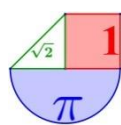
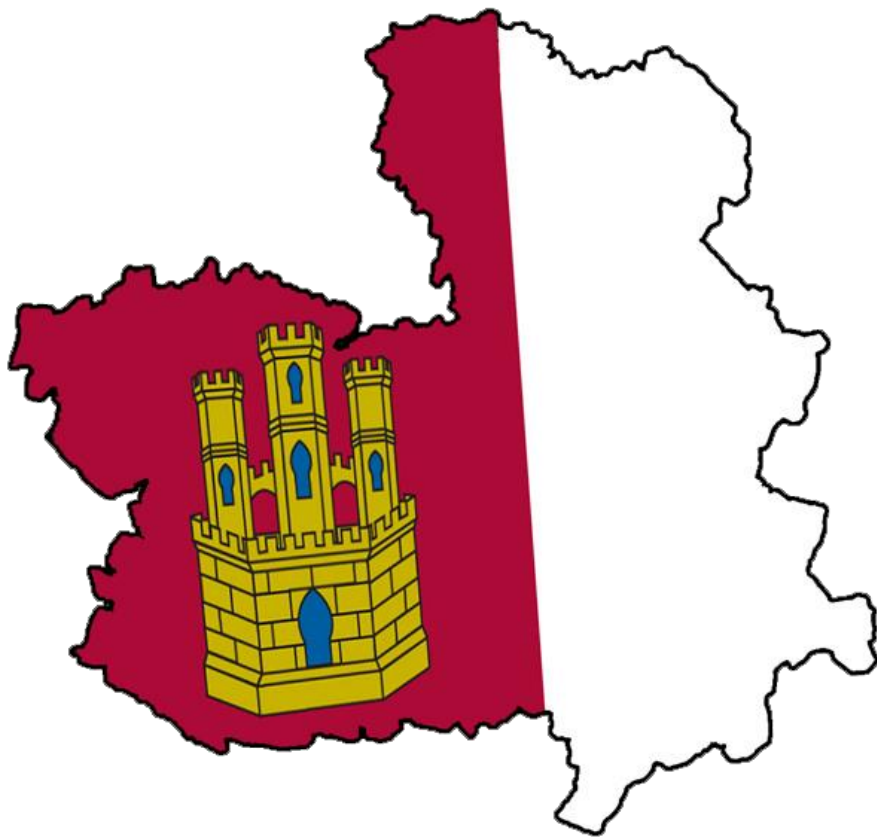


Matemáticas II

PAU 2017 a 2025
Castilla la Mancha



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas EvAU de Catilla la Mancha desde el año 2017 al 2024, junto con los exámenes de la PAU 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	15
EvAU Extraordinaria 2024	27
EvAU Ordinaria 2024	38
EvAU Extraordinaria 2023	50
EvAU Ordinaria 2023	65
EvAU Extraordinaria 2022	79
EvAU Ordinaria 2022	92
EvAU Extraordinaria 2021	105
EvAU Ordinaria 2021	119
EvAU Extraordinaria 2020	133
EvAU Ordinaria 2020	146
EvAU Extraordinaria 2019	160
EvAU Ordinaria 2019	174
EvAU Extraordinaria 2018	190
EvAU Ordinaria 2018	207
EvAU Septiembre 2017	225
EvAU Junio 2017	242



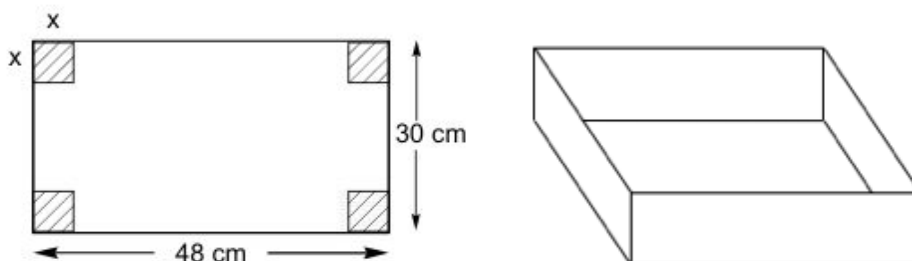
PAU Extraordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad
Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. (2,5 PUNTOS) Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- [0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.
- [1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.
- [0,75 puntos]** Para poder transportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

- [1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.
- [0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.
- [0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- [1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.
- [1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a .

EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

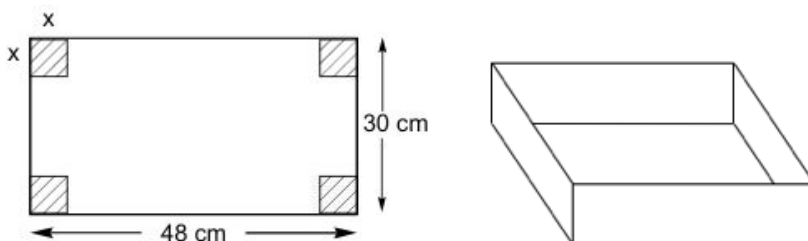
b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

		p									
n	k	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

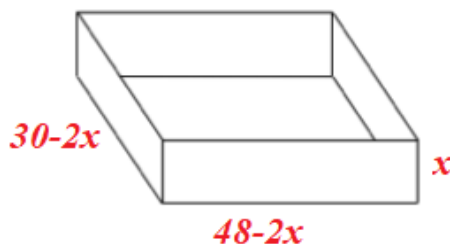
SOLUCIONES

EJERCICIO 1. (2,5 PUNTOS) Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.
 b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.
 c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

a) Hallamos el volumen de la caja como el producto del área de la base por la altura.



$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = (30 - 2x)(48 - 2x) \\ \text{Altura} = x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = V(x) = (30 - 2x)(48 - 2x)x$$

$$V(x) = x(1440 - 60x - 96x + 4x^2) = 1440x - 156x^2 + 4x^3$$

El volumen de la caja tiene la expresión $V(x) = 1440x - 156x^2 + 4x^3$, siendo $0 \leq x \leq 15$.

b) Hallamos los puntos críticos de la función volumen.

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2 = 12(120 - 26x + x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(120 - 26x + x^2) = 0 \Rightarrow 120 - 26x + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 120}}{2} = \frac{26 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{26+14}{2} = 20 = x \\ \frac{26-14}{2} = 6 = x \end{cases}$$

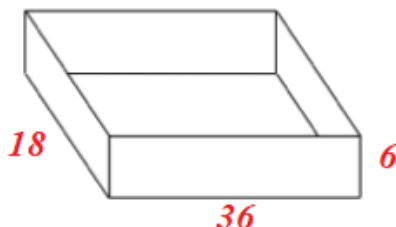
Sustituimos el valor de estos dos puntos críticos en la segunda derivada.

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2 \Rightarrow V''(x) = -312 + 24x \Rightarrow \begin{cases} V''(6) = -312 + 24 \cdot 6 = -168 < 0 \\ V''(20) = -312 + 24 \cdot 20 = 168 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo para $x = 6$ y un mínimo relativo para $x = 20$.

El mayor volumen de la caja se obtiene para $x = 6$.

Para este valor las dimensiones de la caja son $48 - 12 = 36$ y $30 - 12 = 18$ centímetros de lado en la base con 6 centímetros de altura.



c) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = t^2 - 4t \\ g(t) = 2t - 5 \\ f(t) = g(t) \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 4t = 2t - 5 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = \boxed{5=t} \\ \frac{6-4}{2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

El área de una de las aberturas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^5 t^2 - 4t - (2t - 5) dt = \int_1^5 t^2 - 4t - 2t + 5 dt = \int_1^5 t^2 - 6t + 5 dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t \right]_1^5 = \left[\frac{5^3}{3} - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{125}{3} - 75 + 25 - \frac{1}{3} + 3 - 5 = \frac{124}{3} - 52 = \boxed{\frac{-32}{3} \approx -10.6667}$$

El área de una de las aberturas es de $\frac{32}{3} \approx 10.6667$ centímetros cuadrados.

EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

a.1) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,1,-2) \\ B(1,2,0) \\ C(0,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,2,0) - (0,1,-2) = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,1) - (0,1,-2) = (0,-1,3) \\ C(0,0,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - z + 1 - 3y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 5x - 3y - z + 1 = 0}$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano definido por A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 5x - 3y - z + 1 = 0 \\ D(1,0,m) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - m + 1 = 0 \Rightarrow 5 - m + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

El valor buscado es $m = 6$.

a.2) La ecuación del plano que contiene el toldo es $\pi : 5x - 3y - z + 1 = 0$.

a.3) Hallamos la distancia del toldo al punto $P(1,2,3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,2,3) \\ \pi : 5x - 3y - z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \approx 0.5m$$

El punto P está situado a menos de 1 metro del toldo, por lo que no está correctamente ubicado.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.
- b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

b.1) El plano π' que es paralelo a la recta r tiene su mismo vector director $\overrightarrow{AB}$. Al ser también perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$ otro de sus vectores directores es el vector normal del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,3) \\ B(0,4,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,4,-1) - (1,0,3) = (-1,4,-4)$$

$$\pi \equiv -x + y + 2z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (-1,1,2)$$

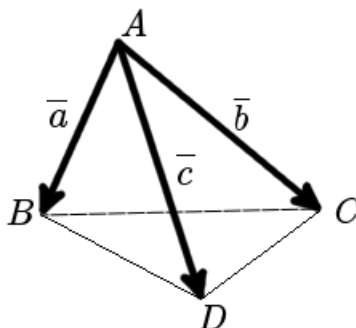
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,4,-4) \\ \vec{v} = \vec{n} = (-1,1,2) \\ C(1,1,-2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 8 + 4y - 4 - z - 2 + 4z + 8 + 2y - 2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x + 6y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + 2y + z - 4 = 0}$$

El plano π' que pasa por el punto C, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π tiene ecuación $\pi': 4x + 2y + z - 4 = 0$.

b.2) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$



$$\left. \begin{array}{l} A(-1,2,3) \\ B(-1,0,-1) \\ C(2,-1,1) \\ D(2,3,m) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1,0,-1) - (-1,2,3) = (0,-2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-1,1) - (-1,2,3) = (3,-3,-2) \\ \overrightarrow{AD} = (2,3,m) - (-1,2,3) = (3,1,m-3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 12 - 36 + 6m - 18 - 0 = 6m - 54$$

Averiguamos cuando $\text{Volumen tetraedro } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = 8.$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = 8 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 6m - 54 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 48 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 6m - 54 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6m - 54 = 48 \rightarrow 6m = 102 \rightarrow \boxed{m = \frac{102}{6} = 17} \\ 6m - 54 = -48 \rightarrow 6m = 6 \rightarrow \boxed{m = 1} \end{cases}$$

Para $m = 17$ o $m = 1$ el volumen del tetraedro ABCD vale 8 unidades cúbicas.

EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

a.1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 4 + 2a - 4 - 0 = 2a - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -3 \quad 3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 4 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \\ -4 \quad -4 \quad 4 \quad -8 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 4 \quad -5 \\ 0 \quad 2 \quad -4 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ \hline 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado (∞ soluciones).

a.2) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado (CASO 1 del apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - z - z = 2 \\ 2x + 1 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z \\ 2x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2z) - z = -1 \Rightarrow 2 + 4z - z = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3z = -3 \Rightarrow \boxed{z = -1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 + 2(-1) = -1} \\ \boxed{y = 1 - (-1) = 2} \end{cases} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a .

b.1) Determinamos la expresión de la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = 1+2a - (3+2a)(1-a) =$$

$$= 1 + \cancel{2a} - 3 + 3a - \cancel{2a} + 2a^2 = 2a^2 + 3a - 2$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

La matriz es invertible para cualquier valor de a distinto de -2 y de $\frac{1}{2}$.

b.2) Calculamos la inversa para los valores de a distinto de -2 y de $\frac{1}{2}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B| = 2a^2 + 3a - 2 \neq 0$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a \\ 3+2a & 1 \end{pmatrix}}{2a^2 + 3a - 2} = \frac{1}{2a^2 + 3a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ a-1 & 1+2a \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir la fotocopadora A, B y C, respectivamente”. Y llamamos F al suceso “falla la fotocopadora”.

Por los datos proporcionados sabemos que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, $P(F/A) = 0.03$,

$P(F/B) = 0.05$ y $P(F/C) = 0.04$.

a.1) Nos piden calcular $P(\overline{F})$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P(A)P(\overline{F}/A) + P(B)P(\overline{F}/B) + P(C)P(\overline{F}/C) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.03) + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.05) + \frac{1}{3} \cdot (1 - 0.04) = \boxed{0.96} \end{aligned}$$

a.2) Nos piden calcular $P(B/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B)P(F/B)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.05}{1 - 0.96} = \boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167}$$

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

- b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.
 b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.
 b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

X = El número de restaurantes que no pasará una inspección de un grupo de 8. $X = B(8, 0.05)$

b.1) Debemos calcular $P(X = 3)$.

Mirando en la tabla proporcionada tenemos que $P(X = 3) = 0.0054$

n	k	p					
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2968
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2547

b.2) Debemos calcular $P(X = 0)$.

Mirando en la tabla proporcionada tenemos que $P(X = 0) = 0.6634$

n	k	p					
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977

b.3) Que al menos dos restaurantes pasen la inspección (2,3,4,5,6,7 u 8 pasan la inspección) es lo mismo que 6 o menos no pasen la inspección (6,5,4,3,2,1 o 0 no pasan la inspección).

Debemos calcular $P(X \leq 6)$. Usamos el suceso contrario para hacer el cálculo más sencillo.

$$P(X \leq 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)] = 1 - [0 + 0] = 1$$

n	k	p	
		0.05	0.1
8	0	0.6634	0.4305
	1	0.2793	0.3826
	2	0.0515	0.1488
	3	0.0054	0.0331
	4	0.0004	0.0084
	5	0.0000	0.0008
	6	0.0000	0.0001
	7	0.0000	0.0000
	8	0.0000	0.0000

PAU Ordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad

Curso 2024/2025



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 2, 3 y 4 deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) [1,25 puntos] La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) [1,25 puntos] ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) [1,25 puntos] Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) [1,25 puntos] Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) [1,25 puntos] Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.1) [1,5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) [1,5 puntos] ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) [1 punto] Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

EJERCICIO 4. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

- a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.
- a.2) **[1 punto]** Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2 .

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?
- b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

a) Considero la función $g(t) = f'(t)$. Obtenemos la expresión de $g(t)$.

$$g(t) = f'(t) = 5e^{-t} + 5(t+1)(-1)e^{-t} = 5e^{-t} + (-5t-5)e^{-t} = -5te^{-t}$$

Buscamos cuando se anula la derivada de $g(t) = -5te^{-t}$.

$$g(t) = -5te^{-t} \Rightarrow g'(t) = -5e^{-t} - 5t(-1)e^{-t} = -5e^{-t} + 5te^{-t} = 5(t-1)e^{-t}$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow 5(t-1)e^{-t} = 0 \Rightarrow \{e^{-t} \neq 0\} \Rightarrow t-1 = 0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

La función $g(t)$ tiene un punto crítico en $t=1$. Vemos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$g'(t) = 5(t-1)e^{-t} \Rightarrow g''(t) = 5e^{-t} + 5(t-1)(-1)e^{-t} = 5e^{-t}(1-t+1) = 5(2-t)e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(1) = 5(2-1)e^{-1} = \frac{5}{e} > 0$$

Como la derivada segunda es positiva la función $g(t)$ tiene un mínimo relativo para $t=1$. La derivada de $f(t)$ tiene un mínimo para $t=1$.

b) Calculamos el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5(t+1)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t+5}{e^t} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{e^t} = \frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$$

El valor de la concentración de virus a largo plazo es 0. El virus desaparece con el paso del tiempo.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

a.1) Hallamos un vector y un punto de cada una de las rectas.

$$r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-2,1,-1) \\ \vec{u}_1 = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1,1,1) \\ \vec{v}_2 = (2,1,-1) \end{cases}$$

Un vector perpendicular a las rectas r_1 y r_2 es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1,-1,1) \\ \vec{v}_2 = (2,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j + k + 2k + j - i = 3j + 3k = (0,3,3)$$

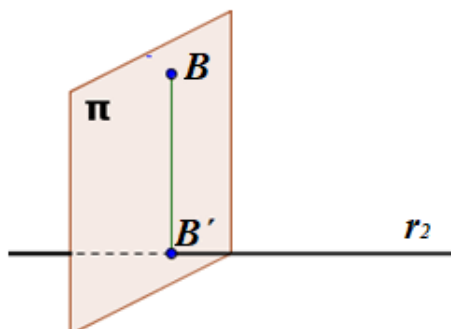
Consideramos como vector director de la recta r_3 a $\vec{w}_3 = \frac{1}{3}\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{3}(0,3,3) = (0,1,1)$. Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(0,0,0)$ y tiene como vector director $\vec{w}_3 = (0,1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_3 = (0,1,1) \\ A(0,0,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

La ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las

rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$ es $r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$.

a.2) Hacemos un dibujo explicativo de los pasos que vamos a realizar para obtener el valor de la distancia. También se podría obtener con una fórmula, pero prefiero realizarlo de forma visual.



Hallamos la proyección ortogonal del punto B en la recta r_2 . Para ello hallamos el punto B' perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{BB'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1)$.

$$r_2 : \begin{cases} Q_2(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow B'(1 + 2t, 1 + t, 1 - t)$$

$B' \in r_2$

$$\overrightarrow{BB'} = (1 + 2t, 1 + t, 1 - t) - (-1, -1, 2) = (2 + 2t, 2 + t, -1 - t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{BB'} = (2 + 2t, 2 + t, -1 - t) \\ \overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{BB'} \rightarrow \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 1, -1) \cdot (2 + 2t, 2 + t, -1 - t) = 0 \Rightarrow$$

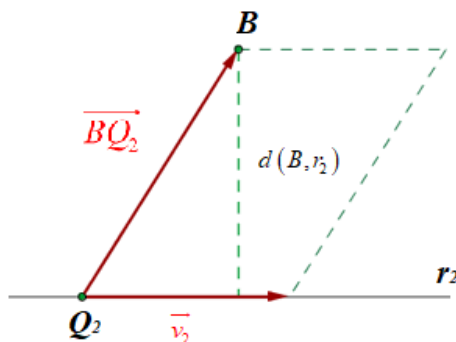
$$\Rightarrow 4 + 4t + 2 + t + 1 - t = 0 \Rightarrow 6t = -7 \Rightarrow t = -\frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{14}{6} = -\frac{8}{6} \\ y = 1 - \frac{7}{6} = \frac{-1}{6} \\ z = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\frac{8}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

La distancia del punto B a la recta r_2 es la distancia del punto B al punto B', es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{BB'}$.

$$\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{8}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right) - (-1, -1, 2) = \left(-\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$d(B, r_2) = d(B, B') = |\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.91 \text{ unidades}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado a.2)



El punto $Q_2(1,1,1)$ pertenece a la recta r_2 . Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{Q_2B}$.

$$\overrightarrow{Q_2B} = (-1, -1, 2) - (1, 1, 1) = (-2, -2, 1)$$

La distancia del punto B a la recta r_2 es el valor de $\frac{|\overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{Q_2B} = (-2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2k = (1, 0, 2)$$

$$d(B, r_2) = \frac{|\overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|} = \frac{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ unidades}}$$

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

b.1) El plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π .

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

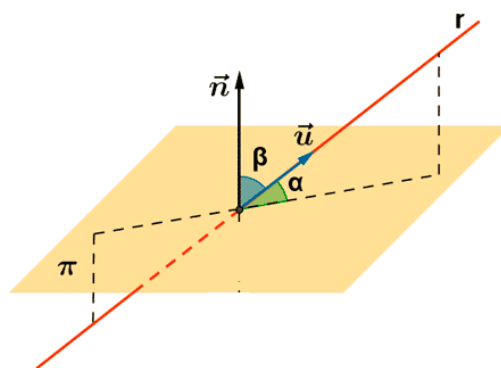
$$\pi \equiv x - y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, -1, 3) \\ P_r(0, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 2y - z + z - 3y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π es $\pi': x + y = 0$.

b.2) Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{n} = (1, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, -1, 2)(1, -1, 3)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{1+1+6}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = \frac{4\sqrt{66}}{33} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{66}}{33}\right) \approx 10^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es aproximadamente de $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.1) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a.1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + a - 0 - 1 + 2 = a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \\ -1 \quad -1 \quad -3 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -5 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 5 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad 3 \quad 1}^{A/B} \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -1 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si $a = 3$ el sistema es incompatible (0 soluciones).

a.2) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2z \rightarrow z = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x + 1 - x + \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow 4x + 2 - 2x + x = 6 \Rightarrow \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{4/3}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

. Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

b.1) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} B$$

Hemos supuesto que la matriz $A - I$ tiene inversa.

Obtenemos la expresión de la matriz $A - I$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando la matriz $A - I$ tiene inversa. Para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m-1-1 = m-2$$

$$|A - I| = 0 \Rightarrow m-2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

Para cualquier valor de m distinto de 2 la matriz $A - I$ tiene inversa y la solución del sistema de ecuaciones es única, siendo la solución $X = (A - I)^{-1} B$.

b.2) Según lo visto en el apartado anterior, para $m = 1$ el sistema tiene solución única. Hallamos la inversa de la matriz $A - I$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la solución del sistema.

$$X = (A - I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

EJERCICIO 4. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

- a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.
 a.2) **[1 punto]** Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

a.1) De 40 cartas solo hay 4 ases, la probabilidad de sacar un as en la primera carta vale $\frac{4}{40} = 0.1$

Para sacar el as en la segunda extracción no debe salir en la primera extracción y se sacaría cualquiera de las restantes 36 cartas, la probabilidad de no sacar as en la primera carta es $36/40$ y luego cuando quedan 39 cartas en el mazo como tiene 4 ases la probabilidad es $4/39$. La probabilidad de sacar as en la segunda extracción vale $\frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{6}{65} \approx 0.0923$.

Para sacar el as en la tercera extracción no debe salir en la primera extracción, la probabilidad es $36/40$, tampoco debe salir en la segunda, la probabilidad es $35/39$ y debe salir en la tercera, la probabilidad es $4/38$. La probabilidad de sacar as en la tercera extracción es el producto de estas tres probabilidades: $\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{21}{247} \approx 0.085$.

- a.2) El segundo jugador para ganar debe sacar 3 cartas o más. El suceso contrario de sacar 3 cartas o más es el suceso “sacar 1 o 2 cartas”.

La probabilidad de que gane el segundo jugador vale $1 - 0.1 - \frac{6}{65} = \frac{21}{26} \approx 0.8077$.

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2 .

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?
 b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?
 b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

X = El valor medido de la distancia entre dos puntos. Como la varianza vale 0.64 m^2 la desviación típica vale $\sqrt{0.64} = 0.8$ metros. $X = N(1.5, 0.8)$

b.1) Debemos calcular $P(X > 2.1)$.

$$P(X > 2.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{2.1 - 1.5}{0.8}\right) = P(Z > 0.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = \boxed{0.2266}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734

b.2) Debemos calcular $P(X > 0.9)$.

$$P(X > 0.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.9 - 1.5}{0.8}\right) = P(Z > -0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7734}$$

b.3) Debemos hallar “d” tal que $P(X > d) = 0.8051$. Como el porcentaje es mayor de 0.5 la distancia “d” debe ser menor que la media 1.5.

$$P(X > d) = 0.8051 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{d - 1.5}{0.8}\right) = 0.8051 \Rightarrow \left\{ \frac{d - 1.5}{0.8} < 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < -\frac{d - 1.5}{0.8}\right) = 0.8051 \Rightarrow -\frac{d - 1.5}{0.8} = 0.86 \Rightarrow -d + 1.5 = 0.688 \Rightarrow \boxed{d = 0.812}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.80	0.7898	0.7928	0.7958	0.7987	0.8015	0.8043	0.8051

Para una distancia de 0.812 m el 80.51% de las mediciones estarían por encima de ella.



EvAU Extraordinaria 2024

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.
 - a) [1,25 puntos] Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.
 - b) [1,25 puntos] Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$.

- a) [1,5 puntos] Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.
 - b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.
3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
 - a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que define el toldo.
 - b) [1,25 puntos] Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

4.

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx$.

b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$.

¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

5.

- a) [1 punto] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X .
- b) [1,5 puntos] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1; \pi_2 \equiv x + y + z = 2; \pi_3 \equiv z = 0.$$

6.

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [0,75 puntos] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

7.

a) [1,25 puntos] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente

determinante $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto A(0, 1, 0).

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	r								
		0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

SOLUCIONES

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.
- a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.
- b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

- a) Llamamos “ x ” al número de helados de 1 bola, “ y ” al número de helados de 2 bolas y “ z ” al número de helados de 3 bolas.

“El viernes ha vendido 157 helados” $\rightarrow x + y + z = 157$.

“Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros” $\rightarrow x + 2y + 3z = 278$.

“El número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$ ” $\rightarrow x = kz (k > 0)$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 157 \\ x + 2y + 3z = 278 \\ x = kz (k > 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 157 \\ x + 2y + 3z = 278 \\ x \quad \quad -kz = 0 \end{array} \right\}$$

- b) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$. El sistema tiene solución

única cuando el rango de A es 3, es decir cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = -2k + 3 + 0 - 2 + k - 0 = 1 - k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 1}$$

El sistema tiene solución única para cualquier valor de k distinto de 1 y mayor que 0.

Si se han vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas significa $x = z$.

Sustituimos esta igualdad en el sistema y vemos como queda.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + x = 157 \\ x + 2y + 3x = 278 \\ x \quad \quad -kx = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 157 \\ 4x + 2y = 278 \\ (1 - k)x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \{k \neq 1\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 157 \\ 4x + 2y = 278 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 157 \\ 2y = 278 \rightarrow y = \frac{278}{2} = 139 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Con lo planteado surge un sistema que no tiene solución, pues obtenemos dos soluciones distintas para “ y ”. No es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.
- b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

- a) En el intervalo $(-\infty, 3)$ la función es $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ la función es discontinua en $x = 4$. Como no

existe la función y $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{x-4} = \frac{8}{0} = \infty$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 4$.

Estudiamos la continuidad en $x = 3$.

- Existe $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3-4} = -6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-4} = -6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 + 2x + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$

Como los límites laterales no coinciden, pero son finitos la función es discontinua de salto finito en $x = 3$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3, 4\}$. En $x = 3$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito y en $x = 4$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

- b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ tiene la expresión $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

La función en un entorno de $x = 2$ tiene la expresión $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 \\ f'(x) &= 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \\ y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 9 = 6(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 9 = 6x - 12 \Rightarrow \boxed{y = 6x - 3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ tiene la expresión $y = 6x - 3$.

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.
- a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.
- b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

- a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por A. El vector normal de este plano es el vector director de la recta.
Hallamos el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 1 = z \end{cases} \Rightarrow 2x - y + x - 1 = 3 \Rightarrow 3x - y = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 + 3x = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -4, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 1, 1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(2, 1, 1) \in \pi \\ \pi : x + 3y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 + 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 3y + z - 6 = 0}$$

La ecuación del plano que define el toldo es $\pi : x + 3y + z - 6 = 0$.

- b) La distancia pedida es la distancia del punto F al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 3y + z - 6 = 0 \\ F(2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(F, \pi) = \frac{|2 + 3(-2) + 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}} \approx 2.71 \text{ unidades}$$

La distancia del foco al toldo tiene un valor aproximado de 2.7 unidades.

4.

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx$.

b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

a) Calculamos la integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{x^2+1} dx &= 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = 2 \left(\int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) = \\ &= 2 \left(\int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right) = 2(x - \arctg x) + K \end{aligned}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 0 = a$$

$$|A \cdot A| = |A| \cdot |A| = a \cdot a = a^2$$

Calculamos el determinante de A^n .

$$\begin{aligned} |A^n| &= |A \cdot A \cdot A \dots (n \text{ veces}) \dots A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \dots (n \text{ veces}) \dots |A| = \\ &= a \cdot a \cdot a \dots (n \text{ veces}) \dots a = a^n \end{aligned}$$

El determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero) es a^n .

5.

a) [1 punto] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) [1,5 puntos] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1; \pi_2 \equiv x + y + z = 2; \pi_3 \equiv z = 0.$$

a) Utilizamos la fórmula del volumen de un cuerpo de revolución: $Volumen = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$Volumen = \pi \int_2^3 (x)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \pi \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) = \boxed{\frac{19\pi}{3}}$$

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema formado por sus ecuaciones no tiene solución, los tres planos no coinciden en ningún punto.

Vemos que ocurre dos a dos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \pi_2 \equiv x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - y \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - y + y + z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$$

Los planos π_1 y π_2 no son paralelos y coinciden en una recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y = 1 \\ \pi_3 \equiv z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \\ Q_s(1, 0, 0) \end{cases}$$

Los planos π_1 y π_3 no son paralelos y coinciden en una recta s paralela a r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \equiv x + y + z = 2 \\ \pi_3 \equiv z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow t: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{w}_t = (-1, 1, 0) \\ R_t(2, 0, 0) \end{cases}$$

Los planos π_2 y π_3 no son paralelos y coinciden en una recta t paralela a r .

Los tres planos coinciden dos a dos en rectas paralelas.



6.

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [0,75 puntos] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x} = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 2 + 2}{(-2)^2 + 2(-2)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x + 2} = \frac{3(-2)^2 + 4(-2) + 1}{2(-2) + 2} = \frac{12 - 8 + 1}{-2} = \boxed{-2.5}$$

b) Llamamos V a “sacar carta con punto verde” y R a “sacar carta con punto rojo”. Realizamos una tabla de contingencia.

	Con punto rojo (R)	Sin punto rojo ($\bar{R}$)	
Con punto verde (V)	7	4	
Sin punto verde ($\bar{V}$)	5		
			40

Completamos la tabla.

	Con punto rojo (R)	Sin punto rojo ($\bar{R}$)	
Con punto verde (V)	7	4	11
Sin punto verde ($\bar{V}$)	5	24	29
	12	28	40

b.1) En la primera extracción de la carta tenemos 40 cartas y 11 con punto verde, por lo que la probabilidad de que en la primera extracción la carta tenga un punto verde es $\frac{11}{40}$. En la segunda extracción solo quedan 39 cartas y 10 con punto verde la probabilidad de que en la segunda extracción (sin reemplazamiento) la carta tenga un punto verde es $\frac{10}{39}$.

La probabilidad de que al sacar dos cartas sin reemplazamiento ambas tengan un punto verde es $\frac{11}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{11}{156} \approx 0.0705$.

b.2) Si la carta extraída tiene un punto verde significa que es una de las 11 cartas con punto verde. Como de estas solo hay 7 con punto rojo tenemos que la probabilidad de que si la carta extraída tiene punto verde tenga también un punto rojo es de $\frac{7}{11} \approx 0.6364$.

7.

a) [1,25 puntos] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente

$$\text{determinante } \begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) [1,25 puntos] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto A(0, 1, 0).

a) Calculamos lo pedido utilizando las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Fila 1}^a = \text{Fila 2}^a \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix} \right\} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

b) La recta paralela a $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ tiene el mismo vector director. La recta pedida es la recta que pasa por A(0, 1, 0) y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, -2)$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{matrix} A(0, 1, 0) \in r \\ \vec{v} = (1, 1, -2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

La ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto

$$A(0, 1, 0) \text{ es } r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}.$$

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

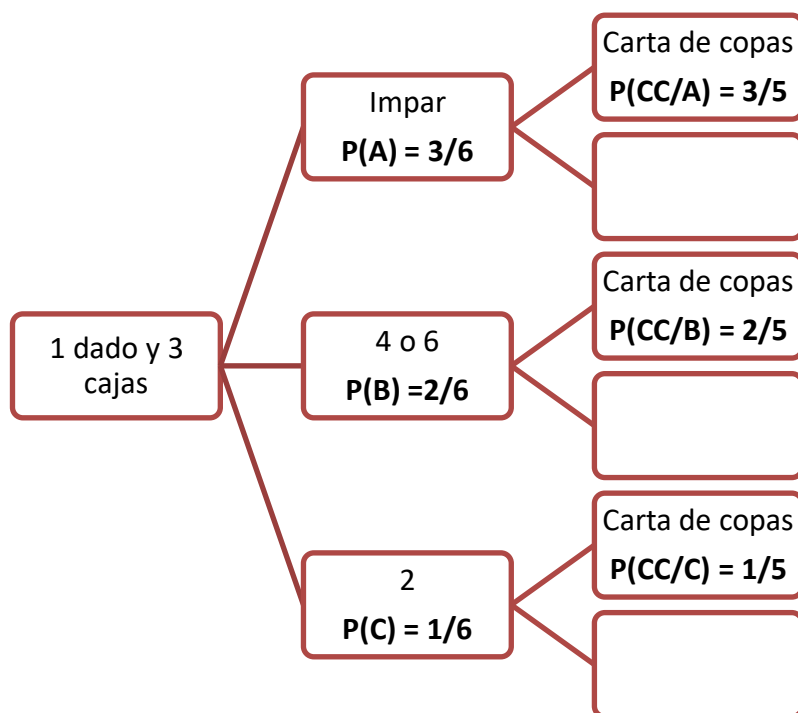
b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

a) Llamamos A a “sacar impar al lanzar el dado”, B a “sacar 4 o 6 al lanzar el dado”, C a “sacar 2 al lanzar el dado” y CC a “sacar carta de copas”.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar el experimento aleatorio y establecer las probabilidades de cada suceso.



a.1) Nos piden calcular $P(CC)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(CC) = P(A)P(CC/A) + P(B)P(CC/B) + P(C)P(CC/C) =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$$

La probabilidad de que se obtenga una carta de copas es de 7/15.

a.2) Nos piden calcular $P(B/CC)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/CC) = \frac{P(B \cap CC)}{P(CC)} = \frac{P(B)P(CC/B)}{P(CC)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{15}} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.2857}$$

La probabilidad de que la carta de copas se haya extraído de la caja B es de $\frac{2}{7} \approx 0.2857$.

b) Consideramos la variable aleatoria X = El número de veces que un paracaidista cae en el sitio correcto en 5 lanzamientos.

Esta variable es binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0.25$. $X = B(5, 0.25)$.

b.1) Nos piden calcular $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = 0.2637$$

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3628
	2	0.2051	0.3052	0.3918	0.2637	0.3087
	3	0.0819	0.1623	0.2082	0.0879	0.1173
	4	0.0181	0.0418	0.0512	0.0079	0.0028

La probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces es de 0.2637.

b.2) Nos piden calcular $P(X \geq 1)$. Utilizamos el suceso complementario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.2373 = \boxed{0.7627}$$

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3628

La probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez es de 0.7627.



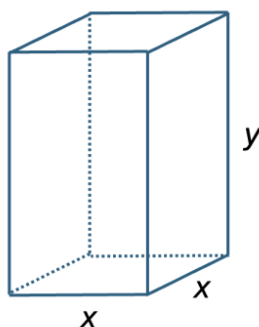
EvAU Ordinaria 2024

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:
- $$\left. \begin{array}{l} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\}$$
- a) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.
2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) [1 punto] Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
- b) [1 punto] Calcula, razonadamente, los valores de x e y , para que la superficie sea mínima.
- c) [0,5 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2 .
3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.
- a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
- b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la longitud de la viga?
- c) [1 punto] Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0, 0, 1)$. Determina el área de la placa triangular.
- 4.

- a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.

b) [1,5 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .

6.

a) [1 punto] Calcula los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:

b.1) [0,75 puntos] $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .

b.2) [0,75 puntos] $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

7.

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

SOLUCIONES

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:
- $$\left. \begin{aligned} ax + 2y + z &= 1 \\ 2x + ay + z &= a \\ 5x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$
- a) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.
- b) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

- a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 10 + 4 - 5a - 4 - 2a = a^2 - 7a + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = a \\ \frac{7-3}{2} = 2 = a \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq 5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\ -10 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{2 & 2 & 1 & 1}^{A/B} \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0 & 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

CASO 3. $a = 5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -5 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 25 \quad 5 \quad 25 \\ -10 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{5 \quad 2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 & 21 & 3 & 23 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

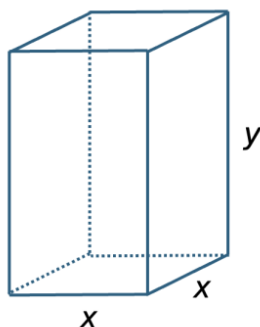
Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ el sistema es compatible determinado, si $a = 2$ el sistema es incompatible y si $a = 5$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x \quad +2y \quad +z \quad = 1 \\ -5x \quad -10y \quad -5z \quad = -5 \\ \hline -8y \quad -4z \quad = -4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 1 \\ -2x \quad -4y \quad -2z \quad = -2 \\ \hline -5y \quad -z \quad = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -8y - 4z = -4 \\ -5y - z = -1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ -5y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 5 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -10y \quad -2z \quad = -2 \\ 10y \quad +5z \quad = 5 \\ \hline 3z \quad = 3 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ 3z = 3 \rightarrow \boxed{z=1} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 1 = 1 \\ 2y + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2y = 0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



- a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
 b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y , para que la superficie sea mínima.
 c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2

- a) El volumen debe ser 1 dm^3 , por lo que $x^2 y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$.

La superficie del envase es la suma de las dos bases y el lateral.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Base} \rightarrow x^2 \\ \text{Lateral} \rightarrow 4x \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4xy \Rightarrow \left\{ y = \frac{1}{x^2} \right\} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

La superficie del prisma tiene la expresión $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

- b) Utilizamos la derivada de la función $S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ para encontrar sus puntos críticos.

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} = 4x - 4x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 4 + 8x^{-3} = 4 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para $x = 1$.

La superficie es mínima para $x = 1 \text{ dm}$ e $y = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ dm}$.

- c) La superficie mínima tiene un valor de $S(1) = 2 \cdot 1^2 + \frac{4}{1} = 6 \text{ dm}^2$. Como cuesta 5 euros el dm^2 el coste del envase será de $6 \cdot 5 = 30$ euros.

3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) [1 punto] Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A , B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

a) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A(2, -1, 3) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 4, 5) - (2, -1, 3) = (-4, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

b) La longitud de la viga es la distancia de A a B , es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45} \simeq 6.7 \text{ unidades}$$

La longitud de la viga es de $\sqrt{45} \simeq 6.7$ unidades

c) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, 5, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (2, -1, 3) = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -10i - 4j - 4k + 10k - 8j - 2i = -12i - 12j + 6k = (-12, -12, 6)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + 6^2} = 18$$

El área de la placa triangular tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

4.

a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3}$.b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^{+\infty}}{2} = \boxed{+\infty}$$

b) La matriz A es de dimensiones 3×4 . Su rango es 1, 2 o 3.Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0.$$

El rango de A es 3 para cualquier valor de a .

5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.
- b) [1,5 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .

a) Calculamos la integral usando el cambio de variable sugerido.

$$\int x\sqrt{2x+3}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{2x+3} \rightarrow t^2 = 2x+3 \\ 2tdt = 2dx \rightarrow dx = tdt \\ t^2 - 3 = 2x \rightarrow \frac{t^2 - 3}{2} = x \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 - 3}{2} \cdot t \cdot tdt = \frac{1}{2} \int t^2 (t^2 - 3) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int t^4 - 3t^2 dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} - 3 \frac{t^3}{3} \right) = \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{2} t^3 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = \sqrt{2x+3} \end{array} \right\} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{10} (\sqrt{2x+3})^5 - \frac{1}{2} (\sqrt{2x+3})^3 + K}$$

b) Utilizamos la fórmula del producto escalar para obtener el ángulo.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1, a, a) \cdot (-1, 0, 2)}{\sqrt{1^2 + a^2 + a^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}}$$

El ángulo debe ser de 60° .

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{-1 + 2a}{\sqrt{1 + 2a^2} \sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 + 4a = \sqrt{5} \sqrt{1 + 2a^2} \Rightarrow \\ \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (-2 + 4a)^2 = 5(1 + 2a^2) \Rightarrow 4 + 16a^2 - 16a = 5 + 10a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 16a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(6)(-1)}}{12} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{70}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72 \rightarrow -1 + 2(2.72) > 0 \rightarrow \text{¡Es válido!} \\ \frac{8 - \sqrt{70}}{6} \approx -0.06 \rightarrow -1 + 2(-0.06) < 0 \rightarrow \text{coseno negativo ¡No es válido!} \end{array} \right.$$

El único valor que hace que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ es $a = \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72$.

6.

a) [1 punto] Calcula los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:

b.1) [0,75 puntos] $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$, con $\bar{B}$ el suceso complementario de B .

b.2) [0,75 puntos] $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ la derivada se anula para este valor: $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 = 12 + 4a + b}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en $P(1, 2)$ se debe cumplir que la función pase por ese punto: $f(1) = 2$ y que la derivada segunda se anule para $x = 1$: $f''(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = 1^3 + a + b + c \Rightarrow \boxed{a + b + c = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6 + 2a \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-6}{2} = -3}$$

Utilizamos todo lo obtenido y hallamos el valor del resto de parámetros.

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 4a + b = 0 \\ a + b + c = 1 \\ \boxed{a = -3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12 + 4(-3) + b = 0 \\ -3 + b + c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{b = 0} \\ b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 0$ y $c = 4$.

b.1) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 = 0,2 + P(B) - 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3 - 0,2 + 0,1 = P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0,2}$$

Calculamos $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0,2 = 0,1 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0,1}$$

b.2) Calculamos $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{0,5}$$

Calculamos $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} = \boxed{0,5}$$

7.

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

a) Si la matriz y su inversa son iguales debe cumplirse que $A \cdot A = I$.

$$A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para que la matriz A y su inversa sean iguales debe ser $a = 0$.

b) Si la recta r buscada es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ su vector director es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k = (0, 1, -2)$$

La recta r que cumple lo pedido es la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{v}_r = (0, 1, -2)$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{matrix} A(1, 0, 0) \in r \\ \vec{v}_r = (0, 1, -2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

a) Llamamos T a “el socio juega al tenis”, N a “el socio practica natación”, G a “el socio practica golf” y A a “el socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales”.

Sabemos que $P(T) = 0.6$, $P(N) = 0.25$, $P(G) = 0.15$, $P(A/T) = 0.21$, $P(A/N) = 0.3$ y

$P(A/G) = 0.12$.

a.1) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(T)P(A/T) + P(N)P(A/N) + P(G)P(A/G) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.21 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.12 = \boxed{0.219}$$

La probabilidad de que el socio elegido al azar haya obtenido algún premio es de 0.219.

a.2) Nos piden calcular $P(N/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N/A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N)P(A/N)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.3}{0.219} = \boxed{\frac{25}{73} \approx 0.3425}$$

La probabilidad de que elegido al azar un socio que ha obtenido premio esté sea de natación es de $\frac{25}{73} \approx 0.3425$.

b) X = El tiempo (en minutos) que una persona sana invierte en recorrer 5 km. $X = N(60, 8)$.

b.1) Nos piden calcular $P(X < 50)$.

$$P(X < 50) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z < \frac{50 - 60}{8}\right) = P(Z < -1.25) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

La probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos en recorrer 5 km es de 0.1056.

b.2) Nos piden calcular $P(50 \leq X \leq 66)$.

$$P(50 \leq X \leq 66) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{50-60}{8} \leq Z \leq \frac{66-60}{8}\right) = P(-1.25 \leq Z \leq 0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) - P(Z \leq -1.25) = P(Z \leq 0.75) - [1 - P(Z \leq 1.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7734 - (1 - 0.8944) = \boxed{0.6678}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8

La probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos en recorrer 5 km es de 0.6678.



EvAU Extraordinaria 2023

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

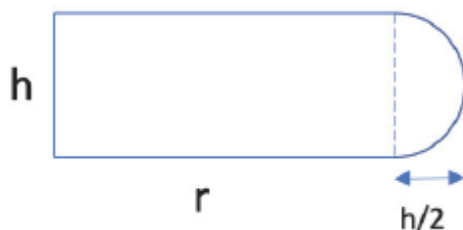
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases}, \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

- a) [1,75 punto] Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



- a) [1 punto] Escribe el área del aparcamiento en función del valor h .
b) [1,5 puntos] ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?
3. a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:
- a.1) [0,5 puntos] La probabilidad de obtener una bola roja.
a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.
- b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?
b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n \ p \ k	0	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.
- a) [1,5 puntos] Determina el valor de a, b para que el vector $\overline{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π .
- b) [1 punto] Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π .

5. a) [1 punto] Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

- b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a .

6. a) [1 punto] Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$$

- b) [1,5 puntos] Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π .

7. a) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

- b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

- b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

- b.2) [0,75 puntos] ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

8. a) [1,25 puntos] Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} \text{ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.}$$

- b) [1,25 puntos] Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2, 3)$.

SOLUCIONES

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases}, \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

a) [1,75 punto] Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2 + 1 + 2a + a + 2 = -2a^2 + 3a + 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a^2 + 3a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(5)}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{-3+7}{-4} = \boxed{-1=a} \\ \frac{-3-7}{-4} = \boxed{2.5=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2.5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ 2 \quad 2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad -1 \quad 3 \\ -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 & 6 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 16 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & A/B & \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ & & A & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

CASO 3. $a = 2.5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2.5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2.5 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -2 & -4 \\ \hline 0 & -4 & -3 & -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 & 1 & 2.5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 1.5 & 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1.5 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & A/B & \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & A & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 2.5$ el sistema es compatible determinado, si $a = 2.5$ o $a = -1$ el sistema es incompatible.

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + y - z = -1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + y + 2z = 3 \\ -2x + y - z = -1 \\ \hline 2y + z = 2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\}$$

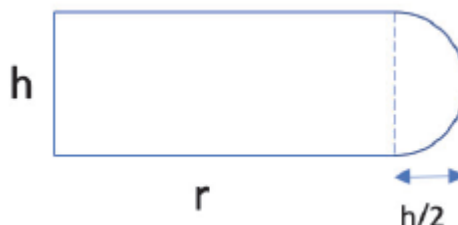
$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ 2x - 4y - 2z = -4 \\ -2x + y - z = -1 \\ \hline -3y - 3z = -5 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - z = -1 \\ -3y - 3z = -5 \\ 2y + z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 6y + 3z = 6 \\ -6y - 6z = -10 \\ \hline -3z = -4 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - z = -1 \\ -3y - 3z = -5 \\ -3z = -4 \rightarrow \boxed{z = \frac{4}{3}} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y - \frac{4}{3} = -1 \\ -3y - 4 = -5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = \frac{1}{3} \\ -3y = -1 \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}} \end{array} \right. \Rightarrow -2x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución del sistema es $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados h , $r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



- a) [1 punto] Escribe el área del aparcamiento en función del valor h .
 b) [1,5 puntos] ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

- a) El perímetro de la figura es la suma de tres de los lados del rectángulo y la mitad del perímetro de la circunferencia de radio $h/2$. Este perímetro es la longitud de la valla (80 metros)

$$\text{Perímetro} = 2r + h + \cancel{\frac{\pi h}{2}} = 2r + h + \frac{\pi h}{2} = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{80 - h - \frac{\pi h}{2}}{2} = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h$$

El área del aparcamiento es la suma del área del rectángulo y la mitad del área del círculo de radio $h/2$.

$$\text{Área} = hr + \frac{\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} = hr + \frac{\pi h^2}{8}$$

Reemplazamos en el área el valor de r por lo obtenido inicialmente y nos queda la función de la que deseamos hallar su máximo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área} = hr + \frac{\pi h^2}{8} \\ r = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h \end{array} \right\} \Rightarrow A(h) = h \left(40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h \right) + \frac{\pi h^2}{8} = 40h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{\pi}{4}h^2 + \frac{\pi}{8}h^2$$

El área del aparcamiento en función del valor h tiene la expresión: $A(h) = 40h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{\pi}{8}h^2$

- b) Buscamos los puntos críticos de esta función usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} A'(h) = 40 - h - \frac{\pi}{4}h \\ A'(h) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 40 - h - \frac{\pi}{4}h = 0 \Rightarrow 40 = h + \frac{\pi}{4}h \Rightarrow 40 = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{40}{1 + \frac{\pi}{4}} = \frac{160}{4 + \pi} \simeq 22.4 \text{ metros}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es un máximo o un mínimo de la función $A(x)$.

$$A'(h) = 40 - h - \frac{\pi}{4}h \Rightarrow A''(h) = -1 - \frac{\pi}{4} \Rightarrow A''(22.4) = -1 - \frac{\pi}{4} < 0$$

Como es negativa la segunda derivada sabemos que la función tiene un máximo en $h = \frac{160}{4 + \pi}$.

El valor de r es:

$$r = 40 - \frac{1}{2} \left(\frac{160}{4 + \pi} \right) - \frac{\pi}{4} \left(\frac{160}{4 + \pi} \right) = 40 - \frac{80}{4 + \pi} - \frac{40\pi}{4 + \pi} = \frac{160 + 40\pi}{4 + \pi} - \frac{80}{4 + \pi} - \frac{40\pi}{4 + \pi}$$

$r = \frac{80}{4 + \pi} \simeq 11.2 \text{ metros}$

Resumiendo: El área del aparcamiento es máxima para $h = \frac{160}{4 + \pi} \simeq 22.4 \text{ metros}$ y

$$r = \frac{80}{4 + \pi} \simeq 11.2 \text{ metros}.$$

3. a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) [0,5 puntos] La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

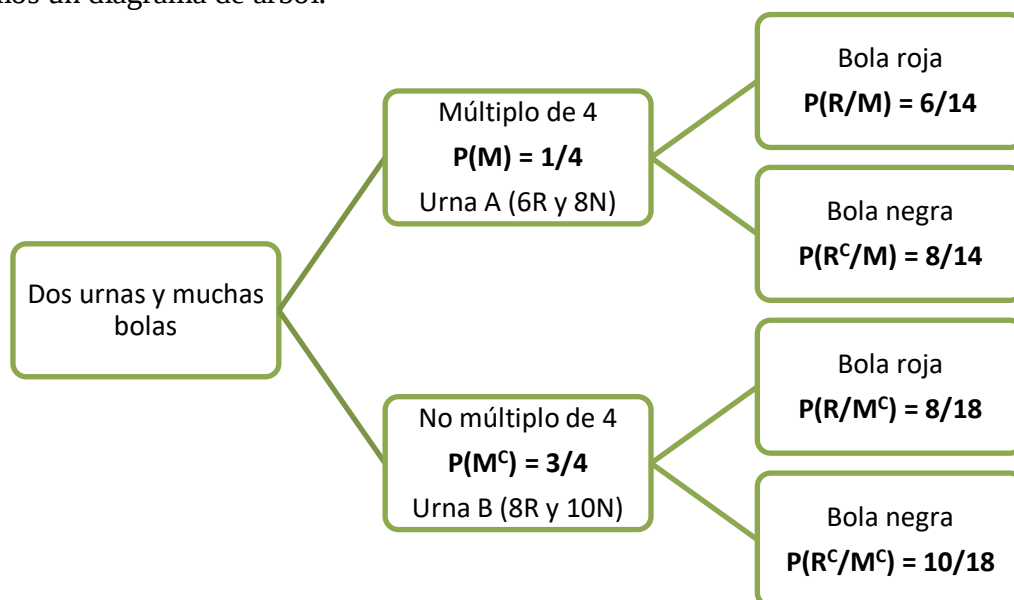
b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	k \ p	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

a) Para obtener un múltiplo de 4 al lanzar el dado debe salir 4, 8 o 12. Si llamamos M al suceso “sacar múltiplo de 4 al lanzar el dado” tenemos que $P(M) = 3/12 = 1/4$.

Llamamos R al suceso “sacar bola roja” y R^C al suceso “sacar bola negra”

Realizamos un diagrama de árbol.



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(M)P(R/M) + P(M^c)P(R/M^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{14} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{18} = \frac{37}{84} \approx 0.44$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/R) = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = \frac{P(M)P(R/M)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{14}}{\frac{37}{84}} = \boxed{\frac{9}{37} \approx 0.243}$$

b) Sea X la variable que cuenta el número de paquetes que no se pueden entregar de un grupo de 6 paquetes.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 6$ y $p = P(\text{no entregar un paquete}) = 0.25$.

$X = B(6, 0.25)$

b.1) Nos piden calcular $P(X = 1)$.

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} 0.25^1 \cdot 0.75^5 = \boxed{\frac{729}{2048} \approx 0.356}$$

b.2) Entregar al menos uno de los paquetes es entregar 1, 2, 3, 4, 5 o 6 paquetes. Esto es lo mismo que no entregar 5, 4, 3, 2, 1 o 0 paquetes. Nos piden calcular $P(X \leq 5)$. Calculamos su valor usando el suceso contrario.

$$P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - \binom{6}{6} 0.25^6 \cdot 0.75^0 = \boxed{\frac{4095}{4096} \approx 0.9998}$$

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de a, b para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π .

b) **[1 puntos]** Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π .

a) Si el punto A esté contenido en el plano π el punto satisface su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv ax + y - z = 1 \\ A(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow a + 0 - 0 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano π . Esto significa que este vector tiene coordenadas proporcionales al vector normal al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 1 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (b, 1, -1) - (1, 0, 0) = (b-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{AB} \parallel \vec{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b-1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow b-1=1 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 2$.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$ el plano queda $\pi \equiv x + y - z = 1$.

La recta que pasa por A y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, -1) \\ A(1, 0, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

5. a) [1 punto] Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a .

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x + 3 \\ g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

Como $f(0) = 3$ y $g(0) = 1$ tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(-1, 2)$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^2 x^2 - 2x + 3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx =$$

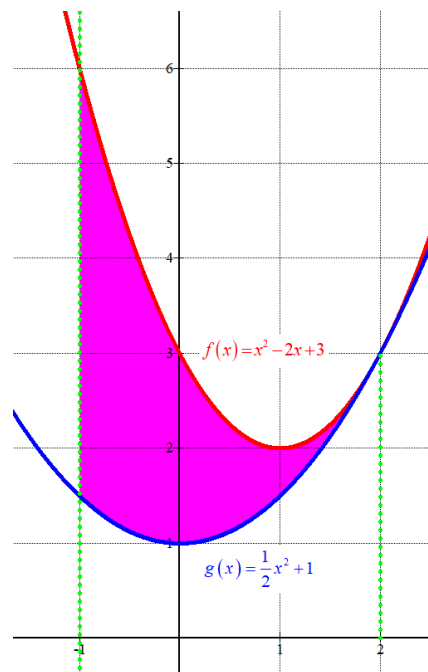
$$= \int_{-1}^2 x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_{-1}^2 =$$

$$= \left[\frac{2^3}{6} - 2^2 + 4 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{6} - (-1)^2 - 2 \right] =$$

$$= \frac{8}{6} - 4 + 4 + \frac{1}{6} + 1 + 2 = \frac{9}{2} = \boxed{4.5 \text{ u}^2}$$

El recinto del cual hemos hallado el área es el coloreado de rosa en el dibujo.



b) El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - a(a+1) - 0 + a+1 - 0 = -a^2 - a + a + 1 = -a^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Si $a \neq \pm 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna 3ª. Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a = -1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

fila y columna 3ª. Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3 y si $a = 1$ o $a = -1$ el rango de A es 2.

6. a) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$$

b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π .

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \frac{27 - 27 + 9 - 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

3	1	-3	3	-9	$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3)$
3	3	0	9		
1	0	3	0	0	

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 + 3)}{3\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \frac{27 - 27 + 9 - 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 6x + 3}{3} = \frac{27 - 18 + 3}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

b) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, 1) \\ \pi \equiv x - y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ unidades}}$$

7. a) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

a)

$$\int (x+3)e^{-2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+3 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} \end{array} \right\} = (x+3) \frac{1}{-2} e^{-2x} - \int \frac{1}{-2} e^{-2x} dx =$$

$$= \frac{-x-3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \frac{-x-3}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-2} e^{-2x} \right) = \frac{-x-3}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} =$$

$$= \frac{-2x-6}{4} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} = \boxed{\frac{-2x-7}{4} e^{-2x} + K}$$

b) En cualquier momento del juego, la probabilidad de obtener un 1 es de $1/6$ y la de obtener otro valor es de $5/6$.

b.1) No obtener ningún uno es sacar en la primera tirada un resultado que no sea 1.

La probabilidad de no sacar ningún 1 es $5/6$.

$$P(\text{Sacar puntuación } 0) = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.833}$$

Obtener una puntuación de 1 es sacar 1 en la primera tirada y un resultado distinto de 1 en la segunda, como son sucesos independientes la probabilidad de obtener puntuación 1 es:

$$P(\text{Sacar puntuación } 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \approx 0.1389}$$

Para obtener una puntuación de tres debemos sacar 1 en la 1ª, 2ª y 3ª tirada y un resultado distinto de 1 en la 4ª tirada.

$$P(\text{Sacar puntuación } 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \boxed{\frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296} \approx 0.0039}$$

b.2) Analizamos lo obtenido en el apartado anterior:

$$P(\text{Sacar puntuación } 0) = \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{0+1}}$$

$$P(\text{Sacar puntuación } 1) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{6^{1+1}}$$

$$P(\text{Sacar puntuación } 3) = \frac{5}{6^4} = \frac{5}{6^{3+1}}$$

Generalizando la regla para n puntos tendremos

$$\boxed{P(\text{Sacar puntuación } n) = \frac{5}{6^{n+1}}}$$

8. a) [1,25 puntos] Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} \text{ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.}$$

b) [1,25 puntos] Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} &= \begin{cases} \text{Sacamos factor común } \frac{1}{2} \\ \text{de la 1ª Fila} \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{cases} \text{Sacamos factor común } 4 \\ \text{de la 3ª Fila} \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{cases} \text{En la 2ª fila separamos el determinante} \\ \text{en suma de dos determinantes} \end{cases} = 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = \\ &= \begin{cases} \text{En el segundo determinante} \\ \text{la 2ª fila es proporcional} \\ \text{a la 1ª fila (x2)} \rightarrow \text{determinante} = 0 \end{cases} = 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \right) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 = \boxed{12} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(1,1,1)(3,2,3)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \sqrt{3^2+2^2+3^2}} = \frac{3+2+3}{\sqrt{3} \sqrt{22}} = \frac{8}{\sqrt{66}} \Rightarrow \\ (\vec{u}, \vec{v}) &= \cos^{-1} \left(\frac{8}{\sqrt{66}} \right) \approx 10^\circ \end{aligned}$$

El valor aproximado del ángulo formado por los dos vectores es de 10° .



EvAU Ordinaria 2023

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$
 - b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?
2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.
 b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.
 c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta
3. Sea el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
 - a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?
 - b) **[1 punto]** Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A .
4. a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.
 - a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?
 - a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?
 - b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.
 - b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?
 - b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} , razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

6. a) [1 punto] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{x^2}.$$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$

7. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

8. a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3 . El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$
- b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

a)

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ 2b=0 \\ 4a+2c=2 \\ 4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ \boxed{b=0} \\ 4a+2c=2 \\ \boxed{b=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ 4a+2c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1-2a \\ 2a+c=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + (1-2a) = 1 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c=1-2a \\ b=0 \end{cases}$$

Para que se cumpla $A \cdot X = B$ debe ser a cualquier valor real, $b = 0$ y $c = 1 - 2a$.

- b) Para que $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ sea una matriz simétrica debe ser $b = c$, lo que implica que $c = 0$. Y esto a

su vez implica que $0 = 1 - 2a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$.

Con la condición de simetría de la matriz X los valores para que $A \cdot X = B$ son $a = 1/2$, $b = c = 0$.

La matriz X queda $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.

b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta

a) Sea una $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ es una función continua en $[0, 2]$ por ser una función polinómica.

Comprobamos que la función tiene signo distinto en los extremos del intervalo $[0, 2]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 10 = -10 < 0 \\ f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 28 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

c) La función es continua. Comprobamos si es monótona creciente o decreciente en el intervalo $[0, 2]$.

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Como $x = -2 \notin [0, 2]$ comprobamos el signo de la derivada en el intervalo $[0, 2]$ tomando $x = 1$ y como su derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 3 = 18 > 0$ la función crece en el intervalo $(-2, +\infty)$ y en particular en el intervalo $[0, 2]$.

Por lo tanto, la función es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 2]$ y sólo puede tener una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

3. Sea el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A .

a) Para que el punto A esté contenido en el plano π debe satisfacer su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv b \cdot x + y + z = 1 \\ A(1, 1, a) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow b + 1 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

Para que el plano tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$ el producto escalar de ambos debe ser 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv b \cdot x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (b, 1, 1) \\ \vec{u} = (1, 2, 0) \\ \vec{u} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (b, 1, 1)(1, 2, 0) = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos que $a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -2$.

b) Con $a = 2$ y $b = -2$ el punto queda $A(1, 1, 2)$ y el plano $\pi \equiv -2x + y + z = 1$.

La recta r perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv -2x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (-2, 1, 1)$$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{n} = (-2, 1, 1) \\ A(1, 1, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{R}$$

4. a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0.15 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1.35 minutos?

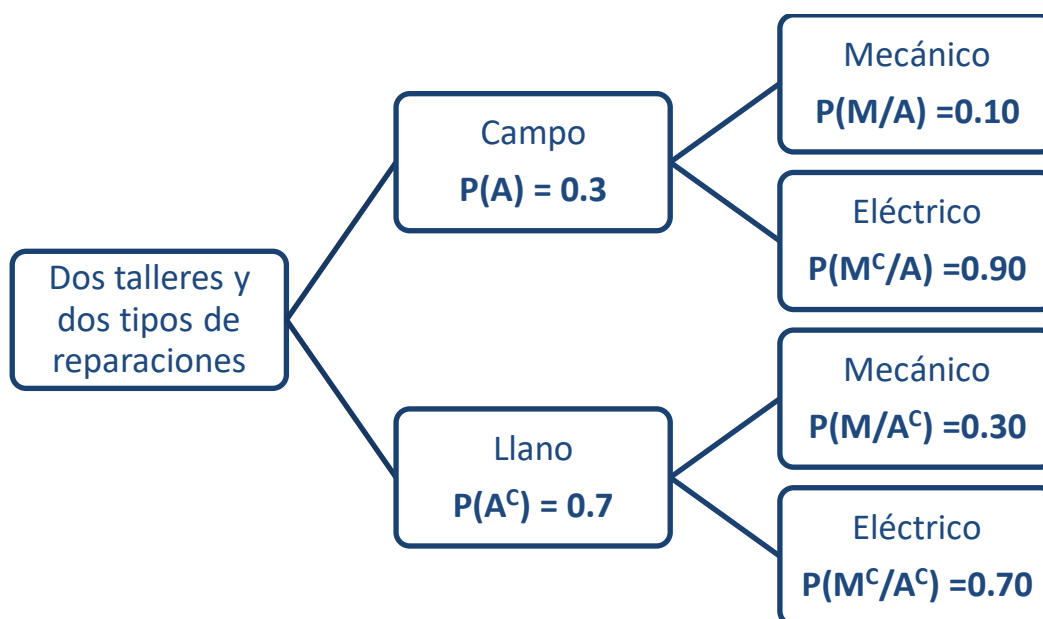
b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85.08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

a) Llamamos A a “la reparación se hace en el polígono Campo”, A^C a “la reparación se hace en el polígono Llano”, M a “la reparación es de tipo mecánico” y M^C a “la reparación es de tipo eléctrico”.

Sabemos que $P(A) = 0.30$ y $P(A^C) = 0.70$. $P(M/A) = 0.10$, $P(M/A^C) = 0.30$.

Realizamos un diagrama de árbol



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total para calcular $P(M)$.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(A^c)P(M/A^c) = 0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.3 = \boxed{0.24}$$

a.2) Nos piden calcular $P(A^c/M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/M^c) = \frac{P(A^c \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(A^c)P(M^c/A^c)}{1 - P(M)} = \frac{0.7 \cdot 0.7}{1 - 0.24} = \frac{49}{76} \approx 0.645$$

b) X = Tiempo que tarda en completar una vuelta a un circuito (en minutos). $X = N(1.5, 0.15)$

b.1) Nos piden calcular $P(X < 1.35)$.

$$P(X < 1.35) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z < \frac{1.35 - 1.5}{0.15}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

a	0.00	0
0.90	0.8159	0.8
1.00	0.8413	0.8
1.10	0.8643	0.8

b.2) Nos piden hallar “a” tal que $P(X < a) = 0.8508$.

$$P(X < a) = 0.8508 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a - 1.5}{0.15}\right) = 0.8508 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a - 1.5}{0.15} = 1.04 \Rightarrow a - 1.5 = 1.04 \cdot 0.15 \Rightarrow \boxed{a = 1.5 + 1.04 \cdot 0.15 = 1.656}$$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8

El tiempo que está por encima del 85.08 % de los tiempos es 1.656 minutos

5. a) [1 punto] Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x = t^6$

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1} , razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1-3x = t^6 \rightarrow -3dx = 6t^5 dt \\ dx = -2t^5 dt \\ (1-3x)^{1/2} = (t^6)^{1/2} = t^3 \\ (1-3x)^{2/3} = (t^6)^{2/3} = t^4 \end{array} \right\} = \int \frac{-2t^5 dt}{t^3 - t^4} = \\ &= 2 \int \frac{-t^3 \cdot t^2 dt}{t^3(1-t)} = 2 \int \frac{-t^2 dt}{1-t} = 2 \int \frac{1-t^2-1}{1-t} dt = 2 \left[\int \frac{1-t^2}{1-t} dt + \int \frac{-1}{1-t} dt \right] = \\ &= 2 \left[\int \frac{(1-\cancel{t})(1+t)}{\cancel{1-t}} dt + \int \frac{-1}{1-t} dt \right] = 2 \left[\int 1+t dt + \int \frac{-1}{1-t} dt \right] = \\ &= 2 \left[t + \frac{t^2}{2} + \ln|1-t| \right] = 2t + t^2 + 2\ln|1-t| = 2t + t^2 + \ln(1-t)^2 = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ 1-3x = t^6 \rightarrow t = \sqrt[6]{1-3x} \end{array} \right\} = 2\sqrt[6]{1-3x} + \left(\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 + \ln\left(1-\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 = \\ &= \boxed{2\sqrt[6]{1-3x} + \sqrt[3]{1-3x} + \ln\left(1-\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 + K} \end{aligned}$$

b) La matriz A tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -2 \neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo existe la inversa de la matriz A.

Comprobamos de la misma forma si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$|A^{-1} \cdot B| = \left\{ \begin{array}{l} \text{Propiedad de los determinantes} \\ |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \end{array} \right\} = |A^{-1}| \cdot |B| = |A^{-1}| \cdot 0 = 0$$

Al ser nulo el determinante de $A^{-1} \cdot B$ esta matriz no tiene inversa.

6. a) [1 punto] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{x^2}.$$

b) [1.5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{5x} + \frac{1}{5x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x \cdot \frac{x^2}{5x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} \right)^{\frac{x^2}{5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} \right)^{\frac{x}{5}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5}} = e^{+\infty} = \{e > 1\} = \boxed{+\infty} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x} \right)^{x^2} = 1^{+\infty} = \text{Indeterminación} (n^{\circ} e) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{5x+1}{5x} - 1 \right)} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{5x+1}{5x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{5x+1-5x}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5} = \frac{+\infty}{5} = +\infty$$

$$\dots = e^{+\infty} = \{e > 1\} = \boxed{+\infty}$$

b) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$ es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 2, 0) \\ \vec{v} = (0, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 0 + 0 + 0 + 2j = -2i + 2j = (-2, 2, 0)$$

Tenemos que hallar la ecuación de una recta r que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v}_r = (-2, 2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2, 2, 0) \\ A(2, 1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.
- b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reposición y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.
- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 6x + 1 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6} = \begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \approx -0.18 \\ x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \approx -1.82 \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 6\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + 6 = -2\sqrt{3} < 0 \rightarrow x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ es máximo} \\ f''\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 6\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + 6 = 2\sqrt{3} > 0 \rightarrow x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ es mínimo} \end{cases}$$

La función presenta un máximo en $x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ y un mínimo en $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Las posibles extracciones de la urna son:

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Todas estas extracciones son igual de probables. La probabilidad de una de ellas es 1/12.

b.1) La suma es 3 sacando 12 o 21.

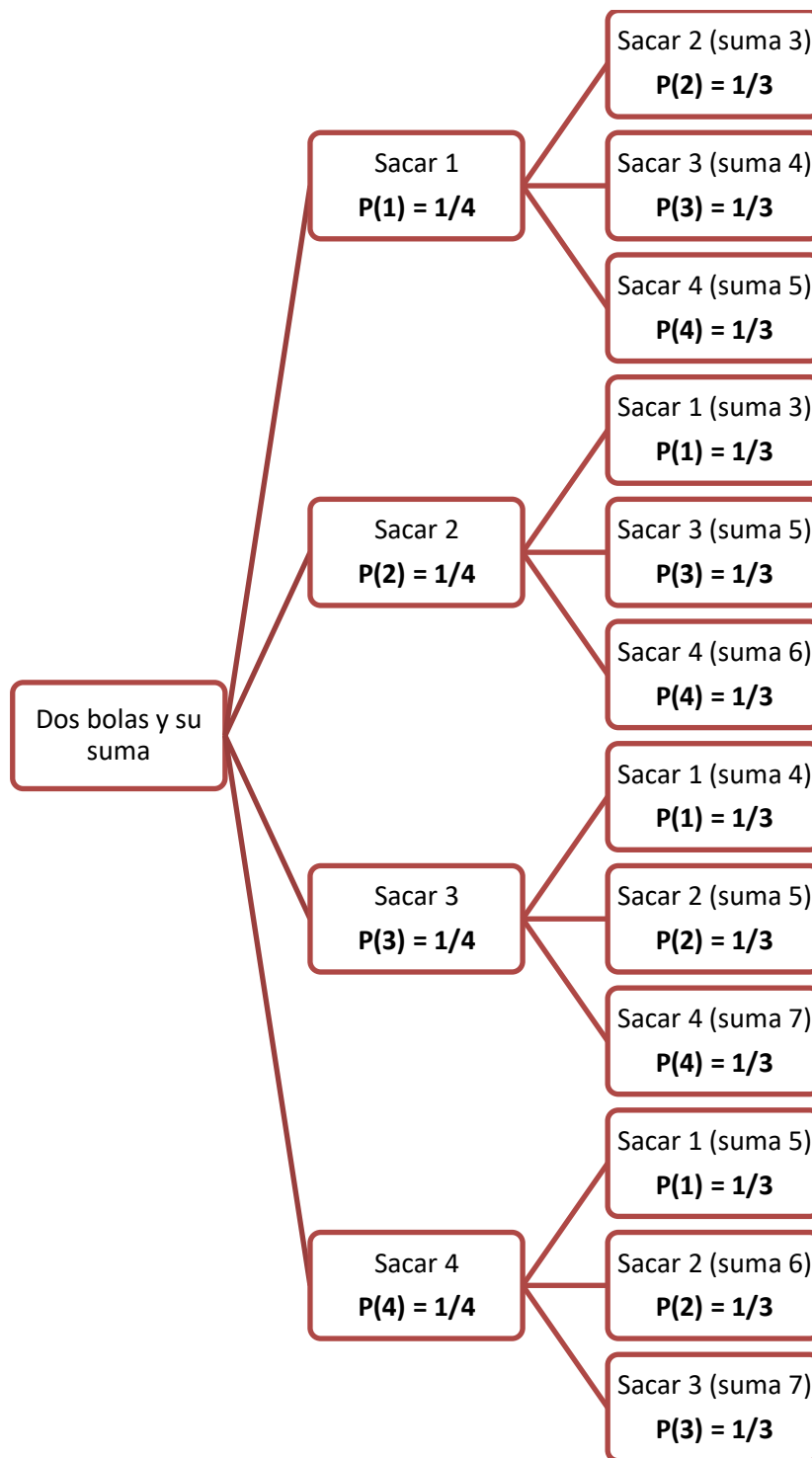
$$P(\text{Suma } 3) = P(12, 21) = \{\text{Re gla de Laplace}\} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.16667}$$

b.2) La suma mayor de 3 se consigue de 10 formas distintas, sacando 13, 14, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 o 43.

$$P(\text{Sacar más de } 3) = \frac{10}{12} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Realizamos un diagrama de árbol.



b.1) La suma es 3 sacando 12 o 21.

$$P(\text{Suma } 3) = P(12) + P(21) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.16667}$$

b.2) La suma mayor de 3 se consigue de muchas formas. Calculamos su probabilidad usando el suceso contrario. El suceso contrario es “sacar 3 o menos”, es decir, “sacar 3”.

$$P(\text{Sacar más de } 3) = 1 - P(\text{Sacar } 3) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333}$$

8. a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3 . El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

a) La matriz A es de dimensiones 3×4 por lo que tiene rango 3, 2 o 1.

Observamos que la columna 2ª y la 4ª son iguales por lo que el rango de la matriz A es el mismo

que el de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de la matriz anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 2 - 0 - 2 = 0$$

Como el determinante es nulo el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y las columnas 3ª y 4ª de la matriz A. Calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El determinante es no nulo y por lo tanto el rango de A es 2.

OTRA FORMA DE HACERLO

Triangulamos la matriz usando el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la fila tercera es nula el rango de A es 2.

b) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv y + 2z = 1 \\ \pi_3 \equiv 2x + y = 1 \end{array} \right\}$$

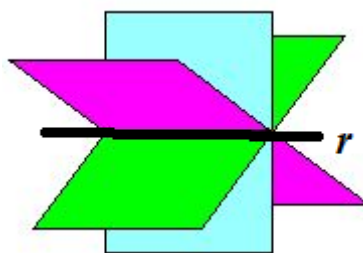
Este sistema tiene como matriz ampliada asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ del apartado

anterior.

En la triangulación hecha en el apartado anterior tenemos que este sistema es equivalente al sistema

asociado a la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$. Este sistema tiene infinitas

soluciones y por tanto los tres planos coinciden en una recta.



Resolvemos el sistema y obtenemos la ecuación de la recta.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow x + 1 - 2z + z = 1 \Rightarrow x = z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

La recta r está contenida en el plano π_3 .

EvAU Extraordinaria 2022



Evaluación para el Acceso a la Universidad

Curso 2021/2022

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a + 1 \\ ax + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

- b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

2. a) [1,5 puntos] Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \rightarrow +\infty$.

- b) [1 puntos] Resuelve la integral:

$$\int x \cdot \cos(2x) dx$$

3. a) [1,5 puntos] Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = (2e^{x^2-4} - 8x + 14) / (x^2 - 2x).$$

- b) [1 punto] Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

- a) [1,5 puntos] Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A . ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?
- b) [1 punto] Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A , es decir, el punto simétrico de A con respecto a π .

5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B .

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

b) **[1 punto]** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = (2e^x - 8x - 3) / (x^2 + 2)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

7. a) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X , A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

n	p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

8. a) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

SOLUCIONES

1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a + 1 \\ ax + \quad + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3a - 0 - 4a - 1 = -a + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Existen dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + \quad + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + \quad + z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x \quad + z = 0 \\ -x \quad -2y \quad -3z = -2 \\ \hline -2y \quad -2z = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + y + 2z = 1 \\ -x - 2y - 3z = -2 \\ \hline -y - z = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ -2y - 2z = -2 \Rightarrow \\ -y - z = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{-2} \text{Ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \Rightarrow \\ -y - z = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ -y - z = 1 \\ y + z = -1 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

- b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y las soluciones las obtenemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ \boxed{y = 1 - z} \end{array} \right. \Rightarrow x + 2 - 2z + 3z = 2 \Rightarrow \boxed{x = -z}$$

Las soluciones son $x = -t$; $y = 1 - t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

2. a) [1,5 puntos] Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \rightarrow +\infty$.

b) [1 puntos] Resuelve la integral:

$$\int x \cdot \cos(2x) dx$$

a) Para que la función sea discontinua en $x = 1$ debe de anularse el denominador.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+1}{2x+b} \\ \cancel{f(1)} &= \frac{a+1}{2+b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

La función queda $f(x) = \frac{ax+1}{2x-2}$.

Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow +\infty$ y lo igualamos a 2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+1}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{a+0}{2-0} = \frac{a}{2} \left\{ \begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a=4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{aligned} \right.$$

Los valores buscados son $b = -2$ y $a = 4$.

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x \cdot \cos(2x) dx = \left\{ \begin{aligned} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(2x) dx \rightarrow v = \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \end{aligned} \right\} =$$

$$= x \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) - \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) dx =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} (-\cos(2x)) = \boxed{\frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + K}$$

3. a) [1,5 puntos] Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = (2e^{x^2-4} - 8x + 14) / (x^2 - 2x).$$

b) [1 punto] Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

a) La función es continua en todos los números reales salvo los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

Calculamos el límite de la función cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \frac{2e^{0^2-4} - 0 + 14}{0^2 - 0} = \frac{2e^{-4} + 14}{0} = \infty$$

En $x = 0$ hay una discontinuidad de salto infinito.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x} = \frac{2e^{2^2-4} - 16 + 14}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot 2xe^{x^2-4} - 8}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4xe^{x^2-4} - 8}{2x - 2} = \frac{8e^{2^2-4} - 8}{4 - 2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. En $x = 0$ la discontinuidad es de salto infinito y en $x = 2$ la discontinuidad es evitable.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{cases} \text{Separo el determinante en suma de dos determinantes.} \\ \text{Por los términos de la 2ª fila} \end{cases} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante es nulo pues la 1ª y la 2ª fila} \\ \text{tienen los términos proporcionales} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común "2" en la 3ª fila} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos la fila 1ª y 3ª} \\ \text{El determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = \boxed{-4}$$

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A . ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?
- b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A , es decir, el punto simétrico de A con respecto a π .

a) La recta r perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z = 8 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

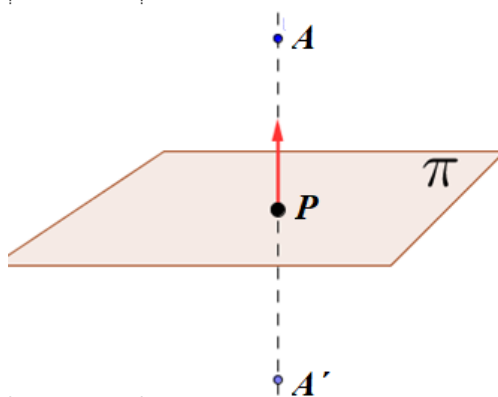
$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, 1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Averiguamos las coordenadas del punto P de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 8 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda = 8 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(3, 2, 3)}$$

El punto de corte es $P(3, 2, 3)$

b) Nos piden hallar el punto A' simétrico de A respecto del plano π .



Como tenemos las coordenadas del punto $P(3, 2, 3)$ las coordenadas del punto A' será el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3, 2, 3) \\ A(1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (3, 2, 3) - (1, 0, 1) = (2, 2, 2)$$

$$A' = P + \overrightarrow{AP} = (3, 2, 3) + (2, 2, 2) = (5, 4, 5)$$

Las coordenadas del punto simétrico de A respecto del plano π son $A' = (5, 4, 5)$.

5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contenga a A y B .

b) **[1,5 puntos]** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

a) El plano π' que contiene a los puntos A y B tiene como uno de sus vectores directores el vector $\overrightarrow{AB}$. El plano π' perpendicular al plano π tiene como otro de sus vectores directores el vector normal del plano π .

$$\pi \equiv x - 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -3, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 0, -1) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, -3, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, 0, -1) = (1, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

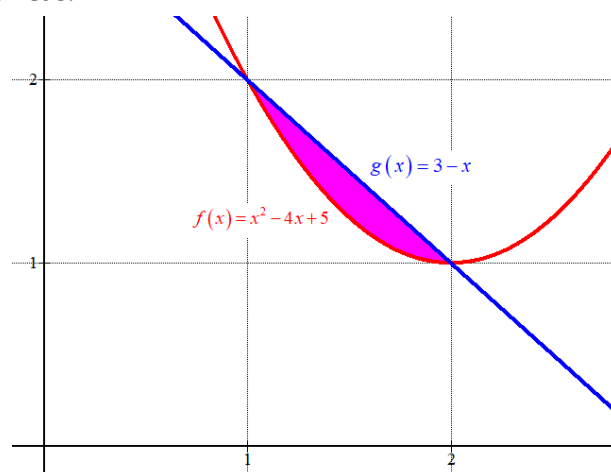
$$\Rightarrow -6x + y + z + 1 + 3z + 3 - 2y - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -7x - y + 4z + 4 = 0}$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de sus gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 3 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{3+1}{2} = \boxed{2=x} \end{cases}$$



El área de la región limitada por las gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^2 f(x) - g(x) dx = \int_1^2 x^2 - 4x + 5 - (3 - x) dx = \int_1^2 x^2 - 3x + 2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 4 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 2 \right] =$$

$$= \frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = \boxed{-\frac{1}{6}}$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{1}{6} \right| = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.167 u^2}$$

6. a) [1,5 puntos] Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.
- b) [1 punto] Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x) = (2e^x - 8x - 3)/(x^2 + 2)$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

- a) El volumen del tetraedro es el valor absoluto de la sexta parte del producto mixto $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0) - (1, 3, 0) = (-1, -2, 0) \\ \overrightarrow{BD} = (1, 1, 1) - (1, 3, 0) = (0, -2, 1) \\ \overrightarrow{BA} = (a, 0, 1) - (1, 3, 0) = (a-1, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ a-1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a + 2 - 3 = -2a + 1$$

$$\text{Volumen } ABCD = \left| \frac{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}]}{6} \right| = \left| \frac{-2a+1}{6} \right| \Rightarrow \left| \frac{-2a+1}{6} \right| = 1 \Rightarrow \text{Volumen } ABCD = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+1=6 \Rightarrow -2a=5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2} \\ -2a+1=-6 \Rightarrow -2a=-7 \Rightarrow a = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-5}{2}$ y $a = \frac{7}{2}$.

- b) El teorema de Bolzano dice lo siguiente:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ toman valores de signo contrario, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2 + 2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser cociente de funciones continuas con un denominador que nunca se anula.

Para poder aplicar el teorema de Bolzano bastaría con encontrar un intervalo cerrado en el que la función tome valores de signo contrario en los extremos del intervalo.

Por ejemplo, podríamos tomar el intervalo $[0, 5]$ (aunque existen otros que nos servirían igualmente) ya que $f(0) = \frac{2e^0 - 0 - 3}{0^2 + 2} = \frac{-1}{2} < 0$ y $f(5) = \frac{2e^5 - 40 - 3}{5^2 + 2} \simeq 9.4 > 0$.

Por tanto, aplicando el teorema del Bolzano podemos afirmar que existe un $c \in [0, 5]$ tal que $f(c) = 0$ y que, por tanto, la función $f(x)$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

7. a) **[1,5 puntos]** Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X , A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X + B = X \Rightarrow A \cdot X - X = -B \Rightarrow X - AX = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I - A)X = B \Rightarrow \{\text{Si } I - A \text{ es invertible}\} \Rightarrow \boxed{X = (I - A)^{-1} B}$$

Comprobamos que $I - A$ tiene inversa y la calculamos.

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |I - A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Existe la inversa de } I - A.$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(I - A)^T}{|I - A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X .

$$X = (I - A)^{-1} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2-1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) Es un experimento donde Ganas o No ganas y las repeticiones se suponen independientes por lo que la variable que cuenta el número de victorias es una binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 0.6$, X = Número de victorias en 4 carreras. $X = B(4, 0.6)$

Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

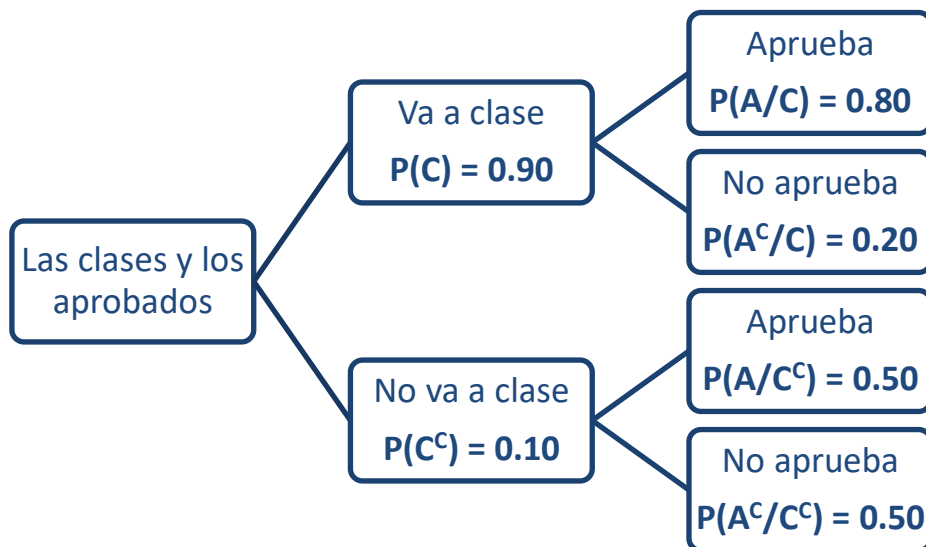
$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \{\text{Miramos en la tabla}\} =$$

$$= 0.3456 + 0.3456 + 0.1296 = \boxed{0.8208}$$

n \ k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
4 \ 0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081
4 \ 1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0529
4 \ 2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2049
4 \ 3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4081
4 \ 4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401

8. a) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.
- a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?
- a.2) [0,75 puntos] Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?
- b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.
- b.1) [0,5 puntos] ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?
- b.2) [0,75 puntos] ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

- a) Llamamos C = "El alumno va a clase", A = "El alumno aprueba". Realizamos un diagrama de árbol.



- a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(C)P(A/C) + P(C^c)P(A/C^c) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.5 = \boxed{0.77}$$

- a.2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C^c/A^c) = \frac{P(C^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(C^c)P(A^c/C^c)}{1 - P(A)} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{1 - 0.77} = \frac{5}{23} \approx 0.2174$$

- b) Sea X = Cantidad de agua en una botella (en ml). $X = N(150, 5)$

- b.1) Nos piden $P(X > 152)$.

$$P(X > 152) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 150}{5} > \frac{152 - 150}{5}\right) = P(Z > 0.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.4) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$

a	0.00	0.01
0.10	0.5398	0.5438
0.20	0.5793	0.5832
0.30	0.6179	0.6217
0.40	0.6554	0.6591
0.50	0.6915	0.6950

- b.2) Nos piden calcular $P(149 < X < 152)$.

$$P(149 < X < 152) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{149 - 150}{5} < \frac{X - 150}{5} < \frac{152 - 150}{5}\right) =$$

$$= P(-0.2 < Z < 0.4) = P(Z < 0.4) - P(Z < -0.2) = P(Z < 0.4) - P(Z > 0.2) =$$

$$= P(Z < 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.2)] = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.6554 - [1 - 0.5793] = \boxed{0.2347}$$

a	0.00	0.01
0.10	0.5398	0.5438
0.20	0.5793	0.5832
0.30	0.6179	0.6217
0.40	0.6554	0.6591
0.50	0.6915	0.6950

a	0.00	0.01
0.10	0.5398	0.5438
0.20	0.5793	0.5832
0.30	0.6179	0.6217
0.40	0.6554	0.6591
0.50	0.6915	0.6950



EvAU Ordinaria 2022

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) [1,5 puntos] Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) [1 punto] ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

2. a) [1,5 puntos] Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

- b) [1 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

3. a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

- a.1) [0,5 puntos] ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

- a.2) [1,25 punto] Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

- b) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$$

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$

- a) [1,5 puntos] Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a .

- b) [1 punto] Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r .

5. a) [1 punto] Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

- b) [1,5 puntos] Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m . Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.
7. a) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0, 0, 1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juego Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?
- b.2) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?
8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?
- a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?
- b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

SOLUCIONES

1. a) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si conmuta con A debe cumplirse:

$$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2a + b \\ 2b = -b \\ a - c = 2c + d \\ b - d = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b \\ 3b = 0 \\ a = 3c + d \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3c + d \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3c + d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

b) Como $X = \begin{pmatrix} 3c + d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ es simétrica debe ser $c = 0$.

La matriz queda $X = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

El determinante debe ser 4, luego $|X| = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = \sqrt{4} = \pm 2$.

Existen dos matrices que cumplen lo pedido: $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) [1,5 puntos] Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) [1 puntos] Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

a) Llamamos “x” al precio de un lápiz, “y” al precio de un cuaderno y “z” al precio de una agenda.

“Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros” $\rightarrow 3x + y + z = 5$

“Dos cuadernos y una agenda han costado 5 euros” $\rightarrow 2y + z = 5$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ z = 5 - 2y \end{cases} \Rightarrow 3x + y + 5 - 2y = 5 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 5 - 2(3x) = 5 - 6x \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} y = 3x \\ z = 5 - 6x \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones en función del precio de un lápiz (x).

Si ponemos el sistema en céntimos quedaría $\begin{cases} 3x + y + z = 500 \\ 2y + z = 500 \end{cases}$ la solución es $\begin{cases} y = 3x \\ z = 500 - 6x \end{cases}$

Si todos son múltiplos de 50 tenemos que $x = 50a$, $y = 50b$, $z = 50c$.

Las soluciones quedarían:

$$\begin{cases} x = 50a \\ y = 50b = 3(50a) \Rightarrow b = 3a \\ z = 50c = 500 - 6(50a) \rightarrow 50c = 500 - 300a \Rightarrow c = 10 - 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50a \\ y = 50b; b = 3a \\ z = 50c; c = 10 - 6a \end{cases}$$

Como a , b y c son números naturales pues son el número de monedas de 50 céntimos del precio de cada artículo. Veamos que ocurre dando valores crecientes, empezando por 1 (no puede ser 0 pues nada es gratis).

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ b = 3 \rightarrow y = 150 \\ c = 10 - 6 = 4 \rightarrow z = 200 \end{cases}$$

Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ b = 6 \rightarrow y = 300 \\ c = 10 - 12 = -2 \rightarrow \text{¡Imposible! El número de monedas no puede ser negativo} \end{cases}$$

La única solución es: Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

b) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} &= 1^{+\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x \cdot \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \\&= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2}} = e^{1+0} = \boxed{e}\end{aligned}$$

3. a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a.1) [0,5 puntos] ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) [1,25 punto] Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) [1 punto] Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$$

a)

a.1) Hallamos los puntos de corte de la curva con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a - x^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Para que la solución sea doble el valor de a debe ser positivo ($a > 0$)

a.2) El área del recinto es la integral definida de $f(x) = a - x^2$ entre $x = -\sqrt{a}$ y $x = +\sqrt{a}$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} a - x^2 dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} = \left[a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right] - \left[a(-\sqrt{a}) - \frac{(-\sqrt{a})^3}{3} \right] = \\ &= \sqrt{a^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} + \sqrt{a^3} - \frac{1}{3}\sqrt{a^3} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{a^3}} \end{aligned}$$

$$\text{Como debe valer 36 tenemos que } \frac{4}{3}\sqrt{a^3} = 36 \Rightarrow \sqrt{a^3} = \frac{108}{4} = 27 \Rightarrow a^3 = 27^2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{729} = 9$$

El valor buscado es $a = 9$.

b) Calculamos la integral usando el cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} dx &= 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{1+3x^2} = t \rightarrow \frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}} dx = dt \\ \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}} dx = dt \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\} = \\ &= 2 \int \frac{1}{3} dt = \frac{2}{3} \int dt = \frac{2}{3} t = \boxed{\frac{2}{3} \sqrt{1+3x^2} + K} \end{aligned}$$

4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a .

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r .

Obtenemos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,0,a) \\ \vec{u}_r = (2,-1,0) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(-1,0,0) \\ \vec{v}_s = (0,1,-5) \end{cases}$$

a) Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que ambas rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,-1,0) \\ \vec{v}_s = (0,1,-5) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-5}$$

Las dos rectas se cruzan o cortan. La posición relativa depende del valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_rQ_s} &= (-1,0,0) - (0,0,a) = (-1,0,-a) \\ \left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,-1,0) \\ \vec{v}_s = (0,1,-5) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,0,-a) \end{array} \right\} &\Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a - 5 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2a - 5 \end{aligned}$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0 \Rightarrow -2a - 5 = 0 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{2}}$$

Si $a = -\frac{5}{2}$ entonces $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = 0$ y las rectas se cortan.

Si $a \neq -\frac{5}{2}$ entonces $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] \neq 0$ y las rectas se cruzan.

b) El plano que contenga a s y que sea paralelo a r tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Y como contiene a la recta s contiene el punto Q_s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2,-1,0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (0,1,-5) \\ Q_s(-1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 5 + 0 + 2z - 0 + 10y + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi : 5x + 10y + 2z + 5 = 0}$$

5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

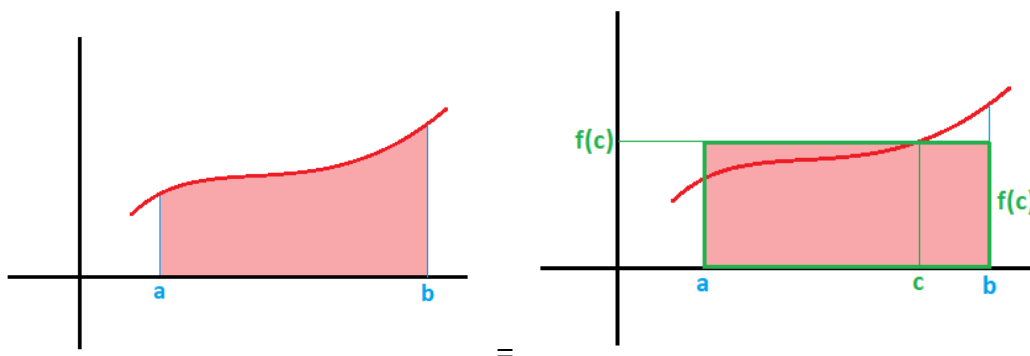
b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

a) Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$r: \begin{cases} \pi_1 \equiv x = y + 1 \\ \pi_2 \equiv y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = 5 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5 - 2z \\ y = 5 - 2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 2z \\ y = 5 - 2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe al menos un punto c , dentro de ese intervalo que cumple lo siguiente:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = (b-a) \cdot f(c)$$



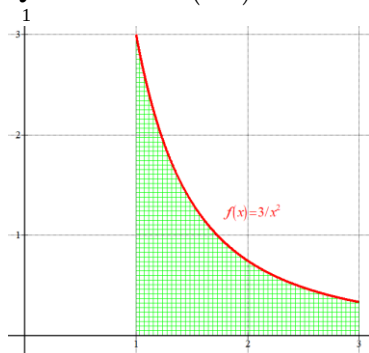
La función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$ es continua y podemos aplicarle el teorema.

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 3/x^2 dx = \int_1^3 3 \cdot x^{-2} dx = \left[3 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 = \left[-\frac{3}{x} \right]_1^3 = -\frac{3}{3} - \left(-\frac{3}{1} \right) = -1 + 3 = 2$$

Busquemos el punto $c \in [1, 3]$ tal que

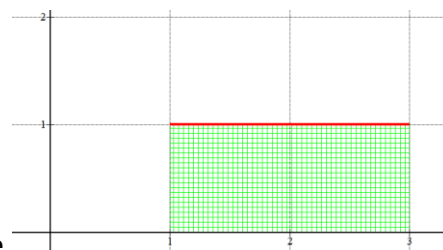
$$(3-1) f(c) = 2 \Rightarrow 2 f(c) = 2 \Rightarrow f(c) = 1 \Rightarrow \frac{3}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{3} \in [1, 3]}$$

Se cumple $\int_1^3 3/x^2 dx = f(\sqrt{3})(3-1)$



El área de

es igual que el área de



6. a) [1,5 puntos] Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) [1 punto] Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m . Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

a) La matriz M tiene dimensiones 3×4 . El rango de la matriz es 3 o menor.

Aplicamos Gauss para obtener una matriz equivalente a la inicial (con el mismo rango) pero triangular.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad m \\ -2 \quad -m \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1-m \quad 0 \quad m-1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 1 \quad m \quad 2 \\ -4 \quad -2m \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1-2m \quad m \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 0 & 1-m & 0 & m-1 \\ 0 & 1-2m & m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\{ \text{Columna } 3^a \leftrightarrow \text{Columna } 2^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

En la diagonal principal están m y $m-1$. Que se anulan cuando $m = 0$ o $m = 1$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ la matriz M tiene rango 3 pues todos los elementos de la diagonal principal de la matriz equivalente a M son no nulos.

Si $m = 0$ la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que también tiene rango 3 pues hay tres filas no nulas.

Si $m = 1$ la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2 pues hay dos filas no nulas.

Conclusión La matriz M tiene rango 2 si $m = 1$ y rango 3 si $m \neq 1$

b) Con las ecuaciones de los tres planos se forma el sistema: $\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x + my = 1 \\ \pi_2 \equiv 2x + y = m \\ \pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2 \end{array} \right\}$.

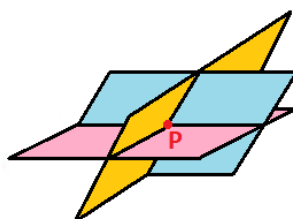
La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$ Y la ampliada es $A/B = M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$

Veamos cuando se anula el determinante de A.

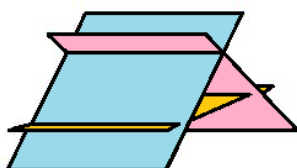
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 2m^2 = 2m(1-m)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución. Esta solución es el punto de intersección de los tres planos. Los planos son coincidentes en un punto.



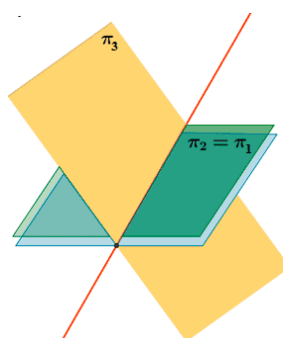
Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Como hemos visto en el apartado a) que el rango de $A/B = M$ es 3 el sistema no tiene solución. Los planos no coinciden.



Si $m = 1$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su

rango es 2 (fila 1ª y 2ª iguales, pero diferentes a la 3ª).

Como hemos visto en el apartado a) que el rango de $A/B = M$ es 2. El rango de A y de A/B son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones. Los planos se cortan en una recta. Los planos 1º y 2º son coincidentes y se cortan con el tercero en una recta.



7. a) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?
- b.2) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

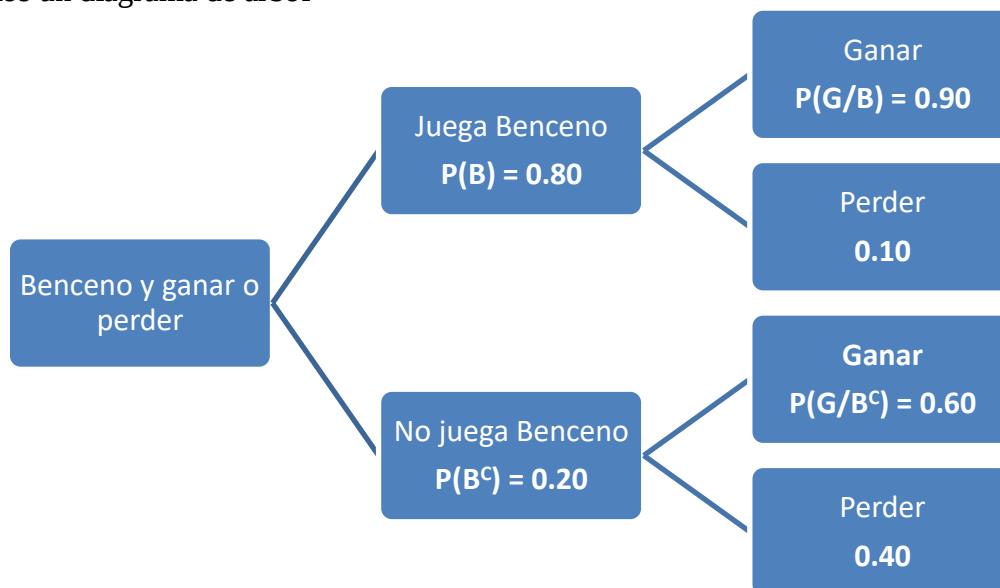
a) Calculamos el producto vectorial y hallamos la ecuación del plano.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k - j = i - k = (1, 0, -1)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, -1) \\ A(0, 0, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} \pi : x - z + D = 0 \\ A(0, 0, 1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1$$

$$\boxed{\pi : x - z + 1 = 0}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol



$$b.1) P(G) = P(B) \cdot P(G/B) + P(\bar{B}) \cdot P(G/\bar{B}) = 0.80 \cdot 0.90 + 0.20 \cdot 0.60 = \boxed{0.84}$$

b.2) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \cdot P(G/B)}{P(G)} = \frac{0.80 \cdot 0.90}{0.84} = \boxed{\frac{6}{7} \approx 0.857}$$

8. a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a) X = Número de niños con intolerancia alimentaria de un grupo de 4. $n = 4$.

$$p = 1/5 = 0.2. q = 0.8. X = B(4, 0.2)$$

$$a.1) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2^0 \cdot 0.8^4 = 1 - 0.8^4 = \boxed{0.5904}$$

a.2) Hemos calculado la probabilidad de que al menos un niño de una mesa de 4 tenga intolerancia alimentaria que se traduce en la probabilidad de que le pongan pan sin gluten a esa mesa.

Y = Número de mesas donde se sirve pan sin gluten de un total de 8. $n = 8$. $p = 0.5904$,
 $q = 1 - 0.5904 = 0.4096$. $Y = B(8, 0.5904)$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{8}{0} 0.5904^0 \cdot 0.4096^8 = 1 - 0.4096^8 = \boxed{0.9992}$$

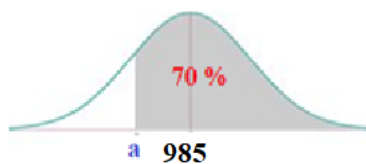
b) X = Peso de un paquete de arroz de 1 kg. $X = N(985, 25)$

b.1) Calculamos la probabilidad de que un paquete pese más de 1000 gramos.

$$P(X > 1000) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 985}{25} \end{array} \right\} = P\left(\frac{X - 985}{25} > \frac{1000 - 985}{25}\right) = P(Z > 0.6) =$$

$$= 1 - P(Z < 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

Pesarán más de 1 kg el 27.43 % de los paquetes.



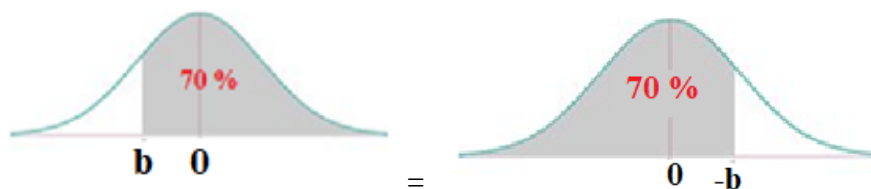
b.2) Nos piden averiguar “a” tal que

$$P(X > a) = 0.7 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 985}{25}\right) = 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a - 985}{25}\right) = 0.7 \Rightarrow \{ \text{Buscamos en la tabla} \} \Rightarrow -\frac{a - 985}{25} = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a = -985 + 25 \cdot 0.525 = -971.875 \Rightarrow \boxed{a = 971.875}$$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389



Por encima de 0.971 kg están el 70 % de los paquetes.



EvAU Extraordinaria 2021

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x \quad \quad + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.3. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x) dx$.b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$ 4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$ a) [1 punto] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.b) [1,5 puntos] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .5. a) Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1}$.

b) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

6. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
- b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.
- b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x \sin(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.
8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20% de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60% de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90% de pacientes leves y un 10% de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:
- a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
- a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?
- b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.
- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

a) Comprobamos que existe la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 1 - 3 = -2 \neq 0 \text{ Existe la inversa de A. La calculamos}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Como existe la inversa de A despejamos X en la ecuación matricial $AX + 3I = A$

$$AX + 3I = A \Rightarrow AX = A - 3I \Rightarrow X = A^{-1}(A - 3I) = A^{-1}A - 3A^{-1} \Rightarrow X = I - 3A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 1 + 9/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & 1 - 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x \quad \quad + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + a^2 + 2 - 0 - a - 2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz A/B en una matriz triangular equivalente para establecer el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio Fila } 2^a \\ \text{con Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz A/B en una matriz triangular equivalente y establecer el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Nueva Fila 2^a Nueva Fila 3^a

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 2. Son iguales los rangos, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos para $a = 2$ que, por lo visto, es un sistema con una única solución.

El sistema queda
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Obtenemos la solución con el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 2 = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 4 - 4 - 4}{2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 4 + 3 - 4 - 2 - 3}{2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8 + 4 - 6 - 4}{2} = 1$$

La solución es $x = 1, y = 0, z = 1$.

3. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x) dx$.

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2 + 1}$

a)

$$\int x \cdot \cos(3x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = 3x \rightarrow dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \\ x = \frac{t}{3} \end{array} \right\} = \int \frac{t}{3} \cdot \cos(t) \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int t \cos(t) dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \cos(t) \rightarrow v = \int \cos(t) dt = \sin(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{9} \left[t \cdot \sin(t) - \int \sin(t) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{9} \left[t \cdot \sin(t) - (-\cos(t)) \right] = \frac{1}{9} \left[t \cdot \sin(t) + \cos(t) \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio} \\ t = 3x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9} \left[3x \cdot \sin(3x) + \cos(3x) \right] + K = \boxed{\frac{x}{3} \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + K}$$

b)

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{2}x = t \\ \sqrt{2}dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ \sqrt{2}x = t \end{array} \right\} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x) + K}$$

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$

- a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
 b) **[1,5 puntos]** Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .

- a) Para que los planos sean perpendiculares sus vectores normales deben formar un ángulo de 90° , por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3 \Rightarrow \vec{n}_1 = (a, 1, 2) \\ \pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, a) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (a, 1, 2) \cdot (2, -1, a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 1 + 2a = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

- b) Para $a = 1$ el plano π_1 queda $\pi_1 \equiv x + y + 2z = 3$. Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0 \\ P(2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi_1) = \frac{|2 + 0 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408 u}$$

5. a) Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \frac{1-1}{e^{1-1}-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^{1-1}} = \boxed{1}$$

b) Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

Para ser continua debe cumplirse $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{0-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

En $x = 0$ la función es discontinua inevitable de salto finito.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

Para ser continua debe cumplirse $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

En $x = 2$ la función es discontinua inevitable de salto finito.

6. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3}$.

- a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
 b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$:

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2}{3x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x + 2)(3x^2 + 3) - 6x(2x^2 + 2x - 2)}{(3x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{12x^3} + 12x + 6x^2 + 6 - \cancel{12x^3} - 12x^2 + 12x}{(3x^2 + 3)^2} = \frac{-6x^2 + 24x + 6}{(3x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x^2 + 24x + 6}{(3x^2 + 3)^2} = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} 2 + \sqrt{5} \\ 0 \\ 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, 2 - \sqrt{5})$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

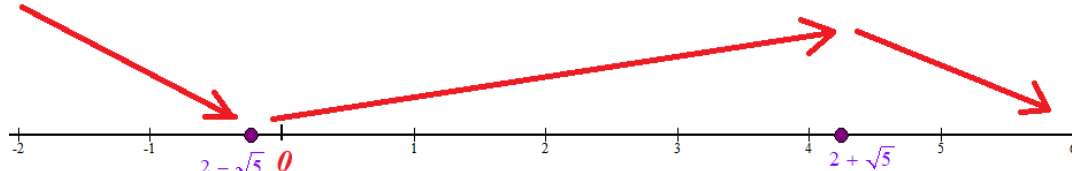
$$f'(-1) = \frac{-6(-1)^2 + 24(-1) + 6}{(3(-1)^2 + 3)^2} = \frac{-24}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 2 - \sqrt{5})$$

- En $(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0 + 0 + 6}{(0 + 3)^2} = \frac{6}{9} > 0$. La función crece en $(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$

- En $(2 + \sqrt{5}, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-6(10)^2 + 240 + 6}{(3(10)^2 + 3)^2} = \frac{-354}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (2 + \sqrt{5}, +\infty)$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula y sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo en $x = 2 - \sqrt{5}$

Como $f(2 - \sqrt{5}) = \frac{2(2 - \sqrt{5})^2 + 2(2 - \sqrt{5}) - 2}{3(2 - \sqrt{5})^2 + 3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ las coordenadas del punto mínimo

relativo son $\left(2 - \sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

La función presenta un máximo en $x = 2 + \sqrt{5}$

Como $f(2 + \sqrt{5}) = \frac{2(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 2}{3(2 + \sqrt{5})^2 + 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ las coordenadas del punto máximo relativo

son $\left(2 + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

b) En $x = 1$ la recta tangente tiene ecuación $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{2+2-2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ f'(1) &= \frac{-6+24+6}{(3+3)^2} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \\ y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

En $x = 1$ la recta normal tiene ecuación $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} \\ f'(1) &= \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{f'(1)} = \frac{3}{2} \\ y - f(1) &= -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{6}}$$

La recta normal en $x = 1$ tiene ecuación $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{6}$

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.
- b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

a) Debe ser $f(1) = 1$ por lo que $f(1) = 1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{1 = a + b}$.

Además, al tener un punto de inflexión en $x = 1$ la derivada segunda debe anularse en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6a \cdot x + 2b \\ f''(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 1 + 2b \Rightarrow$$

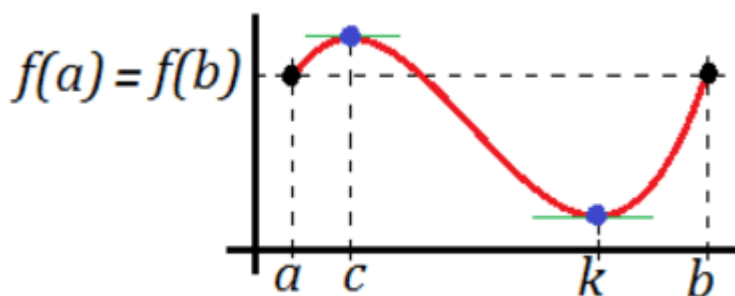
$$\Rightarrow 0 = 6a + 2b \Rightarrow \boxed{3a + b = 0}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 3a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= 1 - a \\ 3a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a + 1 - a = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$.

- b) El teorema de Rolle afirma que si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) si además $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



La función $f(x) = x \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto lo es en el intervalo $[-1, 1]$. También es derivable en $\mathbb{R}$ y lo será en $(-1, 1)$ como se cumple que

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1) \operatorname{sen}(-1) - \cos(-1) = -\operatorname{sen}(-1) - \cos(-1) = 0.3011 \\ f(1) &= \operatorname{sen}(1) - \cos(1) = 0.3011 \\ \operatorname{sen}(-1) &= -\operatorname{sen}(1) = 0.8414 \\ \cos(-1) &= \cos(1) = 0.54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1) = f(1)$$

Aplicando el teorema de Rolle existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. En $x = c$ hay un punto crítico.

Es un extremo relativo, pues la derivada segunda no se anula para $x = c$.

$$f(x) = x \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}(x) + x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 \cos(x) + \cos x - x \operatorname{sen}(x) = 3 \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)$$

$$\text{Como } f'(c) = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}(c) + c \cdot \cos(c) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(c) = -\frac{c \cdot \cos(c)}{2}$$

$$f''(c) = 3 \cos(c) - c \cdot \operatorname{sen}(c) = 3 \cos(c) - c \cdot \left(-\frac{c \cdot \cos(c)}{2} \right) = 3 \cos(c) + \frac{c^2 \cdot \cos(c)}{2}$$

$$f''(c) = \cos(c) \left[3 + \frac{c^2}{2} \right]$$

Esta expresión de $f''(c)$ es positiva, pues $c \in (-1, 1)$ y el coseno siempre es positivo en este intervalo pues el intervalo está contenido en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ y $\left[3 + \frac{c^2}{2} \right]$ es siempre positivo.

8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20% de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60% de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90% de pacientes leves y un 10% de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

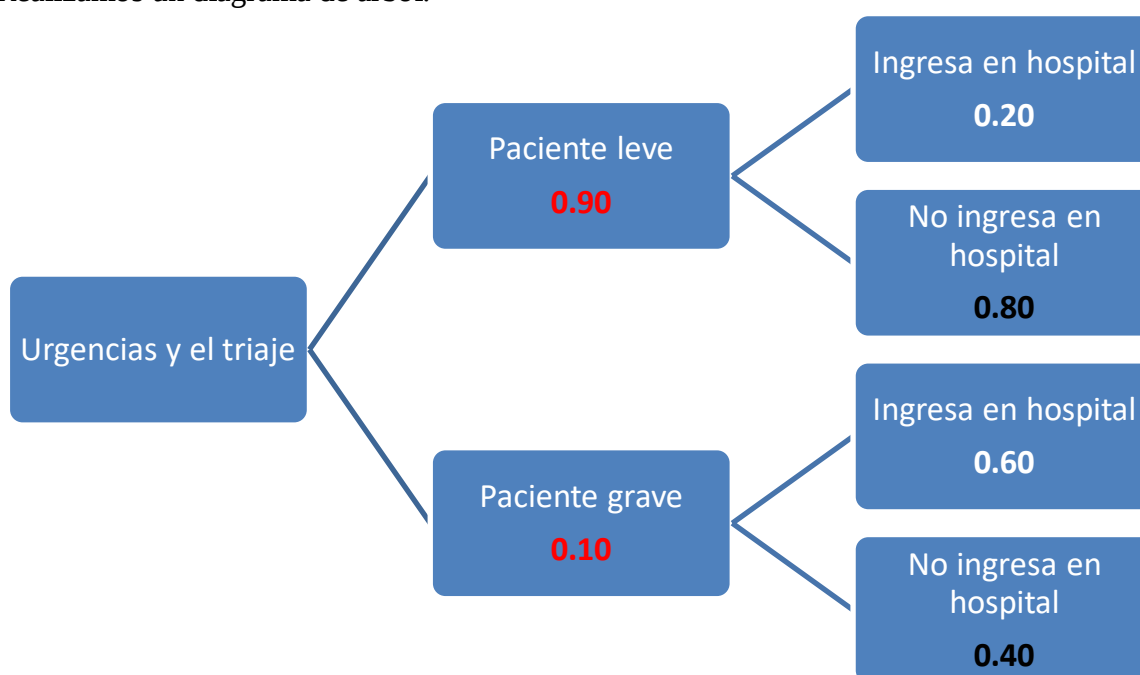
a.2) [0,75 puntos] Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos L = “Ser paciente leve”, $\bar{L}$ = “ser paciente grave”

Llamamos I = “Ingresar en el hospital”. $\bar{I}$ = “No ingresar en hospital”

a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y la información recogida en el diagrama de árbol.

$$P(I) = P(L)P(I/L) + P(\bar{L})P(I/\bar{L}) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.6 = \boxed{0.24}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{P(L)P(I/L)}{P(I)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.24} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de pacientes que se clasifican como leves de 8 que llegan a urgencias.

Número de repeticiones = $n = 8$. Probabilidad de clasificar a un paciente como leve = $p = 0.9$

$X = B(8, 0.9)$

b.1) $P(X = 4) = \{\text{Miramos en la tabla facilitada}\} = \boxed{0.0046}$

b.2) Como la probabilidad directa implica contemplar muchos casos favorables, lo haremos usando el suceso contrario que implica un cálculo más cómodo.

$$P(X \leq 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - P(X = 8) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla facilitada} \end{array} \right\} = 1 - 0.4305 = \boxed{0.5695}$$

n	k \ p									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0014
	4	0.0046	0.0459	0.1261	0.2339	0.2784	0.2339	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305



EvAU Ordinaria 2021

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A .
b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ a \cdot x + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

3. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x} dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$

4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula

razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .
- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .

6. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina

razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

7. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

8. a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de A^T , es decir, la matriz traspuesta de A.
 b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 = 1$$

b) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = |A^T| = 1 \neq 0. \text{ Existe la inversa de A.}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación.

$$X \cdot A + 3 \cdot A = B \Rightarrow (X + 3I) \cdot A = B \Rightarrow X + 3I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} - 3I$$

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1} - 3I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+1 & -1+2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a + 1 \\ a \cdot x + z = a - 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a - a + 1 = 2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3. También será 3 el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a = 1$

En este caso la matriz A/B queda: $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss

para triangular la matriz y estudiar su rango con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)^r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la ampliada es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $a = 0$ el sistema tiene solución única, pues estamos en el caso 1 ya estudiado.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \boxed{z = -1} \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - y - y = 4 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow x = 2 - (-1) = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

La solución es $x = 3, y = -1, z = -1$.

3. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x} dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx$

a)

$$\int \frac{2}{3+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{2}{3+t} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{1}{t(3+t)} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{t(3+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3+t} \Rightarrow \frac{1}{t(3+t)} = \frac{A(3+t) + Bt}{t(3+t)} \Rightarrow 1 = A(3+t) + Bt$$

$$t = 0 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$t = -3 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1/3}{1+t}$$

$$\dots = 2 \left[\int \frac{1/3}{t} dt - \int \frac{1/3}{3+t} dt \right] = \frac{2}{3} [\ln t - \ln(3+t)] =$$

$$= \left\{ \text{Deshacemos el cambio } t = e^x \right\} = \frac{2}{3} \ln e^x - \frac{2}{3} \ln(3+e^x) = \boxed{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \ln(3+e^x) + K}$$

b)

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3} dx = \int \frac{-x}{x^2+3} dx + \int \frac{1}{x^2+3} dx = \boxed{1} + \boxed{2} = \dots$$

$$\boxed{1} = \int \frac{-x}{x^2+3} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+3)$$

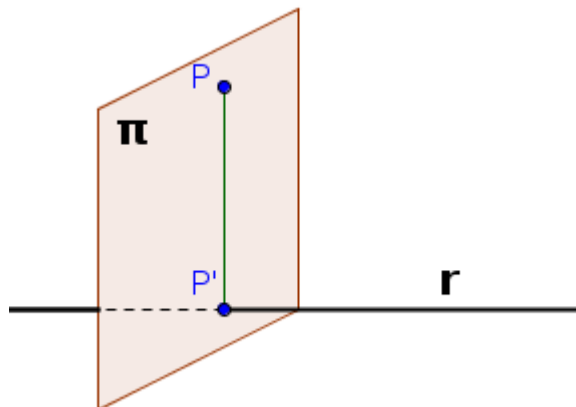
$$\boxed{2} = \int \frac{1}{x^2+3} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido entre 3} \\ \text{numerador y denominador} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{3} + \frac{3}{3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \sqrt{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\dots = \boxed{-\frac{1}{2} \ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K}$$

4. a) [1,25 puntos] Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r .

b) [1,25 puntos] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.



a) Para hallar la distancia de un punto P a la recta r , podemos hacerlo hallando el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P , luego determinamos el punto de corte de recta y plano (P'). La distancia del punto P a la recta r será igual a la distancia del punto P al P' (módulo del vector que une dichos puntos).

Determinamos la ecuación del plano π

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, -1) \left\{ \begin{array}{l} \pi \perp r \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z + D = 0 \\ P(1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

Hallamos el punto P' de corte de recta r y plano π .

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 0 \\ x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + t + t - 1 + t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow P' \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1, 0, 1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Y por último hallamos la distancia de P a la recta r como el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} \approx 1.63u$$

b) Para que dos rectas sean paralelas deben de tener vectores directores de coordenadas proporcionales y que un punto de una de ellas no pertenezca a la otra (no son coincidentes).

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a\lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, -2a, 2) \\ P_s(0, 1, 0) \end{cases} \quad t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t = (a, -1, 1) \\ P_t(1, -1, 2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (2, -2a, 2) \\ \vec{v}_t = (a, -1, 1) \\ s \parallel t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1 \\ \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Son paralelas o coincidentes para $a = 1$.

Comprobamos que para $a = 1$ no sean coincidentes, es decir, la misma recta. Para ello compruebo que el punto P_s no pertenece a la recta t .

$$t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0-1}{1} = \frac{1+1}{-1} = \frac{0-2}{1} ? \Rightarrow -1 = -2 = -2? \\ \text{¿} P_s(0, 1, 0) \in t ? \end{cases}$$

No son ciertas las dos igualdades, solo la segunda. La recta t no pasa por el punto P_s y las rectas son paralelas.

5. Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(1, 1, 2)$.

▪ **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D .

▪ **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C , y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D .

El volumen de un tetraedro es el valor absoluto de la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen uno de sus vértices con los otros 3 vértices.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 1, 0) - (0, 0, 1) = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (1, 1, 1) - (0, 0, 1) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} &= (1, 1, 2) - (0, 0, 1) = (1, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\text{Volumen } ABCD = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{6} = \frac{1}{6} u^3$$

El plano que pasa por A , B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y contiene al punto A .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= (2, 1, 0) - (0, 0, 1) = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} &= (1, 1, 1) - (0, 0, 1) = (1, 1, 0) \\ A(0, 0, 1) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -y + 2(z-1) - (z-1) + x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y + z - 1 = 0}$$

La recta r perpendicular a este plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\pi \equiv x - y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 1) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{v}_r = \vec{n} &= (1, -1, 1) \\ D(1, 1, 2) &\in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}}$$

6. a) [1 punto] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) [1,5 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

a) Si la función pasa por el punto $(1, 2)$ entonces $f(1) = 2$.

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - 2 - 1 + b = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 5}$$

Además, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1 significa que la derivada de la función para $x = 1$ sea 1. $f'(1) = 1$.

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1 \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a - 4 - 1 = 1 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Sustituimos este valor de “a” en la ecuación obtenida antes y tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 5 \\ a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 3$.

b) Para que sea continua en $x = 0$ deben de coincidir el valor de la función y los límites laterales.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = be^0 = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - ax + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} be^x = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases}$

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$$

Al ser derivable en $x = 0$ las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x - a = -a \\ f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1 \\ f'(0^-) = f'(0^+) \end{array} \right\} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 1$.

7. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{2x - 4} = \frac{e^0 - 1}{4 - 4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{e^0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si } x > 3 \end{cases}$ puede presentar problemas de definición cuando el

denominador se anule, en el resto de expresiones no hay problemas. El denominador se anula para $x = 2$. Luego su dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$

En cada tramo de definición es continua. En el primer tramo es un trozo de parábola, después un cociente donde hemos quitado el valor que anula el denominador y el último es una exponencial. Falta ver si es continua en los cambios de definición.

¿ $x = 1$?

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{2-1}{1-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{¡Continua en } x = 1!$$

¿ $x = 3$?

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{6-1}{3-2} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{6-1}{3-2} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2e^x = 2e^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \text{¡No es continua en } x = 3!$$

En $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= 2e^3 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, pues tiene una asíntota en dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

8. a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

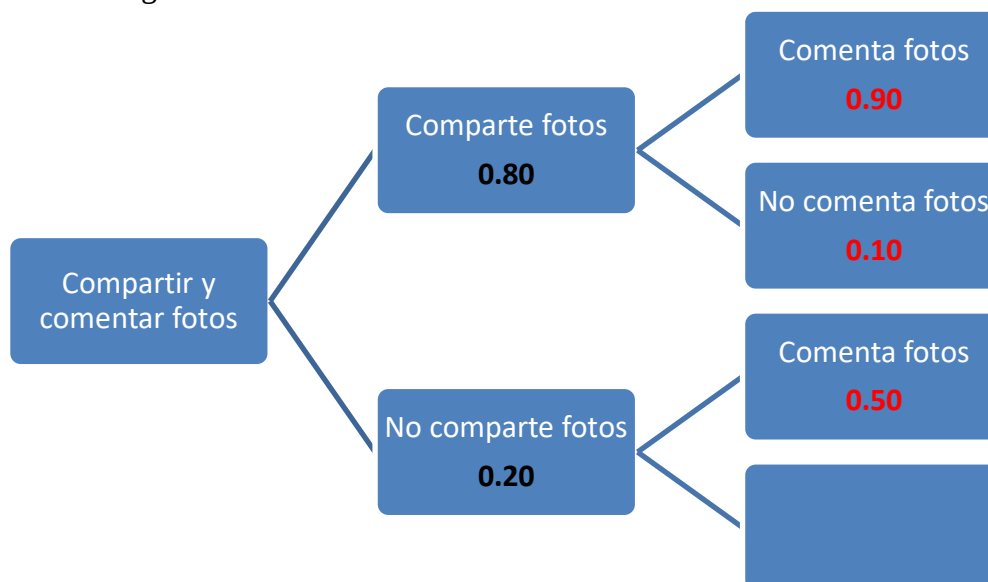
a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

a) Construimos un diagrama de árbol.



a.1) Utilizamos el teorema de la probabilidad total

$$\begin{aligned}
 P(\text{Comenta foto}) &= P(\text{Comparte foto})P(\text{Comenta foto} / \text{Comparte foto}) + \\
 &+ P(\text{No comparte foto})P(\text{Comenta foto} / \text{No comparte foto}) = \\
 &= 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.82}
 \end{aligned}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Comparte foto} / \text{No comenta foto}) &= \frac{P(\text{Comparte foto} \cap \text{No comenta foto})}{P(\text{No comenta foto})} = \\
 &= \frac{P(\text{Comparte foto})P(\text{No comenta foto} / \text{Comparte foto})}{P(\text{No comenta foto})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - 0.82} = \boxed{\frac{4}{9} \approx 0.444}
 \end{aligned}$$

b) X = Número de personas que identifica correctamente de un grupo de 4. X es una binomial con $n = 4$ y $p = 0.8$. $X = B(4, 0.8)$

b.1) Nos piden calcular $P(X = 4) = \{\text{Miro en la tabla}\} = 0.4096$

n	k \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

b.2) Nos piden $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \{\text{Miro en la tabla}\} = \\ = 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 + 0.4096 = \boxed{0.9984}$$

n	k \ P	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

EvAU Extraordinaria 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos, si resuelve más se corregirán sólo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$

b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Donde $\ln$ es el logaritmo, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. a) [1,5 puntos] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x=1$.

5. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

6. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .

b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

8. a) El 70% de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

SOLUCIONES

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz A tiene inversa}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial

$$AX + I_3 = BC \Rightarrow AX = BC - I_3 \Rightarrow X = A^{-1}(BC - I_3)$$

Sustituimos y resolvemos.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1+4 & 1+0 & 1-4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1-2 & 1 & 1+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2-2 & 2-1+2 & -6+2+4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4-1 & 1+1 & -3+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}} = X$$

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 4 + a + a^2 - 2 - 2 = a^2 + 2a - 8$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 = a \\ \frac{-2-6}{2} = -4 = a \end{cases}$$

Existen tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq -4$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). **El sistema es compatible determinado.**

CASO 2. $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

Tiene rango 2, pues tiene el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 3ª

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

La matriz A/B tiene también rango 2 pues la columna 4ª es igual que la 3ª y la 2ª.

El rango de A = Rango de A/B = 2 < número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = -4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A no tiene rango 3, ya que su determinante es nulo.

Tiene el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

La matriz A/B tiene rango 3 pues si quitamos la columna 1ª el menor de orden 3 resultante tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 16 + 16 + 8 + 16 + 8 = 68 \neq 0$$

$$\text{Rango de } A = 2 \neq 3 = \text{Rango de } A/B.$$

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq -4$ el sistema es compatible determinado, si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = -4$ el sistema es incompatible.

- b) Para $a = 2$ estamos en el caso 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ x+2y+2z=2 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Quitamos la ecuación 1}^a \\ \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 2}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=2 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{Despejamos } z \\ y \text{ resolvemos por reducción} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=2-2z \\ -x+y=1-z \end{cases} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{\qquad\qquad\qquad}{3y=3-3z} \Rightarrow \boxed{y=1-z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+2-2z=2-2z \Rightarrow \boxed{x=0} \end{aligned}$$

La solución es $x=0$; $y=1-t$; $z=t$.

3. a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$

b) [1,5 puntos] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Donde $\ln$ es el logaritmo, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(2x) - x}{x \sin(2x)} \right) = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \cos(2x) - 1}{\sin(2x) + 2x \cos(2x)} \right) = \frac{2-1}{0+0} = \frac{1}{0} = \pm \infty \text{ o } -\infty? \end{aligned}$$

Como $x \rightarrow 0^+$ entonces tomamos un valor de x próximo y superior a 0 y

valoramos la función en dicho valor. Tomamos $x = 0,01 \rightarrow \frac{1}{0,01} - \frac{1}{\sin(0,02)} = 49,96$

Entonces $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right) = +\infty}$

b) En $x = 1$:

- Existe $f(1) = 2^0 = 1$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{(x-1)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Los límites laterales no son iguales y no existe el } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

La función $f(x)$ no es continua en $x = 1$. Es una discontinuidad inevitable de salto finito, pues los límites laterales existen y son finitos, pero de diferente valor.

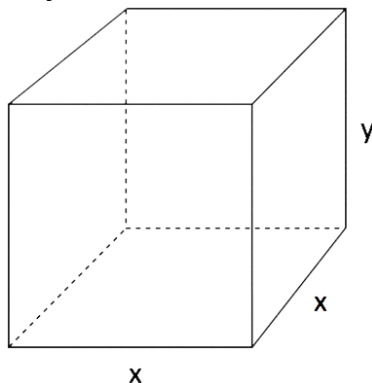
En $x = 2$:

- Existe $f(2) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Los límites laterales son iguales y } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
- Los valores de la función y el límite son iguales.

La función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

4. a) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.
- b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

a) La caja tiene las dimensiones del dibujo inferior.



El volumen es $V(x, y) = x^2 y$ y la superficie total de la caja es la suma de la superficie de las 4 caras laterales que son iguales, la superficie de cada una vale xy y la superficie de la base que vale $x^2 \rightarrow$ Superficie total = $4xy + x^2$

$$\text{Como } \begin{cases} \text{Volumen} = 108 \\ V(x, y) = x^2 y \end{cases} \Rightarrow x^2 y = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}.$$

Sustituimos en la función de la superficie.

$$\text{Superficie} = S(x) = 4x \frac{108}{x^2} + x^2 = \frac{432}{x} + x^2$$

Derivamos esta función y buscamos su mínimo.

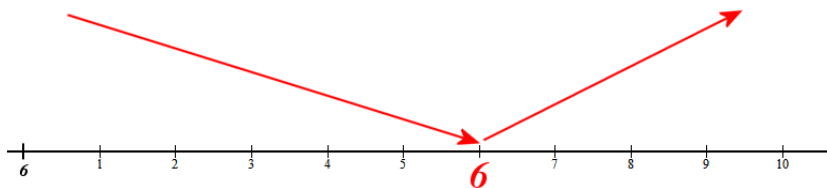
$$S(x) = \frac{432}{x} + x^2 = 432x^{-1} + x^2 \Rightarrow S'(x) = -432x^{-2} + 2x$$

Igualamos a cero.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{432}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{432}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 432 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = \sqrt[3]{216} = 6$$

Comprobemos si $x = 6$ es un mínimo relativo.

- En $(0, 6)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $S'(4) = -\frac{432}{4^2} + 8 = -64 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 6)$.
- En $(6, +\infty)$ tomo $x = 8$ y la derivada vale $S'(8) = -\frac{432}{8^2} + 16 = 9,25 > 0$. La función crece en $(6, +\infty)$.



La superficie tiene un mínimo en $x = 6 \rightarrow y = \frac{108}{x^2} = \frac{108}{36} = 3$.

La caja de base cuadrada de volumen 108 dm^3 con menor superficie tiene dimensiones 6 dm en el lado del cuadrado de la base y 3 de altura.

b) Siendo $f(x) = x^2 + x - 1$ su derivada es $f'(x) = 2x + 1$

La recta tangente es:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^2 + 1 - 1 = 1 \\ f'(1) = 2 + 1 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 2}$$

5. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) [1,25 puntos] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

a)

$$\int \frac{-dx}{1+e^x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{1+t} \frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{t(1+t)} dt =$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A + At + Bt}{t(1+t)}$$

$$1 = A + At + Bt$$

$$t = 0 \rightarrow 1 = A$$

$$t = -1 \rightarrow 1 = A - A - B \rightarrow B = -1$$

Así queda

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

$$= -\int \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt = -\ln t + \ln(1+t) = -\ln e^x + \ln(1+e^x) = \boxed{-x + \ln(1+e^x) + C}$$

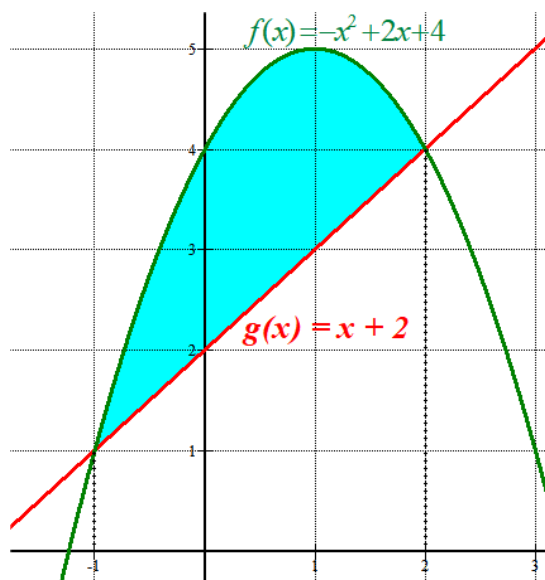
b) Localizamos los puntos de corte de ambas gráficas resolviendo el sistema.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = -1 = x \\ \frac{-1-3}{-2} = 2 = x \end{cases}$$

Coinciden en dos puntos: $x = -1$ y $x = 2$.

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 2 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 4 - (x + 2) dx \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^2 -x^2 + x + 2 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 4 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] \right| = \\ &= \left| -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right| = \boxed{\frac{9}{2} = 4,5 u^2} \end{aligned}$$



6. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, -1) \\ \pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1 + 4 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0,816 u$$

b) Hallamos el punto intersección de la recta r con el plano π .

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \\ y = z + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2(z + 2) - z - 4 = 0 \\ x - 2(z + 2) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z + 4 - z - 4 = 0 \\ x - 2z - 4 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ x - 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -z - 2z - 6 = 0 \Rightarrow -3z = 6 \Rightarrow \boxed{z = -2} \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{y = -2 + 2 = 0}$$

El punto intersección de recta y plano es $A(2, 0, -2)$.

Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (2, 0, -2) = (-2, 1, 3)$$

Utilizamos la fórmula del área del triángulo ABC como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3i - 8j - k - 2k + 3j - 4i = -7i - 5j - 3k = (-7, -5, -3)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{49 + 25 + 9}}{2} = \frac{\sqrt{83}}{2} = 4,55 u^2$$

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .

b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector director de la recta s .

$$s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (3, -2, 1) \\ P_s(0, -2, 1) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (3, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{0}{1}$$

Por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes, solo pueden ser secantes o se cruzan.

Consideramos los vectores directores de ambas rectas y el vector que une un punto de la recta r con otro punto de la recta s .

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -2, 1) - (2, 0, 0) = (-2, -2, 1).$$

Calculamos el producto mixto de los tres vectores.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (3, -2, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (-2, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 3 + 2 = -5 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan. Tienen distinta dirección y están situadas en planos paralelos.

b) Si el plano es paralelo a las rectas entonces tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\begin{cases} P(-1, 0, 2) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (3, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+1-2z+4-3z+6-y=0$$

$$\boxed{\pi \equiv x - y - 5z + 11 = 0}$$

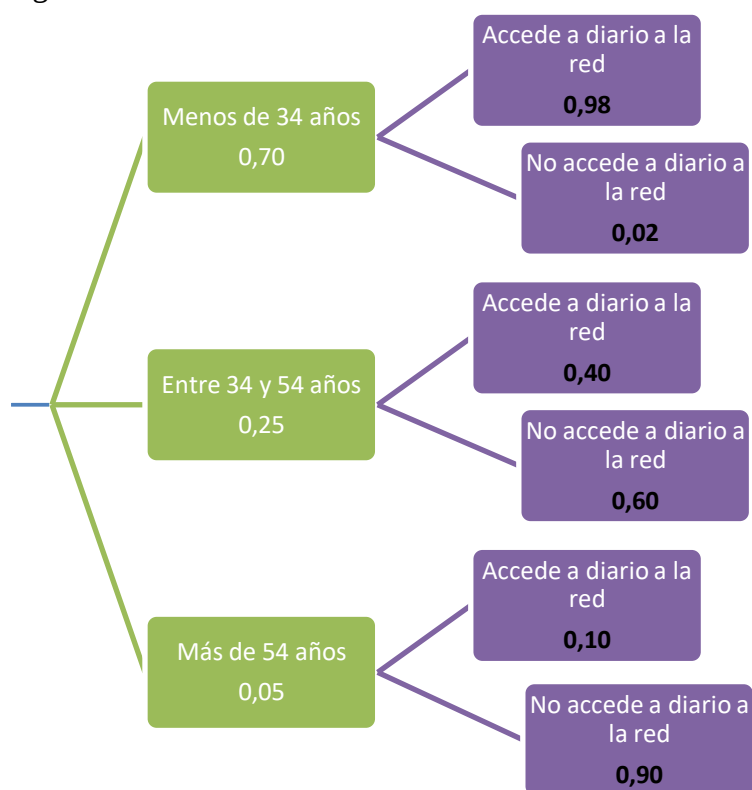
8. a) El 70% de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

- a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?
 a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

- b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?
 b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



a.1) Mirando el diagrama se cumple este suceso en tres ramas, por lo que la probabilidad es:

$$P(\text{No acceda a diario a la red}) = 0,70 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,60 + 0,05 \cdot 0,90 = 0,014 + 0,150 + 0,045 = \boxed{0,209}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(\text{Tenga entre 34 y 54 años} / \text{Accede diariamente a la red}) &= \\ &= \frac{P(\text{Tenga entre 34 y 54 años} \cap \text{Accede diariamente a la red})}{P(\text{Accede diariamente a la red})} = \\ &= \frac{0,25 \cdot 0,40}{1 - 0,209} = \frac{0,1}{0,791} = \frac{100}{791} = \boxed{0,126} \end{aligned}$$

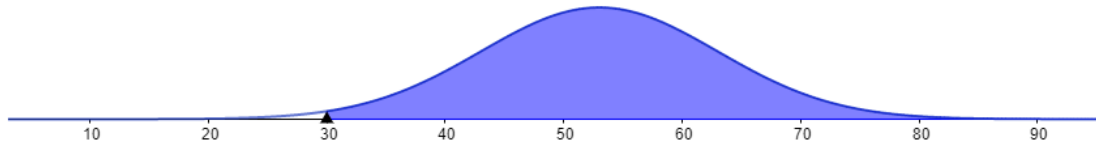
b) X = Tiempo en minutos que un usuario está conectado a Instagram. $X = N(53, 10)$

b.1) Nos piden calcular $P(X \geq 30)$.

$$P(X \geq 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{30-53}{10}\right) = P(Z \geq -2,3) = P(Z \leq 2,3) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \boxed{0,9893}$$

$$\mu = 53 \quad \sigma = 10$$



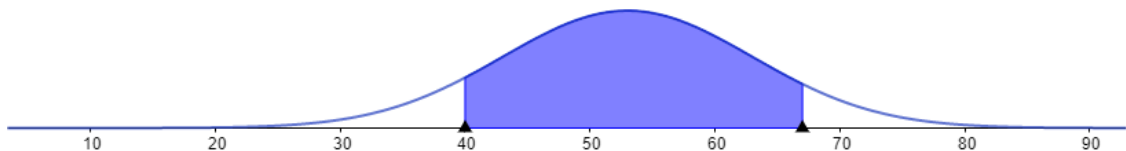
b.2) Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 67)$.

$$P(40 \leq X \leq 67) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{40-53}{10} \leq Z \leq \frac{67-53}{10}\right) = P(-1,3 \leq Z \leq 1,4) =$$

$$= P(Z \leq 1,4) - P(Z \leq -1,3) = P(Z \leq 1,4) - P(Z \geq 1,3) = P(Z \leq 1,4) - (1 - P(Z \leq 1,3)) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla de la } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0,9192 - 1 + 0,9032 = \boxed{0,8224 = 82,24\%}$$

$$\mu = 53 \quad \sigma = 10$$





EvAU Ordinaria 2020

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más se corregirán sólo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

- b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1 + 2x - \cos(x^2)}$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

- a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

- b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .

b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s .

8. a) En un servicio de emergencias el 60% de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30% con el naranja y el 10% con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos son falsas alarmas es 3% en el caso del código amarillo, 2% en el naranja y 1% en el rojo. Si se recibe un aviso.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k	P	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0		0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1		0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2		0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3		0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4		0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5		0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6		0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

SOLUCIONES

1. a) [1,25 puntos] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) [1,25 puntos] Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

a) A no tiene inversa cuando su determinante es 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 4^a - \text{Fila } 3^a \\ a \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ -a \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 4^a \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Desarrollo por la } 4^a \text{ fila} \} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a^3 + a^2 - 2a) = -a^3 - a^2 + 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^3 - a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(-a^2 - a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 - a + 2 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -2 = a \\ 1 = a \end{cases} \end{cases}$$

No tiene inversa cuando $a = 0$; $a = -2$ o $a = 1$.

b) Comprobamos cuando $CD = DC$.

$$CD = DC \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+1=3x+y \\ x-1=3+z \\ 3y+z=x-y \\ y-z=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=y \\ x=4+z \\ 4y+z=x \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=y \\ x=4+z \\ 4+z=x \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+z \\ y=1 \end{cases}$$

Se cumple cuando $y = 1$; $x = 4 + z$; siendo z cualquier valor real.

2. a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - a^2 - a^2 = -a^2 - 2a$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 - 2a = 0 \Rightarrow -a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

Existen tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, pues tiene el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 2ª y la columna 1ª (son todo ceros) $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

La matriz A/B tiene también rango 2 pues toda la fila 2ª son 0.

El rango de A = Rango de A/B = 2 < número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, pues tiene el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª y la columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

La matriz A/B tiene rango 3 pues si quitamos la columna 1ª el menor de orden 3 resultante tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 2 - 4 = 6 \neq 0$$

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = -2$ el sistema es incompatible.

- b) Para $a = 2$ estamos en el caso 1 por lo que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ 2x \quad -2y \quad \quad = 2 \\ -2x \quad +2y \quad +z = -2 \\ \hline \quad \quad \quad z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ 2x \quad +2y \quad -z = 1 \\ -2x \quad +2y \quad +z = -2 \\ \hline \quad \quad 4y \quad \quad = -1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ z = 0 \\ 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ \boxed{z = 0} \\ \boxed{y = -\frac{1}{4}} \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{2}{4} - 0 = 2 \Rightarrow 2x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}}$$

La solución es $x = \frac{3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}$; $z = 0$.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$

a) $\frac{3}{x-2}$ es continua salvo en $x = 2$ que no pertenece al dominio de definición de la función a trozos.

$\cos(\pi x)$ no presenta ningún problema de continuidad.

$\frac{\ln(x-2)}{3-x}$ no es continua en $x = 3$ que no está en su dominio de definición y el logaritmo solo existe para $x > 2$. Como está definido a partir de 3 no hay problema ni de existencia ni de continuidad.

Veamos que ocurre en los cambios de definición.

En $x = 2$:

- Existe $f(2) = \cos(2\pi) = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0} = -\infty$. No existe

No es continua en $x = 2$.

En $x = 3$:

- Existe $f(3) = \cos(3\pi) = -1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \cos(\pi x) = \cos(3\pi) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \frac{0}{0} = \{L'Hôpital\} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-1}{x-2} = -1$
- Los tres valores son iguales. $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$

La función es continua en $x = 3$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$, presentando una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 2$.

b) Calculamos el valor del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} &= \frac{0}{1+0-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} \{L'Hôpital\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{0+2+2x\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{2+2x\sin(x^2)} = \frac{1-0}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

- a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.
 b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

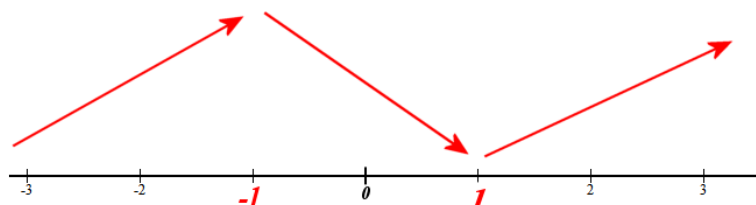
$$a) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+1) - (2x)(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} + 2x - 2x^2 - 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - \cancel{2x}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La recta real se divide en tres partes. ¿La función crece o decrece en cada de estas partes?

- En $(-\infty, -1)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{2(-2)^2 - 2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{6}{25} > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomo $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0 - 2}{(0^2 + 1)^2} = -2 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{8 - 2}{(4 + 1)^2} = \frac{6}{25} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



$$\text{Para } x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{1^2 - 2 + 1}{1^2 + 1} = 0 \quad \text{Para } x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

La función tiene un máximo en $P(-1, 2)$ y un mínimo en $Q(1, 0)$.

b)

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0^2 - 0 + 1}{0^2 + 1} = 1 \\ f'(0) &= \frac{0 - 2}{(0^2 + 1)^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 1} \text{ Recta tangente}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{-2}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 1 + \frac{x}{2}} \text{ Recta normal}$$

5. a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx$.

b) [1,25 puntos] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

a) Usamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1} dx =$$

Factorizamos $x^2 - 2x + 1$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \Rightarrow 3x-2 = A(x-1)+B$$

$$x=1 \rightarrow 3-2=B \Rightarrow B=1$$

$$x=0 \rightarrow -2=-A+B \Rightarrow -2=-A+1 \Rightarrow A=3$$

$$\text{Tenemos } \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 3 \ln|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx = 3 \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C}$$

b) Localizamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

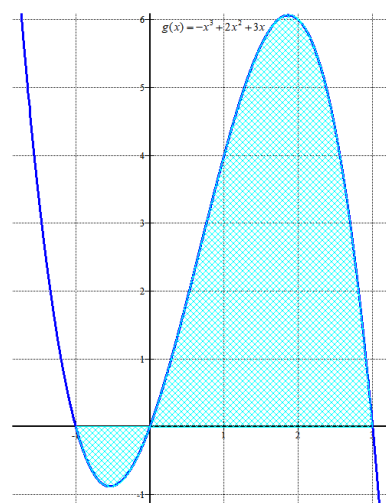
$$g(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} \boxed{-1=x} \\ \boxed{3=x} \end{cases} \end{cases}$$

Corta el eje en tres puntos: $x = -1$; $x = 0$; $x = 3$.

El área del recinto es la suma del valor absoluto de la integral definida entre -1 y 0 de $g(x)$ y la integral definida entre 0 y 3 de $g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^0 -x^3 + 2x^2 + 3x dx \right| + \left| \int_0^3 -x^3 + 2x^2 + 3x dx \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{0^4}{4} + 2\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + 2\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} \right] \right| + \\ &+ \left| \left[-\frac{3^4}{4} + 2\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^4}{4} + 2\frac{0^3}{3} + 3\frac{0^2}{2} \right] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| + \left| -\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2} \right| = \left| \frac{-7}{12} \right| + \frac{135}{12} = \boxed{\frac{142}{12} = 11,833 u^2} \end{aligned}$$

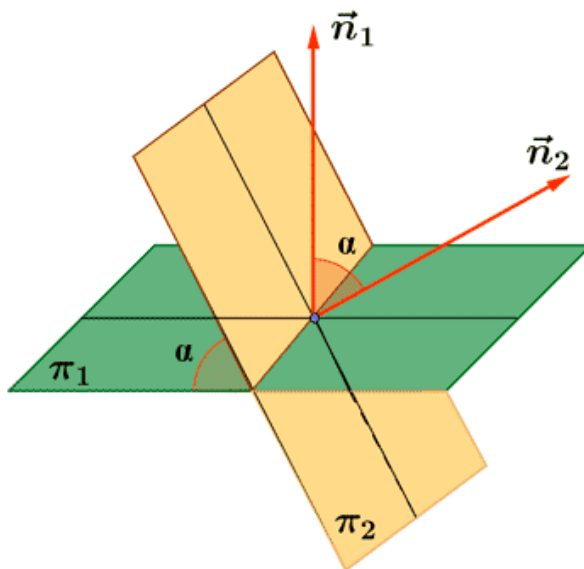


6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) [1,5 puntos] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

a) El ángulo formado entre los planos es el mismo que el que forman sus vectores normales.
El vector normal del plano π_2 es el producto vectorial de sus vectores directores.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - k - 2i = (-2, -2, 0)$$

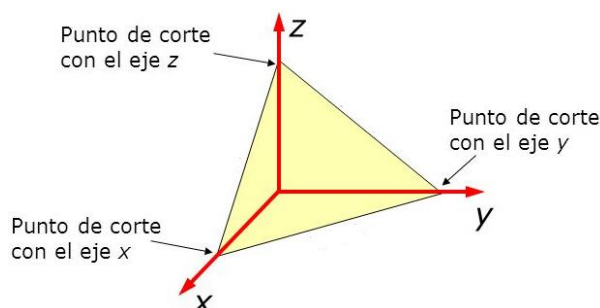
Obtenemos el ángulo con la fórmula del producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, 1, 1) \\ \vec{n}_2 = (-2, -2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(2, 1, 1) \cdot (-2, -2, 0)}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+4}} = \frac{-4-2}{\sqrt{48}} = -\frac{6}{\sqrt{48}}$$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{48}}\right) \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 150^\circ$$

Sale mayor de 90° y el ángulo que forman los planos será $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

b) Calculamos los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.



$$\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$$

$$\text{eje } X \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 0 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow Q(1, 0, 0)$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$$

$$\text{eje } Y \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + y + 0 - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \rightarrow R(0, 2, 0)$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$$

$$\text{eje } Z \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 \rightarrow S(0, 0, 2)$$

El tetraedro tiene vértices P, Q, R y S.

Consideramos los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 0) - (3, -3, 2) = (-2, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{PR} = (0, 2, 0) - (3, -3, 2) = (-3, 5, -2)$$

$$\overrightarrow{PS} = (0, 0, 2) - (3, -3, 2) = (-3, 3, 0)$$

El volumen del tetraedro es el valor absoluto de la sexta parte del producto mixto de estos vectores.

$$\text{Volumen} = \left| \frac{[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}]}{6} \right| = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6} (18 + 18 - 30 - 12) \right| = \left| \frac{-6}{6} \right| = 1 u^3$$

7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$

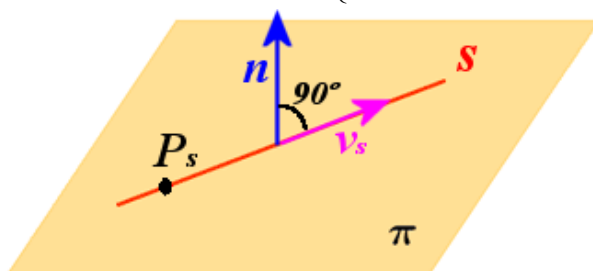
- a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .
 b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s .

a) Obtenemos el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (0, 1, 2) \\ \vec{v} = (1, a, -1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -i + 2j - k - 2ai = (-1 - 2a)i + 2j - k = (-1 - 2a, 2, -1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - b + 2y \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = (1 - b) + 2t \\ y = t \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, 0) \\ P_s(1 - b, 0, -3) \end{cases}$$



El vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar es cero.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (-1 - 2a, 2, -1) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow -2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow -4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Además, el punto $P_s(1 - b, 0, -3)$ debe pertenecer al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 - b = -1 + \mu \\ 0 = 1 + \lambda \\ -3 = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - b = \mu \\ -1 = \lambda \\ -4 = 2\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - b = \mu \\ -4 = -2 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - b = \mu \\ \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 - b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Los valores buscados son $a = b = 0$.

b) Si $a = 0$ y $b = 3$ el plano y recta quedan:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Si la recta r es paralela al plano su vector director $\vec{v}_r$ es perpendicular a su vector normal $\vec{n} = (-1-2a, 2, -1) = (-1, 2, -1)$

Si la recta r es perpendicular a la recta s su vector director $\vec{v}_r$ es perpendicular al vector director de s .

Por lo que nos sirve como vector director de s el producto vectorial de $\vec{n}$ y $\vec{v}_s$.

$$\vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j - k - 4k + i = i - 2j - 5k = (1, -2, -5)$$

La recta r tiene ecuación:

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} P(1, -1, -8) \in r \\ \vec{v}_r = (1, -2, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -8 - 5\lambda \end{array}}$$

8. a) En un servicio de emergencias el 60% de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30% con el naranja y el 10% con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos son falsas alarmas es 3% en el caso del código amarillo, 2% en el naranja y 1% en el rojo. Si se recibe un aviso.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

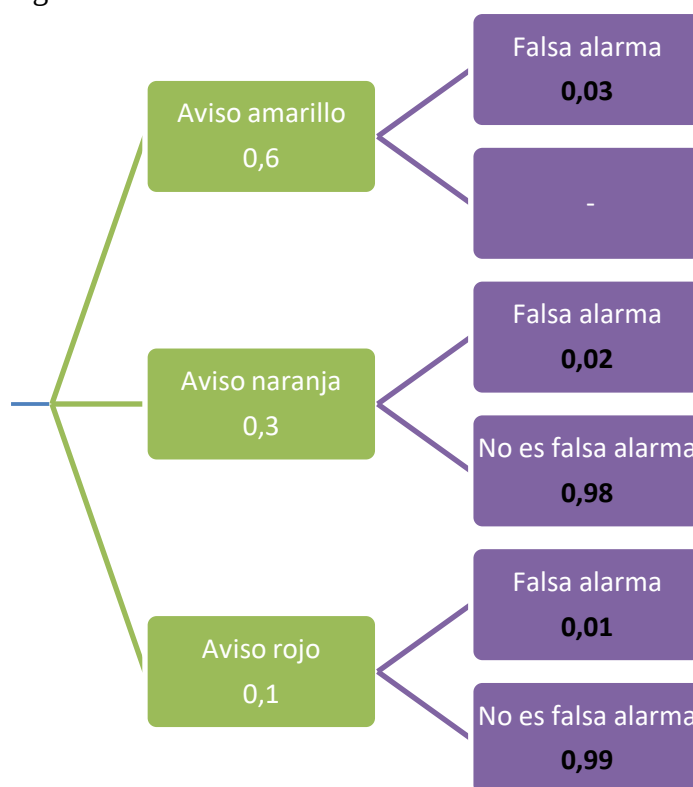
a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



a.1) Mirando el diagrama se cumple este suceso en tres ramas, por lo que la probabilidad es:

$$P(\text{Falsa alarma}) = 0,6 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,01 = \\ = 0,018 + 0,006 + 0,001 = \boxed{0,025}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori, aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea aviso rojo o naranja} / \text{No es falsa alarma}) = \\ = \frac{P(\text{Sea aviso rojo o naranja} \cap \text{No es falsa alarma})}{P(\text{No es falsa alarma})} = \\ = \frac{0,3 \cdot 0,98 + 0,1 \cdot 0,99}{1 - 0,025} = \frac{0,294 + 0,099}{0,975} = \frac{0,393}{0,975} = \boxed{0,403}$$

b)

b.1) X = Número de avisos naranjas. X es una binomial con $n = 9$ y $p = 0,3$. $X = B(9, 0.3)$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\
 &= \binom{9}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^9 + \binom{9}{1} 0.3^1 \cdot 0.7^8 + \binom{9}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^7 = \\
 &= 0.7^9 + 9 \cdot 0.3 \cdot 0.7^8 + \frac{9 \cdot 8}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^7 = 0.7^9 + 9 \cdot 0.3 \cdot 0.7^8 + 36 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^7 = \boxed{0.463}
 \end{aligned}$$

Utilizando la tabla proporcionada hubiese sido:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.0404 + 0.1556 + 0.2668 = \boxed{0.4628}$$

b.2) $P(\text{Los 9 avisos son amarillos o naranjas}) = P(\text{No hay ningun aviso rojo}) =$
 $= P(\text{Aviso 1º no es rojo})P(\text{2º no es rojo}) \dots P(\text{Aviso 8º no es rojo})P(\text{Aviso 9º no es rojo}) =$
 $= 0.9^9 = \boxed{0.387}$

Utilizando la tabla proporcionada hubiese sido:

X = Número de avisos rojos. Es una distribución binomial, siendo $n = 9$ y $p = 0,1$.

$X = B(9, 0.1)$

Nos piden $P(\text{Todos los avisos rojos o naranjas}) = P(\text{Ningún aviso rojo}) =$

$$= P(X = 0) = \{\text{mirando en tabla}\} = \boxed{0.3874}$$

EvAU Extraordinaria 2019

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II



Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = xe^{-x}$. (1 punto)

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 4$. (1,5 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. (1 punto)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x - (a - 2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. (1 punto)

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π . (1,25 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r . (1,25 puntos)

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A) = 0,75$ y $P(B) = 0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos

$A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. (0,75 puntos)

a2) Si $P(A / B) = 0,6$. (0,5 puntos)

Nota: $P(A / B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. (0,75 puntos)

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? (0,5 puntos)

n \ k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0612	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. (1,5 puntos)

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. (1 punto)

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(-1, 3, 1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos Q(1, 5, 5) y R(0, 4, 2) pertenecen o no a la recta. (1 punto)

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70% de los pacientes son niñas. De los niños el 40% son menores de 36 meses y de las niñas el 30% tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. (0,75 puntos)

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. (0,5 puntos)

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. (0,75 puntos)

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. (0,5 puntos)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES**PROPUESTA A**

- 1A.** a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)
- b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = xe^{-x}$. (1 punto)

- a) Por ser el cociente de dos polinomios será continua en todo $\mathbb{R}$ salvo cuando se anule el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

La función es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + x) \cancel{(x-1)}}{(x+1) \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + x)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

En $x = 1$ es discontinua evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0} = \infty$$

En $x = -1$ es discontinua inevitable de salto infinito.

- b) Calculemos la derivada de la función $g(x) = xe^{-x} \Rightarrow g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

La igualamos a cero y hallamos los puntos críticos de la función.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0; \text{ No es posible} \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Veamos que ocurre antes de 1 y después de 1.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos el valor $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = e^{-0}(1-0) = 1 > 0$ la función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos el valor $x = 2$ y la derivada vale $g'(2) = e^{-2}(1-2) < 0$ la función decrece en $(1, +\infty)$.

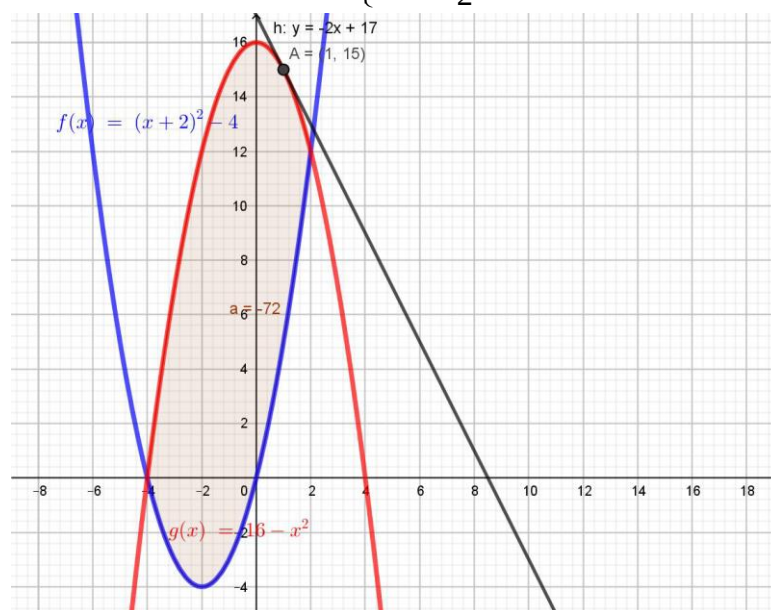
Luego en $x = 1$ hay un máximo local. Como $g(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$ las coordenadas del máximo local son $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- 2A.** a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 4$. (1,5 puntos)
- b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. (1 punto)

a) Veamos donde se cortan las gráficas de las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 16 - x^2 = (x + 2)^2 - 4 \Rightarrow 16 - x^2 = x^2 + 4 + 4x - 4 \Rightarrow 0 = 2x^2 + 4x - 16$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \\ x = \frac{-2 - 6}{2} = -4 \end{cases}$$



El área la calculamos usando la integral definida de la diferencia de funciones entre -4 y 2 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-4}^2 (16 - x^2 - (x^2 + 4x)) dx = \int_{-4}^2 (16 - 2x^2 - 4x) dx = \left[16x - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-4}^2 = \\ &= \left[16 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[16(-4) - \frac{2(-4)^3}{3} - 2(-4)^2 \right] = \\ &= 32 - \frac{16}{3} - 8 + 64 - \frac{128}{3} + 32 = \frac{216}{3} = \boxed{72 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

- b) Para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$ necesito el valor de la función y su derivada en $x = 1$.

$$f(x) = 16 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$$

$$f(1) = 16 - 1^2 = 15$$

$$f'(1) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 15 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 15 = -2x + 2$$

$$\boxed{y = -2x + 17}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x - (a-2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{array} \right\} (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a - a + 2 + 3 - 2 + a^2 - 2a + 3 = a^2 - 5a + 6.$$

Si igualamos el determinante a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} a = \frac{5+1}{2} = 3 \\ a = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Hay tres tipos de sistemas diferentes en función del valor de a .

CASO 1. $a \neq 3$ y $a \neq 2$

En este caso la matriz de coeficientes tiene rango 3 al igual que la ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 2$

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{array} \right\}$. Usamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ -x \quad \quad \quad +z = -1 \\ \hline -2y \quad +2z = -5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x \quad -3y \quad +2z = -4 \\ -x \quad \quad \quad +z = -1 \\ \hline -3y \quad +3z = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ -2y + 2z = -5 \\ -3y + 3z = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ -6y \quad +6z = -10 \\ 6y \quad -6z = 15 \\ \hline 0 \quad = 5 \end{array} \right\}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución

CASO 3. $a = 3$

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 3z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad -2y \quad +z \quad = -4 \\ -x \quad +y \quad +z \quad = -1 \\ \hline \quad -y \quad +2z \quad = -5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ x \quad -3y \quad +3z \quad = -9 \\ -x \quad +y \quad +z \quad = -1 \\ \hline \quad -2y \quad +4z \quad = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ -2y + 4z = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 2 · Ecuación 2ª} \\ -2y \quad +4z \quad = -10 \\ 2y \quad -4z \quad = 10 \\ \hline \quad 0 \quad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para $a = 3$ seguimos con lo hecho en el apartado anterior.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 3z = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ y = 2z + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2z - 5 - z = 1 \Rightarrow x = 3z + 6$$

La solución es $x = 6 + 3t$; $y = 5 + 2t$; $z = t$.

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π . (1,25 puntos)
 b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r . (1,25 puntos)

- a) La posición relativa de recta y plano depende del ángulo que formen el vector normal del plano con el director de la recta $\vec{v}_r = (-1, 1, 2)$. El vector normal del plano lo determinamos con el producto vectorial de sus vectores directores $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

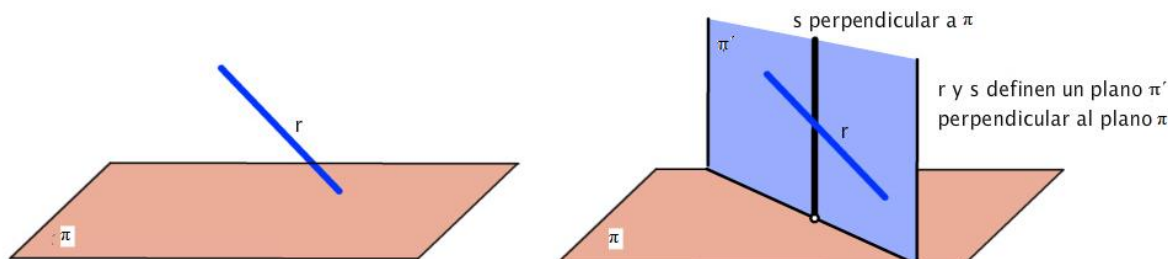
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 2k = (-2, -2, 2)$$

Calculamos el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (-1, 1, 2)(-2, -2, 2) = 2 - 2 + 4 = 4 \neq 0$$

Al ser su producto escalar no nulo el vector director de la recta y el normal del plano no forman 90° . Por lo que recta y plano no son paralelos. Recta y plano son secantes, coincidiendo en un punto.

- b) En el dibujo se describe lo que nos piden y lo que debemos calcular.



Buscamos un plano π' perpendicular a π y que contenga a r .

Este plano tiene como vectores directores el normal del plano π , el director de la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 1, 2) \\ \vec{n} = (-2, -2, 2) \\ \text{Pasa por } (1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - 4y + 2z + 2z + 2y + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 2y + 4z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 3x - y + 2z - 3 = 0}$$

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A) = 0,75$ y $P(B) = 0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. (0,75 puntos)

a2) Si $P(A / B) = 0,6$. (0,5 puntos)

Nota: $P(A / B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. (0,75 puntos)

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? (0,5 puntos)

a)

a1) Si A y B fuesen independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,35 = \boxed{0,2625}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,2625 = \boxed{0,8375}$$

a2) Si $P(A / B) = 0,6$ entonces

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0,6 = \frac{P(A \cap B)}{0,35} \Rightarrow P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,35 = \boxed{0,21}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,21 = \boxed{0,89}$$

b)

b1) Se trata de una binomial con 5 repeticiones ($n=5$) y la probabilidad de recibir un cheque sin fondos es 0,01 ($p = 0,1$). X = Número de cheques que se reciben sin fondos.

$P(\text{Recibir algún cheque sin fondos}) = 1 - P(\text{No recibir ningún cheque sin fondos}) =$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0,01^0 \cdot 0,99^5 = 1 - 0,99^5 = \boxed{0,05}$$

b2) Se trata de una binomial con 5 repeticiones ($n = 5$) y la probabilidad de que una sucursal reciba algún cheque sin fondos es 0,05 ($p = 0,05$). X = Número de sucursales que reciben algún cheque sin fondos.

$P(\text{Al menos 3 sucursales reciban un cheque sin fondos}) =$

$$= P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} 0,05^3 \cdot 0,95^2 + \binom{5}{4} 0,05^4 \cdot 0,95^1 + \binom{5}{5} 0,05^5 \cdot 0,95^0 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} 0,05^3 \cdot 0,95^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0,05^4 \cdot 0,95 + 0,05^5 =$$

$$= 10 \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^2 + 5 \cdot 0,05^4 \cdot 0,95 + 0,05^5 = \boxed{0,001}$$

PROPUESTA B

- 1B.** a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. (1,5 puntos)
 b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. (1 punto)

a) Consideramos la función $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ en el intervalo $[0, \pi]$.

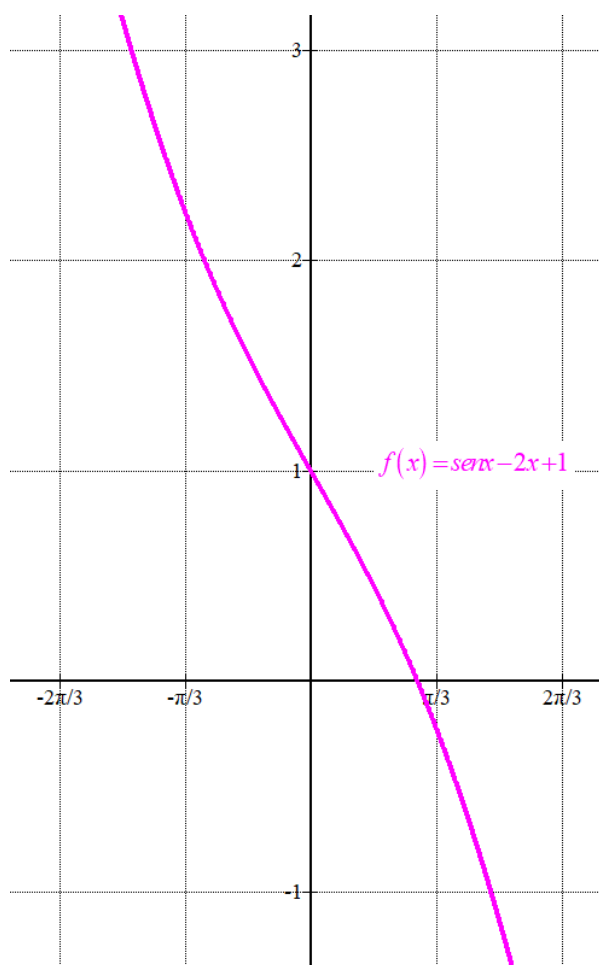
La función es continua en el intervalo y tiene valores de distinto signo en los extremos del intervalo $(0, \pi)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \operatorname{sen} 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(\pi) = \operatorname{sen} \pi - 2\pi + 1 \approx -5.28 < 0 \end{array} \right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos afirmar que existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

Ese valor $c \in (0, \pi)$ es la solución de la ecuación.

- b) Como la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ es $f'(x) = \cos x - 2$ la derivada siempre es negativa para cualquier valor de x , pues el coseno siempre toma valores menores que 1. La función siempre es decreciente y solo puede tener una solución $c \in (0, \pi)$, obtenida en el apartado anterior.



2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (x+1)e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x}(x+1) - \int -e^{-x} dx =$$

$$= -e^{-x}(x+1) - e^{-x} = -e^{-x}(x+2) + C$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = \left[-e^{-x}(x+2) \right]_0^1 = -e^{-1}(1+2) - (-e^{-0}(0+2)) = \boxed{-\frac{3}{e} + 2}$$

b) Calculamos la integral usando un cambio de variable.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \\ dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt \\ \sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t(1+t^2)} 2t dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t = \boxed{2 \arctan \sqrt{x} + C}$$

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. (1 punto)
 b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

a) El rango de A es como máximo 3. Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas. Veamos que ocurre en cada una de ellas.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -2$

El determinante de la matriz A es no nulo y el rango de A es 3

CASO 2. $a = 0$

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, su rango no es 3 ya que su determinante es nulo y existe un menor de orden 2 no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $a = -2$

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, su rango no es 3 ya que su determinante es nulo y existe un menor de orden 2 no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

b) Para $a = 1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación $X \cdot A = B - X$.

$$X \cdot A = B - X \Rightarrow X \cdot A + X = B \Rightarrow X(A + I) = B \Rightarrow X = B(A + I)^{-1}$$

Hallamos la inversa de A+I.

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A + I)^t\right)}{|A + I|} = \frac{\text{Adj}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t\right)}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\text{Adj}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right)}{16} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = B(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8-2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/16 & 0 & 4/16 \\ 1/16 & 8/16 & -2/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \end{pmatrix}$$

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a , b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. (1 punto)

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 0, -2)(a, b, 1) = -a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

También se cumple que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix} = 4j - bk + j + 2bi = 2bi + 5j - bk = (2b, 5, -b)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow (2, 5, c) = (2b, 5, -b) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2b \\ 5 = 5 \\ c = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 1} \\ \boxed{c = -1} \end{cases}$$

Los valores de los parámetros son: $a = -2$; $b = 1$ y $c = -1$

b) Si la recta es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$ su vector director es el normal del plano $\vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 2)$ y como pasa por $P(-1, 3, 1)$ su ecuación es

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{o bien } r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Compruebo si los puntos están en la recta.

$\text{¿}Q \in r\text{?}$ $\text{¿}\frac{1+1}{1} = \frac{5-3}{1} = \frac{5-1}{2}\text{?} \Rightarrow \text{¿}2 = 2 = \frac{4}{2}\text{?}$ El punto Q si pertenece a la recta r .

$\text{¿}R \in r\text{?}$ $\text{¿}\frac{0+1}{1} = \frac{4-3}{1} = \frac{2-1}{2}\text{?} \Rightarrow 1 = 1 \neq \frac{1}{2}$ El punto R no pertenece a la recta r .

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70% de los pacientes son niñas. De los niños el 40% son menores de 36 meses y de las niñas el 30% tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. (0,75 puntos)

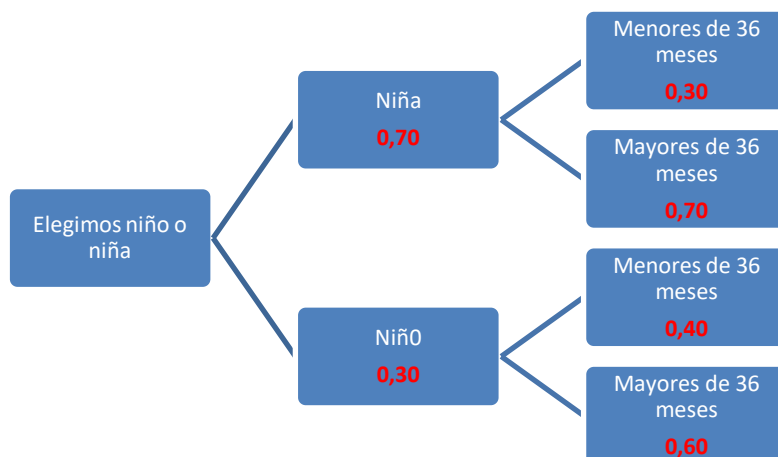
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. (0,5 puntos)

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. (0,75 puntos)

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. (0,5 puntos)

a) Hagamos un diagrama de árbol que esquematice la situación.



a1) $P(\text{No tenga menos de 36 meses}) = P(\text{Sea niña y mayor de 36 meses o sea niño y mayor de 36 meses}) = P(\text{Sea niña y mayor de 36 meses}) + P(\text{Sea niño y mayor de 36 meses}) =$

$$= P(\text{Sea niña}) \cdot P(\text{Sea mayor de 36 meses} / \text{sea niña}) + P(\text{Sea niño}) \cdot P(\text{Sea mayor de 36 meses} / \text{sea niño}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,49 + 0,18 = \boxed{0,67}$$

a2)

$$P(\text{Sea niña sabiendo que es menor de 36 meses}) = P(\text{Sea niña} / \text{Menor de 36 meses}) = \frac{P(\text{Sea niña} \cap \text{Menor de 36 meses})}{P(\text{Menor de 36 meses})} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1 - 0,67} = \frac{0,21}{0,33} = \boxed{0,64}$$

b)

b1) Sea X = Puntuación en una oposición. $X = N(60, 10)$.

$$P(X \geq 75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 60}{10} \geq \frac{75 - 60}{10}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}$$

b2)

$$P(X < 75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 60}{10} < \frac{75 - 60}{10}\right) = P(Z < 1,5) = 0,9332 = 93,32\%$$

Como fueron 450 opositores sacaron menos de 75 puntos el 93,32% de los opositores, es decir, $450 \cdot 0,93,32 = 419,94$. Aproximadamente 420 opositores.

EvAU Ordinaria 2019

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II



Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. (1 punto)

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. (1,5 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. (1 punto)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} ax + 2y &= a^2 \\ -x + y + z &= 5 \\ x - ay - z &= -(4 + a) \end{aligned} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. (1 punto)

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 2)$, $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

5A. a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C.

Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. (0,75 puntos)

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. (0,5 puntos)

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. (0,75 puntos)

b2) Al menos tres chicos. (0,5 puntos)

n	k	P														
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50		
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313		
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563		
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125		
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125		
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563		
5	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313		

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (1 punto)
 b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (1,5 puntos)

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. (1,5 puntos)

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.

- a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)
 b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. (1,25 puntos)

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

- a1) Se active al menos uno de los dos sensores. (0,75 puntos)
 a2) Se active solo uno de los sensores. (0,5 puntos)
 b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
 b1) Entre 6,5 y 13 horas. (0,75 puntos)
 b2) En menos de siete horas. (0,5 puntos)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES**PROPUESTA A**

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3; 3]$. (1 punto)

a) Para que sea derivable debe ser continua. El único problema radica en $x = 1$ ya que ambas funciones son continuas y derivables en su ámbito de definición.

Para ser continua en $x = 1$ debe cumplirse $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. Comprobémoslo

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} = a - b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx + 2 = a + b + 2 \\ f(1) &= a + b + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - b = a + b + 2 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

La derivada de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para ser derivable en $x = 1$ deben ser iguales las derivadas laterales.

Derivada por la izquierda de 1 vale $f'(1^-) = 2a + b$

Derivada por la derecha de 1 vale $f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b$

$$f'(1^+) = f'(1^-) \Rightarrow 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \Rightarrow 4a + 2b = a + 4b \Rightarrow 3a = 2b$$

Como $b = -1 \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

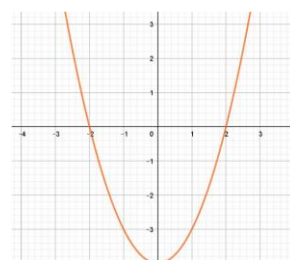
La función es derivable cuando $b = -1$ y $a = -\frac{2}{3}$

b) Debemos probar que es derivable en $(-3,3)$, continua en $[-3,3]$ y que $f(-3) = f(3)$.

Es derivable y continua en todo $\mathbb{R}$ porque se trata de un polinomio.

Es fácil ver que $f(-3) = f(3) = 5$

Luego hay al menos un punto del intervalo en el que la derivada se anula. En este caso es $x = 0$ pues $f'(x) = 2x$.

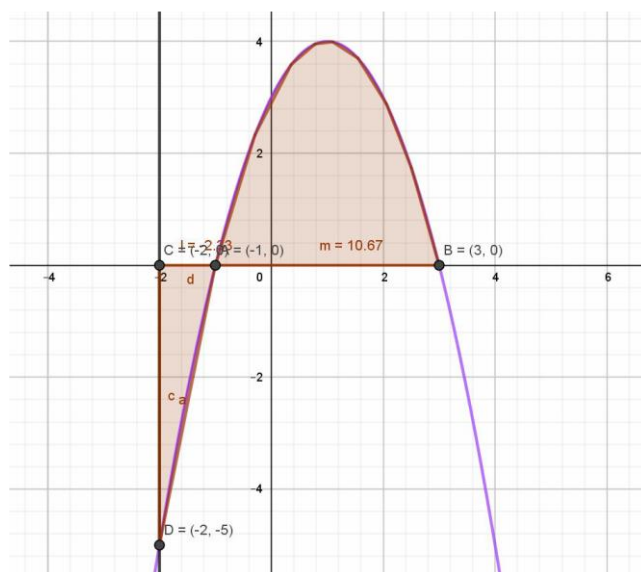


- 2A.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. (1,5 puntos)
- b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. (1 punto)

a) Comprobemos si se cortan la función y el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 2x + 3 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

El recinto empieza en $x = -2$ y luego al cortar en $x = -1$ y $x = 3$, tendremos 2 trozos de recinto cuya área la calculamos con integrales definidas.



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^{-1} -x^2 + 2x + 3 dx \right| + \left| \int_{-1}^3 -x^2 + 2x + 3 dx \right| = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 3(-2) \right] + \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right] = \\ &= \left| \frac{1}{3} + 1 - 3 - \frac{8}{3} - 4 + 6 \right| + \left| -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 \right| = \frac{7}{3} + 11 - \frac{1}{3} = \boxed{13u^2} \end{aligned}$$

b) La función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ tiene derivada $g'(x) = -2x + 2$ que toma en $x = 4$ el valor

$$g'(4) = -8 + 2 = -6 \text{ y la recta normal deberá tener pendiente } m = \frac{-1}{g'(4)} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}.$$

Como debe pasar por el punto $(4, g(4)) = (4, -5)$ la ecuación de la recta es:

$$y + 5 = \frac{1}{6}(x - 4) \Rightarrow 6y + 30 = x - 4 \Rightarrow \boxed{x - 6y - 34 = 0}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + 2y & = & a^2 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - ay - z & = & -(4 + a) \end{array} \right\} (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. (1 punto)

a) La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = -a + 2 - 2 + a^2 = a^2 - a$$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda $\left. \begin{array}{rcl} 2y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - z & = & -4 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{rcl} 2y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - z & = & -4 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - z & = & -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} -x + z & = & 5 \\ x - z & = & -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} -x + z & = & 5 \\ x & = & z - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -z + 4 + z = 5 \Rightarrow 4 = 5 \end{aligned}$$

Esta igualdad es imposible y el sistema es **INCOMPATIBLE**. Sin solución

CASO 3. $a = 1$

El sistema queda $\left. \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ -x + y + z & = & 5 \\ x - y - z & = & -5 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=1 \\ -x+y+z=5 \\ x-y-z=-5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ -x+y+z=5 \\ x+2y=1 \\ \hline 3y+z=6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x-y-z=-5 \\ -x-2y=-1 \\ \hline -3y-z=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y=1 \\ 3y+z=6 \\ -3y-z=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a = \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Puedo eliminar la 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y=1 \\ 3y+z=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1-2y \\ z=6-3y \end{array}}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 0$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para el valor $a = 1$ está resuelto en el apartado anterior y la solución es $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = 6 - 3t$

.

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 2)$, $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:

- a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)
 b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

a) Necesito dos vectores directores y un punto que pertenezca al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, 2) - (1, 2, 0) = (-1, -3, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (1, 0, 1) - (2, -1, 3) = (-1, 1, -2) \\ \text{Contiene al punto } A(1, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 - 2y + 4 - z - 3z - 2y + 4 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 4y - 4z - 4 = 0 \Rightarrow \text{La ecuación del plano es } \boxed{x - y - z - 1 = 0}$$

b) Utilizamos la fórmula, para lo cual necesito las coordenadas de los vectores que parten de A hasta B, C y D.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, 2) - (1, 2, 0) = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -1, 3) - (1, 2, 0) = (1, -3, 3) \\ \overrightarrow{AD} = D - A = (1, 0, 1) - (1, 2, 0) = (0, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen ABCD} = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

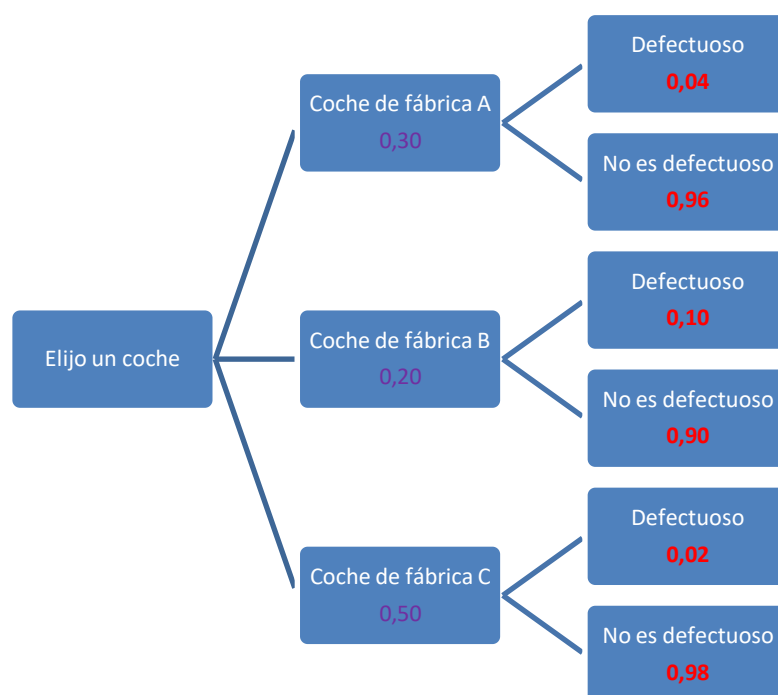
$$\text{Volumen del tetraedro ABCD} = \left| \frac{1}{6} (3 - 4 + 3 - 6) \right| = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} u^3}$$

5A. a) Una fábrica A produce el 30% de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20% y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4% de los tractores fabricados por A, el 10% de los fabricados por B y el 2% de los fabricados por C.

Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

- a1) No salga defectuoso. (0,75 puntos)
 a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. (0,5 puntos)
 b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:
 b1) Tres chicas. (0,75 puntos)
 b2) Al menos tres chicos. (0,5 puntos)

a) Construyamos un diagrama de árbol, para establecer las distintas posibilidades.



$$a1) P(\text{No es defectuoso}) =$$

$$= P(\text{es de la fábrica A y no sale defectuoso}) + P(\text{es de la fábrica B y no sale defectuoso}) + P(\text{es de la fábrica C y no sale defectuoso}) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,96 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,98 = 0,958 = \boxed{95,8 \%}$$

$$a2) P(\text{Si resultó defectuoso, que no sea de C}) =$$

$$= P(\text{No sea de C / Es defectuoso}) = \frac{P(\text{No sea de C y sea defectuoso})}{P(\text{Es defectuoso})} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = \frac{0,012 + 0,02}{0,042} = 0,7619 = \boxed{76,19\%}$$

- b) Si llamamos X = Número de chicos que salen a la pizarra al cabo de la semana, se trata de una distribución binomial $B(n, p)$ con $n = 5$ y $p = 4/20 = 1/5 = 0,2$.
 La probabilidad pedida se calcula siguiendo las fórmulas de la distribución binomial.

b1)

$$\begin{aligned}P(\text{Salgan 3 chicas}) &= P(\text{Salgan 2 chicos}) = P(X = 2) = \binom{5}{2} 0,2^2 \cdot 0,8^3 = \\&= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0,04 \cdot 0,512 = \boxed{0,2048}\end{aligned}$$

b2) Si calculamos la probabilidad de que salgan 3, la probabilidad de que salgan 4 y la de que salgan 5 y las sumamos obtendremos la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned}P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \\&= \binom{5}{3} 0,2^3 \cdot 0,8^2 + \binom{5}{4} 0,2^4 \cdot 0,8^1 + \binom{5}{5} 0,2^5 \cdot 0,8^0 = \\&= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} 0,2^3 \cdot 0,8^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0,2^4 \cdot 0,8 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} 0,2^5 = \\&= 10 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 + 5 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + 0,2^5 = \boxed{0,0579}\end{aligned}$$

PROPUESTA B**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

a) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = \left(\frac{2e^0}{2} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = \{\text{Indeterminación del tipo } n^o e\} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1} - x - 1}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{x^2 - 1} \right)} = e^{\frac{0}{0}} = \{\text{Indeterminación de L'Hôpital}\} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} \right)} = e^{\frac{2+2-2-1}{2}} = \boxed{e^{\frac{1}{2}}}$$

b) Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplicamos regla de L'Hôpital}\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2xe^{x^2-1} - 1}{2x + 4} = \frac{2-1}{-2+4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (1 punto)
 b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (1,5 puntos)

a) Para $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$ tenemos su derivada $f'(x) = -1(1+x^2)^{-2} 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

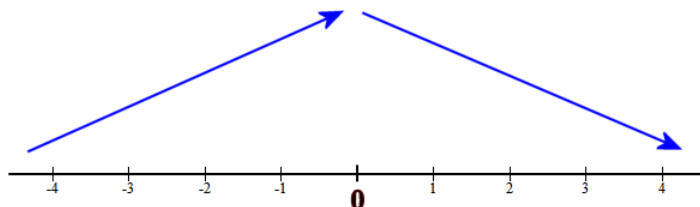
Si igualamos a cero la derivada

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Este es el punto crítico de la función, veamos si es máximo o}$$

mínimo, para ello veremos como varia el signo de la derivada, es decir, como crece o decrece la función.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ si tomamos $x = -1$ la derivada es $f'(-1) = \frac{2}{(1+1)^2} > 0$ la función crece.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ si tomamos $x = 1$ la derivada es $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} < 0$ la función decrece.

La función sigue el esquema siguiente.



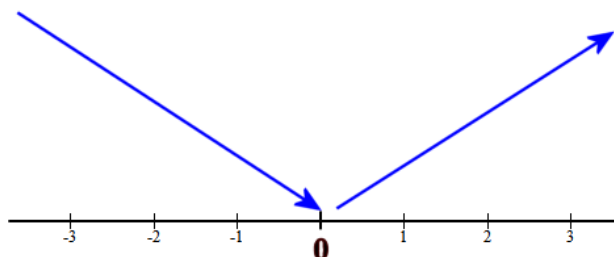
Por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo de $f(x)$.

Para $g(x) = \frac{x^2}{2}$ tenemos su derivada $g'(x) = \frac{2x}{2} = x$

Si igualamos a cero la derivada nos queda $x = 0$. Este es el punto crítico de la función, veamos si es máximo o mínimo, para ello veremos cómo varia el signo de la derivada, es decir, como crece o decrece la función.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ si tomamos $x = -1$ la derivada es $f'(-1) = -1 < 0$ la función decrece.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ si tomamos $x = 1$ la derivada es $f'(1) = 1 > 0$ la función crece.

La función sigue el esquema siguiente.



Por lo que en $x = 0$ hay un mínimo relativo de $g(x)$.

b) Averiguemos primero si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan.

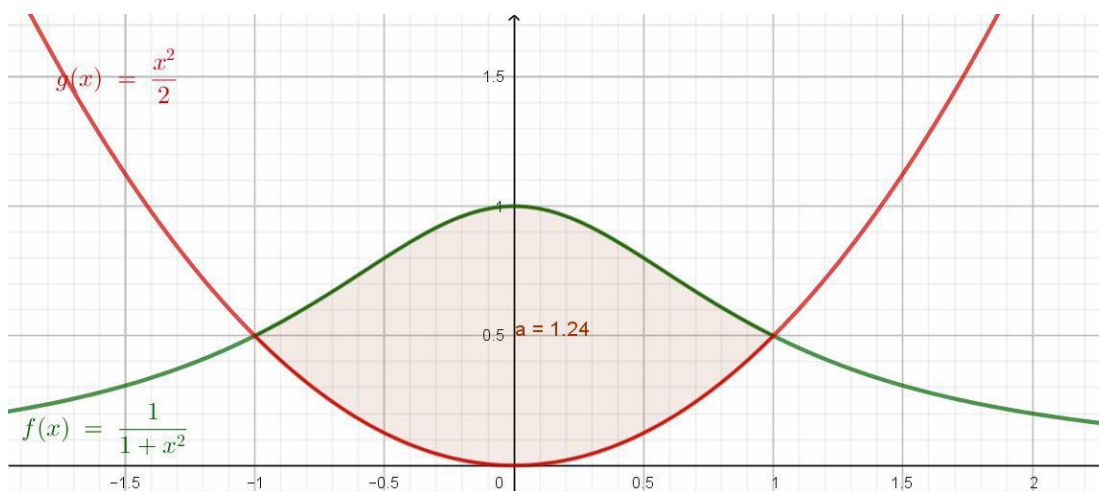
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2 = x^2 + x^4 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x^2 = \frac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1} \\ x^2 = \frac{-1-3}{2} = -2; \text{ No es posible} \end{cases}$$

El área pedida es la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre -1 y 1 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{6} - \arctg x \right]_{-1}^1 \right| = \left| \left[\frac{1^3}{6} - \arctg 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{6} - \arctg(-1) \right] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} \right| = \left| \frac{2}{6} - \frac{2\pi}{4} \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{1,24 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Este valor se observa que concuerda (aproximadamente) con el área del dibujo.



3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. (1,5 puntos)

a) Comprobamos si tiene inversa viendo si el determinante de A es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Calculamos la inversa con la fórmula $A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t\right)}{1} = Adj\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X - 2B = C \Rightarrow A \cdot X = 2B + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(2B + C) \Rightarrow X = A^{-1}(2B + C)$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) =$$

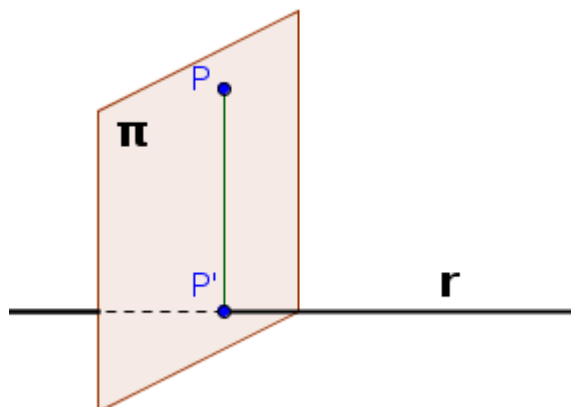
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-1 & 2+6 \\ 2+2 & 6-1 & 4+6 \\ -2-3-4 & -5-9+2 & -5-6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.

- a) Calcula la distancia del punto P a la recta r . (1,25 puntos)
 b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q , siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P .
 (1,25 puntos)

a) UNA FORMA

Para hallar la distancia de un punto P a una recta r necesito hallar la ecuación del plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto y luego determinar el punto de corte de recta y plano P' . La distancia de punto a recta será la distancia entre los dos puntos.



Halleemos el plano π . Tenemos su vector normal que es el director de la recta r $\vec{n} = \vec{v}_r = (3, 1, 2)$ y el punto $P(3, 1, -1)$. Su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (3, 1, 2) \\ \text{Pasa por } P(3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + y + 2z + D = 0 \\ \text{Pasa por } P(3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0$

Halleemos el punto P' de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ r \equiv y = t \\ z = -1 + 2t \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 3t) + t + 2(-1 + 2t) - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 9t + t - 2 + 4t - 8 = 0 \Rightarrow 14t - 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

El punto tiene coordenadas

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P' \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

El vector $\overrightarrow{PP'} = P' - P = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (3, 1, -1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\text{Distancia}(P, r) = \text{Distancia}(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \left| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} u$$

OTRA FORMA

Con fórmulas.

Necesito un vector director de la recta $\vec{v}_r = (3, 1, 2)$ y un punto de la recta $Q(1, 0, -1)$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -1) - (3, 1, -1) = (-2, -1, 0)$$

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 4j + k = (-2, 4, 1)$$

$$\text{Distancia}(P, r) = \frac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{|(-2, 4, 1)|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{\sqrt{4+16+1}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{21}{14}} = \sqrt{\frac{3}{2}} u$$

b) El plano π' paralelo a $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ que contiene a $P(3, 1, -1)$ tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ \text{Contiene a } P(3, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + y - z - 8 = 0$$

El punto de corte de la recta r y el plano π' se obtiene resolviendo el sistema.

$$r \equiv \begin{cases} \pi' \equiv 2x + y - z - 8 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 2 + 6t + t + 1 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow 5t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{El punto } Q \text{ tiene coordenadas } \begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = 1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 1, 1)$$

La recta que pasa por $P(3, 1, -1)$ y $Q(4, 1, 1)$ tiene vector director $\overrightarrow{PQ} = (4, 1, 1) - (3, 1, -1) = (1, 0, 2)$ y su ecuación es:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. (0,75 puntos)

a2) Se active solo uno de los sensores. (0,5 puntos)

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. (0,75 puntos)

b2) En menos de siete horas. (0,5 puntos)

a) a1) $P(\text{Se active al menos uno de los dos sensores}) = 1 - P(\text{No se active ninguno}) = 1 - P(\text{No se activa el primer sensor y No se activa el segundo sensor}) = 1 - P(\text{No se activa el primer sensor}) \cdot P(\text{No se activa el segundo sensor}) = 1 - 0,02 \cdot 0,04 = 1 - 0,0008 = \boxed{0,9992}$

a2) $P(\text{Se active solo uno de los sensores}) = P(\text{Se active el primer sensor y no el segundo o No se active el primer sensor y si el segundo}) = P(\text{Se active el primer sensor y no el segundo}) + P(\text{No se active el primer sensor y si el segundo}) = P(\text{Se active el primer sensor}) \cdot P(\text{no se active el segundo sensor}) + P(\text{No se active el primer sensor}) \cdot P(\text{Se active el segundo sensor}) = 0,98 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96 = \boxed{0,0584}$.

b) $X = \text{Número de horas de una intervención quirúrgica. } X = N(10, 2)$.

b1) Nos piden calcular $P(6,5 < X < 13)$.

$$\begin{aligned} P(6,5 < X < 13) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{6,5-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{13-10}{2}\right) = \\ &= P(-1,75 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < -1,75) = 0,9332 - (1 - P(Z < 1,75)) = \\ &= 0,9332 - (1 - 0,9599) = \boxed{0,8931} \end{aligned}$$

El porcentaje de intervenciones entre 6 horas y media y 13 horas es de 89,31 %.

b2) Nos piden calcular $P(X < 7)$.

$$\begin{aligned} P(X < 7) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{7-10}{2}\right) = P(Z < -1,5) = \\ &= 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \end{aligned}$$

El porcentaje de intervenciones de menos de 7 horas es de 6,68 %.



EvAU Extraordinaria 2018

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2 e^{-bt}$; donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.

a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** Nota: A largo plazo se entiende como que $t \rightarrow +\infty$.

2A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= -4 \\ x - 4y - 3z &= a^2 - 3 \end{aligned} \right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. **(1 punto)**

4A. Dados los puntos $A(-1, 3, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$

a) Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(0,75 puntos)**

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. **(0,75 puntos)**

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r . **(1 punto)**

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

b) Una parte de un examen consta de cinco preguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} dx \quad b) \int_1^2 (2x - 3)e^{x-1} dx \quad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. **(1,25 puntos)**

4B. Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 0, -4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB . **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A . **(1 punto)**

5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES**PROPUESTA A**

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2 e^{-bt}$; donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.

- a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**
 b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** Nota: A largo plazo se entiende como que $t \rightarrow +\infty$.

- a) Si $C(t)$ tiene un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$ su derivada se anula para $t = 2$.

$$C(t) = at^2 e^{-bt} \Rightarrow C'(t) = 2at e^{-bt} - b \cdot at^2 e^{-bt} = ate^{-bt} (2 - bt)$$

$$\left. \begin{array}{l} C'(t) = ate^{-bt} (2 - bt) \\ C'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 2 \cdot e^{-2b} (2 - 2b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2b - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ \text{ó} \\ a = 0 \end{cases} \text{ ¡No es posible! pues } a \in \mathbb{R}^+$$

Si $C(t) = at^2 e^{-t}$ tiene un extremo relativo en el punto $(2, 8e^{-2})$ su gráfica debe pasar por dicho punto, es decir, $C(2) = 8e^{-2}$.

$$\left. \begin{array}{l} C(t) = at^2 e^{-t} \\ C(2) = 8e^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot 2^2 e^{-2} = 8e^{-2} \Rightarrow 4a \cdot e^{-2} = 8e^{-2} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

- b) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2t^2 e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \begin{cases} \text{Indeterminación} \\ \text{Aplico L'Hôpital} \end{cases} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \begin{cases} \text{Indeterminación} \\ \text{Aplico L'Hôpital} \end{cases} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^t} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La concentración del fármaco en la sangre tiende a ser nula.

2A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ bx-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x)dx = 4$. **(1 punto)**

a) Si la función es derivable, debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 0$. Deben ser iguales los límites laterales en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + a}{x-1} = \frac{0^2 + a}{0-1} = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} bx-1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Si la función es derivable, debe serlo en $x = 0$ y las derivadas laterales deben coincidir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ bx-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (bx-1) - 1 \cdot (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{2bx^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{2b \cdot 0^2 - 0 - 0^2 - 1}{(0-1)^2} = -1 \\ f'(0^+) &= b \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

b) La integral definida es en el intervalo $(1,2)$, en dicho intervalo la función es $f(x) = bx-1$.

$$\int_1^2 f(x)dx = 4 \Rightarrow \int_1^2 bx-1dx = 4 \Rightarrow \left[b \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 4 \Rightarrow \left[b \frac{2^2}{2} - 2 \right] - \left[b \frac{1^2}{2} - 1 \right] = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b - 2 - \frac{b}{2} + 1 = 4 \Rightarrow 4b - 4 - b + 2 = 8 \Rightarrow 3b = 10 \Rightarrow \boxed{b = \frac{10}{3}}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & -4 \\ x - 4y - 3z & = & a^2 - 3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 + 4 + 2 - 3 + 4 = 10 - 10 = 0.$$

El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª y comprobamos el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de A es siempre 2.

Averiguamos el rango de la matriz ampliada A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -3 & a^2 - 3 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de eliminar la columna 1ª y averiguamos cuando su determinante se anula.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & a^2 - 3 \end{vmatrix} = -a^2 + 3 - 16 - 6 + 4 + 2a^2 - 6 + 12 = a^2 - 9$$

$$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{9} = \pm 3$$

Se nos plantean tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -3$ y $a \neq 3$

En este caso el determinante anterior es no nulo y por tanto el rango de A/B es 3. Como el rango de A es 2 el sistema es INCOMPATIBLE.

CASO 2. $a = -3$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & -4 \\ x - 4y - 3z & = & 9 - 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x + 2y + z = -4 \\ -x + y + z = -1 \\ \hline 3y + 2z = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x - 4y - 3z = 6 \\ -x + y + z = -1 \\ \hline -3y - 2z = 5 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 3y + 2z = -5 \\ -3y - 2z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 2}^a \\ -3y - 2z = 5 \\ 3y + 2z = -5 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 3y + 2z = -5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 3y + 2z = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 3y = -2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}z \end{array} \right\} \Rightarrow x - \left(-\frac{5}{3} - \frac{2}{3}z \right) - z = 1 \Rightarrow x + \frac{5}{3} + \frac{2}{3}z - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 5 + 2z - 3z = 3 \Rightarrow 3x = -2 + z \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a = 3$

El sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = 9 - 3 = 6 \end{array} \right\}$$

Es igual que en el caso anterior y por tanto también es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq -3$ y $a \neq 3$ el sistema es incompatible, si $a = -3$ o $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para el valor $a = -3$ el sistema queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = 9 - 3 = 6 \end{array} \right\}$$

Está resuelto en el apartado anterior y sus soluciones son $x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$; $y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$; $z = t$.

4A. Dados los puntos $A(-1,3,0)$, $B(2,0,-1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$

a) Calcula la distancia del punto A a la recta r . **(0,75 puntos)**

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. **(0,75 puntos)**

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r . **(1 punto)**

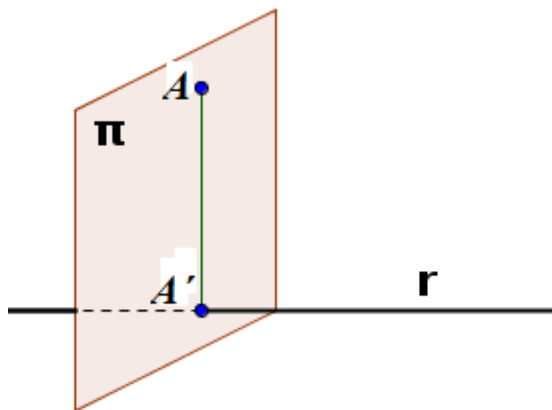
a) Hallamos la ecuación de la recta r intersección de los planos.

$$r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv x - 2y - 6 = 0 \\ \beta \equiv 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 6 \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(6, 0, 0) \in r \\ \vec{v}_r = (2, 1, -2) \end{cases}$$

Para hallar la distancia del punto A a la recta r determinamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .

Luego determinamos el punto A' de corte de recta r y plano π .

La distancia de punto A a la recta r es el módulo del vector $\overline{AA'}$.



El plano π tiene como vector normal el director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} P(6, 0, 0) \in r \\ \vec{v}_r = (2, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ A(-1, 3, 0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z + D = 0 \\ A(-1, 3, 0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-1) + 3 - 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow -2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0$$

Hallamos el punto A' de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x = 6 + 2t \\ r \equiv y = t \\ z = -2t \end{array} \right\} \Rightarrow 2(6 + 2t) + t - 2(-2t) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 4t + t + 4t - 1 = 0 \Rightarrow 9t + 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{11}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + 2\left(-\frac{11}{9}\right) = 6 - \frac{22}{9} = \frac{32}{9} \\ y = -\frac{11}{9} \\ z = -2\left(-\frac{11}{9}\right) = \frac{22}{9} \end{cases} \Rightarrow A' \left(\frac{32}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{22}{9} \right)$$

Hallamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{matrix} A(-1, 3, 0) \\ A' \left(\frac{32}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{22}{9} \right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{32}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{22}{9} \right) - (-1, 3, 0) = \left(\frac{41}{9}, \frac{-38}{9}, \frac{22}{9} \right)$$

$$\text{Distancia}(A, r) = |\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2 + \left(\frac{-38}{9}\right)^2 + \left(\frac{22}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{3609}{81}} = \boxed{\frac{\sqrt{401}}{3} \approx 6.67 \text{ u}}$$

b) El punto que nos piden hallar es el punto A' determinado en el apartado anterior.

$$A' \left(\frac{32}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{22}{9} \right)$$

c) El plano π' pedido tiene como vector director el director de la recta $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$ pues es paralelo a la misma. El otro vector director del plano será el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{matrix} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, 1, -2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) - (-1, 3, 0) = (3, -3, -1) \\ A(-1, 3, 0) \in \pi' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 1 - 6y + 18 - 6z - 3z + 2y - 6 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -7x - 4y - 9z + 5 = 0}$$

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

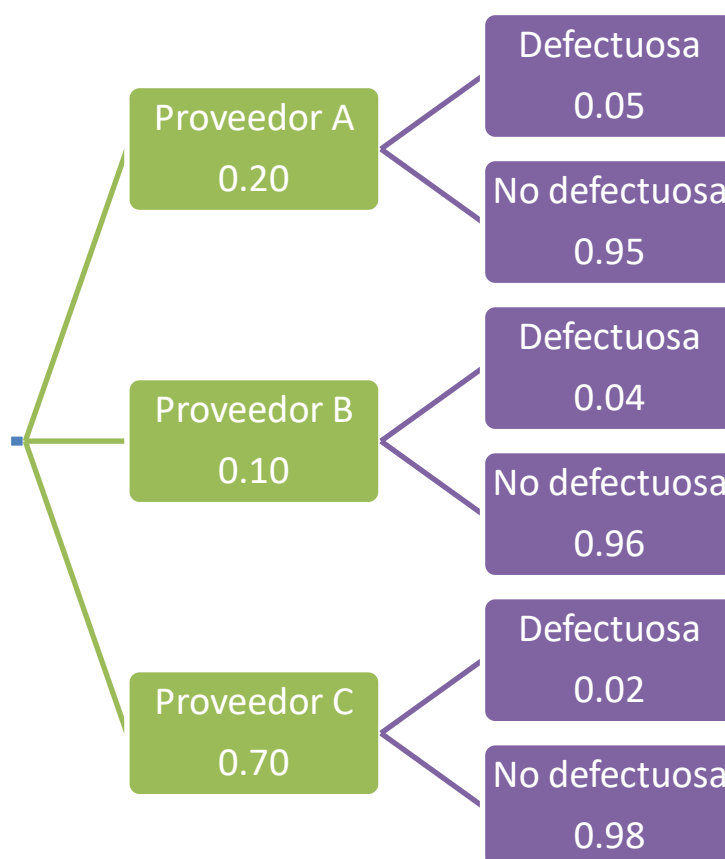
a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

b) Una parte de un examen consta de cinco preguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación y las distintas probabilidades.



$$a1) P(\text{No defectuosa}) = 0.20 \cdot 0.95 + 0.10 \cdot 0.96 + 0.70 \cdot 0.98 = \boxed{0.972}$$

a2)

$$\begin{aligned}
 P(\text{Proveedor B} / \text{Es defectuosa}) &= \frac{P(\text{Proveedor B} \cap \text{Es defectuosa})}{P(\text{Es defectuosa})} = \\
 &= \frac{0.10 \cdot 0.04}{1 - P(\text{No es defectuosa})} = \frac{0.0040}{1 - 0.972} = \frac{0.0040}{0.0280} = \frac{1}{7} = \boxed{0.142}
 \end{aligned}$$

b) X = Número de aciertos en 5 preguntas.

b1) Es una variable aleatoria binomial pues se responde al azar y la probabilidad de acierto en cada pregunta es la misma. Y son cinco repeticiones.

$$p = P(\text{Acertar en una pregunta}) = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \left. \begin{array}{l} n = 5 \\ X = \text{Número de aciertos} \end{array} \right\} \Rightarrow X = B(5, 0.5)$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.3125 + 0.1563 + 0.0313 = \boxed{0.5001}$$

n \ k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0214	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,1875	0,1757	0,1563	0,1563
	4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,0094	0,0146	0,0231	0,0312	0,0408	0,0488	0,0543	0,0573	0,0573
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0313

b2) Es una variable aleatoria binomial pues se responde al azar y la probabilidad de acierto en cada pregunta es la misma. Y son cinco repeticiones.

$$p = P(\text{Acertar en una pregunta}) = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \left. \begin{array}{l} n = 5 \\ X = \text{Número de aciertos} \end{array} \right\} \Rightarrow X = B(5, 0.25)$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.0879 + 0.0146 + 0.0010 = \boxed{0.1035}$$

n \ k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0214	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,0094	0,0146	0,0231	0,0312	0,0408	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

- 1B. a)** Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**

- a) La expresión de la suma de las coordenadas de los puntos de la gráfica es:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow S(x) = x + y = x + x^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos de la función $S(x)$.

$$S(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow S'(x) = 2x + 1$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Comprobamos si es un mínimo o un máximo utilizando la derivada segunda.

$$S'(x) = 2x + 1 \Rightarrow S''(x) = 2 \Rightarrow S''(-0.5) = 2 > 0$$

Como la derivada segunda es positiva, en el valor $x = -0.5$ hay un mínimo relativo. Sustituimos en la función y hallamos las coordenadas del punto.

$$\left. \begin{array}{l} x = -0.5 \\ y = x^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = (-0.5)^2 + 1 = 1.25$$

El punto $(-0.5, 1.25)$ es el punto de la gráfica de la parábola donde la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

- b) La recta normal a la gráfica en $x = -1/2$ tiene la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} y - y\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{y'(-1/2)} \left(x - \left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\ y = x^2 + 1 \rightarrow y\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1 = 1.25 \\ y' = 2x \rightarrow y'(-1/2) = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1.25 = \frac{-1}{-1} \left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = x + 0.5 + 1.25$$

$$\boxed{y = x + 1.75}$$

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} dx$ b) $\int_1^2 (2x-3)e^{x-1} dx$ **(1,25 puntos por integral)**

a) $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} dx = \dots$

$$\begin{array}{r} 2x^3 \quad -x^2 \quad +2 \quad | \quad x^2 - x \\ -2x^3 \quad +2x^2 \quad \quad \quad | \quad 2x+1 \\ \hline \quad x^2 \quad +2 \quad \quad \quad \Rightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x} = 2x+1 + \frac{x+2}{x^2 - x} \\ \quad -x^2 \quad +x \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad \quad x \quad +2 \end{array}$$

$$\dots = \int 2x+1 + \frac{x+2}{x^2-x} dx = \int 2x+1 dx + \int \frac{x+2}{x^2-x} dx = x^2 + x + \int \frac{x+2}{x^2-x} dx = \dots$$

$$\begin{array}{l} x^2 - x = x(x-1) \\ \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \\ \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \Rightarrow x+2 = A(x-1) + Bx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 2 = -A \rightarrow A = -2 \\ x=1 \rightarrow 3 = B \end{cases} \\ \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x-1} \end{array}$$

$$\dots = x^2 + x + \int \frac{-2}{x} + \frac{3}{x-1} dx = x^2 + x - 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx = \boxed{x^2 + x - 2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| + K}$$

b) Calculo primero la integral indefinida y luego aplicamos la regla de Barrow.

$$\int (2x-3)e^{x-1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = 2x-3 \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{x-1} dx \rightarrow v = \int e^{x-1} dx = e^{x-1} \end{array} \right\} = (2x-3)e^{x-1} - \int e^{x-1} 2dx =$$

$$= 2xe^{x-1} - 3e^{x-1} - 2 \int e^{x-1} dx = 2xe^{x-1} - 3e^{x-1} - 2e^{x-1} = \boxed{2xe^{x-1} - 5e^{x-1} + K}$$

Lo aplico a la integral definida.

$$\int_1^2 (2x-3)e^{x-1} dx = \left[2xe^{x-1} - 5e^{x-1} \right]_1^2 = \left[2 \cdot 2e^{2-1} - 5e^{2-1} \right] - \left[2 \cdot 1e^{1-1} - 5e^{1-1} \right] = \boxed{-e+3}$$

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. **(1,25 puntos)**

a)

$$\begin{aligned} A^2 = aA + bI &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+0 & -3-3 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 = a+b \\ -6 = -3a \\ 0 = 0 \\ 1 = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a+b \\ -6 = -3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a+b \\ \boxed{a=2} \end{cases} \Rightarrow 1 = 2+b \Rightarrow \boxed{b=-1} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -1$.

b)

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \Rightarrow \cancel{A^2} + AX - XA - \cancel{X^2} = \cancel{A^2} - \cancel{X^2} \Rightarrow AX - XA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX = XA \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a+b \\ c & -3c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-3c = a \\ b-3d = -3a+b \\ c = c \\ d = -3c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a} - 3c = \cancel{a} \\ \cancel{b} - 3d = -3a + \cancel{b} \\ \cancel{c} = \cancel{c} \\ \cancel{d} = -3c + \cancel{d} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3c = 0 \\ -3d = -3a \\ 0 = -3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3c = 0 \\ -3d = -3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=0} \\ \boxed{d=a} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Las matrices que cumplen la condición son $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; $a, b \in \mathbb{R}$

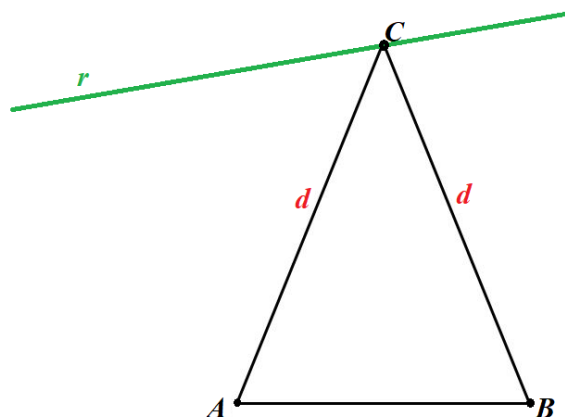
4B. Dados los puntos $A(-1,2,0)$, $B(1,0,-4)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB . **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A . **(1 punto)**

a) Observamos el dibujo para iniciar la búsqueda del punto C .



El punto C pertenece a la recta r y además la distancia de A a C es igual que la distancia de C a B .

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow C(1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda) \\ C \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} D(C, A) = D(C, B) \\ A(-1, 2, 0) \\ B(1, 0, -4) \\ C(1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda) - (-1, 2, 0) = (2 - \lambda, \lambda - 2, 3 + \lambda) \\ \overrightarrow{BC} = (1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda) - (1, 0, -4) = (-\lambda, \lambda, 7 + \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{BC} \right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (\lambda - 2)^2 + (3 + \lambda)^2} = \sqrt{(-\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (7 + \lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - \lambda)^2 + (\lambda - 2)^2 + (3 + \lambda)^2 = (-\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (7 + \lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + \cancel{\lambda^2} - 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 - 4\lambda + 9 + \cancel{\lambda^2} + 6\lambda = \cancel{\lambda^2} + \cancel{\lambda^2} + 49 + \cancel{\lambda^2} + 14\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17 - 2\lambda = 49 + 14\lambda \Rightarrow -16\lambda = 32 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \boxed{C(1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda) = (3, -2, 1)}$$

- b) La recta s perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como vector director el producto vectorial del vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 0, -4) - (-1, 2, 0) = (2, -2, -4) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{v_s} = -2i + 4j + 2k - 2k - 2j + 4i = 2i + 2j = (2, 2, 0)$$

Además la recta s pasa por el punto $A(-1, 2, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = (2, 2, 0) \\ A(-1, 2, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información necesaria para resolver el problema planteado.

Establecemos que son 100 alumnos y trabajamos con valores absolutos.

	Aprueba Biología	No aprueba Biología	
Aprueba Matemáticas	60		70
No aprueba Matemáticas			
	80		100

Completamos la tabla teniendo en cuenta que la suma de las dos primeras celdas de cada fila o columna deben dar el resultado total que aparece a la derecha o en la parte inferior.

	Aprueba Biología	No aprueba Biología	
Aprueba Matemáticas	60	10	70
No aprueba Matemáticas	20	10	30
	80	20	100

a1) Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

Los casos posibles son 100 y los favorables son los que aprueban matemáticas y biología más los que aprueban sólo matemáticas más los que aprueban sólo biología.

$$P(\text{Apruebe alguna de las asignaturas}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{60 + 20 + 10}{100} = \boxed{0.9}$$

a2) Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

Tenemos en cuenta que los casos posibles ya no son 100 sino 80 que son los que aprueban Biología. Y de todos estos los que aprueban matemáticas son solo 60.

$$P(\text{Apruebe Matemáticas / Aprueba Biología}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{60}{80} = \boxed{0.75}$$

b) X = Cantidad de líquido dispensado.

Varianza = $\sigma^2 \rightarrow 4 = \sigma^2 \rightarrow \sigma = 2$. Sabemos que la media es 20 y la desviación típica es 2.

$X = N(25, 2)$

$$\begin{aligned} \text{b1) } P(22 < X < 28) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{22-25}{2} < \frac{X-25}{2} < \frac{28-25}{2}\right) = P(-1.5 < Z < 1.5) = \\ &= P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z > 1.5) = P(Z < 1.5) - [1 - P(Z < 1.5)] = \\ &= \{\text{Buscamos en la tabla de la } N(0, 1)\} = \dots \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

$$\dots = 0.9332 - [1 - 0.9332] = \boxed{0.8664}$$

b2) Para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 % siendo el vaso de "a" cl debe cumplirse que $P(X > a) < 0.025$.

Averiguamos cuando $P(X > a) = 0.025$

$$\begin{aligned} P(X > a) &= 0.025 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(\frac{X-25}{2} > \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z > \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow 1 - 0.025 = P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) = 0.975 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

$$\frac{a-25}{2} = 1.96 \Rightarrow a = 25 + 2 \cdot 1.96 = 28.92$$

Para que la probabilidad de derramarse el líquido sea inferior al 2,5% el vaso debe de ser, al menos, de 29 cl.



EvAU Ordinaria 2018

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{b) } \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x dx \quad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx \quad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$

a) Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)**

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X . **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313



Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. **(0,75 puntos)**

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos).**

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES**PROPUESTA A**

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

a) El T. de Bolzano dice que si una función es continua en (a, b) y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ es un polinomio, por tanto continua, y en el intervalo $[-1, 1]$ cambia de signo.

$$f(x) = x^{15} + x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = (-1)^{15} - 1 + 1 = -1 < 0 \\ f(1) = 1^{15} + 1 + 1 = 3 > 0 \end{cases}$$

Cumple las hipótesis del teorema, luego existe, al menos un punto $c \in (-1, 1)$ donde $f(x)$ se anula.

b) Para que existan más puntos donde la función se anule debe de tener algún máximo o mínimo. Determinemos si los tiene.

$$f(x) = x^{15} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 15x^{14} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^{14} + 1 = 0 \Rightarrow 15x^{14} = -1 \Rightarrow x^{14} = -\frac{1}{15} \Rightarrow x = \sqrt[14]{-\frac{1}{15}} = \text{No existe}$$

No existe ningún punto crítico y la función siempre crece, pues su derivada $f'(x) = 15x^{14} + 1$ es siempre positiva (exponente par).

Solo corta el eje OX en un punto $c \in (-1, 1)$.

OTRA FORMA DE DEMOSTRARLO.

Podemos aplicar el teorema de Rolle:

Sea $f(x)$ una función que es **continua** en $[c, d]$ y **derivable** en (c, d) y que además cumple que $f(c) = f(d)$. Entonces existe algún punto $e \in (c, d)$ tal que $f'(e) = 0$.

Si existiese otro punto $x = d$ donde la función se anula tendríamos un intervalo (c, d) donde la función es continua y derivable y además $f(c) = f(d) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle existe algún punto $e \in (c, d)$ tal que $f'(e) = 0$. Y hemos visto que la derivada nunca se anula.

Por lo que la hipótesis de partida es falsa y no existe ningún punto más donde la función se anula.

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x dx \quad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (x^2 - 1) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \text{sen} x \end{array} \right\} = (x^2 - 1) \text{sen} x - \int \text{sen} x \cdot 2x dx =$$

$$= (x^2 - 1) \text{sen} x - 2 \int x \text{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \text{sen} x dx \rightarrow v = \int \text{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2 - 1) \text{sen} x - 2 \left[x(-\cos x) - \int -\cos x dx \right] =$$

$$= (x^2 - 1) \text{sen} x - 2 \left[-x \cos x + \int \cos x dx \right] =$$

$$= (x^2 - 1) \text{sen} x - 2 \left[-x \cos x + \text{sen} x \right] =$$

$$= x^2 \text{sen} x - \text{sen} x + 2x \cos x - 2 \text{sen} x = \boxed{x^2 \text{sen} x - 3 \text{sen} x + 2x \cos x}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x dx = \left[x^2 \text{sen} x - 3 \text{sen} x + 2x \cos x \right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\pi^2 \text{sen} \pi - 3 \text{sen} \pi + 2\pi \cos \pi \right] - \left[0^2 \text{sen} 0 - 3 \text{sen} 0 + 2 \cdot 0 \cos 0 \right] = \boxed{-2\pi}$$

b) Calculamos la integral usando el cambio de variable $e^x = t$.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \Rightarrow e^{2x} = t^2 \\ e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{t}}{t^2 + t - 2} \frac{dt}{\cancel{t}} = \int \frac{1}{t^2 + t - 2} dt = \dots$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2)$$

$$\frac{1}{t^2 + t - 2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} \Rightarrow \frac{1}{t^2 + t - 2} = \frac{A(t+2) + B(t-1)}{(t-1)(t+2)} \Rightarrow 1 = A(t+2) + B(t-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow 1 = 3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \\ t=-2 \rightarrow 1 = -3B \rightarrow B = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t^2 + t - 2} = \frac{1/3}{t-1} - \frac{1/3}{t+2}$$

$$\dots = \int \frac{1/3}{t-1} - \frac{1/3}{t+2} dt = \int \frac{1/3}{t-1} dt - \int \frac{1/3}{t+2} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{3} \ln|t-1| - \frac{1}{3} \ln|t+2| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = e^x \end{array} \right\} = \boxed{\frac{1}{3} \ln|e^x - 1| - \frac{1}{3} \ln|e^x + 2| + K}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Averiguamos los valores de “a” que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -5a + 3 - 4a + a^2 + 15 - 4 = a^2 - 9a + 14$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 9a + 14 = 0 \Rightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{9+5}{2} = 7 \\ \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes posibles.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq 7$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución).

CASO 2. $a = 2$

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + 2y + z = 2 \\ -x - 3y + 2z = -4 \\ \hline -y + 3z = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + 4y - 5z = 6 \\ -x - 3y + 2z = -4 \\ \hline y - 3z = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ -y + 3z = -2 \\ y - 3z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a = -\text{Ecuación } 2^a \\ \text{Quitamos la ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ y - 3z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = 3z + 2}$$

$$\Rightarrow x + 3(3z + 2) - 2z = 4 \Rightarrow x + 9z + 6 - 2z = 4 \Rightarrow \boxed{x = -7z - 2}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones). Las soluciones son:
 $x = -7t - 2$; $y = 3t + 2$; $z = t$

CASO 3. $a = 7$

El sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + 3y - 7z = 4 \\ x + 7y + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 7z = 4 \\ x + 7y + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x + 7y + z = 2 \\ -x - 3y + 7z = -4 \\ \hline 4y + 8z = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x + 4y - 5z = 6 \\ -x - 3y + 7z = -4 \\ \hline y + 2z = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ 4y + 8z = -2 \\ y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 4 \cdot \text{Ecuación 3}^a \\ 4y + 8z = -2 \\ -4y - 8z = -8 \\ \hline 0 = -10 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ 4y + 8z = -2 \\ 0 = -10 \end{array} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

La tercera ecuación del sistema plantea una igualdad imposible, por lo que el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq 7$ el sistema es compatible determinado, si $a = 2$ el sistema es compatible determinado y si $a = 7$ el sistema es incompatible.

b) Para $a = 2$ está resuelto el sistema en el apartado anterior y sus soluciones son:

$$x = -7t - 2; y = 3t + 2; z = t \quad \text{siendo } t \in \mathbb{R}$$

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$

a) Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)**

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0 \\ A(2, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \alpha) = \frac{|4(2) + 2(-3) + 4(1) - 15|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{9}{6} = 1.5 u$$

b) Sean los puntos de coordenadas $P(x, y, z)$. Deben cumplir:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0 \\ P(x, y, z) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \alpha) = 1.5 \Rightarrow \frac{|4x + 2y + 4z - 15|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} = 1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4x + 2y + 4z - 15| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y + 4z - 15 = 9 \Rightarrow 4x + 2y + 4z - 24 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta: 2x + y + 2z - 12 = 0} \\ \text{ó} \\ 4x + 2y + 4z - 15 = -9 \Rightarrow 4x + 2y + 4z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y + 2z - 3 = 0} \end{array} \right.$$

El lugar geométrico son dos planos paralelos a α situados a 1.5 unidades del plano α . Uno por encima y otro por debajo del plano α .

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

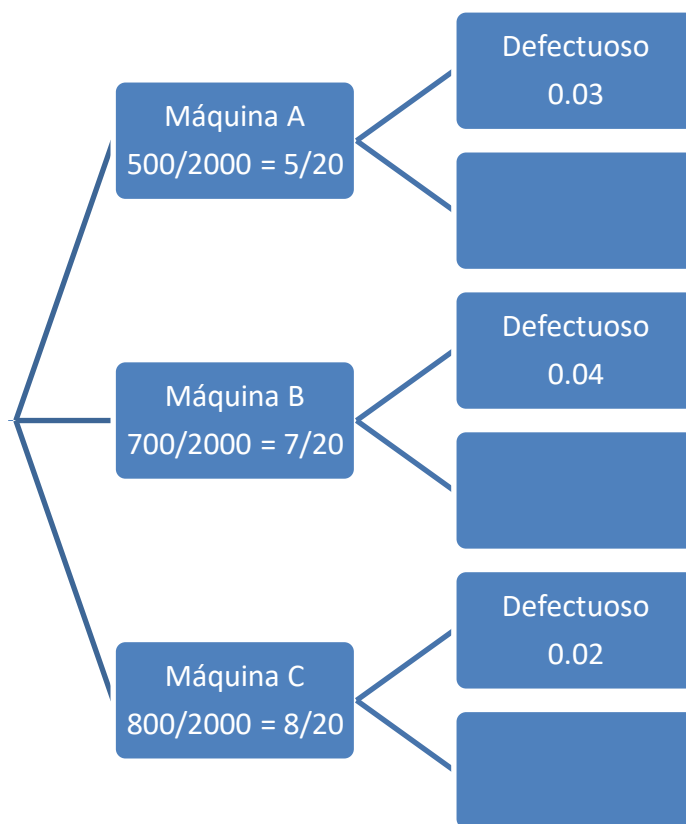
b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos un diagrama de árbol para resolver el problema.

Se producen entre las tres máquinas un total de $500 + 700 + 800 = 2000$ condensadores.



a1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Defectuoso}) &= P(\text{Máquina A})P(\text{Defectuoso} / \text{Máquina A}) + \\
 &+ P(\text{Máquina B})P(\text{Defectuoso} / \text{Máquina B}) + \\
 &+ P(\text{Máquina C})P(\text{Defectuoso} / \text{Máquina C}) = \\
 &= \frac{5}{20} \cdot 0.03 + \frac{7}{20} \cdot 0.04 + \frac{8}{20} \cdot 0.02 = \frac{0.15 + 0.28 + 0.16}{20} = \frac{0.59}{20} = \boxed{0.0295}
 \end{aligned}$$

$$\text{a2) } P(\text{Máquina A} / \text{Defectuoso}) = \frac{P(\text{Máquina A} \cap \text{Defectuoso})}{P(\text{Defectuoso})} = \frac{\frac{5}{20} \cdot 0.03}{0.0295} = \frac{15}{59} = \boxed{0.254}$$

b) $X = \text{"Número de múltiplos de tres que pueden salir"}$ es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 2/6 = 0.33$.

$$X = B(5, 0.33)$$

b1) Media = $n \cdot p = 5 \cdot 1/3 = 5/3$.

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = 1.054$$

b2) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.0412 + 0.0041 = \boxed{0.0453}$

n	k	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1307	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0022	0,0084	0,0148	0,0231	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

- 1B.** a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. **(0,75 puntos)**
- b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
- c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

- a)** Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ es un polinomio y por lo tanto es continua y derivable en cualquier intervalo. Además
$$\begin{cases} f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 + a = 3 + a \\ f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + a = 3 + a \end{cases} \Rightarrow f(1) = f(3), \text{ para cualquier valor de } a.$$

- b)** Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{10+4}{6} = \frac{7}{3} = 2.33 \\ \frac{10-4}{6} = 1 \end{cases}$$

El valor de x en el intervalo $(1, 3)$ en el cual se anula la derivada que existe según el teorema de Rolle es $x = 7/3$.

- c)** La pendiente de la recta $y = 4x + 2$ es 4, por lo que la recta tangente debe tener pendiente 4, es decir, la derivada de la función debe ser 4. Buscamos ese valor.

$$f'(x) = 4 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{10+8}{6} = \boxed{3 = x} \\ \frac{10-8}{6} = \boxed{\frac{1}{3} = x} \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 = 3 \Rightarrow \boxed{A(3,3)}$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} = \frac{49}{27} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{1}{3}, \frac{49}{27}\right)}$$

Los puntos buscados tienen coordenadas $A(3,3)$ y $B\left(\frac{1}{3}, \frac{49}{27}\right)$.

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos).**

Localizamos los puntos de corte de dichas gráficas y el área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre un valor y el otro de la diferencia entre las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2e^{-x} = 2xe^{-x} \Rightarrow x^2e^{-x} - 2xe^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0 \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!} \\ \text{ó} \\ x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ó} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son $x=0$ y $x=2$, por lo que el área es $\text{Área} = \left| \int_0^2 2xe^{-x} - x^2e^{-x} dx \right|$

Calculamos la integral indefinida primero.

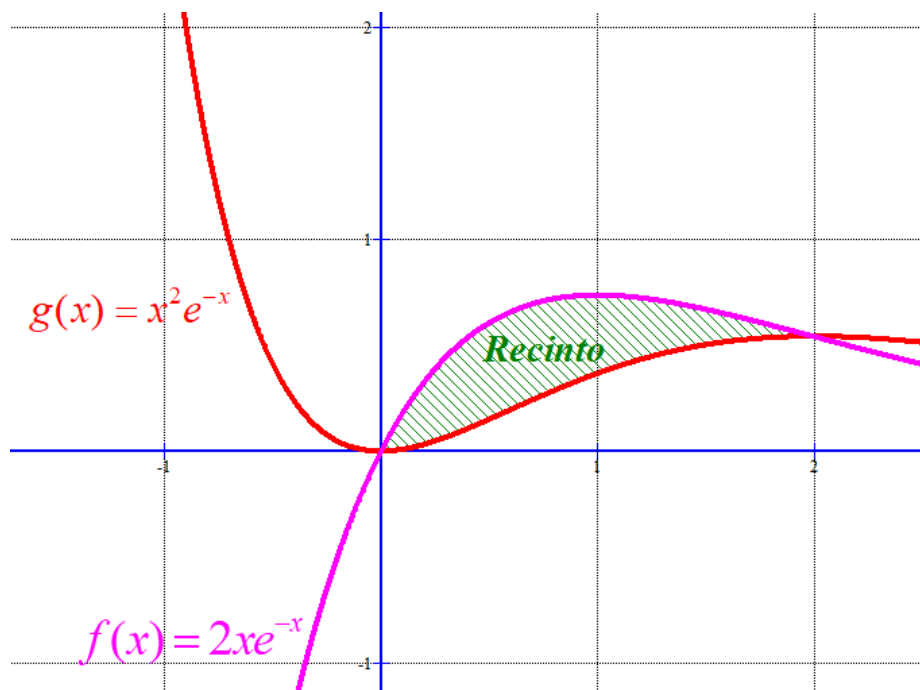
$$\begin{aligned} \int 2xe^{-x} - x^2e^{-x} dx &= \int (2x - x^2)e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = 2x - x^2 \rightarrow du = (2 - 2x)dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\ &= (2x - x^2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(2 - 2x)dx = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} + \int 2e^{-x} - 2xe^{-x}dx = \\ &= -2xe^{-x} + x^2e^{-x} + \int 2e^{-x}dx - \int 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} - 2e^{-x} - \int 2xe^{-x}dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = 2x \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = \\ &= -2xe^{-x} + x^2e^{-x} - 2e^{-x} - \left[(2x)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})2dx \right] = \\ &= -2xe^{-x} + x^2e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2 \int e^{-x}dx = \\ &= \cancel{-2xe^{-x}} + x^2e^{-x} - \cancel{2e^{-x}} + \cancel{2xe^{-x}} + \cancel{2e^{-x}} = \boxed{x^2e^{-x} + K} \end{aligned}$$

Calculamos el valor de la integral definida.

$$\text{Área} = \left| \int_0^2 2xe^{-x} - x^2e^{-x} dx \right| = \left| \left[x^2e^{-x} \right]_0^2 \right| = \left[2^2e^{-2} \right] - \left[0^2e^{-0} \right] = 4e^{-2} = \boxed{0.5413 u^2}$$

El área del recinto es 0.5413 unidades cuadradas.

Para comprobarlo hacemos el dibujo y contamos cuadraditos (cada cuadradito = 1 u²).



Es difícil contar pues el valor del área es muy pequeño, pero se aprecia que la zona rayada es menos de un cuadradito, es decir, menos de 1 unidad cuadrada y un poco más de la mitad.

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

a) La matriz tendrá inversa cuando su determinante no se anule. Averiguamos cuando se anula.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)2 + a - 0 + a(a-2) + 0 + 0 = \\ &= (a^2 - 2a - a + 2)2 + a + a^2 - 2a = 2a^2 - 6a + 4 + a + a^2 - 2a = 3a^2 - 7a + 4 \\ |A| = 0 &\Rightarrow 3a^2 - 7a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} = \begin{cases} \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{7-1}{6} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz A tiene inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq \frac{4}{3}$

b) Para $a = 2$ existe la inversa y la calculamos con la fórmula $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|}$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \\ A^{-1} &= \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobamos que es la inversa.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & -1+2-1 & 1/2-1/2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & -2+0+2 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Faltaría comprobar que también se cumple $A^{-1} \cdot A = Id$

c) Para $a = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos las propiedades de los determinantes y tenemos que:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

$$|2A| = \{ \text{La matriz } A \text{ es de dimensión } 3 \times 3 \} = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 4 = 32$$

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:

- a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda \vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
 b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
 c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe dar como resultado 0.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} - \lambda \vec{v} &= (0,1,1) - \lambda(1,1,-1) = (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) \\ \vec{w} &= (2,0,3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) \cdot (2,0,3) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{u} - \lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda + 3 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$$

b) Para que sean 3 vectores linealmente dependientes el determinante de orden 3 formado por sus coordenadas debe dar como resultado 0.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= (0,1,1) \\ \vec{v} &= (1,1,-1) \\ \vec{w} &= (2,0,3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 2 - 3 - 0 = -7 \neq 0$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, pues el determinante es no nulo.

c) Si la recta es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces su vector director es el producto vectorial de dichos vectores.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= (0,1,1) \\ \vec{v} &= (1,1,-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j + 0 - k + 0 - i = -2i + j - k = (-2, 1, -1)$$

Obtenemos la ecuación de la recta pedida.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 1, -1) \\ P(2, 0, 2) &\in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

La pasamos a ecuaciones implícitas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}}$$

5B. a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

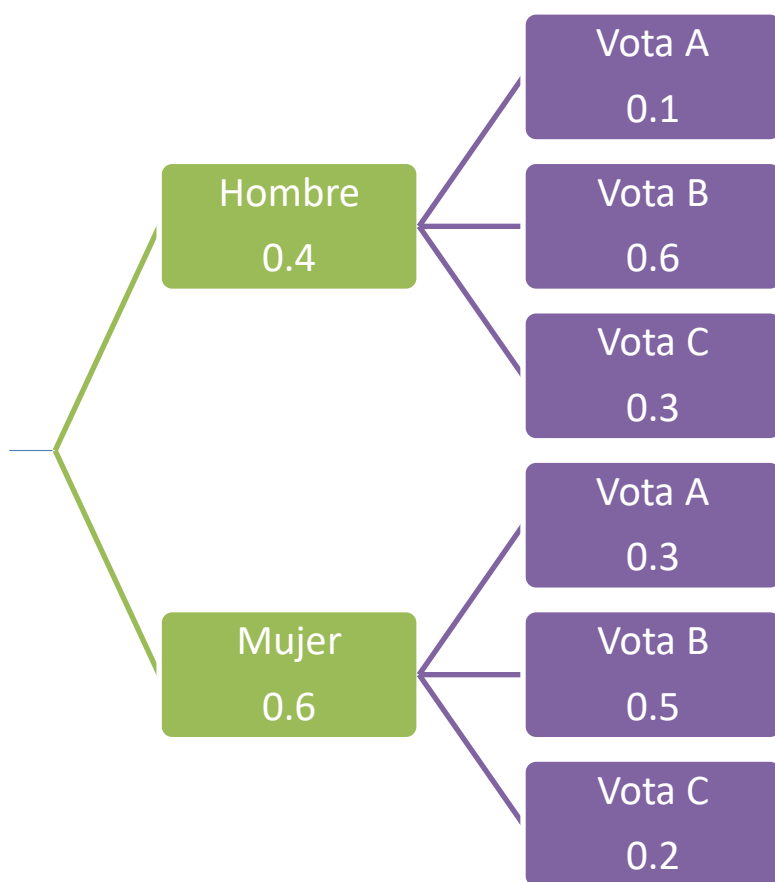
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

Hacemos un diagrama de árbol describiendo la situación planteada.



$$a1) P(\text{Ser hombre y votante de C}) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$$

a2) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Ser mujer} / \text{Votante de B}) = \frac{P(\text{Ser mujer} \cap \text{Votante de B})}{P(\text{Votante de B})} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.6} = \frac{0.30}{0.3 + 0.24} = \frac{0.30}{0.54} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

b) X = Nota de un opositor. $X = N(4.05, 2.5)$

b1) Nos piden calcular $P(X > 5)$.

$$P(X > 5) = P\left(\frac{X - 4.05}{2.5} > \frac{5 - 4.05}{2.5}\right) = P(Z > 0.38) = 1 - P(Z < 0.38) =$$

$$= \{\text{Mirando la tabla}\} = 1 - 0.6480 = 0.352$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Por lo que de los 1000 estudiantes han superado el 5 en la prueba $0.352 \cdot 1000 = 352$ de ellos.

b2) Nos piden averiguar el valor de “a” para que $P(X > a) = \frac{330}{1000}$.

$$P(X > a) = \frac{330}{1000} \Rightarrow 1 - P(X < a) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X < a) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ \text{para utilizar la tabla proporcionada} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X - 4.05}{2.5} < \frac{a - 4.05}{2.5}\right) = P\left(Z < \frac{a - 4.05}{2.5}\right) = 0.67 \Rightarrow \dots$$

Miramos en la tabla.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

$$\dots \Rightarrow \frac{a - 4.05}{2.5} = 0.44 \Rightarrow a - 4.05 = 2.5 \cdot 0.44 \Rightarrow \boxed{a = 5.15}$$

La nota de corte debe ser de 5.15 puntos para conseguir 330 aprobados.



EvAU Septiembre 2017

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x+k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{array} \right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. **(1 punto)**

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25% de los componentes son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 55% por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. **(0,5 puntos)**

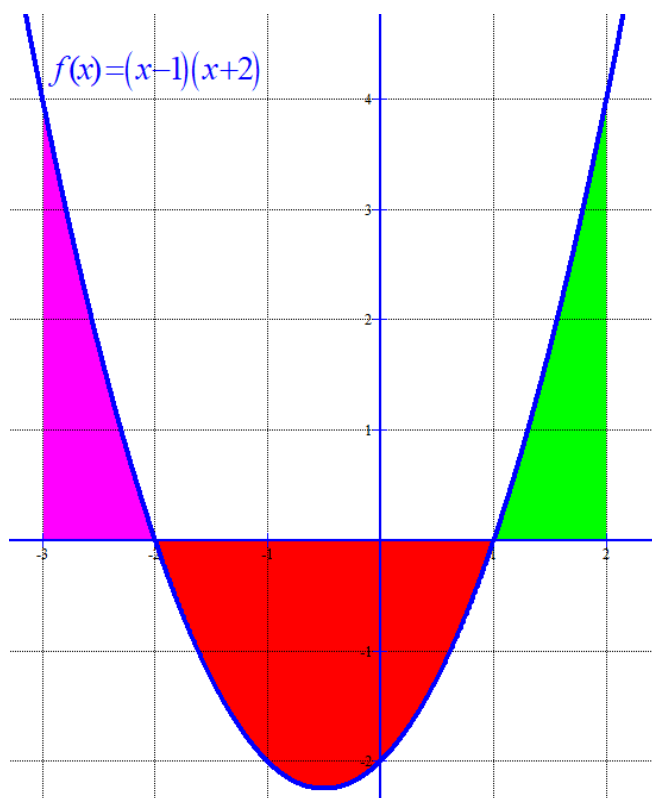
a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES**PROPUESTA A**

- 1A.** a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

a) La función $f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + 2x - 2 - x = x^2 + x - 2$ es una parábola. Tenemos sus puntos de corte con los ejes $x = 1$ y $x = 2$. Representamos su gráfica con una tabla de valores.

x	$y = (x-1)(x+2)$
-3	4
-2	3
-1	-2
0	-2
1	0



El área se calcula con 3 integrales definidas obteniendo el área de la región rosa, roja y verde y después sumamos dichas áreas para obtener el área total.

$$\int_{-3}^{-2} x^2 + x - 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-2} = \left[\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) \right] - \left[\frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 2(-3) \right] = \frac{11}{6}$$

Área de zona de la izquierda vale $11/6 \text{ u}^2$

$$\int_{-2}^1 x^2 + x - 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^1 = \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) \right] = -\frac{27}{6}$$

Área de zona central vale $27/6 \text{ u}^2$

$$\int_1^2 x^2 + x - 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 4 \right] - \left[\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \right] = \frac{11}{6}$$

Área de zona de la derecha vale $11/6 \text{ u}^2$.

$$\text{El área total es } \frac{11}{6} + \frac{27}{6} + \frac{11}{6} = \boxed{\frac{49}{6} = 8.16 u^2}$$

- b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + x - 2$ en $x = 2$ tiene la ecuación $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Terminamos de calcular dicha expresión.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + x - 2 \rightarrow f(2) = 2^2 + 2 - 2 = 4 \\ f'(x) = 2x + 1 \rightarrow f'(2) = 4 + 1 = 5 \\ y - f(2) = f'(2)(x - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 4 = 5(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = 5x - 6}$$

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x+k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

a) Para que sea continua en $x = 0$ deben ser iguales sus límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} = \left(\frac{0+1}{0+1}\right)^{1/0} = 1^{-\infty} = \text{Indeterminación} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x+1}{2x+1} - 1\right) \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x+1-2x-1}{2x+1}\right) \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x}{2x+1}\right) \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{2x+1}} = e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 6x + k = k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{e}}$$

b) El T. de Bolzano dice que si una función es continua en (a,b) y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$ entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Tomamos la función $f(x) = -2 + x + \cos x$ y consideramos el intervalo $[0, 2\pi]$.

En dicho intervalo la función es continua y en los extremos del intervalo se cumple que $f(0) = -2 + 0 + \cos 0 = -1 < 0$ y $f(2\pi) = -2 + 2\pi + \cos 2\pi = -2 + 2\pi + 1 = 5,28 > 0$.

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0, 2\pi)$ tal que $f(c) = 0$.

$$f(c) = -2 + c + \cos c = 0 \Rightarrow \boxed{\cos c = 2 - c}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. (1 punto)

a) Consideramos su matriz de coeficientes y averiguamos cuando se anula su determinante.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{l} 1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \end{array} \right. \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = (a-1)(a^2 + a - 2) \\ \hline \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \\ \\ a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = -2 \\ \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \\ \\ a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \end{array}$$

$\dots \Rightarrow a = 1; a = -2$ son los valores que anulan el determinante.

Consideramos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (única solución).

CASO 2. $a = 1$

En este caso el sistema queda $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + y + z = 0 \\ -x - y - z = -1 \\ \hline 0 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 0 = -1 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema plantea una ecuación que es una igualdad imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

CASO 3. $a = -2$

En este caso el sistema queda
$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} . \text{ Intentamos resolverlo.}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ \hline -3y + 3z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a + 2 \cdot \text{Ecuación 3}^a \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \\ \hline 3y - 3z = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \\ 3y - 3z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a + \text{Ecuación 2}^a \\ 3y - 3z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \\ \hline 0 = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -3y + 3z = 1 \\ 0 = 2 \end{array} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CONCLUSIÓN: Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ o $a = -2$ es incompatible.

- b) Para el valor $a = 0$ el sistema es compatible determinado.
Sustituimos este valor en el sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 1 - z \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x + 1 - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -z \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -z - z = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z = -1 \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

La solución del sistema es $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

- a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

- a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0 \\ EJE Z \rightarrow x = 0, y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 0 + z + 2 = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow A(0, 0, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0 \\ EJE Y \rightarrow x = 0, z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0 + 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0 \\ EJE X \rightarrow y = 0, z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2, 0, 0)$$

Tenemos cuatro puntos que forman un tetraedro OABC.

Hallamos su volumen como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que lo definen $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Volumen} = \left| \frac{[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}]}{6} \right| = \left| \frac{-4}{6} \right| = \boxed{\frac{2}{3} = 0.66 u^3}$$

- b) La recta paralela a los planos α y β cumple que su vector director es perpendicular a los vectores normales de los planos, por lo que el producto vectorial de los vectores normales de los planos nos sirve como vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n}_\alpha = (-1, 2, 1) \\ \beta \equiv -2y + z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n}_\beta = (0, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}_r = 2i + 2k + j + 2i = 4i + j + 2k = (4, 1, 2)$$

Obtenemos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v}_r = (4, 1, 2) \\ P(0, -1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y + 1 = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4(y + 1) \\ z = 3 + 2(y + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y + 4 \\ z = 3 + 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - 4y - 4 = 0 \\ -2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25% de los componentes son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 55% por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

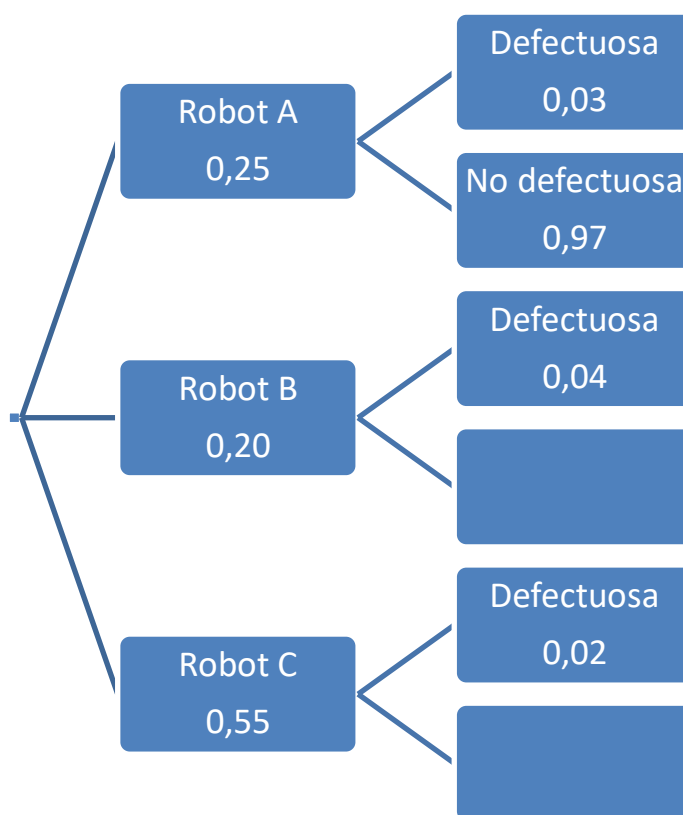
a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

a) Dibujamos un diagrama de árbol donde aparezcan todas las probabilidades asociadas al experimento.



a1) Observando el diagrama podemos calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{Defectuosa}) = 0.25 \cdot 0.03 + 0.20 \cdot 0.04 + 0.55 \cdot 0.02 = \boxed{0.0265}$$

$$a2) P(\text{Robot C} / \text{Defectuosa}) = \frac{P(\text{Robot C} \cap \text{Defectuosa})}{P(\text{Defectuosa})} = \frac{0.55 \cdot 0.02}{0.0265} = \boxed{\frac{22}{53} = 0.415}$$

b) Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras que salen en 5 lanzamientos de una moneda trucada.

Como en la tabla que nos ofrecen solo aparecen $p \leq 0.5$ y la probabilidad de salir cara es 0.6 cambiamos el “éxito” de la binomial a “sacar cruz = no sacar cara”.

Hemos cambiado la variable aleatoria a X = Número de cruces que salen en 5 lanzamientos de una moneda trucada.

Se trata de una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 5$ y $p = 0.4$. $X = B(5, 0.4)$.

b1) Transformamos el suceso sacar caras en sacar cruces, luego en valores de la variable y después buscamos la probabilidad en la tabla.

$$P(\text{Sacar 3 caras}) = P(\text{Sacar 2 cruces}) = P(X = 2) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0.3456}$$

n	k	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7733	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2033	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

b2) Transformamos el suceso sacar caras en sacar cruces, luego en valores de la variable y después buscamos la probabilidad en la tabla.

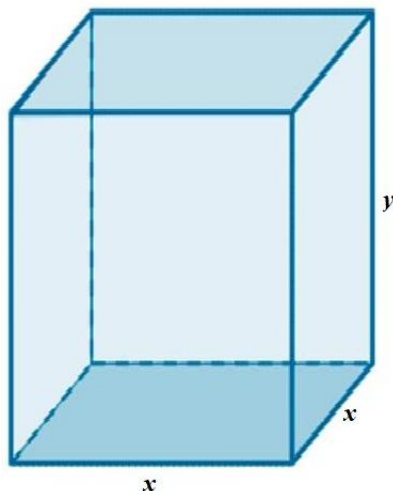
$$\begin{aligned} P(\text{Sacar más de 3 caras}) &= P(4 \text{ caras o } 5 \text{ caras}) = P(1 \text{ cruz o } 0 \text{ cruces}) = \\ &= P(X = 1) + P(X = 0) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.2592 + 0.0778 = \boxed{0.3370} \end{aligned}$$

n	k	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7733	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2033	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

Asignamos letras a las dimensiones de la piscina en el dibujo.



El volumen de la piscina es área de la base por la profundidad.

$$\left. \begin{array}{l} V = x^2 y \\ V = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

La superficie de sus paredes y el suelo es lo que debemos hacer mínimo. Sumamos las cuatro paredes cuya superficie es $x \cdot y$ junto con la superficie de la base x^2 .

$$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

Derivamos la función y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x} = x^2 + 128x^{-1} \Rightarrow S'(x) = 2x - 128x^{-2} = 2x - \frac{128}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 128 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Comprobamos si es un mínimo usando la segunda derivada.

$$S'(x) = 2x - 128x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 2 + 256x^{-3} = 2 + \frac{256}{x^3}$$

$$S''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 > 0$$

$x = 4$ es un mínimo, pues la segunda derivada es positiva. La superficie a usar es mínima cuando la base de la piscina es un cuadrado de lado 4 metros. Y la profundidad es de $y = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = 2$ metros.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx$ b) $\int x^2 \ln x dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

a) Realizamos la división que aparece en el integrando.

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} = \begin{array}{r|l} x^3 & +2x^2 & +x & -10 & |x^2 + x - 2 \\ -x^3 & -x^2 & +2x & & x+1 \\ \hline & x^2 & +3x & & \\ & -x^2 & -x & +2 & \\ \hline & & 2x & -8 & \end{array} = x+1 + \frac{2x-8}{x^2+x-2}$$

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx = \int x+1 dx + \int \frac{2x-8}{x^2+x-2} dx = \frac{x^2}{2} + x + \dots$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-8 = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \rightarrow -4-8 = B(-3) \rightarrow B=4 \\ x=1 \rightarrow 2-8 = 3A \rightarrow A=-2 \end{cases}$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{4}{x+2}$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{-2}{x-1} + \frac{4}{x+2} dx = \frac{x^2}{2} + x - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} + x - 2 \ln|x-1| + 4 \ln|x+2| + K}$$

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + K}$$

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos su determinante para comprobar si tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0$$

El determinante es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X , usando que A tiene inversa y ya la tenemos calculada.

$$A \cdot X + B = C^2 \Rightarrow A \cdot X = C^2 - B \Rightarrow X = A^{-1}(C^2 - B)$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -1-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(C^2 - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2+3 & 4+2 & -1-1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

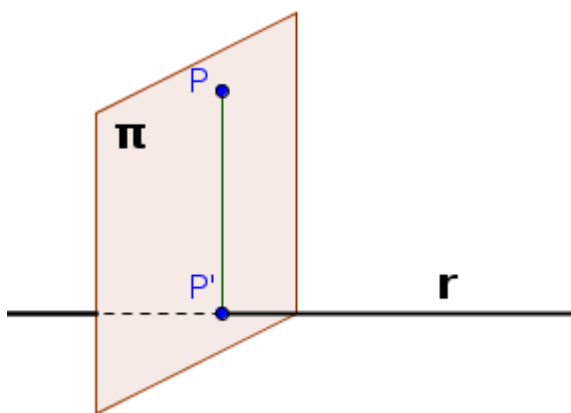
b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ (1,25 puntos)

a) Si plano y recta son paralelos el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv x - y - az + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, -a) \\ r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, -5, 2) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, -1, -a)(3, -5, 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 5 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{8}{2} = 4$$

b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Determinamos el punto P' de corte de recta y plano. La distancia de P a la recta r será el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.



Hallamos el plano perpendicular a la recta. Tendrá como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ P(1, 2, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ P(1, 2, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -7 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano. Para ello pasamos las ecuaciones de la recta a paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2(3+2\lambda) + 1 + \lambda + \lambda - 7 = 0 \Rightarrow$$
$$\pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0$$
$$\Rightarrow 6 + 4\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 7 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P' (3, 1, 0)$$

Calculamos la distancia de P a r que es el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

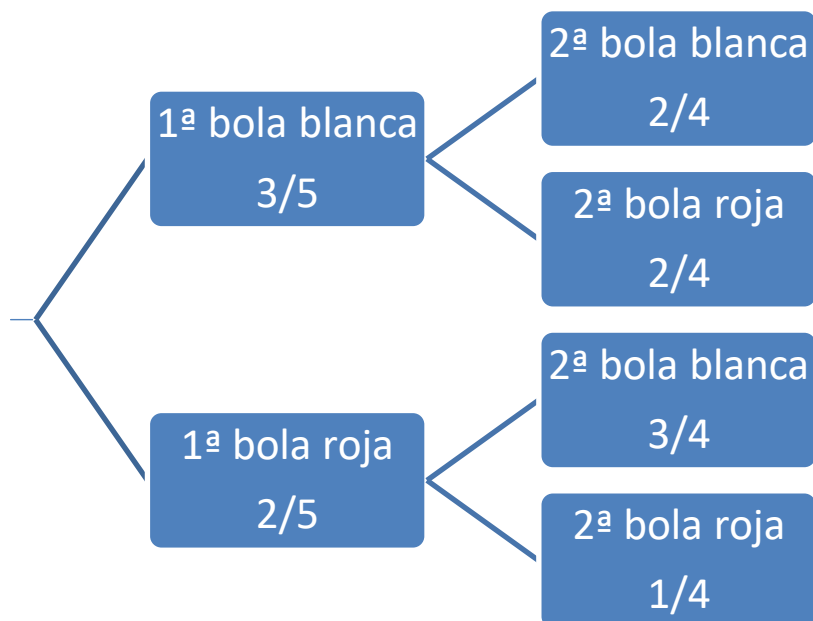
$$\overrightarrow{PP'} = (3, 1, 0) - (1, 2, 3) = (2, -1, -3)$$

$$\boxed{\text{Distancia}(P, r) = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \text{ u}}$$

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

- a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**
 a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**
 b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:
 b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**
 b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



Observando este diagrama respondemos.

$$\text{a1)} \quad P(2^{\text{a}} \text{ bola blanca}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \boxed{\frac{3}{5} = 0.6}$$

a2)

$$P(1^{\text{a}} \text{ bola roja} / 2^{\text{a}} \text{ bola blanca}) = \frac{P(1^{\text{a}} \text{ bola roja} \cap 2^{\text{a}} \text{ bola blanca})}{P(2^{\text{a}} \text{ bola blanca})} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{12}{20}} = \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

b) X = Duración de una llamada telefónica en minutos.

Como la varianza es 4 la desviación típica es la raíz cuadrada de 4 que vale 2. $X = N(5, 2)$

b1) Nos piden calcular $P(X < 4.5)$.

$$P(X < 4.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{4.5 - 5}{2}\right) = P(Z < -0.25) =$$

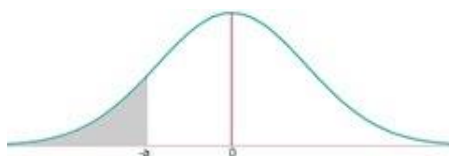
$$= P(Z > 0.25) = 1 - P(Z < 0.25) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.5987 = \boxed{0.4013}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

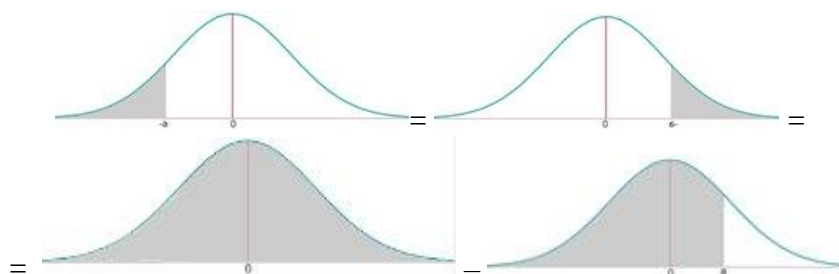
b2) Buscamos un valor del tiempo “a” tal que $P(X < a) = 0.3333$.

$$P(X < a) = 0.3333 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-5}{2}\right) = 0.3333$$

Este valor no lo encontramos en la tabla, por lo que $\frac{a-5}{2}$ es negativo.



Usando la simetría de la campana de Gauss tenemos que:



Lo utilizamos para el cálculo de probabilidad pedida.

$$P\left(Z < \frac{a-5}{2}\right) = P\left(Z > -\frac{a-5}{2}\right) = 1 - P\left(Z < -\frac{a-5}{2}\right)$$

$$\text{Así tenemos que } 1 - P\left(Z < -\frac{a-5}{2}\right) = 0.3333 \Rightarrow P\left(Z < -\frac{a-5}{2}\right) = 1 - 0.3333 = 0.6667$$

Buscamos en la tabla $\rightarrow -\frac{a-5}{2} = 0.43 \Rightarrow a-5 = -0.86 \Rightarrow a = 5 - 0.86 = 4.14$ minutos

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



EvAU Junio 2017

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. **(1 punto)**2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. **(1 punto)**4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1,5 puntos)**

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

(0,5 puntos)

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x}$ **(1,25 puntos por límite)**

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

- a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**
 a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**
 b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta.

(0,5 puntos)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES**PROPUESTA A****1A.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
 b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. **(1 punto)**

- a) Para ser derivable debe ser continua. La función debe ser continua en $x = 2$ y por tanto los límites laterales en $x = 2$ deben ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + a = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + bx - 9 = -4 + 2b - 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + a = -4 + 2b - 9 \Rightarrow \boxed{a = 2b - 17}$$

La función son dos polinomios que son derivables en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Al ser derivable en $x = 2$ las derivadas laterales deben de ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 4 \\ f'(2^+) &= -4 + b \\ f'(2^-) &= f'(2^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 = -4 + b \Rightarrow \boxed{b = 8}$$

Sustituyendo este valor en la igualdad obtenida por la continuidad.

$$\left. \begin{aligned} a &= 2b - 17 \\ b &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 16 - 17 = -1}$$

- b) Teorema de Rolle.** Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

La función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

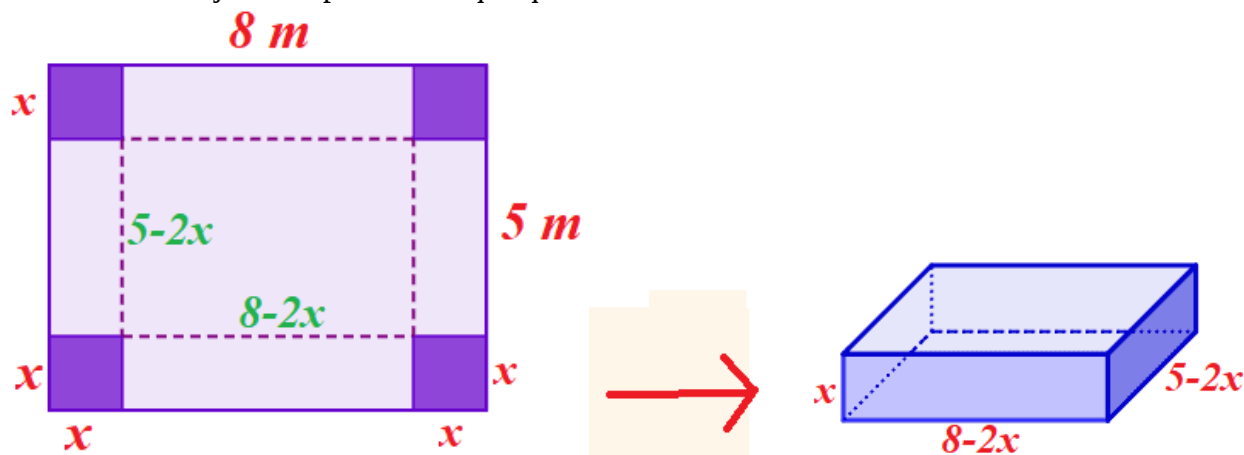
Esta función es continua en el intervalo $[-2, 6]$ y derivable en dicho intervalo, pues lo es en todo $\mathbb{R}$. Además se cumple que $f(-2) = f(6)$.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ f(6) &= -6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = -36 + 48 - 9 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2) = f(6) = 3$$

Se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle y existe, al menos, un valor c en el intervalo $[-2, 6]$ donde se anula la derivada.

2A. Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. (2,5 puntos)

Hacemos un dibujo descriptivo de lo que queremos hacer.



El volumen de la caja depende del valor del cuadrado que quitemos en las esquinas. Obtenemos la función que expresa este volumen.

$$V(x) = x(8-2x)(5-2x) = x(40-16x-10x+4x^2) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

Deseamos que el volumen de la caja sea máximo. Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 13x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{6}$$

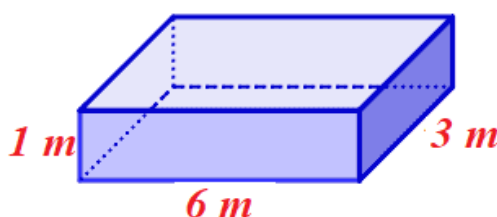
$$x = \frac{13 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{13+7}{6} = \frac{10}{3} \\ \frac{13-7}{6} = 1 \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son $x = 1$ y $x = \frac{10}{3}$. Usamos la segunda derivada para averiguar que tipo de punto crítico es cada uno.

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 \Rightarrow V''(x) = 24x - 52 \Rightarrow \begin{cases} V''(1) = 24 - 52 = -28 < 0 \\ V''\left(\frac{10}{3}\right) = 24 \cdot \frac{10}{3} - 52 = 28 > 0 \end{cases}$$

La segunda derivada es negativa en $x = 1$ y es un máximo de la función volumen.

El cajón sin tapa de volumen máximo tendría las dimensiones expresadas en el dibujo.



3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 0 + 2 - 0 - 2 + a^2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Consideramos tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas.

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (única solución)

CASO 2. $a = 0$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = -4 \\ 2x + y = -1 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ y - z = -3 \\ -y + z = -4 \\ \hline 0 = -7 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y + z = -4 \\ 2x + y = -1 \\ 0 = -7 \end{array} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = -3 \\ 2x + y - z = 0 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - 2 · Ecuación 1ª} \\ 2x + y - z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 6 \\ \hline 3y - 3z = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = -3 \\ 3y - 3z = 6 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = -3 \\ y - z = 2 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ y \quad -z = -3 \\ -y \quad +z = -2 \\ \hline 0 \quad = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = -3 \\ y - z = 2 \\ 0 = -5 \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

La tercera ecuación es imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

b) Para el valor $a = -1$ el sistema es compatible determinado.

El sistema a resolver es $\left. \begin{array}{l} -x - y + z = -5 \\ 2x + y + z = -2 \\ y - z = -3 \end{array} \right\}$. Lo resolvemos por el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} -x - y + z = -5 \\ 2x + y + z = -2 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x \quad +y \quad +z = -2 \\ -2x \quad -2y \quad +2z = -10 \\ \hline -y \quad +3z = -12 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + z = -5 \\ -y + 3z = -12 \\ y - z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ y \quad -z = -3 \\ -y \quad +3z = -12 \\ \hline 2z = -15 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + z = -5 \\ -y + 3z = -12 \\ 2z = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{15}{2} \\ -x - y - \frac{15}{2} = -5 \\ -y + 3\left(-\frac{15}{2}\right) = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - 2y - 15 = -10 \\ -y = -12 + \frac{45}{2} = \frac{21}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - 2y = 5 \\ y = -\frac{21}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + \frac{42}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = 5 - 21 \Rightarrow -2x = -16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

La solución es $x = 8$; $y = -\frac{21}{2}$; $z = -\frac{15}{2}$

4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1,5 puntos)**

a) Obtengamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2z-4 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-z-1)-y=-2z-4 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y=z-2z-4+1=-z-3 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z+3 \\ x=-z-1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y=3+t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \\ P_s(-1, 3, 0) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, luego las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{2}{1} = \frac{0}{1} ? \quad \text{!NO ES CIERTO!}$$

¿Las rectas se cortan o cruzan?

Calculamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{v}_r = (-1, 2, 0)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 3, 0) - (2, -1, 0) = (-3, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = 0 - 6 + 0 + 0 - 0 + 4 = -2 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo entonces las rectas r y s se cruzan.

b) El plano π paralelo a r y s tiene como vectores directores los directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \\ P(2, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-4-z-1+2z+2+y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0}$$

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

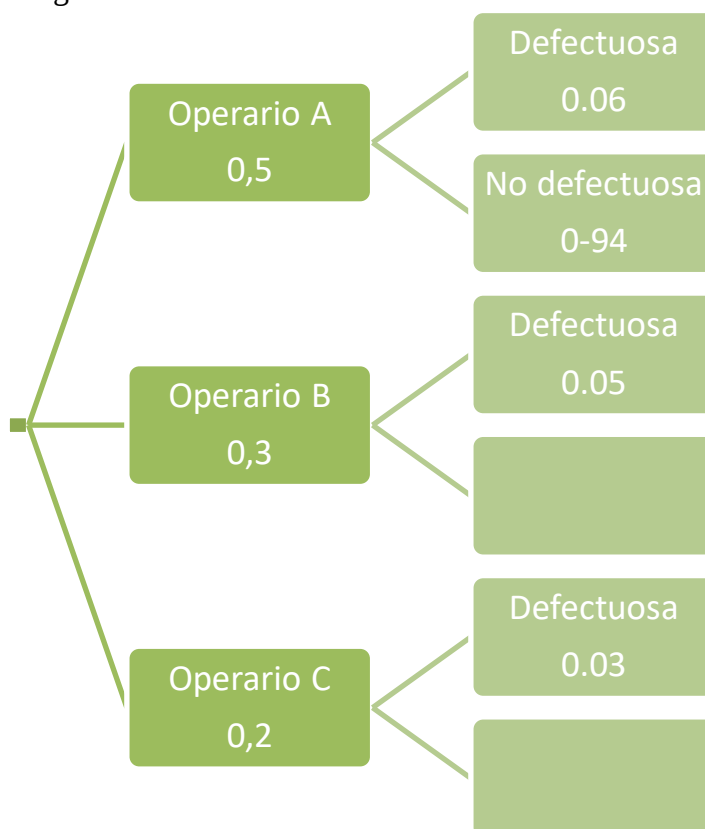
(0,5 puntos)

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

a) Construimos un diagrama de árbol.



$$a1) P(\text{Defectuosa}) = 0.5 \cdot 0.06 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.03 = \boxed{0.051}$$

a2)

$$P(\text{Operario A} / \text{Defectuosa}) = \frac{P(\text{Operario A} \cap \text{Defectuosa})}{P(\text{Defectuosa})} =$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.06}{0.051} = \boxed{\frac{30}{51} = 0.588}$$

b) La variable aleatoria X = Número de resistencias fabricadas por B es una variable aleatoria binomial. La probabilidad de que una resistencia sea de B es constantemente igual a 0.3. el experimento se repite 5 veces en cada caja.
Llamamos Éxito = Ser del operario B.

Siendo las repeticiones $n = 5$ y $p = P(\text{Éxito}) = 0.3$

b1) $P(X = 3) = \boxed{0.1323}$. Obtenido mirando en la tabla.

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3302	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0044	0,0271	0,0744	0,1343	0,2079	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

b2)

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= 0.3087 + 0.1323 + 0.0284 + 0.0024 = \boxed{0.4718}$$

Obtenido mirando la tabla

n	k	P	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1		0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3302	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2		0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3		0,0000	0,0044	0,0271	0,0744	0,1343	0,2079	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4		0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

Nota: ln denota logaritmo neperiano.**a)**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{(-2)^3 + 3(-2)^2 - 4}{(-2)^3 + 5(-2)^2 + 8(-2) + 4} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L'Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{3x^2 + 10x + 8} = \frac{3(-2)^2 + 6(-2)}{3(-2)^2 + 10(-2) + 8} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L'Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x + 6}{6x + 10} = \frac{6(-2) + 6}{6(-2) + 10} = \frac{-6}{-2} = \boxed{3}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} = \frac{0 \cdot \ln(0+1)}{2 - 2 \cos 0} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L'Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + x \frac{1}{x+1}}{-2(-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2 \sin x} = \frac{\ln(0+1) + \frac{0}{0+1}}{-2(-\sin 0)} = \frac{0}{0} = \{\text{Aplico L'Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \frac{\frac{1}{0+1} + \frac{1}{(0+1)^2}}{2 \cos 0} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

a) Buscamos los puntos de corte de ambas funciones.

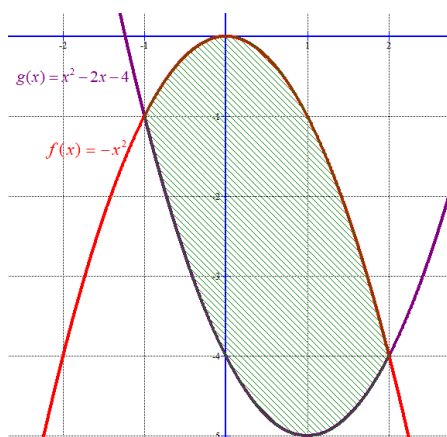
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = -x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{cases}$$

El área del recinto limitado por las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre -1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-1}^2 x^2 - 2x - 4 - (-x^2) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 2x^2 - 2x - 4 dx \right| = \left| \left[2 \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x \right]_{-1}^2 \right| = \\ &= \left| \left[2 \frac{2^3}{3} - 2^2 - 4 \cdot 2 \right] - \left[2 \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 4(-1) \right] \right| = \left| \frac{16}{3} - 4 - 8 + \frac{2}{3} + 1 - 4 \right| = \boxed{9 u^2} \end{aligned}$$

Dibujamos las gráficas y el recinto para comprobar si este valor del área es correcto.



b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$ es:

$$y - g(-3) = \frac{-1}{g'(-3)}(x + 3).$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow g(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 4 = 9 + 6 - 4 = 11$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(-3) = 2(-3) - 2 = -8$$

$$\left. \begin{array}{l} y - g(-3) = \frac{-1}{g'(-3)}(x + 3) \\ g'(-3) = -8 \\ g(-3) = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 11 = \frac{-1}{-8}(x + 3) \Rightarrow 8y - 88 = x + 3 \Rightarrow \boxed{-x + 8y - 91 = 0}$$

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos la expresión de la matriz $2I_3 + B$.

$$2I_3 + B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|2I_3 + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

Si tiene inversa la matriz $2I_3 + B$.

b) Despejamos la matriz X de la ecuación

$$2X + C = A - X \cdot B \Rightarrow 2X + X \cdot B = A - C \Rightarrow X(2I_3 + B) = A - C \Rightarrow X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1}$$

Hallamos la expresión de la matriz $A - C$ y la inversa de la matriz $2I_3 + B$.

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2I_3 + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((2I_3 + B)^T)}{|2I_3 + B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos calculando la matriz X .

$$X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2+12 & -3 & 1-6 \\ 4-8 & 2 & -2+4 \end{pmatrix}$$

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

a) Hallamos la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 1, -2) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (4, -3, 0) - (0, 1, -2) = (4, -4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 4\frac{x}{4} \\ z = -2 + 2\frac{x}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -2 + \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2z = -4 + x \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + 2z + 4 = 0 \end{cases}}$$

b) Todos los puntos que equidistan de los puntos P y Q constituyen un plano que pasa por el punto medio M del segmento PQ y perpendicular al vector que une ambos puntos.

Hallamos la ecuación de ese plano y después hallamos el punto de corte del plano y la recta r , siendo este el punto S buscado.

Hallamos el punto medio M del segmento PQ .

$$M = \frac{(0, 1, -2) + (4, -3, 0)}{2} = (2, -1, -1)$$

Hallamos la ecuación del plano que pasa por M y perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$ y que por tanto su vector normal es dicho vector.

$$\left. \begin{array}{l} M(2, -1, -1) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (4, -4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M(2, -1, -1) \in \pi \\ \pi \equiv 4x - 4y + 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot 2 - 4(-1) + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 + 4 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -10 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 4y + 2z - 10 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + z - 5 = 0$$

Hallamos el punto de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - 2y + z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(2 + \lambda) - 2(-\lambda) + (-5) - 5 = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 2\lambda - 5 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$$

El punto buscado es $S\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

El punto S que equidista de P y Q y que pertenece a la recta r tiene las coordenadas:

$$S \in r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow S(2 + \lambda, -\lambda, -5)$$

Y la distancia de S a P y Q es la misma, lo que implica que los vectores $\overrightarrow{SP}$ y $\overrightarrow{SQ}$ tienen el mismo módulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{SP} &= (0, 1, -2) - (2 + \lambda, -\lambda, -5) = (-2 - \lambda, 1 + \lambda, 3) \\ \overrightarrow{SQ} &= (4, -3, 0) - (2 + \lambda, -\lambda, -5) = (2 - \lambda, -3 + \lambda, 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \overrightarrow{SP} \right| = \left| \overrightarrow{SQ} \right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-2 - \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + (3)^2} = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-3 + \lambda)^2 + (5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 - \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + (3)^2 = (2 - \lambda)^2 + (-3 + \lambda)^2 + (5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 9 = 4 - 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 9 - 6\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + 6\lambda = 38 - 10\lambda \Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow S\left(2 + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right) \Rightarrow \boxed{S\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)}$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

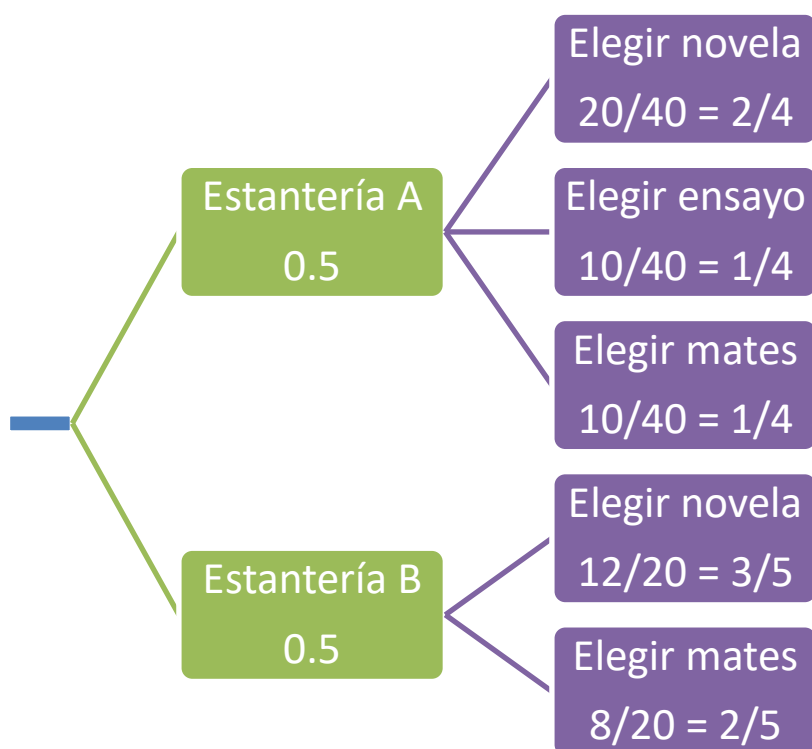
a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a) Realizo un diagrama de árbol del experimento aleatorio planteado.



$$\text{a1)} \quad P(\text{Elegir mates}) = 0.5 \cdot \frac{1}{4} + 0.5 \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{40}}$$

a2) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Estantería B} / \text{Elegido mates}) = \frac{P(\text{Estantería B} \cap \text{Elegido mates})}{P(\text{Elegido mates})} = \frac{0.5 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{13}{40}} = \boxed{\frac{8}{13}}$$

b) X = tiempo de espera en una parada de autobús. $X = N(15, 5)$

b1) Nos piden calcular $P(X < 13)$.

$$\begin{aligned} P(X < 13) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{X - 15}{5} < \frac{13 - 15}{5}\right) = P(Z < -0.4) = \\ &= P(Z > 0.4) = 1 - P(Z < 0.4) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446} \end{aligned}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

b2) Hay que buscar el valor “a” tal que $P(X > a) = 0.33$.

$$P(X > a) = 0.33 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(\frac{X-15}{5} > \frac{a-15}{5}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{a-15}{5}\right) = 0.33 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{a-15}{5}\right) = 0.33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-15}{5}\right) = 1 - 0.33 = 0.67 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-15}{5} = 0.44 \Rightarrow a-15 = 2.2 \Rightarrow \boxed{a = 17.2 \text{ minutos}}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

El 33% de los usuarios supera los 17.2 minutos.