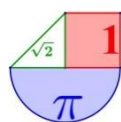


Matemáticas II

PAU Extremadura
2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas EBAU de Extremadura del año 2017 al 2024, junto con los exámenes de las PAU del 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	16
EBAU Extraordinaria 2024.....	31
EBAU Ordinaria 2024	44
EBAU Extraordinaria 2023.....	56
EBAU Ordinaria 2023	70
EBAU Extraordinaria 2022	83
EBAU Ordinaria 2022	98
EBAU Extraordinaria 2021.....	112
EBAU Ordinaria 2021	127
EBAU Extraordinaria 2020.....	140
EBAU Ordinaria 2020	153
EBAU Extraordinaria 2019.....	166
EBAU Ordinaria 2019	179
EBAU Extraordinaria 2018.....	192
EBAU Ordinaria 2018	205
EBAU Extraordinaria 2017.....	218
EBAU Ordinaria 2017	231



PAU Extraordinaria 2025
Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2024-2025

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es **único y obligatorio**. **CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO.** En cada apartado se indica la correspondiente puntuación.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro m .
- b) Resolver para el caso $m = 1$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- a) Obtener la inversa de la matriz $A^T + I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

- a) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$, calcula los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $P(1,2)$.
- b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a = 2$, $b = -2$.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x + 3$. a) Calcula la primitiva de $\frac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 3)$

- a) ¿Están A, B y C alineados?
 - b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.
 - c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.
-

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1, -1, 0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P.
 - b) Calcular la distancia del punto P a la recta s.
 - c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano π .
-

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
- b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
- c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro m .

b) Resolver para el caso $m = 1$.

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 5 - 0 - 7 - m = m^2 - m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = m \\ \frac{1-3}{2} = -1 = m \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 6 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 15}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \\ 0 \quad -3 \quad -3 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right\}$$

El rango de A y el de A/B es 2. Son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para $m = 1$ hemos visto que el sistema es compatible determinado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + 7y + 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 7y + 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ z = -2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 7y + 5(-2 - y) = 0 \\ x + y - 2 - y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 7y - 10 - 5y = 0 \\ \boxed{x = 5} \end{cases} \Rightarrow 5 + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}} \Rightarrow \boxed{z = -2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}}$$

Para $m = 1$ las soluciones del sistema son $x = 5, y = \frac{5}{2}, z = -\frac{9}{2}$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- a) Obtener la inversa de la matriz $A^T + I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.
 b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

- a) Obtenemos la expresión de la matriz $A^T + I$, comprobamos que es invertible y calculamos su inversa.

$$A^T + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^T + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 + 10 - 12 - 8 - 15 = 36 - 35 = 1 \neq 0$$

$$(A^T + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^T + I)^T\right)}{|A^T + I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 8-15 & -4+5 & 6-4 \\ -(4-9) & 2-3 & -(3-2) \\ 10-12 & -(5-6) & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^T X - I = 2B - X \Rightarrow A^T X - X = 2B + I \Rightarrow (A^T - I)X = 2B + I \Rightarrow X = (A^T - I)^{-1}(2B + I)$$

Obtenemos la expresión de X .

$$2B + I = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^T - I)^{-1}(2B + I) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7+0+8 & 0-1+4 & -14+2-10 \\ -5+0-4 & 0+1-2 & 10-2+5 \\ 2+0+0 & 0-1+0 & -4+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

- a) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$, calcula los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $P(1,2)$.
- b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a = 2$, $b = -2$.

a) La función pasa por el punto $P(1, 2)$, por lo que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b}{1^3} = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 2}$$

La función tiene un máximo relativo en $x=1$, por lo que la derivada debe anularse para $x=1 \rightarrow f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot x^3 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^4 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2a \cdot 1^2 - 3(a \cdot 1^2 + b)}{1^4} = 0 \Rightarrow 2a - 3(a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{-3b = a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ a = -3b \end{array} \right\} \Rightarrow -3b + b = 2 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow \boxed{a = -3(-1) = 3}$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -1$.

- b) Para $a = 2$, $b = -2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3}$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot x^3 - 3x^2(2x^2 - 2)}{x^6} = \frac{4x^4 - 6x^4 + 6x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 + 6}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 6}{x^4} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = +\sqrt{3}$.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

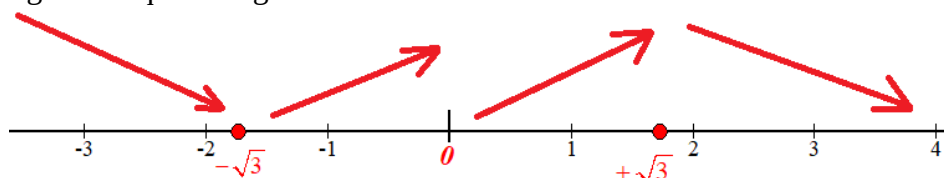
$$f'(-2) = \frac{-2 \cdot (-2)^2 + 6}{(-2)^4} = \frac{-2}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)^2 + 6}{(-1)^4} = 4 > 0$. La función crece en $(-\sqrt{3}, 0)$.

- En el intervalo $(0, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^2 + 6}{1^4} = 4 > 0$. La función crece en $(0, +\sqrt{3})$.

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 + 6}{2^4} = \frac{-2}{16} < 0$. La función decrece en $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, +\sqrt{3})$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = +\sqrt{3}$.

Como $f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^2 - 2}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(-\sqrt{3}, \frac{-4\sqrt{3}}{9})$.

Como $f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^2 - 2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ el máximo relativo tiene coordenadas $(\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9})$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2 \cdot 0^2 - 2}{0^3} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x + 3$. a) Calcula la primitiva de $\frac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int \frac{x+3}{x^2-4x+3} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{x+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow 6 = 2B \rightarrow B=3 \\ x=1 \rightarrow 4 = -2A \rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3}$$

$$\dots = \int \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = \boxed{-2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C}$$

Hallamos el valor de C tal que la primitiva $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C$ pase por el punto (5, 0).

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C \\ F(5) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \ln|5-1| + 3 \ln|5-3| + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \ln 2 - 2 \ln 2^2 + C = 0 \Rightarrow 3 \ln 2 - 4 \ln 2 + C = 0 \Rightarrow -\ln 2 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \ln 2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + \ln 2$.

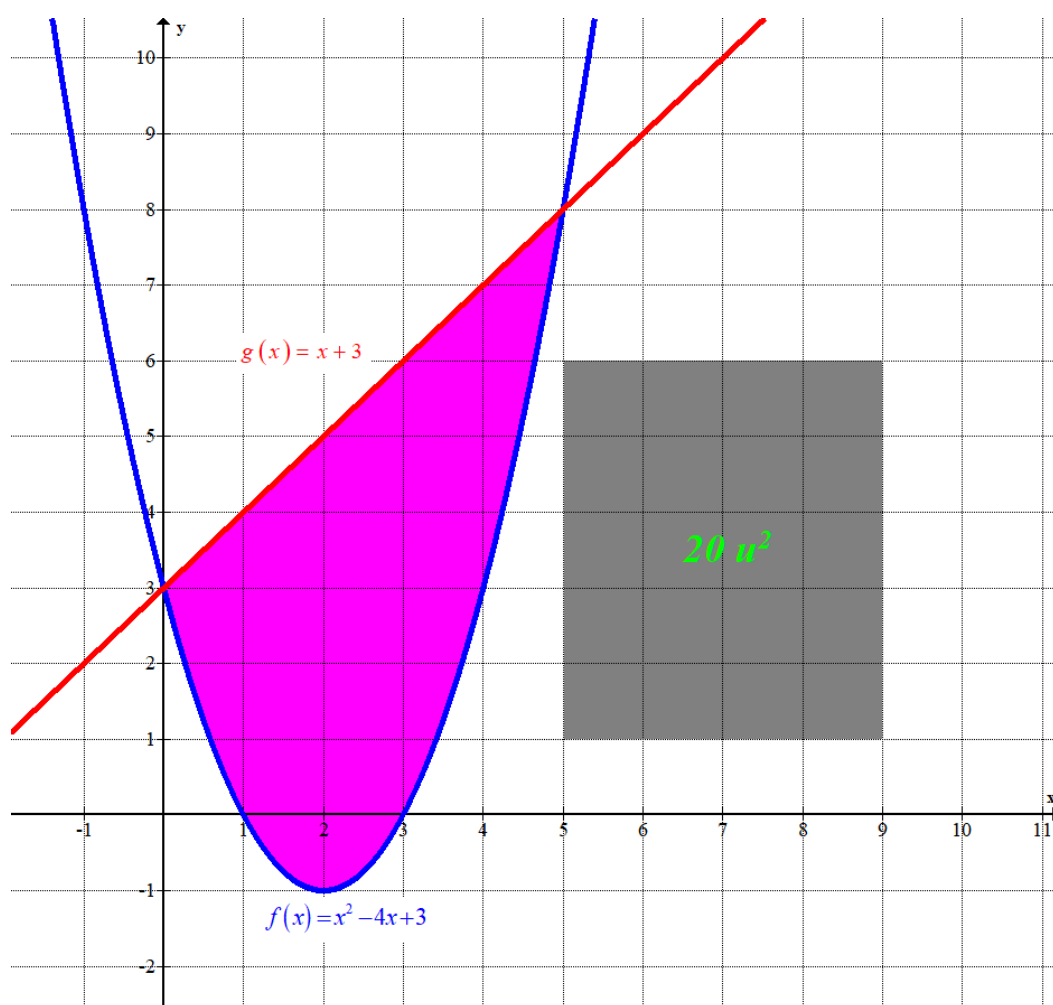
b) Hallamos los posibles puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ g(x) &= x + 3 \\ f(x) &= g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=5} \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x) - g(x) dx &= \int_0^5 x^2 - 4x + 3 - (x + 3) dx = \int_0^5 x^2 - 5x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_0^5 = \\ &= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5 \cdot 5^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{125}{3} - \frac{125}{2} = \boxed{\frac{-125}{6} \approx -20.8333} \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor de $\frac{125}{6} \approx 20.8333$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

a) Para que los tres puntos estén alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales (están en la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2, 3) \\ B = (2, 3, 4) \\ C = (3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) - (1, 2, 3) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (1, 2, 3) = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

Los vectores no tienen coordenadas proporcionales y los puntos A, B y C no están alineados.

b) Un vector ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 2k - 2i = (-2, 2, 0)$$

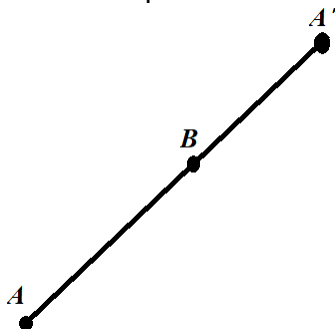
Obtenemos el módulo del vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Consideramos el vector $\vec{w} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$. Este vector es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y tiene

$$\text{módulo } |\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

c) Obtenemos las coordenadas del punto A' del dibujo. Este cumple que los puntos A, B y A' están alineados y la distancia de A a B es la misma que de A' a B.



El punto A' lo obtenemos sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$A' = B + \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) + (1, 1, 1) = (3, 4, 5)$$

El punto A' simétrico del punto A respecto del punto B tiene coordenadas $A' = (3, 4, 5)$.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1, -1, 0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P .
 b) Calcular la distancia del punto P a la recta s .
 c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano π .

- a) El plano π' perpendicular a la recta s que pasa por P tiene como vector normal el vector director de la recta.

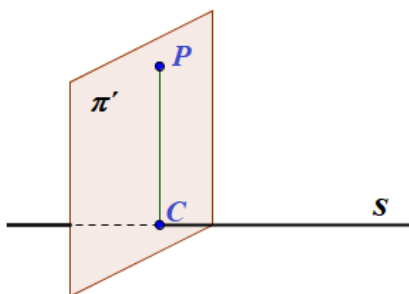
$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow -4 \cdot 1 + 3(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow \boxed{\pi': -4x + 3y + 7 = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular a la recta s que pasa por P es $\pi': -4x + 3y + 7 = 0$.

- b) La distancia del punto P a la recta s es la distancia del punto P al punto C de corte de la recta con el plano π' .



Hallamos el punto C de corte de recta y plano.

$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \\ Q_r(0, 1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + 7 = 0 \\ s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -4(-4\alpha) + 3(1 + 3\alpha) + 7 = 0 \Rightarrow 16\alpha + 3 + 9\alpha + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-10}{25} = \frac{-2}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \cdot \frac{-2}{5} = \frac{8}{5} \\ y = 1 + 3 \cdot \frac{-2}{5} = \frac{-1}{5} \\ z = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right)}$$

Hallamos la distancia del punto P al C como el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) \\ P(1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) - (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right)$$

$$d(P, s) = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2} \approx 1.41u}$$

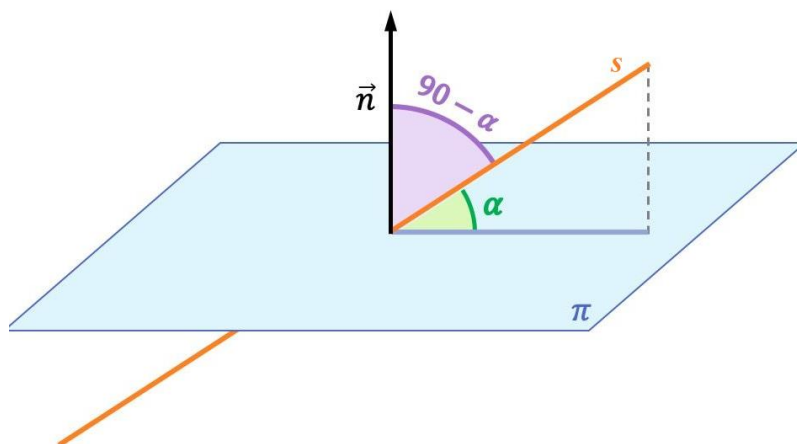
c) Hallamos el ángulo que forma el vector director de la recta con el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, -2, 3) \\ \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{n}| |\vec{v}_s|} =$$

$$= \frac{|(1, -2, 3)(-4, 3, 0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|-4 - 6|}{5\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \approx 57^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es de $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$.



EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
 b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
 c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

Sea X = número de personas de un grupo de 10 que están viendo “La Revuelta”.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.30$. $X = B(10, 0.3)$

- a) Calculamos $P(X > 8)$.

$$P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0.3^9 \cdot 0.7^1 + \binom{10}{10} 0.3^{10} \cdot 0.7^0 =$$

$$= 10 \cdot 0.3^9 \cdot 0.7 + 0.3^{10} = \boxed{0.00014}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas vale 0.00014.

- b) Debemos calcular $P(X \geq 1)$. Usamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 1 - 0.7^{10} \approx \boxed{0.9718}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas vale 0.9718.

- c) Hacemos una tabla de contingencia.

	Ve “La Revuelta”	No ve “La Revuelta”	
Ve “El Hormiguero”			35
No ve “El hormiguero”		40	
	30		100

Completamos la tabla.

	Ve “La Revuelta”	No ve “La Revuelta”	
Ve “El Hormiguero”	5	30	35
No ve “El hormiguero”	25	40	65
	30	70	100

En la tabla observamos que un 5% de los habitantes del pueblo ve los dos programas. La probabilidad de que la persona elegida al azar vea los dos programas es 0.05.



PAU Ordinaria 2025
Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2024-2025

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es **único y obligatorio**. **CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO.** En cada apartado se indica la correspondiente puntuación.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + k y + z = 2 + k \\ 2x - y - k z = 1 - k \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro k .
- b) Resolver para el caso $k = 1$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$

- a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.
- b) Calcular m para que la matriz $A + B - I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
- c) Para $m = 2$ obtener la inversa de la matriz $A + B - I$.

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x) = (x-1)e^{-x}$ a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$. c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x = 1$.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.Dadas las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$

- a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

- a) Comprobar que el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.
 b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.
 c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $(0,1,-1)$.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

- a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.
 b) Obtener la ecuación general del plano ACD.
 c) Para $m = 2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

- a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm
 b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?
 c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

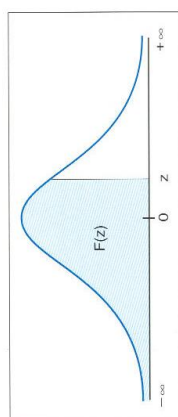


Tabla de distribución
normal $N(0,1)$
 $F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z = 2 + k \\ 2x - y - kz = 1 - k \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k .

b) Resolver para el caso $k = 1$.

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2+k \\ 2 & -1 & -k & 1-k \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - k^2 - 2 + 1 + 2k - k = -k^2 + k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + k = 0 \Rightarrow k(-k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2 y menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \rightarrow \text{Fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad -2 \quad -2 \quad -4 \rightarrow \text{Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad -12 \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ \hline 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2, son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ o $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $k=1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de esas infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ \hline 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -3y-3z=-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ \boxed{z=2-y} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2-y=3 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=\alpha \\ z=2-\alpha \end{array} \right\} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $k=1$ las soluciones del sistema son $x=1$, $y=\alpha$, $z=2-\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in \mathbb{R}$

- a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.
 b) Calcular m para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
 c) Para $m=2$ obtener la inversa de la matriz $A+B-I$.

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned}
 A^2 - A = B &\Rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + 0 & m - m \\ 0 + 0 & 0 + m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - m & -1 \\ 0 & m^2 + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} m^2 - m = 0 \rightarrow m(m-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1} \end{cases} \\ m^2 + m = 2 \rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1 = m} \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = m \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Para que se cumplan las dos igualdades debe ser $m = 1$.

Se cumple la igualdad $A^2 - A = B$ para $m = 1$.

- b) Para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.
 Determinamos la expresión de $A+B-I$.

$$A+B-I = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A+B-I| = \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(-m+1)$$

$$|A+B-I| = 0 \Rightarrow (m-1)(-m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \rightarrow m = 1 \\ -m+1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1} \end{cases}$$

La matriz $A+B-I$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.

c) Para $m = 2$ la matriz queda $A + B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tiene inversa. La calculamos.

$$|A + B - I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$(A + B - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A + B - I)^T\right)}{|(A + B - I)|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A + B - I$$

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.Dada la función $f(x) = (x-1)e^{-x}$

- a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de $f(x)$.
- c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$.

a) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

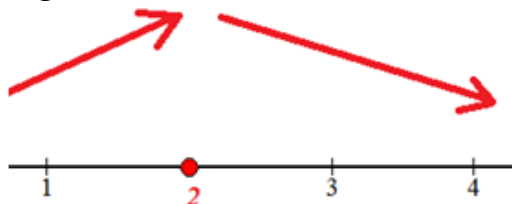
$$f(x) = (x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x-1) \cdot (-1)e^{-x} = (1-x+1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow 2-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $x=2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = (2-0)e^{-0} = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = (2-3)e^{-3} = -e^{-3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.La función presenta un máximo relativo en $x=2$.Como $f(2) = (2-1) \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2, \frac{1}{e^2}\right)$.

b) Para estudiar la curvatura averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = (2-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (-1)e^{-x} + (2-x)(-1)e^{-x} = (-1-2+x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-3)e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada segunda antes y después de $x=3$.

- En el intervalo $(-\infty, 3)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = (0-3)e^{-0} = -3 < 0$. La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada segunda vale $f''(4) = (4-3)e^{-3} = e^{-3} > 0$. La función es convexa ($\cup$) en $(3, +\infty)$.

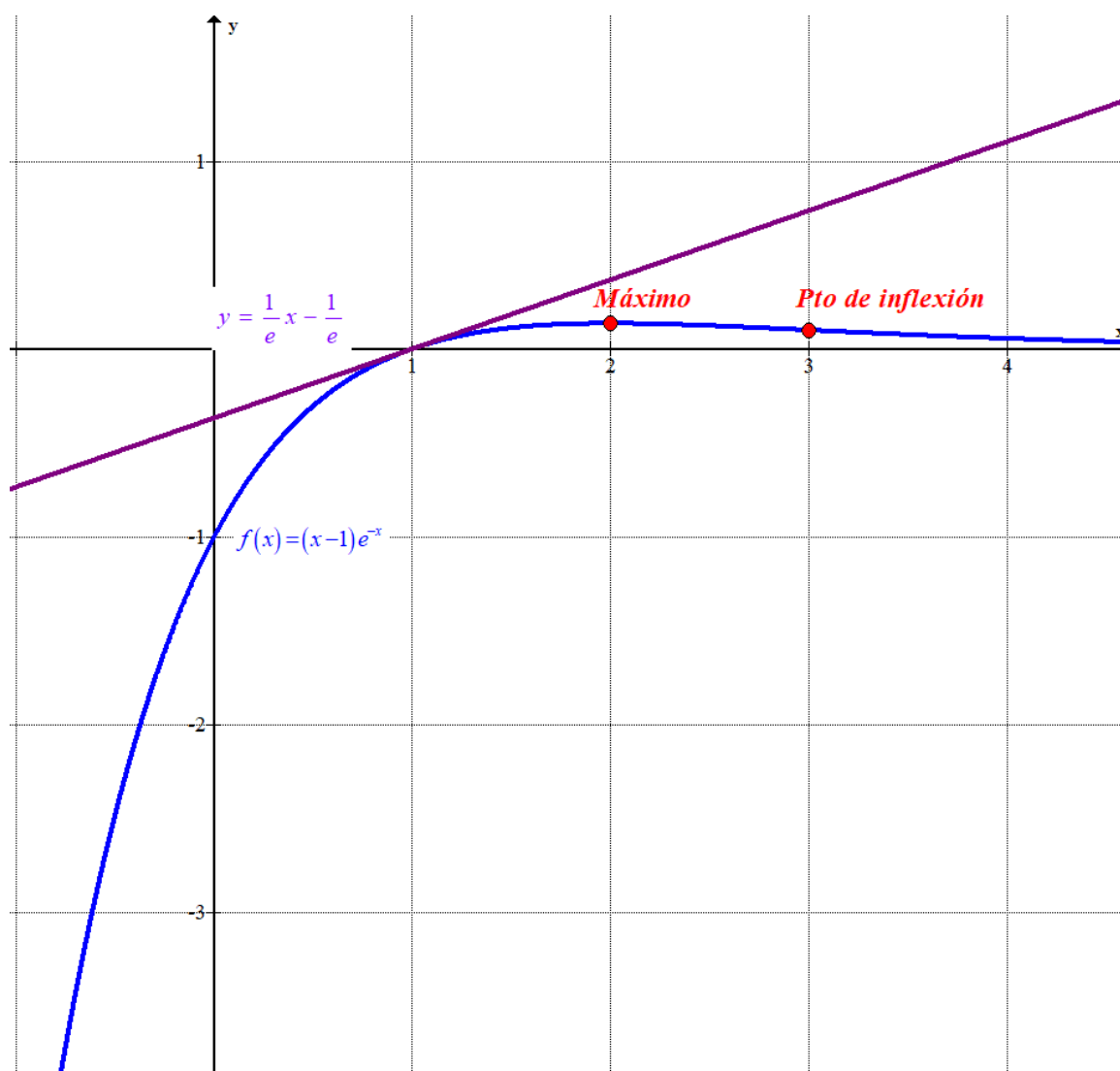
La función presenta un punto de inflexión en $x = 3$. Para dicho valor tenemos que

$$f(3) = (3-1)e^{-3} = \frac{2}{e^3} \text{ por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas } \left(3, \frac{2}{e^3}\right).$$

c) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(1) = f'(1)(x-1) \\ f(1) = (1-1)e^{-1} = 0 \\ f'(1) = (2-1)e^{-1} = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{e}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$ es $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$.



EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.Dadas las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$ a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = \dots = x(x-1)(x+2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 2 = -2A \rightarrow A = -1 \\ x=1 \rightarrow 2 = 3B \rightarrow B = \frac{2}{3} \\ x=-2 \rightarrow 2 = -6C \rightarrow C = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-1}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2/3}{x-1} dx + \int \frac{-1/3}{x+2} dx =$$

$$= \boxed{-\ln x + \frac{2}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + C}$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de $g(x)$ y el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^3 + x^2 - 2x \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes y su área la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 0 de la función más el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

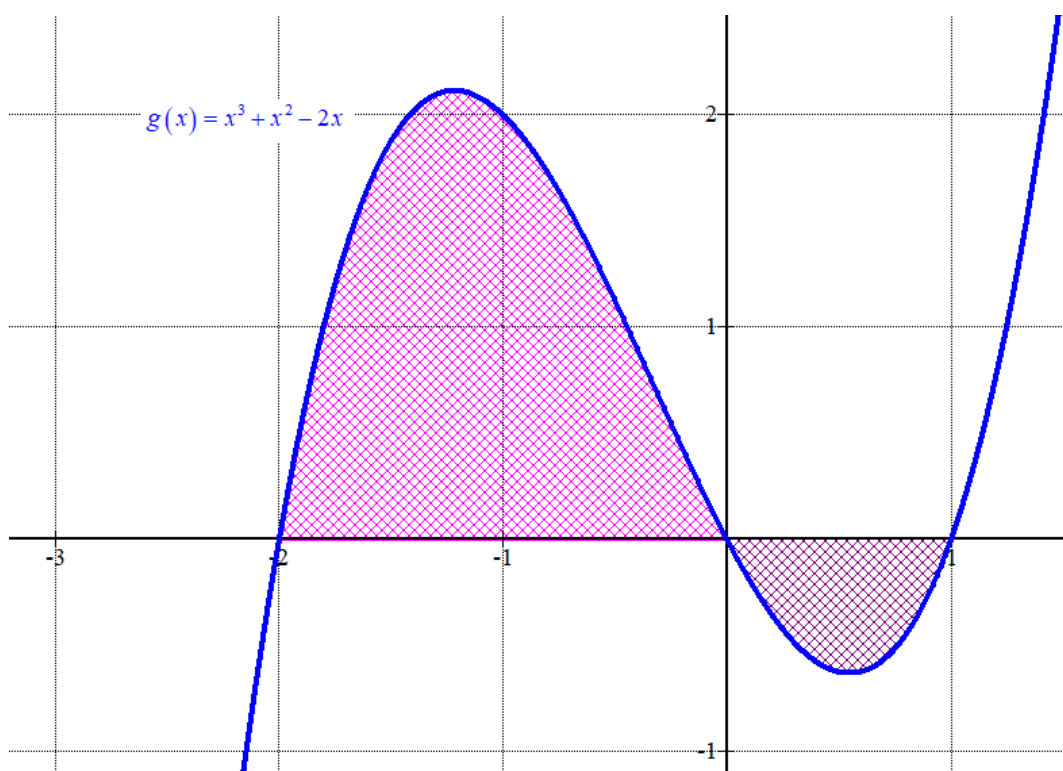
$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 g(x) dx &= \int_{-2}^0 x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 \right] = 0 - \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] = \boxed{\frac{8}{3} \approx 2.6667}\end{aligned}$$

El área del primer trozo de la región tiene un valor de $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \boxed{\frac{-5}{12} \approx -0.4167}\end{aligned}$$

El área del segundo trozo de la región tiene un valor de $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas.

El área del recinto limitado por la gráfica de $g(x)$ y el eje X tiene un valor de $\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \approx 3.083$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

- a) Comprobar que el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.
- b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.
- c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto $(0,1,-1)$.

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y - z = 3 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,-1)$$

Para que la recta sea paralela al plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano. Para que esto se cumpla debe ser su producto escalar nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1,1,-1)(3,-1,2) = 3-1-2 = 0$$

Como vector director de recta y normal del plano tienen producto escalar nulo el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(0,1,-1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \\ \pi \equiv x + y - z = 3 \\ \text{¿} P_r \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0+1-(-1) = 3? \Rightarrow \text{No se cumple}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

La recta y el plano no se cortan en ningún punto.

- b) Como la recta es paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,-1) \in r \\ \pi \equiv x + y - z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0+1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}}$$

- c) El plano π' perpendicular a la recta r y que pase por el punto $(0,1,-1)$ tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r = (3,-1,2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (3,-1,2) \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': 3x - y + 2z + D = 0 \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 - 1 + 2(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 - 2 + D = 0 \rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x - y + 2z + 3 = 0}$$

El plano π' perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $(0,1,-1)$ tiene ecuación implícita $\pi': 3x - y + 2z + 3 = 0$.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,m,6)$, $C(2,1,4)$ y $D(4,3,2)$. Se pide:

- a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.
 b) Obtener la ecuación general del plano ACD.
 c) Para $m=2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

a) Hallamos el plano π que contiene los puntos A, C y D.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \in \pi \\ C(2,1,4) \in \pi \\ D(4,3,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AC} = (2,1,4) - (1,0,2) = (1,1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (4,3,2) - (1,0,2) = (3,3,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 6y + 3(\cancel{z-2}) - 3(\cancel{z-2}) + 0 - 6(x-1) = 0 \Rightarrow 6y - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 1 = 0}$$

Para que los cuatro puntos estén en el mismo plano el punto B debe pertenecer al plano π definido por los puntos A, C y D..

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x - y - 1 = 0 \\ B(1, m, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Para $m=0$. los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) La hemos obtenido en el apartado anterior y es $\pi: x - y - 1 = 0$.

c) Para $m=2$ los puntos tienen coordenadas $A(1,0,2)$, $B(1,2,6)$, $C(2,1,4)$.

Un vector perpendicular al plano ABC es el vector normal del plano ABC. Este vector lo podemos obtener con el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ B(1,2,6) \\ C(2,1,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,2,6) - (1,0,2) = (0,2,4) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,4) - (1,0,2) = (1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4i + 4j - 2k - 4i = 4j - 2k = (0, 4, -2)$$

Hemos obtenido un vector perpendicular al plano ABC que es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 4, -2)$.

También cumplen dicha propiedad todos los vectores $\vec{v}$ con coordenadas proporcionales a este:
 $\vec{v} = a(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = (0, 4a, -2a)$.

Hacemos que su módulo valga 4.

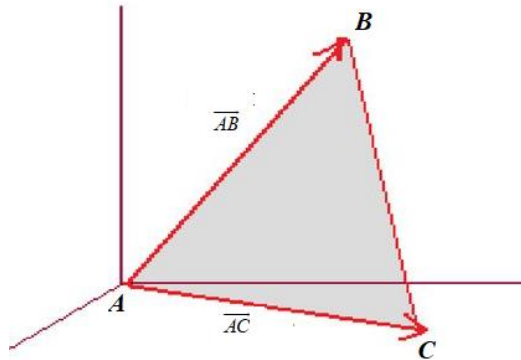
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (0, 4a, -2a) \\ |\vec{v}| = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{0^2 + (4a)^2 + (-2a)^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{16a^2 + 4a^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{20a^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{20} \cdot a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \vec{v} = \left(0, 4 \frac{2\sqrt{5}}{5}, -2 \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5} \right)$$

El vector que buscamos es $\vec{v} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5} \right)$.

Calculamos el área del triángulo ABC.

Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (0, 2, 4) \\ \vec{AC} = (1, 1, 2) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \boxed{\sqrt{5} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo que forman A, B y C tiene un valor de $\sqrt{5}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

- a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm
 b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?
 c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

Sea X = altura en centímetros de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población.
 $X = N(174, 12)$

a) Calculamos $P(162 \leq X \leq 186)$.

$$P(162 \leq X \leq 186) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{162-174}{12} \leq Z \leq \frac{186-174}{12}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} =$$

$$= 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826}$$

z	0,00	
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1,0	0,8413	0,

b) Deseamos averiguar el valor de “a” para el que se cumple $P(X \geq a) = 0.67$.

$$P(X \geq a) = 0.67 \Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ 0.67 > 0.5 \rightarrow \frac{a-174}{12} < 0 \right\} \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-174}{12} = 0.44 \Rightarrow -a + 174 = 5.28 \Rightarrow \boxed{a = 174 - 5.28 = 168.72}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700

El alumno mide 168.72 centímetros de altura.

c) Hallamos la probabilidad de que un alumno tenga una altura superior a 170 centímetros.

$$P(X > 170) = \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{170-174}{12}\right) = P(Z > -0.33) =$$

$$= P(Z \leq 0.33) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.6293}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331

De una muestra de 1000 alumnos podemos encontrar $1000 \cdot 0.6293 = 629$ alumnos que midan más de 170 centímetros.



EBAU Extraordinaria 2024
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
 Curso 2023-2024

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Calcular la inversa de la matriz $A + A^t$ donde A^t es la traspuesta de A . (1 punto)
 b) Encontrar la matriz X que verifica $XA + XA^t = C$. (1 punto)

2. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ según sea el valor de m . (2 puntos)

3. a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)
 b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1, 2, 1)$. (1 punto)

4. Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases}$ y $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{3}$

- a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)
 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x + 4y - 4 = 0$. (1 punto)

5. Se considera la función $f(x) = \frac{4x+4}{x^2}$.

- a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)
 b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

6. Calcular a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & \text{si } x < 0 \\ a + cx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$. (2 puntos)

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$. (2 puntos)

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6, \quad g(x) = 2x + 6 \quad (2 \text{ puntos})$$

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A?

(1 punto)

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de

0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

SOLUCIONES

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A + A^t$ donde A^t es la traspuesta de A . (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA + XA^t = C$. (1 punto)

a) Determinamos la expresión de la matriz $A + A^t$.

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos su matriz inversa.

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 2 - 0 - 2 = -2 \neq 0$$

$$(A + A^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + A^t)^t)}{|A + A^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-2} =$$

$$= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $A + A^t$ es $(A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA + XA^t = C \Rightarrow X(A + A^t) = C \Rightarrow X = C(A + A^t)^{-1}$$

Realizamos las operaciones y obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = C(A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 & 1/2 - 1/2 & 1/2 + 3/2 \\ 3/2 + 0 + 1/2 & 3/2 + 0 - 1/2 & -3/2 + 0 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)
--

El rango de la matriz A es 3, 2 o 1.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 2m^3 + 2 + 2 - 2m - 2m - 2m = 2m^3 - 6m + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^3 - 6m + 4 = 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)(m^2 + m - 2) \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

$$m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=m} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=m} \end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 1$ y para $m = -2$.

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $m = 1$.

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Como las tres filas son iguales el rango de A es 1.}$$

CASO 3. $m = -2$.

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y}$$

$$\text{columna primeras} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el rango de A es 3, si $m = 1$ el rango de A es 1 y si $m = -2$ el rango de A es 2.

3. a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)
- b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1, 2, 1)$. (1 punto)

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (2, 1, 0)(a, b, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = 0}$$

Si los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = (5, 0, 1) \\ \vec{w} = (a, b, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0 + a + 0 - 0 - 5 - 2b = a - 2b - 5$$

$$\left. \begin{array}{l} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = a - 2b - 5 \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a - 2b - 5 = 0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b = 0 \\ a - 2b - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -2a \\ a - 2b - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - 2(-2a) - 5 = 0 \Rightarrow a + 4a = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1, 2, 1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (2, 1, 0) \\ \vec{v} = (5, 0, 1) \\ \vec{z} = (1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 5 - 4 = -8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.

4. Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases}$ y $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{3}$

- a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)
 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (-2, 2, -6) \\ P_r(1, 5, 0) \end{cases} \quad s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z-0}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, a, 3) \\ Q_s(-1, 1, 0) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas sus vectores directores deben tener coordenadas proporcionales y el punto P_r no debe pertenecer a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-2, 2, -6) \\ \vec{v}_s = (1, a, 3) \\ r \parallel s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} = \frac{2}{a} = \frac{-6}{3} \Rightarrow -2 = \frac{2}{a} = -2 \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Comprobamos que para $a = -1$ el punto P_r no pertenece a la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \\ \text{¿} P_r(1, 5, 0) \in s? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{1+1}{1} = \frac{5-1}{-1} = \frac{0}{3} ? \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3}$$

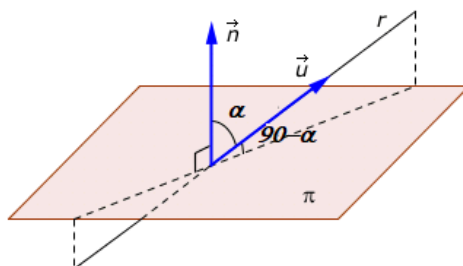
No son ciertas ninguna de las igualdades y el punto P_r no pertenece a la recta s , por lo que ambas rectas son paralelas para $a = -1$.

b) Hallamos el vector normal del plano $-3x+4y-4=0 \Rightarrow \vec{n} = (-3, 4, 0)$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-2, 2, -6) \\ \vec{n} = (-3, 4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(-2, 2, -6) \cdot (-3, 4, 0)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-6)^2} \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}_r, \vec{n}) = \frac{6+8}{\sqrt{44}\sqrt{25}} = \frac{7\sqrt{11}}{55} \Rightarrow (\vec{u}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{7\sqrt{11}}{55}\right) = 65.02^\circ$$



El ángulo que forman la recta y el plano es de $90^\circ - 65.02^\circ = 24.98^\circ$.

5. Se considera la función $f(x) = \frac{4x+4}{x^2}$.

- a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)
 b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x+4}{x^2} = \frac{4 \cdot 0 + 4}{0^2} = \frac{4}{0} = \infty$$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1} = \frac{\frac{4}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{1} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiamos la monotonía de la función.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{4x+4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^2 - 2x(4x+4)}{x^4} = \frac{4x^2 - 8x^2 - 8x}{x^4} = \frac{-4x^2 - 8x}{x^4} = \frac{-4x - 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x-8}{x^3} = 0 \Rightarrow -4x-8 = 0 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-8}{4} = -2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ (excluido del dominio) y $x = -2$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

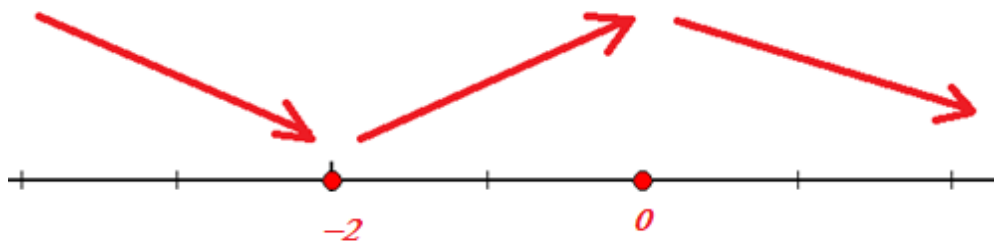
$$f'(-3) = \frac{-4(-3)-8}{(-3)^3} = \frac{4}{-27} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-4(-1)-8}{(-1)^3} = \frac{-4}{-1} = 4 > 0. \text{ La función crece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-4(1)-8}{1^3} = -12 < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y crece en $(-2, 0)$.

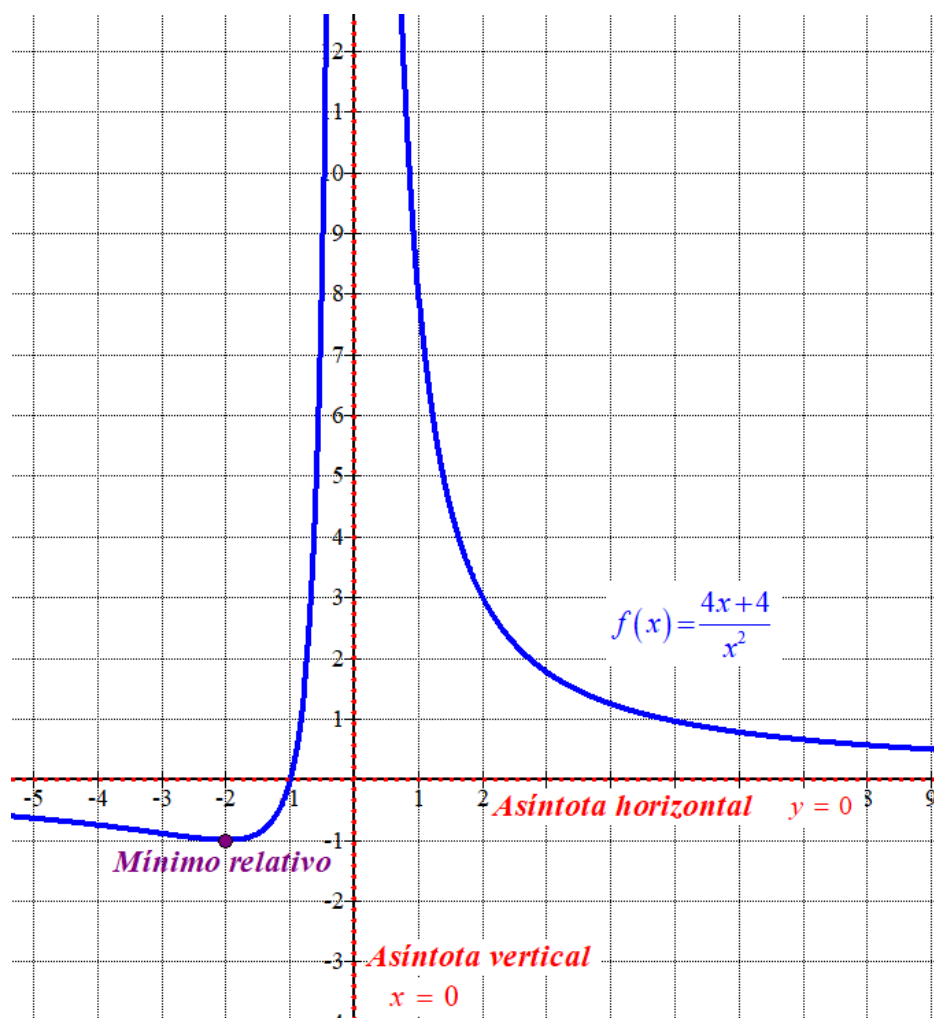
En $x = 0$ no hay máximo relativo pues este valor está excluido del dominio.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2) = \frac{4(-2)+4}{(-2)^2} = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(-2, -1)$.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y = \frac{4x+4}{x^2}$
-4	-0.75
-2	-1
-1	0
1	8
2	3



6. Calcular a , b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & \text{si } x < 0 \\ a + cx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$. (2 puntos)

La función debe ser continua en el intervalo $[-2, 2]$. La función es continua en $[-2, 0)$ por ser una función polinómica. La función es continua en $(0, 2]$ por ser una función polinómica. Falta hacer que sea continua en $x = 0$.

- Existe $f(0) = a + c \cdot 0 = a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a + cx = a$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + ax - b = -b$.
- Los tres valores deben ser iguales $\rightarrow \boxed{a = -b}$.

Para que la función sea continua en el intervalo $[-2, 2]$ debe ser $a = -b$.

La función debe ser derivable en $(-2, 2)$. La función es derivable en $(-2, 0)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x) = 2x + a$. La función es derivable en $(0, 2)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x) = c$. Falta hacer que sea derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + a = a \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} c = c \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = c}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo $(-2, 2)$ debe ser $a = c$.

El último requisito necesario para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$ es que el valor de la función sea el mismo en los extremos del intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + a(-2) - b = 4 - 2a - b \\ f(2) &= a + 2c \\ f(-2) &= f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 - 2a - b = a + 2c \Rightarrow \boxed{-3a - b - 2c = -4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} a &= -b \\ a &= c \\ -3a - b - 2c &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -a &= b \\ a &= c \\ 3a + b + 2c &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a - a + 2a = 4 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = -1} \\ \boxed{c = 1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx$.	(2 puntos)
--	------------

Utilizamos el método de descomposición en fracciones simples para calcular la integral.

$$\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx = ..$$

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = \dots$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\dots = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-x^2 + 7x + 6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 7x + 6 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 6 = A(-1)(2) \rightarrow -2A = 6 \rightarrow A = \frac{6}{-2} = -3 \\ x=1 \rightarrow 12 = 3B \rightarrow B = \frac{12}{3} = 4 \\ x=-2 \rightarrow -12 = C(-2)(-3) \rightarrow -12 = 6C \rightarrow C = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-2}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-2}{x+2} dx = -3 \int \frac{1}{x} dx + 4 \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= -3 \ln|x| + 4 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + C$$

Hemos obtenido que $\int \frac{-x^2 + 7x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} dx = -3 \ln|x| + 4 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + C$

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6, \quad g(x) = 2x + 6$$

(2 puntos)

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6 \\ g(x) = 2x + 6 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 + 3x^2 + 6 = 2x + 6 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 = x \\ 1 = x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes: una entre 0 y 1, otra entre 1 y 2.

Zona 1 (entre 0 y 1)

$$\int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 + 6 - (2x + 6) dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 - 2x dx =$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2 \right] - \left[\frac{-0^4}{4} + 0^3 - 0^2 \right] = \frac{-1}{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

Zona 2 (entre 1 y 2)

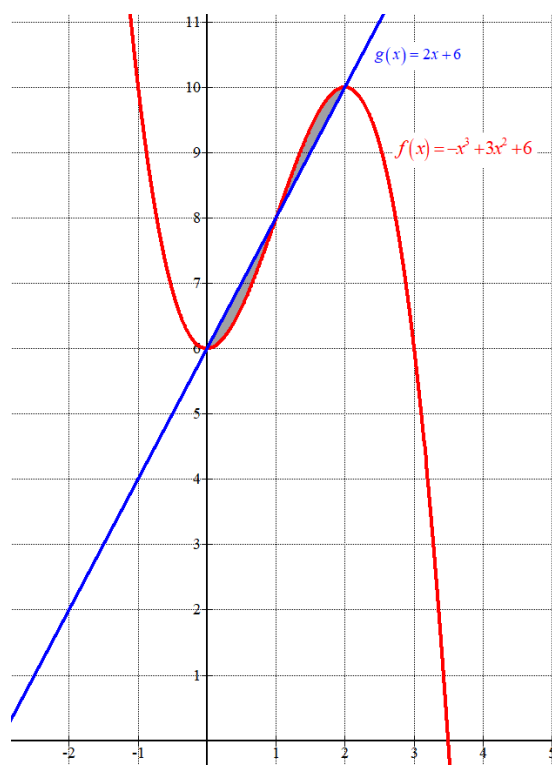
$$\int_1^2 f(x) - g(x) dx = \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{-2^4}{4} + 2^3 - 2^2 \right] - \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2 \right] =$$

$$= -4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$ y $g(x) = 2x + 6$ es la suma de las dos áreas calculadas y vale $1/4 + 1/4 = 1/2 = 0.5$ unidades cuadradas.



9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

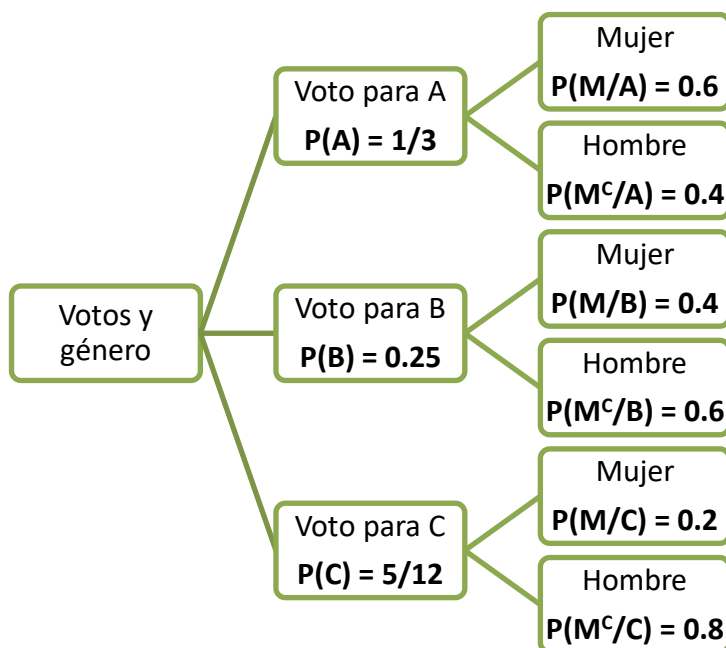
a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A?

(1 punto)

Llamamos A, B y C al suceso “el voto es para el candidato A, B o C, respectivamente” y M a “el votante es mujer”. Sabemos que $P(A) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 1 - \frac{1}{3} - 0.25 = \frac{5}{12}$, $P(M/A) = 0.60$, $P(M^c/B) = 0.60$ y $P(M/C) = 0.20$.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.4 + \frac{5}{12} \cdot 0.2 = \boxed{\frac{23}{60} \approx 0.3833}$$

La probabilidad de que el votante elegido al azar sea mujer es de 0.3833.

b) Nos piden calcular $P(A/M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M^c) = \frac{P(A \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(A)P(M^c/A)}{1 - P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.4}{1 - \frac{23}{60}} = \boxed{\frac{8}{37} \approx 0.2162}$$

La probabilidad de que un votante hombre sea votante del candidato A es de 0.2162.

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

- | | |
|---|---------------|
| a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. | (0.75 puntos) |
| b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. | (0.75 puntos) |
| c) El número medio de hoyos. | (0.5 puntos) |

Sea X = número de hoyos en un lanzamiento de 5 intentos.

Es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 5$ y la probabilidad de que haga hoyo en un lanzamiento es $p = 0.4$.

Es una variable binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0.4$. $X = B(5, 0.4)$

- a) La probabilidad de que no haya ningún hoyo es $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^5 = \boxed{0.07776}$$

La probabilidad de que no haga ningún hoyo es de 0.07776.

- b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es $P(X \leq 2)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{5}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^5 + \binom{5}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^4 + \binom{5}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^3 =$$

$$= 0.6^5 + 5 \cdot 0.4 \cdot 0.6^4 + 10 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = \boxed{\frac{2133}{3125} = 0.68256}$$

La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es de 0.68256.

- c) El número medio de hoyos es $np = 5 \cdot 0.4 = 2$ hoyos.



EBAU Ordinaria 2024
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

- a) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa. (1 punto)
 b) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta). (1 punto)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y

b para que el producto $A \cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N . (2 puntos)

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta

de ecuación $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$. (2 puntos)

4. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:

- a) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)
 b) El ángulo determinado por dichos vectores. (0.5 puntos)
 c) El área del triángulo que forman A , B y C . (0.5 puntos)

5. Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(2 puntos)

6. Calcular el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - x \cdot e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

(2 puntos)

7. Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (2x + 5) \cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)
8. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 5x$ y $g(x) = -x$.
(2 puntos)
9. En una residencia de ancianos el 80% de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60% tiene redes sociales, y el 10% no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad
- a) De que un residente use correo electrónico y redes sociales (0.5 puntos)
 - b) De que un residente use sólo una de las dos cosas. (0.75 puntos)
 - c) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales. (0.75 puntos)
10. Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 días Luis llega tarde como mucho 3 días, le subirá 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es 0.5, determinar:
- a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días. ¿Cuáles son sus parámetros? (0.5 puntos)
 - b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución? (0.75 puntos)
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

1. Sea $b \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa. (1 punto)

b) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta). (1 punto)

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = 2b + 2 + (b+1)(b+2) - (b+1) - 2b(b+2) - 2 =$$

$$= \cancel{2b} + 2 + b^2 + \cancel{2b} + \cancel{b} + \cancel{2} - \cancel{b} - \cancel{1} - 2b^2 - \cancel{4b} - \cancel{2} = -b^2 + 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -b^2 + 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{1} = \pm 1}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de b distinto de -1 y 1 .

b) Para $b = 0$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 1 - 0 - 2 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que el producto $A \cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N . (2 puntos)

Nos piden resolver la igualdad $A \cdot M = N^{-1}$.

Hallamos la inversa de la matriz N .

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$N^{-1} = \frac{\text{Adj}(N^t)}{|N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación planteada.

$$\begin{aligned} A \cdot M = N^{-1} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a+0+a-b & 0+0+1 \\ -a+b+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 1 \\ -a+b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ b=1+a \end{cases} \Rightarrow 2a-(1+a)=2 \Rightarrow 2a-1-a=2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{a=3} \Rightarrow \boxed{b=1+3=4} \end{aligned}$$

Los valores necesarios para que $A \cdot M = N^{-1}$ son $a = 3$ y $b = 4$.

3. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta de ecuación $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$. (2 puntos)

Hallamos un punto y un vector de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x = -1 + 2z \end{cases} \Rightarrow -1 + 2z - y - 4z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1, 0, 0) \\ \vec{v}_r = (2, -2, 1) \end{cases}$$

Hallamos un vector de la recta s .

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1, 3, 0) \\ \vec{u}_s = (2, -1, 3) \end{cases}$$

El plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas. Este plano contiene a la recta r y por tanto, contiene al punto P_r de dicha recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (2, -1, 3) \\ P_r(-1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6(x+1) + 2y - 2z + 4z - 6y + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - 6 + 2y - 2z + 4z - 6y + x + 1 = 0 \Rightarrow -5x - 4y + 2z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x + 4y - 2z + 5 = 0}$$

El plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s es $\pi: 5x + 4y - 2z + 5 = 0$.

4. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:

- | | |
|--|--------------|
| a) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. | (1 punto) |
| b) El ángulo determinado por dichos vectores. | (0.5 puntos) |
| c) El área del triángulo que forman A , B y C . | (0.5 puntos) |

a) Determinamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0, 3, 1) - (1, 2, 1) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (1, 0, -1) - (1, 2, 1) = (0, -2, -2)\end{aligned}$$

Un vector ortogonal a ambos vectores es su producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2i + 2k - 2j = -2i - 2j + 2k = (-2, -2, 2)$$

Para que sea unitario (módulo 1) dividimos el producto vectorial entre su módulo y tendremos el vector buscado.

$$\frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2, -2, 2)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{(-2, -2, 2)}{\sqrt{12}} = \frac{(-2, -2, 2)}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es el vector $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

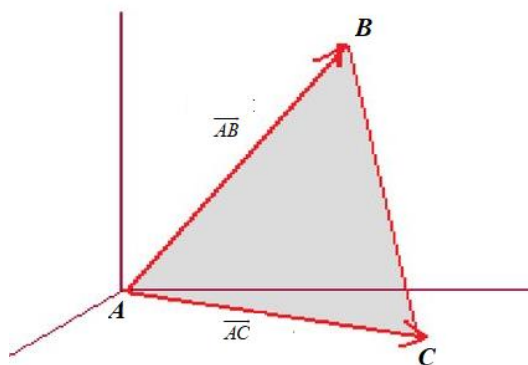
b) Utilizamos el producto escalar.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1, 1, 0) \cdot (0, -2, -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2} \sqrt{8}} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos^{-1}(-0.5) = 120^\circ$$

El ángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es de 120° .

c) Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} u^2$$

El área del triángulo que forman A , B y C tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

5. Hallar los intervalos de crecimiento y los puntos extremos de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(2 puntos)

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

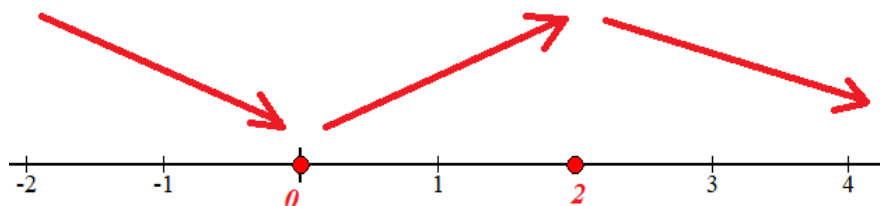
$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 2-x = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (-1)e^1(2+1) = -3e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (1)e^{-1}(2-1) = e^{-1} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = (3)e^{-3}(2-3) = -3e^{-3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

Como $f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.

6. Calcular el valor de a para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x) - x \cdot e^x}{x^2 - 2 \cos(x) + 2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

(2 puntos)

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y el límite de la función cuando x tiende a 0.

Hallamos el límite de la función cuando x tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x \cdot e^x}{x^2 - 2 \cos(x) + 2} = \frac{\operatorname{sen}(0) - 0 \cdot e^0}{0^2 - 2 \cos(0) + 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - (e^x + x \cdot e^x)}{2x + 2 \operatorname{sen}(x)} = \frac{\cos(0) - (e^0 + 0 \cdot e^0)}{2 \cdot 0 + 2 \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - (e^x + e^x + x \cdot e^x)}{2 + 2 \cos(x)} = \frac{-\operatorname{sen}(0) - (e^0 + e^0 + 0 \cdot e^0)}{2 + 2 \cos(0)} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Aplicamos la condición de continuidad en $x = 0$: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x \cdot e^x}{x^2 - 2 \cos(x) + 2} = \frac{-1}{2} \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}}$$

El valor que hace continua la función en $x = 0$ es $a = \frac{-1}{2}$.

7. Hallar una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (2x+5) \cdot e^{-2x}$ que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)

Utilizamos el método de integración por partes para calcular la integral de la función.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int (2x+5) \cdot e^{-2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+5 \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\} = \\
 &= (2x+5) \frac{-1}{2} e^{-2x} - \int \frac{-1}{2} e^{-2x} 2dx = \frac{-2x-5}{2} e^{-2x} + \int e^{-2x} dx = \frac{-2x-5}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} = \\
 &= \left(\frac{-2x-5}{2} - \frac{1}{2} \right) e^{-2x} = (-x-3) e^{-2x} + C
 \end{aligned}$$

La primitiva de la función es $F(x) = (-x-3)e^{-2x} + C$.

Para determinar el valor de C utilizamos que $F(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = (-x-3)e^{-2x} + C \\ F(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = (-0-3)e^0 + C \Rightarrow 0 = -3 + C \Rightarrow \boxed{C=3}$$

La primitiva buscada es $F(x) = (-x-3)e^{-2x} + 3$.

8. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 5x$ y $g(x) = -x$.

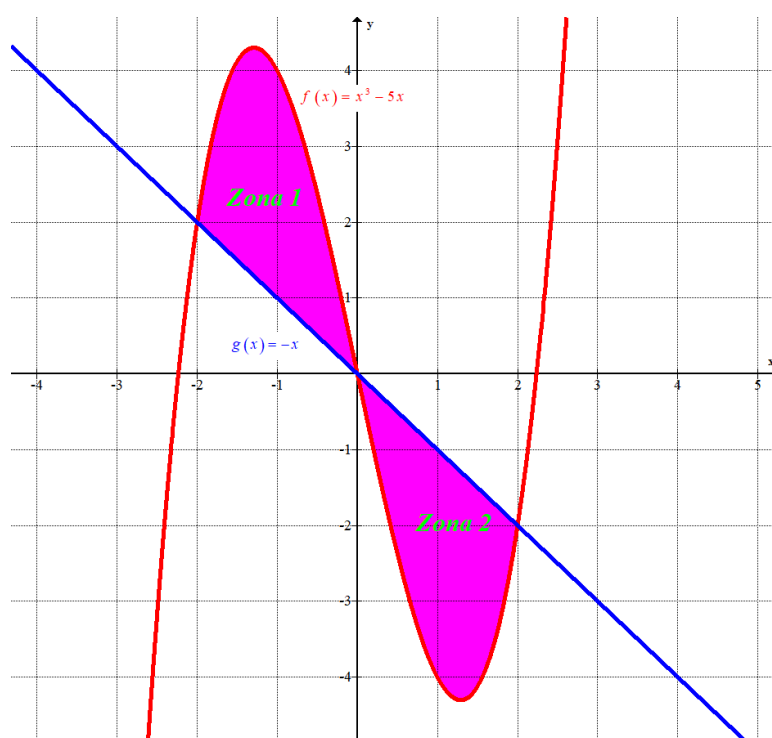
(2 puntos)

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 5x \\ g(x) = -x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 5x = -x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes.



Zona 1 (entre -2 y 0)

$$\int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^0 x^3 - 5x - (-x) dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right] = -4 + 8 = \boxed{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

Zona 2 (entre 0 y 2)

$$\int_0^2 f(x) - g(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] = 4 - 8 = \boxed{-4}$$

El área de la zona 2 es el valor absoluto de lo obtenido y vale 4 unidades cuadradas.

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 5x$ y $g(x) = -x$ es la suma de las dos áreas y vale 8 unidades cuadradas.

9. En una residencia de ancianos el 80% de los residentes tiene cuenta de correo electrónico, el 60% tiene redes sociales, y el 10% no tiene ni correo electrónico ni redes sociales. Se pide calcular la probabilidad

- a) De que un residente use correo electrónico y redes sociales (0.5 puntos)
 b) De que un residente use sólo una de las dos cosas. (0.75 puntos)
 c) De que un residente use correo electrónico sabiendo que no usa redes sociales. (0.75 puntos)

Llamamos C al suceso “el residente tiene cuenta de correo electrónico” y R a “el residente tiene redes sociales”

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Tienen correo electrónico	No tienen correo electrónico	
Tienen redes sociales (R)			60
No tienen redes sociales		10	
	80		100

Completamos la tabla.

	Tienen correo electrónico	No tienen correo electrónico	
Tienen redes sociales (R)	50	10	60
No tienen redes sociales	30	10	40
	80	20	100

Con los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas de cada apartado.

- a) Hay un 50 % de los residentes que usan correo electrónico y redes sociales.

$$P(R \cap C) = 0.5$$

- b) Hay un 30 % de residentes que usan el correo y no tienen redes sociales y otro 10 % que no tienen correo y tienen redes sociales. Hay $30 + 10 = 40$ % de residentes que usan sólo una de las dos cosas.

$$P((\bar{R} \cap C) \cup (R \cap \bar{C})) = 0.4$$

- c) Hay un 40 % de residentes que no usan redes sociales, de ellos 30 % tiene correo y 10 % no tiene correo.

$$P(C / \bar{R}) = \frac{P(C \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0.30}{0.40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

10. Luis es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 10 días Luis llega tarde como mucho 3 días, le subirá 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Luis llegue tarde a clase cada día es 0.5, determinar:

- a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días. ¿Cuáles son sus parámetros? (0.5 puntos)
- b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución? (0.75 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final? (0.75 puntos)

- a) Sea X = número de días que Luis llega tarde a clase en los próximos 10 días.
Es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 10$ y la probabilidad de que llegue tarde un día es $p = 0.5$.
Es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.5$.
 $X = B(10, 0.5)$

- b) La media de esta distribución en $n \cdot p = 10 \cdot 0.5 = 5$ días y la desviación típica es
 $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 1.58$ días.

- c) Para conseguir la subida debe llegar tarde como mucho 3 días. Debemos calcular $P(X \leq 3)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ &= \binom{10}{0} 0.5^0 \cdot 0.5^{10} + \binom{10}{1} 0.5^1 \cdot 0.5^9 + \binom{10}{2} 0.5^2 \cdot 0.5^8 + \binom{10}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^7 = \\ &= 0.5^{10} + 10 \cdot 0.5^{10} + 45 \cdot 0.5^{10} + 120 \cdot 0.5^{10} = 176 \cdot 0.5^{10} = \frac{11}{64} \approx 0.17 \end{aligned}$$

La probabilidad de que Luis consiga esa subida de 1 punto en la nota final es de 0.17.



EBAU Extraordinaria 2023
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
 Curso 2022-2023

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda \cdot I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Resolver el sistema en el caso $a = 1$. (0.5 puntos)

3. Sean los vectores $\vec{u} = (0, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, -1, 1)$

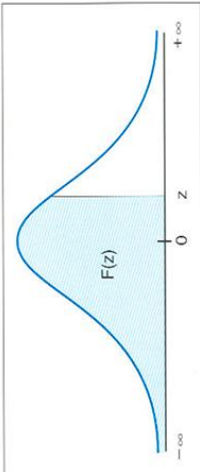
- a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)
 b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)
 c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

4. Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$.

- a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)
 b) Hallar la distancia del punto A a la recta r . (0.75 puntos)

5. Calcular los coeficientes a , b , c y d del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)
- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
 - la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
 - la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$ (2 puntos)
7. Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$. (2 puntos)
8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$. (2 puntos)
9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,
- Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)
 - Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)
 - Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)
10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:
- Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)
 - ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

1. Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda \cdot I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

$$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 1, 2 o 3.

Veamos cuando se anula el determinante de $A - \lambda \cdot I$.

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) + 2\lambda = 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda$$

$$|A - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = \lambda \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = \lambda \end{cases} \end{cases}$$

Distinguimos cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$.

En este caso el determinante de $A - \lambda \cdot I$ es no nulo y por tanto su rango es 3.

CASO 2. Si $\lambda = 0$.

En este caso el determinante de $A - \lambda \cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

primera fila y la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$.

El rango de la matriz $A - 0 \cdot I = A$ es el rango de la matriz A y es 2.

CASO 3. Si $\lambda = 1$.

En este caso el determinante de $A - \lambda \cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

primera fila y la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$.

El rango de la matriz $A - I$ es 2.

CASO 4. Si $\lambda = 2$.

En este caso el determinante de $A - \lambda \cdot I$ es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la

primera fila y la segunda columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$.

El rango de la matriz $A - 2 \cdot I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$ el rango de $A - \lambda \cdot I$ es 3. Si $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$ el rango de $A - \lambda \cdot I$ es 2.

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Resolver el sistema en el caso $a = 1$. (0.5 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + 2a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=a} \\ \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=a} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = 1$

El determinante de A es nulo. El rango de A no es 3. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a = 2$

El determinante de A es nulo. El rango de A no es 3. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad -6}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, pero el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = 2$ el sistema es incompatible.

Resolvemos el sistema para $a = 1$. Sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el estudio anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 - z + z = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

3. Sean los vectores $\vec{u} = (0, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, -1, 1)$

- a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)
 b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)
 c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

a) Los vectores son linealmente independientes si su producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ es no nulo.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 2 - 4 + 0 + 0 = -6 \neq 0$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

b) El área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, 0, 2) \\ \vec{v} = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - 2i = (-2, 2, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \boxed{\sqrt{2} \text{ unidades cuadradas}}$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es su producto vectorial. Este vector lo dividimos por su módulo y obtenemos el vector unitario $\vec{t}$ pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (1, 1, 0) \\ \vec{w} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - k - 2k - j = i - j - 3k = (1, -1, -3)$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{(1, -1, -3)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\vec{t} = \frac{-(\vec{v} \times \vec{w})}{|\vec{v} \times \vec{w}|} = \frac{(-1, 1, 3)}{\sqrt{11}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right)$$

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$.

- a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)
 b) Hallar la distancia del punto A a la recta r . (0.75 puntos)

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

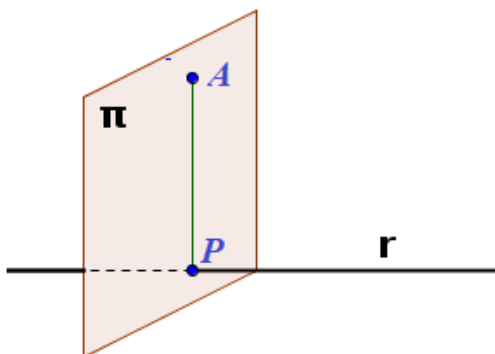
$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases}$$

El plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como vectores directores el vector director de la recta r y el vector $\overrightarrow{AB}$ y contiene el punto P_r de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) - (0,0,2) = (1,1,-2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ P_r(1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+z-y+2x-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 3x - y + z - 3 = 0}$$

b) Seguimos el esquema del dibujo para obtener el valor de la distancia pedida.



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ A(0,0,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : y + z + D = 0 \\ A(0,0,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \boxed{\pi : y + z - 2 = 0}$$

Hallamos el punto P de intersección de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : y + z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow z + z - 2 = 0 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \boxed{P(1,1,1)}$$

La distancia del punto A a la recta es la distancia del punto A al punto P, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = (1,1,1) - (0,0,2) = (1,1,-1) \Rightarrow D(A,r) = D(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{3} \text{ unidades}}$$

5. Calcular los coeficientes a , b , c y d del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

Si $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1 \rightarrow p'(-1) = 0$ y $p''(-1) < 0$

Si la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0) \rightarrow p(0) = 0; p''(0) = 0$

Si la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3 $\rightarrow p'(2) = 3$

Aplicamos todas estas condiciones a nuestra función.

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \\ p(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$p(x) = bx + cx^2 + dx^3 \Rightarrow p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \Rightarrow p''(x) = 2c + 6dx$$

$$\left. \begin{array}{l} p''(x) = 2c + 6dx \\ p''(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0} \Rightarrow p'(x) = b + 3dx^2$$

$$\left. \begin{array}{l} p'(x) = b + 3dx^2 \\ p'(-1) = 0 \\ p'(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b + 3d = 0 \\ b + 12d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3d \\ b + 12d = 3 \end{cases} \Rightarrow -3d + 12d = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9d = 3 \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{b = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1}$$

Los valores buscados son $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$.

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$ (2 puntos)

La función $f(x)$ continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax + b = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = \ln 1 = 0 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2 + a + b = 0}$$

La función pasa por el punto $(-1, 5) \rightarrow f(-1) = 5$.

$$f(-1) = 5 \Rightarrow 2(-1)^2 + a(-1) + b = 5 \Rightarrow 2 - a + b = 5 \Rightarrow \boxed{b = a + 3}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 2 + a + b &= 0 \\ b &= a + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a + a + 3 = 0 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{2}} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{5}{2}$; $b = \frac{1}{2}$.

7. Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$. (2 puntos)

Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)e^{x+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{x+1} dx \rightarrow v = \int e^{x+1} dx = e^{x+1} \end{array} \right\} =$$

$$= (x+1)e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = (x+1)e^{x+1} - e^{x+1} = (x+1-1)e^{x+1} = xe^{x+1} + K$$

De todas las primitivas de la función debemos encontrar la que cumple $F(0) = -1$.

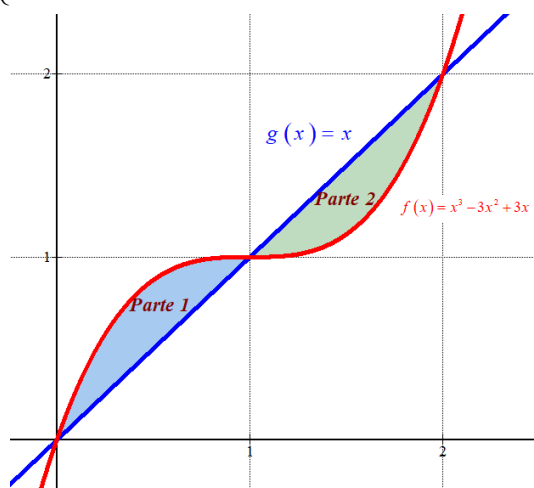
$$\left. \begin{array}{l} F(x) = xe^{x+1} + K \\ F(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = 0 \cdot e^{0+1} + K \Rightarrow K = -1 \Rightarrow \boxed{F(x) = xe^{x+1} - 1}$$

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \\ g(x) = x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 = x \\ \frac{3-1}{2} = 1 = x \end{cases} \end{array} \right.$$



Existen tres puntos de corte con el eje de abscisas. El recinto del que queremos calcular el área lo dividimos en dos partes y el área de cada una de ellas la determinamos calculando la integral definida correspondiente.

$$\int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 3x - x dx = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 \right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\int_1^2 f(x) - g(x) dx = \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 3x - x dx = \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2x dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 = \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] = 4 - 8 + 4 - \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

El área pedida es la suma del área de las dos partes, es decir, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ unidades cuadradas.

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,
- Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)
 - Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)
 - Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia.

	Barranquismo (B)	No barranquismo (B^C)	
Escalada (A)	45		70
No escalada (A^C)			
	60		100

Completamos la tabla.

	Barranquismo (B)	No barranquismo (B^C)	
Escalada (A)	45	25	70
No escalada (A^C)	15	15	30
	60	40	100

- a) Sabemos que hay un 15 por ciento de afiliados que practica barranquismo y no escalada y un 25 % de afiliados que practica escalada y no barranquismo.
Aplicamos la regla de Laplace

$$P(\text{practique solo una de las dos actividades}) = \frac{25+15}{100} = \boxed{0.4}$$

- b) Hay un 15 % de afiliados que no practica ninguna de las dos actividades.

$$P(\text{No practica ni escalada ni barranquismo}) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$$

- c) El 60 % practica barranquismo y sólo el 15 % practica barranquismo y no escalada.
Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No practique escalada/practica barranquismo}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Practica barranquismo y no practica escalada})}{P(\text{Practica barranquismo})} = \frac{15}{60} = \boxed{0.25}
 \end{aligned}$$

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

- a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)
 b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

X = Vida útil de un reloj de cierta marca en años. $X = N(10, 2)$

a) Nos piden calcular $P(9 \leq X \leq 12)$.

$$\begin{aligned} P(9 \leq X \leq 12) &= P(X \leq 12) - P(X \leq 9) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \leq \frac{12-10}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{9-10}{2}\right) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \geq 0.5) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.5328} \end{aligned}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611
0.8	0.7881	0.7910
0.9	0.8159	0.8186
1.0	0.8413	0.8438
1.1	0.8643	0.8665
1.2	0.8849	0.8869

b) Nos piden hallar el valor de “a” para qué $P(X \leq a) = 0.9$.

$$\begin{aligned} P(X \leq a) = 0.9 &\Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-10}{2} = 1.28 \Rightarrow a = 1.28 \cdot 2 + 10 = \boxed{12.56 \text{ años}} \end{aligned}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8961	0.8979	0.8997



EBAU Ordinaria 2023
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos**. El **estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras cuestiones/preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el sexto lugar.

Se deben justificar todas las respuestas y soluciones.

PREGUNTAS

1. Encontrar la matriz X que verifica $(A - 3I) \cdot X = 2I$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3.

(2 puntos)

2. Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero.

(2 puntos)

3. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + (1+b)y - bz &= 2b \\ x + by + (1+b)z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

(2 puntos)

5. a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

6. Calcular a , b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ cx & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. (2 puntos)

7. Calcula la integral

(2 puntos)

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6} dx.$$

8. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

9. Al 80% de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40% les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano? (0.75 puntos)

10. Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

SOLUCIONES

1. Encontrar la matriz X que verifica $(A - 3I) \cdot X = 2I$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3.

(2 puntos)

Comprobamos si la matriz $(A - 3I)$ tiene inversa y, en caso afirmativo, la calculamos.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 = 3 \neq 0. \text{ Existe la inversa}$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - 3I)^T}{|A - 3I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación y averiguamos su expresión.

$$(A - 3I) \cdot X = 2I \Rightarrow X = (A - 3I)^{-1} 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero.

(2 puntos)

Calculamos la expresión del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 0 + 0 + 4x - 0 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

Comprobamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{-2} = 1 = x \\ \frac{-4-2}{-2} = 3 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo antes, entre y después de estos dos valores que anulan el determinante.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y el determinante es $-0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$.

En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y el determinante es $-2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$.

En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y el determinante es $-4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3 < 0$.

El determinante es mayor o igual que cero en el intervalo $[1, 3]$.

3. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + (1+b)y - bz &= 2b \\ x + by + (1+b)z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Estudiamos la compatibilidad del sistema y, a partir de ahí, deducimos la posición relativa de los tres planos.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)(1+b) - 2b - b + (1+b) - 2(1+b) + b^2 =$$

$$= 1 + b^2 + 2b - 2b - b + 1 + b - 2 - 2b + b^2 = 2b^2 - 2b$$

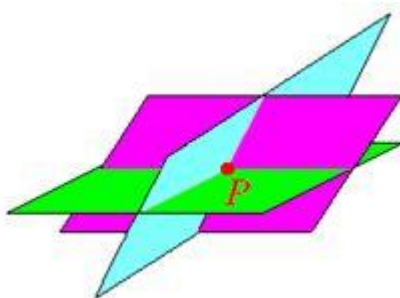
$$|A| = 0 \Rightarrow 2b^2 - 2b = 0 \Rightarrow 2b(b-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b - 1 = 0 \rightarrow b = 1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

Los tres planos se cortan en un único punto (solución del sistema)



CASO 2. Si $b = 0$

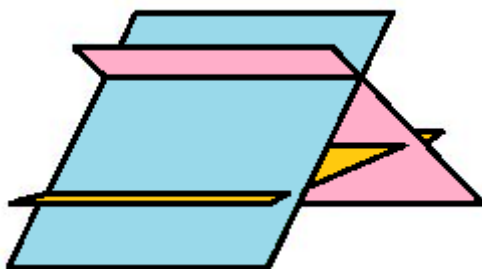
El determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema. Intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x+y=0 \\ x+z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ y=-x \\ z=1-x \end{array} \right\} \Rightarrow x+2(-x)-(1-x)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2x-1+x=2 \Rightarrow -1=2 \text{ ¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución.

Como tienen vectores normales distintos se cortan dos a dos, pero no coinciden los tres en ningún punto.



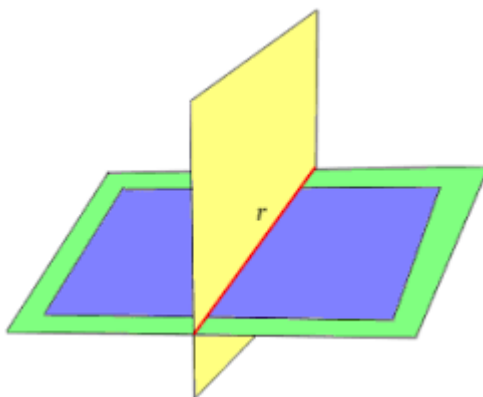
CASO 3. Si $b=1$

El determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{array} \right\}$$

El primer y segundo plano son el mismo y se corta con el tercer plano en una recta al tener vectores normales con coordenadas no proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=2 \rightarrow \vec{n}=(1,2,-1) \\ x+y+2z=1 \rightarrow \vec{n}=(1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$$



Resumiendo: Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$ los tres planos se cortan en un punto, si $b=0$ los planos se cortan dos a dos, pero los tres no coinciden en ningún punto y si $b=1$ dos planos son coincidentes y se cortan con el tercero en una recta.

4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

(2 puntos)

Un vector ortogonal a los dos vectores es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 2, 0) \\ \vec{v} = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 2k - j = 2i - j + 2k = (2, -1, 2)$$

Si además queremos que su módulo sea 5 dividimos el vector por su módulo (vector unitario) y lo multiplicamos por 5.

$$\vec{w} = (2, -1, 2) \Rightarrow \vec{w'} = \frac{(2, -1, 2)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{(2, -1, 2)}{3} = (2/3, -1/3, 2/3)$$

$$\boxed{\vec{w''} = 5(2/3, -1/3, 2/3) = (10/3, -5/3, 10/3)}$$

El vector pedido es $\vec{w''} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$

También cumple los requisitos el vector $\vec{w'''} = \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ opuesto al obtenido que tiene el mismo módulo y es ortogonal a los dos vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

5. a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

a) Para que $x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1$ debe cumplirse que $x^2 - 1 - x \cdot \cos(2x) = 0$

Consideramos la función $f(x) = x^2 - 1 - x \cdot \cos(2x)$.

Buscamos valores de la función positivos y negativos.

$$f(-2) = (-2)^2 - 1 - (-2) \cdot \cos(2(-2)) = 3 + 2 \cos(-4) \approx 1.69 > 0$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 - (-1) \cdot \cos(2(-1)) = \cos(-2) \approx -0.41 < 0$$

$$f(0) = 0^2 - 1 - 0 \cdot \cos(2 \cdot 0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1^2 - 1 - 1 \cdot \cos(2) = -\cos(2) \approx 0.41 > 0$$

$$f(2) = 2^2 - 1 - 2 \cdot \cos(4) = 3 - 2 \cos(4) \approx 4.3 > 0$$

En el intervalo $[-2, -1]$ la función toma valores de distinto signo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$.

En el intervalo $[0, 1]$ la función toma valores de distinto signo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $d \in (0, 1)$ tal que $f(d) = 0$.

Ya hemos encontrado una solución negativa de la ecuación: $c \in (-2, -1)$ y una solución positiva: $d \in (0, 1)$.

b) La solución positiva encontrada es mayor que 0 y menor que 1. El error es de 1 unidad.

Valoramos la función en distintos puntos del intervalo hasta aproximarnos más al cambio de signo.

$$f(0.5) = (0.5)^2 - 1 - (0.5) \cdot \cos(2(0.5)) \approx -1.02 < 0$$

$$f(0.7) = (0.7)^2 - 1 - (0.7) \cdot \cos(2(0.7)) \approx -0.62 < 0$$

$$f(0.8) = (0.8)^2 - 1 - (0.8) \cdot \cos(2(0.8)) \approx -0.34 < 0$$

$$f(0.9) = (0.9)^2 - 1 - (0.9) \cdot \cos(2(0.9)) \approx 0.014 > 0$$

En el intervalo $(0.8, 0.9)$ la función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo y como es continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0.8, 0.9)$ tal que $f(c) = 0$. Esta raíz positiva tiene un error menor de 1 décima $\rightarrow c = 0.8...$

6. Calcular a , b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ cx & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. (2 puntos)

El enunciado del teorema de Rolle es:

Sea $f(x)$ una función que
 1º es **continua** en $[a, b]$,
 2º es **derivable** en (a, b) ,
 3º y cumple que $f(a) = f(b)$.
 Entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

En el intervalo $[0, 4]$ la función cambia de definición, luego debes hacer que sea continua y derivable en $x = 1$.

La función $f(x)$ continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = 1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} cx = c \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{1 + a + b = c}$$

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ c & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + a = 2 + a \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} c = c \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{2 + a = c}$$

También debe cumplirse que $f(0) = f(4)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 + a \cdot 0 + b = b \\ f(4) &= 4c \\ f(0) &= f(4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4c}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} 1 + a + b &= c \\ 2 + a &= c \\ b &= 4c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 1 + a + b &= c \\ b &= 4c \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + c - 2 + 4c = c \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = \frac{1}{4} - 2 = \frac{-7}{4}} \\ \boxed{b = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-7}{4}$; $b = 1$; $c = \frac{1}{4}$.

7. Calcula la integral

(2 puntos)

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6} dx.$$

Calculamos la integral usando la descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 = x \\ \frac{-1-5}{2} = -3 = x \end{cases}$$

$$\frac{17-x}{x^2+x-6} = \frac{17-x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17-x = A(x+3) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 17-2 = A(5) + B(0) \rightarrow 15 = 5A \rightarrow A=3 \\ x=-3 \rightarrow 17+3 = A(0) + B(-5) \rightarrow 20 = -5B \rightarrow B=-4 \end{cases}$$

$$\frac{17-x}{x^2+x-6} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral.

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6} dx = \int \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} dx = \int \frac{3}{x-2} dx - \int \frac{4}{x+3} dx = 3 \int \frac{1}{x-2} dx - 4 \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$\boxed{\int \frac{17-x}{x^2+x-6} dx = 3 \ln|x-2| - 4 \ln|x+3| + K}$$

8. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 4x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte con el eje de abscisas. El recinto del que queremos calcular el área lo dividimos en dos partes y el área de cada una de ellas la determinamos calculando la integral definida correspondiente.

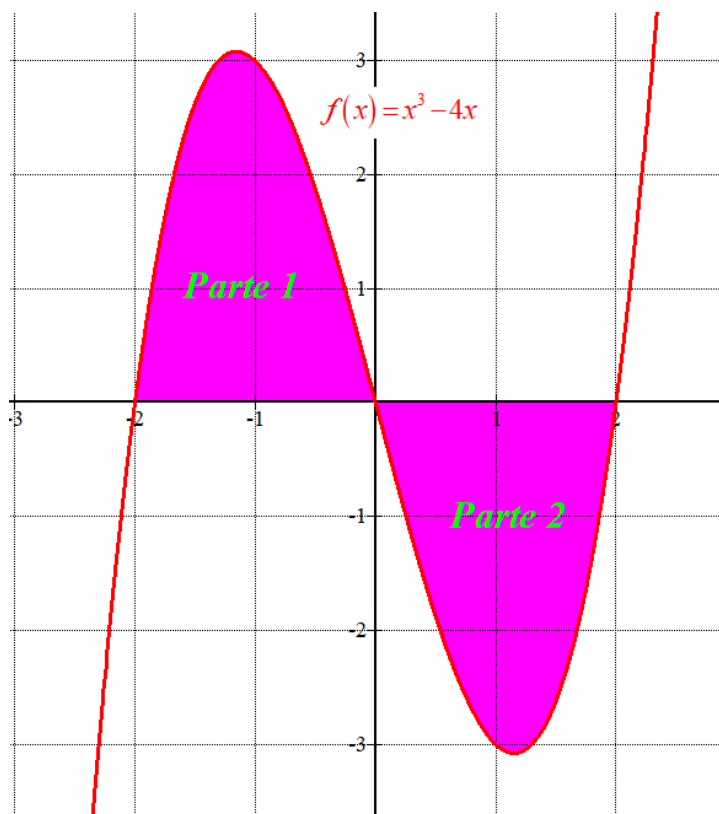
$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right] = -4 + 8 = 4$$

$$\text{Área parte 1} = \int_{-2}^0 f(x) dx = 4 \text{ unidades cuadradas}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^3 - 4x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2(0)^2 \right] = 4 - 8 = -4$$

$$\text{Área parte 2} = \left| \int_0^2 f(x) dx \right| = |-4| = 4 \text{ unidades cuadradas}$$

El área pedida es la suma del área de las dos partes, es decir, 8 unidades cuadradas.



9. Al 80% de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40% les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)
- c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano? (0.75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los porcentajes.

	Gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	TOTALES
Gusta el fútbol	30		80
No le gusta el fútbol			
TOTALES	40		100

Completamos la tabla.

	Gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	TOTALES
Gusta el fútbol	30	50	80
No le gusta el fútbol	10	10	20
TOTALES	40	60	100

- a) Aplicamos la regla de Laplace,

$$P(\text{le guste alguno de los dos deportes}) = \frac{30 + 50 + 10}{100} = \boxed{0.9}$$

- b) Hay un 50% de alumnos a los que les gusta el fútbol y no les gusta el balonmano. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{le guste solo el fútbol}) = P(\text{le guste el fútbol y no le guste el balonmano}) = \frac{50}{100} = \boxed{0.5}$$

- c) Al 20 % no le gusta el fútbol y al 10 % no le gusta el fútbol y si le gusta el balonmano. Volvemos a aplicar la regla de Laplace.

$$P(\text{Le guste el balonmano/No le gusta el fútbol}) =$$

$$= \frac{P(\text{Le guste el balonmano y no le gusta el fútbol})}{P(\text{No le gusta el balonmano})} = \frac{10}{20} = \boxed{0.5}$$

10. Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

- a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)
- b) La probabilidad de que escriba 4 ó más mensajes con errores. (0.75 puntos)
- c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

X = Número de mensajes con errores ortográficos de 15.

Es una variable binomial pues son 15 repeticiones independientes entre sí y cada mensaje es con error o sin error (dicotomía). Como $n = 15$ y $p = P(\text{mensaje con error}) = 0.3$ tenemos que $X = B(15, 0.3)$.

- a) Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^{10} \approx \boxed{0.2061}$$

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 4)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ &= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^{12} \right] \approx \boxed{0.7031} \end{aligned}$$

- c) Es una distribución binomial, su media es $\mu = np = 15 \cdot 0.3 = 4.5$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0.3 \cdot 0.7} \approx 1.7748$

EBAU Extraordinaria 2022



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)**
Curso 2021-2022

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir **5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2 . (1,5 puntos)
- b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$$

3. Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A .

4. Sean las rectas: $r: \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . (1 punto)
- b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

- a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)
- b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$. (2 puntos)

7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3 - x} dx$ (2 puntos)
8. Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea $4/3$. (2 puntos)
9. El 50% de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30% monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70% de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:
- La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes. (0,75 puntos)
 - Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running? (0,75 puntos)
 - ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"? (0,5 puntos)
10. El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.
- Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas? (1 punto)
 - Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm? (1 punto)

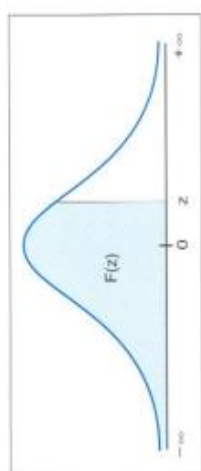


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$ $F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2 . (1,5 puntos)

b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

a) Calculamos $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Para que el rango de $A - \lambda I$ sea 2 su determinante debe ser no nulo.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2 = \lambda} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1 = \lambda} \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ el determinante de $A - \lambda I$ es no nulo y su rango es 2.

Si $\lambda = -1$ la matriz queda $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 1, pues su determinante es nulo (rango < 2) y hay un menor de orden 1 no nulo.

Si $\lambda = 2$ la matriz queda $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 1, pues su determinante es nulo (rango < 2) y hay un menor de orden 1 no nulo.

Resumiendo: Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ el rango de $A - \lambda I$ es 2. Si $\lambda = -1$ o $\lambda = 2$ el rango es 1.

b) Para $\lambda = 2$ resolvemos el sistema.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = 2x \\ x+y = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{Solución: } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}} \text{ o bien } \boxed{X = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}}$$

2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

Estudiamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 4a + 0 - 2a^2 - 0 + a^2 - 4 = -a^2 + 4a - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-4)}}{-2} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = \boxed{2 = a}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

Si $a = 2$ el determinante de A es nulo. Vemos como queda el sistema. Utilizamos el método de Gauss para intentar resolverlo.

$$\begin{cases} 4x + y - 4z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 4x - 2y + 2z = 0 \\ -4x - y + 4z = -2 \\ \hline -3y + 6z = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 4z = 2 \\ -3y + 6z = -2 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + 3 \cdot \text{Ecuación } 3^a \\ -3y + 6z = -2 \\ 3y - 6z = -3 \\ \hline 0 = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

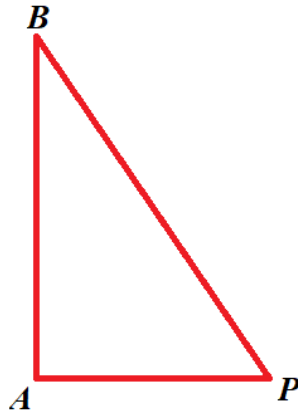
$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 4z = 2 \\ -3y + 6z = -2 \\ 0 = -5 \end{cases} \quad \text{¡Ecuación imposible!}$$

El sistema no tiene solución. Es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

3. Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A .



El punto P al pertenecer a la recta r debe tener coordenadas $P(1, y, y)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$ deben ser perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser 0.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) - (0, 0, 2) = (1, 1, -2) \\ \overrightarrow{AP} = (1, y, y) - (0, 0, 2) = (1, y, y - 2) \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Rightarrow (1, 1, -2)(1, y, y - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + y - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -y + 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \boxed{P(1, 5, 5)}$$

4. Sean las rectas: $r: \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .

(1 punto)

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

(1 punto)

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 2 - x \\ z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{1}{2}x \\ z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \frac{1}{2}\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(0, 1, 1) \\ \vec{v}_r = \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \\ \vec{u}_r = 2\vec{v}_r = (2, -1, -2) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(1, 3, -1) \\ \vec{w}_s = (2, 1, -2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, -1, -2) \\ \vec{w}_s = (2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{-2}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

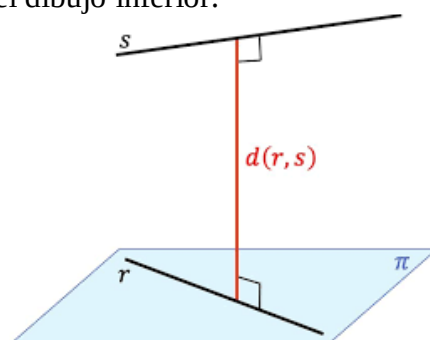
Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, -1, -2) \\ \vec{w}_s = (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 3, -1) - (0, 1, 1) = (1, 2, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{w}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 + 2 - 8 + 2 - 4 + 8 = -4 \neq 0$$

El producto mixto no es nulo. Esto implica que las rectas se cruzan.

b) La situación planteada es la del dibujo inferior.



Hallamos el plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r . La distancia entre las rectas se puede calcular como la distancia de un punto cualquiera de la recta s al plano π .

Calculamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (2, -1, -2) \\ \vec{v} = \vec{w}_s = (2, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 4y + 4 + 2z - 2 + 2z - 2 + 4y - 4 + 2x = 0 \Rightarrow 4x + 4z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + z - 1 = 0}$$

Calculamos la distancia entre las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + z - 1 = 0 \\ Q_s(1, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(Q_s, \pi) = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7u}$$

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

- a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)
 b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{(-1)^3}{1-(-1)^2} = \frac{-1}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical.

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1^3}{1-1^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \begin{cases} \text{Grado del numerador} \\ \text{mayor que el grado} \\ \text{del denominador} \end{cases} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \begin{cases} \text{Grado del numerador} \\ \text{igual que el grado} \\ \text{del denominador} \end{cases} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} - (-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = \begin{cases} \text{Grado del numerador} \\ \text{menor que el grado} \\ \text{del denominador} \end{cases} = 0$$

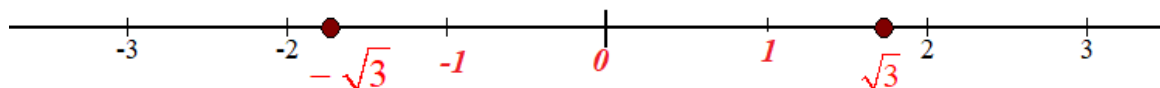
$y = -x$ es asíntota oblicua.

Para estudiar los extremos utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - (-2x)x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3-x^2=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores. También tenemos en cuenta los valores excluidos del dominio.



- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{3(-2)^2 - (-2)^4}{(1-(-2)^2)^2} = \frac{-4}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(-\sqrt{3}, -1)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale

$$f'(-1.5) = \frac{3(-1.5)^2 - (-1.5)^4}{(1-(-1.5)^2)^2} = \frac{1.6875}{+} > 0. \text{ La función crece en } (-\sqrt{3}, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{3(-0.5)^2 - (-0.5)^4}{(1-(-0.5)^2)^2} = \frac{0.6875}{+} > 0. \text{ La función crece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{3 \cdot 0.5^2 - 0.5^4}{(1-0.5^2)^2} = \frac{0.6875}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

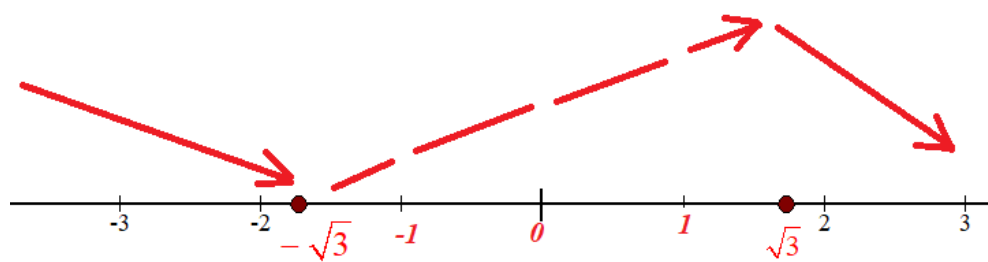
- En el intervalo $(1, \sqrt{3})$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{3 \cdot 1.5^2 - 1.5^4}{(1-1.5^2)^2} = \frac{1.6875}{+} > 0. \text{ La función crece en } (1, \sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2^4}{(1-2^2)^2} = \frac{-4}{9} < 0. \text{ La}$

función decrece en $(\sqrt{3}, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



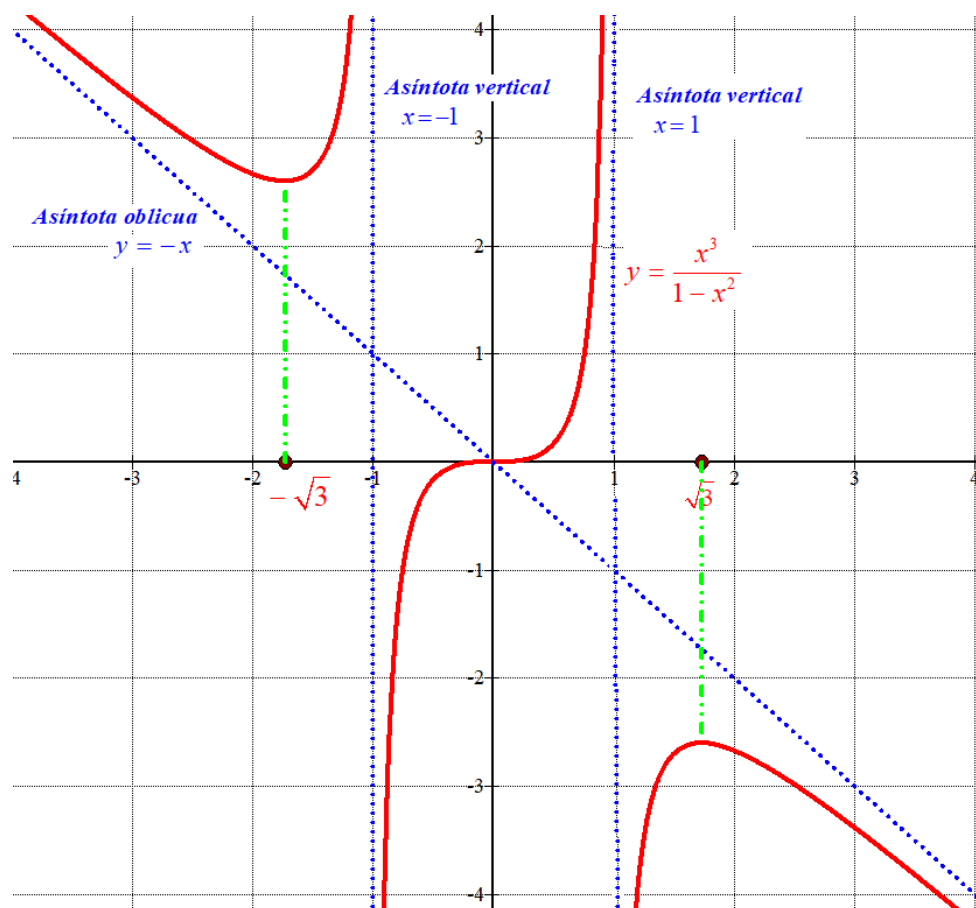
La función decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y crece en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

La función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{3}$.

La función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y = \frac{x^3}{1-x^2}$
-2	$8/3$
$-\sqrt{3}$	2.59
-1.5	2.7
0	0
1.5	2.7
$\sqrt{3}$	-2.59
2	$-8/3$



6. Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$. (2 puntos)

Calculamos la derivada segunda y la igualamos a cero.

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Existen dos posibles puntos de inflexión.

Calculo la derivada tercera.

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)2x(-2x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{-4x(x^2 + 1) - 2 \cdot 2x(-2x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-4x^3 - 4x + 8x^3 - 8x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

Sustituimos los valores de los candidatos a puntos de inflexión y comprobamos que la derivada tercera no se anula.

$$\text{Si } x = -1 \rightarrow f'''(-1) = \frac{4(-1)^3 - 12(-1)}{((-1)^2 + 1)^3} = \frac{8}{8} \neq 0$$

$$\text{Si } x = 1 \rightarrow f'''(1) = \frac{4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1}{(1^2 + 1)^3} = \frac{-8}{8} \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = -1$ y otro en $x = 1$.

Como $f(1) = 1 - \ln(1^2 + 1) = 1 - \ln 2$ y $f(-1) = -1 - \ln(1^2 + 1) = -1 - \ln 2$ los puntos de inflexión tienen coordenadas $A(-1, -1 - \ln 2)$ y $B(1, 1 - \ln 2)$

7. Calcular la integral $\int \frac{1}{x^3 - x} dx$

(2 puntos)

Descomponemos la fracción del integrando en fracciones simples.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 1 = A(-1) \rightarrow \boxed{A=-1} \\ x=1 \rightarrow 1 = B(2) \rightarrow \boxed{B=\frac{1}{2}} \\ x=-1 \rightarrow 1 = C(-1)(-2) \rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x^3 - x} = \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}}$$

Pasamos a calcular la integral pedida.

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1/2}{x-1} dx + \int \frac{1/2}{x+1} dx =$$

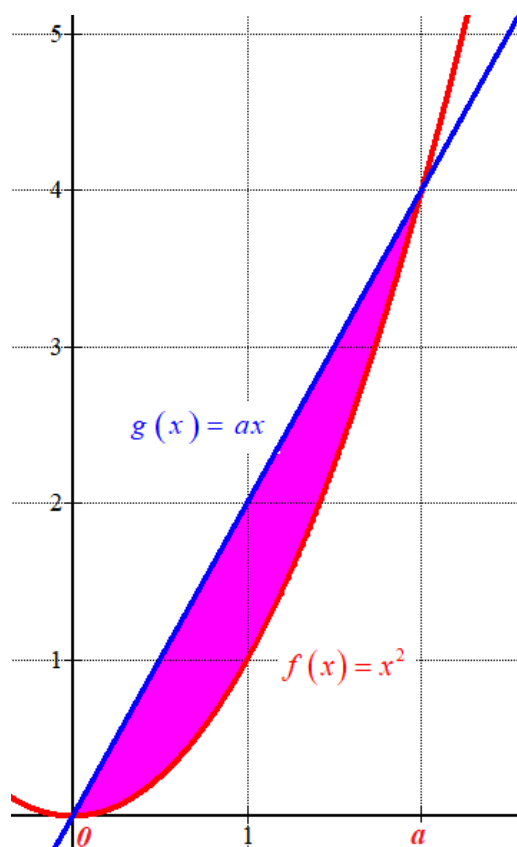
$$= -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \boxed{-\ln x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C}$$

8. Hallar el parámetro positivo $a \in \mathbb{R}$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea $4/3$. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = ax \Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

La situación es la del dibujo.



El área encerrada entre las dos gráficas es el valor de la integral definida de la diferencia de las funciones entre 0 y a .

$$\text{Área} = \int_0^a ax - x^2 dx = \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \left[a \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right] - \left[a \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Como el área debe valer $4/3$ igualamos y determinamos el valor de a .

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2$$

El valor buscado es $a = 2$.

9. El 50% de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30% monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70% de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

- a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes. (0,75 puntos)
 b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running? (0,75 puntos)
 c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"? (0,5 puntos)

Llamamos R = "Practicar running" y B = "Montar en bicicleta".

Con los datos del ejercicio podemos deducir que $P(R) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(R \cup B) = 0.7$

- a) Nos piden $P(\overline{R \cup B})$.

$$P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 1 - 0.7 = \boxed{0.3}$$

- b) Vamos a calcular la $P(R \cap B)$.

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) \Rightarrow 0.7 = 0.5 + 0.3 - P(R \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(R \cap B) = 0.5 + 0.3 - 0.7 = 0.10$$

Esta probabilidad $P(R \cap B) = 0.10$ significa que hay un 10 % de alumnos que practican ambos deportes. Como son el 30 % los que practican bicicleta, tenemos que:

$$P(R/B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.3} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.33}$$

- c) Veamos si se cumple que $P(R \cap B) = P(R)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(R \cap B) = 0.1 \\ P(R)P(B) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 \end{array} \right\} \Rightarrow P(R \cap B) \neq P(R)P(B)$$

Los sucesos R y B no son independientes.

10. El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

- a) Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas? (1 punto)
- b) Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm? (1 punto)

X = El diámetro de las cerezas picotas del Jerte. $X = N(2.5, 0.2)$

- a) Nos piden determinar “ d ” tal que $P(X \geq d) = 0.10$.

$$P(X \geq d) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 2.5}{0.2} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{d - 2.5}{0.2}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{d - 2.5}{0.2}\right) \Rightarrow$$

$$P(X \geq d) = 0.10$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{d - 2.5}{0.2}\right) = 0.10 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{d - 2.5}{0.2}\right) = 1 - 0.10 = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{d - 2.5}{0.2} = 1.28 \Rightarrow d - 2.5 = 0.256 \Rightarrow \boxed{d = 2.756 \text{ cm}}$$

Eligiendo un tamaño superior a 2.756 centímetros se eligen el 10 % de las cerezas.

- b) Nos piden $P(2.2 \leq X \leq 2.8)$.

$$P(2.2 \leq X \leq 2.8) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{2.2 - 2.5}{0.2} \leq X \leq \frac{2.8 - 2.5}{0.2}\right) =$$

$$= P(-1.5 \leq X \leq 1.5) = P(X \leq 1.5) - P(X \leq -1.5) =$$

$$= P(X \leq 1.5) - P(X \geq 1.5) = P(X \leq 1.5) - [1 - P(X \leq 1.5)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.9332 - [1 - 0.9332] = \boxed{0.8664}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8907	0.8925	0.8943	0.8960	0.8977	0.8994	0.9011	0.9028	0.9044

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5039
0.1	0.5098	0.5137
0.2	0.5193	0.5231
0.3	0.5279	0.5317
0.4	0.5359	0.5396
0.5	0.5438	0.5475
0.6	0.5517	0.5554
0.7	0.5596	0.5636
0.8	0.5675	0.5714
0.9	0.5753	0.5793
1.0	0.5832	0.5871
1.1	0.5910	0.5948
1.2	0.5987	0.6026
1.3	0.6064	0.6103
1.4	0.6141	0.6179
1.5	0.6217	0.6255
1.6	0.6293	0.6331
1.7	0.6368	0.6406

EBAU Ordinaria 2022



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)**
Curso 2021-2022

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir **5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$, $B^t \cdot C$, $B \cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. (0,5 puntos)
- Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y , sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a . (1,5 puntos)

2. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$ (2 puntos)

3. Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y r la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$,

- Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r . (1 punto)
- Calcular la distancia del origen a la recta r . (1 punto)

4. Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1},$$

- Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r . (1 punto)
- Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r . (1 punto)

5. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.

6. Dada la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$.
- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. (1 punto)
 - Calcular el intervalo donde la función permanece constante. (1 punto)
7. Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ (2 puntos)
8. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \sin(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. (2 puntos)
9. En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10% es celiaco y un 15% es alérgico a la lactosa. Además, el 20% tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:
- tenga solo una de las dos alergias, (1 punto)
 - sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa. (1 punto)
10. Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien
- cinco preguntas, (0,75 puntos)
 - alguna pregunta. (0,75 puntos)
 - Calcular la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

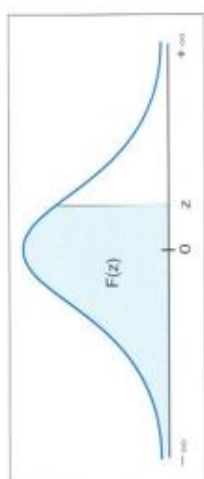


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$ $F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$, $B^t \cdot C$, $B \cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. (0,5 puntos)

b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y , sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de a . (1,5 puntos)

a) $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = (3 \quad -1 \quad -4)$

$$C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad -1 \quad -4) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ Es posible el producto } C \cdot B^t$$

$3 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$

$$B^t \cdot C = (3 \quad -1 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3 - 2 - 4) = (-3) \text{ Es posible el producto } B^t \cdot C$$

$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{¡No es posible!}$$

$3 \times \boxed{1 \cdot 3} \times 1$

b) $x \cdot A + y \cdot B = C \Rightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ ax-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=2 \\ ax-4y=1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ y=x-2 \\ ax-4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3(x-2)=1 \\ ax-4(x-2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3x-6=1 \\ ax-4x+8=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=7 \\ (a-4)x=-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{7}{5}} \\ (a-4)x = -7 \end{cases} \Rightarrow (a-4) \frac{7}{5} = -7 \Rightarrow a-4 = \frac{-35}{7} = -5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Para que sea compatible determinado debe ser $a = -1$.

Para este valor el sistema tendría como solución: $x = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5} - 2 = -\frac{3}{5}$

2. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$

(2 puntos)

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$M \cdot X - N = 2X \Rightarrow M \cdot X - 2X = N \Rightarrow (M - 2I)X = N$$

Comprobamos que la matriz $M - 2I$ es invertible.

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M - 2I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{La matriz } M - 2I \text{ es invertible}$$

Calculamos su inversa.

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (M - 2I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M - 2I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(M - 2I)^t}{|M - 2I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(M - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuamos resolviendo la ecuación matricial.

$$(M - 2I)X = N \Rightarrow X = (M - 2I)^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$,

- a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r . (1 punto)
 b) Calcular la distancia del origen a la recta r . (1 punto)

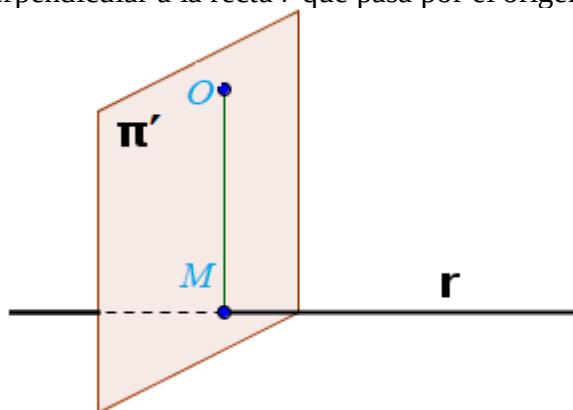
a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano y lo resolvemos.

$$r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 2x \\ x + 2(1 + 2x) - x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2 + 4x - x = 0 \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

El punto de intersección tiene coordenadas $P\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

b) Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$.



$$r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(0, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$$\pi': \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi': \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \pi': x + 2y + z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi': x + 2y + z = 0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y-2x=1 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=1+2x \\ x+2(1+2x)+x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+2(1+2x)+x=0 \Rightarrow$$

$$\pi': x+2y+z=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} y-2x=1 \\ x+2y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=1+2x \\ x+2(1+2x)+x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+2(1+2x)+x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2+4x+x=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=1+2\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3} \\ z=-\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

El punto de corte del plano π' y la recta r es $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

La distancia del punto O a la recta r es la distancia del punto O al punto M.

$$\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (0, 0, 0) = M\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$d(O, r) = d(O, M) = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} u$$

4. Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1},$$

- a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r . (1 punto)
 b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r . (1 punto)

Obtenemos un vector director y un punto de la recta.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(1, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 1) \end{cases}$$

- a) El plano π que pasa por el origen $O = (0, 0, 0)$ y contiene a r tiene como uno de sus vectores directores a $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ el vector director de la recta y el otro vector director del plano es $\overrightarrow{OP_r}$.

$$\pi: \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OP_r} = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (2, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 4y + 3z + 2z - y - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: -7x + 3y + 5z = 0}$$

- b) El plano π' que pasa por el origen $O = (0, 0, 0)$ y es perpendicular a r tiene como vector normal a $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ el vector director de la recta.

$$\pi': \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O(0, 0, 0) \in \pi' \\ \pi': 2x + 3y + z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': 2x + 3y + z = 0}$$

5. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el límite y el valor de la función, es decir, debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0 \cdot e^0 - \operatorname{sen} 0}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x \cdot e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0 \cdot e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + x \cdot e^x - (-\operatorname{sen} x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + x \cdot e^x + \operatorname{sen} x}{2} = \frac{2e^0 + 0 \cdot e^0 + \operatorname{sen} 0}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

Como el valor de la función en $x = 0$ es a , para que sea continua debe cumplirse que $a = 1$.

6. Dada la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$.

- a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función. (1 punto)
 b) Calcular el intervalo donde la función permanece constante. (1 punto)

a) Establecemos la expresión de la función como función definida a trozos.

Cambia de expresión en $x = -1$ y en $x = 2$ que son los valores que anulan los valores absolutos.

$$\begin{aligned} \text{Si } x < -1 \text{ (por ejemplo } x = -2) \text{ entonces } |x+1| = -x-1 \text{ y también } |x-2| = -x+2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Si } x < -1 \text{ entonces } |x+1| + |x-2| = (-x-1) + (-x+2) = -2x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } -1 \leq x \leq 2 \text{ (por ejemplo } x = 1) \text{ entonces } |x+1| = x+1 \text{ y también } |x-2| = -x+2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Si } -1 < x < 2 \text{ entonces } |x+1| + |x-2| = (x+1) + (-x+2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x > 2 \text{ (por ejemplo } x = 3) \text{ entonces } |x+1| = x+1 \text{ y también } |x-2| = x-2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Si } x > 2 \text{ entonces } |x+1| + |x-2| = (x+1) + (x-2) = 2x-1 \end{aligned}$$

$$f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿Continua en $x = -1$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -2x+1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 3 = 3 \\ f(-1) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Si es continua en } x = -1.$$

¿Continua en $x = 2$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \\ f(2) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Si es continua en } x = 2.$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

¿Derivable en $x = -1$?

$$\left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -2 = -2 \\ f'(-1^+) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) \neq f'(-1^+).$$

La función no es derivable en $x = -1$.

¿Derivable en $x = 2$?

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0 \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+).$$

La función no es derivable en $x = 2$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

b) La función $f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ permanece constante en el intervalo $[-1, 2]$.

7. Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ (2 puntos)

La función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas cumple que $f(0) = 0$.

Si su derivada es $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ sabemos que la función $f(x)$ es la primitiva de la derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x+1)e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x+1 \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int dv = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= (2x+1)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) 2dx = -2xe^{-x} - e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx =$$

$$= -2xe^{-x} - e^{-x} + 2(-e^{-x}) = -2xe^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x} = -2xe^{-x} - 3e^{-x} + K$$

Tenemos que $f(x) = -2xe^{-x} - 3e^{-x} + K$.

Como $f(0) = 0$ entonces:

$$f(0) = -2 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 3e^{-0} + K = 0 \Rightarrow -3 + K = 0 \Rightarrow K = 3$$

La función buscada es $f(x) = -2xe^{-x} - 3e^{-x} + 3$

8. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. (2 puntos)

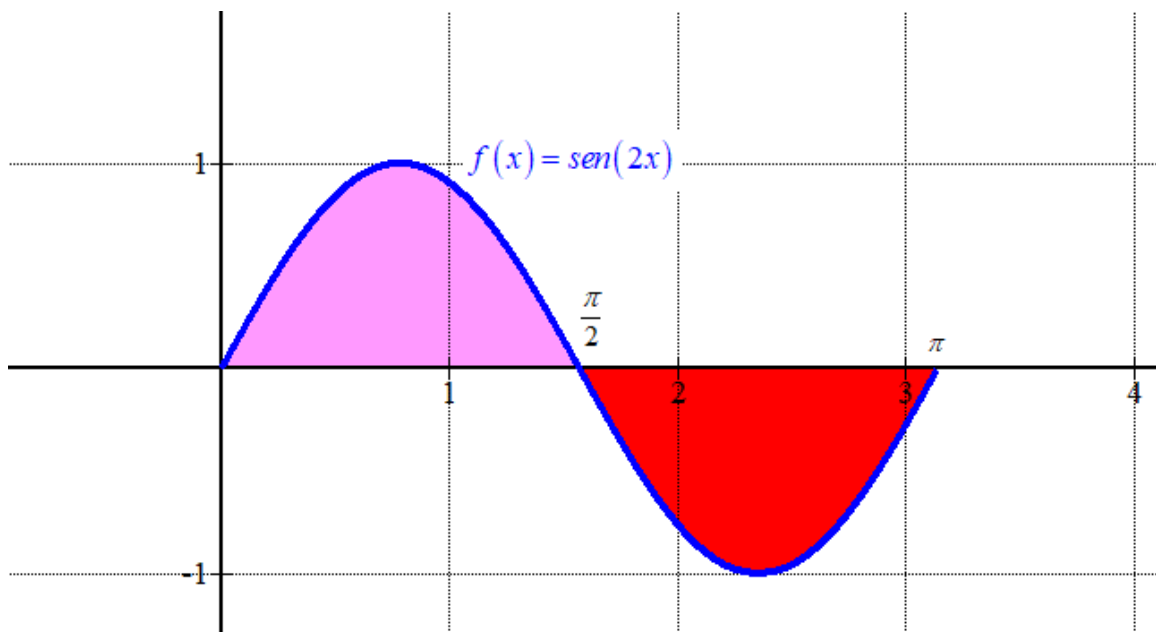
Vemos donde corta la función el eje OX.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 0 \\ 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

El valor $x = \frac{\pi}{2}$ está comprendido entre $x = 0$ y $x = \pi$, por lo que el área la dividimos en dos partes diferentes.

El área es la suma del valor absoluto de la integral definida de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y del valor absoluto de la integral definida de la función $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ entre $\frac{\pi}{2}$ y π .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x) dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(2x) dx \right| = \left| \left[\frac{-\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} \right| + \left| \left[\frac{-\cos(2x)}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right| = \\ &= \left| \frac{-\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{-\cos(2 \cdot 0)}{2} \right| + \left| \frac{-\cos(2\pi)}{2} - \frac{-\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1 + 1 = \boxed{2u^2} \end{aligned}$$



9. En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10% es celiaco y un 15% es alérgico a la lactosa. Además, el 20% tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

a) tenga solo una de las dos alergias, (1 punto)

b) sea celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa. (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los porcentajes.

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa			15
No alérgico a la lactosa			
TOTALES	10		100

Llamemos C a “Ser celiaco” y L a “Ser alérgico a la lactosa”

Si el 20% tiene alguna de las dos alergias significa que $P(C \cup L) = \frac{20}{100}$, sabemos que $P(C) = \frac{10}{100}$

y que $P(L) = \frac{15}{100}$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión.

$$P(C \cup L) = \frac{20}{100} = P(C) + P(L) - P(C \cap L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20}{100} = \frac{10}{100} + \frac{15}{100} - P(C \cap L) \Rightarrow P(C \cap L) = \frac{5}{100}$$

Ponemos este dato en la tabla.

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	5		15
No alérgico a la lactosa			
TOTALES	10		100

Completamos la tabla de contingencia

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	5	10	15
No alérgico a la lactosa	5	80	85
TOTALES	10	90	100

a) Aplicando la regla de Laplace y observando la tabla:

$$P(\text{Solo una de las alergias}) = \frac{10+5}{100} = \boxed{0.15}$$

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	5	10	15
No alérgico a la lactosa	5	80	85
TOTALES	10	90	100

Nº casos favorables (5 + 10)
Nº casos posibles (100)

$$b) P(\text{Ser celiaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa}) = \frac{5}{85} = \frac{1}{17} \approx 0.06$$

	Celiaco	No celiaco	TOTALES
Alérgico a la lactosa	5	10	15
No alérgico a la lactosa	5	80	85
TOTALES	10	90	100

Nº casos favorables (5)
Nº casos posibles (85)

10. Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien

- | | |
|---|---------------|
| a) cinco preguntas, | (0,75 puntos) |
| b) alguna pregunta. | (0,75 puntos) |
| c) Calcular la media y la desviación típica de la distribución. | (0,5 puntos) |

X = Número de respuestas correctas.

Es una distribución binomial donde hay 10 repeticiones ($n = 10$) de una elección de respuesta al azar, siendo la probabilidad de ser correcta $p = \frac{1}{4}$ y de incorrecta $q = \frac{3}{4}$.

$$X = B\left(10, \frac{1}{4}\right)$$

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx \boxed{0,0584}$

b) Utilizamos el suceso contrario a “contestar bien alguna pregunta” que es “contestar bien ninguna pregunta”.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx \boxed{0,9437}$$

c) $Media = \mu = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2,5 \text{ respuestas correctas}$

$$Desviación\ típica = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \approx 1,37 \text{ respuestas correctas}$$



EBAU Extraordinaria 2021
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir **5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar las respuestas y las soluciones.**

PREGUNTAS

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)
 b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
 c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + ay = a \\ ax + 2y = 1 \end{array} \right\}.$$

3. Sean las rectas r y s dadas por $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

- a) Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . (1 punto)
 b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$. (2 puntos)

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

6. Sea la función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4}$.

- a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$. (1,5 puntos)
 b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

7. Resolver la integral $\int \ln^2(x) dx$ (2 puntos)

8. Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

- a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)
 b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

- a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)
 b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

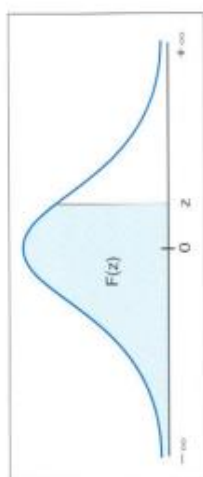


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$

$$F(z) = P(Z \leq z)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

SOLUCIONES

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)
- b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
- c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

- a) La matriz X es de dimensiones $m \times n$.

$$M \cdot X = N$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot m} \times n \rightarrow 3 \times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m = 3$. Y el resultado debe ser una matriz N de dimensiones 3×2 luego $n = 2$.

La matriz X es de dimensiones 3×2 . Debe tener 3 filas y 2 columnas.

- b) Para ser invertible debe tener determinante no nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 2 + 2k + 2k - k = k^2 + k - 2$$

$$|M| = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ 0 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

El valor de k debe ser distinto de 1 y de -2.

- c) Miramos las dimensiones del producto $M \cdot N$.

$$M \cdot N$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 3 \times 2$$

La matriz resultado del producto tiene 3 filas y 2 columnas, no es cuadrada, por lo que no es invertible para ningún valor de k .

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + ay = a \\ ax + 2y = 1 \end{array} \right\}.$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A/B e igualamos a cero.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a^2 + 2 - a^2 - 1 - 2a^2 = -a^2 + 1$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Analizamos 3 casos distintos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A/B es no nulo y el rango de A/B es 3. Como el rango de A es como mucho 2, tenemos que los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $a = 1$

En este caso el determinante de A/B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna 1ª el menor de orden 2 que queda tiene determinante no nulo, por lo que el rango de A/B es 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la

1ª fila tiene determinante no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$.

Los rangos de A y de A/B son iguales a 2, igual que el número de incógnitas (2), el sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - y \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - y + 2y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = 1 - 0 = 1}$$

La solución es $x = 1; y = 0$.

CASO 3. $a = -1$

El determinante de A/B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna 1ª el menor de orden 2 que queda tiene determinante no nulo, por lo que el rango de A/B es 2. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2, pues el menor de orden 2 que resulta de quitar

la 1ª fila tiene determinante no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$.

Los rangos de A y de A/B son iguales a 2, igual que el número de incógnitas (2), el sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 + y \\ -x + 2y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - y + 2y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = -1 + 0 = -1}$$

La solución es $x = -1; y = 0$.

3. Sean las rectas r y s dadas por $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases}$

- a) Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . (1 punto)
 b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

- a) Para definir un plano necesito un punto por el que pase y dos vectores directores. Como contiene a la recta r , nos sirve un punto de $r \rightarrow P_r(1,2,1)$ y como vectores directores del plano nos sirven el director de la recta $r \rightarrow \vec{v}_r = (1, -3, 0)$ y el de la recta s .

$$r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{v}_r = (1, -3, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x-z \\ x-y-z=4 \end{cases} \Rightarrow x-2+x+z-z=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2-3-z \Rightarrow y=-1-z \Rightarrow s: \begin{cases} x=3 \\ y=-1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(3, -1, 0) \\ \vec{u}_s = (0, -1, 1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_s = (0, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -3, 0) \\ P_r(1, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2+z-1+3x-3=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x+y+z-6=0}$$

- b) Las dos rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

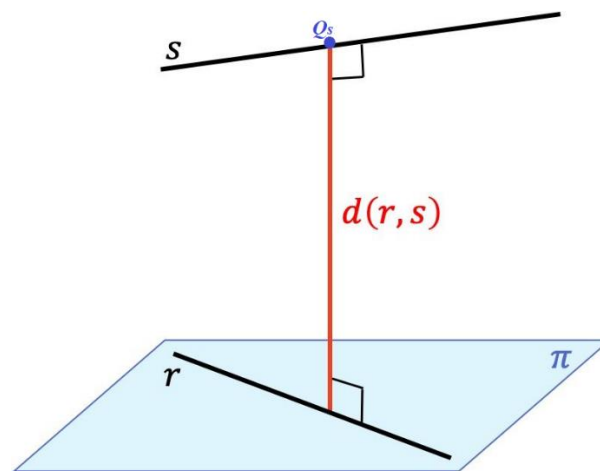
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{0}$$

Comprobamos si las rectas se cortan o se cruzan.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 2, 1) \\ Q_s(3, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (3, -1, 0) - (1, 2, 1) = (2, -3, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -3, -1) \\ \vec{u}_s = (0, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_s, \vec{v}_r] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3-1+6 = 2 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas r y s se cruzan.



La distancia entre las rectas es la distancia de un punto cualquiera de la recta s , por ejemplo $Q_s(3, -1, 0)$ al plano π hallado en el apartado anterior.

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(3, -1, 0) \\ \pi: 3x + y + z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(Q_s, \pi) = \frac{|9 - 1 + 0 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{11}} \approx 0.60 u}$$

3. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
(2 puntos)

Si es perpendicular a $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ entonces es proporcional al producto vectorial de ambos.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 1, -1) \\ \vec{v} = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, -1)$$

El vector que nos piden es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w} = a(\vec{u} \times \vec{v}) = (a, -2a, -a) \\ |\vec{w}| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{a^2 + (-2a)^2 + (-a)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{6a^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{6} \cdot a = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{3}{\sqrt{6}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{w} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \\ o \\ \vec{w} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \end{array} \right.$$

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

a) La función es continua en $x \neq 0$ pues es un cociente de una función continua en el numerador: diferencia de una exponencial y una polinómica y el denominador es una polinómica que se anula solo en $x = 0$.

La función $f(x)$ es continua para cualquier valor $x \neq 0$.

La continuidad en $x = 0$ depende del valor de a .

b) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} = \\ &= \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \\ &= \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ f(0) &= a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

El valor de a para que la función sea continua en $x = 0$ es $a = \frac{1}{2}$.

6. Sea la función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4}$.

- a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$. (1,5 puntos)
 b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

a) El dominio de la función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4}$ son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -2$?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x^2}{x^2-4} = \frac{2-(-2)^2}{(-2)^2-4} = \frac{-2}{0} = \infty$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x^2}{x^2-4} = \frac{2-2^2}{2^2-4} = \frac{-2}{0} = \infty$$

La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - 1}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{2}{\infty} - 1}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Para la monotonía y extremos utilizamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(x^2-4) - 2x(2-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{-2x^3} + 8x - 4x + \cancel{2x^3}}{(x^2-4)^2} = \frac{4x}{(x^2-4)^2}$$

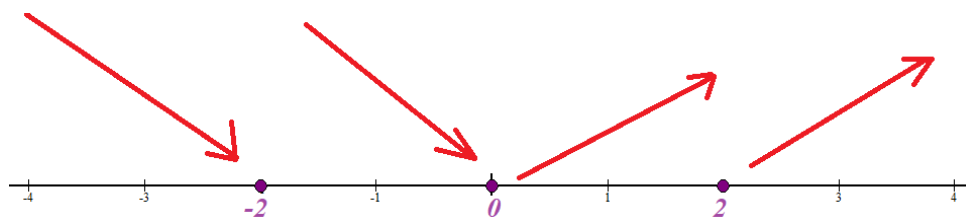
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Tenemos un punto crítico en $x = 0$ y los dos valores excluidos del dominio: $x = -2$ y $x = 2$.
 Vemos como evoluciona el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{-12}{(9-4)^2} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -2)$.

- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{-4}{(1-4)^2} < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.
- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4}{(1-4)^2} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{12}{(9-4)^2} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema:

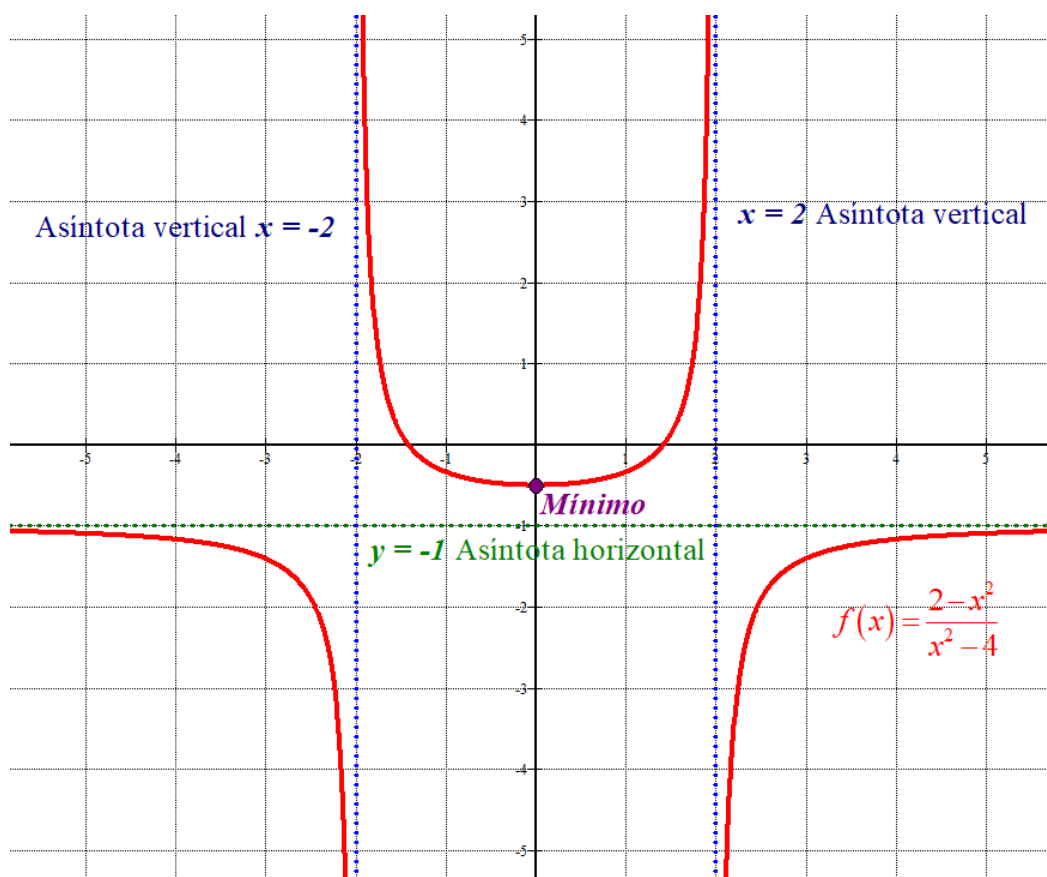


La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{2-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{2}$ las coordenadas del punto mínimo relativos son $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

b)



7. Resolver la integral $\int \ln^2(x) dx$

(2 puntos)

$$\int \ln^2(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln^2(x) \rightarrow du = 2 \ln(x) \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln^2(x) - \int 2 \ln(x) \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln^2(x) - 2 \int \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln^2(x) - 2 \left[x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \right] =$$

$$= x \ln^2(x) - 2 \left[x \ln(x) - \int dx \right] = x \ln^2(x) - 2 \left[x \ln(x) - x \right] = \boxed{x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + K}$$

8. Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

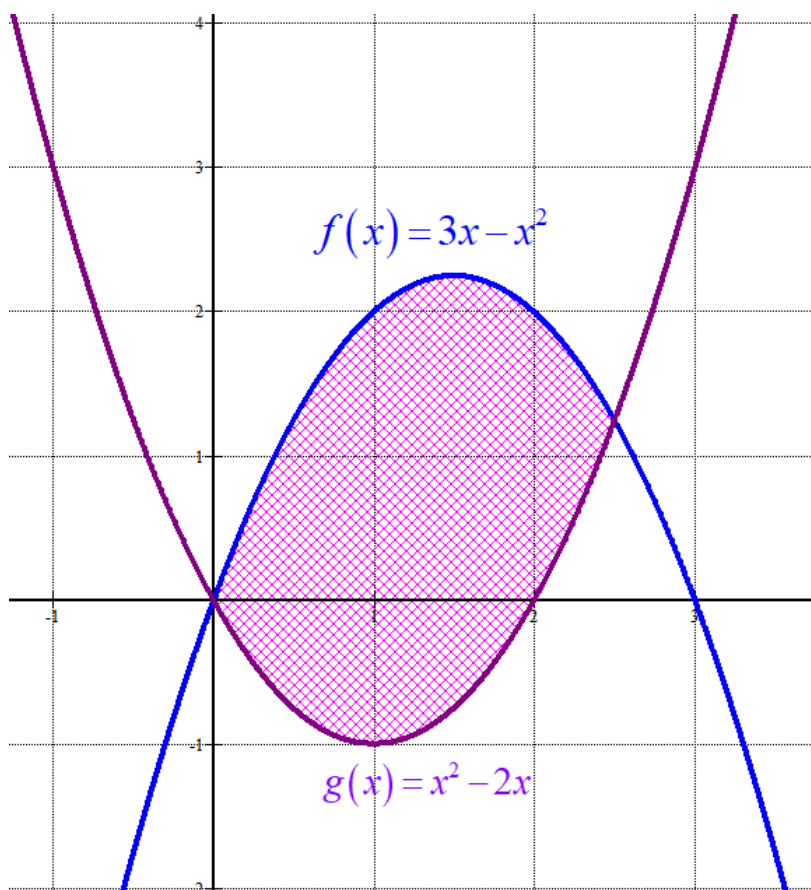
Averiguo los puntos de corte de ambas funciones para encontrar el inicio y final de la región delimitada por sus gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 0 = 2x^2 - 5x \Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \end{cases}$$

El área de la región limitada por sus gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 2.5$ de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{2.5} f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_0^{2.5} 3x - x^2 - (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \int_0^{2.5} 5x - 2x^2 dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{5x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} \right]_0^{2.5} \right| = \left| \left[\frac{5 \cdot 2.5^2}{2} - 2\frac{2.5^3}{3} \right] - \left[\frac{5 \cdot 0^2}{2} - 2\frac{0^3}{3} \right] \right| = \boxed{\frac{125}{24} \approx 5.208 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Aunque no lo piden ponemos el dibujo para comprobar visualmente el resultado.



9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:
- a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)
- b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

Hacemos una tabla de contingencia.

	Hablan español	No hablan español	
Hablan inglés	100		500
No hablan inglés			
	300		1000

Completamos la tabla.

	Hablan español	No hablan español	
Hablan inglés	100	400	500
No hablan inglés	200	300	500
	300	700	1000

- a) Solo hay 300 de los 1000 estudiantes que no hablan ninguno de los dos idiomas, por lo que son 700 los que hablan alguno de los dos idiomas.

$$P(\text{Hable alguno de los dos idiomas}) = \frac{700}{1000} = \frac{70}{100} = 0.7$$

- b) Hay 500 estudiantes que hablan inglés, de los cuales solo 100 hablan español.

$$P(\text{Hable español/ Habla inglés}) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5} = 0.2$$

10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

- a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)
 b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

X = Duración de un smartphone en años. $X = N(3, 1)$

- a) Nos piden calcular $P(X < 3.5)$.

$$P(X < 3.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{3.5-3}{1}\right) = P(Z < 0.5) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0.6915}$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76

- b) Nos piden calcular $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{5-3}{1}\right) = P(Z \geq 2) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Miro en la tabla}\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.78
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84
1.1	0.8643	0.86
1.2	0.8849	0.88
1.3	0.9032	0.90
1.4	0.9192	0.91
1.5	0.9332	0.93
1.6	0.9452	0.94
1.7	0.9554	0.95
1.8	0.9641	0.96
1.9	0.9713	0.97
2.0	0.9772	0.97
2.1	0.9808	0.98

EBAU Ordinaria 2021



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad
Curso 2020-2021**

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir **5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = 0$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x - y &= \lambda \\ x - \lambda y &= \lambda \\ \lambda x - y &= \lambda \end{aligned} \right\}.$$

3. Dados el plano $\Pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a r . (1 punto)
b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman Π y r . (1 punto)

4. Sea el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

5. Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$. (2 puntos)

6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

7. Calcular la integral racional (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx$$

8. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

- a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. (0,5 puntos)
 b) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

9. Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B. Compra el 40% a la marca A que tiene un 3% de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1% de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

- a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa. (1 punto)
 b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A. (1 punto)

10. Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica de 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

- a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5). (1 punto)
 b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas. (1 punto)

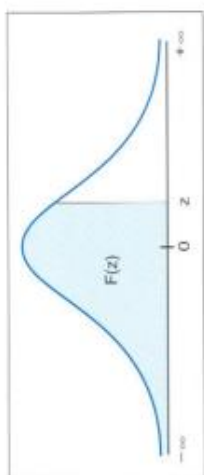


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9789	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = 0$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

$$M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5+2\lambda_1+\lambda_2 & 4+\lambda_1 \\ 4+\lambda_1 & 5+2\lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5+2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 4+\lambda_1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5+2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1=-4 \end{cases} \Rightarrow 5-8+\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=3$$

La solución es $\lambda_1 = -4$; $\lambda_2 = 3$.

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x - y &= \lambda \\ x - \lambda y &= \lambda \\ \lambda x - y &= \lambda \end{aligned} \right\}.$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de A/B. Calculamos su determinante para ver cuando su rango es 3.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + \lambda^3 + \lambda + \lambda = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{o} \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

Consideramos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A/B es no nulo y su rango es 3, siendo el rango de A a lo sumo 2. Al ser distintos el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

CASO 2. $\lambda = 0$

El sistema queda $\left. \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x &= 0 \\ -y &= 0 \end{aligned} \right\}$ Se obtiene fácilmente la solución: $x = y = 0$. El sistema es

compatible determinado (solución única).

CASO 3. $\lambda = 1$

El sistema queda $\left. \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1.$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Las soluciones son: $x = 1 + t$; $y = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

3. Dados el plano $\Pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a r . (1 punto)
 b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman Π y r . (1 punto)

- a) Para que la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares y además uno de sus puntos debe estar en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi \equiv kx + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (k, 1, -1) \\ r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{n} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (k, 1, -1)(2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2k + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

Comprobamos que el punto $P(4, 2, -2)$ de la recta r pertenece al plano:

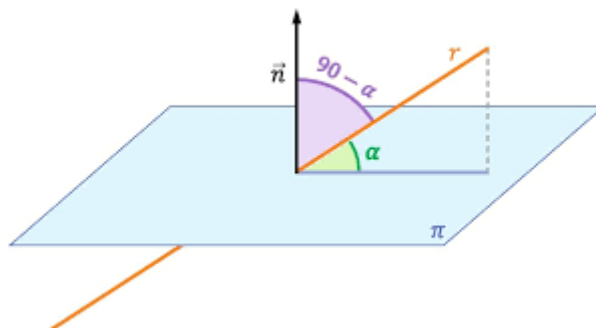
$$\left. \begin{array}{l} \Pi \equiv -x + y - z = 0 \\ ¿P(4, 2, -2) \in \Pi? \end{array} \right\} \Rightarrow -4 + 2 - (-2) = 0? \text{ ¡¡SI!!}$$

Para $k = -1$ la recta está contenida en el plano Π .

- b) Para $k = 0$ el plano es $\Pi \equiv y - z = 0$. Como hemos visto antes el vector normal del plano y el director de la recta ya no son perpendiculares y recta y plano serán secantes. Calculamos el ángulo que forman vector normal del plano y director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi \equiv y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (0, 1, -1) \\ r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|}$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{(0, 1, -1)(2, 1, -1)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \approx 54^\circ$$

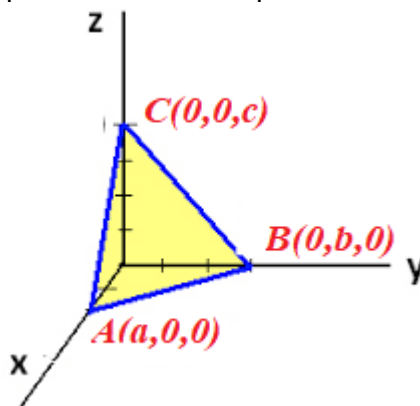


El ángulo que forman recta y plano es de aproximadamente $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

4. Sea el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

Un plano paralelo tiene ecuación $\Pi' \equiv x + y + z + k = 0$.

Hallamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes tienen coordenadas.



$$\left. \begin{array}{l} \Pi' \equiv x + y + z + k = 0 \\ y = z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + k = 0 \Rightarrow x = -k \Rightarrow A(-k, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi' \equiv x + y + z + k = 0 \\ x = z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y + k = 0 \Rightarrow y = -k \Rightarrow B(0, -k, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi' \equiv x + y + z + k = 0 \\ x = y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z + k = 0 \Rightarrow z = -k \Rightarrow C(0, 0, -k)$$

Hallamos el área del triángulo formado por los tres puntos.

Esta área es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -k, 0) - (-k, 0, 0) = (k, -k, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, -k) - (-k, 0, 0) = (k, 0, -k) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ k & -k & 0 \\ k & 0 & -k \end{vmatrix} = (k^2, k^2, k^2)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{k^4 + k^4 + k^4}}{2} = \frac{\sqrt{3k^4}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} k^2$$

Como el área debe ser $2\sqrt{3}$.

$$\text{Área} = 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} k^2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = k^2 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

Los planos que cumplen la condición pedida son $\Pi' \equiv x + y + z + 2 = 0$ y $\Pi' \equiv x + y + z - 2 = 0$

5. Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$. (2 puntos)

La función $f(x) = e^{-x^2}$ tiene como dominio $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene, pues el dominio son todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

Para el estudio de la monotonía usamos la derivada.

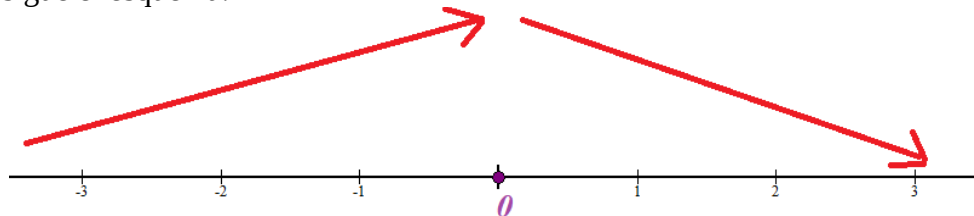
$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ e^{-x^2} = 0 \text{ ¡IMPOSIBLE!} \end{cases}$$

Vemos como es la monotonía antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 2e^{-1} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -2e^{-1} < 0$. La función decrece en $(0, +\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

Como $f(0) = e^{-0^2} = 1$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0, 1)$.

Para estudiar los puntos de inflexión utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (-2 + 4x^2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Estudiamos la curvatura de la función antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -\sqrt{0.5})$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale
 $f''(-1) = (-2 + 4(-1)^2)e^{-(-1)^2} = 2e^{-1} > 0$. La función es convexa (U) en $(-\infty, -\sqrt{0.5})$
- En $(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = (-2 + 0)e^{-0^2} = -2 < 0$.
La función es cóncava (∩) en $(-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$.
- En $(\sqrt{0.5}, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = (-2 + 4)e^{-1^2} = 2e^{-1} > 0$. La
función es convexa (U) en $(\sqrt{0.5}, +\infty)$

La función presenta puntos de inflexión (cambio de curvatura) en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y en $x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

Como $f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas:

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ y } \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - e^x$

Cuando la función $h(x)$ se anule significa que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan.

La función $h(x)$ es continua en todo su dominio ($\mathbb{R}$).

Localizamos los cambios de signo de la función.

$$h(0) = 2 - 0^2 - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$h(1) = 2 - 1^2 - e^1 = 1 - e \approx -1.71 < 0$$

En el intervalo $[0, 1]$ podemos aplicar el teorema de Bolzano, pues la función es continua en el intervalo y cambia de signo de un extremo del intervalo al otro, por lo que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

Repetimos el razonamiento.

$$h(-2) = 2 - (-2)^2 - e^{-2} = -2 - e^{-2} \approx -2.1 < 0$$

$$h(-1) = 2 - (-1)^2 - e^{-1} = 1 - e^{-1} = 0.63 > 0$$

Volviendo a aplicar el teorema de Bolzano para el intervalo $[-2, -1]$ debe de existir un valor $d \in (-2, -1)$ tal que $h(d) = 0 \Rightarrow f(d) - g(d) = 0 \Rightarrow f(d) = g(d)$.

Como los valores c y d pertenecen a intervalos disjuntos no pueden ser iguales y queda comprobado que las dos funciones se cortan al menos en 2 puntos. Siendo los intervalos que los contienen de longitud 1.

7. Calcular la integral racional

(2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx$$

Primero descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = -2 \\ \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{3x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$3x = A(x-1) + B(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 3 = 3B \Rightarrow B=1 \\ x=-2 \rightarrow -6 = -3A \rightarrow A=2 \end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$$

Lo aplicamos a la integral.

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \boxed{2 \ln|x+2| + \ln|x-1| + C}$$

También se puede expresar como $\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx = \ln((x+2)^2 |x-1|) + C$

8. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

- a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. (0,5 puntos)
 b) Calcular el área de la región anterior. (1,5 puntos)

a) Vemos donde se cortan las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x^2)^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow$$

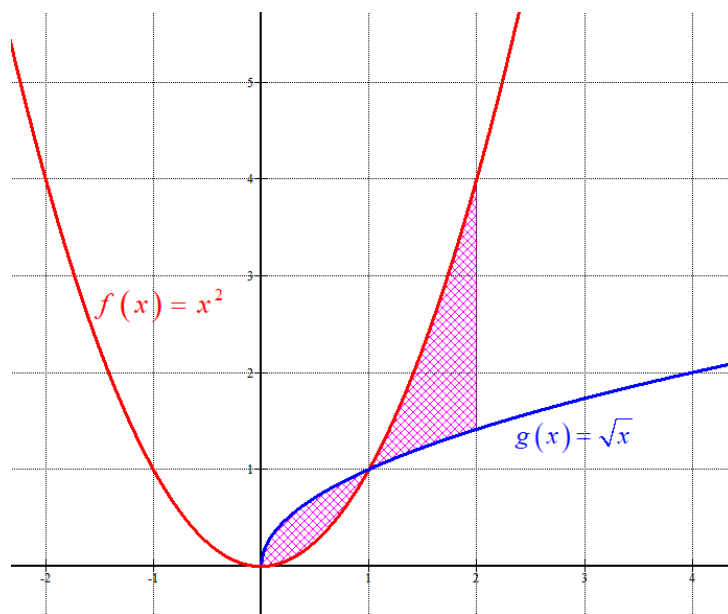
$$\Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1 \end{cases}$$

La función $f(x) = x^2$ es una parábola, con una tabla de valores la dibujamos.

La función $g(x) = \sqrt{x}$ tiene como dominio los números reales positivos. Damos una tabla de valores y representamos la región de la cual nos piden su área.

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$y = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2



- b) El valor del área se puede aproximar contando cuadraditos (1 u^2) en el dibujo. El área de la región coloreada de rosa es un poco más de una unidad cuadrada. Obtenemos su área de forma precisa haciendo uso del cálculo integral.

De los valores de corte uno está en el extremo inferior del intervalo y el otro pertenece al intervalo el recinto lo calculamos con la suma del valor absoluto de dos integrales definidas, una entre 0 y 1 y la otra entre 1 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{2\sqrt{0^3}}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

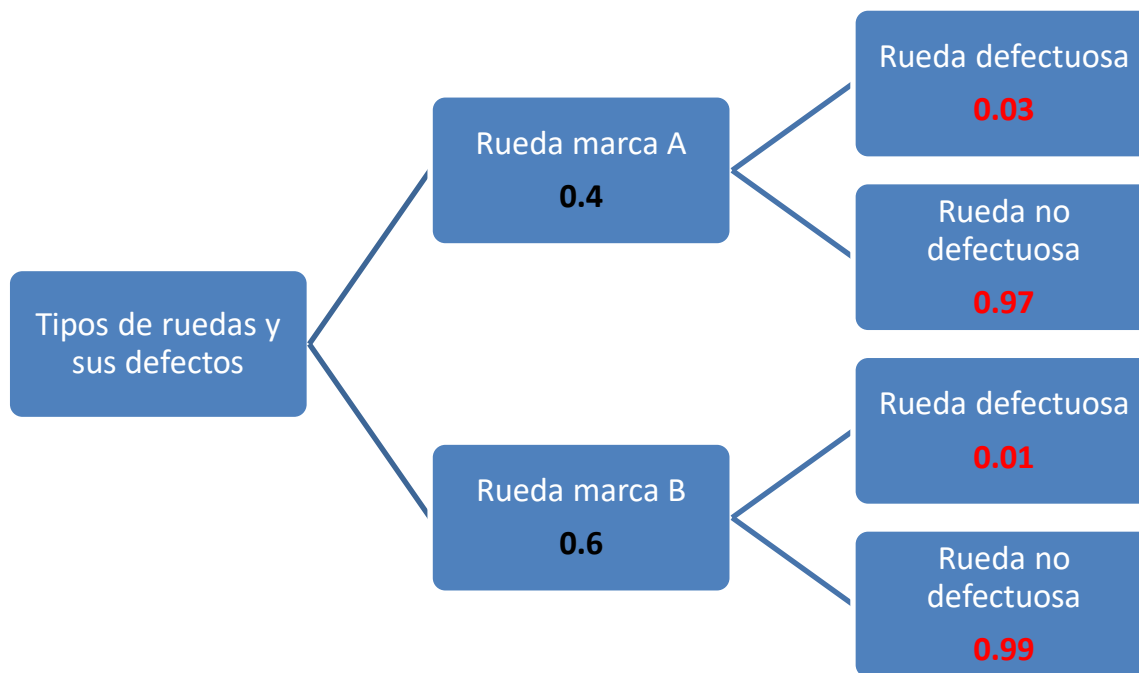
$$\int_1^2 \sqrt{x} - x^2 dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left[\frac{2\sqrt{2^3}}{3} - \frac{2^3}{3} \right] - \left[\frac{2\sqrt{1^3}}{3} - \frac{1^3}{3} \right] = \frac{4\sqrt{2} - 8 - 2 + 1}{3} = \frac{4\sqrt{2} - 9}{3}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx \right| + \left| \int_1^2 \sqrt{x} - x^2 dx \right| = \frac{1}{3} + \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3} = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} \approx 1.45 \text{ u}^2$$

9. Un mecánico compra ruedas a dos marcas A y B. Compra el 40% a la marca A que tiene un 3% de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1% de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

- a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa. (1 punto)
 b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A. (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = La rueda es de la marca A; B = La rueda es de la marca B.

D = La rueda es defectuosa $\bar{D}$ = La rueda no es defectuosa

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) = \\
 &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.03 + 0.6 \cdot 0.01 = \boxed{0.018}
 \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.03}{0.018} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.66}$$

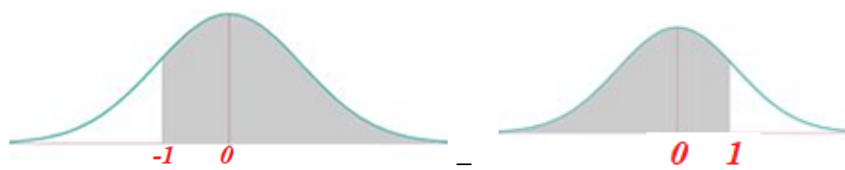
10. Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica de 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

- a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5). (1 punto)
 b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas. (1 punto)

X = Nota del examen de Matemáticas II de la EBAU. $X = N(6.5, 1.5)$

- a) Nos piden calcular $P(X \geq 5)$.

$$P(X \geq 5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{5-6.5}{1.5}\right) = P(Z \geq -1) = \dots$$



$$\dots = P(Z \leq 1) = \{\text{Miro en la tabla}\} = \boxed{0.8413}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5098	0.5146
0.2	0.5193	0.5240
0.3	0.5279	0.5326
0.4	0.5359	0.5406
0.5	0.5438	0.5485
0.6	0.5517	0.5564
0.7	0.5596	0.5643
0.8	0.5673	0.5719
0.9	0.5748	0.5794
1.0	0.5823	0.5869
1.1	0.5898	0.5944
1.2	0.5973	0.6019

- b) Llamamos “n” a la nota que buscamos.

Queremos que el 97.5 % de los alumnos estén por debajo de su nota $\rightarrow P(X < n) = 0.975$

$$P(X < n) = 0.975 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{n-6.5}{1.5}\right) = 0.975$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ esta probabilidad.

$$\frac{n-6.5}{1.5} = 1.96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 6.5 = 1.96 \cdot 1.5 = 2.94 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 2.94 + 6.5 = 9.44}$$

La nota que debe sacar es 9.44.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6065
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6444
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8341
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808

EBAU Extraordinaria 2020



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura**
Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos cada una. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas.

PREGUNTAS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$? (1 punto)
b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. (1 punto)

2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (1,25 puntos)

$$\left. \begin{aligned} x + \lambda z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \\ \lambda x - y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$)

- a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)
b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

4. Dados el plano π_1 determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

5. Sea la función $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

- a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)
b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

6. Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

- a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (0,5 puntos)
b) Calcule el área de la región anterior. (1,5 puntos)

8. Calcule la integral (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$$

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

- a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)
b) Si vio el debate el lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

- a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01. (1 punto)
b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

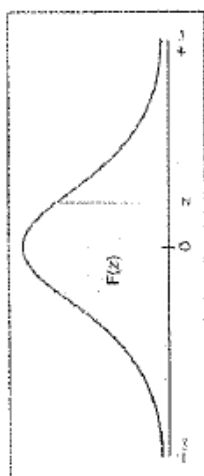


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5238	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6369	0.6408	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8728	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8943	0.8962	0.8979	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9405	0.9418	0.9428	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9618	0.9627	0.9635
1.8	0.9644	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9908	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.7	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.8	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.9	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$? (1 punto)

b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$. (1 punto)

a) Realizamos los productos indicados.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 1+1 \\ 2+4 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+1 \\ 4-2 & -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Evidentemente $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, tienen la misma dimensión, pero son diferentes cada uno de los elementos de cada matriz ($-3 \neq 3$, $2 \neq 0$, ...). $A \cdot B \neq B \cdot A$.

b) Calculamos el valor de cada miembro de la igualdad y luego los comparamos.

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1-1 \\ 2+2 & -2+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+4 & 1-1 \\ 4-4 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

No es cierta la igualdad planteada: $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = A^2 + B^2$.

2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (1,25 puntos)

$$\begin{cases} x + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$.

(0,75 puntos)

a) La matriz de coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda = 1 - \lambda^2$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt{1} = \pm 1$$

Hay 3 situaciones que estudiamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual al número de incógnitas (3).

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $\lambda = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + -z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + z + y - z = 1 \\ -1 - z - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 2 \end{cases}$$

¡Tiene dos soluciones distintas de “y”!

No es posible. **El sistema es incompatible.**

CASO 3. $\lambda = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 - z} \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - z + y + z = 1 \\ 1 - z - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

La solución del sistema es $x = 1 - t$; $y = 0$; $z = t$.

Son infinitas soluciones. **El sistema es compatible indeterminado.**

b) Para $\lambda = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones, obtenidas en el apartado anterior.

Las soluciones del sistema son $x = 1 - t$; $y = 0$; $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$)

a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)

b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

a) Para que sean linealmente dependientes el determinante de la matriz formada por sus coordenadas debe ser nulo.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^2 - 3\alpha^2 = -4\alpha^2 + 4\alpha$$

Lo igualamos a cero.

$$-4\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Rightarrow 4\alpha(-\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

Para cualquier valor de α distinto de 0 y 1 el determinante es no nulo y los vectores son linealmente independientes.

b) Para el valor $\alpha = 1$ los vectores quedan $\vec{u} = (4, 3, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, 1)$. Sabemos que son linealmente dependientes y existe la combinación que se pide.

Planteamos la igualdad y la resolvemos:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$(2, 1, 1) = a(4, 3, 1) + b(1, 1, 0)$$

$$(2, 1, 1) = (4a + b, 3a + b, a) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 4a + b \\ 1 = 3a + b \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 4 + b \\ 1 = 3 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = b \\ -2 = b \end{cases} \Rightarrow b = -2$$

Se cumple que $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$.

4. Dados el plano π_1 determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

Determinamos la ecuación del plano π_1 .

$$\vec{u} = (0, 1, 1) - (2, 0, 2) = (-2, 1, -1)$$

$$\vec{v} = (0, 1, 1) - (1, 2, 6) = (-1, -1, -5)$$

$$\left. \begin{array}{l} (0, 1, 1) \in \pi_1 \\ \vec{u} = (-2, 1, -1) \\ \vec{v} = (-1, -1, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5x + y - 1 + 2z - 2 + z - 1 - 10y + 10 - x = 0$$

$$-6x - 9y + 3z + 6 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0$$

Una recta que sea paralela a cada plano debe ser perpendicular al vector normal de cada uno de ellos. Un vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de cada plano.

El vector normal de $\pi_1 \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0$ es $\vec{n}_1 = (2, 3, -1)$

El vector normal de $\pi_2 \equiv x - y + z = 3$ es $\vec{n}_2 = (1, -1, 1)$

El vector director de la recta pedida es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (2, 3, -1) \\ \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - j - 2k - 3k - 2j - i = 2i - 3j - 5k = (2, -3, -5)$$

Elegimos un punto que no pertenezca a ninguno de los dos planos, por ejemplo $P(0, 0, 0)$ que no cumple ninguna de las ecuaciones:

$$\pi_1 \rightarrow ¿0+0+0+2=0? \text{ ¡NO!} \quad \pi_2 \rightarrow ¿0-0+0=3? \text{ ¡NO!}$$

Y junto al vector director obtenido en el producto vectorial obtenemos la ecuación de una recta paralela a ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 0, 0) \in r \\ \vec{w} = (2, -3, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}}$$

5. Sea la función $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

- a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)
- b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

a) El dominio de esta función es $\mathbb{R}$, pues el denominador nunca se anula.

$$1+x^2=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1} \quad ; \text{Imposible!}$$

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene, pues el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

Estudiamos la monotonía averiguando primero la expresión de la derivada.

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4(1+x^2) - 2x(4x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4+4x^2-8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

Igualemos a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 4-4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Los puntos críticos son $x = -1$, $x = 1$.

Veamos la evolución de la función antes de -1 , entre -1 y 1 y después de 1 .

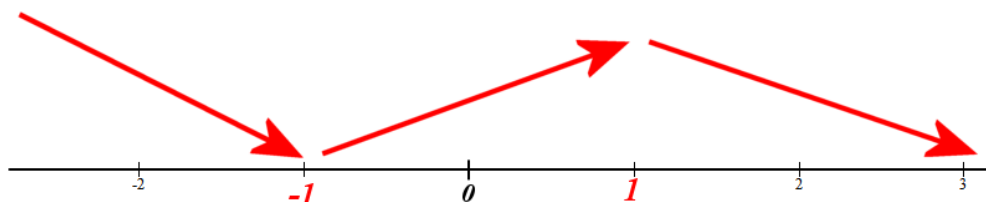
- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{4-4(-2)^2}{(1+(-2)^2)^2} = \frac{-12}{25} < 0$.

La función decrece en $(-\infty, -1)$.

- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{4}{1} = 4 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4-16}{(1+4)^2} = -\frac{12}{25} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema del siguiente dibujo.



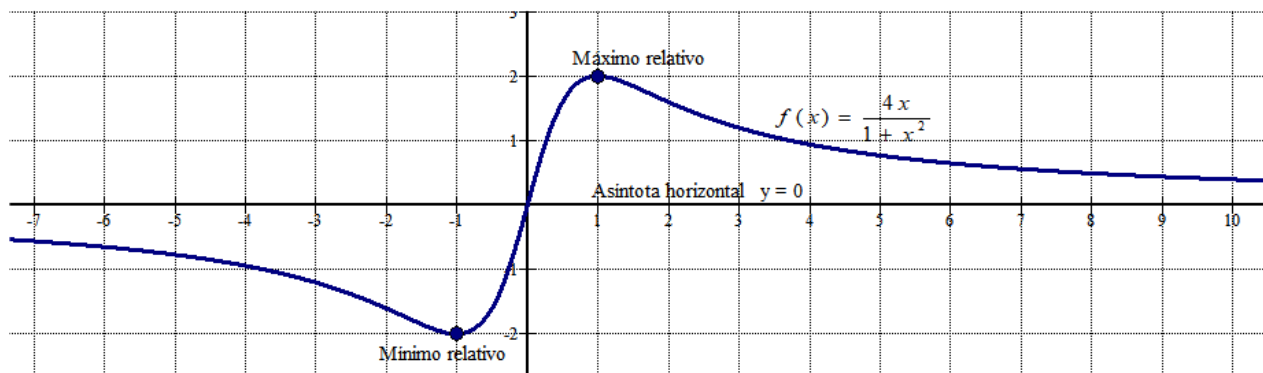
Monotonía $\rightarrow$ La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

Extremos relativos $\rightarrow$ La función tiene un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$.

$$f(-1) = \frac{-4}{1+(-1)^2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (-1, -2)$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1^2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } (1, 2)$$

b) Resumimos lo que tenemos: Dominio = $\mathbb{R}$, la asíntota horizontal es $y = 0$, la función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$, un mínimo relativo en el punto $(-1, -2)$ y un máximo relativo en el punto $(1, 2)$.



6. Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función debe ser continua en $x = 1$.

- $f(1) = 2 + a + b$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + ax + b = 2 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2 + \ln(x) = -2 + \ln 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 2 + a + b \Rightarrow a + b = -4$
- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Las tres condiciones se cumplen si $a + b = -4$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ y la expresión de la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ debe ser iguales sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4 + a \\ f'(1^+) &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Sustituimos en la ecuación obtenida al principio.

$$\left. \begin{aligned} a + b &= -4 \\ a &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3 + b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = -1$

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de la región anterior. (1,5 puntos)

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

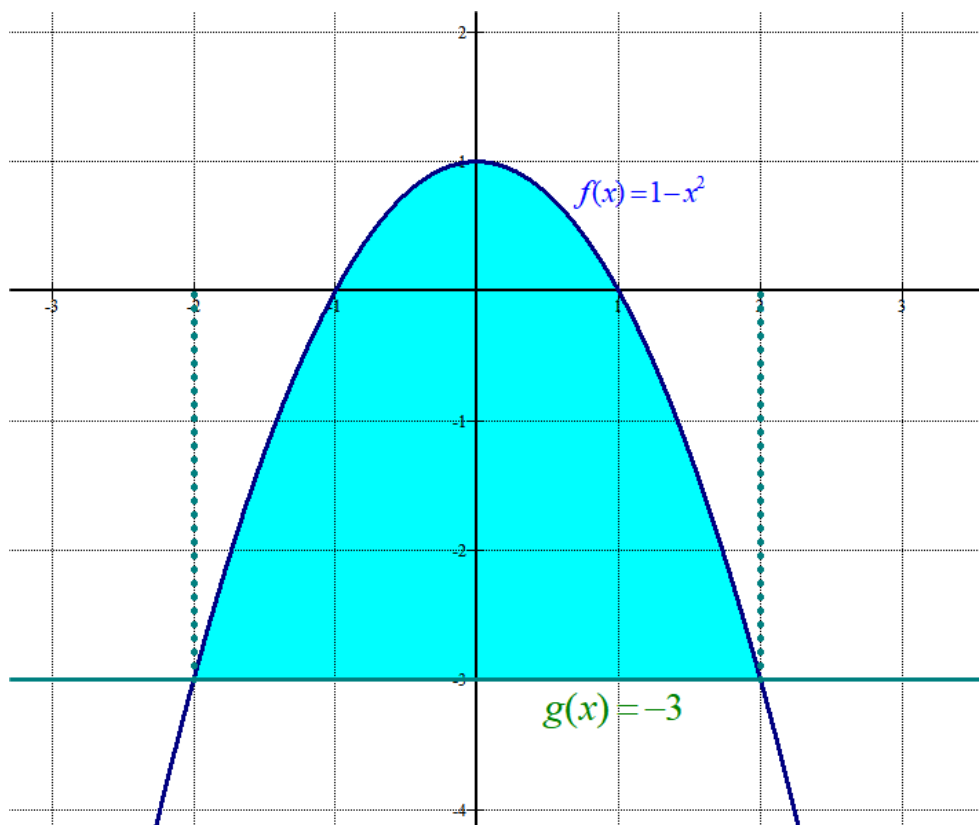
Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las funciones, pudiendo estimar el valor del área del recinto contando cuadraditos.

$$f(x) = 1 - x^2$$

x	$y = 1 - x^2$
-3	-8
-2	-3
0	1
2	-3
3	-8

$$g(x) = -3$$

x	$y = -3$
-2	-3
2	-3



b) El valor del área del recinto de color azul se obtiene con la integral definida de $f(x) - g(x)$ entre -2 y 2 .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^2 1 - x^2 - (-3) dx = \int_{-2}^2 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \\ &= \left[8 - \frac{2^3}{3} \right] - \left[-8 - \frac{(-2)^3}{3} \right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} = \boxed{10,66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Mirando el dibujo el área del recinto azul es aproximadamente de 10 cuadraditos. Por lo que concuerda con lo obtenido analíticamente.

8. Calcule la integral

(2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$$

La integral la resolvemos descomponiendo la fracción de la integral en fracciones simples.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+3}{2} = 2 = x \\ \frac{1-3}{2} = -1 = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2 - x - 2} &= \frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \\ \frac{3x}{(x-2)(x+1)} &= \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ 3x &= A(x+1) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow -3 = -3B \rightarrow B = 1 \\ x = 2 \rightarrow 6 = 3A \rightarrow A = 2 \end{cases} \\ \frac{3x}{(x-2)(x+1)} &= \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln|x-2| + \ln|x+1| + K$$

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx = \ln(x-2)^2 |x+1| + K$$

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

- a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)
 b) Si vio el debate el lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

Hacemos una tabla de contingencia para tener todos los números relativos al problema.

	Vieron el debate del martes	No vieron el debate del martes	
Vieron el debate del lunes			1100
No vieron el debate del lunes		300	
	1000		1500

Completamos la tabla.

	Vieron el debate del martes	No vieron el debate del martes	
Vieron el debate del lunes	900	200	1100
No vieron el debate del lunes	100	300	400
	1000	500	1500

- a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Viera los dos debates}) = \frac{\text{Nº de personas que vieron los 2 debates}}{\text{Nº total de personas encuestadas}} = \frac{900}{1500} = \boxed{\frac{3}{5} = 0,6}$$

- b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Viera el del martes} / \text{Vio el debate del lunes}) =$$

$$= \frac{\text{Nº de personas que vieron el debate el lunes y el martes}}{\text{Nº de personas que vieron el debate el lunes}} = \frac{900}{1100} = \boxed{\frac{9}{11} = 0,818}$$

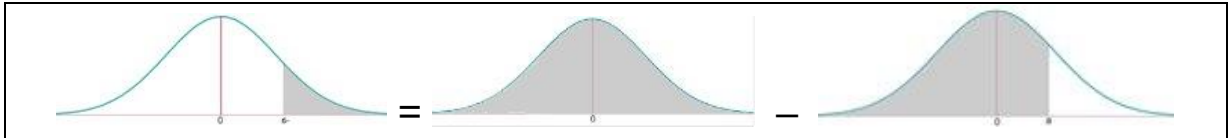
10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

- a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01. (1 punto)
 b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

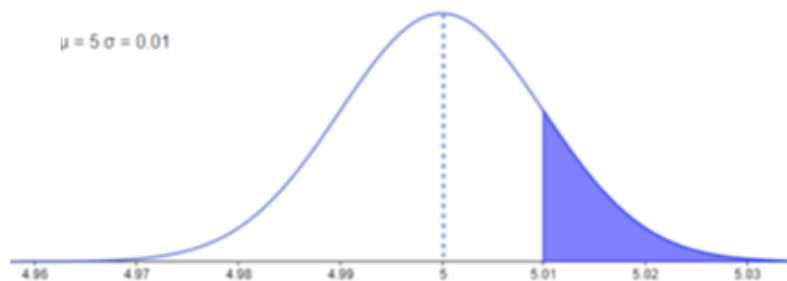
X = Radio de un pistón. $X = N(5, 0.01)$

a) Nos piden calcular $P(X > 5.01)$.

$$P(X > 5.01) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{5.01 - 5}{0.01}\right) = P(Z > 1) =$$

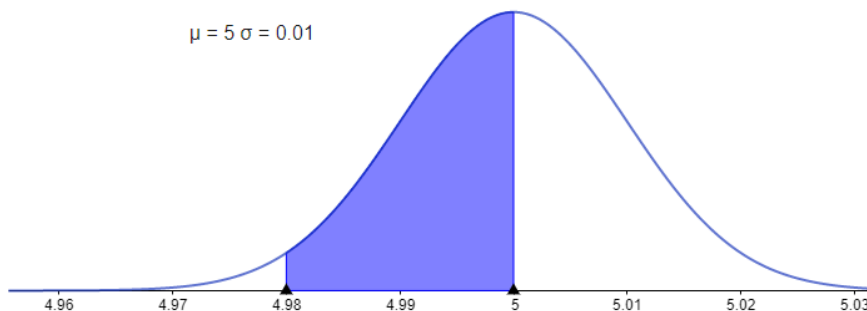


$$= 1 - P(Z \leq 1) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$



b) Nos piden calcular $P(4.98 \leq X \leq 5)$.

$$\begin{aligned} P(4.98 \leq X \leq 5) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{4.98 - 5}{0.01} \leq Z \leq \frac{5 - 5}{0.01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) = \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 2)) = \\ &= P(Z \leq 0) - 1 + P(Z \leq 2) = 0.5 - 1 + 0.9772 = \boxed{0.4772} \end{aligned}$$





EBAU Ordinaria 2020
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
 Universidad de Extremadura
 Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de 10 preguntas, cuyo valor es de 2 puntos cada una. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas.

PREGUNTAS

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

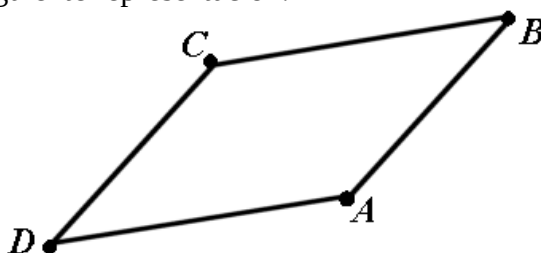
- a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)
 b) Calcule la inversa para $k=1$. (1 punto)

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (2 puntos)

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases}$$

3. Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$

- a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)
 b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:

- a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)
 b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x (x^2 - x + 1)$. (1 punto)

- b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)

- b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x=1$. (1 punto)

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

- a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)

- b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

8. Resuelva la integral (2 puntos)

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2} dx$$

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40% de los lotes, a B el 25% y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1% de los lotes, de B el 2% y de C el 3%. Elegido un lote al azar, se pide:

- a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

- b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B. (1 punto)

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60%. Si realiza 8 tiros a canasta

- a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

- b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

- c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa.

(1 punto)

b) Calcule la inversa para $k=1$.

(1 punto)

a) Para que una matriz tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k - 1 - 2k + k^2 - 2 + 1 = k^2 - k - 2$$

Igualemos a cero el determinante.

$$k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = k \\ \frac{1-3}{2} = -1 = k \end{cases}$$

Este determinante es no nulo y por tanto la matriz tiene inversa cuando $k \neq 2$ y $k \neq -1$

b) Para $k=1$ la matriz tiene determinante no nulo y se puede calcular su inversa.

La matriz queda $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y su inversa es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1 - 1 - 2 + 1 - 2 + 1} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (2 puntos)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{array} \right.$$

Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + \lambda(\lambda + 3) - 0 - 2\lambda^2 + 0 = -2 + \lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda^2 = -\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

Igualemos a cero el determinante y averiguemos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 8}}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = \lambda \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = \lambda \end{cases}$$

Establecemos tres casos diferentes en función de que se anule este determinante o no.

CASO 1. $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$.

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada es también 3 al igual que el número de incógnitas. Este sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

CASO 2. $\lambda = 1$.

En este caso la matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz para $\lambda = 1$ queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Comprobamos si su rango es 2 extrayendo el menor de orden 2 resultante de quitar la 1ª fila y 1ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Averiguemos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

El menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 4 + 2 = 0. \text{ El rango de } A/B \text{ no es 3.}$$

Como el rango de A es 2, el de A/B también es 2 y son iguales pero menores que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones que dependerán de un parámetro.

CASO 3. $\lambda = 2$.

En este caso la matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz para $\lambda = 2$ queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comprobamos si su rango es 2 extrayendo el menor de orden 2 resultante de quitar la 1ª fila y la 1ª columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Averigüemos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

El menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 - 0 - 8 + 4 = 0$. El rango de A/B no es 3.

Como el rango de A es 2, el de A/B también es 2 y son iguales pero menores que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones que dependerán de un parámetro.

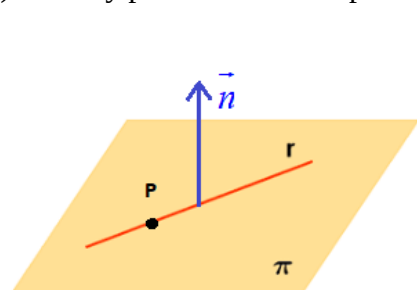
El sistema es compatible determinado si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$.

El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$.

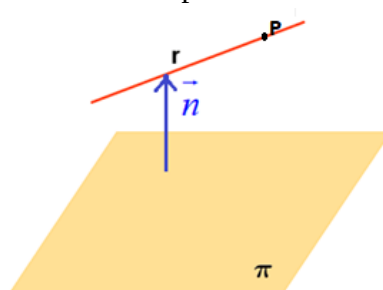
3. Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$

- a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)
 b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

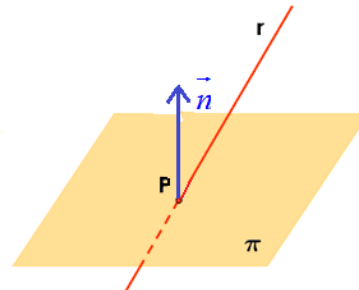
a) Recta y plano tienen tres posiciones relativas posibles.



Recta contenida en plano



Recta paralela a plano



Recta secante con plano

Para determinar en qué caso estamos vemos el ángulo que forman el vector normal $\vec{n} = (2, 1, -1)$ del plano $2x + y - z - 2 = 0$ y el vector director $\vec{v}_r = (3, -3, 3)$ de la recta

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}.$$

¿Forman 90° ?

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 1, -1) \cdot (3, -3, 3) = 6 - 3 - 3 = 0. \text{ Los vectores son perpendiculares.}$$

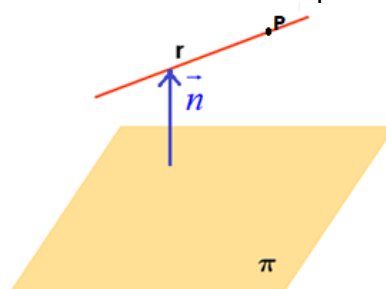
Forman 90° , por lo que la recta está contenida en el plano o es paralela al plano.

Para decidir en cuál de las dos situaciones estamos basta comprobar si el punto $P(0, 2, 1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 2, 1) \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cdot 0 + 2 - 1 - 2 = 0? \\ \Rightarrow -1 = 0? \end{array} \text{ ¡NO!}$$

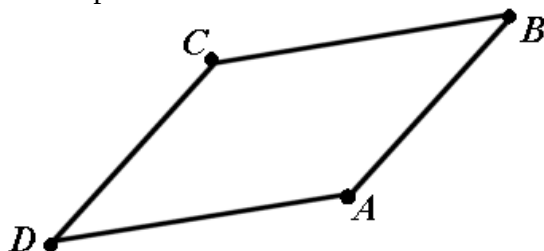
La respuesta es que el punto P de la recta no pertenece al plano y por tanto **son paralelos**.

- b) En la situación del gráfico la distancia de recta a plano es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano, pues todos están a la misma distancia del plano.



$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \left\{ \begin{array}{l} P(0, 2, 1) \\ \pi : 2x + y - z - 2 = 0 \end{array} \right\} = \frac{|2 \cdot 0 + 2 - 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{0,408 \text{ u}}$$

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



- a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)
 b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

a) Supongamos que el punto D tiene coordenadas $D(a,b,c)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen las mismas coordenadas pues los lados son paralelos y de la misma longitud.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (4,3,1) - (1,3,-2) = (3,0,3) \\ \overrightarrow{DC} &= (1,0,1) - (a,b,c) = (1-a,-b,1-c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (3,0,3) = (1-a,-b,1-c) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} 3 &= 1-a & a &= -2 \\ 0 &= -b & \Rightarrow b &= 0 \\ 3 &= 1-c & c &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{D(-2,0,-2)}$$

b) El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que definen dos lados con vértice común.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3,0,3) \\ \overrightarrow{AD} &= (-2,0,-2) - (1,3,-2) = (-3,-3,0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9j - 9k + 9i$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 9i - 9j - 9k = (9, -9, -9)$$

$$\text{Área de } ABCD = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + (-9)^2} = \boxed{\sqrt{243} = 15,59 u^2}$$

5.

- a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x (x^2 - x + 1)$. (1 punto)
- b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

a) Necesito la derivada de la función.

$$f(x) = e^x (x^2 - x + 1) \Rightarrow f'(x) = e^x (x^2 - x + 1) + e^x (2x - 1)$$

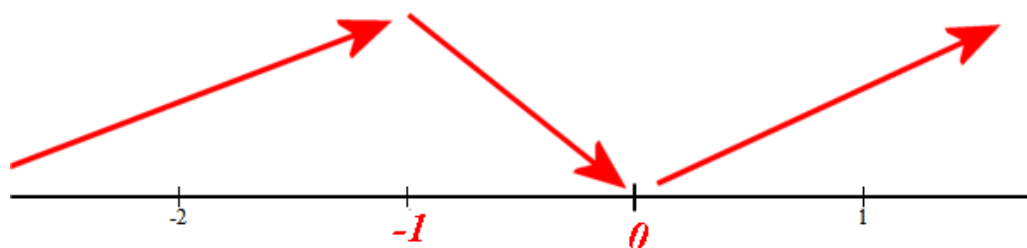
$$f'(x) = e^x (x^2 - x + 1 + 2x - 1) = e^x (x^2 + x)$$

Buscamos sus puntos críticos igualando a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (x^2 + x) = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Con esos dos puntos críticos la recta real se nos divide en tres zonas. Veamos si la función crece o decrece en cada una de ellas.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = e^{-2} ((-2)^2 - 2) = 2e^{-2} > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 0)$ tomamos $x = -0,5$ y la derivada vale $f'(-0,5) = e^{-0,5} ((-0,5)^2 - 0,5) = -0,25e^{-0,5} < 0$. La función decrece en $(-1, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = e^1 (1^2 + 1) = 2e > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.



Según este esquema la función crece en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0)$.

Presenta un máximo local en $x = -1$ y un mínimo en $x = 0$.

b) La función $f(x) = e^x (x^2 - x + 1)$ es una función continua y toma valores:

$$\text{en } x = -1 \rightarrow f(-1) = e^{-1} ((-1)^2 - (-1) + 1) = \frac{3}{e}$$

$$\text{en } x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 (0^2 - 0 + 1) = 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = e^1 (1^2 - 1 + 1) = e$$

Si tomo $g(x) = f(x) - 2$ es una función continua y cumple que $g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ y $g(1) = f(1) - 2 = e - 2 > 0$.

Según el teorema de Bolzano existe un valor c en el intervalo $(0, 1)$ donde la función se anula. Es decir, $g(c) = f(c) - 2 = 0 \Rightarrow f(c) = 2$.

Existe el valor pedido y está en el intervalo $(0, 1)$.

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x=1$. (1 punto)

a) Para que la función sea continua debe de serlo en $x = 0$.

Se debe cumplir que:

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = -e^0 = -1$$

- Existe $f(0) = a$
- Son iguales $\rightarrow \boxed{a = -1}$

b) La recta tangente a la función en $x=1$ tiene ecuación: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$f(1) = \frac{1-e^1}{1} = 1-e$$

$$f'(x) = \frac{-e^x x - 1(1-e^x)}{x^2} = \frac{-e^x x - 1 + e^x}{x^2} \text{ para } x \neq 0$$

$$f'(1) = \frac{-e^1 \cdot 1 - 1 + e^1}{1^2} = -1$$

La recta tangente tiene ecuación:

$$y - (1-e) = (-1)(x-1) \Rightarrow y = -x + 1 + 1 - e \Rightarrow \boxed{y = -x + 2 - e}$$

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

- a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)
 b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

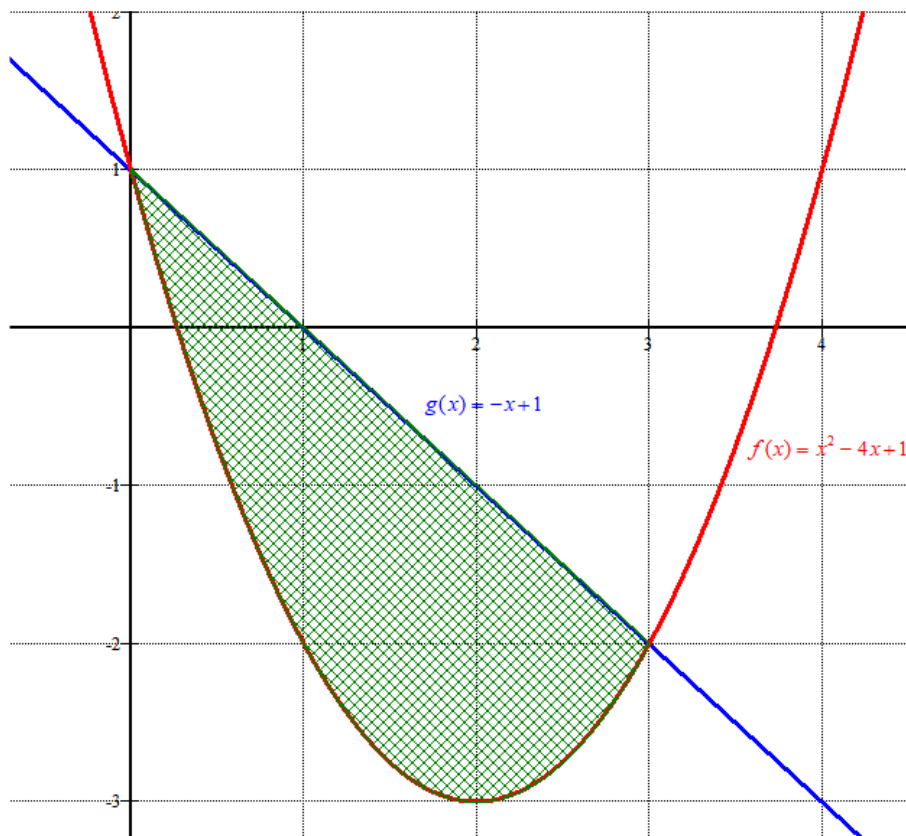
a) Hallamos los puntos de corte de dichas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Realizamos una tabla de valores para ambas funciones en el intervalo (0, 3)

x	$y = x^2 - 4x + 1$
0	1
1	$1 - 4 + 1 = -2$
2	$4 - 8 + 1 = -3$
3	$9 - 12 + 1 = -2$

x	$y = -x + 1$
0	1
1	0
2	-1
3	-2



b) Esta área tiene un valor de 4 a 5 cuadraditos.

Calculamos su valor exacto con una integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^3 -x + 1 - (x^2 - 4x + 1) dx = \int_0^3 -x + 1 - x^2 + 4x - 1 dx = \int_0^3 -x^2 + 3x dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right] = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = \boxed{4,5 u^2} \end{aligned}$$

8. Resuelva la integral**(2 puntos)**

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2} dx$$

Para calcular la integral vamos a descomponer la fracción algebraica del integrando en fracciones simples.

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{-x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{-x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$-x+7 = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow -1+7 = A(1+2)+0 \Rightarrow 6=3A \Rightarrow \boxed{A=2} \\ x=-2 \rightarrow 2+7 = 0+B(-2-1) \Rightarrow 9=-3B \Rightarrow \boxed{B=-3} \end{cases}$$

La descomposición queda:

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-3}{x+2}$$

Resolvemos la integral usando la descomposición obtenida.

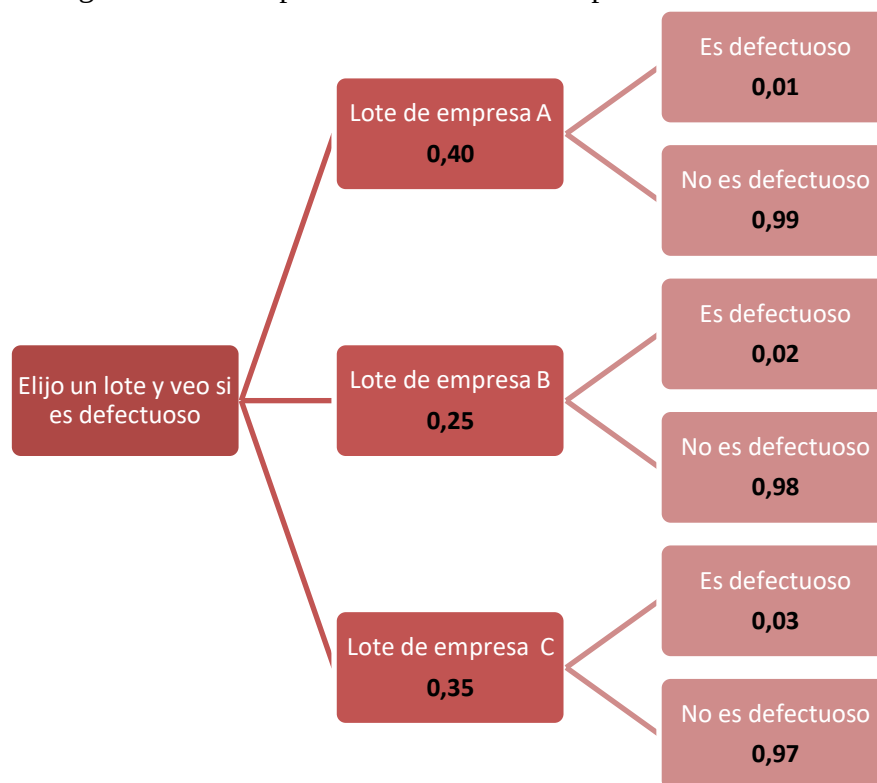
$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2} dx = \int \frac{2}{x-1} + \frac{-3}{x+2} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-3}{x+2} dx = \boxed{2 \ln|x-1| - 3 \ln|x+2| + C}$$

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40% de los lotes, a B el 25% y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1% de los lotes, de B el 2% y de C el 3%. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B. (1 punto)

Construyamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada.



a) Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Sea defectuoso}) = 0,40 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 =$$

$$= 0,0040 + 0,0050 + 0,0105 = \boxed{0,0195}$$

b) Esta es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes para su cálculo.

$$P(\text{Sea de la empresa B} / \text{No es defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea de la empresa B} \cap \text{No es defectuoso})}{P(\text{No sea defectuoso})} =$$

$$= \frac{P(B)P(B / \text{No defectuoso})}{1 - P(\text{Defectuoso})} = \frac{0,25 \cdot 0,98}{1 - 0,0195} = \frac{0,245}{0,9805} = \frac{2450}{9805} = \boxed{0,2499}$$

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60%. Si realiza 8 tiros a canasta

- | | |
|--|---------------|
| a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. | (0,75 puntos) |
| b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. | (0,75 puntos) |
| c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. | (0,5 puntos) |

Sea X = Número de triples que encesta en 8 intentos.

Esta es una distribución binomial, pues cada repetición es independiente de la anterior y la probabilidad de acierto es la misma en cada intento.

Llamamos éxito a encestar. $P(\text{éxito}) = P(\text{encestar un triple}) = 0,6 = p$.

Las repeticiones son $n = 8$.

$$X = B(8, 0.6) \Rightarrow P(X = m) = \binom{8}{m} 0,6^m \cdot 0,4^{8-m}$$

a)

$$P(\text{Enceste 5 triples}) = P(X = 5) = \binom{8}{5} 0,6^5 \cdot 0,4^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} 0,6^5 \cdot 0,4^3 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} 0,6^5 \cdot 0,4^3 = 56 \cdot 0,6^5 \cdot 0,4^3 = \boxed{0,2787}$$

b)

$$P(\text{Obtengan como mínimo 2 triples}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$$

$$= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\binom{8}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^8 + \binom{8}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^7 \right) =$$

$$= 1 - (0,4^8 + 8 \cdot 0,6 \cdot 0,4^7) = \boxed{0,9915}$$

c) Media = $n \cdot p = 8 \cdot 0,6 = 4,8$. En torno a 5 aciertos de media en 8 lanzamientos.

$$\text{Desviación típica} = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{1,92} = 1,3856 \text{ triples.}$$



EBAU Extraordinaria 2019
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

2. Sean las rectas $r: \begin{cases} x=1+y \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

- a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**
 b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1,5 puntos)**
 b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$. **(0,5 puntos)**

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

- a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
 b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. Una persona utiliza Whatsapp un 70% y Telegram un 30%. El 80% de los Whatsapp son de amigos y el 20% de trabajo, mientras que de Telegram, el 80% son de trabajo y 20% de amigos.

- a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje del trabajo. **(1 punto)**
 b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través del Whatsapp. **(1 punto)**



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - az &= 2 \\ x + y &= a + 1 \\ (a + 1)x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

2. Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (0, -2, -1)$ y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1, 2, 0)$ y $D = (1, 0, -1)$.

- a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r . **(1 punto)**
b) Calcule la distancia entre r y s . **(1 punto)**

3. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

- a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$. **(1,5 puntos)**
b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior. **(0,5 puntos)**

4. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1} \quad \textbf{(2 puntos)}$$

5. Se estima que el 40% de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

- a) La probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**
b) La probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**
c) La media y la desviación típica de la distribución. **(0,5 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Se debe cumplir que $A^{-1} \cdot A = I$.

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I \Rightarrow A^{-1} \cdot A = A^2 \cdot A - 3A \cdot A + 3I \cdot A \Rightarrow I = A^3 - 3A^2 + 3A$$

Obtenemos la expresión de A^2 y A^3 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probemos que $I = A^3 - 3A^2 + 3A$.

$$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1-3+3 & 3-6+3 & 0+3-3 \\ 0 & 1-3+3 & 3-6+3 \\ 0 & 0 & 1-3+3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I$$

2. Sean las rectas $r: \begin{cases} x=1+y \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

- a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**
 b) Halle dos vectores directores de r y s . Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

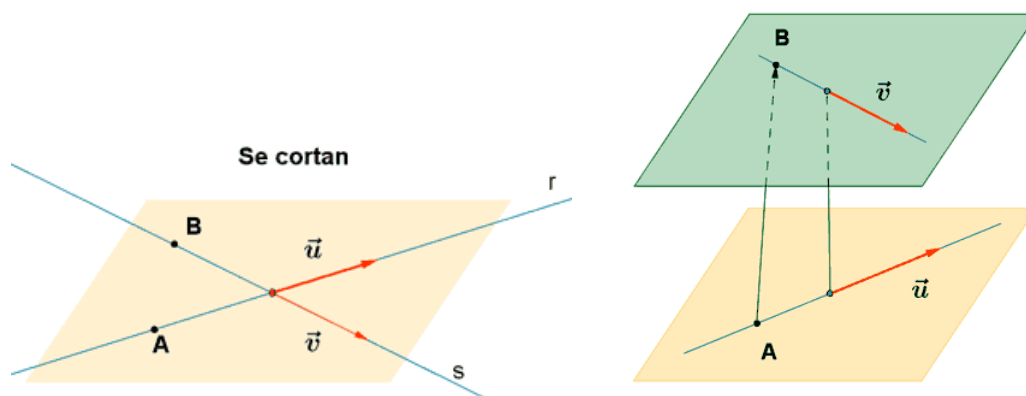
a) La ecuación de la recta r se puede poner como $r: \begin{cases} x=1+y \\ y=y \\ z=1 \end{cases}$

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$.

Estos vectores no son proporcionales: $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{1}$. Las rectas no son paralelas y por tanto no coinciden.

Veamos si se cortan o cruzan. Para ello necesitamos un tercer vector, el que va de un punto de una de las rectas a un punto de la otra recta. Con esos tres vectores puede pasar que estén en el mismo plano (producto mixto de los vectores es nulo) con lo cual las rectas se cortan o no están en el mismo plano (producto mixto de los vectores no es nulo) con lo que las rectas se cruzan.

Se cruzan



$A(1,0,1)$ es un punto de la recta r y $B(1,0,0)$ es un punto de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,0) - (1,0,1) = (0,0,-1) \\ \vec{v}_r = (1,1,0) \\ \vec{v}_s = (1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan.

- b) Unos vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$. El área del triángulo que forman es la mitad del módulo del producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - k - j = i - j - k = (1, -1, -1)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Área} = \frac{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

(1,5 puntos)

b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$.

(0,5 puntos)

a) Veamos si es continua en $x = 0$.

- Existe $f(0) = e^0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$
- Los tres valores son iguales.

La función es continua en $x = 0$ y por tanto es continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos si es derivable en $x = 0$.

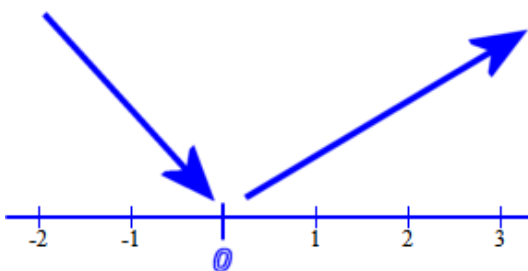
$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -e^{-0} = -1 \\ f'(0^+) &= e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

No es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para que exista un extremo en $x = 0$, dado que no es derivable en $x = 0$ hay que ver si la derivada cambia de signo de valores de x menores que 0 a valores de x mayores que 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(-0,1) = -e^{0,1} < 0. \text{ La función decrece} \\ f'(0,1) = e^{0,1} > 0. \text{ La función crece} \end{cases}$$



La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$.

(0,5 puntos)

b) Calcule el área de la región anterior.

(1,5 puntos)

a) Averigüemos los puntos de corte entre ambas funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

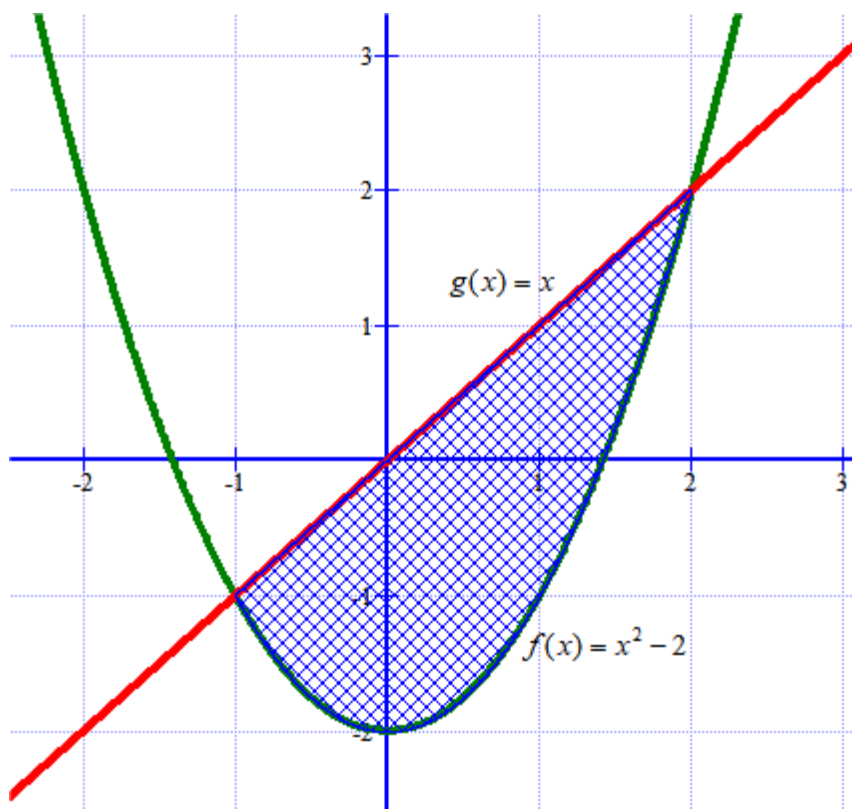
Las funciones se cortan en $x = -1$ y $x = 2$.

Con una tabla de valores de cada función la dibujamos. $f(x) = x^2 - 2$ es una parábola y

$g(x) = x$ es una recta.

x	$f(x) = x^2 - 2$
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

x	$g(x) = x$
-1	-1
0	0
2	2



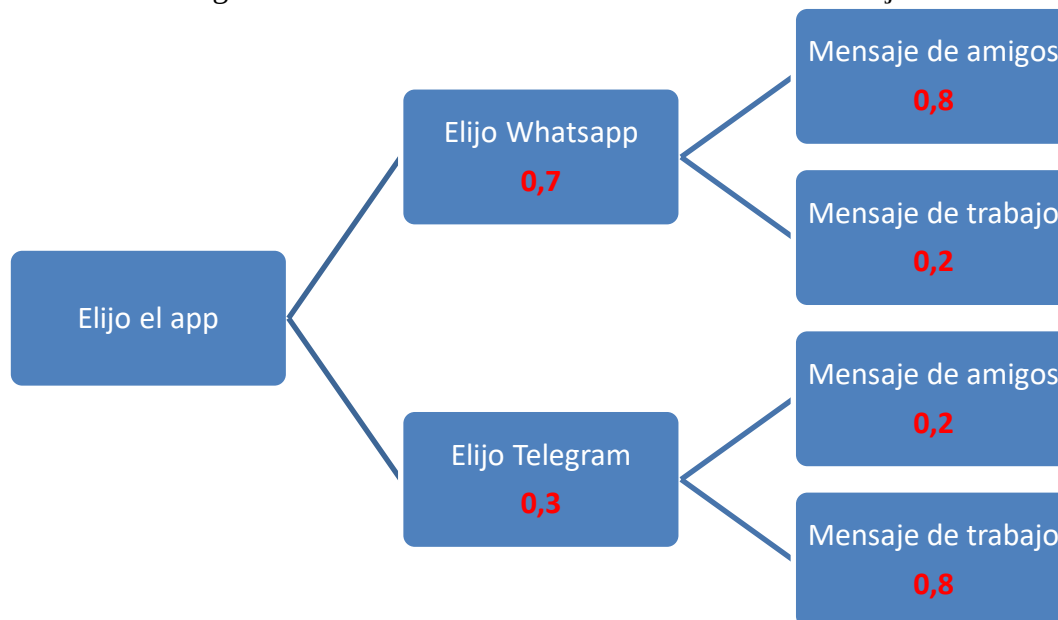
b) Mirando el dibujo de sus gráficas y contando cuadraditos ($1 u^2$), el área es aproximadamente $4 u^2$. Calculemosla exactamente con una integral definida de la diferencia de las funciones entre -1 y 2 .

$$\int_{-1}^2 x - (x^2 - 2) dx = \int_{-1}^2 -x^2 + x + 2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 =$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 4 \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \boxed{4,5 u^2}$$

5. Una persona utiliza Whatsapp un 70% y Telegram un 30%. El 80% de los Whatsapp son de amigos y el 20% de trabajo, mientras que de Telegram, el 80% son de trabajo y 20% de amigos.
- a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje del trabajo. **(1 punto)**
- b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través del Whatsapp. **(1 punto)**

Realicemos un diagrama de árbol relativo a la situación descrita en el ejercicio



- a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Recibir mensaje del trabajo}) =$$

$$= P(\text{Recibirlo por Whatsapp}) \cdot P(\text{Por Whatsapp recibir mensaje del trabajo}) + P(\text{Recibirlo por Telegram}) \cdot P(\text{Por Telegram recibir mensaje del trabajo}) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = \boxed{0,38}.$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Recibir mensaje por Whatsapp, sabiendo que es del trabajo}) =$$

$$= P(\text{Recibir mensaje por Whatsapp} / \text{Es de trabajo}) =$$

$$= \frac{P(\text{Recibir mensaje por Whatsapp} \cap \text{Es de trabajo})}{P(\text{Recibe mensaje de trabajo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Recibir mensaje por Whatsapp}) P(\text{Sea de trabajo} / \text{Recibir mensaje por Whatsapp})}{P(\text{Recibe mensaje de trabajo})} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,38} = \frac{0,14}{0,38} = \boxed{0,368}$$

OPCIÓN B

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - az &= 2 \\ x + y &= a + 1 \\ (a + 1)x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - a + a^2 + a + 1 = a^2 - 1$$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Hay tres casos distintos a considerar.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -1$

En este caso el rango de A es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 1$

$$\text{El sistema queda } \left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y &= 2 \\ 2x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

Tiene la ecuación 1ª y 2ª iguales. Podemos suprimir la 3ª ecuación.

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x &= 2 - y \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(2 - y) + y - z = 2 \Rightarrow 4 - 2y + y - z = 2 \Rightarrow z = 2 - y$$

Este sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones que vienen dadas por las expresiones $x = z = 2 - t$; $y = t$

CASO 3. $a = -1$

El sistema queda

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + y &= 0 \\ y - z &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x &= -y \\ z &= y - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(-y) + y + y - 2 = 2 \Rightarrow -2 = 2$$

Hemos llegado a una ecuación falsa. Este sistema es incompatible. No tiene solución.

2. Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$ y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.

a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r .

(1 punto)

b) Calcule la distancia entre r y s .

(1 punto)

a) El plano si contiene a s tiene como vector director el director de s

$\vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (1,0,-1) - (-1,2,0) = (2,-2,-1)$ y pasa por el punto $C = (-1,2,0)$ y al ser paralelo a r tiene como vector director el director de r $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0,-2,-1) - (0,0,-1) = (0,-2,0)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4z - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2z + x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + 2z + 1 = 0}$$

b) Los vectores directores de las rectas son: $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0,-2,0)$ y $\vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (2,-2,-1)$.

Estos vectores no son paralelos, ya que no tienen coordenadas proporcionales.

$$\text{¿} \frac{0}{2} = \frac{-2}{-2} = \frac{0}{-1} \text{? No es cierto}$$

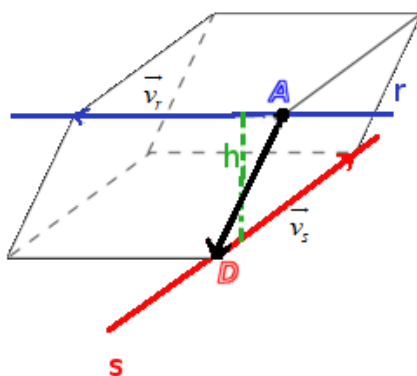
Veamos si se cortan o cruzan. Para ello tomamos el vector que une el punto $A(0,0,-1)$ de r con el punto $D(1,0,-1)$ de s . $\overrightarrow{AD} = (1,0,-1) - (0,0,-1) = (1,0,0)$.

El producto mixto de $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0,-2,0)$, $\vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (2,-2,-1)$ y $\overrightarrow{AD} = (1,0,0)$ ¿da cero?

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ Las rectas se cruzan.}$$

La fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan es:

$$d(r,s) = \text{Altura del paralelepípedo} = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot (\vec{v}_s \times \vec{v}_r)}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_r|}$$



Calculemos el producto vectorial de los vectores directores de las rectas

$$\vec{v}_s \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 4k = (2,0,4) \Rightarrow |\vec{v}_s \times \vec{v}_r| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Hemos calculado anteriormente $\overrightarrow{AD} \cdot (\vec{v}_s \times \vec{v}_r) = 2$

$$d(r,s) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot (\vec{v}_s \times \vec{v}_r)}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_r|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5} u}$$

3. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

- a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$. **(1,5 puntos)**
 b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior. **(0,5 puntos)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ ya que 1 y -1 anulan el denominador.

- Asíntotas verticales. Son $x = 1$ y $x = -1$

- Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

- Asíntota oblicua no hay al haber una horizontal.

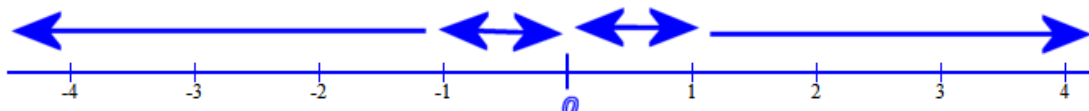
Para la monotonía calculamos la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

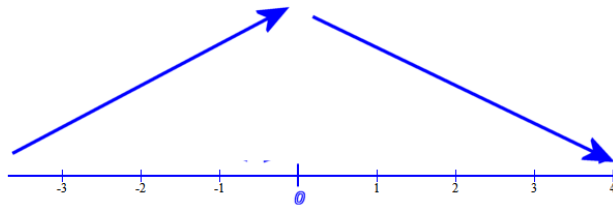
Igualamos a cero y obtenemos los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Veamos el signo de la derivada antes de -1, entre -1 y 0, entre 0 y 1 y después de 1.

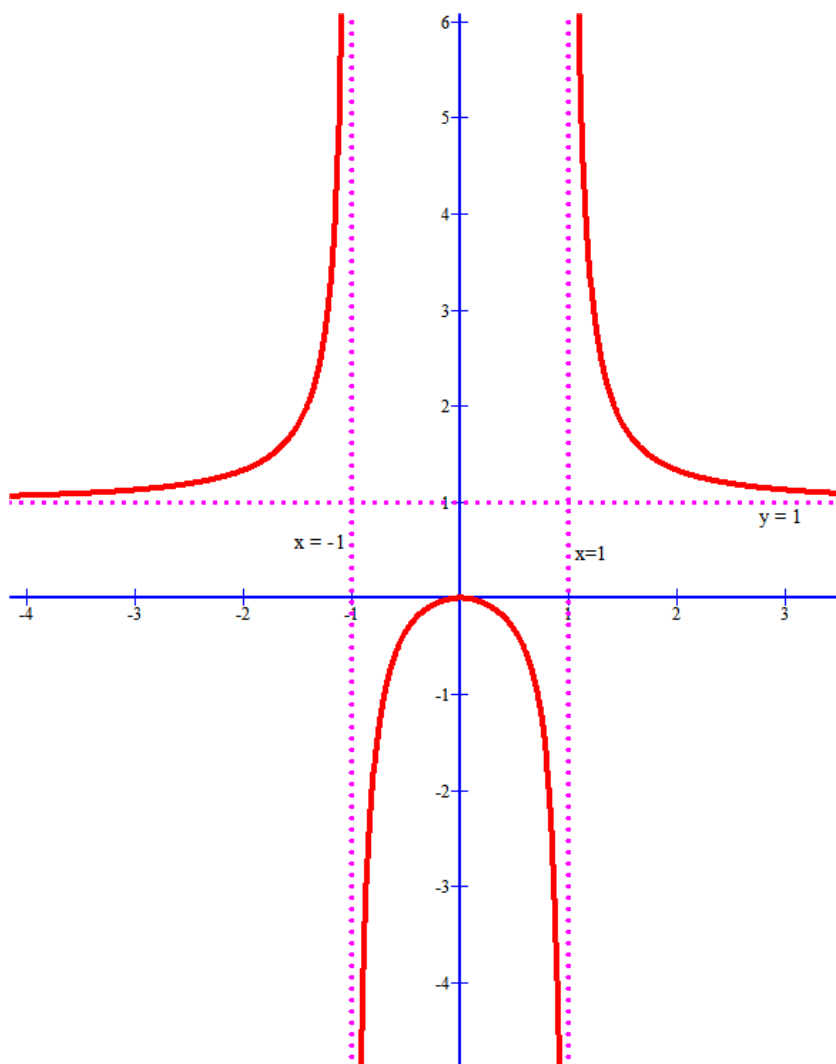


- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{4}{(4-1)^2} > 0$. La función crece.
- En $(-1, 0)$ tomamos $x = -0,5$ y la derivada vale $f'(-0,5) = \frac{1}{(0,25-1)^2} > 0$. La función crece.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0,5$ y la derivada vale $f'(0,5) = \frac{-1}{(0,25-1)^2} < 0$. La función decrece.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-4}{(4-1)^2} < 0$. La función decrece.



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $x = 0$.

b) La gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ es



4. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$$

(2 puntos)

Para calcular la integral $\int \frac{x-3}{x^2-1} dx$ descomponemos en fracciones simples la función.

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x-3 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \rightarrow -2 = 2A \rightarrow \boxed{A=-1} \\ \text{Si } x=-1 \rightarrow -4 = -2B \rightarrow \boxed{B=2} \end{cases}$$

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

Aplicémoslo a la integral que deseamos calcular.

$$\int \frac{x-3}{x^2-1} dx = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+1} dx =$$

$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x+1| = -\ln|x-1| + \ln(x+1)^2 = \boxed{\ln \frac{(x+1)^2}{|x-1|} + C}$$

La primitiva es $F(x) = \ln \frac{(x+1)^2}{|x-1|} + C$.

5. Se estima que el 40% de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

- a) La probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**
 b) La probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**
 c) La media y la desviación típica de la distribución. **(0,5 puntos)**

- a) Sea X = Número de alumnos que obtienen el grado de 5 estudiantes.
 Llamamos éxito a obtener el grado. $P(\text{éxito}) = P(\text{sacar el grado}) = 0,4 = p$.
 Las repeticiones son $5 = n$.

$$X = B(5, 0,4) \Rightarrow P(X = m) = \binom{5}{m} 0,4^m \cdot 0,6^{5-m}$$

$$P(\text{Obtengan los 5 el grado}) = P(X = 5) = \binom{5}{5} 0,4^5 \cdot 0,6^0 = 0,4^5 = \boxed{0,01024}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Sin utilizar la binomial $P(\text{obtenan los 5 el grado}) = P(\text{obtena el 1º}) \cdot P(\text{obtena el 2º}) \cdot P(\text{obtena el 3º}) \cdot P(\text{obtena el 4º}) \cdot P(\text{obtena el 5º}) = 0,4^5 = \boxed{0,01024}$

b)

$$\begin{aligned} P(\text{Obtengan como máximo 2 el grado}) &= P(X \leq 2) = \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \binom{5}{0} 0,4^0 \cdot 0,6^5 + \binom{5}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^4 + \binom{5}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = \\ &= 0,6^5 + 5 \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 + \frac{5 \cdot 4}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,6^5 + 2 \cdot 0,6^4 + 10 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = \boxed{0,68256} \end{aligned}$$

- c) Media = $n \cdot p = 5 \cdot 0,4 = 2$. Desviación típica = $\sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{1,2} = 1,09$



EBAU Ordinaria 2019
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{array} \right\}$$

2. Sean los puntos $A=(0,0,2)$, $B=(2,0,1)$, $C=(0,2,1)$ y $D=(-2,2,-1)$.

- a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C. **(0,75 puntos)**
 b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**
 c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

3. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

4. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

- a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
 b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

- a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**
 b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook. **(1 punto)**



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019**

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

- a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa. **(1 punto)**
b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

2. Dados los puntos $A=(1,0,2)$ y $B=(3,-2,-2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$. **(2 puntos)**

4. Resuelve la integral **(2 puntos)**

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx$$

5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.
a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**
b) ¿A partir de qué altura están el 33% de los habitantes más altos? **(1 punto)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{array} \right\}$$

Consideramos la matriz de los coeficientes asociada al sistema: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 + 3a^2 - 5a - 2a + 9 = 3a^2 - 7a + 2$

Si igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 7a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} a = \frac{7+5}{6} = 2 \\ a = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq \frac{1}{3}$

En este caso el rango de la matriz A es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 2$

La matriz de coeficientes y ampliada quedan: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

El rango de A no es 3 ya $|A| = 0$ y debe ser 2 o 1. Su rango es 2 ya que el determinante de la matriz que queda quitando la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 si el determinante de la matriz que queda al eliminar la 1ª columna es no nulo. Comprobemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 12 + 1 + 3 - 8 - 4 = 16 - 20 = -4 \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A y A/B son distintos el sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 3. $a = \frac{1}{3}$

La matriz de coeficientes y ampliada quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

El rango de A no es 3 ya que su determinante es nulo. Su rango es 2 ya que el determinante de la matriz que queda quitando la 3ª fila y 3ª columna es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2/3 = 7/3 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 si el determinante de la matriz que queda al eliminar la 1ª columna es no nulo. Comprobemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2/3 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} + 1 + 3 - \frac{2}{9} - 4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A y A/B son distintos el sistema es incompatible. No tiene solución.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado y si $a = 2$ o $a = \frac{1}{3}$ el sistema es incompatible.

2. Sean los puntos $A=(0,0,2)$, $B=(2,0,1)$, $C=(0,2,1)$ y $D=(-2,2,-1)$.
1. Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C. **(0,75 puntos)**
 2. Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**
 3. Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

a) Obtengamos dos vectores directores del plano pedido.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,0,1) - (0,0,2) = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,2,1) - (0,0,2) = (0,2,-1) \\ \text{Pasa por } A(0,0,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +4z - 8 + 2y + 2x = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 4z - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + 2z - 4 = 0}$$

b) UNA FORMA DE HACERLO

Hallemos el producto mixto de los vectores que unen los puntos entre sí. Si da nulo son coplanarios, en caso contrario no son coplanarios y definen un paralelepípedo de volumen el valor absoluto de este producto mixto.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,0,1) - (0,0,2) = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,2,1) - (0,0,2) = (0,2,-1) \\ \overrightarrow{AD} = (-2,2,-1) - (0,0,2) = (-2,2,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 4 + 4 = -12 \neq 0$$

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

OTRA FORMA DE HACERLO

Como tengo el plano que contiene a A, B y C, basta con ver si D está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + 2z - 4 = 0 \\ D(-2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 2 - 2 - 4 = 0? \Rightarrow -6 = 0?$$

No se cumple y el punto D no está en el plano y los puntos no son coplanarios.

c) El área del triángulo formado por los puntos B, C y D es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los puntos entre sí.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (0,2,1) - (2,0,1) = (-2,2,0) \\ \overrightarrow{BD} = (-2,2,-1) - (2,0,1) = (-4,2,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4i - 4k + 8k - 4j = -4i - 4j + 4k = (-4, -4, 4)$$

$$\Rightarrow \text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{16+16+16}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = \boxed{2\sqrt{3} \text{ u}^2}$$

3. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x^2) - x + 1 = 0$$

Considero la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x + 1$ tenemos que encontrar un valor que anule esta función, para ello utilizamos el teorema de Bolzano.

En el intervalo $(0,2)$, se cumple:

- $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x + 1$ es continua en $(0,2)$
- $f(0) = \operatorname{sen}(0) - 0 + 1 = 1 > 0$; $f(2) = \operatorname{sen}(4) - 4 + 1 = \operatorname{sen}4 - 3 < 0$

Aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c \in (0,2)$ donde $f(c) = 0$. Este valor será solución de la ecuación del ejercicio.

4. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

(0,5 puntos)

b) Calcule el área de la región anterior.

(1,5 puntos)

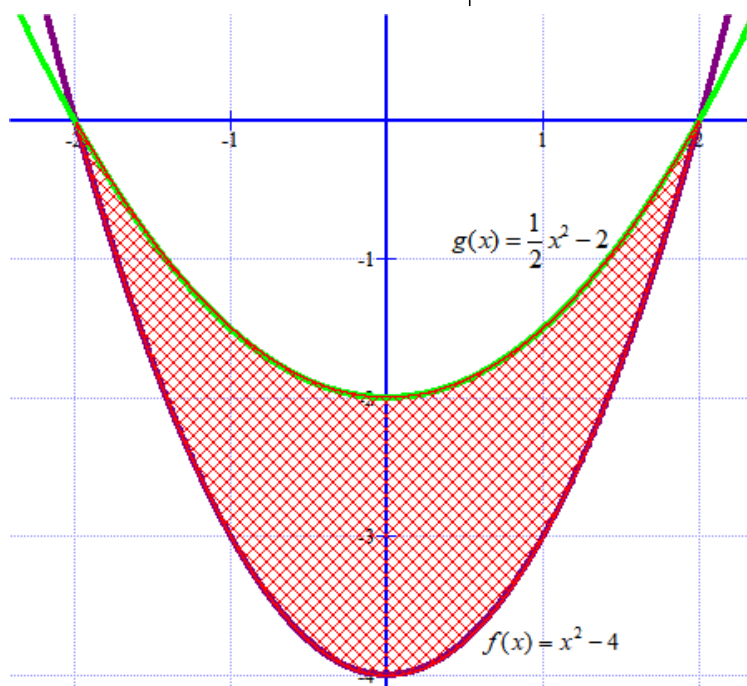
a) Veamos donde se cortan las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 8 = x^2 - 4$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Hacemos una tabla de valores para cada función entre -2 y 2.

x	$y = x^2 - 4$	x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
-2	0	-2	0
-1	$1 - 4 = -3$	-1	-1,5
0	-4	0	-2
1	-3	1	-1,5
2	0	2	0

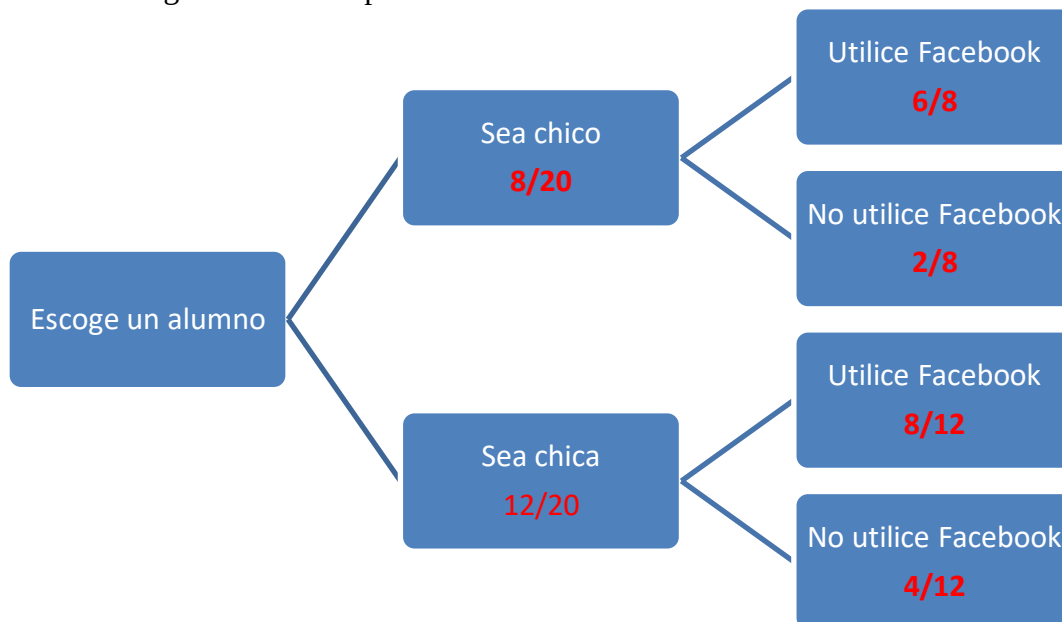


b)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 - (x^2 - 4) \right) dx = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^2 = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right] - \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) \right] = -\frac{8}{6} + 4 - \frac{8}{6} + 4 = -\frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:
- a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**
- b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook. **(1 punto)**

a) Realicemos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



$$P(\text{Sea chica y utilice Facebook}) = P(\text{Sea chica}) \cdot P(\text{Utilice Facebook}) =$$

$$= \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{12} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea chico} / \text{Utiliza Facebook}) &= \frac{P(\text{Sea chico y utiliza Facebook})}{P(\text{Utiliza Facebook})} = \\
 &= \frac{P(\text{Sea chico}) P(\text{utiliza Facebook} / \text{es chico})}{P(\text{Sea chico}) P(\text{utiliza Facebook} / \text{es chico}) + P(\text{Sea chica}) P(\text{utiliza Facebook} / \text{es chica})} = \\
 &= \frac{\frac{8}{20} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{8}{20} \cdot \frac{6}{8} + \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{12}} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{6}{20} + \frac{8}{20}} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{14}{20}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = \boxed{0,428}
 \end{aligned}$$

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa.

(1 punto)

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$.

(1 punto)

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = -3 - \lambda^2 - \lambda + 3\lambda^2 = 2\lambda^2 - \lambda - 3$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \lambda = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

La matriz A es siempre tiene inversa cuando $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq \frac{3}{2}$.

b) Para $\lambda = 1$ aplicamos la fórmula para hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}} = \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-3-1-1+3} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}{-2}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dados los puntos $A=(1,0,2)$ y $B=(3,-2,-2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

Si el plano es perpendicular al segmento $\overline{AB}$, el plano tiene como vector normal al vector $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (3, -2, -2) - (1, 0, 2) = (2, -2, -4).$$

La ecuación del plano es $\pi: 2x - 2y - 4z + D = 0$. Además, pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

$$\text{Punto medio de } \overline{AB} = \frac{(1, 0, 2) + (3, -2, -2)}{2} = \frac{(4, -2, 0)}{2} = (2, -1, 0).$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y - 4z + D = 0 \\ \text{Punto medio de } \overline{AB} = (2, -1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6$$

La ecuación del plano es $\pi: 2x - 2y - 4z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 2z - 3 = 0}$

3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$.

(2 puntos)

Calculamos la derivada de $f(x) = x^2 e^x \Rightarrow f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x)$

Si igualamos a cero la derivada obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x(2+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2+x = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Hay dos momentos de cambio en la monotonía y tres zonas a estudiar su monotonía.



- En $(-\infty, -2)$ tomamos el valor $x = -4$ y su derivada vale $f'(-4) = -4e^{-4}(2-4) = 8e^{-4} > 0$. La función crece en este intervalo.
- En $(-2, 0)$ tomamos el valor $x = -1$ y su derivada vale $f'(-1) = -e^{-1}(2-1) = -e^{-1} < 0$. La función decrece en este intervalo.
- En $(0, +\infty)$ tomamos el valor $x = 1$ y su derivada vale $f'(1) = e^1(2+1) = 3e > 0$. La función crece en este intervalo.

Resumiendo: La función $f(x) = x^2 e^x$ crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0)$

4. Resuelve la integral

(2 puntos)

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx$$

Para calcular la integral $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx$ descomponemos en fracciones simples la fracción.

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ x = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$5x+3 = A(x+3)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 8=4A \Rightarrow A=2 \\ x=-3 \Rightarrow -12=-4B \Rightarrow B=3 \end{cases}$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+3} dx = \boxed{2\ln|x-1| + 3\ln|x+3| + C}$$

5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

- a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**
 b) ¿A partir de qué altura están el 33% de los habitantes más altos? **(1 punto)**

a) X = Estatura de un habitante de Extremadura. $X = N(170, 10)$

$$P(170 < X < 185) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{170-170}{10} < \frac{X-170}{10} < \frac{185-170}{10}\right) =$$

$$= P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < 0) = 0,9332 - 0,5 = 0,4332$$

El porcentaje es del 43,32%

b) Buscamos el valor de “a” tal que $P(X > a) = 0,33$

$$P(X > a) = 0,33 \Rightarrow 1 - P(X < a) = 0,33 \Rightarrow P(X < a) = 0,66 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Tipificamos} \} \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-170}{10}\right) = 0,66 \Rightarrow \{ \text{Buscando en la tabla} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-170}{10} = 0,44 \Rightarrow a = 4,4 + 170 = \boxed{174,4 \text{ cm}}$$

A partir de una altura de 174.4 cm están el 33% de los habitantes más altos.



EBAU Extraordinaria 2018
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Asignatura: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A1.- Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a . **(1,5 puntos)**(b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.- Sean los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (2, 0, 3)$ y la recta r dada por el punto $C = (1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 0)$. Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo ABP es 2. **(2,5 puntos)**

3.- Sea la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1 punto)**(b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de $f(x)$ y justifique si en el punto $x = 0$ la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo. **(1 punto)**(c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2 - x^2$ y calcule su área. **(1,5 puntos)**

4.- En un centro comercial el 35% de los clientes utiliza carro. El 70% de los que utilizan carro son hombres y el 40% de los que no utilizan carro son mujeres.

(a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer. **(0,75 puntos)**(b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro. **(0,75 puntos)**



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2AB$.

(1 punto)

(b) Halle la inversa de la matriz A .

(1'5 puntos)

2.- Sean las rectas $r = \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{4}$ y $s = \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$.

(a) Estudie la posición relativa de dichas rectas.

(1 punto)

(b) Halle la distancia entre ambas rectas.

(1'5 puntos)

3.- Sea la función $f(x) = x \ln(x)$ para $x > 0$.

(a) ¿Se puede definir $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua por la derecha de $x = 0$?

(1 punto)

(b) Estudie los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ para $x > 0$.

(0'5 puntos)

(c) Halle, si existe, la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

(0'5 puntos)

(d) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x \ln(x)$.

(1'5 puntos)

4.- Se estima que en una partida de bombillas el 10% son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

(a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa.

(0'5 puntos)

(b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas.

(0'5 puntos)

(c) la media y la desviación típica de la distribución.

(0'5 puntos)

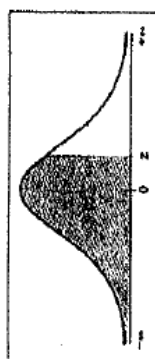


Tabla de distribución
normal $N(0,1)$
 $P(Z \leq z)$

0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.5399
0.5001	0.5041	0.5081	0.5121	0.5161	0.5200	0.5240	0.5280	0.5320	0.5360	0.5400
0.5002	0.5042	0.5082	0.5122	0.5162	0.5201	0.5241	0.5281	0.5321	0.5361	0.5401
0.5003	0.5043	0.5083	0.5123	0.5163	0.5202	0.5242	0.5282	0.5322	0.5362	0.5402
0.5004	0.5044	0.5084	0.5124	0.5164	0.5203	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403
0.5005	0.5045	0.5085	0.5125	0.5165	0.5204	0.5244	0.5284	0.5324	0.5364	0.5404
0.5006	0.5046	0.5086	0.5126	0.5166	0.5205	0.5245	0.5285	0.5325	0.5365	0.5405
0.5007	0.5047	0.5087	0.5127	0.5167	0.5206	0.5246	0.5286	0.5326	0.5366	0.5406
0.5008	0.5048	0.5088	0.5128	0.5168	0.5207	0.5247	0.5287	0.5327	0.5367	0.5407
0.5009	0.5049	0.5089	0.5129	0.5169	0.5208	0.5248	0.5288	0.5328	0.5368	0.5408
0.5010	0.5050	0.5090	0.5130	0.5170	0.5209	0.5249	0.5289	0.5329	0.5369	0.5409
0.5011	0.5051	0.5091	0.5131	0.5171	0.5210	0.5250	0.5290	0.5330	0.5370	0.5410
0.5012	0.5052	0.5092	0.5132	0.5172	0.5211	0.5251	0.5291	0.5331	0.5371	0.5411
0.5013	0.5053	0.5093	0.5133	0.5173	0.5212	0.5252	0.5292	0.5332	0.5372	0.5412
0.5014	0.5054	0.5094	0.5134	0.5174	0.5213	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413
0.5015	0.5055	0.5095	0.5135	0.5175	0.5214	0.5254	0.5294	0.5334	0.5374	0.5414
0.5016	0.5056	0.5096	0.5136	0.5176	0.5215	0.5255	0.5295	0.5335	0.5375	0.5415
0.5017	0.5057	0.5097	0.5137	0.5177	0.5216	0.5256	0.5296	0.5336	0.5376	0.5416
0.5018	0.5058	0.5098	0.5138	0.5178	0.5217	0.5257	0.5297	0.5337	0.5377	0.5417
0.5019	0.5059	0.5099	0.5139	0.5179	0.5218	0.5258	0.5298	0.5338	0.5378	0.5418
0.5020	0.5060	0.5100	0.5140	0.5180	0.5219	0.5259	0.5299	0.5339	0.5379	0.5419
0.5021	0.5061	0.5101	0.5141	0.5181	0.5220	0.5260	0.5300	0.5340	0.5380	0.5420
0.5022	0.5062	0.5102	0.5142	0.5182	0.5221	0.5261	0.5301	0.5341	0.5381	0.5421
0.5023	0.5063	0.5103	0.5143	0.5183	0.5222	0.5262	0.5302	0.5342	0.5382	0.5422
0.5024	0.5064	0.5104	0.5144	0.5184	0.5223	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423
0.5025	0.5065	0.5105	0.5145	0.5185	0.5224	0.5264	0.5304	0.5344	0.5384	0.5424
0.5026	0.5066	0.5106	0.5146	0.5186	0.5225	0.5265	0.5305	0.5345	0.5385	0.5425
0.5027	0.5067	0.5107	0.5147	0.5187	0.5226	0.5266	0.5306	0.5346	0.5386	0.5426
0.5028	0.5068	0.5108	0.5148	0.5188	0.5227	0.5267	0.5307	0.5347	0.5387	0.5427
0.5029	0.5069	0.5109	0.5149	0.5189	0.5228	0.5268	0.5308	0.5348	0.5388	0.5428
0.5030	0.5070	0.5110	0.5150	0.5190	0.5229	0.5269	0.5309	0.5349	0.5389	0.5429
0.5031	0.5071	0.5111	0.5151	0.5191	0.5230	0.5270	0.5310	0.5350	0.5390	0.5430
0.5032	0.5072	0.5112	0.5152	0.5192	0.5231	0.5271	0.5311	0.5351	0.5391	0.5431
0.5033	0.5073	0.5113	0.5153	0.5193	0.5232	0.5272	0.5312	0.5352	0.5392	0.5432
0.5034	0.5074	0.5114	0.5154	0.5194	0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433
0.5035	0.5075	0.5115	0.5155	0.5195	0.5234	0.5274	0.5314	0.5354	0.5394	0.5434
0.5036	0.5076	0.5116	0.5156	0.5196	0.5235	0.5275	0.5315	0.5355	0.5395	0.5435
0.5037	0.5077	0.5117	0.5157	0.5197	0.5236	0.5276	0.5316	0.5356	0.5396	0.5436
0.5038	0.5078	0.5118	0.5158	0.5198	0.5237	0.5277	0.5317	0.5357	0.5397	0.5437
0.5039	0.5079	0.5119	0.5159	0.5199	0.5238	0.5278	0.5318	0.5358	0.5398	0.5438
0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5200	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.5399	0.5439
0.5041	0.5081	0.5121	0.5161	0.5201	0.5240	0.5280	0.5320	0.5360	0.5400	0.5440
0.5042	0.5082	0.5122	0.5162	0.5202	0.5241	0.5281	0.5321	0.5361	0.5401	0.5441
0.5043	0.5083	0.5123	0.5163	0.5203	0.5242	0.5282	0.5322	0.5362	0.5402	0.5442
0.5044	0.5084	0.5124	0.5164	0.5204	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443
0.5045	0.5085	0.5125	0.5165	0.5205	0.5244	0.5284	0.5324	0.5364	0.5404	0.5444
0.5046	0.5086	0.5126	0.5166	0.5206	0.5245	0.5285	0.5325	0.5365	0.5405	0.5445
0.5047	0.5087	0.5127	0.5167	0.5207	0.5246	0.5286	0.5326	0.5366	0.5406	0.5446
0.5048	0.5088	0.5128	0.5168	0.5208	0.5247	0.5287	0.5327	0.5367	0.5407	0.5447
0.5049	0.5089	0.5129	0.5169	0.5209	0.5248	0.5288	0.5328	0.5368	0.5408	0.5448
0.5050	0.5090	0.5130	0.5170	0.5210	0.5249	0.5289	0.5329	0.5369	0.5409	0.5449
0.5051	0.5091	0.5131	0.5171	0.5211	0.5250	0.5290	0.5330	0.5370	0.5410	0.5450
0.5052	0.5092	0.5132	0.5172	0.5212	0.5251	0.5291	0.5331	0.5371	0.5411	0.5451
0.5053	0.5093	0.5133	0.5173	0.5213	0.5252	0.5292	0.5332	0.5372	0.5412	0.5452
0.5054	0.5094	0.5134	0.5174	0.5214	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453
0.5055	0.5095	0.5135	0.5175	0.5215	0.5254	0.5294	0.5334	0.5374	0.5414	0.5454
0.5056	0.5096	0.5136	0.5176	0.5216	0.5255	0.5295	0.5335	0.5375	0.5415	0.5455
0.5057	0.5097	0.5137	0.5177	0.5217	0.5256	0.5296	0.5336	0.5376	0.5416	0.5456
0.5058	0.5098	0.5138	0.5178	0.5218	0.5257	0.5297	0.5337	0.5377	0.5417	0.5457
0.5059	0.5099	0.5139	0.5179	0.5219	0.5258	0.5298	0.5338	0.5378	0.5418	0.5458
0.5060	0.5100	0.5140	0.5180	0.5220	0.5259	0.5299	0.5339	0.5379	0.5419	0.5459
0.5061	0.5101	0.5141	0.5181	0.5221	0.5260	0.5300	0.5340	0.5380	0.5420	0.5460
0.5062	0.5102	0.5142	0.5182	0.5222	0.5261	0.5301	0.5341	0.5381	0.5421	0.5461
0.5063	0.5103	0.5143	0.5183	0.5223	0.5262	0.5302	0.5342	0.5382	0.5422	0.5462
0.5064	0.5104	0.5144	0.5184	0.5224	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463
0.5065	0.5105	0.5145	0.5185	0.5225	0.5264	0.5304	0.5344	0.5384	0.5424	0.5464
0.5066	0.5106	0.5146	0.5186	0.5226	0.5265	0.5305	0.5345	0.5385	0.5425	0.5465
0.5067	0.5107	0.5147	0.5187	0.5227	0.5266	0.5306	0.5346	0.5386	0.5426	0.5466
0.5068	0.5108	0.5148	0.5188	0.5228	0.5267	0.5307	0.5347	0.5387	0.5427	0.5467
0.5069	0.5109	0.5149	0.5189	0.5229	0.5268	0.5308	0.5348	0.5388	0.5428	0.5468
0.5070	0.5110	0.5150	0.5190	0.5230	0.5269	0.5309	0.5349	0.5389	0.5429	0.5469
0.5071	0.5111	0.5151	0.5191	0.5231	0.5270	0.5310	0.5350	0.5390	0.5430	0.5470
0.5072	0.5112	0.5152	0.5192	0.5232	0.5271	0.5311	0.5351	0.5391	0.5431	0.5471
0.5073	0.5113	0.5153	0.5193	0.5233	0.5272	0.5312	0.5352	0.5392	0.5432	0.5472
0.5074	0.5114	0.5154	0.5194	0.5234	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473
0.5075	0.5115	0.5155	0.5195	0.5235	0.5274	0.5314	0.5354	0.5394	0.5434	0.5474
0.5076	0.5116	0.5156	0.5196	0.5236	0.5275	0.5315	0.5355	0.5395	0.5435	0.5475
0.5077	0.5117	0.5157	0.5197	0.5237	0.5276	0.5316	0.5356	0.5396	0.5436	0.5476
0.5078	0.5118	0.5158	0.5198	0.5238	0.5277	0.5317	0.5357	0.5397	0.5437	0.5477
0.5079	0.5119	0.5159	0.5199	0.5239	0.5278	0.5318	0.5358	0.5398	0.5438	0.5478
0.5080	0.5120	0.5160	0.5200	0.5240	0.5279	0.5319	0.5359	0.5399	0.5439	0.5479
0.5081	0.5121	0.5161	0.5201	0.5241	0.5280	0.5320	0.5360	0.5400	0.5440	0.5480
0.5082	0.5122	0.5162	0.5202	0.5242	0.5281	0.5321	0.5361	0.5401	0.5441	0.5481
0.5083	0.5123	0.5163	0.5203	0.5243	0.5282	0.5322	0.5362	0.5402	0.5442	0.5482
0.5084	0.5124	0.5164	0.5204	0.5244	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483
0.5085	0.5125	0.5165	0.5205	0.5245	0.5284	0.5324	0.5364	0.5404	0.5444	0.5484
0.5086	0.5126	0.5166	0.5206	0.5246	0.5285	0.5325	0.5365	0.5405	0.5445	0.5485
0.5087	0.5127	0.5167	0.5207	0.5247	0.5286	0.5326	0.5366	0.5406	0.5446	0.5486
0.5088	0.5128	0.5168	0.5208	0.5248	0.5287	0.5327	0.5367	0.5407	0.5447	0.5487
0.5089	0.5129	0.5169	0.5209	0.5249	0.5288	0.5328	0.5368	0.5408	0.5448	0.5488
0.5090	0.5130	0.5170	0.5210	0.5250	0.5289	0.5329	0.5369	0.5409	0.5449	0.5489
0.5091	0.5131	0.5171	0.5211	0.5251	0.5290	0.5330	0.5370	0.5410	0.5450	0.5490
0.5092	0.5132	0.5172	0.5212	0.5252	0.5291	0.5331	0.5371	0.5411	0.5451	0.5491
0.5093	0.5133	0.5173	0.5213	0.5253	0.5292	0.5332	0.5372	0.5412	0.5452	0.5492
0.5094	0.5134	0.5174	0.5214	0.5254	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493
0.5095	0.5135	0.5175	0.5215	0.5255	0.5294	0.5334	0.5374	0.5414	0.5454	0.5494
0.5096	0.5136	0.5176	0.5216	0.5256	0.5295	0.5335	0.5375	0.5415	0.5455	0.5495
0.5097	0.5137	0.5177	0.5217	0.5257	0.5296	0.5336	0.5376	0.5416	0.5456	0.5496
0.5098	0.5138	0.5178	0.5218	0.5258	0.5297	0.5337	0.5377	0.5417	0.5457	0.5497
0.5										

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a. **(1,5 puntos)**

(b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

(a) ¿El rango de A es 3?

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2a + a^2 - 0 - 0 - 0 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene una fila todo ceros (2^a) y dos columnas

iguales (2^a y 3^a). Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 2^a y la columna 2^a

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a = 2$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos su rango utilizando el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Cambio columna } 3^a \text{ por columna } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 0 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de A es 2}$$

Resumiendo: Si $a \neq 0$ el rango de A es 3 y si $a = 0$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

(b) Hay que resolver el sistema:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la inversa de A y la solución es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y calculamos la solución.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1-1 \\ 2-2-1 \\ -1+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = -1, y = -1, z = 2$.

2.- Sean los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (2, 0, 3)$ y la recta r dada por el punto $C = (1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 0)$. Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo ABP es 2.

(2,5 puntos)

Obtenemos las ecuaciones de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} C(1, 0, 2) \in r \\ \vec{v} = (-1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(1 - \lambda, 0, 2)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, 3) - (2, 0, 1) = (0, 0, 2) \\ \overrightarrow{AP} = (1 - \lambda, 0, 2) - (2, 0, 1) = (-1 - \lambda, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 - \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1 - \lambda)j$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (0, -2 - 2\lambda, 0)$$

$$\text{Área } ABP = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2 - 2\lambda)^2}}{2} = \begin{cases} = \frac{-2 - 2\lambda}{2} = -1 - \lambda \\ = \frac{2 + 2\lambda}{2} = 1 + \lambda \end{cases}$$

Como nos piden que el área sea 2.

$$\text{Área } ABP = 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 - \lambda = 2 \Rightarrow -\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -3 \rightarrow P(1 - (-3), 0, 2) \Rightarrow \boxed{P(4, 0, 2)} \\ 1 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \rightarrow P(1 - 1, 0, 2) \Rightarrow \boxed{P(0, 0, 2)} \end{cases}$$

Existen dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido: $P(0, 0, 2)$ y $P(4, 0, 2)$

3.- Sea la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1 punto)**
 (b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de $f(x)$ y justifique si en el punto $x = 0$ la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo. **(1 punto)**
 (c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2 - x^2$ y calcule su área. **(1,5 puntos)**

(a) Para que la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ sea continua debe serlo en $x = 0$.

- Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases} = 0$
- Existe $f(0) = 0$
- Son iguales $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

Se cumplen las tres condiciones, por lo que la función es continua.

La derivada en $\mathbb{R} - \{0\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

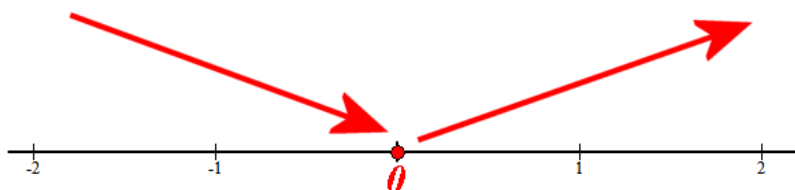
Por lo que las derivadas laterales en $x = 0$ son $\begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$ y no existe la derivada en $x = 0$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) Utilizamos la derivada de la función $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Esta derivada es negativa en $(-\infty, 0)$ y por tanto la función decrece.

Esta derivada es positiva en $(0, +\infty)$ y por tanto la función crece.



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

(c) Averiguamos sus puntos de corte.

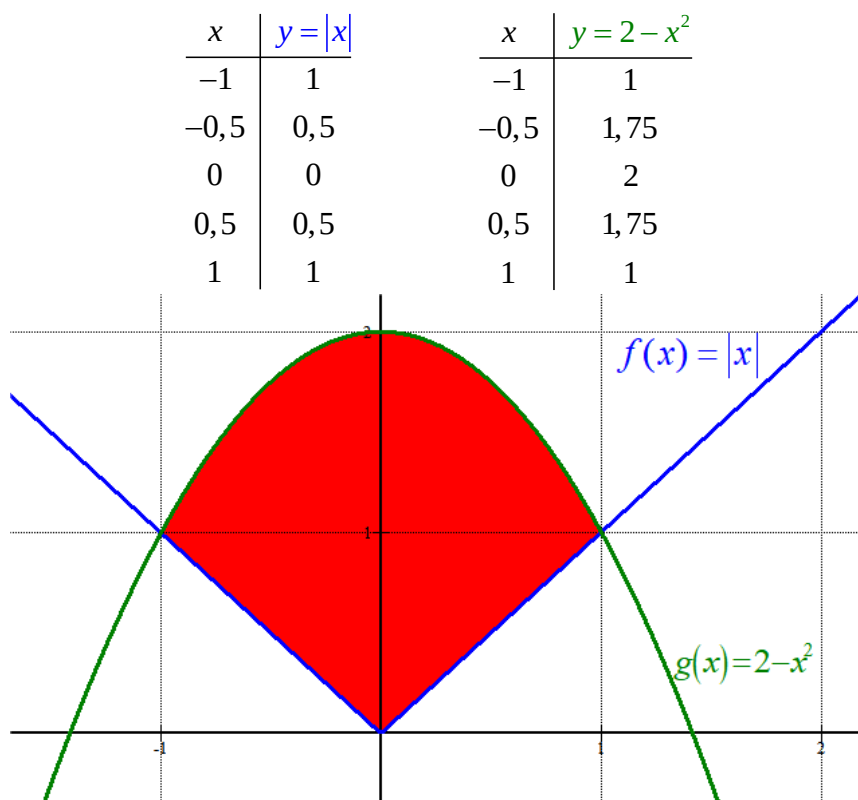
$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x| = 2 - x^2$$

Hay dos posibilidades que estudiamos por separado.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x > 0 \rightarrow x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \begin{cases} = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ No válido} \\ = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \\ \text{Si } x < 0 \rightarrow -x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \begin{cases} = \frac{1-3}{2} = -1 \\ = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ No válido} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son en $x = -1$ y $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores de ambas funciones en el intervalo $(-1,1)$ y dibujamos el recinto.



Este recinto es simétrico por lo que basta calcular el área del recinto entre $x = 0$ y $x = 1$ y luego multiplicar lo obtenido por 2.

$$\int_0^1 2 - x^2 - x dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[2 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right] - \left[0 - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{7}{6}$$

El área del recinto es $2 \cdot \frac{7}{6} = \boxed{\frac{7}{3} = 2,33 u^2}$

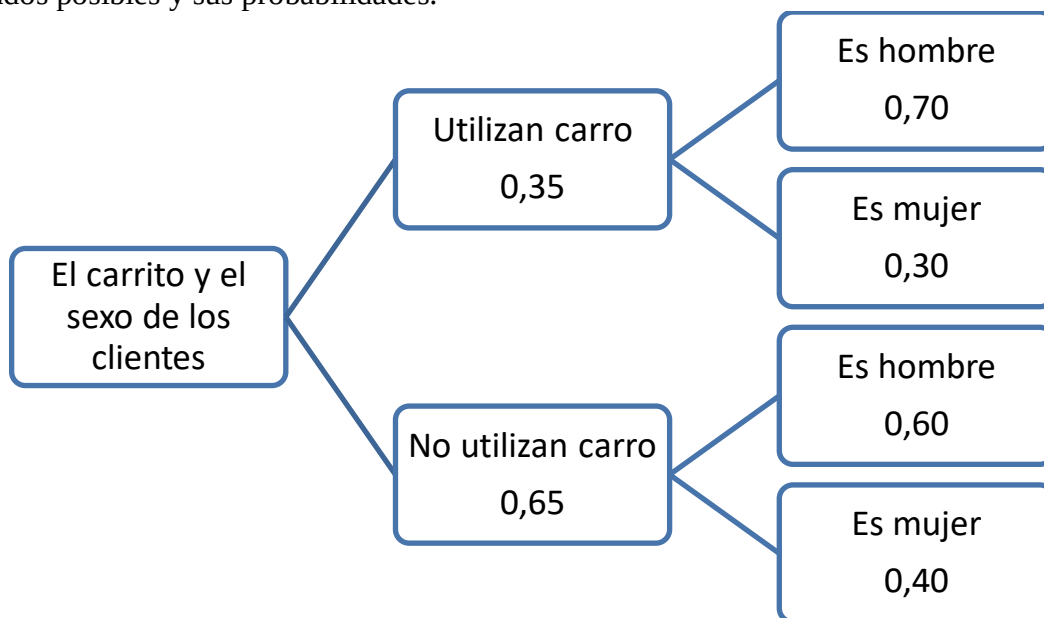
Este valor del área concuerda con lo dibujado.

4.- En un centro comercial el 35% de los clientes utiliza carro. El 70% de los que utilizan carro son hombres y el 40% de los que no utilizan carro son mujeres.

(a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer. **(0,75 puntos)**

(b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro. **(0,75 puntos)**

Este es un experimento compuesto, con el diagrama de árbol tendremos más claro los resultados posibles y sus probabilidades.



Respondemos a las preguntas.

(a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Sea mujer}) =$$

$$= P(\text{Utilice carro})P(\text{Sea mujer} / \text{Utiliza carro}) + \\ + P(\text{No utilice carro})P(\text{Sea mujer} / \text{No utiliza carro}) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,30 + 0,65 \cdot 0,40 = 0,105 + 0,260 = \boxed{0,365}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Utilice carro} / \text{Ha sido hombre}) = \frac{P(\text{Utilice carro y sea hombre})}{P(\text{Sea hombre})} =$$

$$= \frac{P(\text{Utilice carro})P(\text{Sea hombre} / \text{Utiliza carro})}{1 - P(\text{Sea mujer})} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{1 - 0,365} = \frac{49}{127} = \boxed{0,3858}$$

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2AB$.

(1 punto)

(b) Halle la inversa de la matriz A.

(1,5 puntos)

(a)

$$X = A^2 + B^2 - 2AB$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 11 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 12 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Comprobamos que el determinante de A es no nulo y por tanto la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 2 = 2 \neq 0$$

La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.- Sean las rectas $r = \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{4}$ y $s = \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$.

(a) Estudie la posición relativa de dichas rectas.

(1 punto)

(b) Halle la distancia entre ambas rectas.

(1'5 puntos)

(a) Obtenemos los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas.

$$r = \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(3,5,2) \\ \vec{v}_r = (3,-1,4) \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z+2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow 2y+2z+4+2y-z=4 \Rightarrow 4y+z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{z=-4y} \Rightarrow \underline{x=y-4y+2=2-3y} \Rightarrow s = \begin{cases} x=2-3y \\ y=y \\ z=-4y \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} P_s(2,0,0) \\ \vec{v}_s = (-3,1,-4) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas son proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (3,-1,4) \\ \vec{v}_s = (-3,1,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} = \frac{4}{-4}$$

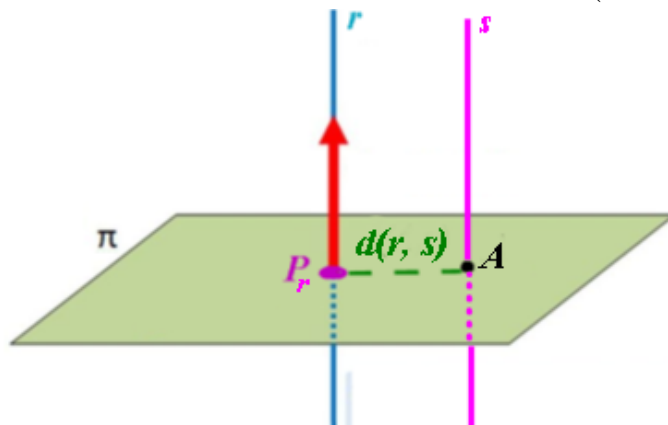
Las rectas son paralelas o coincidentes.

¿El punto $P_r(3,5,2)$ pertenece a la recta s ?

$$s = \begin{cases} P_r(3,5,2) \\ x=2-3y \\ y=y \\ z=-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=2-3y \\ 5=y \\ 2=-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=-3y \\ 5=y \\ 2=-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{3}=y \\ 5=y \\ \frac{2}{-4}=y \end{cases} \text{ Salen valores diferentes.}$$

El punto $P_r(3,5,2)$ no pertenece a la recta s y ambas rectas son paralelas.

(b) La distancia de la recta r a la recta s es la distancia del punto $P_r(3,5,2)$ a la recta s .



Hallamos el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto P_r .

El vector normal al plano es el director de la recta $\vec{v}_s = (-3, 1, -4)$ por lo que el plano tiene ecuación $-3x + y - 4z + D = 0$. Como contiene el punto $P_r(3, 5, 2)$ entonces $-9 + 5 - 8 + D = 0 \Rightarrow D = 12$.

El plano tiene ecuación $\pi: -3x + y - 4z + 12 = 0$.

Hallamos el punto A de corte entre recta s y plano π .

$$s = \begin{cases} x = 2 - 3y \\ y = y \\ z = -4y \end{cases} \Rightarrow -3(2 - 3y) + y - 4(-4y) + 12 = 0 \Rightarrow -6 + 9y + y + 16y + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: -3x + y - 4z + 12 = 0$$

$$26y = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{26} = \frac{-3}{13} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{9}{13} = \frac{35}{13} \\ y = \frac{-3}{13} \\ z = \frac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{35}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

La distancia entre las rectas es la distancia del punto P_r a la recta s y, a su vez, es la distancia del punto A al punto P_r . Esta distancia se calcula con el módulo del vector que une dichos puntos.

$$d(r, s) = d(A, P_r) = |\overline{AP_r}| = \left| (3, 5, 2) - \left(\frac{35}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{12}{13}\right) \right| = \left| \left(\frac{4}{13}, \frac{68}{13}, \frac{14}{13}\right) \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{68}{13}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{4836}}{13} = 5,34 u}$$

3.- Sea la función $f(x) = x \ln(x)$ para $x > 0$.

- (a) ¿Se puede definir $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua por la derecha de $x = 0$? **(1 punto)**
 (b) Estudie los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ para $x > 0$. **(0'5 puntos)**
 (c) Halle, si existe, la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. **(0'5 puntos)**
 (d) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x \ln(x)$. **(1'5 puntos)**

(a) Calculemos el límite de la función cuando x tiende a 0 por la derecha.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \cdot (-\infty) = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \boxed{0} \end{aligned}$$

Si definimos el valor de la función como $f(0) = 0$ es continua por la derecha de $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Usamos la derivada.

$$\begin{aligned} f(x) = x \ln(x) &\Rightarrow f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \boxed{x = e^{-1}} \end{aligned}$$

Sustituimos este valor crítico en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 + \ln x &\Rightarrow f''(x) = 0 + \frac{1}{x} \\ f''(e^{-1}) &= \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \end{aligned}$$

La derivada segunda es positiva para $x = e^{-1}$ la función tiene un mínimo relativo en $x = e^{-1}$.

$$(c) \left. \begin{aligned} f(1) &= \ln(1) = 0 \\ f'(1) &= 1 + \ln 1 = 1 \\ y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

(d) Usamos el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x) dx &= \int x \ln(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + K} \end{aligned}$$

4.- Se estima que en una partida de bombillas el 10% son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

- (a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa. (0'5 puntos)
 (b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas. (0'5 puntos)
 (c) la media y la desviación típica de la distribución. (0'5 puntos)

X = Número de bombillas defectuosas de un lote de 6.

X es una distribución binomial donde se repite de forma independiente 6 veces el experimento y la probabilidad de éxito es 0,1. Llamamos éxito a “ser defectuosa la bombilla”. $X = B(6, 0.1)$

Podemos utilizar en el cálculo de probabilidades la fórmula:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0,1^k \cdot 0,9^{6-k} \quad \text{Siendo } 0 \leq k \leq 6$$

(a) $P(\text{Ninguna defectuosa}) = P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^6 = 0,9^6 = \boxed{0,5314}$

(b) $P(\text{Más de dos defectuosas}) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$

$$= \binom{6}{3} 0,1^3 \cdot 0,9^3 + \binom{6}{4} 0,1^4 \cdot 0,9^2 + \binom{6}{5} 0,1^5 \cdot 0,9^1 + \binom{6}{6} 0,1^6 \cdot 0,9^0 =$$

$$= \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot \cancel{2}} 0,1^3 \cdot 0,9^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{4 \cdot \cancel{3} \cdot 2} 0,1^4 \cdot 0,9^2 + \frac{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2}{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} 0,1^5 \cdot 0,9 + \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2}{6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} 0,1^6 =$$

$$= 20 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^3 + 15 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^2 + 6 \cdot 0,1^5 \cdot 0,9 + 0,1^6 = \boxed{0,01585}$$

- (c) Es una variable de distribución binomial $X = B(6, 0.1)$ y sus parámetros $n = 6$ y $p = 0.1$. También $q = 0.9$.

La media es $\mu = n \cdot p = 6 \cdot 0.1 = \boxed{0.6}$

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = \boxed{0.7348}$

EBAU Ordinaria 2018



**Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018**

Asignatura: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. (a) Discuta, en función del parámetro λ el sistema lineal de ecuaciones **(2 puntos)**

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- (b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$. **(0,5 puntos)**

2. Sean el plano $\Pi: y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

- (a) Calcule la intersección del plano y la recta. **(1 punto)**

- (b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1,0,0)$, es paralela al plano Π y es perpendicular a la recta r . **(1,5 puntos)**

3. (a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función

$f(x) = x^3 + x - 3$ tiene una raíz real positiva. **(1,5 puntos)**

- (b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$

(2 puntos)

4. En una red social el 55% lee noticias deportivas, el 65% lee noticias de información, y el 10% no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:

- (a) calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información. **(0'5 puntos)**

- (b) sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes. **(0'5 puntos)**

- (c) sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información. **(0'5 puntos)**



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$.

(1 punto)

(b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

(1,5 puntos)

2. Sea el punto $A = (1,0,1)$ y la recta r dada por el punto $B = (-1,0,2)$ y el vector $\vec{v} = (-1,1,0)$.

(a) Calcule la distancia del punto A a la recta r .

(1,5 puntos)

(b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo $O = (0,0,0)$.

(1 punto)

3. (a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función

(1,5 puntos)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

(b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior.

(0,5 puntos)

(c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

(1,5 puntos)

4. A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule: (a) la nota de corte para los admitidos.

(0'75 puntos)

(b) la probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor que 9.

(0'75 puntos)

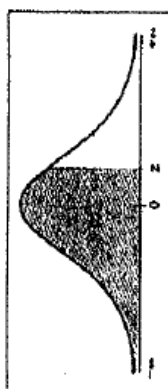


Tabla de distribución

normal $N(0,1)$ $P(Z \leq z)$

0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	0.5399	0.5439
0.5008	0.5048	0.5088	0.5128	0.5168	0.5207	0.5247	0.5287	0.5327	0.5367	0.5407	0.5447
0.5017	0.5057	0.5097	0.5137	0.5177	0.5217	0.5257	0.5297	0.5337	0.5377	0.5417	0.5457
0.5026	0.5066	0.5106	0.5146	0.5186	0.5226	0.5266	0.5306	0.5346	0.5386	0.5426	0.5466
0.5036	0.5076	0.5116	0.5156	0.5196	0.5236	0.5276	0.5316	0.5356	0.5396	0.5436	0.5476
0.5045	0.5085	0.5125	0.5165	0.5205	0.5245	0.5285	0.5325	0.5365	0.5405	0.5445	0.5485
0.5054	0.5094	0.5134	0.5174	0.5214	0.5254	0.5294	0.5334	0.5374	0.5414	0.5454	0.5494
0.5064	0.5104	0.5144	0.5184	0.5224	0.5264	0.5304	0.5344	0.5384	0.5424	0.5464	0.5504
0.5073	0.5113	0.5153	0.5193	0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513
0.5083	0.5123	0.5163	0.5203	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523
0.5093	0.5133	0.5173	0.5213	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533
0.5103	0.5143	0.5183	0.5223	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543
0.5113	0.5153	0.5193	0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553
0.5123	0.5163	0.5203	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563
0.5133	0.5173	0.5213	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573
0.5143	0.5183	0.5223	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583
0.5153	0.5193	0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593
0.5163	0.5203	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603
0.5173	0.5213	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613
0.5183	0.5223	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623
0.5193	0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633
0.5203	0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643
0.5213	0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653
0.5223	0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663
0.5233	0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673
0.5243	0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683
0.5253	0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693
0.5263	0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703
0.5273	0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713
0.5283	0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723
0.5293	0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733
0.5303	0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743
0.5313	0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753
0.5323	0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763
0.5333	0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773
0.5343	0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783
0.5353	0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793
0.5363	0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803
0.5373	0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813
0.5383	0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823
0.5393	0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833
0.5403	0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843
0.5413	0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853
0.5423	0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863
0.5433	0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873
0.5443	0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883
0.5453	0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893
0.5463	0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903
0.5473	0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913
0.5483	0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923
0.5493	0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933
0.5503	0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943
0.5513	0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953
0.5523	0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963
0.5533	0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973
0.5543	0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983
0.5553	0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993
0.5563	0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003
0.5573	0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013
0.5583	0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023
0.5593	0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033
0.5603	0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043
0.5613	0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053
0.5623	0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063
0.5633	0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073
0.5643	0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083
0.5653	0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093
0.5663	0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103
0.5673	0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113
0.5683	0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123
0.5693	0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133
0.5703	0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103	0.6143
0.5713	0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113	0.6153
0.5723	0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123	0.6163
0.5733	0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133	0.6173
0.5743	0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103	0.6143	0.6183
0.5753	0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113	0.6153	0.6193
0.5763	0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123	0.6163	0.6203
0.5773	0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133	0.6173	0.6213
0.5783	0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103	0.6143	0.6183	0.6223
0.5793	0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113	0.6153	0.6193	0.6233
0.5803	0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123	0.6163	0.6203	0.6243
0.5813	0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133	0.6173	0.6213	0.6253
0.5823	0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103	0.6143	0.6183	0.6223	0.6263
0.5833	0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113	0.6153	0.6193	0.6233	0.6273
0.5843	0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123	0.6163	0.6203	0.6243	0.6283
0.5853	0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133	0.6173	0.6213	0.6253	0.6293
0.5863	0.5903	0.5943	0.5983	0.6023	0.6063	0.6103	0.6143	0.6183	0.6223	0.6263	0.6303
0.5873	0.5913	0.5953	0.5993	0.6033	0.6073	0.6113	0.6153	0.6193	0.6233	0.6273	0.6313
0.5883	0.5923	0.5963	0.6003	0.6043	0.6083	0.6123	0.6163	0.6203	0.6243	0.6283	0.6323
0.5893	0.5933	0.5973	0.6013	0.6053	0.6093	0.6133	0.6173	0.6213	0.6253	0.6293	0.6333
0.											

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. (a) Discuta, en función del parámetro λ el sistema lineal de ecuaciones (2 puntos)
- $$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$
- (b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$. (0,5 puntos)

a) Tomamos la matriz de coeficientes y estudiamos su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 3?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 - \lambda + 1 - 2\lambda^2 - 1 = -2\lambda^2 + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Diferenciamos tres casos distintos.

CASO 1. $\lambda \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El **sistema es compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Seguimos con el estudio del rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 pues la 3ª fila es todo ceros. El rango de A/B también es 2 pues la 3ª fila es todo ceros. El número de incógnitas es 3.

Rango de A = Rango de A/B = $2 < 3$ = Número de incógnitas $\rightarrow$ el **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $\lambda = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Seguimos con el estudio del rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 0 \quad 3 \\ 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 pues la 3ª fila es todo ceros.

El rango de A/B es 3 pues la 3ª fila tiene un elemento no nulo.

Los rangos de A y A/B no son iguales $\rightarrow$ el sistema **es incompatible**. No tiene solución.

Resumiendo: Si $\lambda \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado (solución única). Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Y si $\lambda = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).

(b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Sustituimos el valor de $\lambda = 1$ y resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ es equivalente a } \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x = 1 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y - z + 2y - z = 0 \Rightarrow y - 2z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1 + 2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - (-1 + 2z) - z \Rightarrow x = 1 + 1 - 2z - z \Rightarrow \boxed{x = 2 - 3z}$$

La solución es $x = 2 - 3t$; $y = -1 + 2t$; $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

2. Sean el plano $\Pi: y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

(a) Calcule la intersección del plano y la recta.

(1 punto)

(b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1,0,0)$, es paralela al plano Π y es perpendicular a la recta r .

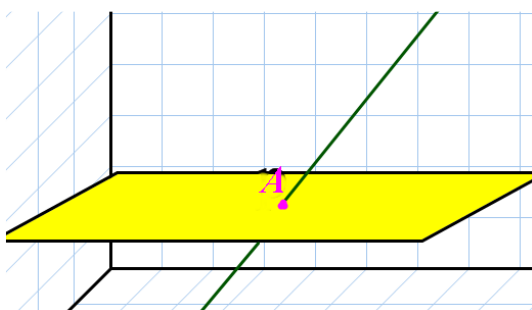
(1,5 puntos)

(a) Pasamos las ecuaciones de la recta a paramétricas.

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1,1,1) \\ \vec{v}_r = (1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

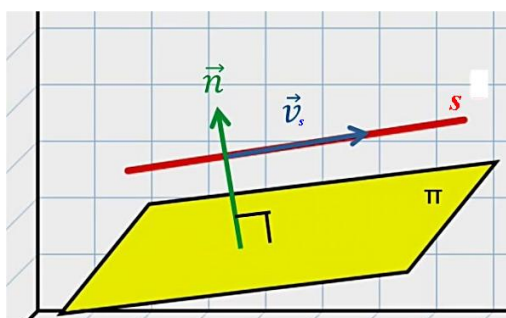
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \Pi: y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - 2\lambda + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 1 - 4 = -3 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1, -3, 3)$$



Plano y recta se cortan en el punto $A(1, -3, 3)$.

(b) Al ser la recta s paralela al plano $\Pi: y + z = 0$ el vector director de la recta s es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (0,1,1)$. Por otro lado es perpendicular al vector director de la recta $r \rightarrow \vec{v}_r = (1,-2,1)$, por lo que el producto vectorial de ambos vectores es un vector director de la recta s .



$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{n} = (1,-2,1) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + k - j - i = -3i - j + k = (-3, -1, 1)$$

Como la recta pasa por el punto $P = (1,0,0)$ y su vector director es $\vec{v}_s = (-3, -1, 1)$ su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,0) \in s \\ \vec{v}_s = (-3, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

3. (a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x) = x^3 + x - 3$ tiene una raíz real positiva. **(1,5 puntos)**

(b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$ **(2 puntos)**

(a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo **[a, b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Buscamos un intervalo donde la función $f(x) = x^3 + x - 3$ cambie de signo.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 0 - 3 = -3 < 0 \\ f(2) = 2^3 + 2 - 3 = 7 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Podemos tomar el intervalo } [0, 2]. \text{ En dicho intervalo la función}$$

cambia de signo y es continua pues es una función polinómica.

Aplicando el teorema de Bolzano existe un valor $c \in (0, 2)$ donde $f(c) = 0$. La función tiene una raíz real positiva ($c > 0$).

(b) Calculamos la primitiva usando integración por partes.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= (x+1)(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} - 2e^{-x} + K$$

Como además debe cumplir $F(0) = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = -xe^{-x} - 2e^{-x} + K \\ F(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0e^{-0} - 2e^{-0} + K = 0 \Rightarrow -2 + K = 0 \Rightarrow K = 2$$

La función buscada es $F(x) = -xe^{-x} - 2e^{-x} + 2$.

4. En una red social el 55% lee noticias deportivas, el 65% lee noticias de información, y el 10% no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:
- (a) calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información. **(0'5 puntos)**
- (b) sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes. **(0'5 puntos)**
- (c) sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información. **(0'5 puntos)**

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar las intersecciones de ambos sucesos y sus contrarios.

	Lee noticias de información	No lee noticias de información	
Lee noticias deportivas			55
No lee noticias deportivas		10	
	65		100

Completamos la tabla.

	Lee noticias de información	No lee noticias de información	
Lee noticias deportivas	30	25	55
No lee noticias deportivas	35	10	45
	65	35	100

Respondemos a las preguntas planteadas.

$$(a) \quad P(\text{Lee noticias deportivas o de información}) = \frac{30 + 35 + 25}{100} = \frac{90}{100} = \boxed{0,9}$$

$$(b) \quad P(\text{Lee noticias deportivas} / \text{Lee noticias de información}) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13} = \boxed{0,462}$$

$$(c) \quad P(\text{No lee noticias de información} / \text{Lee noticias deportivas}) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11} = \boxed{0,455}$$

OPCIÓN B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$.

(1 punto)

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

(1,5 puntos)

a)

$$C = -3A + B^2 \Rightarrow C = -3 \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -1+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - 0 + 8 - 8 = -4 \neq 0$ Existe la inversa de A.

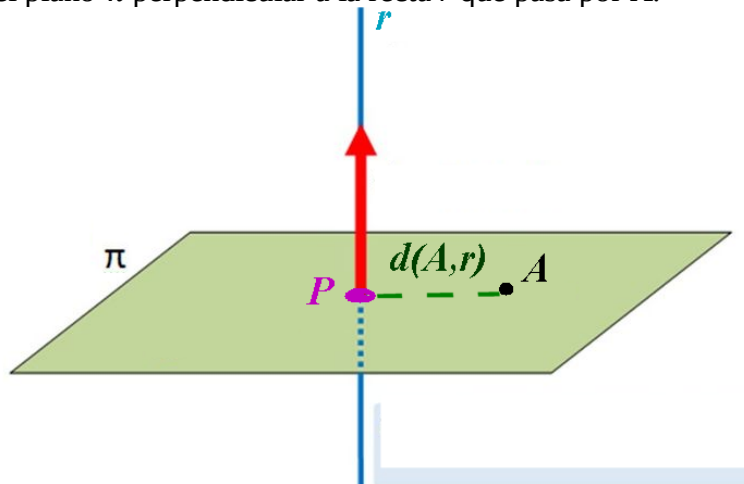
$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2+4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & -2+4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Sea el punto $A = (1,0,1)$ y la recta r dada por el punto $B = (-1,0,2)$ y el vector $\vec{v} = (-1,1,0)$. (a) Calcule la distancia del punto A a la recta r . **(1,5 puntos)**
 (b) Calcule el área del triángulo de vértices A , B y O siendo $O = (0,0,0)$. **(1 punto)**

(a) Vamos a hallar el plano π perpendicular a la recta r que pasa por A .



El vector normal al plano es el director de la recta $\vec{v} = (-1,1,0)$ por lo que el plano tiene ecuación $-x + y + D = 0$ y como contiene el punto $A(1,0,1)$ entonces $-1 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 1$. El plano tiene ecuación $\pi: -x + y + 1 = 0$.

Hallamos el punto P de corte entre recta r y plano π .

$$r: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = 0 - 1 = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(0, -1, 2)$$

La distancia del punto A a la recta es la distancia del punto A al punto P .

$$d(A, r) = d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = |(0, -1, 2) - (1, 0, 1)| = |(-1, -1, 1)| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} u$$

- (b) El área del triángulo de vértices A , B y O es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ que definen el triángulo.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (1, 0, 1) \\ \overrightarrow{OB} &= (-1, 0, 2) - (0, 0, 0) = (-1, 0, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -j - 2j = -3j = (0, -3, 0)$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{|(0, -3, 0)|}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} u^2}$$

3. (a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función **(1,5 puntos)**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

(b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior. **(0,5 puntos)**

(c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$. **(1,5 puntos)**

(a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Asíntota vertical. $x = a$.

$$x = -1 \text{ es asíntota pues } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$x = 1 \text{ es asíntota pues } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

Máximos y mínimos.

Derivo la función e igualo a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

- En $(-\infty, -1)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-2(-2)}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{4}{9} > 0$. La función

crece en $(-\infty, -1)$.

- En $(-1, 0)$ tomo $x = -0,5$ y la derivada vale $f'(-0,5) = \frac{-2(-0,5)}{((-0,5)^2 - 1)^2} = \frac{1}{0,75^2} > 0$. La

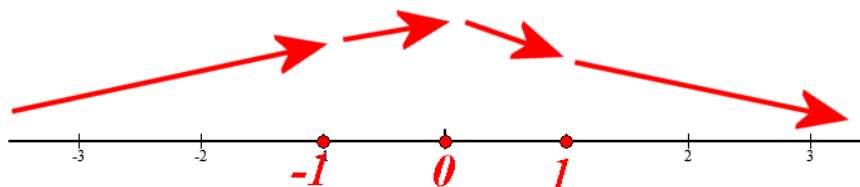
función crece en $(-1, 0)$.

- En $(0, 1)$ tomo $x = 0,5$ y la derivada vale $f'(0,5) = \frac{-2(0,5)}{((0,5)^2 - 1)^2} = -\frac{1}{0,75^2} < 0$. La

función decrece en $(0, 1)$.

- En $(1, +\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2(2)}{(2^2 - 1)^2} = -\frac{4}{9} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el siguiente esquema.

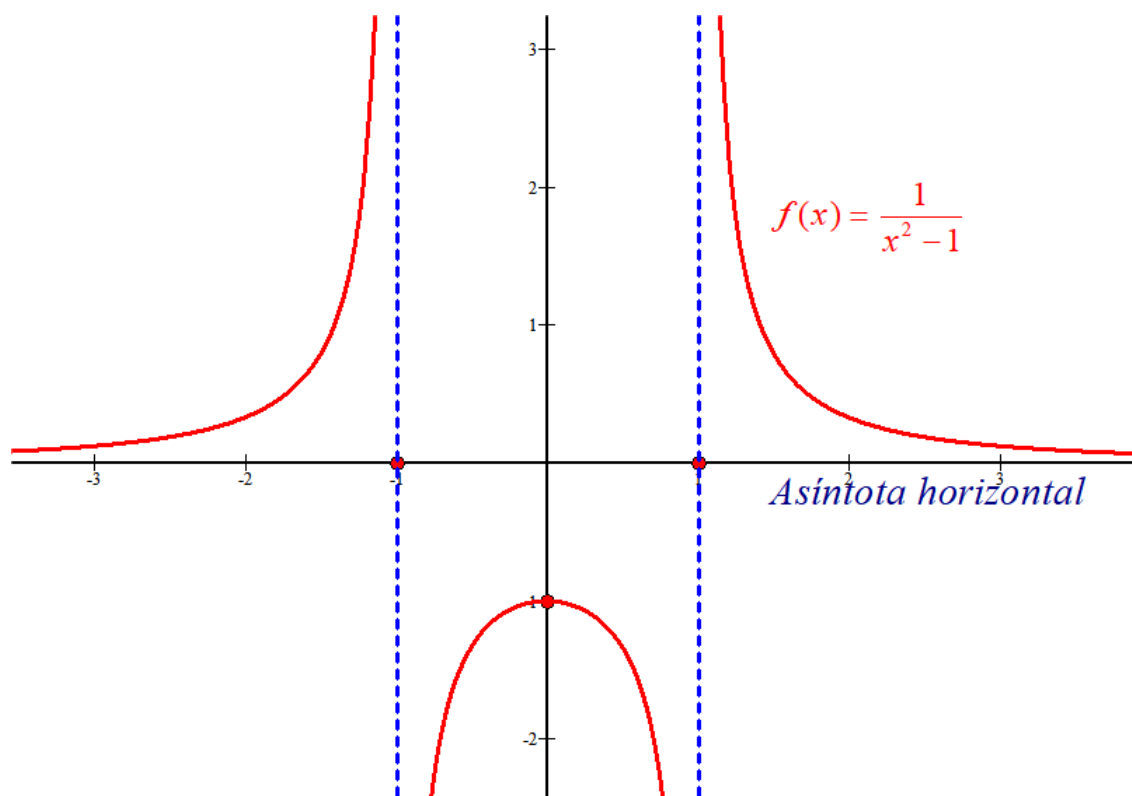


La función presenta un máximo en $x = 0$. No tiene mínimos.

Como $f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1$ el punto máximo es $(0, -1)$

(b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la función.

x	$y = \frac{1}{x^2 - 1}$
-3	0,125
-2	0,33
-0,5	-1,33
0	-1 <i>máximo</i>
0,5	-1,33
2	0,33
3	0,125



(c) Calculamos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \dots$$

Descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow 1 = A(-1+1) + B(-1-1) \rightarrow 1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \rightarrow 1 = A(1+1) + B(1-1) \rightarrow 1 = 2A \rightarrow A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

$$\dots = \int \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1} dx = \int \frac{1/2}{x-1} dx + \int \frac{-1/2}{x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + K$.

- 4.** A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule: (a) la nota de corte para los admitidos. **(0'75 puntos)**
 (b) la probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor que 9. **(0'75 puntos)**

- (a) X = Calificación obtenida en una oposición. $X = N(6.5, 2)$

Como solo hay 300 plazas para 2500 aspirantes esto implica que los aprobados deben ser $300/2500 = 0,12$.

Solo el 12 % de los aspirantes deben aprobar.

Buscamos el valor de "a" tal que $P(X \geq a) = 0,12$.

$$\begin{aligned} P(X \geq a) = 0,12 &\Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X - 6,5}{2} \geq \frac{a - 6,5}{2}\right) = 0,12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a - 6,5}{2}\right) = 0,12 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 6,5}{2}\right) = 0,12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 6,5}{2}\right) = 0,88 \Rightarrow \{Buscamos en la tabla de N(0, 1)\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a - 6,5}{2} = 1,175 \Rightarrow a - 6,5 = 2,35 \Rightarrow \boxed{a = 8,85} \end{aligned}$$

La nota de corte para los admitidos debe ser de 8,85.

- (b) Nos piden calcular $P(X \geq 9)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X - 6,5}{2} \geq \frac{9 - 6,5}{2}\right) = P(Z \geq 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = \\ &= 1 - 0,8944 = \boxed{0,1056} \end{aligned}$$



EBAU Extraordinaria 2017
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2016-2017

Asignatura: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- (a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

(b) Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B. (0,5 puntos)

(c) Calcule la matriz inversa de A. (1,5 puntos)

2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

(a) Obtenga un vector director de la recta s. (0,5 puntos)

(b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a r y es paralelo a s. (1 punto)(c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a r y es perpendicular a s. (1 punto)

3.- (a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange. (0,75 puntos)

(b) Aplicando a la función $f(x) = 1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $1 < a < b$ se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$. (1,25 puntos)4.- Calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - e^{-x} + 2x \cos(x^2)$$

que cumpla $F(0) = 0$. (2 puntos)

5.- En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores. (1 punto)



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1.- Considere el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x & - & z = 1 \\ ax + by + cz & = & 1 \end{array} \right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

- (a) Para que el sistema sea compatible determinado. (0,75 puntos)
 (b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)
 (c) Para que el sistema sea incompatible. (0,75 puntos)

2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos A (1, 2, 1), B = (-2, -1, -3), C = (0, 1, -1) y D = (0, 3, -1), y sea r la recta que pasa por A y B.

- (a) Calcule ecuaciones paramétricas de r. (1 punto)
 (b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P. (1,5 puntos)

3.- Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} \quad (2 \text{ puntos})$$

4.- (a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo cerrado [0,2]. (0,5 puntos)(b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$. (1,5 puntos)5.- El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer. (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- (a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

(b) Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B. (0,5 puntos)

(c) Calcule la matriz inversa de A. (1,5 puntos)

(a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 + 2 - 0 - 0 = 3$$

(b) Aplicamos las propiedades de los determinantes. La matriz A^4 es una matriz 3×3 y se cumple

$$\text{que } \left| \frac{1}{3} A^4 \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A^4|.$$

$$|B| = \left| \frac{1}{3} A^4 \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A^4| = \frac{1}{3^3} |A|^4 = \frac{1}{3^3} 3^4 = \boxed{3}$$

(c) $|A| = 3 \neq 0$. La matriz A tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

- (a) Obtenga un vector director de la recta s . (0,5 puntos)
 (b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a r y es paralelo a s . (1 punto)
 (c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a r y es perpendicular a s . (1 punto)

- (a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s .

$$s: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \vec{v}_s=(-1,1,0) \end{cases}$$

Un vector director de la recta s es $\vec{v}_s=(-1,1,0)$

- (b) Obtenemos un punto y un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{v}_r=(0,0,1) \end{cases}$$

El plano que contiene la recta r tiene como vector director el vector director de r $\vec{v}_r=(0,0,1)$ y como es paralelo a la recta s también tiene como vector director el vector $\vec{v}_s=(-1,1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,0,0) \in \Pi_1 \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (0,0,1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y-x=0 \Rightarrow \boxed{\Pi_1 \equiv x+y=0}$$

- (c) El plano perpendicular a s tiene como vector normal el vector director de la recta s $\vec{v}_s=(-1,1,0)$. Y como contiene a la recta r debe contener el punto $P_r(0,0,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,0,0) \in \Pi_2 \\ \vec{n} = \vec{v}_s = (-1,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(0,0,0) \in \Pi_2 \\ \Pi_2 \equiv -x+y+D=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0+0+D=0 \Rightarrow D=0$$

$$\boxed{\Pi_2 \equiv -x+y=0}$$

3.- (a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

(0,75 puntos)

(b) Aplicando a la función $f(x) = 1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $1 < a < b$ se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$.

(1,25 puntos)

(a) Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$,

tal que: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, con $c \in (a, b)$.

(b) La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es continua en el intervalo $[a, b]$ con la condición de que $1 < a < b$ y por tanto en el intervalo no está el valor 0.

Es derivable en el intervalo (a, b) y su derivada es $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Por lo que existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Esto implica que:

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) &\Rightarrow \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{b - a} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2b^2}}{b - a} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{(b - a)a^2b^2} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-(b^2 - a^2)}{(b - a)a^2b^2} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)a^2b^2} = -\frac{2}{c^3} \Rightarrow \frac{(b + a)}{a^2b^2} = \frac{2}{c^3} \end{aligned}$$

Como además $c \in (a, b)$ y $1 < a < b \rightarrow 1 < a < c < b$.

Por lo que $c > 1 \Rightarrow c^3 > 1 \Rightarrow \frac{1}{c^3} < \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{2}{c^3} < \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{2}{c^3} < 2$

Uniendo estas dos expresiones tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(b + a)}{a^2b^2} &= \frac{2}{c^3} \\ \frac{2}{c^3} &< 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{(b + a)}{a^2b^2} < 2 \Rightarrow \{ \text{Como } a^2b^2 > 0 \} \Rightarrow \boxed{b + a < 2a^2b^2}$$

4.- Calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - e^{-x} + 2x \cos(x^2)$$

que cumpla $F(0) = 0$.

(2 puntos)

Hallamos la integral de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} - e^{-x} + 2x \cos(x^2) dx =$$

$$= \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int e^{-x} dx + \int 2x \cos(x^2) dx =$$

$$= \ln(x^2 + 1) + e^{-x} + \dots$$

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = x^2 \rightarrow dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right\} = \int \cancel{2x} \cos t \frac{dt}{\cancel{2x}} = \int \cos t dt = -\text{sen} t =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t = x^2 \end{array} \right\} = -\text{sen}(x^2)$$

$$\dots = \ln(x^2 + 1) + e^{-x} - \text{sen}(x^2) + K$$

Aplicamos la condición $F(0) = 0$ para determinar el valor de K .

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \ln(x^2 + 1) + e^{-x} - \text{sen}(x^2) + K \\ F(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(0^2 + 1) + e^{-0} - \text{sen}(0^2) + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1$$

La primitiva buscada es $F(x) = \ln(x^2 + 1) + e^{-x} - \text{sen}(x^2) - 1$

5.- En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores. **(1 punto)**

Hacemos una tabla de contingencia para completar y aclarar los datos proporcionados en el problema.

	Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3	TOTALES
Nº páginas con errores	15	8		
Nº páginas sin errores			80% de 50 = 40	
TOTALES	100	80	50	

Completamos la tabla.

	Capítulo 1	Capítulo 2	Capítulo 3	TOTALES
Nº páginas con errores	15	8	10	33
Nº páginas sin errores	85	72	40	197
TOTALES	100	80	50	230

Una vez obtenida toda la información sobre el problema, respondemos a la pregunta planteada aplicando la regla de Laplace.

$$P(\text{Una página no sea del capítulo 2 y sin errores}) = \frac{N^{\circ} \text{ casos favorables}}{N^{\circ} \text{ casos posibles}} =$$

$$= \frac{85 + 40}{230} = \frac{25}{46} = 0,543$$

OPCIÓN B

1.- Considere el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x & - & z = 1 \\ ax + by + cz & = & 1 \end{array} \right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

- | | |
|---|----------------------|
| (a) Para que el sistema sea compatible determinado. | (0,75 puntos) |
| (b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. | (1 punto) |
| (c) Para que el sistema sea incompatible. | (0,75 puntos) |

PRIMERA FORMA DE HACERLO

Consideramos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a - c + b$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a - c + b = 0 \Rightarrow b = a + c$$

Distinguimos dos casos distintos.

CASO 1. $b \neq a + c$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, por lo que el rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. **El sistema es compatible determinado.**

CASO 2. $b = a + c$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 3ª fila y columna $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de la matriz A es 2.

Veamos el rango de A/B.

$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ a & a+c & c & 1 \end{array} \right)$ Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a+c & c & 1 \end{array} \right) \text{ con determinante } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a+c & c & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - c = -1 - c$$

Lo igualamos a cero $-1 - c = 0 \Rightarrow c = -1$

Tenemos dos situaciones distintas:

CASO 2.1. $b = a + c$ y también $c = -1$

En este caso el rango de A es 2 (visto antes) y el rango de A/B es también 2 pues el determinante del menor de orden 3 se anula. El número de incógnitas es 3. **El sistema es compatible indeterminado.**

CASO 2.2. $b = a + c$ y $c \neq -1$

En este caso el rango de A es 2 (visto antes) y el rango de A/B es 3 pues el determinante del menor de orden 3 es no nulo. **El sistema es incompatible.**

(a) $b \neq a + c$

(b) $b = a + c$ y también $c = -1$. Es decir, para $b = a - 1$ y $c = -1$

(c) $b = a + c$ y $c \neq -1$

SEGUNDA FORMA DE HACERLO

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -x \\ z = x - 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow ax + b(-x) + c(x - 1) = 1 \Rightarrow ax - bx + cx - c = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(a - b + c) = 1 + c$$

Si $a - b + c \neq 0$ entonces puedo despejar el valor de x pasando a dividir esta expresión.

$$\left. \begin{array}{l} x(a - b + c) = 1 + c \\ a - b + c \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{1 + c}{a - b + c} \text{ y a partir de aquí obtenemos el valor de "y" y "z". El sistema es compatible determinado.}$$

Si $a - b + c = 0$ entonces la expresión se queda:

$$\left. \begin{array}{l} x(a - b + c) = 1 + c \\ a - b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1 + c$$

Distinguimos dos casos diferentes según sea " $1 + c$ " igual o distinto de cero.

Si $a - b + c = 0$ y $1 + c = 0$ entonces queda una igualdad $0 = 0$. Por lo que la solución del sistema es

$$\left. \begin{array}{l} y = -x \\ z = x - 1 \end{array} \right\}. \text{ El sistema es compatible indeterminado.}$$

Si $a - b + c = 0$ y $1 + c \neq 0$ entonces queda una igualdad imposible $0 = 1 + c$. **El sistema es incompatible.**

(a) $a - b + c \neq 0$

(b)

$$\left. \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ 1 + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ c = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b - 1 = 0 \Rightarrow a = b + 1$$

Deben ser los valores $a = b + 1$ y $c = -1$.

(c) $a - b + c = 0$ y $1 + c \neq 0 \rightarrow a - b + c = 0$ y $c \neq -1$

2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $C(0, 1, -1)$ y $D(0, 3, -1)$, y sea r la recta que pasa por A y B.

(a) Calcule ecuaciones paramétricas de r .

(1 punto)

(b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P.

(1,5 puntos)

(a) La recta que pasa por A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-2, -1, -3) - (1, 2, 1) = (-3, -3, -4)$$

Tomamos como vector director este vector pero multiplicado por (-1)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3, 3, 4) \\ A(1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

(b) Un punto P de la recta r tiene coordenadas $P(1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda)$.

Hallamos la expresión de ambas distancias.

Distancia de C a P:

$$\overrightarrow{CP} = (1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda) - (0, 1, -1) = (1+3\lambda, 1+3\lambda, 2+4\lambda)$$

$$d(C, P) = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(1+3\lambda)^2 + (1+3\lambda)^2 + (2+4\lambda)^2}$$

Distancia de D a P:

$$\overrightarrow{DP} = (1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda) - (0, 3, -1) = (1+3\lambda, -1+3\lambda, 2+4\lambda)$$

$$D(D, P) = |\overrightarrow{DP}| = \sqrt{(1+3\lambda)^2 + (-1+3\lambda)^2 + (2+4\lambda)^2}$$

Iguualamos las dos expresiones:

$$d(C, P) = D(D, P)$$

$$\sqrt{(1+3\lambda)^2 + (1+3\lambda)^2 + (2+4\lambda)^2} = \sqrt{(1+3\lambda)^2 + (-1+3\lambda)^2 + (2+4\lambda)^2}$$

$$\cancel{(1+3\lambda)^2} + (1+3\lambda)^2 + \cancel{(2+4\lambda)^2} = \cancel{(1+3\lambda)^2} + (-1+3\lambda)^2 + \cancel{(2+4\lambda)^2}$$

$$(1+3\lambda)^2 = (-1+3\lambda)^2 \Rightarrow \cancel{1} + \cancel{9\lambda^2} + 6\lambda = \cancel{(-1)^2} + \cancel{9\lambda^2} - 6\lambda \Rightarrow 12\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\text{El punto buscado es } \left. \begin{matrix} P(1+3\lambda, 2+3\lambda, 1+4\lambda) \\ \lambda = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow P(1, 2, 1)$$

La solución es el punto A proporcionado en el enunciado.

3.- Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

(2 puntos)

El dominio de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$ son todos los reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

El **dominio de la función** es $\mathbb{R} - \{0, -1\}$

Para el estudio del signo de la función, veamos cuando se anula el numerador y el denominador de la fracción algebraica.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x^2+x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la función vale $f(-2) = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2-2} = \frac{-3}{2} < 0$
- En $(-1, -\frac{1}{2})$ tomamos $x = -0,75$ y la función vale $f(-0,75) = \frac{2(-0,75)+1}{(-0,75)^2-0,75} = \frac{-0,5}{-0,18} > 0$
- En $(-\frac{1}{2}, 0)$ tomamos $x = -0,25$ y la función vale $f(-0,25) = \frac{2(-0,25)+1}{(-0,25)^2-0,25} = \frac{0,5}{-0,1875} < 0$
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la función vale $f(1) = \frac{2+1}{1^2+1} = \frac{3}{2} > 0$

La función es **positiva** en $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$ y es **negativa** en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{1}{0} = \infty \text{ La recta } x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{-1}{0} = \infty \text{ La recta } x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

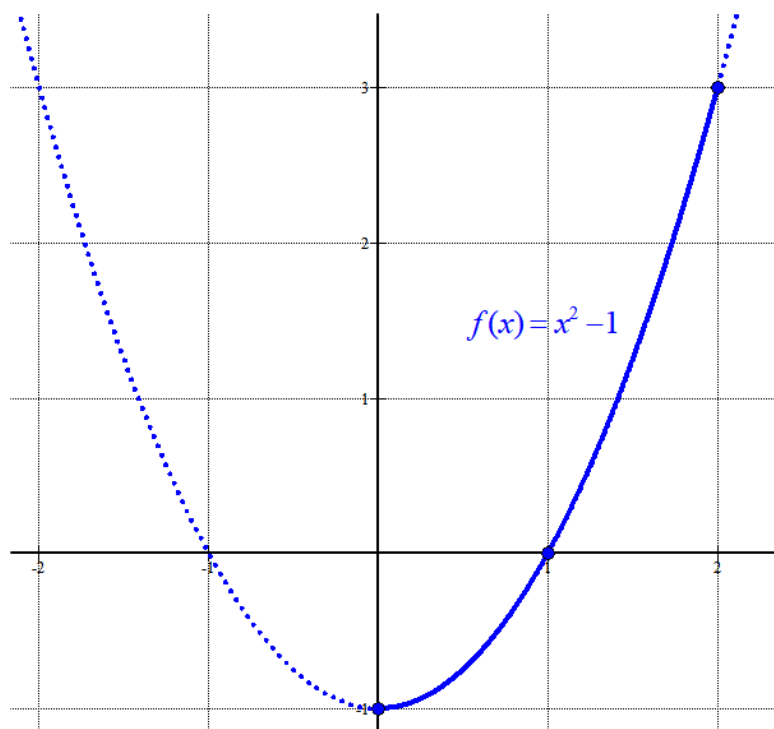
Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0 \text{ La recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal.}$$

- 4.- (a)** Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$. **(0,5 puntos)**
- (b)** Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$. **(1,5 puntos)**

(a) Esta función es una parábola. Para dibujarla hacemos una tabla de valores en el intervalo $[0, 2]$

x	$y = x^2 - 1$
0	-1
1	0
2	3



(b) Dividimos el recinto en dos partes una entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra entre $x = 1$ y $x = 2$.

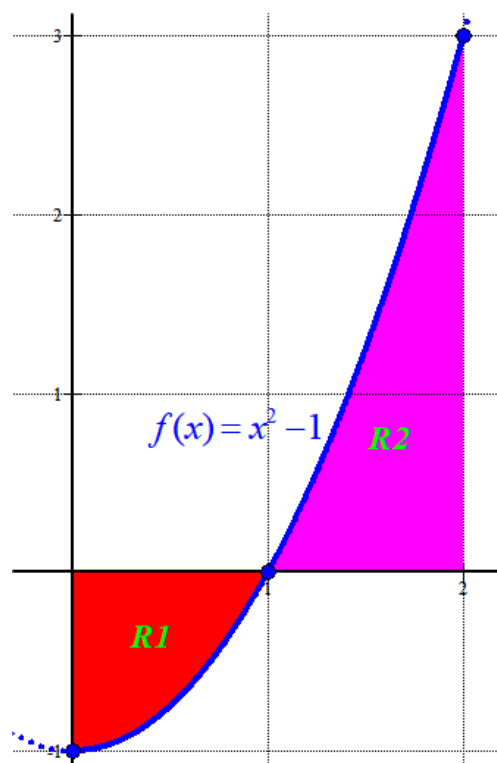
$$\text{Área de } R1 = \left| \int_0^1 x^2 - 1 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{1^3}{3} - 1 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 \right] \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 \right| = \frac{2}{3} u^2$$

$$\text{Área de } R2 = \left| \int_1^2 x^2 - 1 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \right| =$$

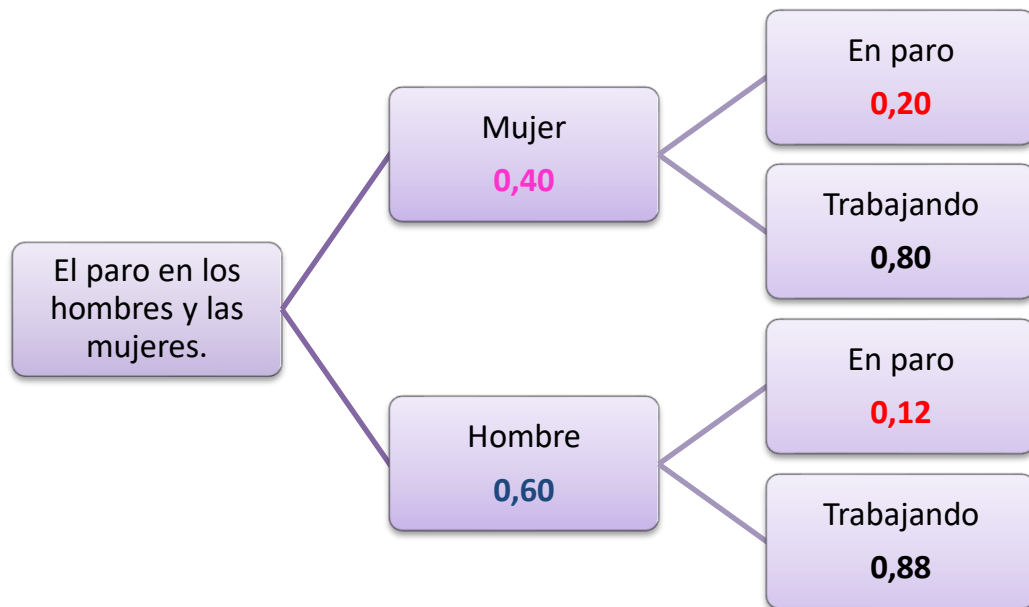
$$= \left| \left[\frac{2^3}{3} - 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1 \right] \right| = \left| \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right| = \frac{4}{3} u^2$$

$$\text{Área total} = \text{Área } R1 + \text{Área } R2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{2 u^2}$$



5.- El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer. **(1 punto)**

Dibujamos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea mujer} / \text{Trabaja}) &= \frac{P(\text{Sea mujer} \cap \text{Trabaja})}{P(\text{Trabaja})} = \\
 &= \frac{P(\text{Sea mujer}) P(\text{Trabaja} / \text{Es mujer})}{P(\text{Sea mujer}) P(\text{Trabaja} / \text{Es mujer}) + P(\text{Sea hombre}) P(\text{Trabaja} / \text{Es hombre})} = \\
 &= \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,88} = \boxed{\frac{20}{53} = 0,377}
 \end{aligned}$$



EBAU Ordinaria 2017
Prueba de Evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2016-2017

Asignatura: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1.- (a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ 3x & -3y & +2z & = 0 \\ 2x & -y & -z & = 1 \end{array} \right\}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

(b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones. (1 punto)

2.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (0, 1, 0)$, $\vec{u} = (3, -2, 2)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.(a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$. (0,75 puntos)(b) Calcule el ángulo φ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0,75 puntos)(c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente. (1 punto)

3.- (a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

(b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)4.- Utilizando el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \text{ que cumpla } F(0) = 0. \quad (2 \text{ puntos})$$

5.- En una población se sabe que el 80 % de los jóvenes tiene ordenador portátil, el 60 % tiene teléfono móvil, y el 10 % no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil. (1 punto)



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango. (1,25 puntos)

(b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones

$$A \cdot B \cdot X = O \quad (1,25 \text{ puntos})$$

2.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases}, \quad s = \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} \text{ y.}$$

(a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas. (1 punto)(b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s . (1'5 puntos)

3.- Calcule, aplicando la regla de L'Hôpital, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)} \quad (2 \text{ puntos})$$

4.- (a) Calcule los puntos en los que las dos curvas $y = e^x$, $y = -x^2$ cortan a la recta $x = 0$ y a la recta $x = 1$. (0,5 puntos)(b) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = e^x$, $y = -x^2$, y por las rectas $x = 0$, $x = 1$. (1,5 puntos)

5.- Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio sólo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis. (1 punto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- (a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ 3x & -3y & +2z & = 0 \\ 2x & -y & -z & = 1 \end{array} \right\}.$$

(1,5 puntos)

(b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

(1 punto)

(a) Aplicamos el método de Gauss para estudiar qué tipo de sistema es.

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ 3x & -3y & +2z & = 0 \\ 2x & -y & -z & = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3x \quad -3y \quad +2z \quad = 0 \\ -3x \quad \quad +5z \quad = -3 \\ \hline 0 \quad -3y \quad +7z \quad = -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 6x \quad -3y \quad -3z \quad = 3 \\ -6x \quad \quad +10z \quad = -6 \\ \hline 0 \quad -3y \quad +7z \quad = -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ & -3y & +7z & = -3 \\ & -3y & +7z & = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \quad -3y \quad +7z \quad = -3 \\ \quad 3y \quad -7z \quad = 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad = 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ & -3y & +7z & = -3 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right\}$$

Este sistema triangular de ecuaciones equivalente al inicial es compatible indeterminado, pues el rango de la matriz A y el de A/B es 2, siendo el número de incógnitas 3.

(b) Utilizamos el sistema equivalente obtenido para resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & & -5z & = 3 \\ & -3y & +7z & = -3 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = 3 + 5z \\ -3y = -3 - 7z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{5}{3}z \\ y = 1 + \frac{7}{3}z \end{array} \right\}$$

Las soluciones son: $x = 1 + \frac{5}{3}t$; $y = 1 + \frac{7}{3}t$; $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$ o si se prefiere

$x = 1 + 5\alpha$; $y = 1 + 7\alpha$; $z = \alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (0,1,0)$, $\vec{u} = (3,-2,2)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$.

(a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$. **(0,75 puntos)**

(b) Calcule el ángulo φ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

(c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente. **(1 punto)**

$$(a) \quad \vec{e} \times \vec{u} = (0,1,0) \times (3,-2,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 3k = (2, 0, -3)$$

$$(b) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(3,-2,2) \cdot (0,1,1)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{0 - 2 + 2}{\sqrt{17} \sqrt{2}} = 0$$

El ángulo que forman estos vectores es de 90° . Son ortogonales.

(c) Calculamos el producto mixto de estos vectores y si obtenemos un valor nulo son linealmente dependientes, en cualquier otro caso son linealmente independientes.

$$[\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 3 + 0 = -3 \neq 0$$

Estos tres vectores son linealmente independientes.

3.- (a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

(b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$. **(0,5 puntos)**

(a) El dominio de definición de la función son todos los valores menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

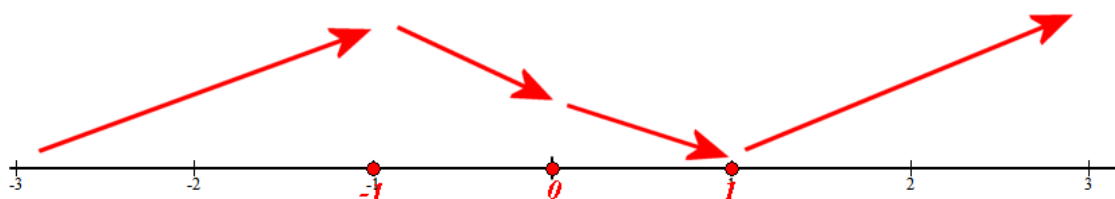
Buscamos sus extremos relativos usando la derivada de la función.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Estudiamos la evolución de la función

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 0)$ tomamos $x = -0,5$ y la derivada vale $f'(-0,5) = 1 - \frac{1}{0,25} = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 0)$.
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0,5$ y la derivada vale $f'(0,5) = 1 - \frac{1}{0,25} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} = 0 + \frac{1}{0} = \infty. \text{ La asíntota vertical es } x = 0$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty + \frac{1}{\infty} = +\infty + 0 = +\infty. \text{ No tiene asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

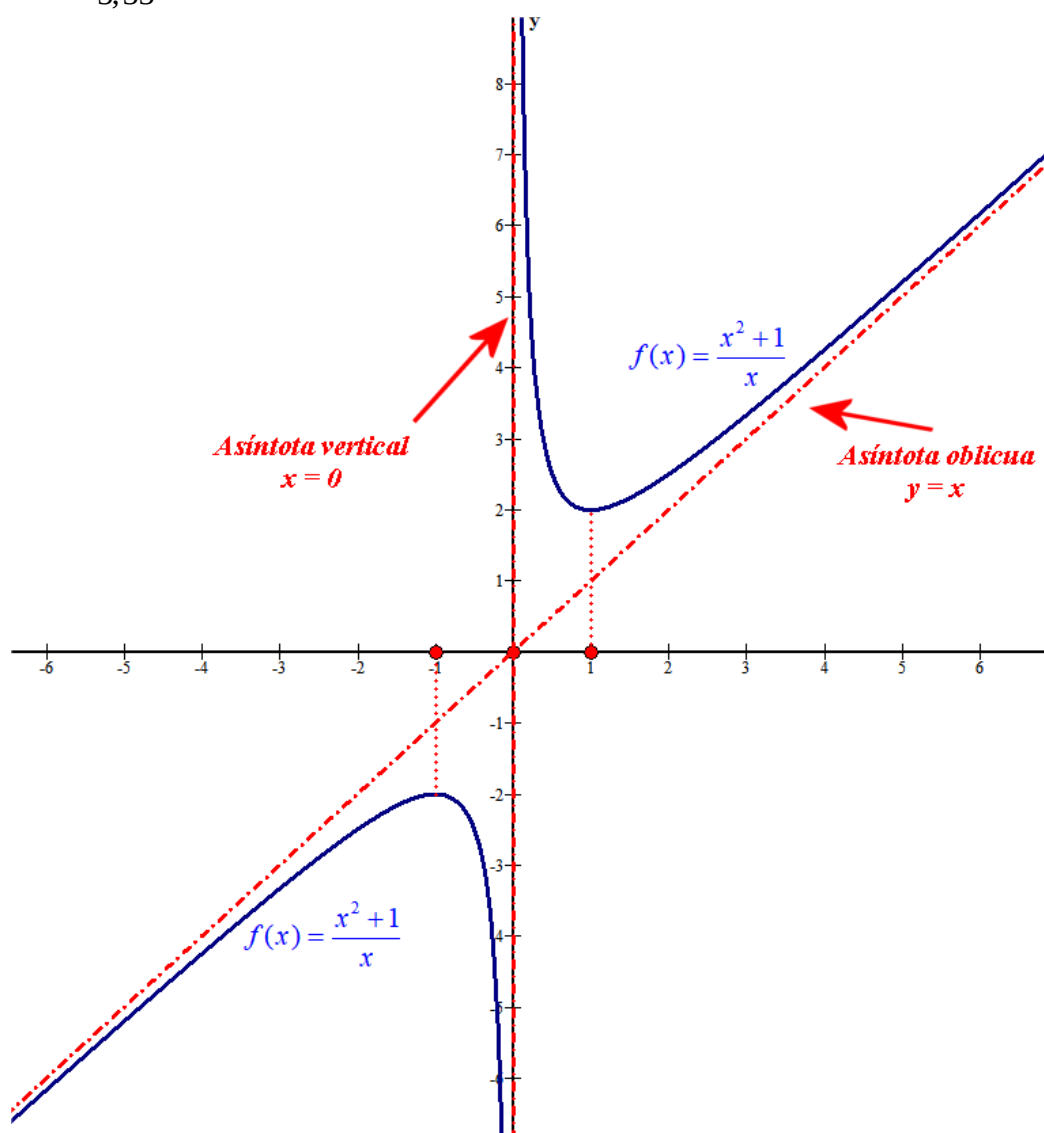
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$

(b) Añadimos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$
-3	-3,33
-2	-2,5
-1	-2
1	2
2	2,5
3	3,33



4.- Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0) = 0$. **(2 puntos)**

Calculamos la integral de la función usando el cambio de variable sugerido.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+x^2 = t^2 \Rightarrow 2x dx = 2t dt \\ dx = \frac{2t dt}{2x} = \frac{t}{x} dt \end{array} \right\} = \int \frac{x^3}{\sqrt{t^2}} \frac{t}{x} dt = \int \frac{x^2}{t} t dt = \int x^2 dt =$$

$$= \int t^2 - 1 dt = \frac{t^3}{3} - t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ t^2 = 1+x^2 \rightarrow t = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\} = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} - \sqrt{1+x^2} + K$$

Para obtener el valor de K aplicamos la condición $F(0) = 0$.

$$F(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} - \sqrt{1+x^2} + K \quad \left. \vphantom{F(x)} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{(\sqrt{1+0^2})^3}{3} - \sqrt{1+0^2} + K = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - 1 + K = 0 \Rightarrow \\ F(0) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow K = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La primitiva buscada es
$$F(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} - \sqrt{1+x^2} + \frac{2}{3}$$

5.- En una población se sabe que el 80 % de los jóvenes tiene ordenador portátil, el 60 % tiene teléfono móvil, y el 10 % no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil. **(1 punto)**

Construimos una tabla de contingencia con los datos del ejercicio.

	Tiene teléfono móvil	No tiene teléfono móvil	
Tiene ordenador portátil			80
No tiene ordenador portátil		10	
	60		100

Completamos los datos que faltan en la tabla.

	Tiene teléfono móvil	No tiene teléfono móvil	
Tiene ordenador portátil	50	30	80
No tiene ordenador portátil	10	10	20
	60	40	100

Respondemos a la pregunta planteada.

$$P(\text{Tenga ordenador portátil} / \text{Tiene teléfono móvil}) =$$

$$= \frac{\text{Número de jóvenes con móvil y ordenador portátil}}{\text{Número de jóvenes con móvil}} = \frac{50}{60} = \boxed{\frac{5}{6} = 0,833}$$

OPCIÓN B

1.- Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

(1,25 puntos)

(b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones

$$A \cdot B \cdot X = O$$

(1,25 puntos)

$$(a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos su determinante } |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Su rango no es 2.

Su rango es 1, pues tiene elementos no nulos.

(b) Obtenemos la expresión del sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss para simplificarlo.

$$A \cdot B \cdot X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a + \text{Ecuación 1}^a \\ -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ \hline 0 \quad 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Este sistema triangular equivalente es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

Las soluciones de este sistema son $x = 2t$; $y = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

2.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases}, \quad s = \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} \text{ y.}$$

(a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas.

(1 punto)

(b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s .

(1'5 puntos)

(a) Determinamos los vectores de ambas rectas y vemos si pueden tener coordenadas proporcionales.

$$r: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Tomo } x = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 + 2y = 0 \rightarrow y = 0 \\ 0 - 2z = -8 \rightarrow z = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0, 0, 4) \in r \\ \text{Tomo } x = -2 \rightarrow \begin{cases} -6 + 2y = 0 \rightarrow y = 3 \\ -2 - 2z = -8 \rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 3, 3) \in r \end{cases}$$

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-2, 3, 3) - (0, 0, 4) = (-2, 3, -1)$$

$$s = \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_s = (-2, a, -1)$$

Para que sean paralelas las rectas las coordenadas de sus vectores directores deben ser proporcionales.

$$\vec{v}_s // \vec{v}_r \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{3}{a} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow a = 3$$

Para $a = 3$ las rectas son paralelas o coincidentes.

Para $a = 3$ comprobamos si el punto $A(0, 0, 4)$ de la recta r pertenece a la recta s .

$$s = \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} \left\{ \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{0+1}{-2} = \frac{0-3}{3} = \frac{4-1}{-1} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq -1 \neq -3! \\ &\text{¿} A(0, 0, 4) \in s? \end{aligned} \right.$$

No se cumplen las igualdades, por lo que el punto A no pertenece a la recta s y las rectas son paralelas.

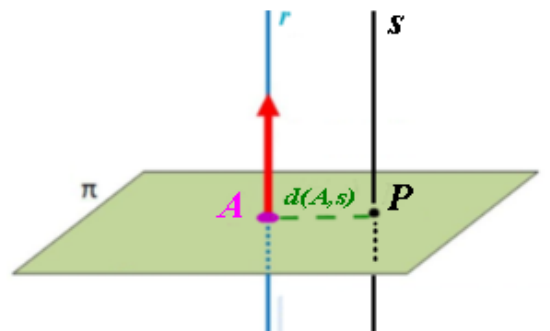
(b) Para $a = 3$ las rectas tienen ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases} \quad s = \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta, por ejemplo, la distancia de $A(0, 0, 4) \in r$ a la recta s .

Hallamos el plano π perpendicular a la recta s que pasa por el punto A .

Luego determinamos el punto P donde se cortan recta y plano. La distancia del punto A a la recta s será el valor de la distancia entre los puntos A y P .



El plano tendrá como vector normal el director de s .

$$\pi: \begin{cases} A(0,0,4) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_s = (-2, 3, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,4) \in \pi \\ -2x + 3y - z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\pi: -2x + 3y - z + 4 = 0$$

Averiguamos las coordenadas del punto P de corte de la recta s y el plano π .

$$\pi: -2x + 3y - z + 4 = 0 \quad s: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow -2(-1 - 2\lambda) + 3(3 + 3\lambda) - (1 - \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 9 + 9\lambda - 1 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 3 - 3 = 0 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P(1, 0, 2)$$

Obtenemos el valor de la distancia de r a s usando el módulo del vector que une P con A.

$$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 2) - (0, 0, 4) = (1, 0, -2)$$

$$d(r, s) = d(A, r) = d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{5} = 2,23u}$$

3.- Calcule, aplicando la regla de L'Hôpital, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)}$$

(2 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}(0) + (1-0)^2 - 1}{\ln(\cos 0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) + 2(1-x)(-1)}{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (2 \cos(2x) - 2 + 2x)}{-\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cos(2x) - 2 \cos x + 2x \cos x}{-\operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{\cos 0 (2 \cos(0) - 2 + 0)}{-\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos(2x) - 2 \cos x \cdot \operatorname{sen}(2x) + 2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x}{-\cos x} =$$

$$= \frac{0 - 0 + 0 + 2 \cos 0 - 0}{-1} = \boxed{-2}$$

4.- (a) Calcule los puntos en los que las dos curvas $y = e^x$, $y = -x^2$ cortan a la recta $x = 0$ y a la recta $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(b) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = e^x$, $y = -x^2$, y por las rectas $x = 0$, $x = 1$. **(1,5 puntos)**

(a) Averiguamos donde corta la curva $y = e^x$ a las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} y = e^x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = e^0 = 1 \Rightarrow A(0,1) \qquad \left. \begin{array}{l} y = e^x \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = e \Rightarrow B(1,e)$$

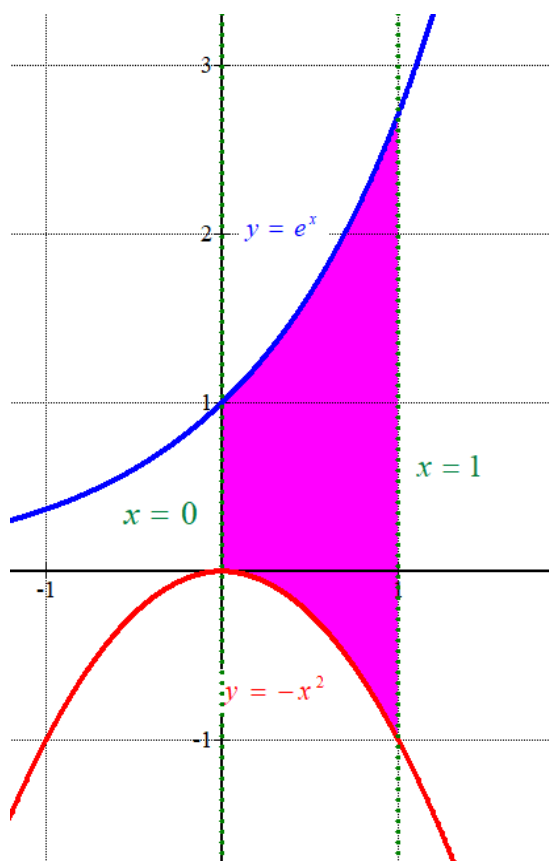
Averiguamos donde corta la curva $y = -x^2$ a las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(0,0) \qquad \left. \begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow D(1,-1)$$

(b) El área es el valor de la integral definida de la diferencia de las funciones entre 0 y 1.

$$\int_0^1 -x^2 - e^x dx = \left[-\frac{x^3}{3} - e^x \right]_0^1 = \left[-\frac{1^3}{3} - e^1 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - e^0 \right] = -\frac{1}{3} - e + 1 = \frac{2}{3} - e$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^1 -x^2 - e^x dx \right| = \left| \frac{2}{3} - e \right| = \boxed{e - \frac{2}{3} = 2,05 \text{ u}^2}$$



5.- Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio sólo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis. **(1 punto)**

Hacemos una tabla de contingencia para aclarar los datos.

	Baloncesto	Natación	Tenis	TOTAL
Hombres				
Mujeres	120	180		40% de 1000 = 400
	400	350		1000

Completamos la tabla.

	Baloncesto	Natación	Tenis	TOTAL
Hombres	280	170	150	600
Mujeres	120	180	100	400
	400	350	250	1000

Respondemos a la pregunta planteada usando la regla de Laplace.

$$P(\text{Hombre y de la sección de tenis}) = \frac{150}{1000} = \boxed{\frac{3}{20} = 0,15}$$