5, -7)$ no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

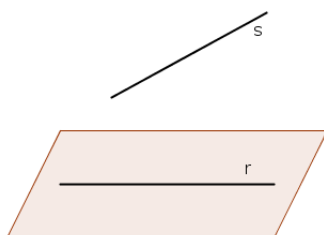
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-5} \neq \frac{1}{-7}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}]$.

$$\overrightarrow{P_s Q_r} = (0, -3, -7) - (3, 0, 1) = (-3, -3, -8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{P_s Q_r} = (-3, -3, -8) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \\ -3 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 40 + 21 - 3 - 15 + 8 - 21 = 30 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).



- b) El plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $P_s(3,0,1)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ P_s(3, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-3) + y - 5(z-1) - (z-1) + 7y + 5(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x + 21 + y - 5z + 5 - z + 1 + 7y + 5x - 15 = 0 \Rightarrow$$

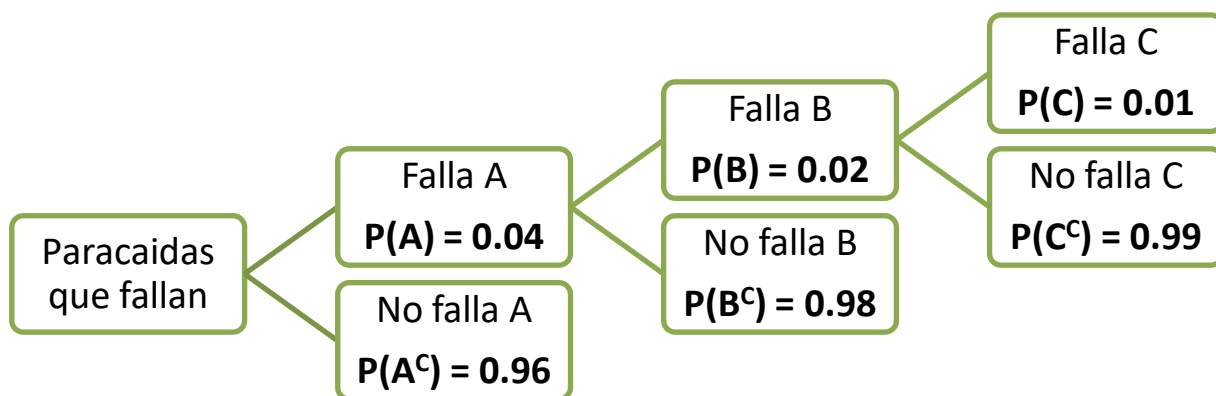
$$\Rightarrow -2x + 8y - 6z + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 4y + 3z - 6 = 0}$$

El plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene ecuación: $\pi : x - 4y + 3z - 6 = 0$

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

- a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos
- b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos
- c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

- a) Llamamos A, B y C a los sucesos “falla el paracaídas A, B o C, respectivamente. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



- b) Nos piden calcular $P(A \cap B^c)$.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

La probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente es de 0.0392.

- c) Es la probabilidad de que no falle A o falle A y no falle B o falle A, falle B y no falle C. Nos piden calcular $P(A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c))$.

$$P(A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c)) = 0.96 + 0.04 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.02 \cdot 0.99 = 0.999992$$

La probabilidad de que funcione algún paracaídas es de 0.999992.

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

- a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 pts
- b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que $3/4$. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 pts

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 100 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

Como hay 25 números y de ellos 12 son pares la probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

$X = B(100, 0.48)$. Nos piden calcular $P(X > 50)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 100 \cdot 0.48 = 48$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 4.996.$$

$$Y = N(48, 4.996)$$

Esta aproximación es buena pues $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(X > 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 50.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{50.5 - 48}{4.996}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.6
0.2	0.5793	0.7
0.3	0.6179	0.8
0.4	0.6554	0.9
0.5	0.6915	1.0
0.6	0.7291	1.1
0.7	0.7643	1.2

La probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones vale 0.3085.

- b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 200 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

$X = B(200, 0.48)$. Calculamos $P(90 < X < 110)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.48 = 96$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 7.07.$$

$$Y = N(96, 7.07)$$

Esta aproximación es buena pues $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$

Consideramos que no se incluye 90 ni 110 y calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$\begin{aligned}
 P(90 < X < 110) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(90.5 \leq Y \leq 109.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(\frac{90.5 - 96}{7.07} \leq Z \leq \frac{109.5 - 96}{7.07}\right) = P(-0.78 \leq Z \leq 1.91) = \\
 &= P(Z \leq 1.91) - P(Z \leq -0.78) = P(Z \leq 1.91) - P(Z \geq 0.78) = \\
 &= P(Z \leq 1.91) - [1 - P(Z \leq 0.78)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9719 - [1 - 0.7823] = \boxed{0.7542}
 \end{aligned}$$

	0	0.01		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0
0	0.5000	0.5040	0.5	0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.6	0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.7	0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.8	0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.9	0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950		0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291		0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611		0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910		0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8188											
1	0.8413	0.8438											
1.1	0.8643	0.8665											
1.2	0.8849	0.8869											
1.3	0.9032	0.9049											
1.4	0.9192	0.9207											
1.5	0.9332	0.9345											
1.6	0.9452	0.9463											
1.7	0.9554	0.9564											
1.8	0.9641	0.9649											
1.9	0.9713	0.9719											

La probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es de 0.7542. No es cierta la afirmación de que esta probabilidad es menor de $3/4 = 0.75$.

EBAU Julio 2023 Matemáticas II en Canarias


**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2022–2023****MATERIA: MATEMÁTICAS II****(1)****Convocatoria:****Instrucciones:**

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)**1A.** Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \quad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

- Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 pts
- Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 pts
- ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 pts
- Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 pts

1B. Resolver los siguientes apartados:a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2} \quad \text{1 pts}$$

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 pts**Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{cases},$$

- Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k . 1.5 pts
- Resolver el sistema para $k = 2$. 1 pts

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1, -2, 0) ; \quad r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P . 1.75 pts

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r .

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x - 5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 pts

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 pts

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . 1.25 pts

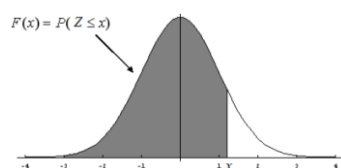
Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

- a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 pts
- b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 pts
- c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 pts

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 pts
- b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 pts
- c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 pts



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \quad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 pts

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 pts

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 pts

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 pts

a) Tasa de variación media del primer semestre (del mes 0 al mes 6).

$$\left. \begin{array}{l} V(0) = \frac{5 \cdot 0^2}{8+0^2} = 0 \\ V(6) = \frac{5 \cdot 6^2}{8+6^2} = \frac{45}{11} \end{array} \right\} \Rightarrow TVM(0,6) = \frac{V(6)-V(0)}{6-0} = \frac{\frac{45}{11}-0}{6} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22} \approx 0.68182$$

Tasa de variación media del segundo semestre (del mes 6 al mes 12).

$$\left. \begin{array}{l} V(12) = \frac{5 \cdot 12^2}{8+12^2} = \frac{90}{19} \\ V(6) = \frac{5 \cdot 6^2}{8+6^2} = \frac{45}{11} \end{array} \right\} \Rightarrow TVM(6,12) = \frac{V(12)-V(6)}{12-6} = \frac{\frac{90}{19}-\frac{45}{11}}{6} = \frac{45}{418} \approx 0.10766$$

Al ser la tasa de variación media positiva en ambos semestres las ventas han aumentado durante los dos semestres. Aunque en el segundo semestre las ventas han aumentado más lentas que en el primero: en el primero a razón de 681 unidades por mes y en el segundo a razón de 107 unidades por mes.

b) Estudiamos el signo de la derivada en $t \geq 0$.

$$V'(t) = \frac{10t(8+t^2) - 5t^2(2t)}{(8+t^2)^2} = \frac{80t + 10t^3 - 10t^3}{(8+t^2)^2} = \frac{80t}{(8+t^2)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} t \geq 0 \Rightarrow 80t \geq 0 \\ (8+t^2)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow V'(t) = \frac{80t}{(8+t^2)^2} \geq 0 \text{ siendo } t \geq 0$$

La derivada es positiva para valores $t > 0$, luego la función crece en todo su dominio.

c) Resolvemos la igualdad $V(t) = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \quad t \geq 0 \\ V(t) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5t^2}{8+t^2} = 4 \Rightarrow 5t^2 = 32 + 4t^2 \Rightarrow t^2 = 32 \Rightarrow t = \sqrt{32} \approx 5.66$$

Las ventas alcanzan las 4000 unidades entre el 5º y el 6º mes.

d) Los ingresos siguen el modelo $I(t) = 2 \cdot V(t) = 2 \frac{5t^2}{8+t^2} = \frac{10t^2}{8+t^2}$, $t \geq 0$

Nos piden calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t^2}{8+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10t^2}{t^2}}{\frac{8}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10}{\frac{8}{t^2} + 1} = \frac{10}{\frac{8}{\infty} + 1} = \frac{10}{0+1} = \boxed{10}$$

Los ingresos con el paso del tiempo tienden a tener un valor de 10000 €.

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2} \quad 1 \text{ pts}$$

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 pts

a) Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x^2 - 4)}{x^2 + 6x + 8} = \dots$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 = 0 &\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \\ x^2 + 6x + 8 = 0 &\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-6+2}{2} = -2 \\ \frac{-6-2}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x-2)}{x+4} = \frac{k(-2-2)}{-2+4} = \boxed{-2k}$$

Buscamos el valor de k tal que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2}$.

$$-2k = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{k = -\frac{3}{4}}$$

El valor buscado es $k = -\frac{3}{4}$.

b) Utilizamos el método de cambio de variable.

$$\int x\sqrt{2x-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{2x-1} = t \rightarrow 2x-1 = t^2 \\ 2x = 1+t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2}(1+t^2) \\ \rightarrow dx = tdt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2}(1+t^2)t \cdot tdt =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^2 + t^4 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3} + \frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5} \right) =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6} + \frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10} + K}$$

Obien

$$\dots = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3} + \frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5} \right) = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} \left(\frac{(\sqrt{2x-1})^2}{3} + \frac{(\sqrt{2x-1})^4}{5} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{2} \left(\frac{2x-1}{3} + \frac{(2x-1)^2}{5} \right) = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} \left(\frac{2x-1}{3} + \frac{4x^2-4x+1}{5} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2x-1}}{2} \left(\frac{10x-5+12x^2-12x+3}{15} \right) = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} \left(\frac{12x^2-2x-2}{15} \right) =$$

$$= \boxed{\frac{(6x^2-x-1)\sqrt{2x-1}}{15} + K}$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{cases},$$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k .

1.5 pts

b) Resolver el sistema para $k = 2$.

1 pts

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k - k^2 - 4 - 2k^2 - 4k + 1 = -3k^2 - 6k - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3k^2 - 6k - 3 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $k \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k = -1$

El determinante de A es nulo. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a + 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad 4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y si $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $k = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z - 2 = x \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2y + 2z - 2) + 2y - z = 2 \\ 2(2y + 2z - 2) - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4y + 4z - 4 + 2y - z = 2 \\ 4y + 4z - 4 - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y + 3z = 6 \\ 3y + 6z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 2 \\ y + 2z = 2 \rightarrow y = 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(2 - 2z) + z = 2 \Rightarrow 4 - 4z + z = 2 \Rightarrow -3z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{y = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{x = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = y = z = \frac{2}{3}$.

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 pts

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B^t = A^2 \Rightarrow AX = A^2 - B^t \Rightarrow X = A^{-1}(A^2 - B^t) = A^{-1}A^2 - A^{-1}B^t = IA - A^{-1}B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A - A^{-1}B^t$$

Comprobamos que la matriz A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A - A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}} = X$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

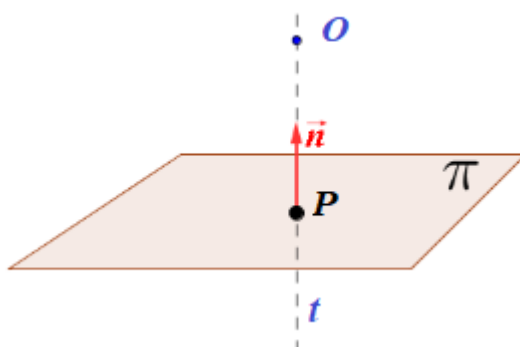
$$P(1, -2, 0) ; \quad r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P . 1.75 pts

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r .

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s : x - 5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 pts

a) Debemos hallar la ecuación del plano π del dibujo.



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{OP}$. Además, el plano π contiene al punto P .

$$\vec{n} = \overrightarrow{OP} = (1, -2, 0) - (0, 0, 0) = (1, -2, 0) \left\{ \begin{array}{l} \pi : x - 2y + D = 0 \\ P(1, -2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2(-2) + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 2y - 5 = 0}$$

Para averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r primero obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \boxed{x = z} \end{cases} \Rightarrow z - 2y + z = 0 \Rightarrow 2z = 2y \Rightarrow \boxed{y = z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

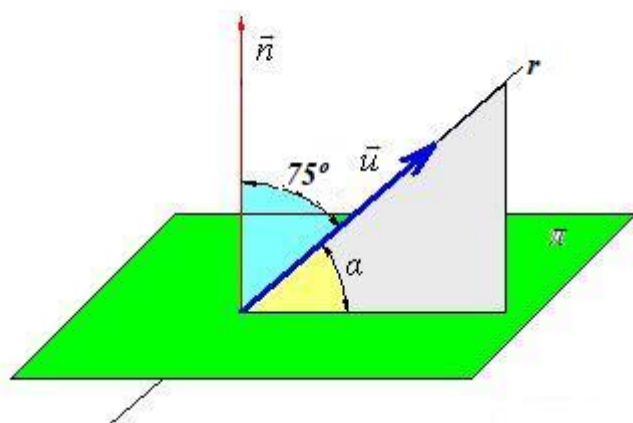
$$\pi : x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 0)$$

Averiguamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{n} = (1, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(1, 1, 1)(1, -2, 0)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$(\vec{u}_r, \vec{n}) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \approx 75^\circ$$

El ángulo que forma el plano con la recta es de $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$



b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s.

$$s: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3} \Rightarrow s: \begin{cases} \vec{v}_s = (1, -2, 3) \\ Q_s(5, -1, 9) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 9 + 3\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto A de corte de las rectas r y s.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 9 + 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5 + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) + 9 + 3\lambda = 0 \\ 5 + \lambda - (9 + 3\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 + \lambda + 2 + 4\lambda + 9 + 3\lambda = 0 \\ 5 + \lambda - 9 - 3\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8\lambda = -16 \rightarrow \lambda = -2 \\ -2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 = 3 \\ y = -1 - 2(-2) = 3 \\ z = 9 + 3(-2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3, 3, 3)}$$

El punto de corte de las rectas r y s es A(3, 3, 3).

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

- a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 pts
- b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . 1.25 pts

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta, así como un punto de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (8, 2, -3) \times (-7, -1, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = 6i + 21j - 8k + 14k - 24j - 3i = 3i - 3j + 6k = (3, -3, 6)$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3z + 12 = 0 \\ -y + 3z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3z + 12 = 0 \\ 3z - 9 = y \end{cases} \Rightarrow 2(3z - 9) - 3z + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z - 18 - 3z + 12 = 0 \Rightarrow 3z = 6 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y = 6 - 9 = -3 \Rightarrow P_r(0, -3, 2)$$

$$r: \begin{cases} \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, -3, 2) \end{cases}$$

$$s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 2) \\ Q_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.

Calculamos el producto mixto $[\vec{w}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -3, 2) \\ Q_s(0, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -3, 2) - (0, -1, 2) = (0, -2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan. Esto significa que son coplanarias. Hallamos la ecuación del plano que las contiene.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (1, 1, 2) \\ Q_s(0, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2(y+1) + z - 2 + z - 2 - 2(y+1) - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + \cancel{2y} + \cancel{2} + z - \cancel{2} + z - 2 - \cancel{2y} - 2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

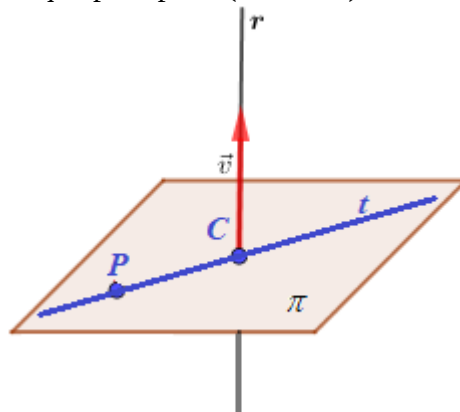
$$\Rightarrow -4x + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - z + 2 = 0}$$

b) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por $P(0, -1, 12)$.

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ P(0, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi: x - y + 2z + D = 0 \\ P(0, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 1 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + 2z - 5 = 0}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta r y el plano π .



$$\pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, -3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 3 + \lambda + 4 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3} \\ z = 2 + 2\frac{-1}{3} = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La recta t perpendicular a r y que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos C y P.

$$t: \left\{ \begin{array}{l} C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ P(0, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = \overrightarrow{CP} = (0, -1, 2) - \left(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ P(0, -1, 2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_t = 3\vec{v}_t = (1, 5, 2) \\ P(0, -1, 2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{array} \right.}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

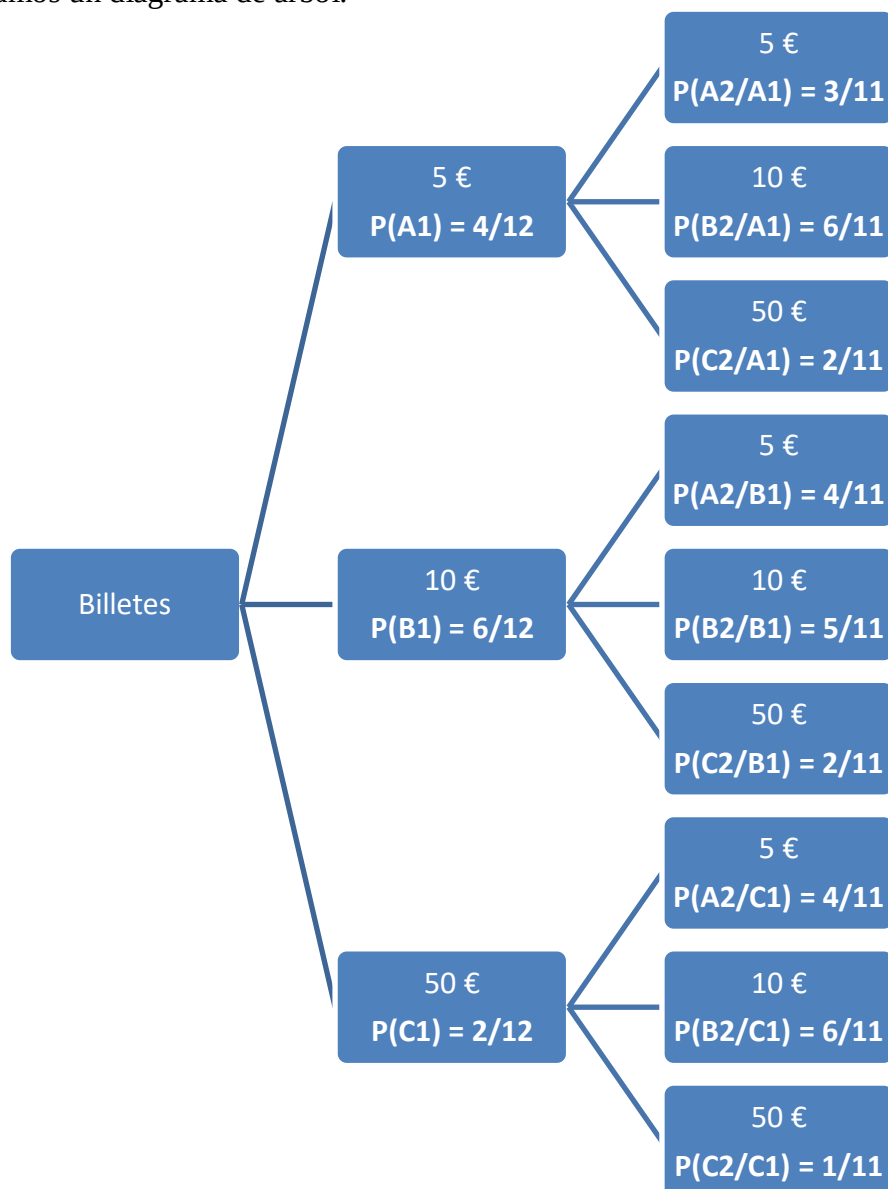
- a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 pts
 b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 pts
 c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 pts

a) Puede coger:

2 billetes de 5 €, 2 billetes de 10 €, dos billetes de 50 €, 1 billete de 5 € y otro de 10 €, un billete de 5 € y otro de 50 € y por último un billete de 10 € y otro de 50 €. Un total de 6 sucesos elementales distintos.

$$E = \{(5,5), (10,10), (50,50), (5,10), (5,50), (10,50)\}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Para poder comprar el videojuego debe haber cogido, al menos, 60 €. Esto ocurre cogiendo 10 y 50 o 50 y 10 o 50 y 50. Llamamos a este suceso S.

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P(B1 \cap C2) + P(C1 \cap B2) + P(C1 \cap C2) = \\
 &= P(B1)P(C2/B1) + P(C1)P(B2/C1) + P(C1)P(C2/C1) = \\
 &= \frac{6}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{26}{132} = \boxed{\frac{13}{66} \approx 0.197}
 \end{aligned}$$

c) 60 euros solo los puede obtener con un billete de 10 y otro de 50.

Nos piden calcular $P(B1 / ((B1 \cap C2) \cup (C1 \cap B2)))$.

Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(B1 / ((B1 \cap C2) \cup (C1 \cap B2))) &= \frac{P(B1 \cap ((B1 \cap C2) \cup (C1 \cap B2)))}{P((B1 \cap C2) \cup (C1 \cap B2))} = \\
 &= \frac{P(B1 \cap C2)}{P(B1 \cap C2) + P(C1 \cap B2)} = \frac{P(B1)P(C2/B1)}{P(B1)P(C2/B1) + P(C1)P(B2/C1)} = \\
 &= \frac{\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{11}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}
 \end{aligned}$$

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 pts
 b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 pts
 c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 0.75 pts

- a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 10 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

$X = B(10, 0.04)$. Nos piden calcular $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.04^2 \cdot 0.96^8 \approx \boxed{0.0519}$$

- b) Calculamos la probabilidad de que se produzcan más de 2 reventones durante la carrera. Para este cálculo usamos el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)] = \\ &= 1 - \left[\binom{10}{2} 0.04^2 \cdot 0.96^8 + \binom{10}{1} 0.04^1 \cdot 0.96^9 + \binom{10}{0} 0.04^0 \cdot 0.96^{10} \right] = \boxed{0.00621} \end{aligned}$$

El valor $P(X > 2) = 0.00621$ significa un tanto por ciento de 0.621 % de que ocurran más de 2 reventones en una carrera.

La afirmación de que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera es correcta.

- c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 250 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

$X = B(250, 0.04)$.

Esta probabilidad debemos de hallarla aproximándola por una normal.

Como la media es $np = 250 \cdot 0.04 = 10$ y la desviación típica es

$$\sqrt{npq} = \sqrt{250 \cdot 0.04 \cdot 0.96} = \frac{4\sqrt{15}}{5} \approx 3.098 \text{ la variable binomial } X \text{ se aproxima por una variable}$$

$$\text{normal } Y = N\left(10, \frac{4\sqrt{15}}{5}\right).$$

Nos piden calcular $P(X > 12)$.

$$P(X > 12) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 12.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{12.5 - 10}{4\sqrt{15}/5}\right) = P(Z \geq 0.81) = 1 - P(Z \leq 0.81) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.791 = \boxed{0.209}$$



EBAU Junio 2023 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2022-2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(4)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en $M(1, 2)$ y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$. 2.5 pts

1B. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



2.5 pts

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. 0.75 pts

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente: 1.75 pts

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X .

2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las carajacas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x + 3y - z = 4; \quad r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}; \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de $P(-2, 1, 2)$ respecto de π .

1.25 pts

b) Calcular el ángulo que forman r y s .

1.25 pts

3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} 2x - 7y - 3z = 22 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s .

1.25 pts

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

1.25 pts

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

1 pto

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

1 pto

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

0.5 pts

4B. Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

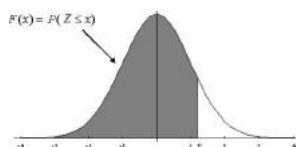
1 pto

b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

0.75 pts

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

0.75 pts



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en $M(1, 2)$ y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$. 2.5 pts

Si $f''(x) = 2x + 3$ entonces:

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2x + 3 dx = x^2 + 3x + a \Rightarrow$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^2 + 3x + a dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + ax + b$$

Hallamos el valor de a y b con el resto de los datos proporcionados.

La función tiene un mínimo en $M(1, 2)$ significa dos cosas:

Primera. La función pasa por el punto $M \rightarrow f(1) = 2$.

Segunda. Hay un mínimo en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x^2 + 3x + a \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^2 + 3 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{25}{6}}$$

La función tiene la expresión $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{25}{6}$.

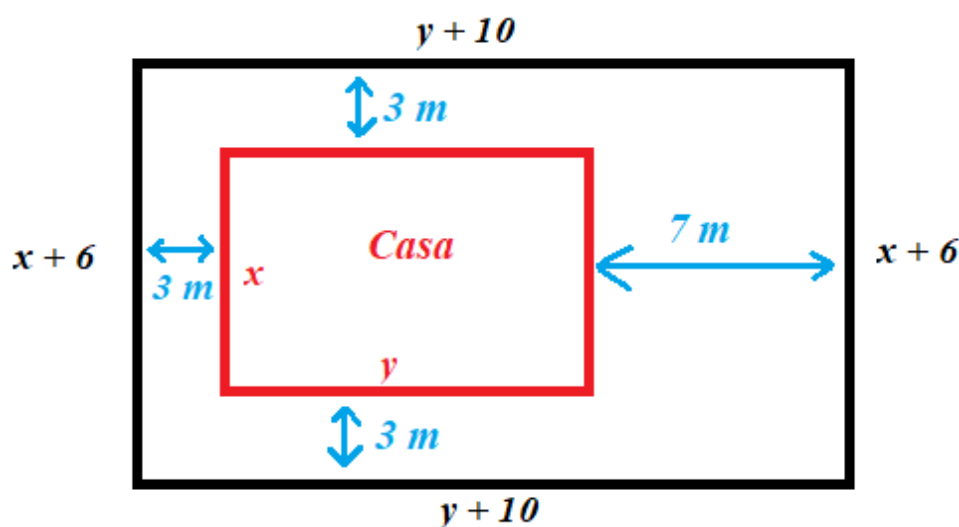
1B. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



2.5 ptos

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Si llamamos “x” e “y” a las dimensiones de la casa la situación planteada se detalla en el dibujo siguiente.



La superficie de la casa es de 240 m^2 , por lo que $xy = 240$

La zona ajardinada tendrá como superficie la del solar menos la de la casa.

$$f(x, y) = (x + 6)(y + 10) - 240.$$

Obtenemos la función que dependa de una única variable.

$$\left. \begin{aligned} xy = 240 &\Rightarrow y = \frac{240}{x} \\ f(x, y) &= (x + 6)(y + 10) - 240 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = (x + 6)\left(\frac{240}{x} + 10\right) - 240$$

$$f(x) = x \frac{240}{x} + 10x + 6 \frac{240}{x} + 60 - 240 = 240 + 10x + \frac{1440}{x} - 180$$

$$f(x) = 10x + \frac{1440}{x} + 60$$

Buscamos el mínimo de la función $f(x) = 10x + \frac{1440}{x} + 60$ que nos da la superficie de la zona ajardinada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 10 - \frac{1440}{x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10 - \frac{1440}{x^2} = 0 \Rightarrow 10 = \frac{1440}{x^2} \Rightarrow 10x^2 = 1440 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

$$f'(x) = 10 - \frac{1440}{x^2} = 10 - 1440x^{-2} \Rightarrow f''(x) = -1440(-2)x^{-3} = \frac{2880}{x^3} \Rightarrow f''(12) = \frac{2880}{12^3} > 0$$

La función tiene un mínimo para $x = 12$. Siendo el valor de $y = \frac{240}{12} = 20$. El valor de la función es

$$f(12) = 10 \cdot 12 + \frac{1440}{12} + 60 = 120 + 120 + 60 = 300.$$

La zona ajardinada tiene una superficie mínima de 300 m² cuando el solar es un rectángulo de lados 12 y 20 metros.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**2A.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa.

0.75 pts

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente:

1.75 pts

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

a) Obtenemos la expresión de $M = 2I_3 + B^t$.

$$M = 2I_3 + B^t = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si su determinante es cero o no.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Al ser su determinante no nulo la matriz M tiene inversa.

b) Despejamos X de la ecuación.

$$2X + C = A - X \cdot B^t \Rightarrow X \cdot 2I + X \cdot B^t = A - C \Rightarrow X(2I + B^t) = A - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{2I + B^t \text{ tiene inversa}\} \Rightarrow X = (A - C)(2I + B^t)^{-1}$$

Existe la matriz X. Terminamos de calcularla.

$$M^{-1} = (2I_3 + B^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)(2I + B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2+12 & -3 & 1-6 \\ 4-8 & 2 & -2+4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las carajacas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 ptos

Llamamos “x” al precio del plato de escaldón, “y” al precio del plato de tollos y “z” al precio del plato de carajacas.

“El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€” $\rightarrow \frac{x+y+z}{3} = 5$

“Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total” $\rightarrow 30x + 20y + 10z = 255$

“El triple del precio de las carajacas supera en diez euros el doble del precio de los tollos” $\rightarrow 3z = 10 + 2y$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3} = 5 \\ 30x + 20y + 10z = 255 \\ 3z = 10 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ 6x + 4y + 2z = 51 \\ 3z = 10 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 15 - y - z \\ 6x + 4y + 2z = 51 \\ 3z = 10 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6(15 - y - z) + 4y + 2z = 51 \\ 3z = 10 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 90 - 6y - 6z + 4y + 2z = 51 \\ 3z = 10 + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2y - 4z = -39 \\ -2y + 3z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 4z = 39 \\ -2y + 3z = 10 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\quad} 7z = 49 \Rightarrow \boxed{z = \frac{49}{7} = 7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 7 = 10 + 2y \Rightarrow 11 = 2y \Rightarrow \boxed{y = \frac{11}{2} = 5.5} \Rightarrow \boxed{x = 15 - 5.5 - 7 = 2.5}$$

El precio del plato de escaldón es de 2.5 euros, el de tollos de 5.5 euros y el de carajacas de 7 euros.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x + 3y - z = 4; \quad r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}; \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

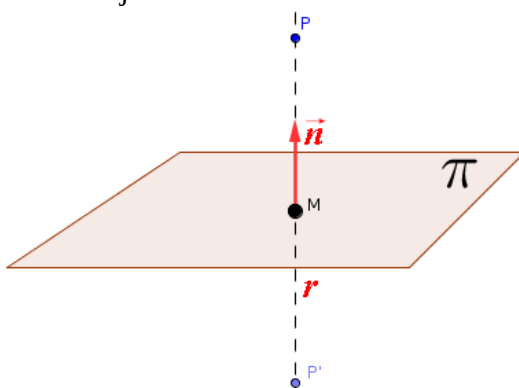
a) Calcular el punto simétrico de $P(-2, 1, 2)$ respecto de π .

1.25 pts

b) Calcular el ángulo que forman r y s .

1.25 pts

a) Debemos hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta t perpendicular al plano $\pi: 2x + 3y - z = 4$ que pasa por el punto $P(-2, 1, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-2, 1, 2) \in t \\ \vec{v}_t = \vec{n} = (2, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta t y el plano π .

$$t \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \pi: 2x + 3y - z = 4$$

$$\Rightarrow 2(-2 + 2\alpha) + 3(1 + 3\alpha) - (2 - \alpha) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 + 4\alpha + 3 + 9\alpha - 2 + \alpha = 4 \Rightarrow 14\alpha = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \\ y = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ z = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

El punto simétrico $P'(a, b, c)$ es un punto que resulta de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) - (-2, 1, 2) = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(-1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) + \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (0, 4, 1)}$$

El punto simétrico tiene coordenadas $P' = (0, 4, 1)$.

b) El ángulo que forman las rectas es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1) \times (2, 5, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j + 5k - 2k - j + 5i$$

$$\vec{v}_r = 6i - 3j + 3k = (6, -3, 3)$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow \vec{u}_s = (1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (6, -3, 3) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{(6, -3, 3)(1, 0, 1)}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \frac{6+3}{\sqrt{54}\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{108}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ}$$

Las rectas forman un ángulo de 30° .

3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r: \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s .

1.25 pts

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

1.25 pts

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, -7) \times (2, 3, -12) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = -24i - 14j + 3k - 4k + 12j + 21i = -3i - 2j - k = (-3, -2, -1)$$

$$s: \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_s = (2, -7, -3) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_s = -7i - 3j - 2k + 7k - 2j - 3i = -10i - 5j + 5k = (-10, -5, 5)$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, -2, -1) \\ \vec{u}_s = (-10, -5, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{-10} \neq \frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{5}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.

Obtenemos un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \rightarrow x=-2y \\ 2x+3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow -4y+3y+1=0 \Rightarrow -y=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P_r(-2, 1, 0)$$

$$s: \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7y=22 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7y=22 \\ x=1+y \end{cases} \Rightarrow 2(1+y)-7y=22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2y-7y=22 \Rightarrow -5y=20 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=1-4=-3 \Rightarrow Q_s(-3, -4, 0)$$

Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-2,1,0) \\ Q_s(-3,-4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (-3, -4, 0) - (-2, 1, 0) = (-1, -5, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, -2, -1) \\ \vec{u}_s = (-10, -5, 5) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, -5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 50 + 5 - 75 =$$

Al ser no nulo las rectas r y s se cruzan. Tienen distinta dirección y no son coplanarias.

- b) La ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene al punto $P_r(-2,1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (-3, -2, -1) \\ \pi: \vec{u} = \vec{u}_s = (-10, -5, 5) \\ P_r(-2,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ -3 & -2 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10(x+2) + 10(y-1) + 15z - 20z + 15(y-1) - 5(x+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x - 20 + 10y - 10 + 15z - 20z + 15y - 15 - 5x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15x + 25y - 5z - 55 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 5y + z + 11 = 0}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años? 1 pto

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años? 1 pto

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años? 0.5 pto

a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de docentes menores de 30 años en un grupo de 15 esta variable es dicotómica (menor o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

$X = B(15, 0.11)$. Nos piden calcular $P(X < 2)$.

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} 0.11^0 \cdot 0.89^{15} + \binom{15}{1} 0.11^1 \cdot 0.89^{14} = \boxed{0.4969}$$

b) El número de repeticiones es muy grande y la probabilidad pedida es

$P(20 < X < 30) = P(X = 21) + P(X = 22) + \dots + P(X = 29)$, siendo muy laboriosa de calcular.

Usamos la aproximación a la normal.

Como $n \cdot p = 200 \cdot 0.11 = 22 > 5$; $n \cdot q = 200 \cdot 0.89 = 178 > 5$ la aproximación será adecuada.

$$\left. \begin{array}{l} np = 200 \cdot 0.11 = 22 \\ \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.11 \cdot 0.89} \approx 4.425 \end{array} \right\} \rightarrow Y = N(np, \sqrt{npq}) \rightarrow Y = N(22, 4.425)$$

La distribución binomial $X = B(200, 0.11)$ se aproxima por una distribución normal

$Y = N(22, 4.425)$.

$$P(20 < X < 30) = P(21 \leq X \leq 29) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(20.5 \leq Y \leq 29.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{20.5 - 22}{4.425} \leq Y \leq \frac{29.5 - 22}{4.425}\right) = P(-0.34 \leq Y \leq 1.695) =$$

$$= P(Y \leq 1.695) - P(Y \leq -0.34) = P(Y \leq 1.695) - P(Y \geq 0.34) =$$

$$= P(Y \leq 1.695) - [1 - P(Y \leq 0.34)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{0.9545 + 0.9554}{2} - [1 - 0.6331] = \boxed{0.58805}$$

Calculamos la probabilidad pedida usando la fórmula de la binomial para comprobar la bondad de la solución obtenida.

$$\begin{aligned}
P(20 < X < 30) &= P(X = 21) + P(X = 22) + \dots + P(X = 29) = \\
&= \binom{200}{21} 0.11^{21} \cdot 0.89^{179} + \binom{200}{22} 0.11^{22} \cdot 0.89^{178} + \binom{200}{23} 0.11^{23} \cdot 0.89^{177} + \binom{200}{24} 0.11^{24} \cdot 0.89^{176} + \\
&+ \binom{200}{25} 0.11^{25} \cdot 0.89^{175} + \binom{200}{26} 0.11^{26} \cdot 0.89^{174} + \binom{200}{27} 0.11^{27} \cdot 0.89^{173} + \binom{200}{28} 0.11^{28} \cdot 0.89^{172} + \\
&+ \binom{200}{29} 0.11^{29} \cdot 0.89^{171} \approx 0.3433368033 + 0.2044391604 + 0.0527264637 \approx \boxed{0.57305}
\end{aligned}$$

La aproximación obtenida con la normal es adecuada.

- c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de docentes mayores de 30 años en un grupo de 500 esta variable es dicotómica (menor o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

$$X = B(500, 0.89).$$

El número de docentes mayores de 30 años que cabe esperar en ese grupo es la media o esperanza $\rightarrow \mu = np = 500 \cdot 0.89 = 445$.

Cabe esperar que haya 445 docentes mayores de 30 años.

4B. Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm. 1 pto

b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición miden más de 1,82 metros.

Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación. 0.75 pto

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm? 0.75 pto

X = Estatura de una persona que se presenta a una audición. $X = N(168, 8)$.

a) Nos piden calcular $P(X \geq 156)$.

$$P(X \geq 156) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{156-168}{8}\right) = P(Z \geq -1.5) =$$

$$= P(X \leq 1.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9332}$$

b) Calculamos la probabilidad de $P(X \geq 182)$.

$$P(X \geq 182) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{182-168}{8}\right) = P(Z \geq 1.75) =$$

$$= 1 - P(X \leq 1.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9599 = \boxed{0.0401}$$

Hay un 4.01 % de los participantes que miden más de 1.82 metros. Siendo inferior al 15 %, por lo que la afirmación es falsa.

c) Calculamos $P(166 \leq X \leq 172)$.

$$P(166 \leq X \leq 172) = P(X \leq 172) - P(X \leq 166) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{172-168}{8}\right) - P\left(X \leq \frac{166-168}{8}\right) = P(Z \leq 0.5) - P(X \leq -0.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.5) - P(X \geq 0.25) = P(Z \leq 0.5) - [1 - P(X \leq 0.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.6915 - (1 - 0.5987) = \boxed{0.2902}$$



EBAU Julio 2022 Matemáticas II en Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2021-2022

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)**1A.** Resuelve los siguientes apartados:

- a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1.75 pts

Calcular los coeficientes a, b, c, d , sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

- b) Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ 0.75 pts

1B. Considera las siguientes funciones: $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$

- a) Representa el recinto que encierra las dos funciones anteriores 1.5 pts
- b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores 1 pto

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**2A.** Resuelve los siguientes apartados:

- a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 pts

$$C = A^t + kB \cdot A$$

Averigua para qué valores de k , la matriz C tiene rango 2

- b) Encuentra la matriz X , de dimensión 3×3 , que verifica $M^t \cdot X = I - M$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 1.75 \text{ pts}$$

- 2B.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left. \begin{array}{l} 2x + 6y + kz = 0 \\ kx + 4y + 2z = 2 \\ kx + 6y + 2z = k - 2 \end{array} \right\}$

- a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro k 1.5 pts
- b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k = 0$. 1 pto

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición

relativa entre r y s

1.5 pts

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano

$\pi: 2x - y + z - 5 = 0$

1 pto

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A , dar la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A

1.5 pts

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π

1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)**4A.** El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

1 pto

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

1 pto

c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

0.5 pts

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

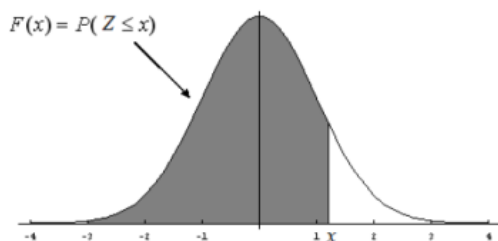
1 pto

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: “En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos”

1 pto

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

0.5 pts



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1.75 pts

Calcular los coeficientes a, b, c, d , sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$

Dar la expresión de la función $f(x)$

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ 0.75 pts

a) Si f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ implica que $f(0) = 1$ y que $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d \Rightarrow \boxed{d=1}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Siendo $c = 0$ y $d = 1$ la función tiene la expresión $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

Si la gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$ implica que $f(1) = -1$ y que $f''(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + 1 \\ f(1) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow \boxed{a+b=-2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \\ f''(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 1^2 + 2b \Rightarrow \boxed{6a+2b=0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a+b &= -2 \\ 6a+2b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= -2-a \\ 3a+b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a-2-a=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2-1=-3}$$

Los valores buscados son $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$ y $d = 1$.

La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\sin 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos 0} = \boxed{2}$$

1B. Considera las siguientes funciones: $y = 3x - x^2$; $y = x - 3$

a) Representa el recinto que encierra las dos funciones anteriores

1.5 pts

b) Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores

1 pto

a) Las gráficas son de una parábola y una recta.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

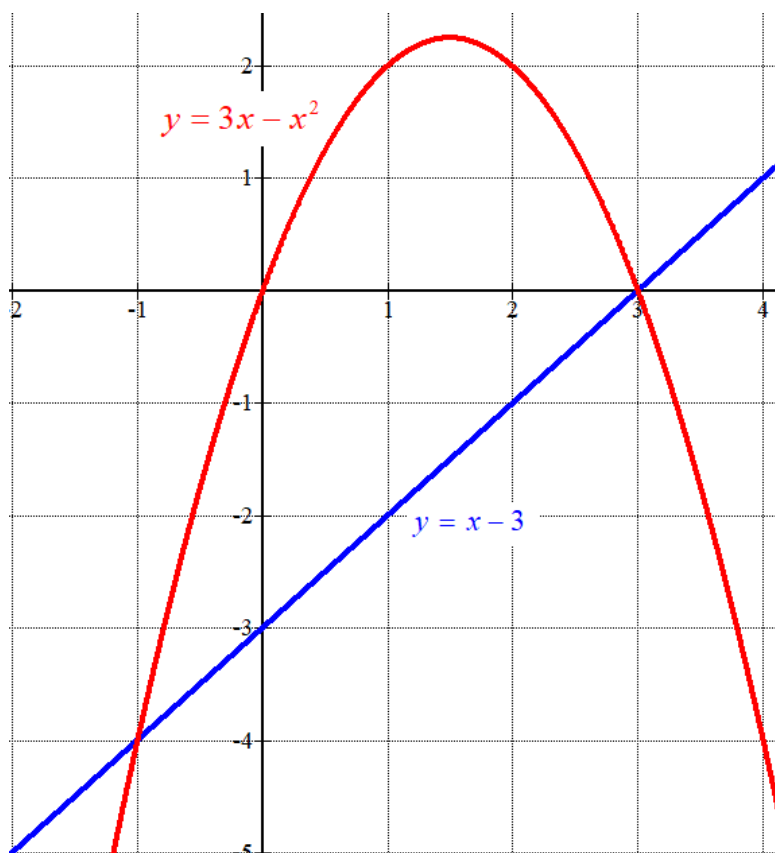
$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas.

x	$y = 3x - x^2$
-1	-4
0	0
1.5	2.25
2	2
3	0

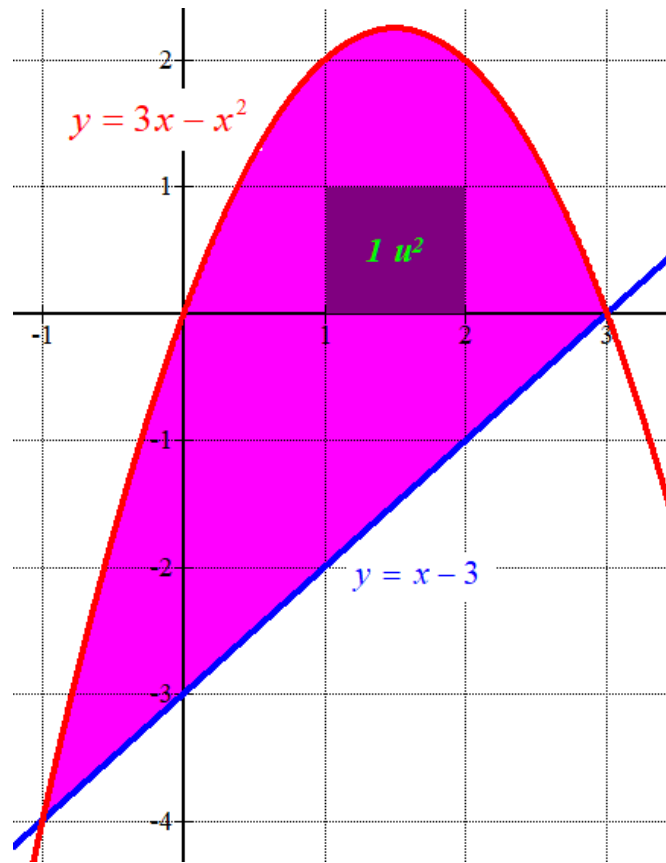
x	$y = x - 3$
-1	-4
0	-3
1.5	-1.5
2	-1
3	0



b) El área del recinto limitado por las dos funciones es el valor de la integral definida entre -1 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^3 3x - x^2 - (x - 3) dx = \int_{-1}^3 2x - x^2 + 3 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^3 =$$

$$= \left[3^2 - \frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right] - \left[(-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1) \right] = 9 - 9 + 9 - 1 - \frac{1}{3} + 3 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.67 u^2}$$



Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**2A.** Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in \mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 pts

$$C = A^t + kB \cdot A$$

Averigua para qué valores de k , la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X , de dimensión 3×3 , que verifica $M^t \cdot X = I - M$, donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.75 pts

a) Calculamos la expresión de la matriz C .

$$C = A^t + kB \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 & -1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}$$

Para que la matriz C tenga rango 2 debe tener determinante no nulo.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1-k)(1+k)$$

$$|C| = 0 \Rightarrow (1-k)(1+k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-k = 0 \rightarrow \boxed{k=1} \\ 1+k = 0 \rightarrow \boxed{k=-1} \end{cases}$$

La matriz C tiene rango 2 si k es distinto de 1 y de -1 .

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$M^t \cdot X = I - M \Rightarrow X = (M^t)^{-1} (I - M)$$

Comprobamos que la matriz M^t tiene inversa y la calculamos.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 - 0 = 1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } M^t$$

$$(M^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((M^t)^t)}{|M^t|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y obtenemos X.

$$X = (M^t)^{-1} (I - M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+2-1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$2B. \text{ Considera el siguiente sistema de ecuaciones: } \left. \begin{array}{l} 2x + 6y + kz = 0 \\ kx + 4y + 2z = 2 \\ kx + 6y + 2z = k - 2 \end{array} \right\}$$

- a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro k 1.5 pts
 b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k = 0$ 1 pto

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & k & 0 \\ k & 4 & 2 & 2 \\ k & 6 & 2 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 12k + 6k^2 - 4k^2 - 12k - 24 = 2k^2 - 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 8 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = \pm 2$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq \pm 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $k = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y - 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 2 \\ -2x + 6y + 2z = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ -2x \quad +4y \quad +2z \quad = 2 \\ 2x \quad +6y \quad -2z \quad = 0 \\ \hline 10y \quad \quad \quad = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 1^a \\ -2x \quad +6y \quad +2z \quad = -4 \\ 2x \quad +6y \quad -2z \quad = 0 \\ \hline 12y \quad \quad \quad = -4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y - 2z = 0 \\ 10y = 2 \\ 12y = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y - 2z = 0 \\ y = \frac{2}{10} = 0.2 \\ y = \frac{-4}{12} = -0.33 \end{array} \right\} \text{ ¡Imposible! }$$

El sistema no tiene solución.

CASO 3. Si $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 3^a \\ \text{podemos quitar la ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrcr} 2x & +4y & +2z & = 2 \\ -2x & -6y & -2z & = 0 \\ \hline & -2y & & = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y + 2z = 0 \\ -2y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y + 2z = 0 \\ \boxed{y = \frac{2}{-2} = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 6 + 2z = 0 \Rightarrow x - 3 + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3 - z}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) siendo las soluciones:

$$x = 3 - t; y = -1; z = t \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 4y + 2z = 2 \\ 6y + 2z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ 2y + z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ z = 1 - 2y \\ 3y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ 3y + 1 - 2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ \boxed{y = -2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 6 = 0 \rightarrow \boxed{x = 6} \\ \boxed{z = 1 + 4 = 5} \end{array} \right.$$

La solución es $x = 6; y = -2; z = 5$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición

relativa entre r y s

1.5 pts

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - y + z - 5 = 0$$

1 pto

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-y-z \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases} \Rightarrow -2-2y-2z-y+3z-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y+z-4=0 \Rightarrow \boxed{z=4+3y} \Rightarrow x=-1-y-(4+3y)=-1-y-4-3y=-5-4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=-5-4\alpha \\ y=\alpha \\ z=4+3\alpha \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-5,0,4) \\ \vec{u}_r=(-4,1,3) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(-1,1,-1) \\ \vec{v}_s(2,1,-3) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-4,1,3) \\ \vec{v}_s = (2,1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{3}{-3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,1,-1) - (-5,0,4) = (4,1,-5)$$

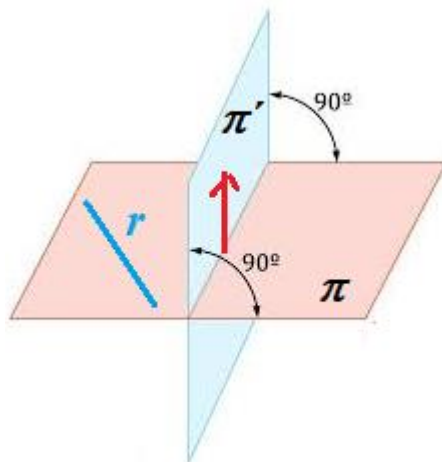
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (4,1,-5) \\ \vec{u}_r = (-4,1,3) \\ \vec{v}_s = (2,1,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 12 + 6 - 12 + 10 - 12 = 0$$

Como $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0$ entonces las rectas r y s se cortan (son coplanarias).

b) Como el plano π' pedido contiene a la recta r contiene al punto Pr .

Si el plano pedido contiene a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director $\vec{u}_r$ de la recta r .

Si el plano pedido es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano π .



$$\pi: 2x - y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-5, 0, 4) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (-4, 1, 3) \\ \vec{v} = \vec{n} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x+5 & y & z-4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 5 + 6y + 4(z - 4) - 2(z - 4) + 4y + 3(x + 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 5 + 6y + 4z - 16 - 2z + 8 + 4y + 3x + 15 = 0 \Rightarrow 4x + 10y + 2z + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': 2x + 5y + z + 6 = 0}$$

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A , dar la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 pts

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 pto

a) Pasamos las coordenadas de la recta r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = 5 - 2y \\ 3z = -7 + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}y \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto A intersección de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow 5\left(-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda\right) - 6\lambda + 7\left(-\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda\right) + 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{25}{3} + \frac{10}{3}\lambda - 6\lambda - \frac{49}{3} + \frac{28}{3}\lambda + 58 = 0 \Rightarrow -25 + 10\lambda - 18\lambda - 49 + 28\lambda + 174 = 0 \Rightarrow$$

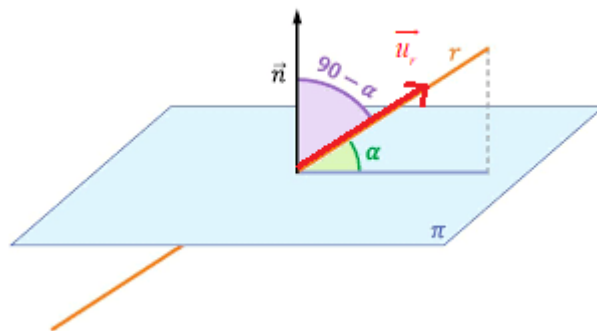
$$\Rightarrow 20\lambda = -100 \Rightarrow \lambda = \frac{-100}{20} = -5 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}(-5) = -5 \\ y = -5 \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}(-5) = -9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-5, -5, -9)}$$

La recta s , perpendicular al plano π tiene como vector director el normal del plano. Además, pasa por dicho punto A .

$$\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, -6, 7)$$

$$\left. \begin{aligned} A(-5, -5, -9) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (5, -6, 7) \end{aligned} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -5 + 5\alpha \\ y = -5 - 6\alpha \\ z = -9 + 7\alpha \end{cases}$$

b) Hallamos el ángulo que forma el vector normal del plano y el director de la recta $\vec{u}_r$.



$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_r = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \vec{u}_r = 3\vec{w}_r = (2, 3, 4)$$

$$\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, -6, 7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 3, 4) \\ \vec{n} = (5, -6, 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{u}_r| |\vec{n}|} = \frac{(2, 3, 4)(5, -6, 7)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 7^2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{10 - 18 + 28}{\sqrt{29}\sqrt{110}} = \frac{20}{\sqrt{3190}} \Rightarrow (\vec{u}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{3190}}\right) \approx 69^\circ$$

El ángulo entre vector director de recta y normal del plano es de 69° por lo que el ángulo entre recta y plano es $90^\circ - 69^\circ = 21^\circ$.

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. El 10% de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

- a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto
- b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo? 1 pto
- c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo? 0.5 pts

a) La proporción de población de Canarias que tiene alergia a la flor del olivo es $p = 0.1$

Llamamos X al número de personas de la muestra de 100 individuos que tendrá alergia a la flor del olivo.

Como con cada individuo de la muestra sólo se puede dar que tenga alergia o no y esto se repite con cada uno, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: $n = 100$ y $p = 0.10$

$$X = B(100, 0.10)$$

Como la cantidad de repeticiones es muy alta (100), la distribución binomial se podría aproximar por una distribución normal, si se dan las condiciones:

Como $n \cdot p = 10$ y $n \cdot q = 90 \geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3$

La variable aleatoria X se aproxima con una normal $Y = N(10, 3)$.

Nos piden calcular $P(X > 12)$. Hacemos la corrección de Yates y calculamos esta probabilidad con la normal.

$$P(X > 12) = P(Y \geq 12.5) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \geq \frac{12.5 - 10}{3}\right) = P(Z \geq 0.83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6256	0.6295	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729

Existe una probabilidad de 0.20 de que en 100 canarios haya más de 12 alérgicos a la flor del olivo.

b) Cambia el tamaño de la muestra y la variable es ahora una binomial de parámetros $n = 400$ y $p = 0.1$. $X = B(400, 0.1)$

Como el número de repeticiones es muy alto (400) aproximamos la binomial a una normal de media $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0.1 = 40$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 6 \rightarrow Y = N(40, 6)$.

$$P(X < 32) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 31.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{31.5 - 40}{6}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.42) = P(Z \geq 1.42) = 1 - P(Z \leq 1.42) = 1 - 0.9222 = \boxed{0.0778}$$

	0	0.01	0.02	0
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.63
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.66
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.76
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.82
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.84
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.90
1.4	0.9192	0.9206	0.9222	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.93

Por tanto, hay una probabilidad de 0.08 de que haya menos de 32 personas alérgicas a la flor del olivo.

- c) Cambia el tamaño de la muestra y la variable es ahora una binomial de parámetros $n = 500$ y $p = 0.1$. $X = B(500, 0.1)$

La esperanza o media es $n \cdot p = 500 \cdot 0.1 = 50$.

Se espera que, en un grupo de 500 canarios, por término medio, haya 50 canarios que tengan alergia a la flor del olivo.

Por tanto, se espera que $500 - 50 = 450$ canarios no tengan alergia a la flor del olivo.

4B. Una prueba, utilizada para determinar la presencia de plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos? 1 pto

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: “En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5% de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos” 1 pto

c) Si se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos? 0.5 pto

a) p es la proporción de test que dan resultado erróneo al aplicarlos: $p = 0.08$

Llamamos X al número de test que dan resultado erróneo al aplicarlos.

Como con cada test de la muestra sólo se puede dar que sea correcto o erróneo y esto se repite cada vez que se aplica, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que: la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros: $n = 10$ y $p = 0.08$

$$X = B(10, 0.08)$$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.08^3 \cdot 0.92^7 = 0.0342$$

La probabilidad de encontrar exactamente 3 resultados erróneos es 0.034

b) Calculamos $P(X > 2)$.

Para ello utilizamos el suceso contrario pues es más laborioso con el suceso directo (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10).

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.08^0 \cdot 0.92^{10} + \binom{10}{1} 0.08^1 \cdot 0.92^9 + \binom{10}{2} 0.08^2 \cdot 0.92^8 \right] =$$

$$= 1 - [0.4343 + 0.3777 + 0.1478] = \boxed{0.0474}$$

Como $0.0474 < 0.05$ la afirmación es cierta.

c) Si llamamos q a la probabilidad del suceso resultado correcto al aplicar el test, tenemos que $q = 0.92$.

Llamamos Y a la variable que contabiliza el número de test de respuesta correcta.

$$Y = B(100, 0.92)$$

El número esperado de análisis correctos es $n \cdot q = 100 \cdot 0.92 = 92$.

Por lo que, cuando se realizan 100 test, se espera encontrar una media de 92 análisis correctos.



EBAU Junio 2022 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2021–2022

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(4)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & \text{si } x < 1 \\ a + \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
 Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 pts
- b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = 1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$ 1 pto

1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+4}{x^2+4} dx$ 1.25 pts

b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 1.25 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3 , X e Y , verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3

(siendo I_3 la matriz identidad 3×3)

- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble

de la matriz X y cinco veces la matriz Y

2.5 pts

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro k :

$$\left. \begin{aligned} kx - y - z &= 1 \\ x + ky + 2kz &= k \\ x + y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro k 1.5 pts
- b) Resuelve el sistema para $k = 1$ 1 pto

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 pts

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r . Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z-2$ 1.25 pts

3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases}; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \quad r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 pts

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45° ? Justifícalo 1.25 pts

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:

- El 38% son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera
- El 29% son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33% son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

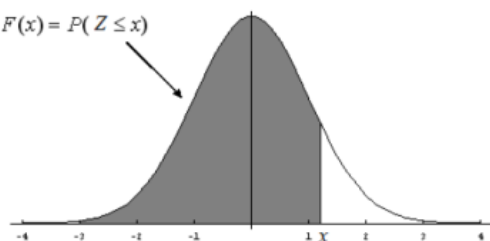
Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

- a) Construye el árbol de probabilidades 0.5 pts
- b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera 1 pto
- c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo? 1 pto

4B. El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

- a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos 1 pto
- b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1 0.75 pts
- c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80% de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo 0.75 pts

$F(x) = P(Z \leq x)$



	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & \text{si } x < 1 \\ a + \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudia los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
Escribe la función resultante $f(x)$ 1.5 ptos
- b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = 1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$ 1 pto

- a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ pues el logaritmo neperiano existe y la otra función es un polinomio.

Para que sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 + bx = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \ln(x) = a + \ln(1) = a \\ f(1) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

Si es derivable en $x = 1$ las derivadas laterales deben coincidir.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & \text{si } x < 1 \\ a + \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) + b = b \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

La función es derivable y continua en $\mathbb{R}$ si $a = b = 1$.

- b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = 1$ la función queda $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + x & \text{si } x < 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En $x = e = 2.71 \dots$ la función es $f(x) = -2 + \ln(x)$.

Tenemos que $f(e) = -2 + \ln(e) = -2 + 1 = -1$ y también $f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = e$ será:

$$\left. \begin{aligned} y - f(e) &= f'(e)(x - e) \\ f(e) &= -1 \\ f'(e) &= \frac{1}{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y + 1 = \frac{x}{e} - 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{e} - 2}$$

1B. Realiza el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+4}{x^2+4} dx$ 1.25 pts

b) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 1.25 pts

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{x+4}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{4}{x^2+4} dx = \dots$$

$$\bullet \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4)$$

$$\bullet \int \frac{4}{x^2+4} dx = \int \frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right)} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2} \right)^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{2} dx = dt \\ dx = 2dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2+1} 2dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctg t = 2 \arctg \frac{x}{2}$$

$$\dots = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \arctg \frac{x}{2} + K \right]$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{\cancel{x}} \cancel{dx} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(\ln x)^4}{4} + K$$

Utilizamos este resultado para calcular el valor de la integral definida pedida.

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^e = \left[\frac{(\ln e)^4}{4} \right] - \left[\frac{(\ln 1)^4}{4} \right] = \left[\frac{1}{4} \right]$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)**2A.** Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3 , X e Y , verifican las siguientes condiciones:- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3)- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doblede la matriz X y cinco veces la matriz Y

2.5 pts

El sistema matricial que nos plantea el ejercicio es:
$$\left. \begin{aligned} X + Y &= I_3 \\ 2X - 5Y &= A^T \end{aligned} \right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} X + Y &= I_3 \\ 2X - 5Y &= A^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 5X + 5Y &= 5I_3 \\ 2X - 5Y &= A^T \end{aligned}$$

$$\overline{7X = 5I_3 + A^T} \Rightarrow X = \frac{1}{7}(5I_3 + A^T)$$

$$\left. \begin{aligned} X + Y &= I_3 \\ 2X - 5Y &= A^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} -2X - 2Y &= -2I_3 \\ 2X - 5Y &= A^T \end{aligned}$$

$$\overline{-7Y = A^T - 2I_3} \Rightarrow Y = \frac{-1}{7}(A^T - 2I_3)$$

Sustituimos las matrices y obtenemos la expresión de X e Y .

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7}(5I_3 + A^T) = \frac{1}{7} \left[5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{-1}{7}(A^T - 2I_3) = \frac{-1}{7} \left[\begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 \\ 0 & -14 & -7 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro k :

$$\left. \begin{aligned} kx - y - z &= 1 \\ x + ky + 2kz &= k \\ x + y + z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro k . 1.5 pto

b) Resuelve el sistema para $k = 1$ 1 pto

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 1 + k + 1 - 2k^2 = -k^2 - k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 - k = 0 \Rightarrow -k(k+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 0$

En ese caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} -y - z &= 1 \\ x &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Queda tan sencillo que podemos intentar resolverlo

$$\left. \begin{aligned} -y - z &= 1 \\ x &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -y - z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y + z &= -1 \\ y &= 1 - z \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - z + z = -1 \Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible

CASO 3. $k = -1$

En ese caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} -x - y - z &= 1 \\ x - y - 2z &= -1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Queda tan sencillo que podemos intentar resolverlo

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ x \quad -y \quad -2z = -1 \\ -x \quad -y \quad -z = 1 \\ \hline -2y \quad -3z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad +z = 1 \\ -x \quad -y \quad -z = 1 \\ \hline 0 = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x - y - z = 1 \\ -2y - 3z = 0 \\ \hline 0 = 2 \end{array} \right\}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $k = 1$ el sistema es compatible determinado.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad +2z = 1 \\ -x \quad +y \quad +z = -1 \\ \hline 2y \quad +3z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad +z = 1 \\ -x \quad +y \quad +z = -1 \\ \hline 2y \quad +2z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ 2y \quad +2z = 0 \\ -2y \quad -3z = 0 \\ \hline -z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ -z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ \boxed{z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - 0 = 1 \\ 2y + 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 0 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución es $x = 1, y = 0, z = 0$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 pts

b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r . Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z-2$ 1.25 pts

Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -1 + 2y \\ -3z = -1 - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}y \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) \\ \vec{u}_r = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right) \end{cases}$$

Como salen fracciones buscamos otro punto con $\alpha = -1 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \\ y = -1 \\ z = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow Q_r(-1, -1, -1)$

Y como vector tomamos $\vec{v}_r = 3\vec{u}_r = 3\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = (2, 3, 4)$

$$s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 - 4y \\ z = -13 - 6y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -13 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} P_s(-12, 0, -13) \\ \vec{u}_s = (-4, 1, -6) \end{cases}$$

a) Los vectores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 3, 4) \\ \vec{u}_s = (-4, 1, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{4}{-6}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

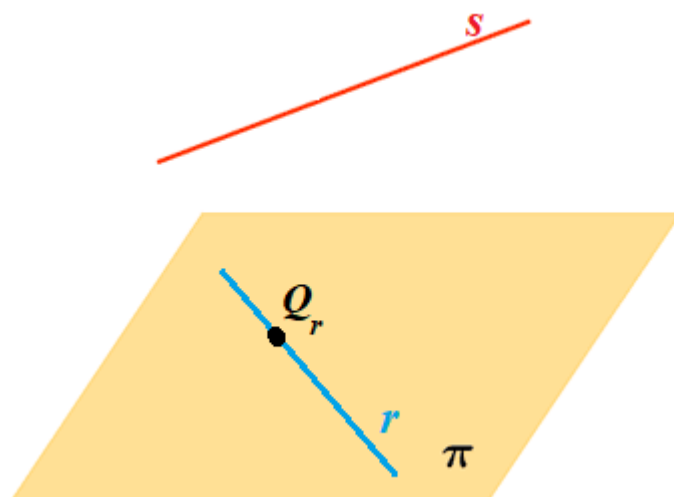
Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{Q_r P_s}]$

$$\overrightarrow{Q_r P_s} = (-12, 0, -13) - (-1, -1, -1) = (-11, 1, -12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 3, 4) \\ \vec{u}_s = (-4, 1, -6) \\ \overrightarrow{Q_r P_s} = (-11, 1, -12) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{Q_r P_s}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & -6 \\ -11 & 1 & -12 \end{vmatrix} = -24 + 198 - 16 + 44 - 144 + 12 = 70 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo sabemos que las rectas se cruzan.

- b) El plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r tiene como vectores directores el vector director de r y el vector director de s . Como contiene a la recta r , entonces contiene el punto Q_r .



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, 3, 4) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-4, 1, -6) \\ Q_r(-1, -1, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18x - 18 - 16y - 16 + 2z + 2 + 12z + 12 + 12y + 12 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -22x - 4y + 14z - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -11x - 2y + 7z - 6 = 0}$$

3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases}; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \quad r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

- a) Calcula la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 pts
 b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45° ? Justifícalo 1.25 pts

a) Hallamos el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

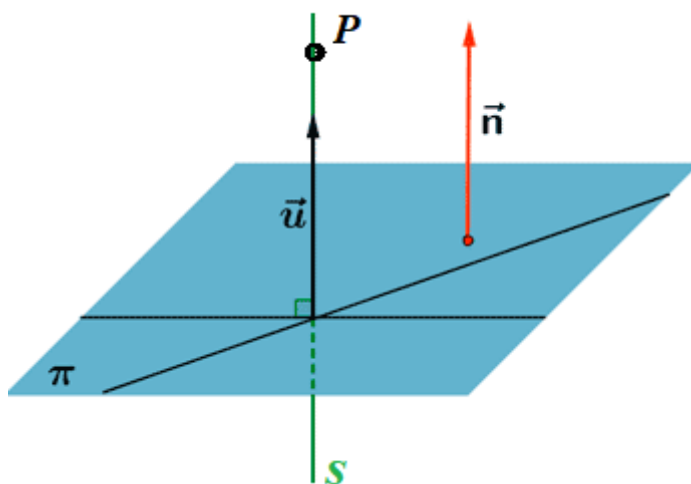
$$r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(-4, -5, 1) \\ \vec{v}_1 = (5, 6, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -5 + 6t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(-4 + 5t) + 3(-5 + 6t) = 7 \\ -5 + 6t + 4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 + 20t - 15 + 18t = 7 \rightarrow 38t = 38 \rightarrow t = 1 \\ 6t = 6 \rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 5 = 1 \\ y = -5 + 6 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1, 1, 1)}$$

La recta s , perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.



Hallamos el vector normal del plano, hallando primero la ecuación general del plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y - 1 = s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4(y - 1) \\ z = 3 - 2t - 5(y - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t + 4y - 4 \\ z = 3 - 2t - 5y + 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 4y - 3 \\ z = -2t - 5y + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + 3 = t \\ z = -2t - 5y + 8 \end{cases} \Rightarrow z = -2(x - 4y + 3) - 5y + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2x + 8y - 6 - 5y + 8 \Rightarrow z = -2x + 3y + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -3, 1)$$

Hallamos la ecuación de la recta s

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (2, -3, 1) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) El ángulo entre las rectas es el ángulo entre sus vectores directores.

Hallamos un vector director de la recta r_2 .

$$r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y = 5 - 4z \end{cases} \Rightarrow 4x + 3(5 - 4z) = 7 \Rightarrow 4x + 15 - 12z = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = -8 + 12z \Rightarrow x = -2 + 3z \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 5 - 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(-2, 5, 0) \\ \vec{u}_2 = (3, -4, 1) \end{cases}$$

Calculamos el ángulo entre las rectas

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (5, 6, 0) \\ \vec{u}_2 = (3, -4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r_1, r_2) = \cos(\vec{v}_1, \vec{u}_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|(5, 6, 0)(3, -4, 1)|}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(r_1, r_2) = \frac{|-9|}{\sqrt{61} \sqrt{26}} \Rightarrow (r_1, r_2) \approx 77^\circ$$

No es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45° . El ángulo es de casi 77° .

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

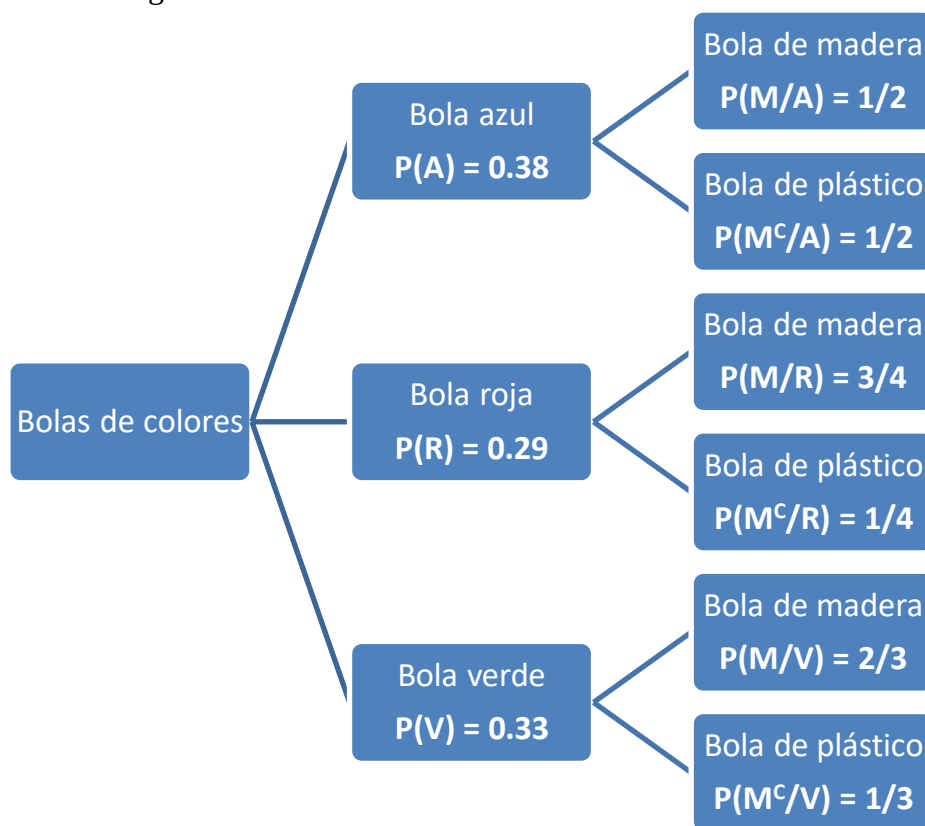
4A. Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información de su contenido:

- El 38% son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera
- El 29% son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera
- El 33% son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera

Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

- a) Construye el árbol de probabilidades 0.5 pto
 b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera 1 pto
 c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo? 1 pto

- a) Llamamos A = “ser bola azul”, R = “ser bola roja”, V = “ser bola verde” y M = “ser bola de madera”, M^C = “ser bola de plástico”.
 Construimos el diagrama de árbol.



- b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(M) &= P(A)P(M/A) + P(R)P(M/R) + P(V)P(M/V) = \\
 &= 0.38 \cdot \frac{1}{2} + 0.29 \cdot \frac{3}{4} + 0.33 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{251}{400} = 0.6275}
 \end{aligned}$$

- c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

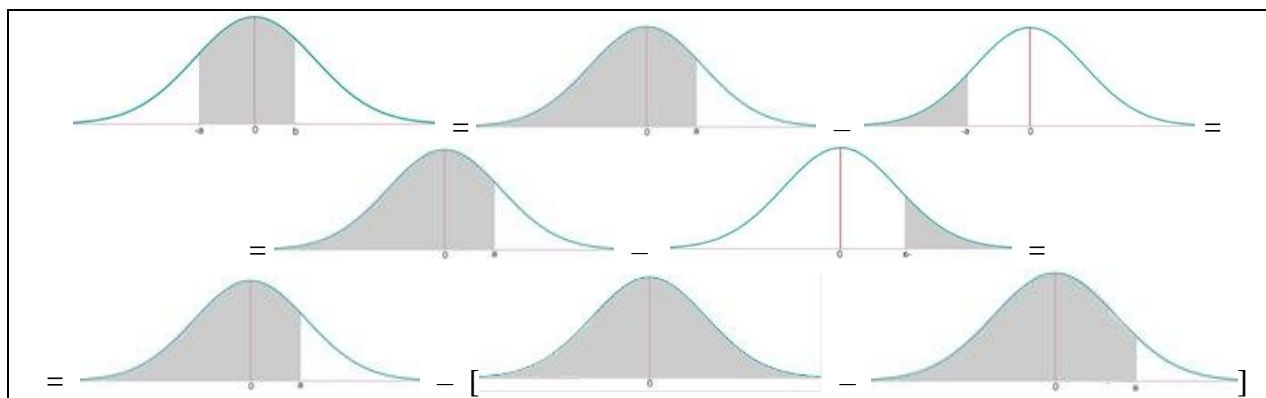
$$P(R/M^C) = \frac{P(R \cap M^C)}{P(M^C)} = \frac{P(R)P(M^C/R)}{1 - P(M)} = \frac{0.29 \cdot \frac{1}{4}}{1 - 0.6275} = \boxed{\frac{29}{149} \approx 0.195}$$

4B. El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

- a) La probabilidad de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos 1 pto
 b) Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0.1 0.75 pts
 c) El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80% de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo 0.75 pts

Llamamos X = El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco. $X = N(30, \sqrt{2})$

$$a) P(28 \leq X \leq 31) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 30}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = P\left(\frac{28-30}{\sqrt{2}} \leq Z \leq \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) = P(-1.41 \leq Z \leq 0.71) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 0.71) - P(Z \leq -1.41) = P(Z \leq 0.71) - P(Z \geq 1.41) = P(Z \leq 0.71) - [1 - P(Z \leq 1.41)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 0.7611 - [1 - 0.9192] = \boxed{0.6803}$$

b) Calculamos el valor de $P(X \geq 32)$

$$P(X \geq 32) = 1 - P(X \leq 32) = \{\text{Tipificamos}\} = 1 - P\left(Z \leq \frac{32-30}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P(Z \leq 1.41) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.9207 = \boxed{0.0793} < 0.1$$

	0	0.01	0.02
0	0.5000	0.5039	0.5078
0.1	0.5398	0.5438	0.5477
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
0.9	0.8159	0.8186	0.8213
1	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888
1.3	0.9032	0.9049	0.9066
1.4	0.9192	0.9207	0.9222
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
1.6	0.9452	0.9463	0.9473

Si es cierta la afirmación de que la probabilidad es menor de 0.1.

c) Calculamos $P(X \geq 29)$

$$P(X \geq 29) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \geq -0.71) = P(Z \leq 0.71) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.7611}$$

	0	0.01	0.1
0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939

Hemos visto que $P(X \geq 29) = 0.7611$. Esto implica que hay un 76.11 % de posibilidades de que venda más de 29 periódicos. La afirmación de que es mayor del 80 % es falsa.

EBAU Julio 2021 Matemáticas II en Canarias


**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2020–2021****MATERIA: MATEMÁTICAS II****(3)****Convocatoria:****Instrucciones:**

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2x - 4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$. 2.5 pts

1B. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$

- a) Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 pts
- b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M) = 1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1.5 pts

2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto.
Averiguar dicho punto.

1.5 pts

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r , y perpendicular al plano π

1 pto

3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

Y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s .

1.5 pts

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A .

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s .

1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20%

1.25 pts

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

0.75 pts

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

0.5 pts

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

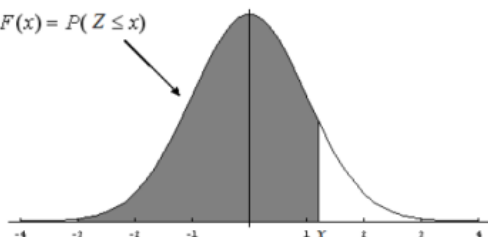
a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

1.25 pts

b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación?

1.25 pts

$$F(x) = P(Z \leq x)$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{2x - 4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.
Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$. 2.5 pts

La función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, pues en $(-\infty, 0)$ la función es racional y el denominador se anula para $x = 2$ que no pertenece al intervalo $(-\infty, 0)$, y en $(0, +\infty)$ la función es una parábola que no plantea ningún problema de continuidad ni de derivabilidad.

Falta ver si la función puede ser continua y derivable en $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ f(0) &= \frac{0^2 + a}{2 \cdot 0 - 4} = -\frac{a}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + a}{2x - 4} = -\frac{a}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 10x^2 + x + b = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{a}{4} = b \Rightarrow \boxed{a = -4b}$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(2x-4) - 2(x^2+a)}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2 - 2a}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 2a}{(2x-4)^2} & x < 0 \\ 20x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{0 - 0 - 2a}{(0-4)^2} = -\frac{a}{8} \\ f'(0^+) &= 20 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{a}{8} = 1 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenida antes tenemos que $-8 = -4b \Rightarrow \boxed{b = 2}$

Para que la función sea continua y derivable en $x = 0$ deben ser $a = -8$ y $b = 2$.

La función sería $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8}{2x - 4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + 2 & x > 0 \end{cases}$ y la derivada $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 8x + 16}{(2x-4)^2} & x \leq 0 \\ 20x + 1 & x > 0 \end{cases}$

1B. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$

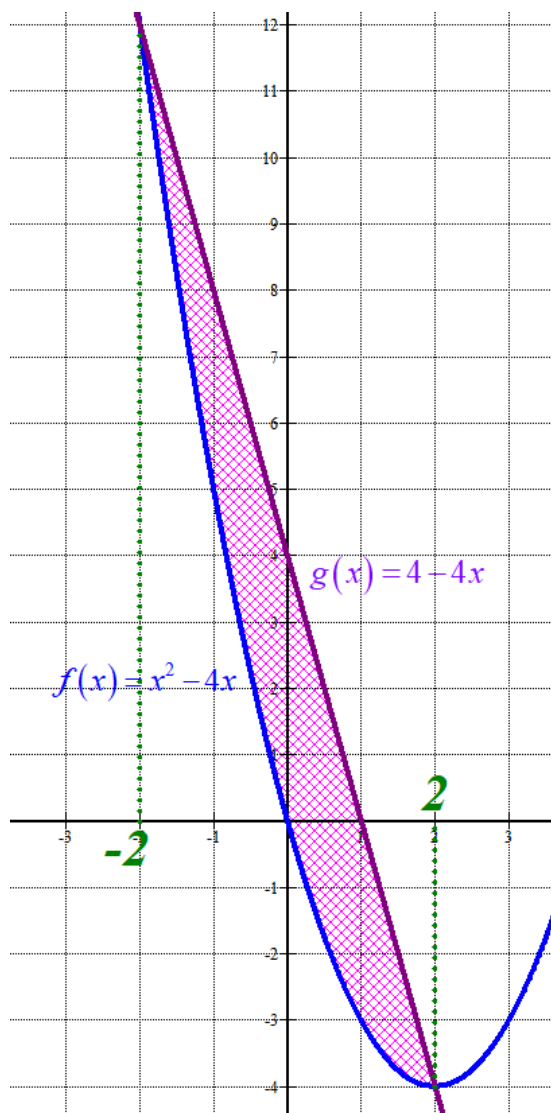
- a) Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 pts
 b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 pts

a) Veamos donde se cortan sus gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Son una parábola $f(x) = x^2 - 4x$ y una recta $g(x) = 4 - 4x$ que coinciden en $x = -2$ y en $x = 2$.
 Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	$y = x^2 - 4x$	x	$y = 4 - 4x$
-2	12	-2	12
-1	5	0	4
0	0	2	-4
1	-3		
2	-4		



b) El área del recinto es la integral definida entre $x = -2$ y $x = 2$ de $g(x) - f(x)$.

$$\text{Área} = \int_{-2}^2 4 - 4x - (x^2 - 4x) dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left[8 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M) = 1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$$D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{1.5 pts}$$

a) Si $M = A + c \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$. Si su rango es 1, quiere decir que su determinante es nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)(2-c) + 4 + 4c = 0 \Rightarrow 2 - c + 2c - c^2 + 4 + 4c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1) \cdot 6}}{-2} = \frac{-5 \pm 7}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+7}{-2} = -1 = c \\ \frac{-5-7}{-2} = 6 = c \end{cases}$$

Para $c = -1$ o $c = 6$ el rango de M es 1.

$$b) D = A^2 + B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Veamos si tiene inversa, en cuyo caso, la calculamos.

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 48 = 60 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{\text{Adj}(D^T)}{|D|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}}{60} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo usamos para hallar la matriz X .

$$D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -30 D^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -30 \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -24 & -14 & -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 pts

Llamamos “x” a los puntos de Lovelace, “y” a los puntos de Noerther, “z” a los puntos de Germain.

“Las tres acumulan 17500 puntos” $\rightarrow x + y + z = 17500$

“Lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace”
 $\rightarrow z + 2500 = \frac{x}{2}$

“Noerther anotó el doble que Germain” $\rightarrow y = 2z$

Juntamos las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 17500 \\ z + 2500 = \frac{x}{2} \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 17500 \\ 2z + 5000 = x \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow 2z + 5000 + 2z + z = 17500 \Rightarrow 5z = 12500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{12500}{5} = 2500} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 \cdot 2500 + 5000 = 10000} \\ \boxed{y = 2 \cdot 2500 = 5000} \end{cases}$$

Lovelace ha anotado 10000 puntos, Noerther 5000 y Germain 2500.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto.

Averiguar dicho punto.

1.5 pts

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r , y perpendicular al plano π

1 pto

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z \Rightarrow r: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por la recta y el plano.

$$r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 3(5 - \lambda) - 4(3 + \lambda) - 8(5 - \lambda) + 35 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

$$\Rightarrow 15 - 3\lambda - 12 - 4\lambda - 40 + 8\lambda + 35 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2 = 3 \\ y = 3 + 2 = 5 \\ z = 5 - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow P(3, 5, 3)$$

Recta y plano se cortan en el punto $P(3, 5, 3)$.b) Si el plano π' es paralelo a la recta r tiene como vector director el director de la recta. Y al ser perpendicular al plano también tiene como vector director el normal del plano π .

$$r: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, -1)$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (3, -4, -8)$$

Hallamos la ecuación del plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (3, -4, -8) \\ A(2, 2, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x + 16 - 3y + 6 + 4z - 8 - 3z + 6 - 8y + 16 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -12x - 11y + z + 44 = 0}$$

3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

Y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s .

1.5 pto

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s .

1 pto

a) Hallamos el punto de intersección de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z \\ s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1} \\ s: \frac{x+1}{6} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-0}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = -1 + 6\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 2\lambda = -1 + 6\alpha \\ -2 + \lambda = -2\alpha \\ 1 - \lambda = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + 2\lambda = -1 + 6(1 - \lambda) \\ -2 + \lambda = -2(1 - \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 + 2\lambda = -1 + 6 - 6\lambda \\ -2 + \lambda = -2 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = -8\lambda \\ 0 = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(5, -2, 1)}$$

La recta t perpendicular al plano π tiene como vector director el normal del plano.

$$\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-1, 3, 2)$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = \vec{n} = (-1, 3, 2) \\ A(5, -2, 1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 5 - \beta \\ y = -2 + 3\beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$$

b) El ángulo entre las rectas es el ángulo entre sus vectores directores. Este ángulo lo hallamos con el uso del producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1} \\ s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (6, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(r, s) = \cos(\vec{u}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{v}_s|}$$

$$\cos(r, s) = \frac{(2, 1, -1)(6, -2, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{12 - 2 - 1}{\sqrt{6} \sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{246}}{82}$$

$$\boxed{\text{ángulo}(r, s) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{246}}{82}\right) \approx 54^\circ}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20%

1.25 pts

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

0.75 pts

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas? 0.5 pts

a) X = Número de arandelas defectuosas en un lote de 20.

Probabilidad de que una arandela sea defectuosa = $p = 0.01$, $q = 0.99$, $n = 20$.

X es una variable binomial. $X = B(20, 0.01)$

$$P(\text{En un lote hay 1 o 2 arandelas defectuosas}) = P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{20}{1} 0.01^1 \cdot 0.99^{19} + \binom{20}{2} 0.01^2 \cdot 0.99^{18} =$$

$$= 20 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{19} + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{18} = \boxed{0.181 = 18.1\%}$$

La probabilidad es **menor** del 20 %.

b) Nos piden $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} 0.01^0 \cdot 0.99^{20} = 1 - 0.99^{20} = \boxed{0.182}$$

La probabilidad de rechazar un lote es del 18.2 %.

c) X = Número de arandelas sin defectos en un lote de 200.

Probabilidad de que una arandela sea sin defectos = $p = 0.99$, $q = 0.01$, $n = 200$.

X es una variable binomial. $X = B(200, 0.99)$

El número esperado es la media de la distribución $\rightarrow$ Esperanza = $n \cdot p = 200 \cdot 0.99 = 198$.

Es de esperar que en un lote de 200 arandelas estén 198 sin defectos. Solo 2 serían defectuosas.

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

1.25 pts

b) Correos afirma que: “Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos”. ¿Es correcta la afirmación?

1.25 pts

Llamamos X = El tiempo de espera en la cola de Correos (en minutos). $X = N(7.5, 2)$.

$$a) P(X \geq 9) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{9-7.5}{2}\right) = P(Z \geq 0.75) = \dots$$



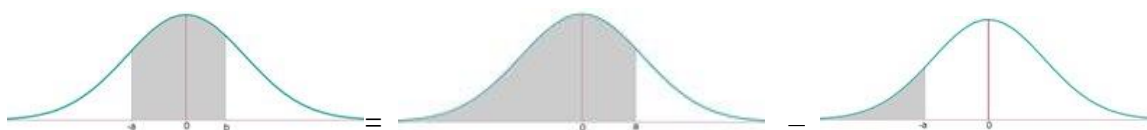
$$\dots = 1 - P(Z \leq 0.75) = \{Miramos en la tabla N(0, 1)\} = 1 - 0.7734 = \boxed{0.2266}$$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453
0.7	0.7580	0.7613	0.7645	0.7677	0.7708	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315

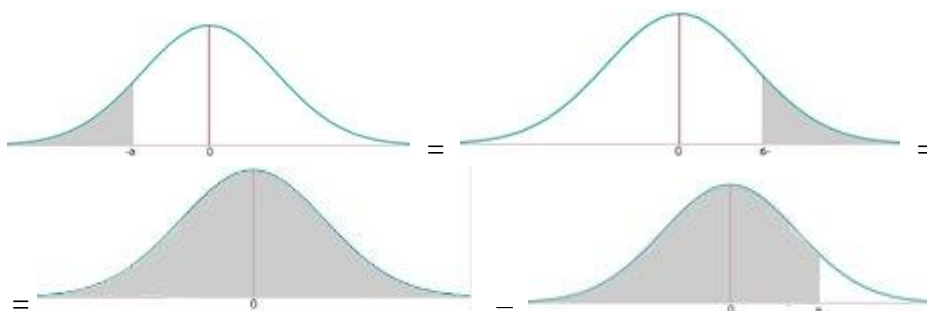
El porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos es del 22.66 %

b) Calculamos la probabilidad de esperar entre 7 y 10 minutos.

$$P(7 \leq X \leq 10) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{7-7.5}{2} \leq Z \leq \frac{10-7.5}{2}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 1.25) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -0.25) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 0.25) = P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 0.25)] =$$

$$= \{ \text{Miramos en la tabla } N(0, 1) \} = 0.8944 - [1 - 0.5987] = \boxed{0.4931 = 49.31 \%}$$

Es falsa la afirmación pues el porcentaje de personas es de **más** del 40 %.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8521	0.8544
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279



EBAU Junio 2021 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 - 2}{b - x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 pts
- b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 pts

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblandola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

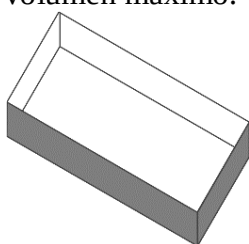


Figura 1

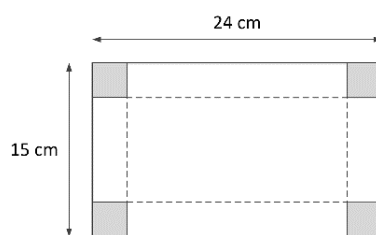


Figura 2

2.5 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.5 pts

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$$A(0,-2,3), B(1,-1,4), C(2,3,3) \text{ y } D(4,5,5)$$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.

A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

1.5 pts

b) Calcular la ecuación de la recta r , perpendicular al plano π :

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$$

1 pto

que pasa por el punto A.

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$

1.25 pts

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2

1.25 pts

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

0.5 pts

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.

1 pto

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1.

1 pto

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?

1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?

1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

0.5 pts

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 - 2}{b - x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 pts

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 pts

a) Aplicamos la condición $f(-2) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{ax^2 - 2}{b - x} \\ f(-2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{a(-2)^2 - 2}{b - (-2)} \Rightarrow 2 = \frac{4a - 2}{b + 2} \Rightarrow 2b + 4 = 4a - 2 \Rightarrow \boxed{2b = 4a - 6}$$

La función no es continua en $x = 5$, por lo que el denominador debe anularse para dicho valor, luego debe ser $b = 5$.

Aplicando a lo obtenido inicialmente tenemos que $10 = 4a - 6 \rightarrow 4a = 16 \rightarrow a = 4$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 5$.

La función queda $f(x) = \frac{4x^2 - 2}{5 - x}$

Su derivada es:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2}{5 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x(5 - x) - (-1)(4x^2 - 2)}{(5 - x)^2} = \frac{40x - 8x^2 + 4x^2 - 2}{(5 - x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-4x^2 + 40x - 2}{(5 - x)^2}}$$

b) Para $a = -1$ y $b = -3$ la función queda $f(x) = \frac{-x^2 - 2}{-3 - x} = \frac{x^2 + 2}{3 + x}$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x = -3$?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = \frac{11}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{3 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x} + 1} = \frac{1 + 0}{0 + 1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - 3x - \cancel{x^2}}{3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{3 + x} = -3$$

$y = x - 3$ es la asíntota oblicua.

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblandola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

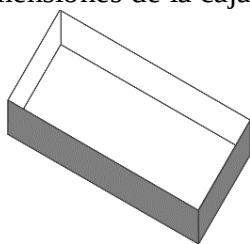


Figura 1

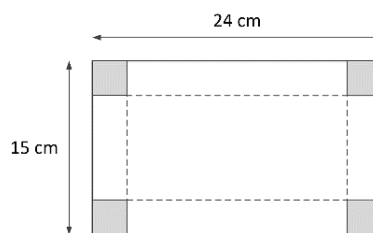
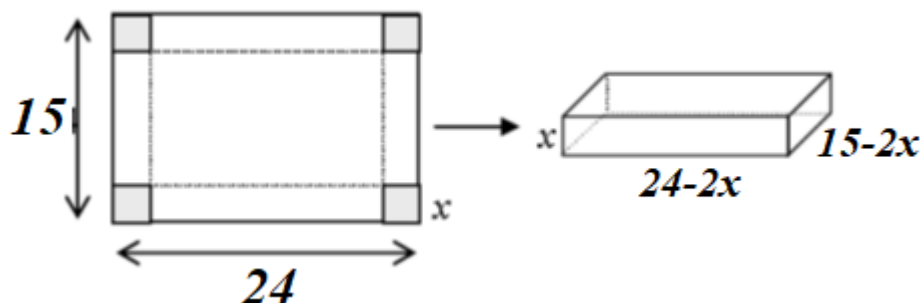


Figura 2

2.5 pts

Queremos maximizar el volumen en función de la longitud del lado de los cuadraditos que quitamos en cada esquina.

Llamamos x = longitud del lado que quitamos



El volumen es $v(x) = x(15-2x)(24-2x)$. Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$v(x) = x(15-2x)(24-2x) = x(360 - 30x - 48x + 4x^2) = 360x - 78x^2 + 4x^3$$

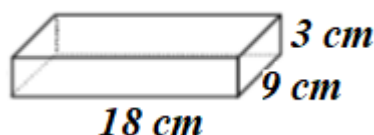
$$\left. \begin{array}{l} v'(x) = 360 - 156x + 12x^2 \\ v'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 360 - 156x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 30 - 13x + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{13-7}{2} = 3 \\ \frac{13+7}{2} = 10 \end{cases}$$

Hallamos la segunda derivada y vemos cual es el máximo relativo del volumen.

$$v'(x) = 360 - 156x + 12x^2 \Rightarrow v''(x) = -156 + 24x \Rightarrow \begin{cases} v''(3) = -156 + 72 = -84 < 0 \\ v''(10) = -156 + 240 = 84 > 0 \end{cases}$$

El máximo relativo se obtiene para $x = 3$. El volumen máximo es de $18 \cdot 9 \cdot 3 = 486 \text{ cm}^3$.



Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad 2.5 \text{ pts}$$

Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = -2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\text{Sustituyo en la 2ª ecuación}\} \Rightarrow 2X + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz M .

$$M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 16+6 & 8-2 \\ 12-3 & 6+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 25-5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$$

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 pts

Llamamos “x” al número de sacos de A, “y” al número de sacos de B, “z” a los sacos de C.

“Obtiene un total de 66 sacos de pienso” $\rightarrow x + y + z = 66$

“Compra un determinado mes 274€ de pienso y el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente” $\rightarrow 5x + 4y + 4z = 274$

“El número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos” $\rightarrow z = 2(x + y)$

Juntamos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 66 \\ 5x + 4y + 4z = 274 \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 66 \\ 5x + 4y + 4z = 274 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2x + 2y = 66 \\ 5x + 4y + 4(2x + 2y) = 274 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y = 66 \\ 5x + 4y + 8x + 8y = 274 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 22 \\ 13x + 12y = 274 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 22 - y \\ 13x + 12y = 274 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13(22 - y) + 12y = 274 \Rightarrow 286 - 13y + 12y = 274 \Rightarrow -y = -12 \Rightarrow \boxed{y = 12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 22 - 12 = 10} \Rightarrow \boxed{z = 20 + 24 = 44}$$

Ha comprado 10 sacos de la marca A, 12 de B y 44 de C.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$$A(0,-2,3), B(1,-1,4), C(2,3,3) \text{ y } D(4,5,5)$$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.

A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

1.5 pts

 b) Calcular la ecuación de la recta r , perpendicular al plano π :

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$$
 1 pto

que pasa por el punto A.

 a) Para comprobar que son coplanarios hallo el plano π que contiene a los puntos A, B y C, después compruebo que el punto D está en el plano π .
Hallamos la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 4) - (0, -2, 3) = (1, 1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 3) - (0, -2, 3) = (2, 5, 0) \\ A(0, -2, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi: 2y + 4 + 5z - 15 - 2z + 6 - 5x = 0 \Rightarrow \pi: -5x + 2y + 3z - 5 = 0$$

¿El punto D(4,5,5) pertenece al plano π ?

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -5x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ \text{¿} D(4,5,5) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 - 5 = 0? \Rightarrow \text{¿} -20 + 10 + 15 - 5 = 0?$$

Como la igualdad es cierta se concluye que los cuatro puntos A, B, C y D pertenecen al plano π y por tanto son coplanarios.El plano que los contiene tiene ecuación $\pi: -5x + 2y + 3z - 5 = 0$.

b) El vector director de la recta perpendicular al plano será el vector normal del plano.

Hallamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (2, 1, -3) \\ \vec{v} = (3, 0, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3i - 3j - 3k = (-3, -3, -3)$$

Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por $A(0,-2,3)$ y con vector director $\vec{n} = (-3, -3, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (-3, -3, -3) \\ A(0, -2, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -2 - 3t, \text{ siendo } t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad y \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

- a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$ 1.25 pts
- b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 pts

a) Hallamos el punto medio del segmento de extremos $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$

$$M = \frac{(1, -1, 0) + (-1, -3, 2)}{2} = (0, -2, 1)$$

Estudiamos la posición relativa de los dos planos.

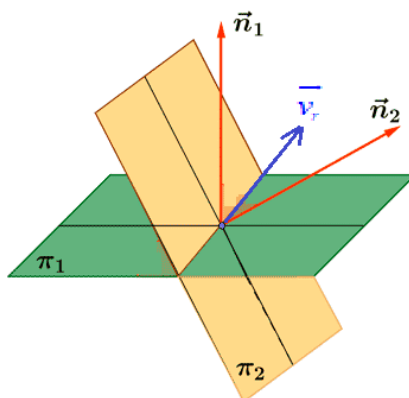
$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 3, -1)$$

$$\pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, -1, 3) \times (1, 2, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5i + 4j + 3k = (-5, 4, 3)$$

Los vectores normales de los planos no tienen coordenadas proporcionales, por lo que los planos no son ni paralelos ni coincidentes. Los planos π_1 y π_2 son secantes y se cortan en una recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_2 = (-5, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-5} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{-1}{3}$$

La recta que nos piden hallar es paralela a ella, por lo que tendrán el mismo vector director. El vector director de la recta intersección lo calculamos con el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

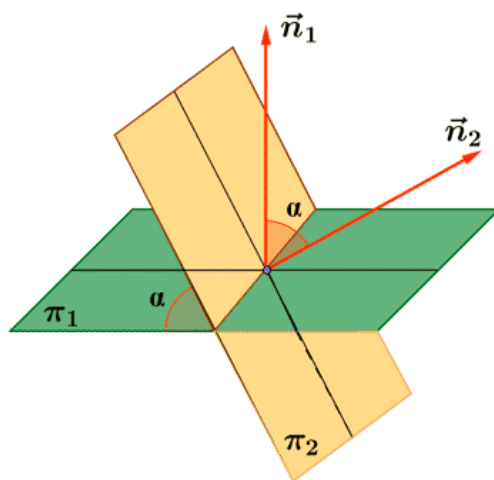


$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_2 = (-5, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 13i - j + 23k = (13, -1, 23)$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $M = (0, -2, 1)$ y con vector director $\vec{v}_r = (13, -1, 23)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (13, -1, 23) \\ M = (0, -2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2 - \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 23\lambda \end{cases}$$

b) Utilizamos los vectores normales de los dos planos. El ángulo formado entre los dos vectores normales es igual que el ángulo formado entre los dos planos.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_2 = (-5, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \Rightarrow$$

$$(2, 3, -1)(-5, 4, 3) = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 + 12 - 3 = \sqrt{14} \sqrt{50} \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \Rightarrow -1 = \sqrt{700} \cdot \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{-1}{\sqrt{700}} \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{700}}\right) = 92.16^\circ$$

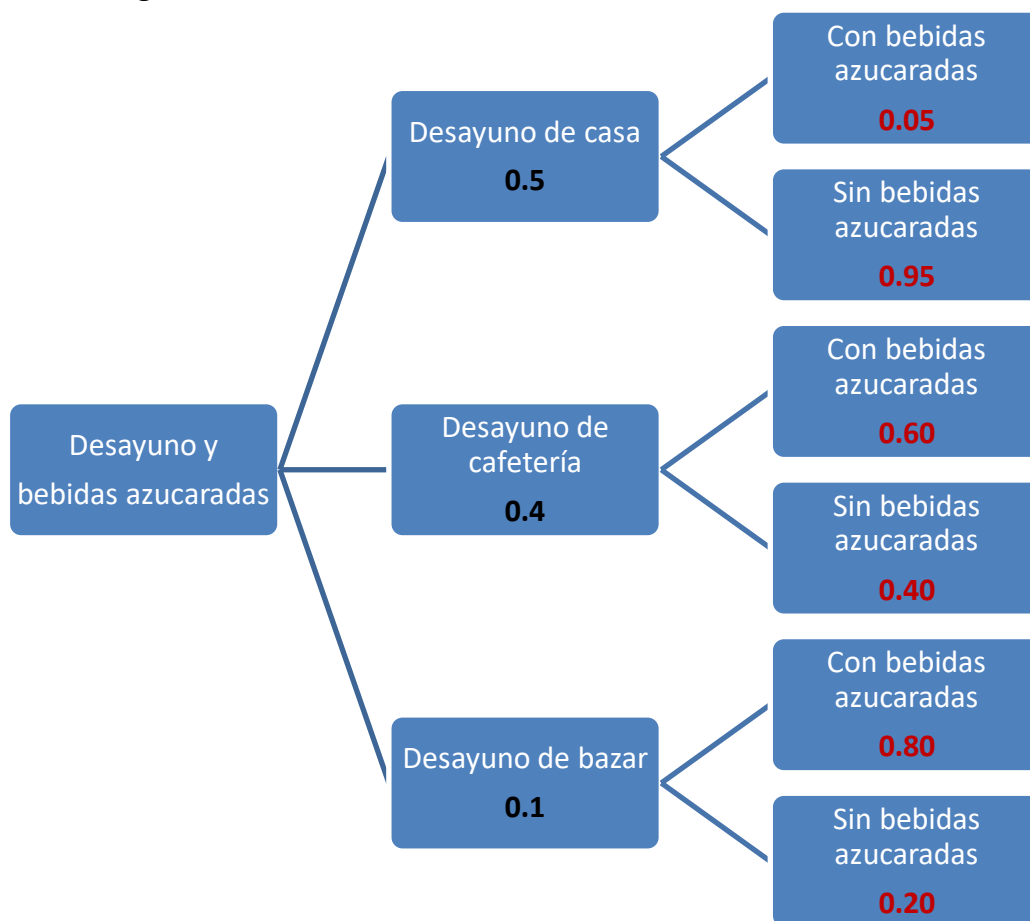
El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es de 92.16°

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

- Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.
- Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.
- Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1

- Solo el $100 - 50 - 40 = 10\%$ son desayunos comprados en el bazar.
Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = “Desayuno de casa”, B = “Desayuno de cafetería”, C = “Desayuno de Bazar”

D = “Desayuno con bebida azucarada”, $\bar{D}$ = “Desayuno sin bebida azucarada”

Las probabilidades de los sucesos A , B y C aparecen en el diagrama de árbol.

- Calculamos la probabilidad de que un desayuno lleve bebidas azucaradas.
Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\&= 0.5 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.60 + 0.1 \cdot 0.80 = \boxed{0.345}\end{aligned}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga bebidas azucaradas en su desayuno es de 0.345, es decir 34.5% de los alumnos toman bebidas azucaradas en el desayuno.

Por lo que SI es cierto que más del 30 % toman bebidas azucaradas en el desayuno.

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.345} = \boxed{\frac{5}{69} \approx 0.0725}$$

No es cierta la afirmación, pues la probabilidad es $0.0725 < 0.1$.

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

- Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?
- Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?
- ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

Llamamos X = Número de pacientes que se curan con un medicamento.

$N = n^\circ$ de pacientes = 100. $p = P(\text{Un paciente se cure}) = 0.80$

La variable X es una binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0.8$. $X = B(100, 0.8)$

Como las 100 repeticiones del experimento “tomar un medicamento y ver si te curas” son independientes con idéntica probabilidad en cada repetición y “ n ” es muy grande la aproximamos por una normal de media $n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 > 5$, $n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 4$.

Aproximamos las probabilidades con una normal $X' = N(80, 4)$.

$$a) P(X \geq 75) = P(X' \geq 75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{75-80}{4}\right) = P(Z \geq -1.25) = \dots$$



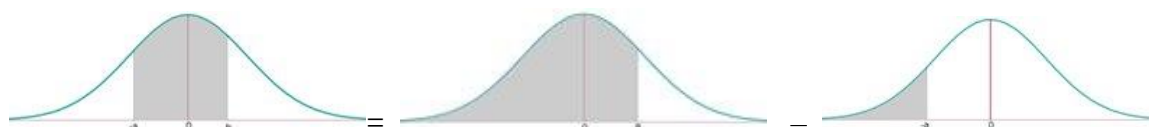
$$\dots = P(Z \leq 1.25) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = \boxed{0.8944}$$

- Media = $n \cdot p = 225 \cdot 0.8 = 180 > 5$, también se cumple $n \cdot q = 225 \cdot 0.2 = 45 > 5$.
 $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{225 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 6$

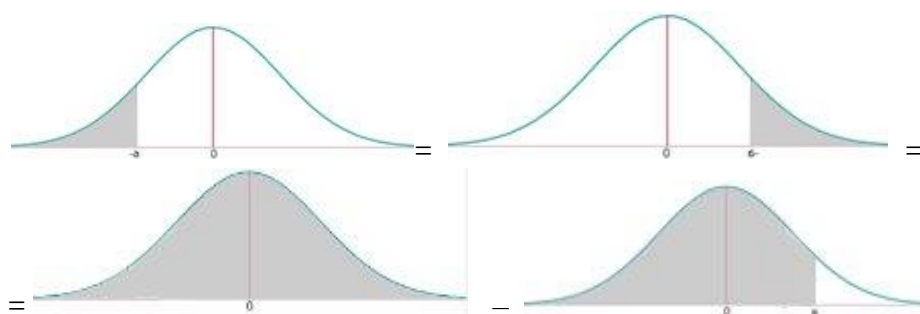
En este caso razonando como en el apartado anterior tenemos $X = B(225, 0.8)$ se aproxima con una normal $X' = N(180, 6)$.

$$P(170 \leq X \leq 190) = P(170 \leq X' \leq 190) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{170-180}{6} \leq Z \leq \frac{190-180}{6}\right) = P(-1.67 \leq Z \leq 1.67) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 1.67) - P(Z \leq -1.67) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 1.67) - P(Z \geq 1.67) = P(Z \leq 1.67) - [1 - P(Z \leq 1.67)] =$$

$$= \{ \text{Miramos en la tabla } N(0, 1) \} = 0.9525 - [1 - 0.9525] = \boxed{0.905}$$

- c) Hemos llamado “q” a la probabilidad de NO curarse el acné. Esta probabilidad vale 0.2. Consideramos la variable Y que cuenta el número de pacientes que no se curan de entre 500. $Y = B(500, 0.2)$ y su esperanza es la media $= n \cdot p$. Por lo que en 500 pacientes el número esperado de pacientes que no se curan es de:

$$\text{Esperanza} = n \cdot q = 500 \cdot 0.2 = 100$$

En un grupo de 500 pacientes 100 es el número esperado de pacientes a los que no se les curará el acné.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952



EBAU Septiembre 2020 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL
CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(2)

Convocatoria: SEPTIEMBRE

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO A

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ 1.25 pts

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ 1.25 pts

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

- a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X. 0.5 pts
 b. Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 pts

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$

- a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π . 1.25 pts
 b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . 1.25 pts

4. Si una bombilla fluorescente presenta un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas. 1 pto
 b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7. 1 pto
 c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10 0.5 pts



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2019-2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(3)

Convocatoria: SEPTIEMBRE

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO B

1. Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva

$$f(x) = \frac{bx-1}{bx+1} \text{ en el punto de abscisa } x = 0.$$

Escriba las funciones que se obtienen.

2.5 pts

2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} kx + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ky + 4z = 2 \\ 2x + ky + 6z = k - 2 \end{array} \right\}$$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k .

1.75 pts

b. Resuelva el sistema para $k = 0$

0.75 pts

3. Consideremos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r : \begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + z = 14 \end{cases}$

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r .

1.5 pts

b. Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r . Y sea s la recta determinada por los puntos A y P . Calcule el ángulo que forman las rectas r y s .

1 pto

4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9

a. Represente el diagrama de árbol del problema.

0.5 pts

b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%.

0.75 pts

c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5

0.75 pts

d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

0.5 pts

SOLUCIONES

GRUPO A

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ 1.25 pts

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ 1.25 pts

a. Usamos el método de integración por partes.

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \dots$$

$$\int x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + K$$

$$\dots = [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - [0 \cdot \sin 0 + \cos 0] = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

b. El dominio de la función $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \frac{6}{0} = \infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned}n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - x \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} + 5x^2 - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 = 5\end{aligned}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x + 5$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.

0.5 pts

b. Halle la matriz X que cumple la ecuación.

2 pts

a. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X \cdot A - C^t = X \cdot B \Rightarrow X \cdot A - X \cdot B = C^t \Rightarrow X \cdot (A - B) = C^t \Rightarrow X = C^t \cdot (A - B)^{-1}$$

Para despejar he supuesto que la matriz $A - B$ es invertible.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La matriz $A - B$ tiene determinante distinto de cero y es invertible.

La matriz $(A - B)^{-1}$ tiene dimensión 3×3 .

$$\text{Veamos la dimensión de } C^t \rightarrow C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión de C^t es 2×3 .

Estudiamos la dimensión de X.

$$C^t \cdot (A - B)^{-1} = X$$

$$\xrightarrow{2 \times 3 \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 2 \times 3}$$

Coinciden el número de columnas de primer factor del producto con el número de filas del segundo factor, por lo que se puede hacer dicho producto y se obtiene una matriz (X) con el número de filas del primer factor del producto y número de columnas del segundo factor del producto. X es de dimensión 2×3 . Tiene 2 filas y 3 columnas.

b.

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - B)^t)}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^t \cdot (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1+6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano $\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$

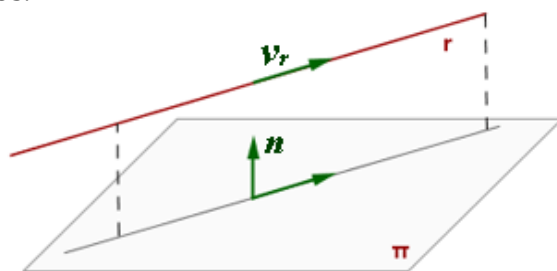
- a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π . 1.25 pts
 b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . 1.25 pts

- a. La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$ y un punto de la recta es $P_r(0, 2, 2)$.

Veamos si el vector director de la recta y el normal del plano son ortogonales (recta y plano paralelos).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 1, 1) \\ \vec{n} = (1, -3, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-2, 1, 1) \cdot (1, -3, 5) = -2 - 3 + 5 = 0$$

Recta y plano son paralelos.

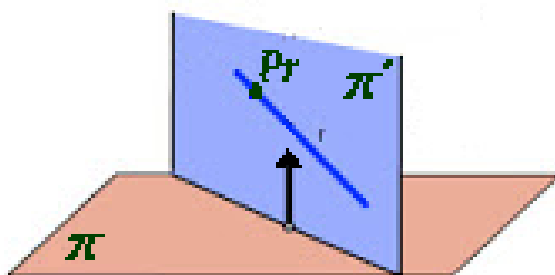


- b. El plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π contiene el punto $P_r(0, 2, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$, el vector director de la recta r y $\vec{n} = (1, -3, 5)$, el normal del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, 2, 2) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, -3, 5) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3x - 10y + 20 + z - 2 - 6z + 12 - y + 2 - 5x = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv -8x - 11y - 5z + 32 = 0}$$



4. Si una bombilla fluorescente presenta un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- | | |
|---|---------|
| a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas. | 1 pto |
| b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7. | 1 pto |
| c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10 | 0.5 pto |

X = Número de bombillas con vida útil superior a 800 horas de entre 20.

X es una distribución binomial, siendo $n = 20$, $p = 0.90$, $q = 1 - p = 0.1$. $X = B(20, 0.9)$

- a. ¿ $P(X = 18) > 0,3$?

Calculamos la probabilidad y respondemos a la pregunta.

$$P(X = 18) = \binom{20}{18} 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = \frac{20!}{18!2!} 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = 0.2852$$

No es cierto que al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas, pues esta probabilidad es 28.52 %.

- b. “Dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas” es lo mismo que “18 o más tengan una duración de más de 800 horas”

$$¿P(X \geq 18) < 0.7?$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 18) &= P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \\ &= 0.2852 + \binom{20}{19} 0.9^{19} \cdot 0.1^1 + \binom{20}{20} 0.9^{20} \cdot 0.1^0 = \\ &= 0.2852 + 20 \cdot 0.9^{19} \cdot 0.1 + 0.9^{20} = 0.677 \end{aligned}$$

Es cierto lo preguntado en este apartado, pues $0.677 < 0.7$

- c. El valor esperado es la media de la distribución $Y = B(100, 0.9)$.

$$Media = n \cdot p = 100 \cdot 0.9 = 90 \text{ bombillas}$$

Es falsa la afirmación de que sean 10, pues son 90.

GRUPO B

1. Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva

$$f(x) = \frac{bx-1}{bx+1} \text{ en el punto de abscisa } x = 0.$$

Escriba las funciones que se obtienen.

2.5 pts

La tangente a $f(x) = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$ tiene la expresión $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f(x) = \frac{bx-1}{bx+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{b(bx+1) - b(bx-1)}{(bx+1)^2} = \frac{b^2x + b - b^2x + b}{(bx+1)^2} = \frac{2b}{(bx+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \\ f'(0) = \frac{2b}{(0+1)^2} = 2b \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-1) = 2b(x - 0) \Rightarrow y + 1 = 2bx \Rightarrow y = 2bx - 1$$

$$\text{Como la tangente es } y = 6x + a \text{ entonces } 2bx - 1 = 6x + a \Rightarrow \begin{cases} 2b = 6 \rightarrow b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 3$. La función es $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$ y la tangente es $y = 6x - 1$

2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} kx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ky + 4z &= 2 \\ 2x + ky + 6z &= k - 2 \end{aligned} \right\}$$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k .

1.75 pts

b. Resuelva el sistema para $k = 0$

0.75 pts

a. La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix} = 6k^2 + 16 + 12k - 12k - 24 - 4k^2 = 2k^2 - 8.$$

Igualemos a cero $\rightarrow |A| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 8 = 0 \Rightarrow k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \sqrt{4} = \pm 2$.

Estudiamos tres situaciones distintas según el valor de k .

CASO 1. $k \neq 2$ y $k \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ El determinante es 0 y su rango no es 3.}$$

¿El rango de A es 2?

Como la columna 1ª y 2ª son iguales, también la fila 1ª y 3ª consideramos el menor de orden 2

que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A/B es 3?

La columna 1ª y 2ª son iguales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar

la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

El rango de A/B no es 3.

El rango de A/B es 2 como el rango de A .

Rango de $A = 2 = \text{Rango de } A/B < N^\circ \text{ incógnitas}$.

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $k = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ El determinante es 0 y su rango no es 3.}$$

¿El rango de A es 2?

Como la columna 1ª y 2ª son proporcionales, consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 8 = -4 \neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A/B es 3?

La columna 1ª y 2ª son proporcionales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta

de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -32 - 24 + 0 - 0 - 48 - 24 = -128 \neq 0.$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

b. Para $k = 0$ estamos en el Caso 1 y el sistema es compatible determinado.

$$\left. \begin{array}{l} 2y + 6z = 0 \\ 2x + 4z = 2 \\ 2x + 6z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ x = 1 - 2z \\ x + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ 1 - 2z + 3z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 0 \\ \boxed{z = -2} \end{array} \right\} \Rightarrow y + 3(-2) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6} \Rightarrow x = 1 - 2(-2) \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

La solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$

3. Consideremos el punto $A(1,2,1)$, y la recta $r: \begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$
- a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r . 1.5 pto
- b. Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r . Y sea s la recta determinada por los puntos A y P . Calcule el ángulo que forman las rectas r y s . 1 pto

- a. Determinamos el vector director de la recta r como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r: \begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1,1,0) \times (0,3,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i + 3k - j = i - j + 3k = (1, -1, 3)$$

Si el plano es perpendicular a la recta tendrá como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,2,1) \in \pi \\ \pi \equiv x - y + 3z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\boxed{\pi \equiv x - y + 3z - 2 = 0}$$

- b. Determinamos la ecuación de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P(1,4,2) \in s \\ A(1,2,1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \overrightarrow{AP} = (1,4,2) - (1,2,1) = (0,2,1) \quad \left. \begin{array}{l} P(1,4,2) \in s \\ \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x=1 \\ y=4+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

El ángulo que forman las rectas es el ángulo agudo que forman sus vectores directores.

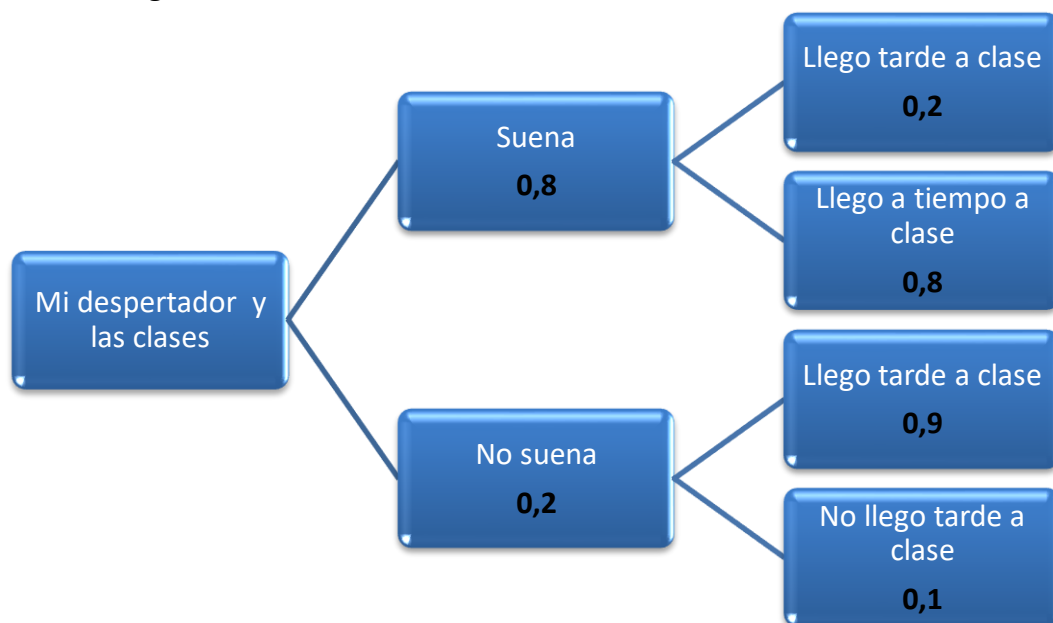
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, -1, 3) \cdot (0, 2, 1) = -2 + 3 = 1 \\ |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \sqrt{1+1+9} \sqrt{4+1} \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \sqrt{11} \sqrt{5} \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{1}{\sqrt{55}} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right) \approx 82^\circ$$

Las rectas forman un ángulo de 82 grados, aproximadamente.

4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9
- a. Represente el diagrama de árbol del problema. 0.5 ptos
- b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%. 0.75 ptos
- c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5 0.75 ptos
- d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador? 0.5 ptos

a. Realizamos un diagrama de árbol.



b. $P(\text{Suena el despertador y llego tarde a clase}) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16 = \boxed{16\%}$

No es cierto que ocurra más del 20% de las veces, pues son un 16%.

c.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No llegue tarde a clase}) &= \\
 &= P(\text{Suena el despertador})P(\text{No llegue tarde a clase/Suena el despertador}) + \\
 &+ P(\text{No suena el despertador})P(\text{No llegue tarde a clase/No suena el despertador}) = \\
 &= 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,64 + 0,02 = \boxed{0,66}
 \end{aligned}$$

No es cierto que sea menor de 0.5, pues esa probabilidad es 0,66.

d. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Haya sonado el despertador} / \text{Ha llegado tarde a clase}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Haya sonado el despertador} \cap \text{Ha llegado tarde a clase})}{P(\text{Ha llegado tarde a clase})} = \\
 &= \frac{0,8 \cdot 0,2}{1 - 0,66} = \frac{0,16}{0,34} = \boxed{\frac{8}{17} = 0,471}
 \end{aligned}$$



EBAU Julio 2020 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II**(3)****Convocatoria: JULIO****Instrucciones:**

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$. 1.25 pts

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 pts

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A , calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 pts

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s . 1,5 pts

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$ 1 pto

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 pts

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 pts



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(3)

Convocatoria: JULIO

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
 - a. Calcule los valores a , b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 pts
 - Se cortan en el punto $P(1, 1)$
 - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.
 - b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función: 1 pto

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$
2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.
Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 pts
3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$
 - a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 . 1.25 pts
 - b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 pts
4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
 - a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1.25 pts
 - b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0.75 pts
 - c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 pts

SOLUCIONES

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$. 1.25 pts

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x) dx$ 1.25 pts

a. El dominio de un logaritmo son los valores positivos ($x > 0$) y el denominador de la fracción (x^2) no se anula en dichos valores, por lo que el dominio de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ es $(0, +\infty)$.

Para realizar el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función necesitamos la expresión de su derivada.

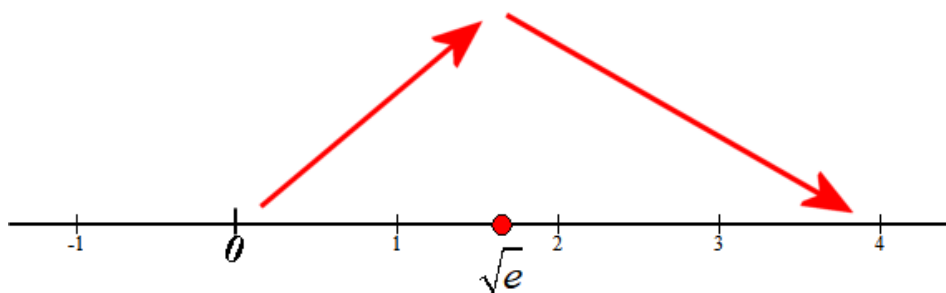
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - 2x \ln x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Si igualamos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Estudiamos si la función crece o decrece en cada una de las dos partes en que se divide el dominio $(0, +\infty)$.

- En $(0, \sqrt{e})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - 2 \ln 1}{1^3} = 1 > 0$. La función crece en $(0, \sqrt{e})$.
- En $(\sqrt{e}, +\infty)$ tomamos $x=e$ y la derivada vale $f'(e) = \frac{1 - 2 \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$. La función decrece en $(\sqrt{e}, +\infty)$.



A partir del esquema anterior la función presenta un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$.

b. Calculamos primero la primitiva y luego la integral definida.

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes } \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} = \frac{-1}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-1}{x} \ln x - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-1 - \ln x}{x}$$

Calculamos el valor de la integral definida.

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\frac{-1 - \ln x}{x} \right]_1^e = \left[\frac{-1 - \ln e}{e} \right] - \left[\frac{-1 - \ln 1}{1} \right] = \boxed{\frac{-2}{e} + 1}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

- a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto
 b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A , calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$,
 siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 ptos

- a. Para que tenga inversa tiene que tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k-3) - k(k-1) - k(k-1)$$

$$|A| = k(k-1)((k-3)-1-1) = k(k-1)(k-5)$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = 0 \Rightarrow k(k-1)(k-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 5 \end{cases}$$

Existe la inversa de la matriz A cuando k es distinto de 0, 1 y 5.

- b. Para $k = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, tiene inversa pues su determinante es no nulo.

Hallamos la inversa para poder despejar en la ecuación matricial planteada.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 2 = -12 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}}{-12} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial. $A \cdot X = 24 \cdot I_3 \Rightarrow X = A^{-1} 24 \cdot I_3 = 24 \cdot A^{-1}$.

$$X = 24 \cdot A^{-1} = 24 \cdot \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s .

1,5 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$

1 pto

a. Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4 \\ x=7-2y \end{cases} \Rightarrow 7-2y+y-z=4 \Rightarrow -y-z=-3 \Rightarrow z=3-y$$

$$r: \begin{cases} x=7-2y \\ y=y \\ z=3-y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=7-2t \\ y=0+t \\ z=3-t \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(7,0,3) \\ \vec{v}_r=(-2,1,-1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=2+0t \\ y=-5+0t \\ z=0+t \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} P_s(2,-5,0) \\ \vec{v}_s=(0,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(-2,1,-1) \\ \vec{v}_s=(0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{0} = \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1}$$

No son rectas coincidentes ni paralelas.

Solo pueden cruzarse o cortarse en un punto.

Para decidir en qué situación estamos calculamos el producto mixto de los vectores

$\vec{v}_r=(-2,1,-1)$, $\vec{v}_s=(0,0,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Si es nulo se cortan y si no es nulo se cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r=(-2,1,-1) \\ \vec{v}_s=(0,0,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s}=(2,-5,0)-(7,0,3)=(-5,-5,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -5 - 10 = -15 \neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas se cruzan.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-5-z=4 \\ 2-10=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z=7 \\ -8=7 \end{cases}$$

Obtenemos una igualdad imposible, por lo que las rectas no tienen puntos en común, entonces son paralelas o se cruzan.

Obtenemos los vectores directores de las rectas y comprobamos que no son paralelas igual que hemos hecho con anterioridad. Por lo tanto se cruzan.

- b. Si el plano es perpendicular a la recta r , entonces ese plano tiene como vector normal el director de la recta $\vec{n} = \vec{v}_r = (-2, 1, -1)$. La ecuación del plano es $-2x + y - z + D = 0$.

Como además contiene al punto $A(11, -2, 5) \rightarrow -22 - 2 - 5 + D = 0 \rightarrow D = 29$

El plano tiene ecuación $\boxed{-2x + y - z + 29 = 0}$

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

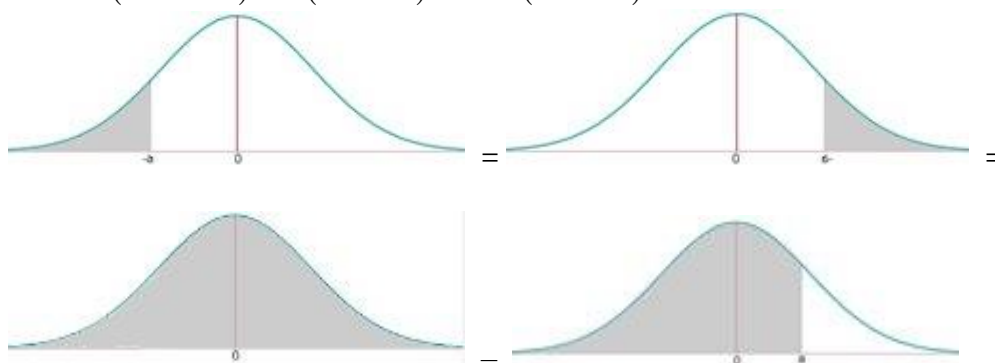
- a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 pts
 b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 pts

X = Número de horas hasta la primera avería de una impresora. $X = N(1500, 200)$

- a. Calculamos la probabilidad de que una impresora se averíe antes de 1000 horas. Esta probabilidad debe ser pequeña pues la media es 1500 horas y la desviación típica es 200. 1000 horas está muy por debajo de $1500 - 200 = 1300$.

$$P(X < 1000) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) =$$

$$= P(Z < -2,5) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) =$$



$$= \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0,9938 = \boxed{0,0062}$$

El porcentaje es 0,62%.

- b. Razonamos igual que en el apartado anterior. En este caso la probabilidad es muy alta ya que el intervalo incluye la media y con una amplitud mayor que la desviación típica.

$$P(1000 < X < 2000) = P(X < 2000) - P(X < 1000) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{2000 - 1500}{200}\right) - P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) =$$

$$= P(Z < 2,5) - P(Z < -2,5) =$$

$$= P(Z < 2,5) - P(Z > 2,5) =$$

$$= P(Z < 2,5) - (1 - P(Z < 2,5)) =$$

$$= 2P(Z < 2,5) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0,9938 - 1 =$$

$$= 1,9876 - 1 = \boxed{0,9876}$$

El porcentaje es del 98,76%.

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

a. Calcule los valores a , b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 pts

- Se cortan en el punto $P(1, 1)$
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función:

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1} \quad \text{1 pto}$$

a. Se cortan en el punto $P(1, 1)$. Esto implica que las dos pasan por dicho punto.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 2 + a + b \Rightarrow \underline{-1 = a + b}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -2x^3 + c \\ g(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = -2 + c \Rightarrow \underline{c = 3}$$

En el punto $P(1, 1)$ coinciden las pendientes de las rectas tangentes. Esto implica que $f'(1) = g'(1)$.

$$g(x) = -2x^3 + c \Rightarrow g'(x) = -6x^2 \Rightarrow g'(1) = -6 \cdot 1^2 = -6$$

$$f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 8 \cdot 1^3 + 2a = 8 + 2a$$

$$\text{Así tenemos que } f'(1) = g'(1) \Rightarrow -6 = 8 + 2a \Rightarrow 2a = -14 \Rightarrow \underline{a = -7}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación obtenida al principio del ejercicio:

$$\left. \begin{array}{l} -1 = a + b \\ a = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = -7 + b \Rightarrow \underline{b = 6}$$

Los valores son $\underline{a = -7; b = 6; c = 3}$

Las funciones quedan con la expresión: $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ y $g(x) = -2x^3 + 3$

b. La función $h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$ con $a = b = 1$ queda $h(x) = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$

Hallamos primero el dominio de la función $h(x)$.

Averiguo cuando se anula el denominador.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{0} = \infty$$

La asíntota vertical es $x = 1$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^4} + x^2 + 1 - \cancel{2x^4} + 2x}{x^3 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

2.5 pts

2.5 pto

Es un problema que debemos resolver con un sistema lineal de ecuaciones.

Llamemos “ x ” al número de cajas de bombones, “ y ” al número de tabletas de chocolate, “ z ” al número de paquetes de chocolate en polvo.

“Se quiere fabricar un total de 12 unidades” $\rightarrow x + y + z = 12$

Hacemos una tabla para hacer más fácil la obtención de las otras dos ecuaciones.

	Kg de chocolate	Litros de leche
Cajas de bombones (x)	2x	6x
Tabletas de chocolate (y)	4y	4y
Paquetes de chocolate en polvo (z)	z	4z
TOTALES	$2x + 4y + z$	$6x + 4y + 4z$

Solo disponen de 24 kg de chocolate $\rightarrow 2x + 4y + z = 24$

Solo disponen de 60 litros de leche $\rightarrow 6x + 4y + 4z = 60$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 3x + 2y + 2z = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x + 4y + z = 24 \\ -2x - 2y - 2z = -24 \\ \hline 2y - z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x + 2y + 2z = 30 \\ -3x - 3y - 3z = -36 \\ \hline -y - z = -6 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -y - z = -6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ 2y - z = 0 \\ -2y - 2z = -12 \\ \hline -3z = -12 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ -3z = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2y - z = 0 \\ \boxed{z = 4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+4=12 \\ 2y-4=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y=8 \\ 2y=4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y=8 \\ \boxed{y=2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x+2=8 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

Deben fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 .

1.25 pts

b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección.

1.25 pts

a. Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 3x + 1 = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -5 + 2x \\ 4z = 1 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -5 + 2x \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}t \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P\left(0, -5, \frac{1}{4}\right) \\ \vec{v}_r = \left(1, 2, \frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Como salen con fracciones tanto el punto de la recta tomaremos otro punto.

$$t = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1 = 1 \\ y = -5 + 2 = -3 \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(1, -3, 1)$$

Como el vector director sale con fracciones tomamos otro vector director que sea 4 veces el obtenido antes $\rightarrow \vec{u}_r = 4 \cdot \vec{v}_r = (4, 8, 3)$.

El plano π_2 contiene a la recta r por lo que tiene como vector director el de la recta $\vec{u}_r = (4, 8, 3)$.

Es perpendicular al plano π_1 por lo que tiene como vector director el normal del plano $\pi_1 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 3)$.

También el punto Q de la recta está en el plano π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, -3, 1) \in \pi_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{u}_r = (4, 8, 3) \\ \vec{v}_2 = \vec{n}_1 = (1, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$24x - 24 + 3y + 9 - 4z + 4 - 8z + 8 - 12y - 36 + 3x - 3 = 0$$

$$27x - 9y - 12z - 42 = 0$$

$$\boxed{\pi_2 \equiv 9x - 3y - 4z - 14 = 0}$$

b. Resolvemos el sistema que se plantea con las ecuaciones de recta y plano.

$$\begin{aligned}
 r: \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ x - y + 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5 = y \\ 3x - 4z = -1 \\ x - y + 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4z = -1 \\ x - (2x - 5) + 3z = 12 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4z = -1 \\ x - 2x + 5 + 3z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4z = -1 \\ -x + 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 4z = -1 \\ 3z - 7 = x \end{array} \right\} &\Rightarrow 3(3z - 7) - 4z = -1 \Rightarrow 9z - 21 - 4z = -1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 5z = 20 &\Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \boxed{x = 3 \cdot 4 - 7 = 5} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 5 - 5 = 5}
 \end{aligned}$$

El punto intersección de recta y plano es $(5, 5, 4)$

4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
- a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%.
Justifique si es cierto. 1.25 pts
- b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%.
Justifique si es cierto. 0.75 pts
- c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 pts

Se trata de un ejercicio de distribución binomial pues se repite 10 veces un proceso cuyo resultado es “éxito” o “fracaso” y la probabilidad de ambos es la misma en cada repetición.

Llamamos “éxito” a “análisis erróneo”.

Probabilidad de “éxito” es 0,08. $p = 0,08$. $q = 0,92$

El número de repeticiones es 10 $\rightarrow n = 10$.

X = Número de análisis erróneos en 10 análisis.

$X = B(10, 0,08)$

- a. Calculamos la probabilidad y vemos si es menor de 0,03.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} 0,08^0 \cdot 0,92^{10} + \binom{10}{1} 0,08^1 \cdot 0,92^9 + \binom{10}{2} 0,08^2 \cdot 0,92^8 \right) = \\ &= 1 - (0,92^{10} + 10 \cdot 0,08 \cdot 0,92^9 + 45 \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^8) = 0,04 \end{aligned}$$

La probabilidad es del 4%, por lo que **no** es menor que el 3%.

- b. Calculamos la probabilidad y vemos si es menor de 0,03.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{10}{3} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = \frac{10!}{3!7!} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = \\ &= 120 \cdot 0,08^3 \cdot 0,92^7 = 0,034 \end{aligned}$$

La probabilidad es del 3,4 %, por lo que **no** es menor que el 3%.

- c. La probabilidad de un análisis correcto es $p = 0,92$. Si repito 100 veces el análisis entonces el número de análisis correctos es una distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0,92$.
 $X = B(100, 0,92)$

La media es $n \cdot p = 100 \cdot 0,92 = 92$.

El número esperado de análisis correctos es 92. Y 8 son los que se espera que salgan erróneos.

EBAU Julio 2019 Matemáticas II en Canarias


**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2018–2019****MATERIA: MATEMÁTICAS II****(3)****Convocatoria:****Instrucciones:**

- Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$ Calcular los valores de a , b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

(2,5 pts)

2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + k^2z = 3k \end{array} \right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k

(1,5 pts)

b) Resolverlo para $k = 2$

(1 pto)

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto $(2, -1, 5)$

(2,5 pts)

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

(0,5 pts)

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

(1 pto)

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

(1 pto)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019**

MATERIA: MATEMÁTICAS II**(3)****Convocatoria:****Instrucciones:**

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- . Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

- a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 pts)
- b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 pts)
- c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 pts)

2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1,25 pts)
- b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$ (1,25 pts)

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \quad (2,5 \text{ pts})$$

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

- a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. (0,75 pts)
- b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año. (0,75 pts)
- c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (1 pto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a , b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

(2,5 pts)

Vemos las implicaciones de las condiciones establecidas:

- Si $x = 0$ y $x = -2$ son extremos relativos implica que la derivada en esos valores es cero.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 4(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0 \Rightarrow -32 + 12a - 4b + 0 = 0$$

$$12a - 4b = 32 \Rightarrow 3a - b = 8 \Rightarrow \boxed{3a - 8 = b}$$

- Si la función corta el eje OX en el punto $x = 1 \rightarrow f(1) = 0$.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 7 = 0 \Rightarrow 1 + a + b + 7 = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = -8}$$

Si unimos las dos condiciones últimas queda el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = -8 \\ 3a - 8 = b \end{array} \right\} \Rightarrow a + 3a - 8 = -8 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \Rightarrow 0 + b = -8 \Rightarrow \boxed{b = -8}$$

Los valores pedidos son $a = 0$, $b = -8$ y $c = 0$. La función queda $\boxed{f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}$

2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + k^2z &= 3k \end{aligned} \right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k

(1,5 pts)

b) Resolverlo para $k = 2$

(1 pto)

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = 4k^2 + 12 + 15 - 18 - 5k^2 - 8 = -k^2 + 1$$

Los valores que anulan el determinante son $-k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1; k = -1$

Tenemos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 1; k \neq -1$

En este caso, el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $k = 1$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$$

La matriz ampliada $Am = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene el menor de orden 3 formado por las tres

$$\text{últimas columnas no nulo } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 3 + 4 - 8 - 18 + 1 = 17 - 29 = -12 \neq 0. \text{ Por lo tanto}$$

el rango de Am es 3 distinto del rango de A . El sistema es INCOMPATIBLE. Sin solución

CASO 3. $k = -1$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$$

La matriz ampliada $Am = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ tiene el menor de orden 3 formado por las tres

últimas columnas $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 3 + 4 - 8 + 18 + 1 = 23 - 23 = 0$

Por lo que el rango de la ampliada no es 3 y por tanto es 2 como el de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para $k = 2$ el sistema queda
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$.

El sistema es compatible determinado y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{16 + 24 - 3 - 36 + 4 - 8}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-8 + 24 + 90 + 9 - 40 - 48}{-3} = \frac{27}{-3} = -9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{24 - 3 + 10 - 12 - 30 + 2}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

La solución es $x = 1$; $y = -9$; $z = 3$

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$

- pasa por el punto $(2, -1, 5)$

(2,5 pts)

Si es paralela a los planos entonces es perpendicular a los vectores normales de ambos y por tanto el producto vectorial de estos vectores normales nos sirve como vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -3, 1) \\ \pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9i + 2j - k + 6k - 3j + i = -8i - j + 5k$$

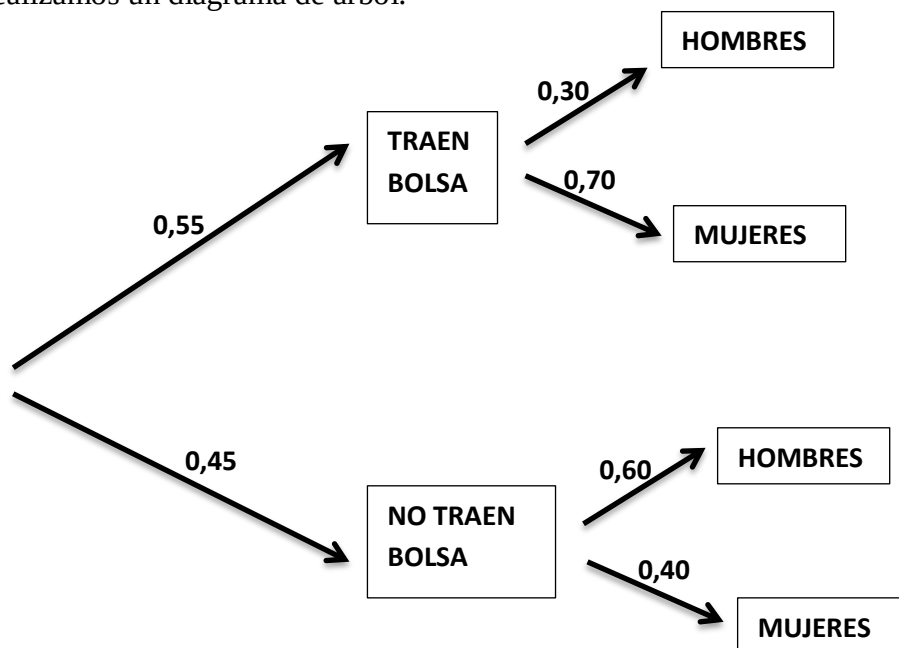
$$\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$$

Por lo que la ecuación de la recta pedida es

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-8, -1, 5) \\ \text{Pasa por } P(2, -1, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.
- a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. (0,5 pts)
- b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres? (1 pto)
- c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa? (1 pto)

a) Realizamos un diagrama de árbol.



- b) $P(\text{Ser mujer}) = P(\text{traer bolsa}) \cdot P(\text{traer bolsa y ser mujer}) + P(\text{no traer bolsa}) \cdot P(\text{no traer bolsa y ser mujer}) = 0,55 \cdot 0,7 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,565$

El 56,5% de los clientes que entran al supermercado son mujeres.

c)

$$\begin{aligned}
 P(\text{siendo hombre, que haya traído su bolsa}) &= P(\text{Haya traído su bolsa} / \text{Es hombre}) = \\
 &= \frac{P(\text{Haya traído su bolsa} \cap \text{Es hombre})}{P(\text{Es hombre})} = \frac{0,55 \cdot 0,3}{1 - 0,565} = \frac{0,165}{0,435} = \boxed{0,379}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$
- a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 pts)
- b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 pts)
- c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 pts)

a) Resolvamos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2$$

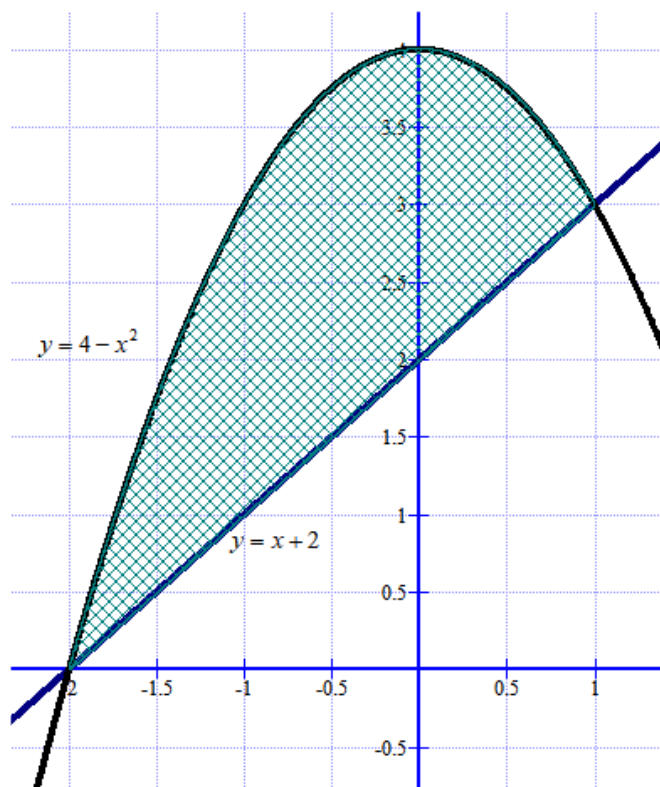
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Se cortan en los puntos de coordenadas P(1,3) y Q(-2,0).

b) Realizamos una tabla de valores para cada función y las dibujamos.

x	$y = 4 - x^2$
-3	-5
-2	0
-1	3
0	4
1	3

x	$y = x + 2$
-2	0
0	2



c) El valor del área lo obtenemos con la integral definida entre -2 y 1 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^1 4 - x^2 - (x + 2) dx = \int_{-2}^1 -x^2 - x + 2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left[-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = -3 - \frac{1}{2} + 8 = \boxed{\frac{9}{2} u^2} \end{aligned}$$

2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1,25 pts)
 b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$ (1,25 pts)

a) Determinamos la expresión de la matriz C .

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de C .

$$|C| = \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = (1-m)(2+2m)$$

Para que la matriz C tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|C| = 0 \Rightarrow (1-m)(2+2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-m = 0 \Rightarrow m = 1 \\ 2+2m = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

La matriz C tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y -1.

- b) Si $m = 2$ entonces existe la inversa de C pues $|C| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

Su inversa se calcula con la fórmula $C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|}$.

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \quad (2,5 \text{ pts})$$

Para determinar el ángulo formado por los dos planos necesitamos el vector normal del plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ que es $\vec{n} = (2, -1, 1)$ y el vector normal del otro plano, para lo cual necesitamos su ecuación.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 1); P_r(1, 0, 0)$$

$$s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \Rightarrow \vec{v}_s = (-2, 0, 1); P_s(-1, 0, 1)$$

Los vectores directores no son proporcionales: $\frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1}$. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

El valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_s P_r}$ nos indicará si las rectas se cortan o cruzan.

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s P_r}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

Las rectas son secantes y la ecuación del plano que definen lo hallamos a partir de los vectores directores y un punto cualquiera de una de las rectas:

$$\left. \begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 1) \\ s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \Rightarrow \vec{v}_s = (-2, 0, 1); P_s(-1, 0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x+1-2y+2z-2+y=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y+2z-1=0$$

Dada esta ecuación del segundo plano, tenemos su vector normal: $\vec{n'} = (1, -1, 2)$

Calculemos el ángulo entre los vectores normales usando el producto escalar.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n'} &= (2, -1, 1) \cdot (1, -1, 2) = 2 + 1 + 2 = 5 \\ \vec{n} \cdot \vec{n'} &= |\vec{n}| \cdot |\vec{n'}| \cdot \cos(\vec{n}, \vec{n'}) = \sqrt{4+1+1} \sqrt{1+1+4} \cos(\vec{n}, \vec{n'}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = \sqrt{6} \sqrt{6} \cos(\vec{n}, \vec{n'})$$

$$5 = 6 \cos(\vec{n}, \vec{n'}) \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{n'}) = \frac{5}{6} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{n'}) = 33,5^\circ$$

El ángulo que forman los planos es el mismo que el que forman sus vectores normales. El ángulo es de $33,5^\circ$.

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

- | | |
|--|-------------|
| a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. | (0,75 ptos) |
| b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año. | (0,75 ptos) |
| c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. | (1 pto) |

X = Tiempo de vida en meses de un ventilador de CPU. $X = N(18, 3,6)$

- a) Nos piden calcular $P(X < 16)$.

$$P(X < 16) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 18}{3,6} < \frac{16 - 18}{3,6}\right) =$$

$$= P(Z < -0,56) = 1 - P(Z < 0,56) = 1 - 0,7123 = \boxed{0,2877}$$

- b) Nos piden calcular $P(X > 12)$.

$$P(X > 12) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 18}{3,6} > \frac{12 - 18}{3,6}\right) =$$

$$= P(Z > -1,67) = P(Z < 1,67) = \boxed{0,9525}$$

- c) Nos piden calcular $P(12 < X < 24)$.

$$P(12 < X < 24) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{12 - 18}{3,6} < \frac{X - 18}{3,6} < \frac{24 - 18}{3,6}\right) =$$

$$= P(-1,66 < Z < 1,66) = P(Z < 1,66) - P(Z < -1,66) =$$

$$= P(Z < 1,66) - (1 - P(Z < 1,66)) = 0,9515 - (1 - 0,9515) = \boxed{0,903}$$



EBAU Junio 2019 Matemáticas II en Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

Instrucciones:

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- . Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A

- Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 pts)
- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y sea } I_2 \text{ la matriz identidad de orden 2}$$
 - Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 pts)
 - Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 pts)
 - Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 pts)
- Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:
 - La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2, 2, 3)$ (1,5 pts)
 - El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)
- En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:
 - Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. (0,75 pts)
 - ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0,75 pts)
 - ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función f , de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.

Escribir la función resultante.

(2,5 pts)

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

(2,5 pts)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. Se consideran los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(-2, 3, 1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4, 17, 0)$ (1,25 pts)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

(1,25 pts)

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0,5 pts)

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)

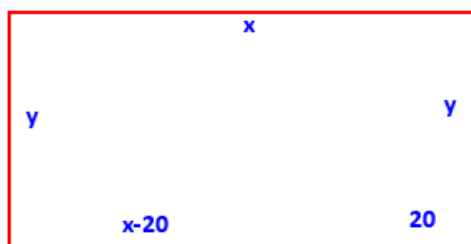
c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2,5 pts)

Dado el terreno de forma:



Su perímetro de valla es 100 metros, luego:

$$100 = 2y + x + x - 20 \Rightarrow 120 = 2x + 2y \Rightarrow 60 = x + y \Rightarrow y = 60 - x$$

El área del terreno es $\text{Área} = x \cdot y = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$

La función a maximizar es $A(x) = 60x - x^2$

Calculemos su derivada: $A'(x) = 60 - 2x$

Igualemos a cero y hallamos sus posibles máximos.

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 2x = 0 \Rightarrow 60 = 2x \Rightarrow x = 30 \text{ metros}$$

Como $A''(x) = -2 < 0$, el valor de 30 metros es un máximo de la función área y su valor es $A(30) = 60 \cdot 30 - 30^2 = 1800 - 900 = 900 \text{ m}^2$.

Las dimensiones del terreno de área máxima son de 30 y 30 m. Un cuadrado de 30 metros de lado.

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y sea } I_2 \text{ la matriz identidad de orden 2}$$

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 pts)

b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 pts)

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 pts)

$$a) B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$$

Quedando un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 1 = x \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ x + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

b) Calculemos la inversa de B:

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación que hay que resolver queda:

$$A - I_2 = B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 = -1 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0$$

$$c) A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & 1+x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \\ x+1 = 0 \\ x+1 = 0 \\ x+2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1$$

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

- a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2, 2, 3)$ (1,5 pts)
 b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

- a) La recta paralela a los planos π_1 y π_2 debe tener su vector director perpendicular a los vectores normales de ambos planos y por tanto será el producto vectorial de dichos vectores normales. Calculemos dicho producto vectorial:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \pi_2 \equiv 2x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_s = i + k - (-2k - j) = i + j + 3k = (1, 1, 3)$$

La ecuación de la recta se obtiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por el punto } B(2, 2, 3) \\ \text{vector director } \vec{v}_s = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

La ecuación continua de la recta es $s \equiv x - 2 = y - 2 = \frac{z - 3}{3}$

- b) Antes de calcular el ángulo formado por los planos determinemos su posición relativa:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \pi_2 \equiv 2x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1}$$

Los planos son secantes y el ángulo que forman es el mismo que el ángulo que forman sus vectores normales:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \pi_2 \equiv 2x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(1, -1, 0) \cdot (2, 1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} =$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2 - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = 73,2^\circ$$

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es $73,2^\circ$.

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

- a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. (0,75 pts)
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0,75 pts)
 c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

- a) Si llamamos X =Número de meses en devolución de un préstamo de 18000 €. $X=N(60, 8)$.

$$P(X < 70) = P\left(\frac{X - 60}{8} < \frac{70 - 60}{8}\right) = P(Z < 1,25) = 0,8944$$

- b) 4 años son 48 meses.

$$P(X > 48) = P\left(\frac{X - 60}{8} > \frac{48 - 60}{8}\right) = P(Z > -1,5) = P(Z < 1,5) = 0,9332$$

- c) 4 años son 48 meses y 6 años son 72 meses.

$$\begin{aligned} P(48 < X < 72) &= P\left(\frac{48 - 60}{8} < \frac{X - 60}{8} < \frac{72 - 60}{8}\right) = P(-1,5 < Z < 1,5) = \\ &= P(Z < 1,5) - P(Z < -1,5) = 0,9332 - (1 - P(Z < 1,5)) = \\ &= 0,9332 - 0,0668 = 0,8664 \end{aligned}$$

Como piden el porcentaje, tenemos que un 86,64% de los préstamos son devueltos entre los 4 y los 6 años.

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función f , de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.

Escribir la función resultante.

(2,5 pts)

Para ser derivable debe ser continua y debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} - \ln x = \frac{b}{1} - \ln 1 = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a - x = a - 1 \\ f(1) &= a - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 1 = b$$

La derivada de la función en $x \neq 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{b}{x^2} - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La derivada por la izquierda en 1 es $f'(1^-) = -1$

La derivada por la derecha en 1 es $f'(1^+) = -\frac{b}{1^2} - \frac{1}{1} = -b - 1$

La función es derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales son iguales $\rightarrow -1 = -b - 1 \Rightarrow b = 0$

Y sustituyendo en la igualdad $a - 1 = b \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = 0$.

La función resultante es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ -\ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

(2,5 pts)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Para resolver el sistema multiplicamos por -2 la segunda ecuación y sumamos las 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ -2X + 4Y = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 7Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7Y = \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación inicial:

$$X - 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Se consideran los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(-2, 3, 1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4, 17, 0)$ (1,25 pts)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 pts)

a) Determinemos la ecuación de la recta r y su vector director:

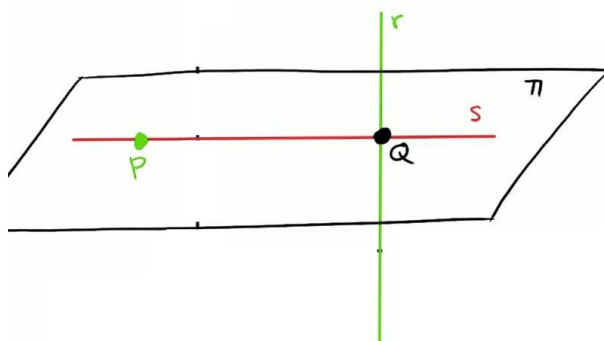
$$\left. \begin{array}{l} A(2, -1, 1) \\ B(-2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 3, 1) - (2, -1, 1) = (-4, 4, 0)$$

El vector director de r lo podemos simplificar dividiendo por 4 y tomar $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$

Así la ecuación de la recta r es:

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

Determinamos el plano π perpendicular a la recta r y luego hallemos el punto Q de corte de plano π y recta r . La recta perpendicular pedida será la que pase por los puntos P y Q.



π tiene como vector normal el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 1, 0)$, el plano tendrá la ecuación: $-x + y + D = 0$. Como además pasa por $P(-4, 17, 0)$ se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + D = 0 \\ P(-4, 17, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 17 + D = 0 \Rightarrow D = -21$$

El plano es $\pi \equiv -x + y - 21 = 0$

El punto de corte del plano y recta se obtiene de resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y - 21 = 0 \\ x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -(2 - t) - 1 + t - 21 = 0 \Rightarrow 2t - 24 = 0 \Rightarrow t = \frac{24}{2} = 12$$

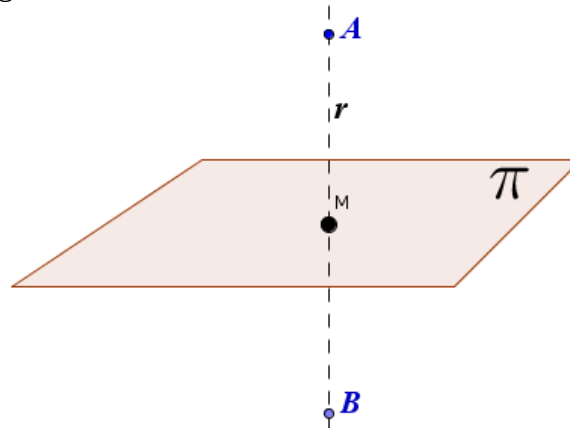
$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 12 \\ y = -1 + 12 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -10 \\ y = 11 \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

El punto Q tiene coordenadas $(-10, 11, 1)$

La recta que buscamos tiene como vector director: $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-10, 11, 1) - (-4, 17, 0) = (-6, -6, 1)$

Y la recta tiene ecuación:
$$\left. \begin{array}{l} x = -4 - 6t \\ y = 17 - 6t \\ z = t \end{array} \right\}$$

- b) El plano pedido es un plano perpendicular a la recta r que contiene a los dos puntos y que pasa por el punto medio del segmento AB.



El plano pasa por el punto $M = \frac{A+B}{2} = \frac{(2, -1, 1) + (-2, 3, 1)}{2} = (0, 1, 1)$ y su vector normal es el director de la recta $r \rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 1, 0)$.

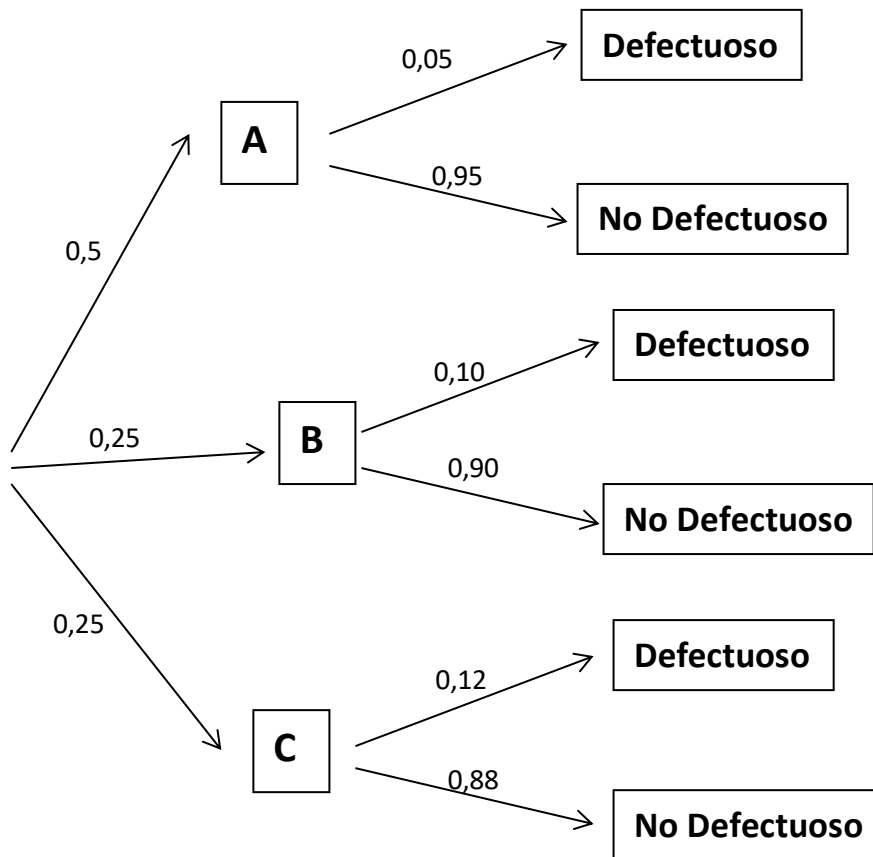
$$\left. \begin{array}{l} M = (0, 1, 1) \in \pi \\ \vec{n} = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = (0, 1, 1) \in \pi \\ -x + y + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi: -x + y - 1 = 0$$

El plano pedido tiene ecuación $\pi: -x + y - 1 = 0$

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

- a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0,5 pts)
 b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)
 c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

a) Realizamos un diagrama de árbol.



b)

$$P(\text{Defectuoso}) = P(\text{Venga de A y sea defectuoso}) + P(\text{Venga de B y sea defectuoso}) + P(\text{Venga de C y sea defectuoso}) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,12 = 0,025 + 0,025 + 0,03 = 0,08$$

c) $P(\text{Sea de B} / \text{No defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea de B y no defectuoso})}{P(\text{No defectuoso})} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{1 - 0,08} = 0,24$



EBAU Julio 2018 Matemáticas II en Canarias

**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2017–2018****MATERIA: MATEMÁTICAS II****(3)****Convocatoria:**

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? (2.5 puntos)

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación

$$AB - CX = I$$

siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

$$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$$

(2.5 puntos)

4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

(1,25 puntos)

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C?

(1,25 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2017–2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(3)

Convocatoria:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8) (2,5 puntos)

2.- Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + z = 2 \\ x + y + kz = k - 1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k (1,5 puntos)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1 punto)

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x + 5}{4} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 4}{3}$, se pide

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

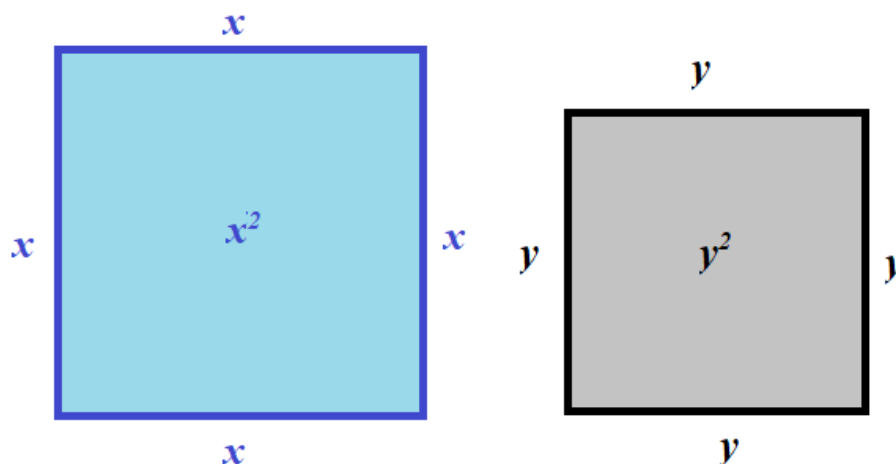
- a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? (2.5 puntos)

Tenemos que hacer dos cuadrados de lados “x” e “y”.



La suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm $\rightarrow 4x + 4y = 100$.

Despejamos “y” en la ecuación anterior $\rightarrow x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$.

Debemos de hacer mínimo el coste total de los dos cuadrados de tela.

La suma de los precios de los cuadrados de tela es $C(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

Utilizamos la igualdad anterior y obtenemos el coste en función de la variable “x”.

$$\left. \begin{array}{l} C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \\ y = 25 - x \end{array} \right\} \Rightarrow C(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 = 2x^2 + 3(625 + x^2 - 50x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = 2x^2 + 1875 + 3x^2 - 150x \Rightarrow \boxed{C(x) = 5x^2 - 150x + 1875}$$

Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = 10x - 150 \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$$

Hemos obtenido el valor $x = 15$ como punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver si es un mínimo.

$$C''(x) = 10 \Rightarrow C''(15) = 10 > 0 \Rightarrow x = 15 \text{ es mínimo!}$$

Al ser la segunda derivada positiva para $x = 15$ la función coste tiene un mínimo en dicho valor. Para $x = 15$ el lado del otro cuadrado es $y = 25 - 15 = 10$.

Para que el coste de la tela sea mínimo los cuadrados deben elegirse de lados 15 y 10 cm.

2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación
 $AB - CX = I$
 siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Despejamos X en la ecuación matricial (suponemos que la matriz C es invertible).

$$AB - CX = I \Rightarrow -CX = I - AB \Rightarrow CX = AB - I \Rightarrow X = C^{-1}(AB - I)$$

Hallamos la matriz inversa de C y sustituimos el valor de las matrices en la ecuación matricial para obtener la expresión de X.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj}(C^t)}{|C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(AB - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2+0-2 & 4+10+1 \\ 4+0+2 & 8-20-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 6 & -13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+0 & 15+0 \\ -1+12 & 15-28 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 15/2 \\ 11/2 & -13/2 \end{pmatrix}$$

3.- Estudiar la posición relativa de los planos

$$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

$$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$$

(2.5 puntos)

Analizamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 7x + 8y - 7z = -13 \end{array} \right\}$$

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos el valor del determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -28 + 63 - 120 + 70 + 63 - 48 = 0$$

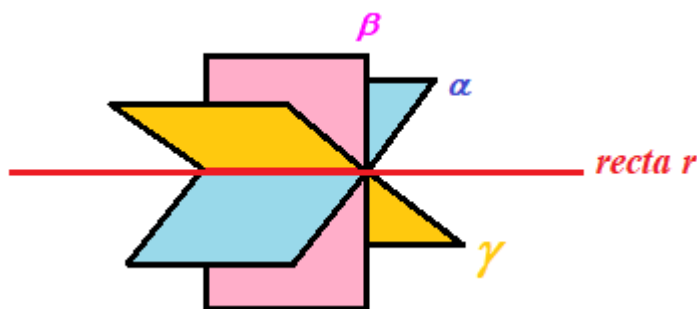
Al ser el determinante nulo el rango de la matriz A no es 3. Comprobamos que es 2 tomando el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5 \neq 0$.

El rango de la matriz A es 2.

Averiguamos el rango de A/B. Como el determinante de A es nulo consideramos el menor de orden

$$3 \text{ que resulta de quitar la columna } 1^{\text{a}} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & -7 & -13 \end{vmatrix} = -117 - 40 + 98 + 168 - 130 + 21 = 0$$

Al ser este determinante nulo el rango de la matriz ampliada A/B es menor de 3 y será 2 igual que el rango de la matriz de coeficientes A. Rango A = Rango A/B = 2 < 3 = N° incógnitas
Este sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son los puntos de una recta donde coinciden los tres planos.

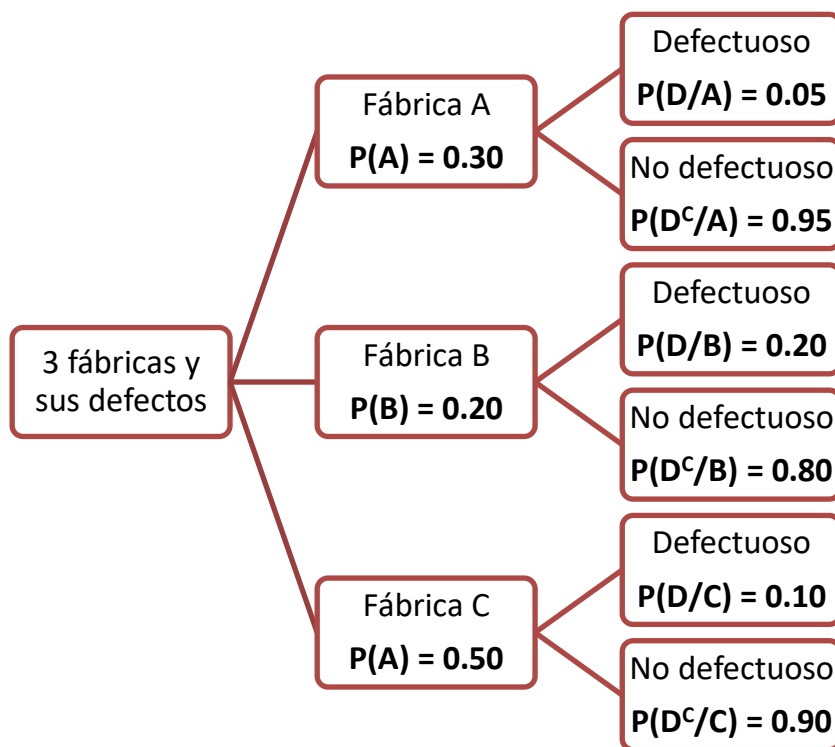


4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? (1,25 puntos)

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C? (1,25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos A, B y C al suceso elegir un motor de la fábrica A, B y C, respectivamente. Llamamos D al suceso “el motor es defectuoso”.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.20 + 0.5 \cdot 0.10 = \boxed{0.105}$$

b) Nos piden calcular $P(C^c/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular el suceso contrario $P(C/D)$.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.105} = \frac{10}{21}$$

$$\text{Calculamos lo pedido} \rightarrow P(C^c/D) = 1 - P(C/D) = 1 - \frac{10}{21} = \boxed{\frac{11}{21} \approx 0.5238}$$

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto $(2,8)$ (2,5 puntos)

Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$ se debe cumplir que $f(2) = 8$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1} \\ f(2) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 = a\sqrt{3 \cdot 2 + 3} + b\sqrt{2-1} \Rightarrow \boxed{8 = 3a + b}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 8)$ se debe cumplir que se anule la segunda derivada para $x = 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \frac{3}{2\sqrt{3x+3}} + b \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3a}{2} (3x+3)^{-1/2} + \frac{b}{2} (x-1)^{-1/2} \Rightarrow \left\{ -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{3a}{2} \frac{-1}{2} \frac{(3x+3)^{-3/2} \cdot 3}{-3/2} + \frac{b}{2} \frac{-1}{2} \frac{(x-1)^{-3/2}}{-3/2} = \frac{-3a}{4} \frac{(3x+3)^{-3/2} \cdot 6}{-3} - \frac{2b}{4} \frac{(x-1)^{-3/2}}{-3} \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{-18a(3x+3)^{-3/2}}{-12} - \frac{2b(x-1)^{-3/2}}{-12} = \frac{3a}{2(3x+3)^{3/2}} + \frac{b}{6(x-1)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = \frac{3a}{2(3x+3)^{3/2}} + \frac{b}{6(x-1)^{3/2}} \\ f''(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3a}{2(3 \cdot 2 + 3)^{3/2}} + \frac{b}{6(2-1)^{3/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{2\sqrt{(3 \cdot 2 + 3)^3}} + \frac{b}{6\sqrt{(2-1)^3}} = 0 \Rightarrow \frac{3a}{54} + \frac{b}{6} = 0 \Rightarrow 3a + 9b = 0 \Rightarrow \boxed{a + 3b = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ a + 3b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ a = -3b \end{array} \right\} \Rightarrow 3(-3b) + b = 8 \Rightarrow -9b + b = 8 \Rightarrow -8b = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{8}{-8} = -1} \Rightarrow \boxed{a = -3(-1) = 3}$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + z = 2 \\ x + y + kz = k - 1 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k (1,5 puntos)
 b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1 punto)

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 + 2 - k - 2k - 1 = k^2 - 3k + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = k \\ \frac{3-1}{2} = 1 = k \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq 1$ y $k \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 1ª} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2ª} - 2 \cdot \text{Fila 1ª} \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución)

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $k = 2$ el sistema es incompatible.

- b) Para $k = 1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -2 - z = y \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2 - z + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)
 b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ P_1(1, 1, -2) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ Q_2(-5, 3, -4) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes: $\begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{3}$

Las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si el producto mixto $[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$ es nulo o no.

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-5, 3, -4) - (1, 1, -2) = (-6, 2, -2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$[\vec{u}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = 4 + 18 + 16 - 24 - 8 - 6 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan, lo que significa que coinciden en un punto y pertenecen al mismo plano.

- b) El plano π que determinan ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene, por ejemplo, al punto $P_1(1, 1, -2)$ de la recta r_1 .

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_1 = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_2 = (4, -2, 3) \\ P_1(1, 1, -2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1) + 8(y-1) - 2(z+2) + 4(z+2) - 3(y-1) + 4(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3 + 8y - 8 - 2z - 4 + 4z + 4 - 3y + 3 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x + 5y + 2z - 2 = 0}$$

El plano que contiene las dos rectas tiene ecuación $\pi: x + 5y + 2z - 2 = 0$.

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

- a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
 b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de personas que estuvieron viendo el concurso de televisión de un grupo de 10.

La probabilidad de que una persona haya estado viendo el concurso es $p = 0.30$. El número de repeticiones es $n = 10$. $X = B(10, 0.3)$

- a) Nos piden calcular $P(X \leq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ &= \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} + \binom{10}{1} 0.3^1 \cdot 0.7^9 + \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 + \binom{10}{3} 0.3^3 \cdot 0.7^7 = \\ &= 0.7^{10} + 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 + 45 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 + 120 \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7 = \boxed{0.6496} \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0.7^{10} = \boxed{0.0282}$$

EBAU Junio 2018 Matemáticas II en Canarias



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2017–2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II**(1)****Convocatoria: JUNIO**

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5 puntos)

2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + ky + kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

- a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k (1,25 pts)
- b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1,25 pts)

3.- a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la

recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ (1,5 pts)

- b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (1 pto)

4.- Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador? (1.25 pts)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador? (1.25 pts)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2017–2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria: JUNIO

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \frac{3x}{x-1}$ (2,5 pts)

2.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa. (1 pts)
b) Para $m = 1$, calcular la matriz inversa A^{-1} (1,5 pts)

3.- Dados los planos: $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

- a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 pts)
b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 (0,75 pts)

4.- El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:

- a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase? (1,25 pts)
b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando? (1,25 pts)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

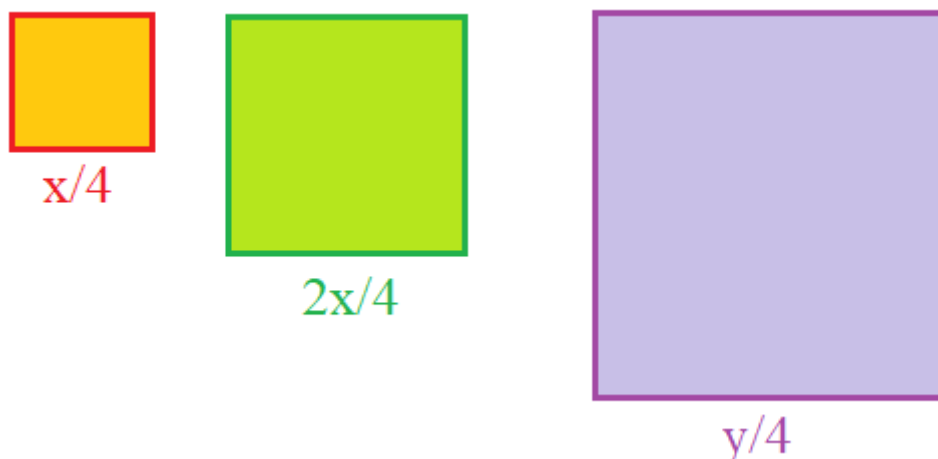
1.- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5 puntos)

Queremos dividir un hilo de longitud 140 m en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro.



Se cumple que $x + 2x + y = 140$.

Queremos construir tres cuadrados con cada uno de los trozos de hilo, por lo que la longitud del lado del cuadrado será la cuarta parte de la longitud del trozo de hilo elegido.



Tenemos que minimizar la suma de las áreas de los tres cuadrados.

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$$

Como $x + 2x + y = 140 \Rightarrow 3x + y = 140 \Rightarrow y = 140 - 3x$ sustituimos “y” por el valor obtenido y obtenemos una función que solo depende de la variable “x”.

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{5x^2 + y^2}{16}$$

$$A(x, y) = \frac{5x^2 + y^2}{16} \left. \begin{array}{l} \\ y = 140 - 3x \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = \frac{5x^2 + (140 - 3x)^2}{16} = \frac{5x^2 + 19600 + 9x^2 - 840x}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{14x^2 - 840x + 19600}{16} = \frac{7x^2 - 420x + 9800}{8}$$

Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{7x^2 - 420x + 9800}{8} \Rightarrow A'(x) = \frac{14x - 420}{8}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{14x - 420}{8} = 0 \Rightarrow 14x - 420 = 0 \Rightarrow 14x = 420 \Rightarrow \boxed{x = \frac{420}{14} = 30}$$

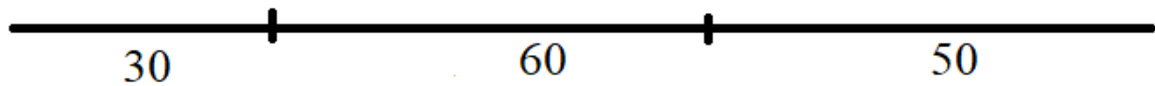
Sustituimos el valor crítico $x = 30$ en la derivada segunda para comprobar si es mínimo.

$$A'(x) = \frac{14x - 420}{8} \Rightarrow A''(x) = \frac{14}{8} \Rightarrow A''(30) = \frac{14}{8} > 0$$

Como la derivada segunda es positiva en $x = 30$ tendremos un mínimo de la función.

Para $x = 30$ tenemos que $y = 140 - 3 \cdot 30 = 50$.

Los trozos en que dividimos un hilo de 140 metros para cumplir lo pedido son 30, 60 y 50 metros.



2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + ky + kz &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k (1,25 ptos)
 b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1,25 ptos)

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + k + 2k - k - 4k - 2 = -2k + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2k + 2 = 0 \Rightarrow -2k = -2 \Rightarrow k = \frac{-2}{-2} = 1$$

Estudiamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

- b) Para $k = 1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 1 - 3z \end{array} \right\} \Rightarrow x + 1 - 3z + z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

3.- a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$ (1,5 ptos)

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (1 pto)

a) Como la recta r es paralela al plano π el vector director de la recta será uno de los vectores directores del plano. El otro vector director del plano es $\overline{AB}$.
Hallamos el vector director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ y=\frac{1+3z}{2} \end{cases} \Rightarrow 3x+2\frac{1+3z}{2}-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+1+3z-3=0 \Rightarrow 3x=2-3z \Rightarrow x=\frac{2}{3}-z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{3}-\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \vec{u}_r = \left(-1, \frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow \{\text{multiplico por 2}\} \Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 3, 2) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-2, 3, 2) \\ \vec{v} = \overline{AB} = (0, 1, 1) - (-1, 5, 0) = (1, -4, 1) \\ B(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+2y-2+8z-8-3z+3+2y-2+8x=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 11x+4y+5z-9=0}$$

El plano pedido tiene ecuación $\pi: 11x+4y+5z-9=0$.

b) Hallamos el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

$$M = \frac{(-1, 5, 0) + (0, 1, 1)}{2} = \left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$$

Como la recta s pedida debe ser paralela a la recta r tiene el mismo vector director.

$$\left. \begin{array}{l} M\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (-2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \frac{-1}{2} - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = \frac{1}{2} + 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

4.- Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador? (1.25 pts)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador? (1.25 pts)

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de fallos del operador en un grupo de 20 fallos.

La probabilidad de que un fallo se deba a un operador es $p = 0.30$. El número de repeticiones es $n = 20$. $X = B(20, 0.3)$

- a) Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} 0.3^5 \cdot 0.7^{15} = 15504 \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^{15} = \boxed{0.1789}$$

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 2)$. Utilizamos el suceso contrario para hacer más fácil el cálculo de esta probabilidad.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{20} + \binom{20}{1} 0.3^1 \cdot 0.7^{19} \right] = 1 - [0.7^{20} + 20 \cdot 0.3 \cdot 0.7^{19}] = \boxed{0.9924} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \frac{3x}{x-1}$ (2,5 pts)

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

Dominio $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \frac{3x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x + 3x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{x-1} = \frac{3}{1-1} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x + \frac{3x}{x-1} - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = 3$$

La recta $y = 3x + 3$ es asíntota oblicua de la función.

Calculamos los extremos relativos buscando cuando se anula la derivada de la función.

$$y = 3x + \frac{3x}{x-1} \Rightarrow y' = 3 + \frac{3(x-1) - 1 \cdot 3x}{(x-1)^2} = 3 + \frac{3x - 3 - 3x}{(x-1)^2} = 3 - \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{(x-1)^2} = 3 \Rightarrow 3 = 3(x-1)^2 \Rightarrow 1 = (x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1 = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x-1=-1 \rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores obtenidos en la segunda derivada para comprobar si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{0 \cdot (x-1)^2 - 3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3}$$

$$f''(2) = \frac{6}{(2-1)^3} = 6 > 0 \rightarrow x = 2 \text{ es mínimo}$$

$$f''(0) = \frac{6}{(0-1)^3} = -6 < 0 \rightarrow x = 0 \text{ es máximo}$$

Como $f(0) = 3 \cdot 0 + \frac{3 \cdot 0}{0-1} = 0$ el máximo relativo tiene coordenadas (0,0).

Como $f(2) = 3 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 2}{2-1} = 12$ el mínimo relativo tiene coordenadas (2,12).

2.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa. (1 pts)
 b) Para $m = 1$, calcular la matriz inversa A^{-1} (1,5 pts)

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe tener valor no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + (m+1)(m-2) - 0 - 0 = (m+1)(m-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m-2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de -1 y 2 .

- b) Para $m = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 2 - 0 - 0 - 0 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.- Dados los planos: $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 pts)

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 (0,75 pts)

a) Hallamos los vectores normales de los planos.

$$\pi_1 : x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \pi_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z - 1 = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2z - 2 \\ y = 1 - \lambda - z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2z \\ y = -\lambda - z + 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2z \\ \lambda = -y - z + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - y - z + 2 + 2z \Rightarrow \pi_2 : x + y - z = 3 \Rightarrow \vec{n}_2 = (1, 1, -1) \end{aligned}$$

Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$. Estos vectores no tienen coordenadas proporcionales por lo que los planos no son ni paralelos ni coincidentes, los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta.

La ecuación implícita de la recta r intersección de los planos es $r : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x = 3 - y + z \end{cases} \Rightarrow 3 - y + z + y + z = 5 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - y + 1 \Rightarrow x = 4 - y \Rightarrow r : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) El plano π_3 perpendicular a los dos planos π_1 y π_2 tiene como vector normal el vector director de la recta intersección de los dos planos.

$$r : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 0)$$

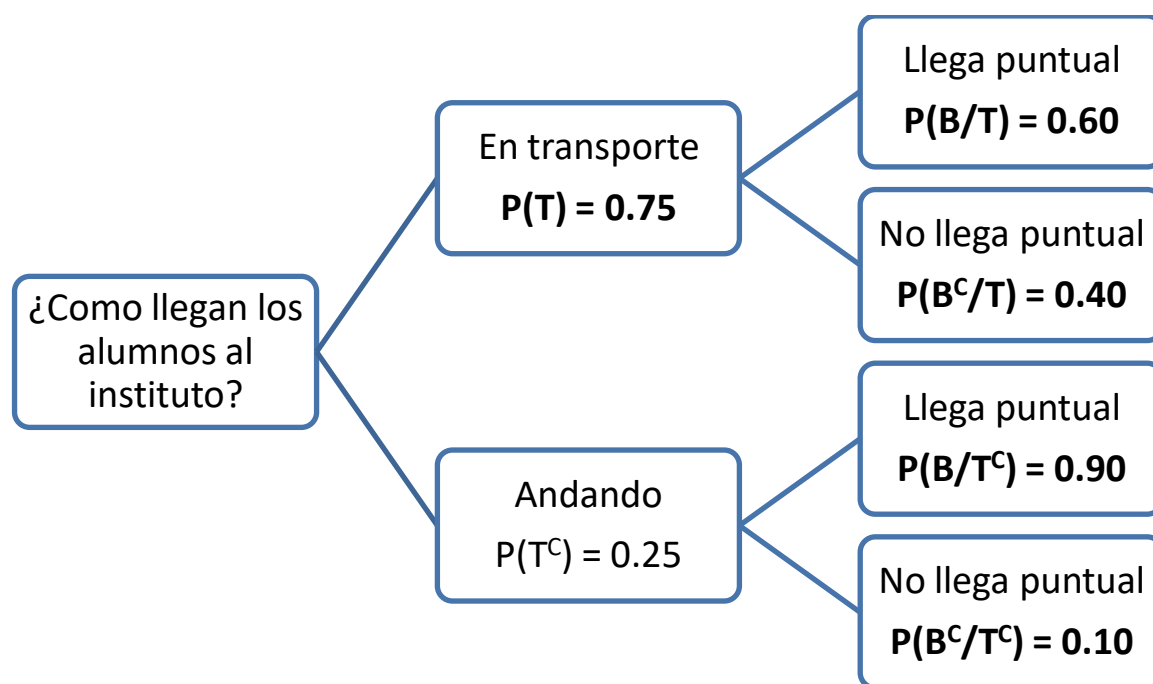
$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_3 = \vec{v}_r = (-1, 1, 0) \\ (0, 0, 0) \in \pi_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \pi_3 : -x + y + D = 0 \\ (0, 0, 0) \in \pi_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 : -x + y = 0}$$

4.- El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:

- a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase? (1.25 pts)
- b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando? (1.25 pts)

Llamamos T al suceso “El alumno acude al instituto en algún tipo de transporte”, T^c al suceso contrario “El alumno acude al instituto andando” y B al suceso “El alumno llega puntual al instituto”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(B)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(T)P(B/T) + P(T^c)P(B/T^c) =$$

$$= 0.75 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.9 = \boxed{0.675}$$

- b) Nos piden calcular $P(T^c/B)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T^c/B) = \frac{P(T^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(T^c)P(B/T^c)}{P(B)} = \frac{0.25 \cdot 0.9}{0.675} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.3333}$$

EBAU Julio 2017 Matemáticas II en Canarias


**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)**
FASE GENERAL**CURSO 2016–2017****MATERIA: MATEMÁTICAS II****Convocatoria: Julio**

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
 . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma

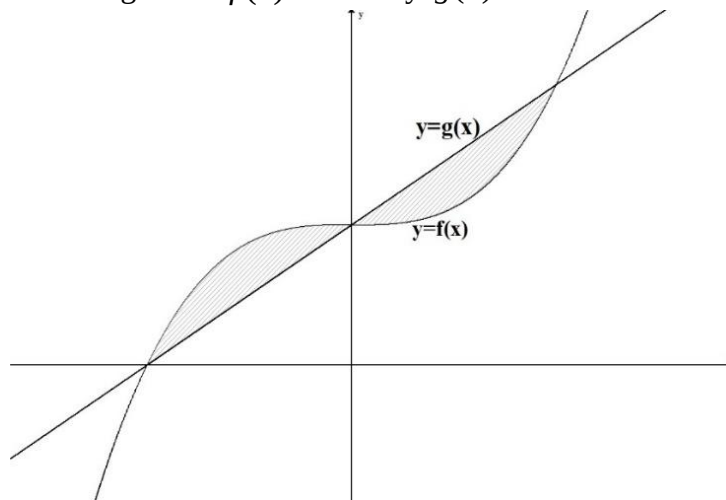
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todo $x \in \mathbb{R}$

(2,5 pts)

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$

(2,5 pts)



3. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{cases}$$

(2,5 puntos)

4. Dado el plano $\pi: 2x + y - z = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π . (1,25 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017**

MATERIA: MATEMÁTICAS II**(2)****Convocatoria: Julio****Instrucciones:**

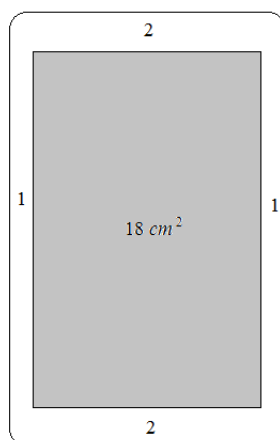
- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B**1. Calcular los siguientes límites**

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\sin(x^2)}$ (1,25 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2 . Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

4. Dados la recta $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{m}}{-3}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ se pide

- a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
- b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todo $x \in \mathbb{R}$

(2,5 pts)

Para ser derivable primero debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 2$ y debe cumplirse:

- Existe $f(2) = 4 + 8 + a = 12 + a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 4x + a = 4 + 8 + a = 12 + a$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + bx = -4 + 2b$
- Los tres valores deben ser iguales. $12 + a = -4 + 2b \Rightarrow a = -16 + 2b$

Para ser derivable, debe serlo en $x = 2$ y para ello deben coincidir las derivadas laterales en $x = 2$.

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{2\}$.

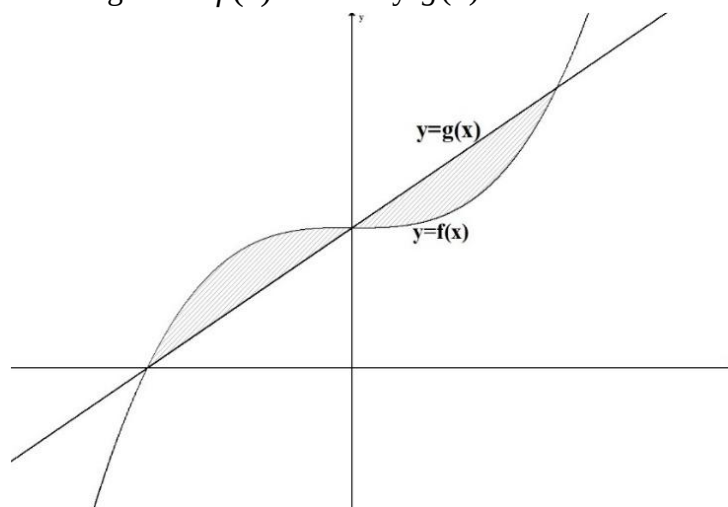
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Debe cumplirse } \left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 4 = 4 + 4 = 8 \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -2x + b = -4 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow \boxed{b = 12}$$

Sustituyendo $a = -16 + 2 \cdot 12 = 24 - 16 = 8$

Los valores pedidos son $a = 8$ y $b = 12$.

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$ (2,5 pts)



Veamos donde se cortan las funciones.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \Rightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

El área de la región pedida se divide en dos integrales definidas ya que se cruzan las funciones en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Calculemos el valor de las integrales definidas.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 x^3 + 1 - (x + 1) dx &= \int_{-1}^0 x^3 + 1 - x - 1 dx = \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \\
 &= \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x + 1 - (x^3 + 1) dx &= \int_0^1 x + 1 - x^3 - 1 dx = \int_0^1 x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

El área pedida es $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array} \right\} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ 3X - 2Y = M^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 6X - 4Y = 2M^{-1} \\ -6X - 9Y = -3M \\ \hline -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\}$$

Para poder proseguir necesitamos calcular la inversa de M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguimos con el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = M \\ -13Y = 2M^{-1} - 3M \end{array} \right\} \Rightarrow -13Y = 2 \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 2-3 \\ 2-3 & -21 \end{pmatrix}$$

$$-13Y = \begin{pmatrix} -14 & -1 \\ -1 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$2X + 3Y = M \Rightarrow 2X + \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} -\frac{42}{13} & 1 - \frac{3}{13} \\ 1 - \frac{3}{13} & 7 - \frac{63}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -\frac{42}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{10}{13} & \frac{28}{13} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{21}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{14}{13} \end{pmatrix}$$

La solución es $X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -21 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}$

4. Dado el plano $\pi : 2x + y - z = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π . (1,25 puntos)

a) De la recta $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ podemos obtener dos puntos de la misma.

$$r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} z = 3 + y - x \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

$$\text{Si tomamos } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + 1 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ El punto es } A(0,1,4)$$

$$\text{Si tomamos } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + y \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 - 1 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ El punto es } B(1,-1,1)$$

De aquí obtenemos el vector director de la recta $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) - (0, 1, 4) = (1, -2, -3)$

$$\text{La ecuación es } \left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ A(0,1,4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}$$

b) El plano π' pedido es paralelo a r , luego tiene como vector director el director de la recta r $\vec{v} = (1, -2, -3)$ y al ser perpendicular al plano $\pi : 2x + y - z = 0$ también tiene como vector director el normal del plano $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Y pasa por el punto $P(1,2,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, -2, -3) \\ \vec{u} = (2, 1, -1) \\ \text{Pasa por } P(1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - 6y + 12 + z - 1 + 4z - 4 + y - 2 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 5y + 5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x - y + z = 0}$$

OPCIÓN B**1. Calcular los siguientes límites**

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)}$ (1,25 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x^2)} = \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \operatorname{sen} x}{\cos(x^2) \cdot 2x} = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos x}{-\operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x \cdot 2x + \cos(x^2) \cdot 2} = \frac{1+1+2}{0+2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

b)

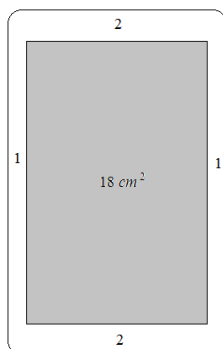
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L'Hôpital)} =$$

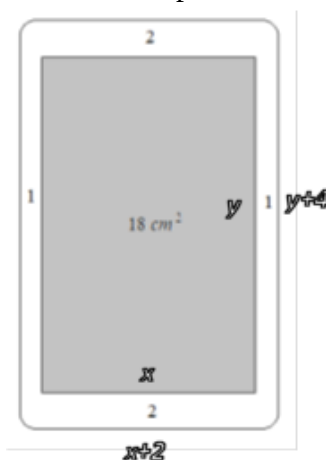
$$\left\{ \text{La derivada de } \frac{1}{2\sqrt{4+x}} = \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ es } \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{4}(4+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}}}{2} = \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4)^3}}}{2} = \boxed{\frac{-1}{64}}$$

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2 . Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Añadimos las medidas de base y altura del Smartphone:



La superficie de la pantalla del smartphone es $18 \text{ cm}^2 \rightarrow x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$

Obtenemos la expresión $f(x)$ de la superficie del smartphone.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = (x+2)(y+4) \\ y = \frac{18}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = (x+2)\left(\frac{18}{x} + 4\right) = x \cdot \frac{18}{x} + 4x + 2 \cdot \frac{18}{x} + 8 = 18 + 4x + \frac{36}{x} + 8$$

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x}$$

Averiguemos su valor mínimo usando la derivada

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2}$$

La igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Solo es posible el valor positivo, es decir, $x = 3$

$$\text{Como } f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$$

Veamos si $x=3$ es mínimo utilizando el signo de la derivada segunda de la función.

$$f''(3) = \frac{72}{3^3} > 0$$

La función superficie del móvil presenta un mínimo en $x=3$; $y = \frac{18}{3} = 6$.

El móvil con superficie mínima tiene una pantalla con dimensiones 3 y 6 cm. Y el móvil tiene dimensiones 5 y 10 cm.

3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A^{-1}XA = B \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz A y lo utilizamos para calcular la expresión de la matriz X .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -3+1 \\ -2-2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 5+6 \\ -4-2 & -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

4. Dados la recta $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ se pide

- a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
 b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

a) Para que recta y plano sean paralelos la primera condición es que vector director de la recta $\vec{v}_r = \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right)$ y el vector normal de plano $\vec{n} = (2, 1, 1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(1, 1, \frac{-3}{m}\right) \cdot (2, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2 + 1 - \frac{3}{m} = 0 \Rightarrow 3m - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{3} = 1}$$

La recta es $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}}$. La recta no está contenida en el plano $\pi: 2x + y + z = 9$ ya que el punto $P(0, -1, 11)$ de la recta no está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P(0, -1, 11) \in \pi? \\ \pi: 2x + y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 - 1 + 11 = 9?$$

No es cierto, por lo que el punto no está en el plano. Recta y plano son paralelos.

$$\text{b) Para } m = 2 \text{ la recta queda con ecuación } r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{2}}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow r: \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + t \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t \end{array} \right\}$$

Averigüemos el punto A de intersección resolviendo el sistema formado por recta y plano.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi: 2x + y + z = 9 \\ x = t \\ r: y = -1 + t \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t \end{array} \right\} \Rightarrow 2t - 1 + t + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}t = 9 \Rightarrow 4t - 2 + 2t + 11 - 3t = 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ 3t = 9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \\ z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A(3, 2, 1)$$

El punto es $A(3, 2, 1)$



EBAU Junio 2017 Matemáticas II en Canarias
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
 . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN A

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$ (2,5 puntos)

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (1,25 puntos)

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(1)

Convocatoria:

Instrucciones:

- . Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- . En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
- b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x ; \quad y = x ; \quad y = -x + 8 ; \quad x = 3 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)
- b) Resolverlo para $k = 2$ (1 punto)

4. Dados los planos: $\pi_1 : x - y + 3 = 0$; $\pi_2 : 2x + y - z = 0$, determinar

- a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2,2,1)$. (1 punto)
- b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1,1,-1)$ (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto $P(1, -2)$ la recta de ecuación $y = 5x - 7$ (2,5 puntos)

La función y la recta tangente coinciden en el punto $P(1, -2)$ por lo que $f(1) = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d \\ f(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c \cdot 1 + d \Rightarrow -2 = 2 - 1 + c + d \Rightarrow \boxed{c + d = -3}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y = 5x - 7$, por lo que la pendiente de la recta tangente es 5 y por tanto $f'(1) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x^2 - 2x + c \\ f'(1) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c \Rightarrow 5 = 6 - 2 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación para obtener el valor de d .

$$\left. \begin{array}{l} c + d = -3 \\ c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + d = -3 \Rightarrow \boxed{d = -4}$$

Los valores buscados son $c = 1$ y $d = -4$.

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$ (1,25 puntos)

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (1,25 puntos)

a) Aplicamos un cambio de variable para resolver la integral indefinida.

$$\int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \ln 2x = t \Rightarrow \frac{2}{x} dx = dt \\ dx = \frac{x}{2} dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{3} \cdot \frac{1}{2} dt = \int \frac{t^2}{6} dt =$$

$$= \frac{1}{6} \int t^2 dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{18} = \{\ln 2x = t\} = \frac{(\ln 2x)^3}{18} + C$$

Aplico este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_{1/2}^{e/2} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left[\frac{(\ln 2x)^3}{18} \right]_{1/2}^{e/2} = \frac{\left(\ln 2 \frac{e}{2}\right)^3}{18} - \frac{\left(\ln 2 \frac{1}{2}\right)^3}{18} = \frac{(\ln e)^3 - (\ln 1)^3}{18} = \frac{1 - 0}{18} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

b) Descomponemos la integral en suma de integrales inmediatas.

$$\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{3x^4}{x^2} dx + \int \frac{5x^2}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int 3x^2 dx + \int 5 dx + \int \frac{x^{1/2}}{x^2} dx =$$

$$= x^3 + 5x + \int x^{1/2-2} dx = x^3 + 5x + \int x^{-3/2} dx = x^3 + 5x + \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} =$$

$$= x^3 + 5x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \boxed{x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A + B + C^2 = 3 \cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2$ (1,5 puntos)

a) Sustituimos los valores de las matrices.

$$A + B + C^2 = 3 \cdot I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x-1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+1 & 0-2 \\ 0-2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x-2 \\ x-2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3=3 \\ x-2=0 \\ x-2=0 \\ 3=3 \end{cases} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial, suponiendo que la matriz A tiene inversa.

$$A \cdot X + C^2 = 3 \cdot I_2 \Rightarrow A \cdot X = 3 \cdot I_2 - C^2 \Rightarrow X = A^{-1} (3 \cdot I_2 - C^2)$$

Comprobamos que la matriz X tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sustituimos y obtenemos X .

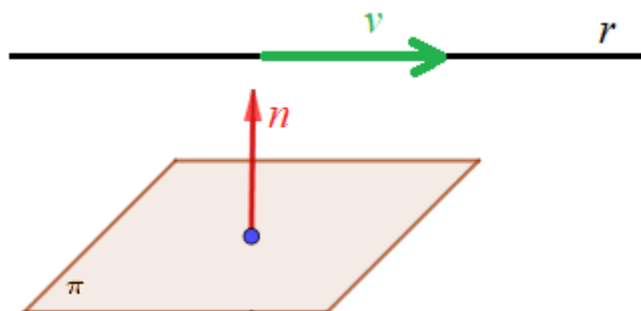
$$X = A^{-1} (3 \cdot I_2 - C^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2+0 & 2-0 \\ 2-2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide

- a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
 b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)

- a) Para que la recta r sea paralela al plano debe cumplirse que el vector director de la recta y el normal del plano sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea nulo. Y además, que ningún punto de la recta esté en el plano.



Hallamos el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, a, 4)$$

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 2, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \end{cases}$$

Hacemos cumplir la condición de que su producto escalar es nulo: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (5, a, 4) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (5, a, 4)(2, 6, -4) = 0 \Rightarrow 10 + 6a - 16 = 0 \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

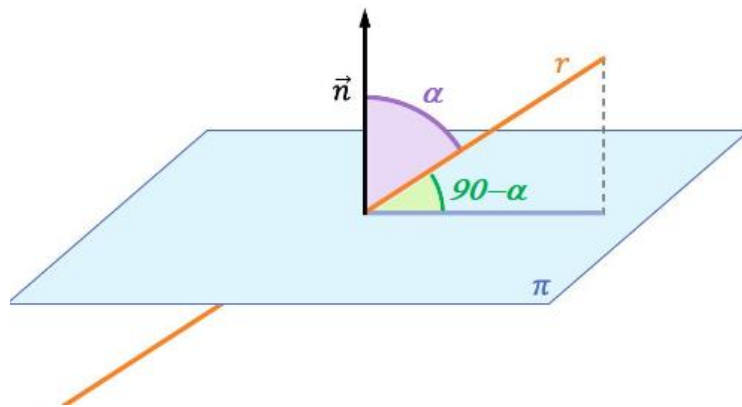
Comprobamos que el punto $P_r(0, 2, 2)$ no pertenece al plano $\pi: 5x + y + 4z - 5 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} P_r(0, 2, 2) \in \pi? \\ \pi: 5x + y + 4z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 2 + 8 - 5 = 0?$$

La igualdad no es cierta. Recta y plano son paralelos para $a = 1$.

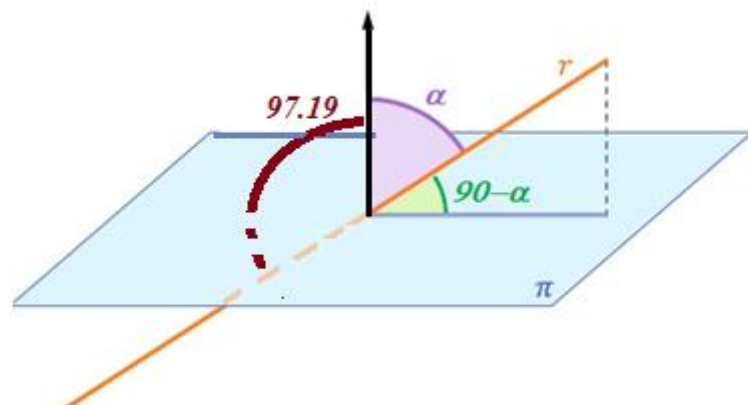
- b) Para $a = 0$ recta y plano no son paralelos y deben ser secantes. Hallamos el ángulo que forman recta y plano hallando previamente el ángulo que forman vector normal del plano y vector director de la recta.

Para $a = 0$ tenemos que $\pi: 5x + 4z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (5, 0, 4)$.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (5, 0, 4) \\ \vec{v}_r = (2, 6, -4) \\ \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{(5, 0, 4)(2, 6, -4)}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{10 - 16}{\sqrt{41} \sqrt{56}} = \frac{-6}{\sqrt{41} \sqrt{56}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{41} \sqrt{56}}\right) \approx 97.1933^\circ$$



Como el ángulo obtenido es mayor de 90° el ángulo que aparece en el dibujo superior formado entre recta y vector normal del plano será $180^\circ - 97.1933^\circ = 82.8067^\circ$.

El ángulo entre recta y plano será $90^\circ - 82.8067^\circ = 7.1933^\circ$.

OPCIÓN B

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento (1,5 puntos)
 b) Calcular los máximos y mínimos relativos (1 punto)

a) Utilizamos la derivada para buscar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} - x^2 \cdot 2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{(1-x^2)2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(1-x^2)}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow 2x(1-x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1} \\ \boxed{x = 0} \end{cases}$$

Existen tres puntos críticos: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-4(1-(-2)^2)}{e^{(-2)^2}} = \frac{12}{e^4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{-1(1-(-0.5)^2)}{e^{(-0.5)^2}} = \frac{-0.75}{e^{0.5^2}} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

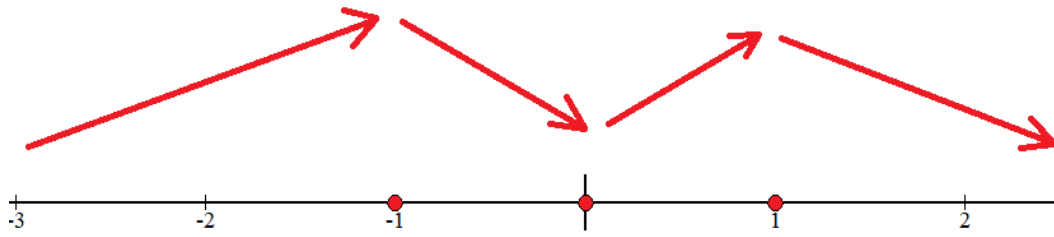
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{1(1-0.5^2)}{e^{0.5^2}} = \frac{0.75}{e^{0.5^2}} > 0.$

La función crece en $(0, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4(1-2^2)}{e^{2^2}} = \frac{-12}{e^4} < 0.$ La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

b) Por el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema del dibujo.



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y otro en $x = 1$. Como $f(-1) = \frac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \frac{1}{e}$ y

$f(1) = \frac{1^2}{e^{1^2}} = \frac{1}{e}$ los máximos relativos tienen coordenadas $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0^2}{e^{0^2}} = \frac{0}{1} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$$y = 3x ; \quad y = x ; \quad y = -x + 8 ; \quad x = 3 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

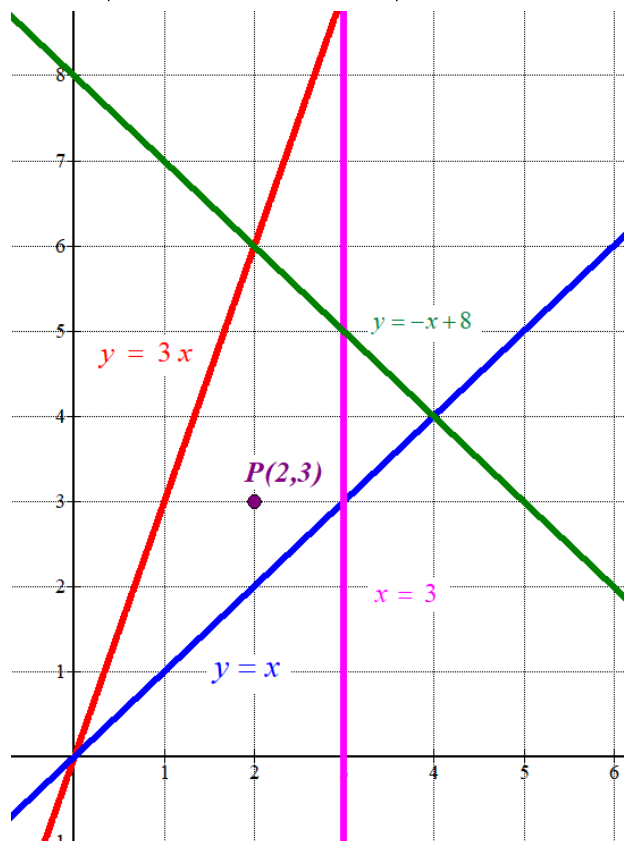
Dibujamos las rectas que delimitan la región.

x	$y = 3x$
0	0
2	6

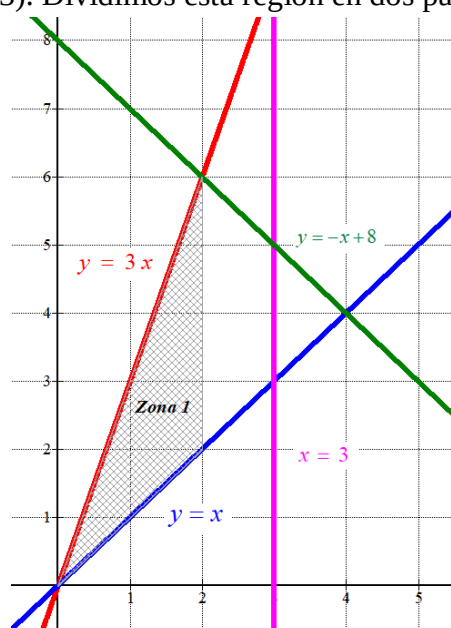
x	$y = x$
0	0
3	3

x	$y = -x + 8$
0	8
2	6

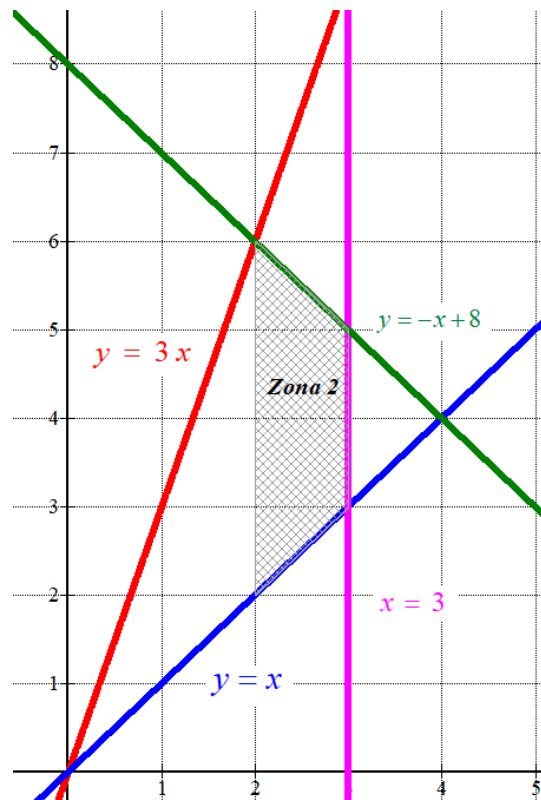
$x = 3$	y
3	0
3	3



La región del plano limitada por las rectas del ejercicio es la región donde se encuentra el punto $P(2, 3)$. Dividimos esta región en dos partes y calculamos el área de cada una de ellas.

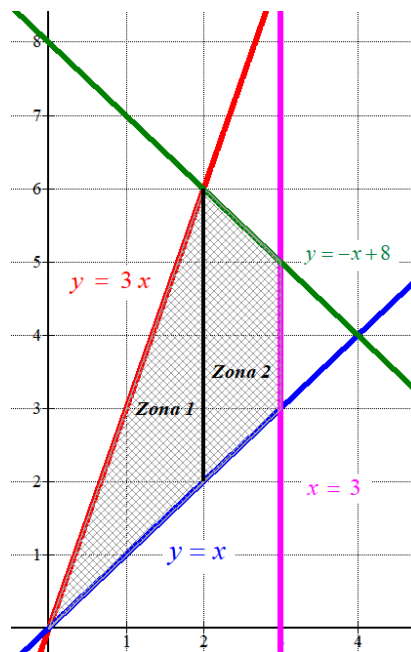


$$\text{Área 1} = \int_0^2 3x - x dx = \int_0^2 2x dx = \left[x^2 \right]_0^2 = 2^2 - 0^2 = 4 \text{ u}^2$$



$$\text{Área 2} = \int_2^3 -x + 8 - x dx = \int_2^3 -2x + 8 dx = \left[-x^2 + 8x \right]_2^3 = (-3^2 + 8 \cdot 3) - (-2^2 + 8 \cdot 2) = 3 \text{ u}^2$$

El área de la región limitada por las rectas es la suma de las dos áreas obtenidas.



$$\text{Área} = \text{Área 1} + \text{Área 2} = 4 + 3 = 7 \text{ unidades cuadradas.}$$

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + kz = 1 \\ kx + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{array} \right\}$$

- a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)
 b) Resolverlo para $k = 2$ (1 punto)

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ k & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 0 + k^2 - 0 + 3k + 2 = k^2 + 3k - 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 10 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-3+7}{2} = 2 = k \\ \frac{-3-7}{2} = -5 = k \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq 2$ y $k \neq -5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad -1 \quad -2 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad 2 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k = -5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos el rango de A y el de A/B con el método de Gauss.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -10 \quad 4 \quad -2 \quad -4 \\ 10 \quad 5 \quad -25 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 9 \quad -27 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 9 & -27 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 9 \quad -27 \quad -27 \\ 0 \quad -9 \quad 27 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -28 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad -5 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 9 \quad -27 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -28}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq 2$ y $k \neq -5$ el sistema es compatible determinado, si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado y si $k = -5$ el sistema es incompatible.

- b) Para $k = 2$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos la expresión de sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ y - 3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ y - 3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ y = -3 + 3z \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 + 3z + 2z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 5z = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 5z \Rightarrow \boxed{x = 2 - \frac{5}{2}z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -3 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 2 - \frac{5}{2}\lambda \\ y = -3 + 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

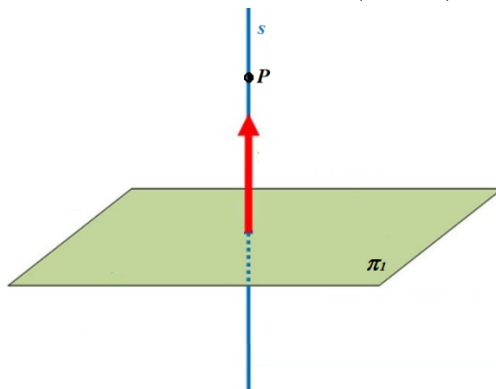
4. Dados los planos: $\pi_1 : x - y + 3 = 0$; $\pi_2 : 2x + y - z = 0$, determinar

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2,2,1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1,1,-1)$ (1,5 puntos)

a) La recta perpendicular a π_1 tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi_1 : x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 0)$$

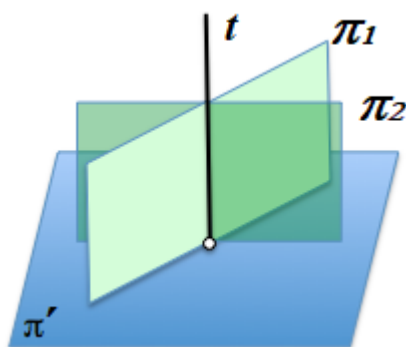


Hallamos la ecuación de la recta s que tiene como vector director $\vec{v}_s = \vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ y pasa por el punto $P(2,2,1)$.

$$s : \begin{cases} \vec{v}_s = \vec{n}_1 = (1, -1, 0) \\ P(2, 2, 1) \in s \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) El plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 tiene como vector normal el vector director de dicha recta.

Hallamos la ecuación de la recta t determinada por la intersección de los dos planos.



$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : x - y + 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3 = y \\ 2x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + x + 3 - z = 0 \Rightarrow 3x + 3 = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_t = (1, 1, 3)$$

Determinamos la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,-1)$ y tiene vector normal $\vec{u}_t = (1, 1, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 1, -1) \in \pi' \\ \vec{n}' = \vec{u}_t = (1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi' : x + y + 3z + D = 0 \\ A(1, 1, -1) \in \pi' \end{array} \right. \Rightarrow 1 + 1 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi' : x + y + 3z + 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi' : x + y + 3z + 1 = 0$.