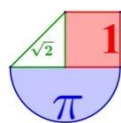


Matemáticas II

PAU en Navarra Años 2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas II propuestos en las pruebas EvAU de Navarra del año 2017 al 2024, junto con los exámenes de las PAU del 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU Extraordinaria 2025.....	3
PAU Ordinaria 2025	20
EvAU Extraordinaria 2024	36
EvAU Ordinaria 2024.....	49
EvAU Extraordinaria 2023	64
EvAU Ordinaria 2023.....	78
EvAU Extraordinaria 2022	93
EvAU Ordinaria 2022	105
EvAU Extraordinaria 2021	122
EvAU Ordinaria 2021	139
EvAU Extraordinaria 2020	155
EvAU Ordinaria 2020	170
EvAU Julio 2019	185
EvAU Junio 2019	199
EvAU Julio 2018	212
EvAU Junio 2018	227
EvAU Julio 2017	243
EvAU Junio 2017	257

PAU Extraordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad

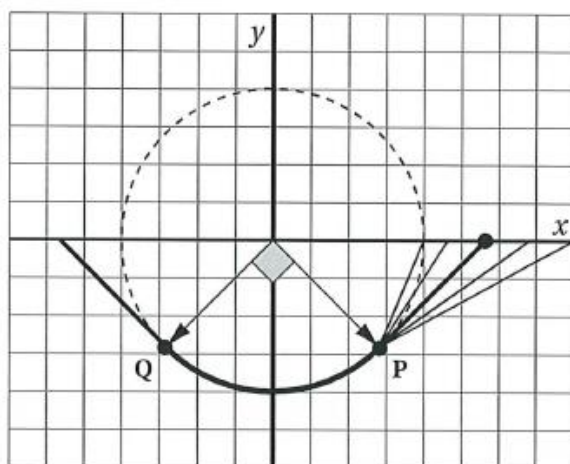
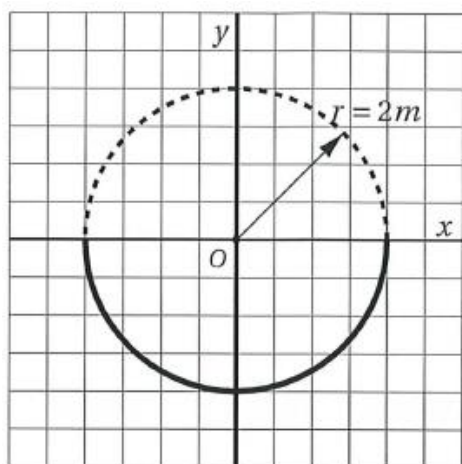
Curso: 2024-2025

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



(a) Calcula el punto P.

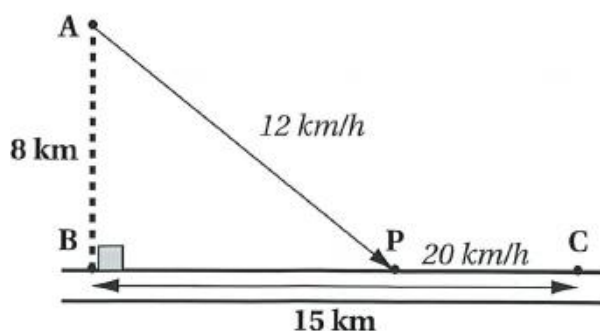
(0.5 puntos)

(b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches).

(2 puntos)

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible.

(2.5 puntos)



A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2,5 puntos)

C1) Sea $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$.

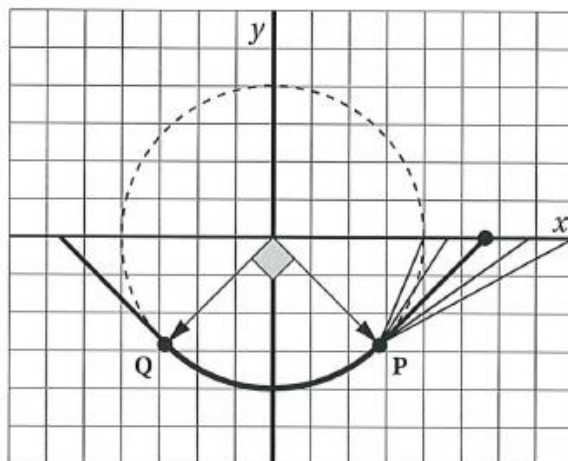
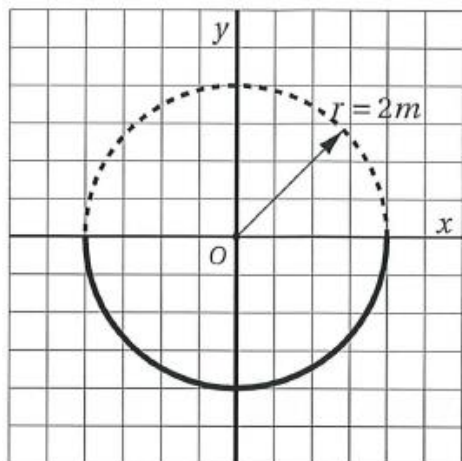
(a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

(b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

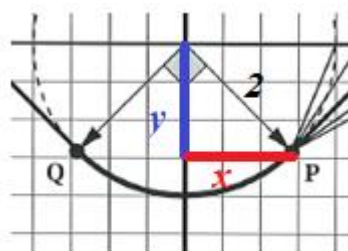
SOLUCIONES

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



- (a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)
- (b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

- (a) Si el ángulo QOP es de 90° y la figura es simétrica el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al eje OY es de la mitad de 90° : $(\overrightarrow{OP}, OY) = 45^\circ$, por lo que las coordenadas del punto P son $P(x, -x)$.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2 + y^2 = 2^2$.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4 \\ P(x, -x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$$

Las coordenadas del punto P son $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y las del punto Q son $Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

- (b) Para que la trayectoria no se vea alterada la recta debe ser tangente a la curva.

La curva tiene ecuación $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}$. Tomamos la raíz negativa pues la función es negativa.

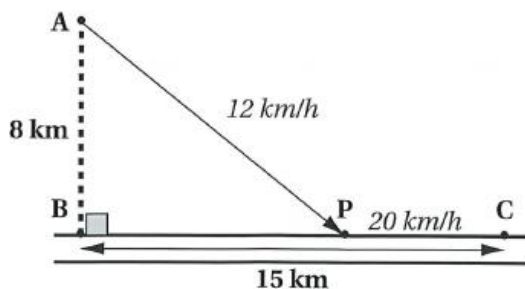
Hallamos la tangente a la función en $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$ en $x = \sqrt{2}$.

$$f(x) = -\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

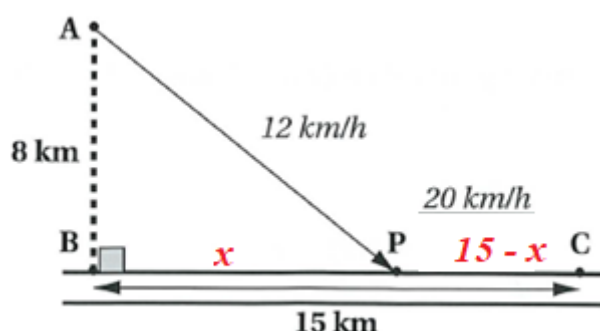
$$\left. \begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = -\sqrt{4-2} = -\sqrt{2} \\ f'(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \\ y - f(\sqrt{2}) &= f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + \sqrt{2} = 1(x - \sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = x - 2\sqrt{2}}$$

La recta que pasa por el punto P y cumple lo pedido es la recta tangente al círculo y que pasa por P, que tiene ecuación $y = x - 2\sqrt{2}$.

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



Completamos el dibujo para establecer la función tiempo total en hacer el recorrido en función.



La distancia de A a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 8 y "x".

$$\overline{AP}^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{64 + x^2}$$

Esta distancia la recorre a 12 km/h por lo que tarda en recorrerla $\frac{\sqrt{64 + x^2}}{12}$ horas.

La distancia de P a C vale $15 - x$. Se tarda en recorrerla $\frac{15 - x}{20}$.

El tiempo que tarda en ir de A a C pasando por P es la suma de los dos tiempos obtenidos.

$$f(x) = \frac{\sqrt{64 + x^2}}{12} + \frac{15 - x}{20}, \quad x \in [0, 15]$$

Derivamos la función obtenida y obtenemos sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{1}{12} \sqrt{64 + x^2} + \frac{15 - x}{20} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12} \frac{2x}{2\sqrt{64 + x^2}} + \frac{-1}{20} = \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} - \frac{1}{20}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} - \frac{1}{20} = 0 \Rightarrow \frac{x}{12\sqrt{64 + x^2}} = \frac{1}{20} \Rightarrow 20x = 12\sqrt{64 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}x = \sqrt{64 + x^2} \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 64 + x^2 \Rightarrow \frac{16}{9}x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{36} = 6}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz pues estamos trabajando con una distancia que debe ser positiva. Y menor o igual a 15.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

Antes de $x = 6$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{5}{12\sqrt{64+5^2}} - \frac{1}{20} = -0.005 < 0$.

Después de $x = 6$ tomamos $x = 7$ y la derivada vale $f'(7) = \frac{7}{12\sqrt{64+7^2}} - \frac{1}{20} = 0.005 > 0$.

La función decrece antes de $x = 6$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo para este valor.

Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para decidir donde se sitúa el valor mínimo absoluto.

$$f(0) = \frac{1}{12}\sqrt{64+0^2} + \frac{15-0}{20} = \frac{8}{12} + \frac{15}{20} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

$$f(6) = \frac{1}{12}\sqrt{64+6^2} + \frac{15-6}{20} = \frac{10}{12} + \frac{9}{20} = \frac{77}{60} \approx 1.283 \text{ mínimo absoluto}$$

$$f(15) = \frac{1}{12}\sqrt{64+15^2} + \frac{15-15}{20} = \frac{8}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

La distancia de B a la que debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible es de 6 kilómetros.

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m^2 - m)x + (2m + 1)y = 2 \\ (m - m^2)x - (2m + 1)y + (m + 2)z = 2m + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ m^2 - m & 2m + 1 & 0 & 2 \\ m - m^2 & -(2m + 1) & m + 2 & 2m + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ m - m^2 \quad -(2m + 1) \quad m + 2 \quad 2m + 2 \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m + 2 \quad 2m + 4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ m^2 - m \quad 2m + 1 \quad 0 \quad 2 \\ -m^2 + m \quad -m - 2 \quad 1 \quad -1 + m^2 \\ \hline 0 \quad m - 1 \quad 1 \quad m^2 + 1 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2 - m & m + 2 & -1 \\ 0 & m - 1 & 1 \\ 0 & 0 & m + 2 \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)(m^2 - m) = (m + 2)(m - 1)m(m - 1) =$$

$$= m(m + 2)(m - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 2 = 0 \rightarrow m = -2 \\ m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -2$, $m = 0$ y cuando $m = 1$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2 - m & m + 2 & -1 & 1 - m^2 \\ 0 & m - 1 & 1 & m^2 + 1 \\ 0 & 0 & m + 2 & 2m + 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ (m + 2)z = 2(m + 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \{m + 2 \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - z = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + z = m^2 + 1 \\ \boxed{z = \frac{2(m + 2)}{m + 2} = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y - 2 = 1 - m^2 \\ (m - 1)y + 2 = m^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ (m - 1)y = m^2 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \{m - 1 \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (m^2 - m)x + (m + 2)y = 3 - m^2 \\ \boxed{y = \frac{m^2 - 1}{m - 1} = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1} = m + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x + (m + 2)(m + 1) = 3 - m^2 \Rightarrow (m^2 - m)x + m^2 + 2 + m + 2m = 3 - m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 - m)x = 1 - 3m - 2m^2 \Rightarrow \{m(m - 1) \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}}$$

La solución es $x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}$, $y = m + 1$, $z = 2$.

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \quad 2 \quad -1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -2}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m = 1$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \ 0 \ 3 \ 6 \\ 0 \ 0 \ -3 \ -6 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{0 \ 3 \ -1 \ 0}^{A/B} \\ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{0 \ 3 \ -1 \ 0}^{A/B} \\ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y - z = 0 \\ \boxed{z = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Las soluciones del sistema son $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{array} \right.$

CASO 4. $m = -2$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} \overbrace{6 \ 0 \ -1 \ -3}^{A/B} \\ 0 \ -3 \ 1 \ 5 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{c} \overbrace{6 \ 0 \ -1 \ -3}^{A/B} \\ 0 \ -3 \ 1 \ 5 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x - z = -3 \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 3 = z \\ -3y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y + 6x + 3 = 5 \Rightarrow 6x - 2 = 3y \Rightarrow y = -\frac{2}{3} + 2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

Resumiendo: Si $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$x = \frac{-3m^2 - 3m + 1}{m^2 - m}, y = m + 1, z = 2 .$$

Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{2}{3}; \lambda \in \mathbb{R} , \\ z = 2 \end{cases}$

Si $m = 0$ el sistema es incompatible.

Si $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3} + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} . \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases}$

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Como no tenemos las matrices A ni B solo podemos utilizar las propiedades de los determinantes para determinar el valor de $|C|$.

$$|C| = |3 \cdot (A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}| = 3^3 |(A^t)^2 \cdot (A \cdot B)^{-1}| = 3^3 |(A^t)^2| \cdot |(A \cdot B)^{-1}| =$$

$$= 27 \cdot |A^t|^2 \cdot \frac{1}{|A \cdot B|} = 27 \cdot |A|^2 \cdot \frac{1}{|A| \cdot |B|} = \frac{27 \cdot \cancel{|A|} \cdot |A|}{\cancel{|A|} \cdot |B|} = \frac{27|A|}{|B|} = \frac{27 \cdot \frac{1}{3}}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

He utilizado varias propiedades de los determinantes.

1. Si M es una matriz 3×3 entonces $\text{Det}(3M) = 3^3 \text{Det}(M)$.
2. Si M y N son dos matrices entonces $\text{Det}(M \cdot N) = \text{Det}(M) \cdot \text{Det}(N)$.
3. Si M es una matriz entonces $\text{Det}(M^t) = \text{Det}(M)$.
4. Si M es una matriz invertible entonces $\text{Det}(M^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(M)}$.

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x = 3 - z \end{cases} \Rightarrow 3 - z + y - 2z - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 7 + 3z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 7 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4 - \alpha \\ y = -1 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Debemos determinar la posición relativa de las dos rectas.

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(3, 7, 0) \\ Q_s(4, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (4, -1, 0) - (3, 7, 0) = (1, -8, 0)$$

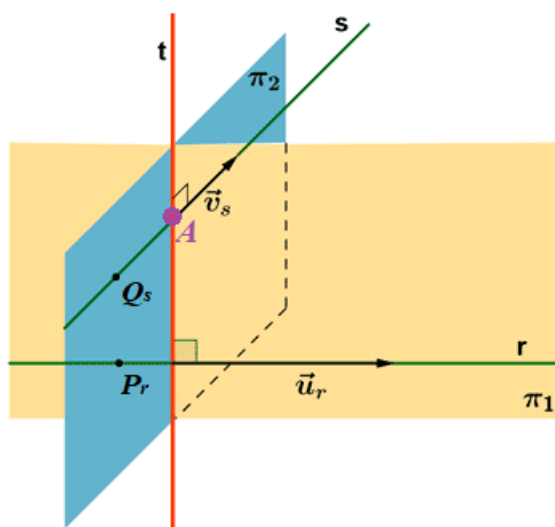
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, -8, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 8 - 1 - 0 + 8 = 12 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas no se cortan. Las rectas se cruzan.

Un vector director de la recta t perpendicular común a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 2j + 2k = (-4, -2, 2)$$

Tomamos como vector director de la recta t el vector $\vec{w}_t = \frac{-1}{2}\vec{v}_r \times \vec{u}_s = \frac{-1}{2}(-4, -2, 2) = (2, 1, -1)$.



Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y que tiene como otro de sus vectores directores el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w}_t = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(3, 7, 0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y-7+6z+z-2y+14+3x-9=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 4x-y+7z-5=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π_1 y la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 4x-y+7z-5=0 \\ s: \begin{cases} x=4-\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(4-\alpha)+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow 16-4\alpha+1-\alpha-7\alpha-5=0 \Rightarrow$$

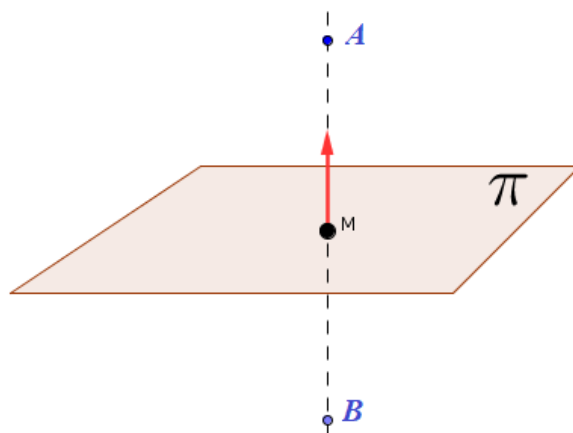
$$\Rightarrow -12\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} x=4-1=3 \\ y=-1+1=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3, 0, -1)}$$

La ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s es la ecuación de la recta que pasa por A con vector director $\vec{w}_t = (2, 1, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, 0, -1) \in t \\ \vec{w}_t = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

La recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s tiene ecuación $t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)



El plano que equidista de los puntos A y B contiene el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y tiene como vector normal el vector $\overline{AB}$ o un vector proporcional (en la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} A(3,3,5) \\ B(1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1,-1,1) - (3,3,5) = (-2,-4,-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \frac{-1}{2} \overline{AB} = \frac{-1}{2} (-2,-4,-4) = (1,2,2) \\ M = \frac{(1,-1,1) + (3,3,5)}{2} = (2,1,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow 10 + D = 0 \Rightarrow D = -10 \Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0}$$

La ecuación del plano que equidista de los puntos A y B es $\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Un plano π' paralelo a π tienen ecuación $\pi' : x + 2y + 2z + D = 0$.

Como el punto M pertenece al plano π determinamos el valor de D para que la distancia del punto M a otro plano π' paralelo a él valga 6 unidades.

$$\left. \begin{array}{l} \pi' : x + 2y + 2z + D = 0 \\ M = (2,1,3) \\ d(M, \pi') = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|10 + D|}{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |10 + D| = 18 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 + D = 18 \rightarrow D = 8 \rightarrow \boxed{\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0} \\ 10 + D = -18 \rightarrow D = -28 \rightarrow \boxed{\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0} \end{array} \right.$$

Los planos que equidistan 6 unidades del plano π son $\pi_1 : x + 2y + 2z + 8 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y + 2z - 28 = 0$.

C1) Sea $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$.

- a) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)
- b) Demuestra que existe un punto d en $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

a) Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux):

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, para todo valor u comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.

La función $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$ es una función continua pues el exponente es producto de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[0, 3]$.

Si consideramos el intervalo $[0, 3]$ tenemos que $f(0) = e^{0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right)} = e^0 = 1$ y

$$f(3) = e^{3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{3(-1)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx 0.0498.$$

Como $f(1) \approx 0.0498 < \frac{1}{2} < 1 = f(0)$ podemos aplicar el teorema de Darboux y afirmar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$.

b) Vamos a utilizar el teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función $f(x) = e^{x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)}$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Como $f(0) = 1$ y $f(2) = e^{2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{2 \cdot \sin(\pi)} = e^0 = 1$ se cumple que $f(0) = f(2)$ por lo que aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

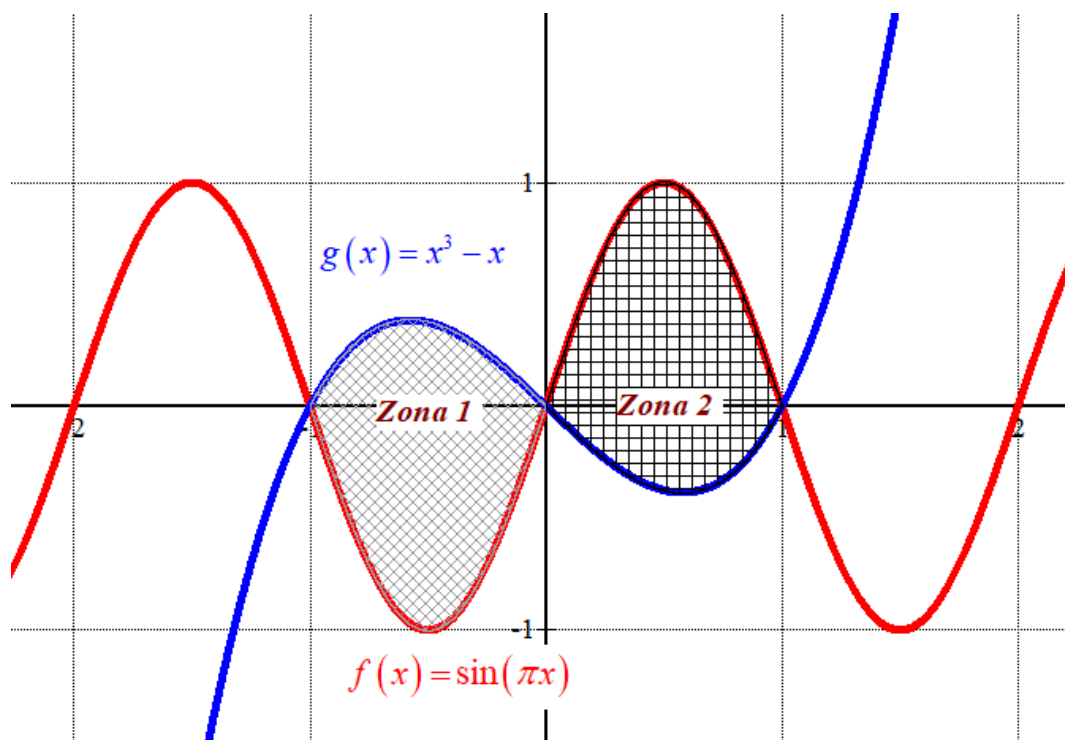
C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = x^3 - x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(\pi x) \\ g(x) = x^3 - x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \sin(\pi \cdot 0) = 0 = 0^3 - 0 \\ x = 1 \rightarrow \sin(\pi) = 0 = 1^3 - 1 \\ x = -1 \rightarrow \sin(-\pi) = 0 = (-1)^3 - (-1) \end{cases}$$

Los tres puntos de corte son A(0, 0), B(-1, 0) y C(1, 0).

Dibujamos las funciones para establecer los límites de integración.



Hallamos el área de la zona 1.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-1}^0 x^3 - x - \sin(\pi x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cos(\pi(-1)) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos(-\pi)}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Hallamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned}
 \text{Área } 2 &= \int_0^1 \sin(\pi x) - x^3 + x dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\
 &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} \right] - \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot 0) - \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

El área encerrada entre ambas curvas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área} = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \simeq 1.77 u^2$$

PAU Ordinaria 2025

Prueba de Acceso a la Universidad

Curso: 2024-2025

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

P2) Siendo $p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$) es: (1.25 puntos)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9 \\ (3m - m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1}$$

(2,5 puntos)

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, 4, 2)$ y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto $P(6, -4, -4)$.

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A . (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$.

a) Demuestra que f es continua en $[2, 3]$. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Llamamos “x” al número de máquinas que se usan.

Como 1 máquina tarda 80 horas, con 2 máquinas tardaremos $\frac{90}{2} = 45$ horas y si utilizamos “x”

máquinas tardaremos $\frac{90}{x}$ horas en realizar el trabajo.

Hallamos la expresión de la función gasto $G(x)$ que depende del número de máquinas en uso.

Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso $\rightarrow G(x) = 10x + 5 \frac{80}{x} x = 10x + 400$.

Hay que sumarle el gasto del operario que cobra 18 euros por hora.

$$G(x) = 10x + 400 + 18 \frac{80}{x} = \frac{1440}{x} + 10x + 400$$

Hallamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$G(x) = \frac{1440}{x} + 10x + 400 \Rightarrow G'(x) = \frac{-1440}{x^2} + 10$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1440}{x^2} + 10 = 0 \Rightarrow \frac{1440}{x^2} = 10 \Rightarrow 1440 = 10x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1440}{10} = 144 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{144} = 12}$$

Como estamos hablando de número de máquinas no nos sirve el valor negativo de la raíz.

Sustituimos $x = 12$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$G'(x) = \frac{-1440}{x^2} + 10 = -1440x^{-2} + 10 \Rightarrow G''(x) = 2880x^{-3} = \frac{2880}{x^3} \Rightarrow G''(12) = \frac{2880}{12^3} > 0$$

Como la segunda derivada toma valor positivo podemos afirmar que en $x = 12$ hay un mínimo relativo de la función gasto.

Con 12 máquinas se consigue un mínimo gasto.

P2) Siendo $p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$ ($a < b$) es: (1.25 puntos)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$p(t) = 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] \Rightarrow \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right] = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 \right]$$

$$p'(t) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \left[3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \cdot t = 0 \rightarrow \boxed{t=0} \\ \frac{\pi}{2} \cdot t = \pi \rightarrow \textcolor{red}{t=2} \end{array} \right. \\ 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) - 1 = 0 \rightarrow 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = 1 \rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot t = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \rightarrow \boxed{t = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.60817} \end{array} \right.$$

Tenemos dos extremos relativos. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en estos dos valores y determinamos los valores máximo y mínimo del precio.

$$\left. \begin{aligned} p(0) &= 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0.15 \\ p(0.60817) &= 0.15 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5349 \\ p(1) &= 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = 0.15 \end{aligned} \right\}$$

El valor máximo se produce en $t = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0.60817$ y el mínimo se produce en $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

b) Calculamos lo pedido.

$$\bar{p} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 p(t) dt = \int_0^1 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt &= 0.15t + \int \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) = x \rightarrow dx = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \frac{2}{\pi} dx \end{array} \right\} = \\ &= 0.15t + \int \frac{2}{\pi} x^2 dx = 0.15t + \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} = 0.15t + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) + C \end{aligned}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \int_0^1 0.15 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) dt = \left[0.15t + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \right]_0^1 = \\ &= \left[0.15 \cdot 1 + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) \right] - \left[0.15 \cdot 0 + \frac{2}{3\pi} \sin^3\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \right] = 0.15 + \frac{2}{3\pi} \approx 0.3622 \end{aligned}$$

El precio medio $\bar{p}$ de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ es de 0.3622 por kilowatio/hora

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3 \\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9 \\ (3m - m^2)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m \\ m^2 - 3m & 3 & 3m \\ 3m - m^2 & m & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ m^2 - 3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m - m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ m^2 - 3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m - m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ m^2 - 3m \quad 3 \quad 3m \quad m+9 \\ -m^2 + 3m \quad m \quad -2m \quad -3 \\ \hline 0 \quad 3+m \quad m \quad m+6 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 1}^a \\ 3m - m^2 \quad m \quad -m \quad 0 \\ m^2 - 3m \quad -m \quad 2m \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m \quad 3 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2 - 3m & -m & 2m \\ 0 & 3+m & m \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m(3+m)(m^2 - 3m) = m(3+m)m(m-3) =$$

$$= m^2(3+m)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3+m = 0 \rightarrow m = -3 \\ m-3 = 0 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -3$, $m = 0$ y cuando $m = 3$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2mz = 3 \\ (3+m)y + mz = m+6 \\ mz = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \{m \neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2mz = 3 \\ (3+m)y + mz = m+6 \\ \boxed{z = \frac{3}{m}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 2m\frac{3}{m} = 3 \\ (3+m)y + m\frac{3}{m} = m+6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my + 6 = 3 \\ (3+m)y + 3 = m+6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my = -3 \\ (3+m)y = m+3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m+3 \neq 0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m^2-3m)x - my = -3 \\ \boxed{y = \frac{m+3}{m+3} = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow (m^2-3m)x - m = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-3m)x = m-3 \Rightarrow \{m^2-3m \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{m-3}{m^2-3m} = \frac{m-3}{m(m-3)} = \frac{1}{m}}$$

La solución es $x = \frac{1}{m}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{m}$

CASO 2. $m=0$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \ 0 \ 0 \ 3}^{A/B} \\ 0 \ 3 \ 0 \ 6 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 3}_A \end{array} \right)$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada es 2. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

CASO 3. $m=3$

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \ -3 \ 6 \ 3}^{A/B} \\ 0 \ 6 \ 3 \ 9 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 3 \ 3}_A \end{array} \right)$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{0 \ -3 \ 6 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y + 6z = 3 \\ 6y + 3z = 9 \\ 3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y + 6z = 3 \\ 6y + 3z = 9 \\ \boxed{z=1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y + 6 = 3 \\ 6y + 3 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y = -3 \\ 6y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$.

CASO 4. $m = -3$

La matriz ampliada queda

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \ 0 \ -3 \ 3 \\ 0 \ 0 \ 3 \ -3 \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{18 \ 3 \ -6 \ 3}^{A/B} & & & \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 18x + 3y - 6z = 3 \\ -3z = 3 \\ -3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 18x + 3y - 6z = 3 \\ -3z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 18x + 3y - 6z = 3 \\ \boxed{z = \frac{3}{-3} = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow 18x + 3y + 6 = 3 \Rightarrow 18x + 3y = -3 \Rightarrow 6x + y = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1 - 6x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

Resumiendo: Si $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$x = \frac{1}{m}$, $y = 1$, $z = \frac{3}{m}$, si $m = -3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - 6\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$
 si $m = 0$ el sistema es incompatible y si $m = 3$ el sistema es compatible

indeterminado siendo sus soluciones
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula $|C|$ sabiendo que

$$C = 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Simplificamos la matriz C.

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot (A \cdot B^t)^2 \cdot (B^t)^{-1} = 2 \cdot (A \cdot B^t)(A \cdot B^t) \cdot (B^t)^{-1} = \\ &= 2 \cdot A \cdot B^t \cdot A \cdot B^t \cdot (B^t)^{-1} = \left\{ B^t \cdot (B^t)^{-1} = Id \right\} = 2 \cdot A \cdot B^t \cdot A \end{aligned}$$

Calculamos el determinante de C.

$$\begin{aligned} |C| &= |2 \cdot A \cdot B^t \cdot A| = \left\{ \begin{array}{l} A \cdot B^t \cdot A \text{ es} \\ \text{una matriz } 3 \times 3 \end{array} \right\} = 2^3 |A \cdot B^t \cdot A| = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinante de un} \\ \text{producto de matrices es igual al} \\ \text{producto de sus determinantes} \end{array} \right\} = \\ &= 8 \cdot |A| \cdot |B^t| \cdot |A| = \left\{ |B^t| = |B| \right\} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot |B| \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Debemos buscar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s tales que los puntos A, B y P estén alineados.

Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, -2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha)}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x = 3z + 8 \end{cases} \Rightarrow \cancel{2x} + 8 + y - \cancel{3z} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \frac{3}{2}\lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right)}$$

Para que los puntos A, B y P estén alineados los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} A(-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha) \\ B\left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right) \\ P(2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = P(2, 0, -1) - (-1 + 2\alpha, \alpha, -2 + \alpha) = (3 - 2\alpha, -\alpha, 1 - \alpha) \\ \overrightarrow{BP} = P(2, 0, -1) - \left(4 + \frac{3}{2}\lambda, -2, \lambda\right) = \left(-2 - \frac{3}{2}\lambda, 2, -1 - \lambda\right) \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP} \Rightarrow \frac{3 - 2\alpha}{-2 - \frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha}{-1 - \lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2\alpha}{-2 - \frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} \rightarrow 6 - 4\alpha = 2\alpha + \frac{3}{2}\alpha\lambda \\ \frac{-\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha}{-1 - \lambda} \rightarrow \alpha + \alpha\lambda = 2 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - 6\alpha = \frac{3}{2}\alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 12\alpha = 3\alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4\alpha = \alpha\lambda \\ 3\alpha + \alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha + 4 - 4\alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} A(3, 2, 0) \\ 6 + 2\lambda = 2 \rightarrow 2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow B(1, -2, -2) \end{cases}$$

Hallamos la recta que pasa por A, B y P.

$$\left. \begin{array}{l} A(3, 2, 0) \in t \\ B(1, -2, -2) \in t \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -2, -2) - (3, 2, 0) = (-2, -4, -2) \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{-1}{2} (-2, -4, -2) = (1, 2, 1) \\ P(2, 0, -1) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}}$$

La ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P y corta a las rectas r y s es

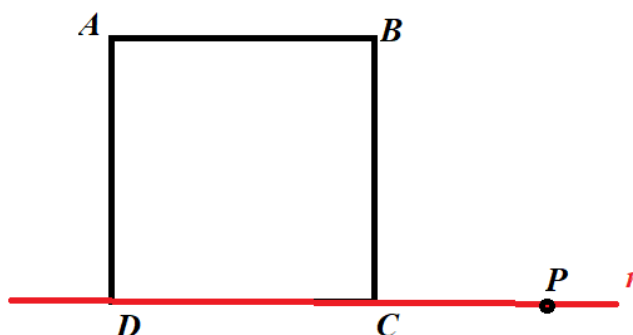
$$t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, 4, 2)$ y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto $P(6, -4, -4)$.

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)



(a) Hallamos el vector $\overline{AB}$ que será el vector director de la recta r que contiene los puntos C y D.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0, -1) \\ B(1, 4, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1, 4, 2) - (1, 0, -1) = (0, 4, 3)$$

Hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos C y D.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ P(6, -4, -4) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

(b) El plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A tiene como vector normal $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ A(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : 4y + 3z + D = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : 4y + 3z + D = 0 \\ A(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow \boxed{\pi : 4y + 3z + 3 = 0}$$

(c) El punto de corte de la recta y el plano es el vértice D del cuadrado.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi : 4y + 3z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-4 + 4\lambda) + 3(-4 + 3\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow -16 + 16\lambda - 12 + 9\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\lambda - 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4 = 0 \\ z = -4 + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(6, 0, -1)$$

Tenemos que $D(6, 0, -1)$. El vértice C lo hallamos sumando al punto D el vector $\overline{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (0, 4, 3) \\ D(6, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow C = D + \overline{AB} = (6, 0, -1) + (0, 4, 3) = (6, 4, 2)$$

El cuarto vértice del cuadrado es $C(6, 4, 2)$.

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$.

a) Demuestra que f es continua en $[2, 3]$.

(0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso.

(1,75 puntos)

a) Para que sea continua debe ser $x^2 + x - 5 > 0$.

$$x \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 2^2 \leq x^2 \leq 3^2 \Rightarrow 2^2 + 2 \leq x^2 + x \leq 3^2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 + 2 - 5 \leq x^2 + x - 5 \leq 3^2 + 3 - 5 \Rightarrow 1 \leq x^2 + x - 5 \leq 7$$

Por lo que existe el logaritmo neperiano y la función es un producto de funciones continuas en el intervalo $[2, 3]$ y por tanto continua en dicho intervalo.

b) Vamos a comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Rolle.

La función es continua en $[2, 3]$.

Tenemos que $f(2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) \cdot \ln(2^2 + 2 - 5) = \cos(\pi) \ln 1 = -1 \cdot 0 = 0$ y

$f(3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) \cdot \ln(3^2 + 3 - 5) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \ln 7 = 0 \cdot \ln 7 = 0$, por lo que $f(2) = f(3)$.

La función es derivable, siendo su derivada

$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x - 5}$. Esta derivada no plantea ningún

problema en el intervalo $(2, 3)$ pues $x^2 + x - 5 > 0$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \ln(x^2 + x - 5)$ en el intervalo $[2, 3]$ y afirmar que existe un punto c en $(2, 3)$ tal que $f'(c) = 0$.

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

(2,5 puntos)

Estudiamos la simetría.

$$f(-x) = \frac{3(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-3x^3}{x^2 - 4} = -\frac{3x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

La función es impar.

Estudiamos sus asíntotas.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-24}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 - 4} = \frac{24}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3x^3} - \cancel{3x^3} + 12x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x} = \frac{12}{\infty} = 0$$

La recta $y = 3x$ es asíntota oblicua de la función.

Estudiamos la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

$x = -2$ es asíntota vertical.

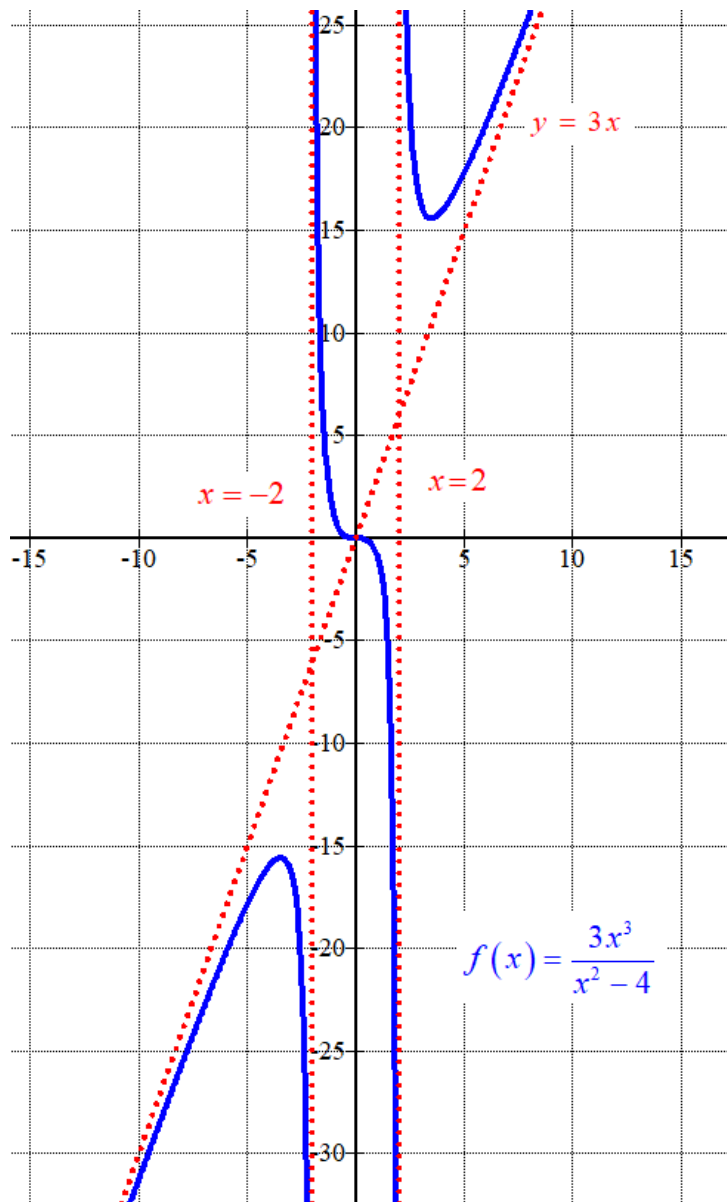
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3(-2)^3}{(-2)^2 - 4} = \frac{-24}{0^-} = +\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 - 4} = \frac{24}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \frac{3 \cdot 2^3}{2^2 - 4} = \frac{24}{0^+} = +\infty$$



EvAU Extraordinaria 2024

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Curso: 2023-2024

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a - 1)y + (a + 1)z = a \\ (2a - 1)y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2,5 puntos)

P2) Sean A , P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos

$A(3, 2, -1)$ y $B(1, 1, -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A , B y C no están alineados.

(1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos.

(1,25 puntos)

P4) El punto $P(4, 5, 0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior

está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que

determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1.25 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$. (1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a - 1)y + (a + 1)z = a \\ (2a - 1)y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 & a \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 & a \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2a - 1 \quad a + 1 \quad a \\ -1 \quad 0 \quad -a^2 - a \quad 0 \\ 0 \quad 2a - 1 \quad -a^2 + 1 \quad a \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 2a - 1 & -a^2 + 1 & a \\ 0 & 2a - 1 & a + 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2a - 1 \quad a + 1 \quad 0 \\ 0 \quad -2a + 1 \quad a^2 - 1 \quad -a \\ 0 \quad 0 \quad a^2 + a \quad -a \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 2a - 1 & -a^2 + 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 + a & -a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 + a \\ 0 & 2a - 1 & -a^2 + 1 \\ 0 & 0 & a^2 + a \end{vmatrix} = (2a - 1)(a^2 + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \\ a^2 + a = 0 \rightarrow a(a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 0} \\ a + 1 = 0 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$, $a = 0$ y cuando $a = \frac{1}{2}$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$, $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{array} \right) &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ (a^2+a)z = -a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ \boxed{z = \frac{-a}{a^2+a} = \frac{-a}{a(a+1)} = \frac{-1}{a+1}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + (a^2+a)\frac{-1}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)\frac{-1}{a+1} = a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + \frac{-a^2-a}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{a^2-1}{a+1} = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + \frac{-a(a+1)}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - a = 0 \\ (2a-1)y + a - 1 = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - a = 0 \\ (2a-1)y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x = a} \\ \boxed{y = \frac{1}{2a-1}} \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

La solución es $x = a$, $y = \frac{1}{2a-1}$, $z = \frac{-1}{a+1}$.

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \ 0 \ 0 \ 0}^{A/B} \\ 0 \ -3 \ 0 \ -1 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 1}_A \end{array} \right)$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ -3y = -1 \\ 0 = 1 \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a = 0$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

CASO 4. $a = \frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 3/4 \quad -1/2 \\ 0 \quad 0 \quad -3/4 \quad -1/2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad 0 \quad 3/4 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad 3/4 \quad 1/2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -1}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq -1$, $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$x = a$, $y = \frac{1}{2a-1}$, $z = \frac{-1}{a+1}$, si $a = -1$ o $a = \frac{1}{2}$ el sistema es incompatible y si $a = 0$ el sistema es

compatible indeterminado siendo sus soluciones $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$ (1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ punto})$$

a) Partimos de la igualdad $Q \cdot A \cdot P = I$.

$$\left. \begin{aligned} Q \cdot A \cdot P = I &\Rightarrow Q^{-1} \cdot Q \cdot A \cdot P = Q^{-1} \cdot I = Q^{-1} \Rightarrow A \cdot P = Q^{-1} \\ Q \cdot A \cdot P = I &\Rightarrow Q \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = I \cdot P^{-1} = P^{-1} \Rightarrow Q \cdot A = P^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$$

b) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2 que cumple $Q \cdot A \cdot P = I$.

$$Q \cdot A \cdot P = I \Rightarrow \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b & a-b \\ -a-2c+2b+4d & a+2c-b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a-b=0 \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a=b \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b+2b=1 \rightarrow \boxed{b=1} \rightarrow \boxed{a=1} \\ -b+2b-2c+4d=0 \\ b-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2c+4d=0 \\ 2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c+4d=-1 \\ 2c=1+2d \end{cases} \Rightarrow -1-2d+4d=-1 \Rightarrow 2d=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d=0} \Rightarrow 2c-0=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos

$A(3, 2, -1)$ y $B(1, 1, -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

- a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)
 b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

a) Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x + z + 4 = y \end{cases} \Rightarrow \\ \pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ 2x - x + z + 4 - z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + 2z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = -4 &\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{-4}{2} = -2 \\ y = -1 - 2 + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(1, 1, -2) \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto C son $C(1, 1, -2)$.

Si los puntos A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} A(3, 2, -1) \\ B(1, 1, -1) \\ C(1, 1, -2) \end{matrix} \right\} &\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) - (3, 2, -1) = (-2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 1, -1) - (3, 2, -1) = (-2, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{0} \end{aligned}$$

Como los vectores no tienen coordenadas proporcionales los tres puntos no están alineados.

- b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

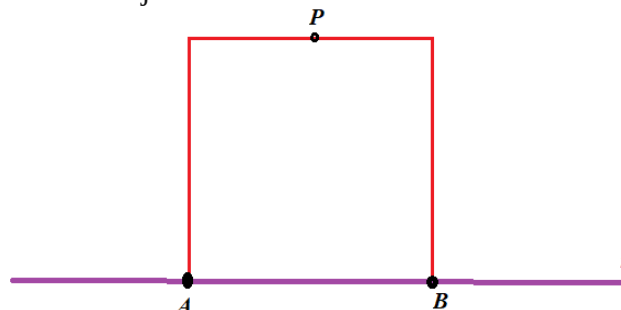
$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -1) \end{matrix} \right\} &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = i + 0 + 2k - 2k - 2j - 0 = \\ &= i - 2j = (1, -2, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} u^2$$

El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado. (2,5 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



Nos piden hallar las coordenadas de los puntos A y B.

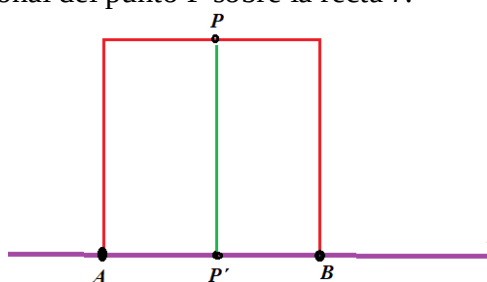
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2x - 2(1 - 2x) = -2x - 2 + 4x = -2 + 2x \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r .



El punto P' pertenece a la recta y tiene coordenadas $P'(\lambda, 1 - 2\lambda, -2 + 2\lambda)$. El vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, -2, 2)$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PP'} = (\lambda, 1 - 2\lambda, -2 + 2\lambda) - (4, 5, 0) = (\lambda - 4, -4 - 2\lambda, -2 + 2\lambda)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} = (\lambda - 4, -4 - 2\lambda, -2 + 2\lambda) \\ \vec{v}_r = (1, -2, 2) \\ \overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda - 4, -4 - 2\lambda, -2 + 2\lambda)(1, -2, 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 4 + 8 + 4\lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{P'(0, 1, -2)}$$

Hallamos la longitud del lado del cuadrado obteniendo el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = (0, 1, -2) - (4, 5, 0) = (-4, -4, -2)$$

$$Lado = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 6 \text{ unidades}$$

Si A es uno de los vértices del cuadrado pertenece a la recta tiene coordenadas $A(\alpha, 1-2\alpha, -2+2\alpha)$. Además, la distancia de A a P' es la mitad de la longitud del lado (3).

$$\overrightarrow{AP'} = (0, 1, -2) - (\alpha, 1-2\alpha, -2+2\alpha) = (-\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP'}| &= \sqrt{(-\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{9\alpha^2} = \begin{cases} 3\alpha \\ -3\alpha \end{cases} \Rightarrow \\ d(A, P') &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow A(1, 1-2, -2+2) \rightarrow A(1, -1, 0) \\ -3\alpha = 3 \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow B(-1, 3, -4) \end{cases}$$

Los vértices del cuadrado situados en la recta son A(1, -1, 0) y B(-1, 3, -4). Comprobamos que P' es el punto medio del segmento AB.

$$\frac{(1, -1, 0) + (-1, 3, -4)}{2} = (0, 1, -2) = P'$$

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1.25 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1.25 puntos)

a) Utilizamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{x} \ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\infty} = \boxed{0}$$

b) Tomamos logaritmo neperiano.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \ln x^{\frac{2x}{x-1}} = \ln L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1} \ln x = \ln L \Rightarrow \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x}{x-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x + 2x \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \ln x + 2 = 2 \ln 1 + 2 = 2$$

$$\dots \Rightarrow 2 = \ln L \Rightarrow L = e^2$$

Hemos obtenido el valor del límite: $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

- a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)
 b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

a) La función es suma de funciones continuas y es una función continua en el intervalo $[0, 1]$.

b) La función $f(x)$ es continua y derivable en el intervalo $[0, 1]$.

Podemos aplicar el teorema de Weierstrass que nos dice que si la función es continua en un intervalo existen puntos dentro del intervalo donde la función alcanza su máximo y mínimo absolutos.

También podemos aplicar el teorema de Fermat que nos dice que si una función derivable tiene un extremo relativo en un intervalo en dicho punto la derivada se anula.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \Rightarrow f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow -\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\pi x) = \sin(\pi x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < \pi x < \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) \Rightarrow f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) - \pi^2 \sin(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi^2 \sqrt{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo relativo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico.

$$f(0) = \cos(0) + \sin(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo absoluto en $(1, -1)$.

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$. (1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

a) Comprobamos que el radicando es positivo en el intervalo $[-1, 3]$.

$$2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(3)}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} = \text{No existe}$$

El polinomio no cambia de signo en el intervalo $[-1, 3]$. Tomamos $0 \in [-1, 3]$ y la expresión del radicando toma el valor $3 > 0$.

El radicando es positivo en el intervalo $[-1, 3]$.

La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.

La función es continua en $[-1, 3]$. La función es derivable en el intervalo $(-1, 3)$ por ser composición de funciones derivables.

b) Utilizamos el teorema del valor medio.

Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$ en el intervalo $[-1, 3]$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, por lo que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)}$.

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3} - \sqrt{2(-1)^2 + 2(-1) + 3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que queda demostrado que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad y \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \ln x = \frac{x-1}{e-1} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 0 \rightarrow x = 1 \\ \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 1 \rightarrow x = e \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y e tenemos que $f(2) = \ln 2 \approx 0.69$ y $g(2) = \frac{2-1}{e-1} \approx 0.58$.

Tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(1, e)$.

El valor del área es la integral definida entre 1 y e de $f(x) - g(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e \ln x - \frac{x-1}{e-1} dx = \int_1^e \ln x dx - \frac{1}{e-1} \int_1^e x-1 dx = \dots$$

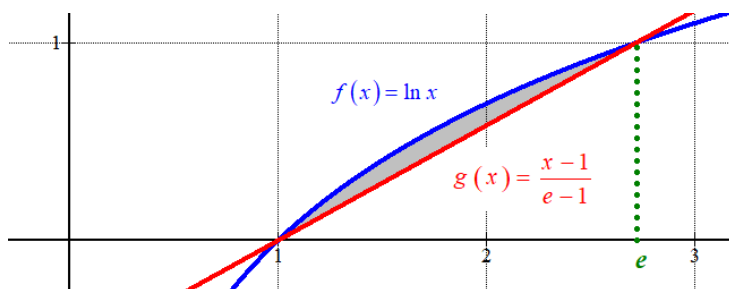
$$\int \ln x dx = \begin{cases} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases} = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$\dots = [x \ln x - x]_1^e - \frac{1}{e-1} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e =$$

$$= [e \ln e - e] - [1 \cdot \ln 1 - 1] - \frac{1}{e-1} \left(\left[\frac{e^2}{2} - e \right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right] \right) = 1 - \frac{1}{e-1} \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{e^2 - 2e + 1}{2} = 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{(e-1)^2}{2} = 1 - \frac{e-1}{2} = \boxed{\frac{3-e}{2} \approx 0.14 u^2}$$

El área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas tiene un valor de $\frac{3-e}{2} \approx 0.14$ unidades cuadradas.



EvAU Ordinaria 2024

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Curso: 2023-2024

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2 - a)z = 3 - a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m , siendo

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Los puntos $A(4, -2, -3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(0, -3, -1)$ son vértices de un rombo.

a) Encuentra el cuarto vértice del rombo.

(1.75 puntos)

b) Calcula el área del rombo.

(0,75 puntos)

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen 3 u^3 , siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi: 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

a) A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro?

(1,5 puntos)

b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

(1 punto)

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1.25 puntos)

b) $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$ (1.25 puntos)

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f . (2.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1.25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \text{ y } g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abscisa positiva. (2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 \\ a-2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2-a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ a-2 \quad a+1 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 2-a \quad -a \quad 2 \quad -4 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad a^2-a \quad 3-a \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2-a-2 \quad 2-a \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 2-a & -a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} = (2-a)(a^2-a-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a=0 \rightarrow \boxed{a=2} \\ a^2-a-2=0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=a} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$ y cuando $a = 2$.

Nos surgen 3 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ (a^2-a-2)z = 2-a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ \boxed{z = \frac{2-a}{a^2-a-2} = \frac{2-a}{(a-2)(a+1)} = \frac{-1}{a+1}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-a)x - ay + 2\frac{-1}{a+1} = -4 \\ y + 2\frac{-1}{a+1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2-a)x - ay = -4 + \frac{2}{a+1} = \frac{-4a-4+2}{a+1} = \frac{-4a-2}{a+1} \\ \boxed{y = 1 + \frac{2}{a+1} = \frac{a+1+2}{a+1} = \frac{a+3}{a+1}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x - a\frac{a+3}{a+1} = \frac{-4a-2}{a+1} \Rightarrow (2-a)x = \frac{-4a-2}{a+1} + \frac{a(a+3)}{a+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x = \frac{-4a-2+a^2+3a}{a+1} \Rightarrow (2-a)x = \frac{a^2-a-2}{a+1} = \frac{\cancel{(a+1)}(a-2)}{\cancel{a+1}} = a-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a-2}{2-a} = -1}$$

La solución es $x = -1$, $y = \frac{a+3}{a+1}$, $z = \frac{-1}{a+1}$

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B =$

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{3 \ 1 \ 2}^{A/B} & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0}_A & 3 \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ 0 = 3 \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a = 2$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{0 \quad -2 \quad 2 \quad -4}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} -2y + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2y + 2z = -4 \\ y = 1 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow -2(1 - 2z) + 2z = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4z + 2z = -4 \Rightarrow 6z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1 - 2 \cdot \frac{-1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{-1}{3} \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$x = -1$, $y = \frac{a+3}{a+1}$, $z = \frac{-1}{a+1}$, si $a = -1$ el sistema es incompatible y si $a = 2$ el sistema es

compatible indeterminado siendo sus soluciones $x = \lambda$; $y = \frac{5}{3}$; $z = \frac{-1}{3}$; para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m , siendo

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

La matriz M tiene 4 filas y 3 columnas. Su rango puede ser 3, 2 o 1.

Hacemos transformaciones en la matriz para obtener otra matriz M' con su mismo rango, pero que el estudio del mismo sea más sencillo.

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 4^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -2 \quad m+1 \quad 2 \\ 2 \quad -2m \quad -2 \\ \hline 0 \quad 1-m \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ m \quad -1 \quad -1 \\ -m+1 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 1 \quad -4 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad -4 \quad -1 \\ -1 \quad m \quad 1 \\ \hline 0 \quad m-4 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & m-4 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (m-1)(1-m) = (m-1)^2$$

Este determinante se anula para $m = 1$.

Analizamos dos situaciones diferentes.

1ª situación. $m \neq 1$.

En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es no nulo y el rango de la matriz M es 3.

2ª situación. $m = 1$.

En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es nulo. Seguimos estudiando el

rango de M partiendo de la matriz equivalente obtenida que queda
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la fila cuarta es nula y que la fila primera y tercera son proporcionales, por lo que el rango de M no puede ser 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar las filas tercera y cuarta, y la columna tercera y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo el rango de M es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ el rango de M es 3 y si $m = 1$ el rango de M es 2.

P3) Los puntos $A(4, -2, -3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(0, -3, -1)$ son vértices de un rombo.

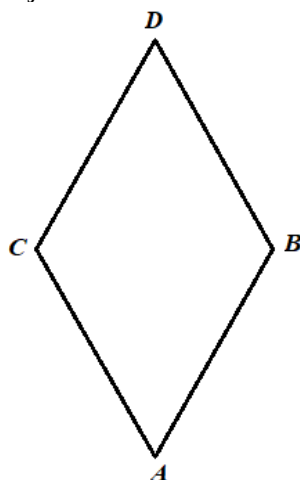
a) Encuentra el cuarto vértice del rombo.

(1,75 puntos)

b) Calcula el área del rombo.

(0,75 puntos)

a) La situación planteada es la del dibujo.



El vértice se obtiene sumando al vértice B el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (0, -3, -1) - (4, -2, -3) = (-4, -1, 2)$$

$$D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -1, 1) + (-4, -1, 2) = (-2, -2, 3)$$

El cuarto vértice del rombo tiene coordenadas $D(-2, -2, 3)$.

b) El rombo lo podemos dividir en dos triángulos: CBD y CBA. Los dos tienen el mismo valor de área. El área del rombo es el doble del área del triángulo CBD. El área del triángulo CBD es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CB} = (2, -1, 1) - (0, -3, -1) = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{CD} = (-2, -2, 3) - (0, -3, -1) = (-2, 1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8i - 4j + 2k + 4k - 8j - 2i = 6i - 12j + 6k = (6, -12, 6)$$

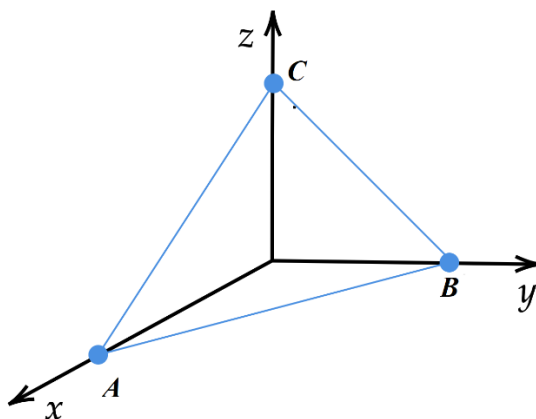
$$\text{Área CBD} = \frac{|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + (-12)^2 + 6^2}}{2} = 3\sqrt{6} \text{ u}^2$$

El área del rombo es $6\sqrt{6} \approx 14.7$ unidades cuadradas.

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3 u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi : 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

- a) A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)
 b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado. (1 punto)

La base del tetraedro es el triángulo ABC del dibujo.



- a) Hallamos las coordenadas de los puntos A, B y C.

$$\pi : 2x - y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0)$$

$$\pi : 2x - y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow -y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(0, -2, 0)$$

$$\pi : 2x - y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2z - 2 = 0 \Rightarrow 2z = -2 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(0, 0, -1)$$

Hallamos el área del triángulo ABC (base del tetraedro).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (0, -2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= (0, 0, -1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, -1) \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i + 0 + 0 - 2k - j - 0 = 2i - j - 2k = (2, -1, -2)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{3}{2} u^2$$

El volumen del tetraedro es la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Área base} \cdot \text{altura}}{3} \Rightarrow 3 = \frac{1.5 \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{9}{1.5} = h \Rightarrow \boxed{h=6}$$

El cuarto vértice del tetraedro debe estar a una distancia de 6 unidades del plano π que contiene la base.

b) Hallamos un plano π' paralelo al plano π a distancia 6.

Al ser paralelo a $\pi: 2x - y - 2z - 2 = 0$ su ecuación es $\pi': 2x - y - 2z + K = 0$. Hacemos que la distancia de A a π' sea 6 para hallar el valor de K.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ \pi': 2x - y - 2z + K = 0 \\ d(A, \pi') = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = \frac{|2 \cdot 1 - 0 - 0 + K|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \Rightarrow 6 = \frac{|2 + K|}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2 + K| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2 + K = 8 \rightarrow K = 6 \rightarrow \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ 2 + K = -8 \rightarrow K = -10 \rightarrow \pi'': 2x - y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

De los dos planos elegimos uno de ellos, por ejemplo $\pi': 2x - y - 2z + 6 = 0$.

Cualquier punto del plano π' junto con los puntos A, B y C forman un tetraedro de volumen 3 unidades cúbicas. Elegimos dos puntos cualesquiera del plano.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2z + 6 = 0 \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow D(0,0,3)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ y } z = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -y + 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow D'(0,6,0)$$

Dos puntos que sirven como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado son $D(0,0,3)$ y $D'(0,6,0)$.

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1.25 puntos)

b) $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$ (1.25 puntos)

a) Antes de derivar simplificamos la expresión de la función en busca de una derivación más cómoda. Después aplicamos logaritmo neperiano a la expresión de la función y derivamos.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} = (x^{-1})^{\cos x} = x^{-\cos x} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(x^{-\cos x}) \Rightarrow \ln(f(x)) = -\cos x \cdot \ln(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Derivamos\} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \text{sen} x \cdot \ln x - \cos x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x) \left(\text{sen} x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = x^{-\cos x} \left(\text{sen} x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x} \right)}$$

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = x^{-\cos x} \left(\text{sen} x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x} \right)$.

b) Aplicamos la regla de derivación de un cociente.

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2} &\Rightarrow g'(x) = \frac{(2x + 4)(x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 1)2(x + 2)}{(x + 2)^4} = \\ &= \frac{(2x + 4)(x + 2) - (x^2 + 4x + 1)2}{(x + 2)^3} = \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 4x + 8 - \cancel{2x^2} - \cancel{8x} - 2}{(x + 2)^3} = \frac{6}{(x + 2)^3} \end{aligned}$$

La derivada de $g(x)$ es $g'(x) = \frac{6}{(x + 2)^3}$.

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f . (2.5 puntos)

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = e^{-x^2} &\Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-x^2} \neq 0\} \Rightarrow x = 0$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \Rightarrow f''(0) = e^0(-2) < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x = 0$ hay un máximo relativo.

Este máximo relativo es absoluto pues antes de $x = 0$ crece y después decrece sin ningún cambio de tendencia ni antes ni después.

Como la función vale $f(0) = e^{-0^2} = 1$ el máximo absoluto tiene coordenadas $(0, 1)$.

Para hallar los posibles puntos de inflexión de la función averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 0 \Rightarrow \{e^{-x^2} \neq 0\} \Rightarrow -2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula para estos dos valores.

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \Rightarrow f'''(x) = -2xe^{-x^2}(-2 + 4x^2) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2}(-2 + 8x + 4x^2)$$

$$f'''(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-1/2} \left(-2 + 8 \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 4 \frac{1}{2} \right) = 8e^{-1/2} \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \neq 0$$

Como la función vale $f(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}) = e^{-1/2}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$.

Asíntota vertical. $x = a$

El dominio de la función son todos los números reales y la función no puede tener asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

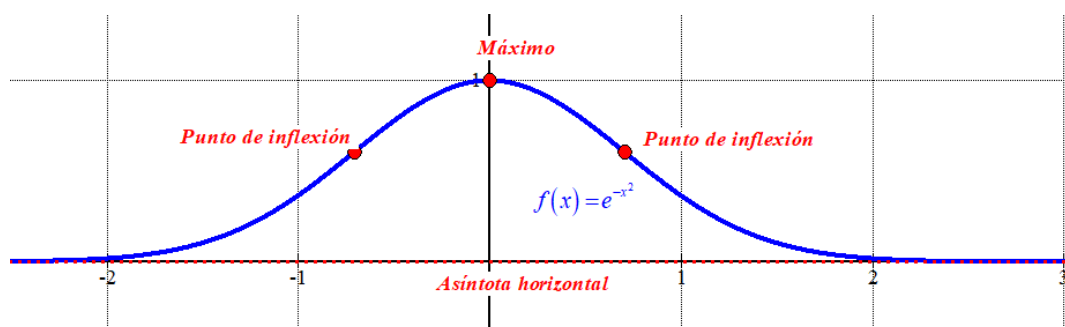
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = e^{-x^2}$
-2	$e^{-4} \approx 0.02$
-1	$1/e \approx 0.37$
0	1 máximo
1	$1/e \approx 0.37$
2	$e^{-4} \approx 0.02$



P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1.25 puntos)
- b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

a) La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.
La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de Bolzano:

Sea f continua en $[a, b]$ y se cumple que $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[-2, 0]$

Como $f(-2) = (-2)^2 + e^{\frac{-2}{4}} - 2 = 2 + e^{-1/2} \approx 2.6 > 0$ y $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (-2, 0)$ tal que $g(\alpha) = 0$, es decir $f(\alpha) = 2$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[0, 4]$

Como $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ y $f(4) = 4^2 + e^{\frac{4}{4}} - 2 = 14 + e \approx 16.7 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\beta \in (0, 4)$ tal que $g(\beta) = 0$, es decir $f(\beta) = 2$.

Queda demostrado haciendo uso del teorema de Bolzano en intervalos distintos que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$.

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \text{ y } g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abscisa positiva. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{9}{x} = 10x - x^3 \Rightarrow 9 = 10x^2 - x^4 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \\ \frac{10-8}{2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = 3$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y 3 tenemos que $f(2) = \frac{9}{2} = 4.5$ y $g(2) = 20 - 2^3 = 12$.

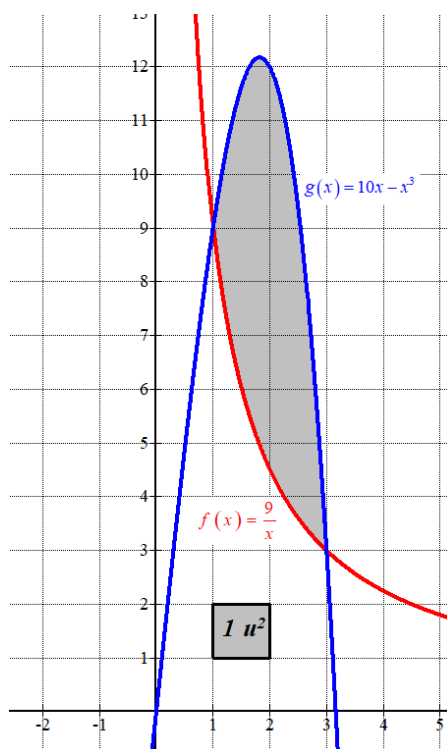
Tenemos que $g(x) > f(x)$ en el intervalo $(1, 3)$.

El valor del área es la integral definida entre 1 y 3 de $g(x) - f(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^3 g(x) - f(x) dx = \int_1^3 10x - x^3 - \frac{9}{x} dx = \left[5x^2 - \frac{x^4}{4} - 9 \ln x \right]_1^3 =$$

$$= \left[5 \cdot 3^2 - \frac{3^4}{4} - 9 \ln 3 \right] - \left[5 \cdot 1^2 - \frac{1^4}{4} - 9 \ln 1 \right] = 45 - \frac{81}{4} - 9 \ln 3 - 5 + \frac{1}{4} = \boxed{20 - 9 \ln 3 \approx 10.11 \text{ u}^2}$$

El área tiene un valor de $20 - 9 \ln 3 \approx 10.11$ unidades cuadradas.



EvAU Extraordinaria 2023

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2 - 1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s , siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = \ln \left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x} \right]$ (1.25 puntos)

b) $g(x) = \arctan \sqrt{1+2x+e^{2x}}$ (1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2}(x-1) \right]}{x^2 - 6x + 10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1, 4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

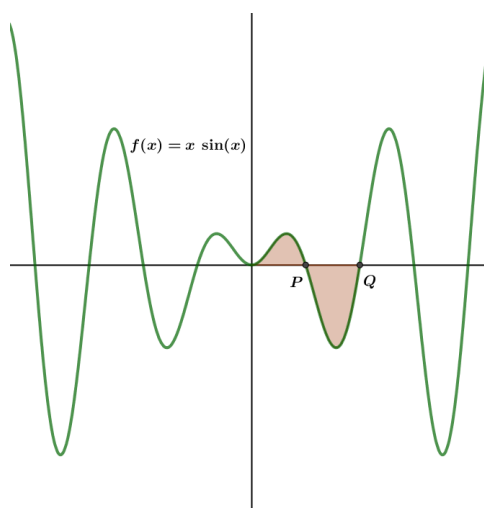
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2 - 1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2 - 1 & a + \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2 - 1 & a + \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3a \quad a^2 \quad -2a^2 \quad 3 \\ -3a \quad -3 \quad 6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad a^2 - 3 \quad -2a^2 + 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -a \quad -1 \quad a^2 - 1 \quad a + \sqrt{3} - 1 \\ a \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2 - 3 \quad a + \sqrt{3} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2 - 3 & -2a^2 + 6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & a + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a^2 - 3 & -2a^2 + 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3)(a^2 - 3)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \rightarrow a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{3}$ y $a \neq +\sqrt{3}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & -2 & 1 & ax+y-2z=1 \\ 0 & a^2-3 & -2a^2+6 & 0 & (a^2-3)y+(-2a^2+6)z=0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} & (a^2-3)z=a+\sqrt{3} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq \pm\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+y-2z=1 \\ (a^2-3)y-2(a^2-3)z=0 \\ \boxed{z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+y-2\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}=1 \\ (a^2-3)y-2\cancel{(a^2-3)}\frac{a+\sqrt{3}}{\cancel{a^2-3}}=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+y=1+\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \\ (a^2-3)y-2(a+\sqrt{3})=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+y=1+\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \\ (a^2-3)y=2(a+\sqrt{3}) \rightarrow \boxed{y = \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} = 1 + \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \Rightarrow ax=1 \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{a}}$$

Simplificamos las soluciones.

$$z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3} = \frac{a+\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})} = \frac{1}{a-\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} = \frac{2}{a-\sqrt{3}}$$

La solución es $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{a-\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{a-\sqrt{3}}$

CASO 2. $a = 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

El rango de A es 2 pues tiene la primera columna nula. Comprobamos que el rango de A/B es 3 tomando el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª..

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} + 9 + 6\sqrt{3} \neq 0$$

El rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

CASO 3. $a = \sqrt{3}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\sqrt{3} & 1 & -2 & 1}^{A/B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son distintos. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 4. $a = -\sqrt{3}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada también es 1, pero es menor que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Lo resolvemos.

$$-\sqrt{3}x + y - 2z = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2z + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{3}\alpha + 2\beta + 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$$

Resumiendo: Si $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{3}$ y $a \neq +\sqrt{3}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{a-\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{a-\sqrt{3}}$. Si $a = \sqrt{3}$ o $a = 0$ el sistema es incompatible. Si

$a = -\sqrt{3}$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{3}\alpha + 2\beta + 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$.

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Para que la matriz sea no regular su determinante debe ser nulo.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna } 4^a - \text{Columna } 3^a \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a+3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ a+2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Nueva Columna } 4^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & a+2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \{ \text{Desarrollo por la } 4^a \text{ columna} \} =$$

$$= (a+2) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (a+2)(-6-8+0-2+12-0) = -4(a+2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4(a+2) = 0 \Rightarrow a+2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La matriz A es no regular cuando $a = -2$.

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s , siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z + 1 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y + z + 1 - y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 3z + 2 = 0 \Rightarrow -2y = -3z - 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}z + 1} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z - 1 + z + 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha \\ y = 1 + \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \vec{w}_r = (-1, 3, 2)$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \\ Q_s(3, -5, -3) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

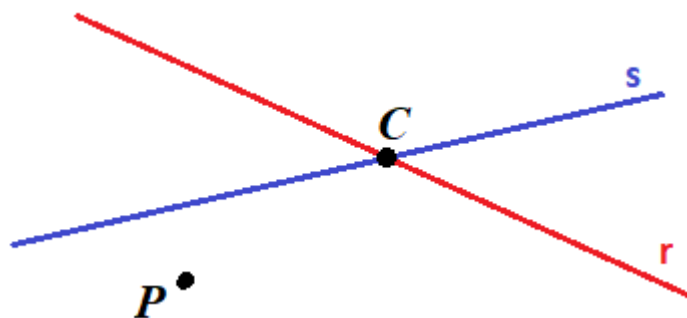
$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-1, 3, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{w}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (3, -5, -3) - (0, 1, 0) = (3, -6, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-1, 3, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (3, -6, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 9 + 12 - 12 - 9 - 6 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.



La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y por el punto $P(-3, -2, 3)$.

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = \frac{-1}{2}\alpha \\ y = 1 + \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 - \lambda = \frac{-1}{2}\alpha \\ -5 + 2\lambda = 1 + \frac{3}{2}\alpha \\ -3 + \lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - \lambda = \frac{-1}{2}(\lambda - 3) \\ -5 + 2\lambda = 1 + \frac{3}{2}(\lambda - 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - 2\lambda = -\lambda + 3 \\ -10 + 4\lambda = 2 + 3\lambda - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = -5 + 6 = 1 \\ z = -3 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 1, 0)$$

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PC} = (0, 1, 0) - (-3, -2, 3) = (3, 3, -3) \rightarrow \vec{v}_t = (1, 1, -1) \\ P(-3, -2, 3) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}}$$

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}.$$

(2,5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z + 7 = y \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 2(2x + 2z + 7) + 2z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 4x + 4z + 14 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow 9x + 6z + 12 = 0 \Rightarrow 3x + 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = -4 - 2z \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z} \Rightarrow y = 2\left(\frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z\right) + 2z + 7 = \frac{-8}{3} - \frac{4}{3}z + 2z + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ y = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \rightarrow \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \alpha = 1 \rightarrow P_r(-2, 5, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 0, -1) \\ Q_s(1, -3, 5) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 5 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_r &= (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s &= (2, 0, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{3}{-1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{w}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (1, -3, 5) - (-2, 5, 1) = (3, -8, 4)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_r &= (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s &= (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} &= (3, -8, 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 48 - 0 - 16 + 16 = -54 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano paralelo a r y s tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{w}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 4k - 2j = -2i + 4j - 4k = (-2, 4, -4)$$

Hallamos la ecuación de los planos paralelos a las rectas r y s . Tomaremos como vector normal del plano el obtenido con el producto vectorial pero dividido por 2.

$$\vec{n} = (-1, 2, -2) \Rightarrow \pi: -x + 2y - 2z + D = 0$$

Le aplicamos que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s . También sabemos que las rectas y el plano son paralelos, por lo que la distancia de cualquiera de las rectas al plano es la distancia de uno de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x + 2y - 2z + D = 0 \\ P_r(-2, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 + 10 - 2 + D|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|10 + D|}{3}$$

$$d(r, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|10 + D|}{3} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{10 + D}{3} = 3 \rightarrow 10 + D = 9 \rightarrow \boxed{D = -1} \\ \frac{10 + D}{3} = -3 \rightarrow 10 + D = -9 \rightarrow D = -19 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x + 2y - 2z + D = 0 \\ Q_s(1, -3, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-1 - 6 - 10 + D|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-17 + D|}{3}$$

$$d(s, \pi) = 6 \Rightarrow \frac{|-17 + D|}{3} = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-17 + D}{3} = 6 \rightarrow -17 + D = 18 \rightarrow D = 35 \\ \frac{-17 + D}{3} = -6 \rightarrow -17 + D = -18 \rightarrow \boxed{D = -1} \end{cases}$$

Las dos condiciones se cumplen simultáneamente para $D = -1$, por lo que el plano buscado tiene ecuación $\pi: -x + 2y - 2z - 1 = 0$.

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]$ (1.25 puntos)

b) $g(x) = \arctan \sqrt{1+2x+e^{2x}}$ (1.25 puntos)

a)

$$f'(x) = \frac{[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]'}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}} = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) e^{x^2+2x} + \cos(\pi x)(2x+2)e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) e^{x^2+2x} + (2x+2)\cos(\pi x) e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}}$$

$$f'(0) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(0) e^{0^2+0} + (0+2)\cos(0) e^{0^2+0}}{\cos(0) \cdot e^{0^2+0}} = \frac{0+2}{1} = 2$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}] = \ln[\cos(\pi x)] + \ln[e^{x^2+2x}] = \ln[\cos(\pi x)] + x^2 + 2x$$

$$f'(x) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x)}{\cos(\pi x)} + 2x + 2 = 2x + 2 - \pi \operatorname{tg}(\pi x)$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 - \pi \operatorname{tg}(\pi \cdot 0) = 0 + 2 - \pi \cdot 0 = 2$$

b)

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{1+2x+e^{2x}})'}{1+(\sqrt{1+2x+e^{2x}})^2} = \frac{\frac{2+2e^{2x}}{2\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}{1+1+2x+e^{2x}} = \frac{2+2e^{2x}}{2(2+2x+e^{2x})\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x})\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(0) = \frac{1+e^0}{(2+0+e^0)\sqrt{1+0+e^0}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

P6) Se considera la función $f(x) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2 - 6x + 10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1, 4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

La función $\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[1, 4]$.

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \nexists$$

El denominador nunca se anula y por tanto la función es continua.

a) Usaremos el teorema de Darboux:

Sea f continua en $[a, b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = m$.

En el intervalo $[1, 4]$ buscamos valores de la función con distinto signo.

$$f(1) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-1)\right]}{1^2 - 6 + 10} = \frac{1}{5}$$

$$f(2) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2-1)\right]}{2^2 - 12 + 10} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(3) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(3-1)\right]}{3^2 - 18 + 10} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f(4) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(4-1)\right]}{4^2 - 24 + 10} = \frac{0}{2} = 0$$

Consideramos la función $g(x) = -f(x)$. Así $g(2) = 0$ y $g(3) = 1$.

La función $g(x)$ es continua en el intervalo $[2, 3]$ y se cumple que $g(2) = 0 < \frac{1}{2} < 1 = g(3)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\alpha \in (2, 3)$ tal que $g(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Esto implica que existe $\alpha \in (2, 3)$ tal que $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Como la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[3, 4]$ y se cumple que $f(3) < -\frac{1}{2} < f(4)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\beta \in (3, 4)$ tal que $f(\beta) = -\frac{1}{2}$.

Como los valores α y β pertenecen a intervalos distintos son valores diferentes y pertenecientes al intervalo $(1, 4)$.

Existen $\alpha, \beta \in (1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7,11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1,25

puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

a) La función es suma y composición de funciones continuas.

Solo falta comprobar que el radicando es positivo en el intervalo $[7,11]$.

$$x \in [7,11] \Rightarrow 7 \leq x \leq 11 \Rightarrow \frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \pi \leq \frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{11\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{6} \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) < 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) > \frac{1}{2} > 0}$$

La función es continua en $[7,11]$.

$$\text{La derivada de la función es } f'(x) = \frac{0 - \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}} = \frac{-\pi \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{12\sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}}$$

Esta derivada existe en el intervalo $[7,11]$ pues hemos comprobado que el denominador nunca se anula.

La función es derivable en $(7,11)$

b) Utilizamos el teorema de Rolle:

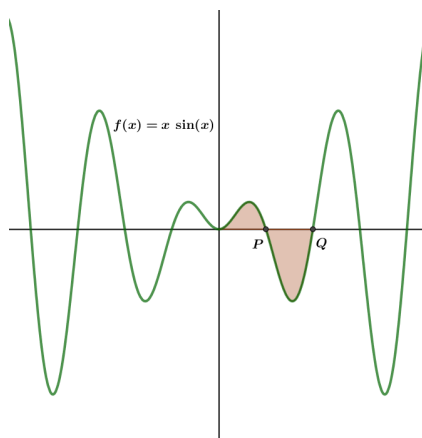
Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) siendo $f(a) = f(b)$ entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Consideramos la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$, que es continua en $[7,11]$ y derivable en $(7,11)$

$$\text{, como } \left. \begin{aligned} f(7) &= \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 1 \\ f(11) &= \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(7) = f(11) = 1.$$

Aplicando el teorema de Rolle existe $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \cdot \sin x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pi; x = 2\pi; \dots \end{cases} \Rightarrow P(\pi, 0); Q(2\pi, 0)$$

El área la calculamos en dos partes que luego sumaremos.

El área entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Calculamos primero la primitiva de la función usando el método de integración por partes.

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + K$$

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x = 0$ y $x = \pi$.

$$\text{Área 1} = \int_0^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = [-\pi \cos \pi + \sin \pi] - [-0 \cdot \cos 0 + \sin 0] = \pi u^2$$

El área entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

$$\text{Área 2} = \left| \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx \right| = \left| [-x \cos x + \sin x]_{\pi}^{2\pi} \right| =$$

$$= \left| [-2\pi \cos 2\pi + \sin 2\pi] - [-\pi \cos \pi + \sin \pi] \right| = |-3\pi| = 3\pi u^2$$

El área total es la suma del área 1 y el área 2, es decir, $\pi + 3\pi = 4\pi u^2$.

EvAU Ordinaria 2023

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a - 1)y + (\sqrt{2} - 2)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A \cdot B$ es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

P4) Sean $P(1, 5, -1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$.

(1,25 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x \ln x dx$

(1.25 puntos)

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1-x} & x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & x \geq 1 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$.

(0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a - 1)y + (\sqrt{2} - 2)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a - 1 & \sqrt{2} - 2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a - 1 & \sqrt{2} - 2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a - 1 & \sqrt{2} - 2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2a - 1 \quad \sqrt{2} - 2 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2a + 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\{a \neq 0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + a \cdot \text{Fila } 1^a \\ -a \quad a \quad 2a^2 \quad \sqrt{2} \\ a \quad -a \quad -a \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2a^2 - a \quad \sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a + 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2a + 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2a^2 - a \end{vmatrix} = (2a + 1)(2a^2 - a) = a(2a + 1)(2a - 1)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a = 0 \\ 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ 2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq \frac{-1}{2}$ y $a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & x-y-z=0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 & (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} & (2a^2-a)z=\sqrt{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-z=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y+\frac{2}{2a^2-a}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=2-\frac{2}{2a^2-a}=\frac{4a^2-2a-2}{2a^2-a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=\frac{2(2a^2-a-1)}{2a^2-a}=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{2a^2-a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=y+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ \boxed{y=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{(2a^2-a)(2a+1)}=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}}$$

La solución es $x=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}$, $y=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}$

CASO 2. $a=0$

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \end{array} \right)$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 2 \\ 0 = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a = \frac{-1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \sqrt{2} \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2\sqrt{2} \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2\sqrt{2} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad -1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ \sqrt{2}z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ z = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = \sqrt{2} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{2} \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

CASO 4. $a = \frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2y + \sqrt{2}z = 2 \\ 0 = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

Resumiendo: Si $a \neq 0$, $a \neq \frac{-1}{2}$ y $a \neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$x = \frac{2a - 2 + \sqrt{2}}{2a^2 - a}, \quad y = \frac{2 \cdot (a - 1)}{2a^2 - a}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2 - a}. \quad \text{Si } a = \frac{1}{2} \text{ o } a = 0 \text{ el sistema es incompatible. Si}$$

$$a = \frac{-1}{2} \text{ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones } \begin{cases} x = \sqrt{2} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{2} \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A \cdot B$ es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

La matriz $A \cdot B$ es una matriz de dimensiones 3×3 , por lo que su rango máximo posible es 3.

Para que su rango sea máximo su determinante debe ser no nulo.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t+1) \left[-t(t+1) - 2t+1 - t^2 - (t+1)(-2t+1) \right] =$$

$$= (t+1) \left[\cancel{-t^2} - t - \cancel{2t+1} - \cancel{t^2} + \cancel{2t^2} - t + \cancel{2t-1} \right] =$$

$$= (t+1) [-2t]$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = (1)(t+1)(-2t) = -2t(t+1)$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow -2t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

El rango de $A \cdot B$ es máximo cuando el valor de t es distinto de 0 y de -1.

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + z - 2 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow y + z - 2 - 3y + 3z - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 4z - 10 = 0 \Rightarrow y - 2z + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -5 + 2z} \Rightarrow \boxed{x = -5 + 2z + z - 2 = -7 + 3z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ P_r(-7, -5, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ Q_s(2, -5, 0) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (3, -4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{3} \neq \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -5, 0) - (-7, -5, 0) = (9, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (9, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 + 0 + 36 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de la recta r y s .

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ Q_s(2, -5, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = -5 - 4\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 r &\equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\
 s &\equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = -5 - 4\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} -7 + 3\lambda = 2 + 3\alpha \\ -5 + 2\lambda = -5 - 4\alpha \\ \lambda = -2\alpha \end{cases}
 \Rightarrow \begin{cases} -7 + 3(-2\alpha) = 2 + 3\alpha \\ -5 + 2(-2\alpha) = -5 - 4\alpha \end{cases}
 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 - 6\alpha = 2 + 3\alpha \\ -5 - 4\alpha = -5 - 4\alpha \end{cases}
 \Rightarrow \begin{cases} -9 = 9\alpha \\ 0 = 0 \end{cases}
 \Rightarrow \alpha = -1
 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 = -1 \\ y = -5 + 4 = -1 \\ z = 2 \end{cases}
 \Rightarrow \boxed{C(-1, -1, 2)}$$

Hallamos el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s &= (3, -4, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4i + 3j - 12k - 6k + 6j + 4i = 9j - 18k = (0, 9, -18)$$

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_t &= (0, 9, -18) \rightarrow \vec{v}_t = (0, 1, -2) \\ M &(-1, -1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}}$$

P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

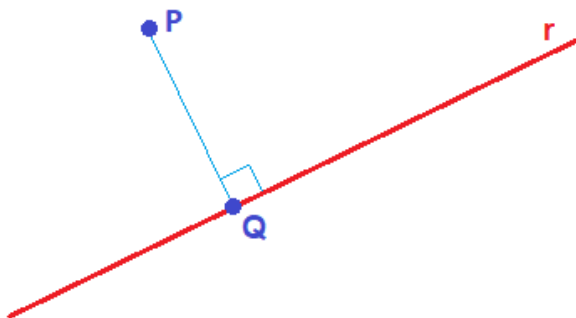
a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$:

(1,25 puntos)

a) El punto Q buscado es la proyección ortogonal del punto P en la recta r .



Para determinar el punto Q determinamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por P. Dicho plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (2,1,2) \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z + D = 0 \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 5 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0$$

El punto Q es el punto de corte del plano π y la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2 + \lambda + 2(-4 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 2 + \lambda - 8 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3,3,-2)}$$

b) La recta tiene ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$

Los puntos están en la recta y tienen coordenadas $Q_1(1+2a, 2+a, -4+2a)$.

$$\overrightarrow{PQ_1} = (1+2a, 2+a, -4+2a) - (1, 5, -1) = (2a, a-3, 2a-3)$$

$$d(P, Q_1) = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ_1}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2a)^2 + (a-3)^2 + (2a-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 + a^2 + 9 - 6a + 4a^2 + 9 - 12a} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{9a^2 - 18a + 18} = \sqrt{18} \Rightarrow \begin{cases} 9a^2 - 18a + 18 = 18 \rightarrow 9a^2 - 18a = 0 \rightarrow a^2 - 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \\ 0 \\ -(9a^2 - 18a + 18) = 18 \rightarrow 9a^2 - 18a + 36 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow a^2 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \text{no se resuelve} \end{cases}$$

Obtenemos dos valores que sustituimos en las ecuaciones de la recta obteniendo los puntos Q_1 y Q_2 .

$$a = 0 \Rightarrow Q_1(1+0, 2+0, -4+0) = (1, 2, -4)$$

$$a = 2 \Rightarrow Q_2(1+4, 2+2, -4+4) = (5, 4, 0)$$

Los puntos buscados son $Q_1(1, 2, -4)$ y $Q_2(5, 4, 0)$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x \ln x dx$

(1.25 puntos)

a) Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx = \dots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-5 = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \rightarrow -9 = B(-3) \rightarrow B=3 \\ x=1 \rightarrow -3 = 3A \rightarrow A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-5}{x^2+x-2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = \boxed{-\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + K}$$

b) Aplicamos el método de integración por partes.

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K}$$

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} & x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & x \geq 1 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $(-\infty, 1)$.

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (-\infty, 1)$$

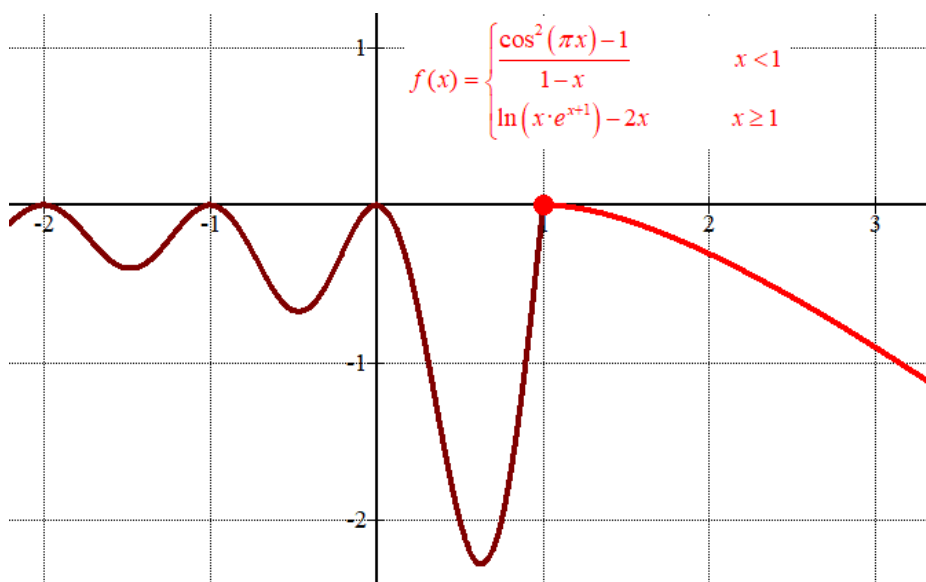
En el intervalo $[1, +\infty)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar que existe el logaritmo neperiano, para ello la expresión $x \cdot e^{x+1}$ debe ser positiva, como la función exponencial siempre es positiva, debe ser positivo el valor de x , lo cual se cumple, pues son valores mayores que 1.

Falta comprobar la continuidad en el cambio de definición $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \cos(\pi x)(-\sin(\pi x)\pi)}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)}{-1} = 2\pi \cos(\pi) \sin(\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \ln(1 \cdot e^{1+1}) - 2 \cdot 1 = \ln(e^2) - 2 = 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

La función es continua en $x = 1$. La función es continua en $\mathbb{R}$.



P7) Se considera la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$. (0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s)

teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

a) La función es producto y composición de funciones continuas.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):

Sea f continua en $[a,b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = m$.

Consideramos la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$, que es continua en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Como $f(0) = (0+1)\sin(\pi \cdot 0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Tenemos que $f(0) = 0 < \frac{3}{4} < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Este valor α obtenido también está incluido en el intervalo $(0, 1)$.

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{-2} = \nexists \end{cases}$$

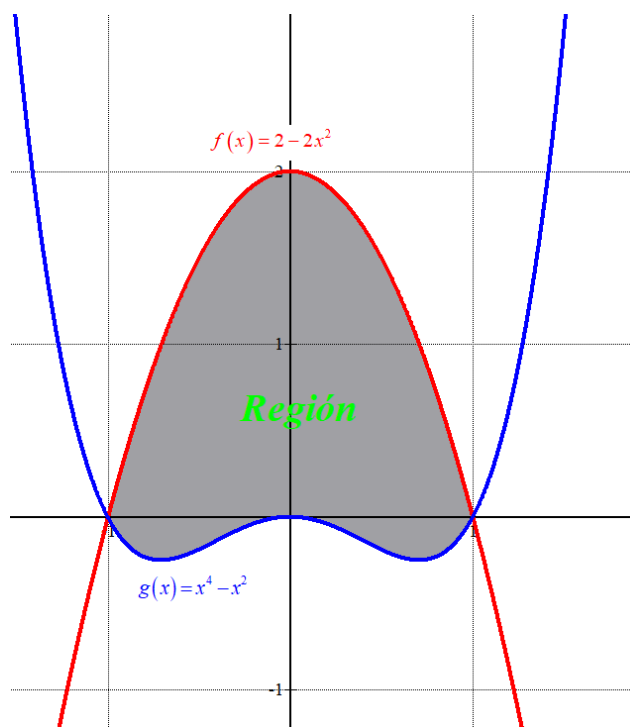
El área se encuentra entre $x = -1$ y $x = 1$.

Tomando un valor $x = 0$ entre -1 y 1 tenemos que $f(0) = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$ y $g(0) = 0^4 - 0^2 = 0$.

Tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$.

El valor del área es la integral definida entre -1 y 1 de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 2 - 2x^2 - (x^4 - x^2) dx = \int_{-1}^1 2 - 2x^2 - x^4 + x^2 dx = \\ &= \int_{-1}^1 -x^4 - x^2 + 2 dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right] = \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 = \boxed{\frac{44}{15} \approx 2.93 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



EvAU Extraordinaria 2022

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2 \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2 , siendo B la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(x+1) - x}$$

(1.25 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\sin \frac{\pi x}{6} - \cos \frac{\pi x}{6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2, 4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x - 2$$

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2 \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Intentamos simplificar el sistema y obtener otro equivalente de expresión más sencilla.

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2 \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ (a^2 - 1)x + (a + 1)y + (a^2 + a)z = 2 \\ - (a^2 - 1)x - ay - a^2z = -1 \\ \hline 0 \quad y + az = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ y + az = 1 \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ y + (a^2 + 2a)z = a + 2 \\ -y - az = -1 \\ \hline 0 \quad (a^2 + a)z = a + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ y + az = 1 \\ (a^2 + a)z = a + 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 + a \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2 + a \end{vmatrix} = (a^2 - 1)(a^2 + a)$$

Comprobamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow (a^2 - 1)(a^2 + a) = 0 \Rightarrow (a+1)(a-1)a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1} \\ a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Estudiamos por separado cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0; a \neq 1$ y $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Como $a \neq 0; a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $a \neq 0; a-1 \neq 0$ y $a+1 \neq 0$ y podemos resolverlo.

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ y + az = 1 \\ (a^2 + a)z = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2z = 1 \\ y + az = 1 \\ \boxed{z = \frac{a+1}{a^2+a} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a^2 \frac{1}{a} = 1 \\ y + a \frac{1}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 1)x + ay + a = 1 \\ y + 1 = 1 \rightarrow \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow (a^2 - 1)x + a \cdot 0 + a = 1 \Rightarrow (a^2 - 1)x = 1 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1-a}{a^2-1} = \frac{-(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-1}{a+1}}$$

La solución es $x = \frac{-1}{a+1}; y = 0; z = \frac{1}{a}$

CASO 2. $a = 0$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} -x = 1 \\ y = 1 \\ \boxed{0 = 1} \end{cases} \Rightarrow \text{¡Igualdad imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow y + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son $x = t; y = 0; z = 1; t \in \mathbb{R}$

CASO 4. $a = -1$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3.

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} -y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow -1 - z + z = 1 \Rightarrow -1 = 1 \quad \text{¡Igualdad imposible!}$$

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 0$; $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, siendo la solución del sistema: $x = \frac{-1}{a+1}$; $y = 0$; $z = \frac{1}{a}$, si $a = 0$ o $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado, siendo sus soluciones: $x = t$; $y = 0$; $z = 1$; $t \in \mathbb{R}$.

P2) Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2 , siendo B la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Columna 3}^a - \text{Columna 1}^a - 2 \cdot \text{Columna 2}^a \\ \text{El determinante no cambia de valor} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = \{ \text{Una columna con todo ceros} \} = \boxed{0}$$

P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto P $(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

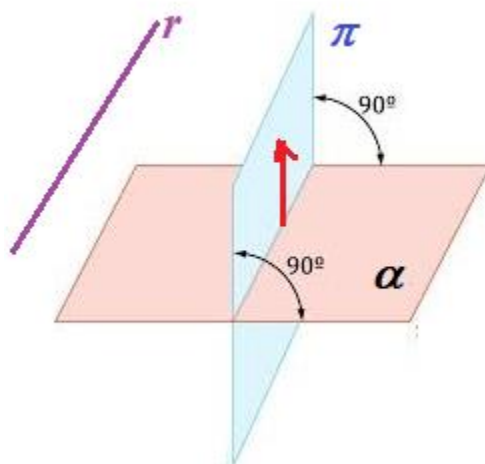
$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Hallamos el vector director de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y = z + 3 \end{cases} \Rightarrow x + z + 3 - 2z - 3 = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 3, 0) \end{cases}$$



El plano π que nos piden hallar tiene como vector director el normal del plano α y su otro vector director es el vector director de la recta.

$$\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ P(-1, 2, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 1 - y + 2x + 2z - x + z - 1 - 2y + 4 + x + 1 = 0 \Rightarrow -3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv y - z - 1 = 0}$$

P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$ (2.5 puntos)

El centro de la esfera de radio 3 tangente al plano está a una distancia 3 del plano.

El problema se reduce a determinar que puntos de la recta r están a distancia 3 del plano π .

Pasamos la ecuación implícita de la recta a ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ -x + y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\quad \quad \quad} \quad \underline{\quad \quad \quad}$$

$$2x \quad \quad -2z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2z + 2 = 0 \Rightarrow x - z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 + z} \Rightarrow 3(-1 + z) - y + z - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 + 3z - y + z - 6 = 0 \Rightarrow -y + 4z - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -9 + 4z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -9 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto A genérico de la recta tiene coordenadas $A(-1+t, -9+4t, t)$.

Determinamos la expresión de la distancia de A al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0 \\ A(-1+t, -9+4t, t) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|2(-1+t) + 2(-9+4t) - t - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|-2 + 2t - 18 + 8t - t - 7|}{\sqrt{9}} = \frac{|9t - 27|}{3}$$

Igualamos esta distancia a 3.

$$d(A, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|9t - 27|}{3} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{9t - 27}{3} = 3 \rightarrow 9t - 27 = 9 \rightarrow 9t = 36 \rightarrow t = 4 \\ \frac{9t - 27}{3} = -3 \rightarrow 9t - 27 = -9 \rightarrow 9t = 18 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 4 \Rightarrow A(-1+4, -9+16, 4) \Rightarrow \boxed{A(3, 7, 4)}$$

$$\text{Si } t = 2 \Rightarrow A(-1+2, -9+8, 2) \Rightarrow \boxed{A(1, -1, 2)}$$

Los dos puntos buscados son $A(3, 7, 4)$ y $B(1, -1, 2)$

P5) Sea la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{x}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia el/los resultado(s) utilizado(s). y justifica su uso. (1.75 puntos)

a) Si $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ entonces existe $\frac{1}{x}$, además $\frac{1}{x} > 0$, por lo que existe $\ln \frac{1}{x}$.

Como la función $f(x)$ es composición de funciones continuas la función es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) Comprobamos que la función es derivable y que su derivada es continua.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} (\ln 1 - \ln x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} (-\ln x)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} \ln x\right)$$

$$f'(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} \ln x\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{4} \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{4x} \cos\left(-\frac{\pi}{4} \ln x\right)$$

Esta función derivada también es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

Calculamos el valor de la derivada en los extremos del intervalo.

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi}{4 \cdot \frac{1}{e}} \cos\left(-\frac{\pi}{4} \ln \frac{1}{e}\right) = -\frac{\pi e}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi e}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi e \sqrt{2}}{8}$$

$$f'(e) = -\frac{\pi}{4e} \cos\left(-\frac{\pi}{4} \ln e\right) = -\frac{\pi}{4e} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4e} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi \sqrt{2}}{8e}$$

Comprobamos que $\frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$ está comprendido entre estos dos valores.

$$\text{¿} -\frac{\pi e \sqrt{2}}{8} < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < -\frac{\pi \sqrt{2}}{8e} \text{?} \Rightarrow \text{¿} -\frac{\pi e}{8} < \frac{e}{1-e^2} < -\frac{\pi}{8e} \text{?} \Rightarrow \text{¿} -1.0675 < -0.425 < -0.1444 \text{?}$$

Es cierto y por tanto se cumplen las condiciones del teorema de Darboux o de los valores intermedios.

a) $f'(x) = -\frac{\pi}{4x} \cos\left(-\frac{\pi}{4} \ln x\right)$ es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

b) $f'\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2} < f'(e)$

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$.

P6) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(x+1) - x} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

Primer límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1} &= 1^{+\infty} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + x - 1} - 1 \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-x+1}{x^2 + x - 1} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + x - 1}{-x+1}} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + x - 1}{-x+1}} \right)^{(2x-1) \cdot \frac{-x+1}{-x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + x - 1}{-x+1}} \right)^{\frac{x^2 + x - 1}{-x+1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \cdot \frac{-x+1}{x^2 + x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 2x + x - 1}{x^2 + x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 1}} = \boxed{e^{-2}} \end{aligned}$$

Segundo límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(x+1) - x} &= \frac{(e^0 - 1)^2}{\ln(0+1) - 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \text{L'Hôpital} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)e^x}{\frac{1}{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{\frac{1-x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2e^x}{\frac{-x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 2e^x)(x+1)}{-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{2x} - 2xe^x + 2e^{2x} - 2e^x}{-x} = \frac{0-0+2e^0-2e^0}{-0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \text{L'Hôpital} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} + 2x2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x + 4e^{2x} - 2e^x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^x - 4e^x}{-1} = \\ &= \frac{6e^0 + 0 - 0 - 4e^0}{-1} = \frac{6-4}{-1} = \boxed{-2} \end{aligned}$$

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2, 4]$. (1 punto)
- b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2, 4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

a) Comprobamos que siendo $x \in [2, 4]$ el valor de $\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}$ es positivo y por tanto existe $\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$.

$$\text{Si } x \in [2, 4] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{\pi 4}{6} \Rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } 60^\circ \leq \frac{\pi x}{6} \leq 90^\circ \rightarrow \sin\frac{\pi x}{6} > \cos\frac{\pi x}{6} \rightarrow \sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6} > 0 \\ \text{Si } 90^\circ < \frac{\pi x}{6} \leq 120^\circ \rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{6} < 0 \\ \sin\frac{\pi x}{6} > 0 \end{cases} \rightarrow \sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6} > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, en el intervalo $[2, 4]$ está definido $\ln\left(\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$ y existe $f(x)$.

Además, la función es continua pues es composición de funciones continuas.

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \ln\left(\sin\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$ en el intervalo $[2, 4]$

Se cumplen las condiciones exigidas en el teorema: $f(x)$ es continua en $[2, 4]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$f(2) = \ln\left(\sin\frac{\pi 2}{6} - \cos\frac{\pi 2}{6}\right) = \ln\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.148 < 0$$

$$f(4) = \ln\left(\sin\frac{\pi 4}{6} - \cos\frac{\pi 4}{6}\right) = \ln\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0.311 > 0$$

Según el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (2, 4)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

P8) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x - 2 \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Averiguamos los puntos de intersección de las dos gráficas.

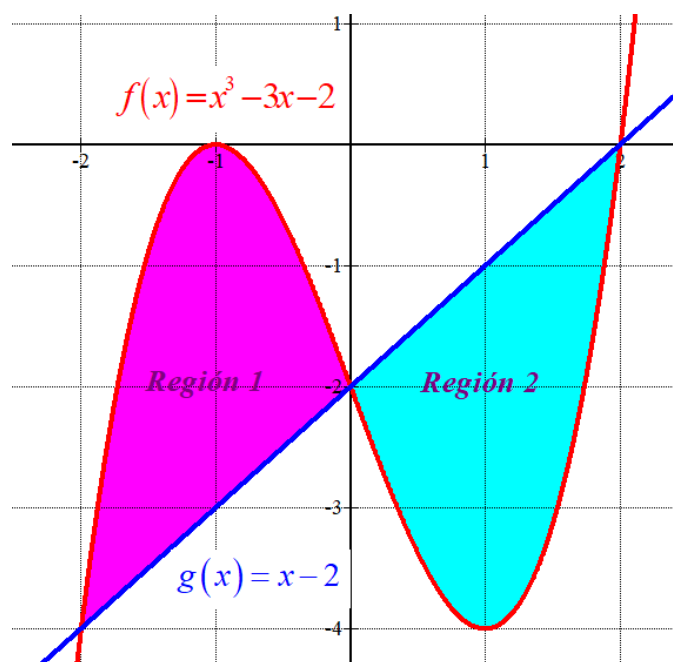
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow x^3 - 3x - 2 = x - 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Como coinciden en tres puntos el área de la región que encierran la calculamos con dos integrales definidas, una entre -2 y 0 y la otra entre 0 y 2 .

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \left| \int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 x^3 - 3x - 2 - (x - 2) dx \right| = \left| \int_{-2}^0 x^3 - 3x - 2 - x + 2 dx \right| = \\ &= \left| \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 \right| = \left| \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right] \right| = |-(4 - 8)| = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \left| \int_0^2 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_0^2 x^3 - 4x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right] \right| = |4 - 8| = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

El área de la región del plano limitada por las dos gráficas es igual a la suma de las áreas calculadas y tenemos que vale $4 + 4 = 8 u^2$. Dibujamos las gráficas y la región limitada por ellas.



EvAU Ordinaria 2022

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2021-2022

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1, -5, 3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x} dx$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$

(0.75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ x + (a^2 - 4)y + (2a - 3)z = -a^2 - 2a \\ x + (a^2 - 4a + 4)y + (a^2 - 2a)z = -a^2 + a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2 - 4 & 2a - 3 & -a^2 - 2a \\ 1 & a^2 - 4a + 4 & a^2 - 2a & -a^2 + a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad a^2 - 4 \quad 2a - 3 \quad -a^2 - 2a \\ -1 \quad -a^2 + 2a \quad 1 \quad a^2 \\ \hline 0 \quad 2a - 4 \quad 2a - 2 \quad -2a \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad a^2 - 4a + 4 \quad a^2 - 2a \quad -a^2 + a - 1 \\ -1 \quad -a^2 + 2a \quad 1 \quad a^2 \\ \hline 0 \quad -2a + 4 \quad a^2 - 2a + 1 \quad a - 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & -2a + 4 & a^2 - 2a + 1 & a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2a + 4 \quad a^2 - 2a + 1 \quad a - 1 \\ 0 \quad 2a - 4 \quad 2a - 2 \quad -2a \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2 - 1 \quad -a - 1 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -a - 1 \end{pmatrix}$$

La nueva matriz de coeficientes tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 \end{vmatrix} = (2a - 4)(a^2 - 1) = 2(a - 2)(a - 1)(a + 1)$$

Vemos cuando se anula. $|A| = 0 \Rightarrow 2(a-2)(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido por Gauss anteriormente.

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 - 2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a - 4 & 2a - 2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & -a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ (2a - 4)y + (2a - 2)z = -2a \\ (a^2 - 1)z = -a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ 2(a - 2)y + 2(a - 1)z = -2a \\ (a - 1)(a + 1)z = -(a + 1) \end{cases} \Rightarrow \{a + 1 \text{ es no nulo}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ 2(a - 2)y + 2(a - 1)z = -2a \\ (a - 1)z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - z = -a^2 \\ (a - 2)y + (a - 1)z = -a \\ \boxed{z = \frac{-1}{a - 1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y - \frac{-1}{a - 1} = -a^2 \\ (a - 2)y + \cancel{(a - 1)} \frac{-1}{\cancel{a - 1}} = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y + \frac{1}{a - 1} = -a^2 \\ (a - 2)y - 1 = -a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y = -a^2 - \frac{1}{a - 1} \\ (a - 2)y = -a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (a^2 - 2a)y = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \\ \boxed{y = \frac{-a + 1}{a - 2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + (a^2 - 2a) \frac{-a + 1}{a - 2} = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \cancel{a(a - 2)} \frac{-a + 1}{\cancel{a - 2}} = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \Rightarrow x + a(-a + 1) = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a^3 + a^2 - 1}{a-1} - a(-a+1) = \frac{-a^3 + a^2 - 1 + a(a-1)^2}{a-1} = \frac{-a^3 + a^2 - 1 + a(a^2 + 1 - 2a)}{a-1}$$

$$x = \frac{-\cancel{a^3} + a^2 - 1 + \cancel{a^3} + a - 2a^2}{a-1} = \frac{-a^2 + a - 1}{a-1}$$

La solución es $x = \frac{-a^2 + a - 1}{a-1}$, $y = \frac{-a+1}{a-2}$, $z = \frac{-1}{a-1}$

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = -1 \\ -2y = -2 \\ 0 = -2 \end{array} \right\} \text{ La última ecuación plantea una igualdad imposible.}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = -4 \\ z = -2 \\ 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - z = -4 \\ z = -2 \\ z = -1 \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 4. $a = -1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

por lo que el rango de A es 2, el de la ampliada también 2 y es menor que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y-z=-1 \\ -3y-2z=1 \\ 0=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y=-1+z \\ -3y=1+2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+3y=-1+z \\ y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}z\right)=-1+z \Rightarrow x-1-2z=-1+z \Rightarrow \boxed{x=3z}$$

La solución es $x=3t$; $y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t$; $z=t$; $t \in \mathbb{R}$

Resumiendo: Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, siendo la solución del sistema: $x = \frac{-a^2+a-1}{a-1}$, $y = \frac{-a+1}{a-2}$, $z = \frac{-1}{a-1}$, si $a=1$ o $a=2$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado, siendo sus soluciones: $x=3t$; $y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t$; $z=t$; $t \in \mathbb{R}$.

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26} + A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Calculamos la expresión del determinante de $A^{26} + A^{25}$.

$$A^{26} + A^{25} = A^{25}(A + I) \Rightarrow |A^{26} + A^{25}| = |A^{25}| |A + I| = |A|^{25} |A + I|$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = 1$ tenemos que $|A^{26} + A^{25}| = |A|^{25} |A + I| = 1^{25} |A + I| = |A + I|$

Para que la matriz $A^{26} + A^{25}$ sea singular su determinante debe ser nulo y para ello debe serlo el determinante de $A + I$.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t + 1$$

$$|A + I| = 0 \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

El valor buscado es $t = -1$.

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1, -5, 3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ z = 10 - 3x \end{cases} \Rightarrow -x - y - 10 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y - 7 = 0 \Rightarrow 2x - 7 = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -7 + 2t \\ z = 10 - 3t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, -3) \\ P_r(0, -7, 10) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-2, -1, 1) \\ Q_s(0, -1, 2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_s = (-2, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -2, 2) - (0, -7, 10) = (0, 5, -8)$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 30 - 0 - 32 - 5 = 1 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por $T \equiv (1, -5, 3)$ y no conocemos su vector director $\vec{w}_t = (a, b, c)$.

Las rectas r y t se cortan por lo que los vectores $\vec{w}_t$, $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{P_r T}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (a, b, c) \\ \vec{u}_r = (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{P_r T} = (1, -5, 3) - (0, -7, 10) = (1, 2, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_t, \vec{u}_r, \overrightarrow{P_r T}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14a - 3b + 2c - 2c + 7b + 6a = 0 \Rightarrow -8a + 4b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Las rectas s y t se cortan por lo que los vectores $\vec{w}_t$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{Q_s T}$ deben tener producto mixto nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (a, b, c) \\ \vec{v}_s = (-2, -1, 1) \\ \overrightarrow{Q_s T} = (1, -5, 3) - (0, -1, 2) = (1, -4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_t, \vec{v}_s, \overrightarrow{Q_s T}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a + b + 8c + c + 2b + 4a = 0 \Rightarrow 3a + 3b + 9c = 0 \Rightarrow \boxed{a + b + 3c = 0}$$

Sustituimos b por $2a$.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + 3c = 0 \\ b = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2a + 3c = 0 \Rightarrow 3c = -3a \Rightarrow \boxed{c = -a}$$

El vector director de la recta t queda $\vec{w}_t = (a, 2a, -a)$, por lo que tomando $a = 1$ un vector director sería $\vec{w}_t = (1, 2, -1)$.

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

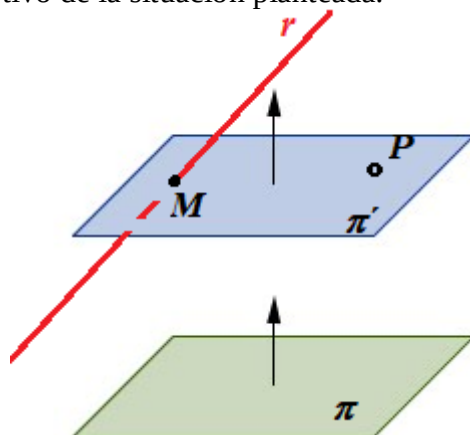
$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_t = (1, 2, -1) \\ T \equiv (1, -5, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}}$$

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(2.5 puntos)

Hacemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



Hallamos el plano π' paralelo a π que pasa por el punto P . Al ser un plano paralelo solo cambia el término independiente D .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi // \pi' \\ P(1, 2, -1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ P(1, 2, -1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte del plano π' con la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x - y - z - 3 = 0 \\ -3x + 3y - 6z - 6 = 0 \\ \hline 0 \quad 2y - 7z - 9 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x - y + z + 1 = 0 \\ -2x + 2y - 4z - 4 = 0 \\ \hline 0 \quad y - 3z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \\ y - 3z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ 2y - 6z - 6 = 0 \\ -2y + 7z + 9 = 0 \\ \hline 0 \quad z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 2y - 7z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 6 + 2 = 0 \\ 2y + 21 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 2y = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{z = -3}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 4 \\ y = \frac{-12}{2} = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 6 = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2} \Rightarrow \boxed{M(-2, -6, -3)}$$

La recta s que buscamos pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$ y el punto $M(-2, -6, -3)$

$$\left. \begin{array}{l} P \equiv (1, 2, -1) \\ M(-2, -6, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = (-2, -6, -3) - (1, 2, -1) = (-3, -8, -2)$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_s = -\overrightarrow{PM} = (3, 8, 2) \\ P \equiv (1, 2, -1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}}$$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1.25 puntos)

$$\int (3-2x)e^{-2x} dx$$

(1.25 puntos)

Primera integral. Realizamos un cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x-1} = t \Rightarrow x-1 = t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 1+t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2t dt}{2(1+t^2)t} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \arctgt = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ \sqrt{x-1} = t \end{array} \right\} = \boxed{\arctg(\sqrt{x-1}) + K} \end{aligned}$$

Segunda integral. Usamos el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} \int (3-2x)e^{-2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 3-2x \rightarrow du = -2dx \\ dv = e^{-2x} dx \rightarrow v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right\} = \\ &= (3-2x) \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} (-2) dx = -\frac{3}{2} e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (-2) e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{3}{2} e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} = \boxed{-e^{-2x} + x e^{-2x} + K} \end{aligned}$$

P6) Se considera la función $f(x) = \frac{1}{e^{\sin x + \cos x}}$.

- a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$ (0.75 puntos)
 b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo. (2.5 puntos)

- a) La función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ángulo del 2º o 4º cuadrante} \\ \text{en la bisectriz de dichos cuadrantes} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi] \\ x = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \notin [0, \pi] \end{array} \right.$$

La función no está definida en $x = \frac{3\pi}{4}$

La función es continua en $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

- b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} = \frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin x + \cos x}} = 0 \Rightarrow -\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi] \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi] \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de la derivada entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$, entre $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$, y por último entre $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \pi$.

- En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tomamos $x = \frac{\pi}{8}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{-\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}}} < 0. \text{ La función decrece en } \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

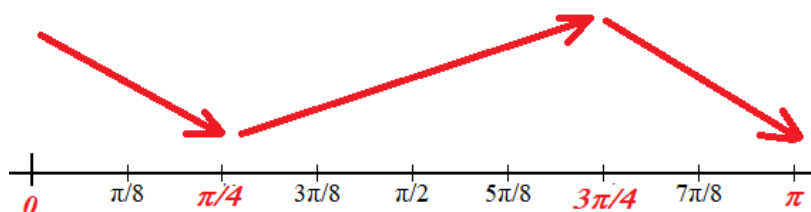
- En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tomamos $x = \frac{\pi}{2}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}}{\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}}} > 0. \text{ La función crece en } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

- En el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tomamos $x = \frac{7\pi}{8}$ y la derivada vale

$$f'\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{-\cos\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8}}{\left(\sin\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}}} < 0. \text{ La función decrece en } \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$. Como $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 2.03$

Las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$.

La función no está definida en $x = \frac{3\pi}{4}$.

P7) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

(0.75 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2, -1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) La función es composición de funciones continuas. El único problema es en $x = 0$ que se anula el denominador del exponente, pero $0 \notin [-2, -1]$.

La función es continua en $[-2, -1]$

b) Utilizamos el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):

Sea f continua en $[a, b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = m$.

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2-2}x - e^{x^2-2}}{x^2} = \frac{2x^2e^{x^2-2} - e^{x^2-2}}{x^2} = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2-2}}{x^2}$$

Consideramos la función $f'(x) = \frac{(2x^2 - 1)e^{x^2-2}}{x^2}$ se cumple que es continua en $[-2, -1]$

$$\text{Como } f'(-1) = \frac{(2(-1)^2 - 1)e^{(-1)^2-2}}{(-1)^2} = e^{-1} \approx 0.368 \text{ y } f'(-2) = \frac{(2(-2)^2 - 1)e^{(-2)^2-2}}{(-2)^2} = \frac{7e^2}{4} \approx 12.93.$$

Tenemos que $f'(-1) \approx 0.368 < e \approx 2.72 < f'(-2) \approx 12.93$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $c \in (-2, -1)$ tal que $f'(c) = e$

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 10$$

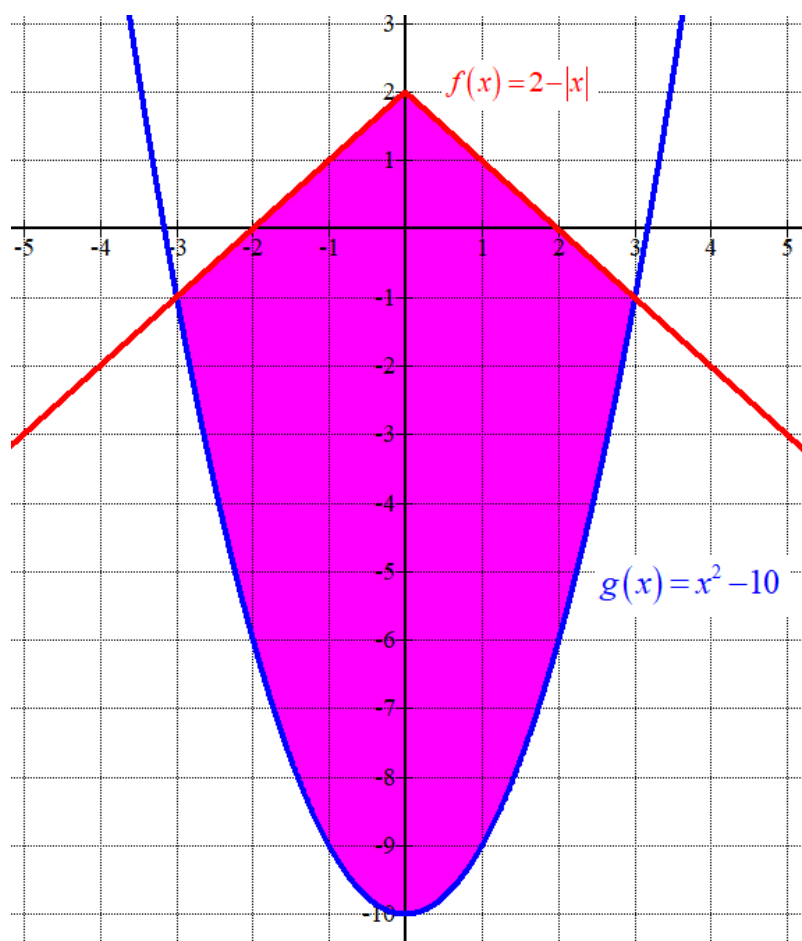
Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - |x| = x^2 - 10 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x = x^2 - 10 & \text{si } x > 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ 0 \\ 2 + x = x^2 - 10 & \text{si } x < 0 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$1^{\text{a}} \text{ opción } (x > 0) \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 = x \\ \frac{-1-7}{2} = -4 < 0. \text{ No vale} \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ opción } (x < 0) \rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{1+7}{2} = 4 > 0. \text{ No vale} \\ \frac{1-7}{2} = -3 = x \end{cases}$$



El área se encuentra entre $x = -3$ y $x = 3$. Dividimos el recinto en dos partes pues la función valor absoluto cambia de definición en $x = 0$.

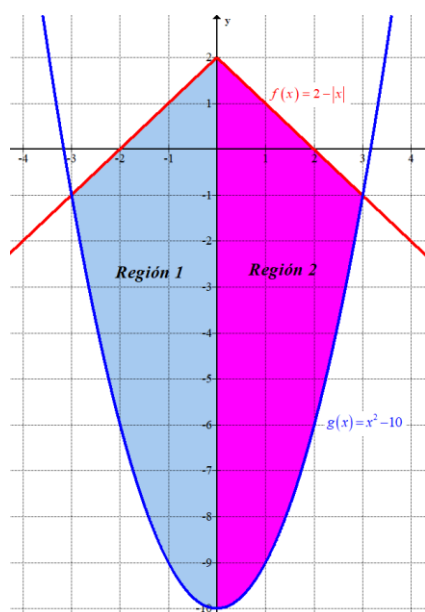
$$\begin{aligned}
 \text{Área 1} &= \left| \int_{-3}^0 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_{-3}^0 (2+x) - (x^2-10) dx \right| = \\
 &= \left| \int_{-3}^0 -x^2 + x + 12 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-3}^0 \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 12 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} + 12(-3) \right] \right| = \left| -9 - \frac{9}{2} + 36 \right| = \boxed{22.5u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área 2} &= \left| \int_0^3 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_0^3 (2-x) - (x^2-10) dx \right| = \\
 &= \left| \int_0^3 -x^2 - x + 12 dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_0^3 \right| = \\
 &= \left| \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 12 \cdot 0 \right] \right| = \left| -9 - \frac{9}{2} + 36 \right| = \boxed{22.5u^2}
 \end{aligned}$$

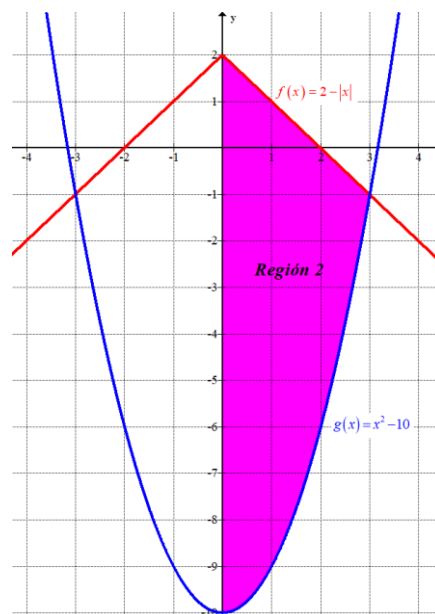
Sale el mismo valor de área ya que las funciones son simétricas.

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas. Área total vale 45 unidades cuadradas.

También podíamos haber utilizado la simetría de la función para calcular el área total como el doble del área de la región 2.



es igual a el doble de



EvAU Extraordinaria 2021

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r .

(2.5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}$.

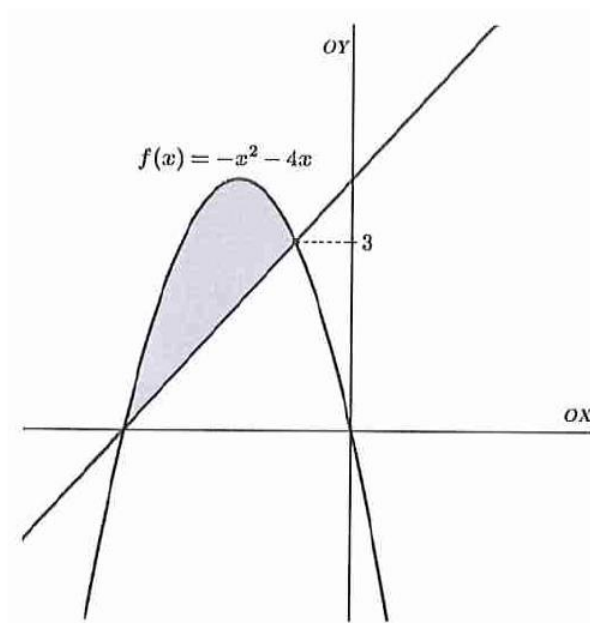
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 2)$ y $\beta \in (2, 3)$ tal que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{array} \right)$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacar "a" factor común en} \\ \text{columna 1}^a \end{array} \right\} = a \begin{vmatrix} 1 & a-2 & 0 \\ 1 & a(a-2) & 2 \\ 3 & (a-2)(a+2) & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacar "a-2" factor común en} \\ \text{columna 2}^a \end{array} \right\} = a(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a+2 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$|A| = a(a-2)(a+6-1-2a-4) = a(a-2)(1-a)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a-2)(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0, a \neq 2$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado (una única solución).

Obtenemos la solución por el método de Cramer.

$$|A| = a(a-2)(1-a)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-2 & a-2 & 0 \\ a & a(a-2) & 2 \\ 4a-4 & (a-2)(a+2) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-2)} \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 0 \\ a & a & 2 \\ 4a-4 & a+2 & 1 \end{vmatrix}}{a \cancel{(a-2)} (1-a)} = \frac{a^2 - 2a + 8a - 8 - a - 2a^2 + 8}{a(1-a)}$$

$$x = \frac{-a^2 + 5a}{a(1-a)} = \frac{a(5-a)}{a(1-a)} = \frac{5-a}{1-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a & 2 \\ 3a & 4a-4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{a} \begin{vmatrix} 1 & a-2 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 4a-4 & 1 \end{vmatrix}}{\cancel{a} (a-2)(1-a)} = \frac{a+6a-12-a+2-8a+8}{(a-2)(1-a)}$$

$$y = \frac{-2a-2}{(a-2)(1-a)} = \frac{2a+2}{(a-2)(a-1)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & a-2 & a-2 \\ a & a(a-2) & a \\ 3a & (a-2)(a+2) & 4a-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{a} \cancel{(a-2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 1 & a & a \\ 3 & a+2 & 4a-4 \end{vmatrix}}{\cancel{a} \cancel{(a-2)} (1-a)} = \{ \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 3 & a+2 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a} = \{ \text{Columna } 2^a - \text{Columna } 1^a \} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 3 & a-1 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a} = \frac{(a-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4a-4 \end{vmatrix}}{1-a}$$

$$z = \frac{-\cancel{(1-a)}(4a-4-3a+6-2)}{\cancel{1-a}} = -a$$

La solución es $x = \frac{5-a}{1-a}$, $y = \frac{2a+2}{(a-2)(a-1)}$, $z = -a$.

CASO 2. $a = 0$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array} \right)$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad -4 \quad 1 \quad -4 \\ 0 \quad 4 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido fila } 2^a \\ \text{entre } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido con las transformaciones de la matriz ampliada asociada.

$$\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x \text{ es cualquier valor}$$

Las infinitas soluciones son: $x = t, y = 1, z = 0$, con $t \in \mathbb{R}$

CASO 3. $a=1$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right)$

La transformamos para establecer el rango de A y A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \\ -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \\ -3 \quad 3 \quad 0 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \\ \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 por lo que el sistema es incompatible (sin solución)

CASO 4. $a = 2$

En este caso la matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$

La transformamos para establecer el rango de A y A/B.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \hline \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Divido fila } 2^a \text{ por } 2 \} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \hline \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Observando la matriz ampliada equivalente a la de partida tenemos que el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 por lo que el sistema es incompatible (sin solución)

Resumiendo: Para $a \neq 0$, $a \neq 2$ y $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución, para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a = 1$ o $a = 2$ el sistema no tiene solución.

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes y el determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante lo aplicamos a la expresión $|A \cdot B^{-1}| = 1$.

$$\left. \begin{aligned} |A \cdot B^{-1}| &= |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} \\ |A \cdot B^{-1}| &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|A|}{|B|} = 1 \Rightarrow |A| = |B|$$

Basta hallar el determinante de A y de B y sustituir en la expresión anterior.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Sacar factor común "t-2" en fila 3}^a \right\} = (t-2) \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \text{Columna 1}^a - \text{Columna 3}^a \right\} = (t-2) \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Fila 2}^a - \text{Fila 3}^a \right\} = \\ &= (t-2) \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Sacar "t-1" factor común en fila 2}^a \right\} = (t-2)(t-1) \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (t-2)(t-1)[1+t-t] = (t-2)(t-1) \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $|A| = (t-2)(t-1)$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Columna 2}^a + \text{Columna 3}^a \right\} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ \text{Sacar "2t-1" factor común en columna 2}^a \right\} = (2t-1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-1)(t-1) \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $|B| = (2t-1)(t-1)$. Para $t \neq 1$ y $t \neq \frac{1}{2}$ el determinante es distinto de 0 y existe la inversa de B. Sustituimos y vemos cuando ambos determinantes son iguales.

$$\left. \begin{aligned} |A| &= (t-2)(t-1) \\ |B| &= (2t-1)(t-1) \\ |A| &= |B| \end{aligned} \right\} \Rightarrow (t-2) \cancel{(t-1)} = (2t-1) \cancel{(t-1)} \Rightarrow t-2 = 2t-1 \Rightarrow \boxed{t = -1}$$

La igualdad $|A \cdot B^{-1}| = 1$ se cumple cuando $t = -1$.

P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s .

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z = -2y \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,0,0) \in r \\ \vec{u}_r = (-1,1,-2) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(6,6,2) \in s \\ \vec{v}_s = (-1,5,2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

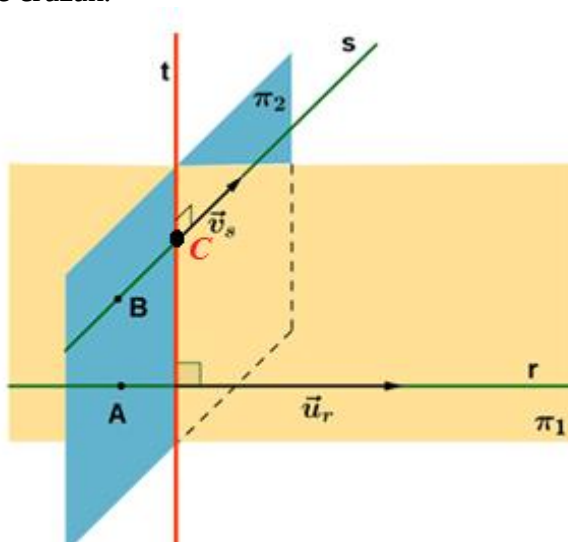
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1,1,-2) \\ \vec{v}_s = (-1,5,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{5} \neq \frac{-2}{2}$$

Hacemos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\vec{AB}$ para ver si es nulo o no.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (6,6,2) - (0,0,0) = (6,6,2) \\ \vec{u}_r = (-1,1,-2) \\ \vec{v}_s = (-1,5,2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 12 + 12 + 60 + 2 + 12$$

$$[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}] = 88 \neq 0$$

Por lo que las rectas r y s se cruzan.



Nos piden la recta t perpendicular común a ambas rectas. Para ello hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y tiene como vector director el perpendicular a ambas rectas. Después hallamos el punto C intersección del plano π_1 y la recta s .

La recta t es la recta con vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s pasando por el punto C .

El vector director de la recta t es el producto vectorial de los directores de ambas rectas, a su vez será un vector director del plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{v}_s = (-1, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (12, 4, -4) \Rightarrow \vec{w}_t = (3, 1, -1)$$

La ecuación del plano π_1 .

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_r = (-1, 1, -2) \\ \vec{v} = \vec{w}_t = (3, 1, -1) \\ A(0, 0, 0) \in \pi_1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - 6y - z - 3z - y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0}$$

El punto C de corte entre plano π_1 y recta s .

$$s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 6-t \\ y = 6+5t \\ z = 2+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (6-t) - 7(6+5t) - 4(2+2t) = 0 \\ \pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6 - t - 42 - 35t - 8 - 8t = 0 \Rightarrow -44 - 44t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 - (-1) = 7 \\ y = 6 + 5(-1) = 1 \\ z = 2 + 2(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7, 1, 0)$$

Ya tenemos el vector director de la recta t y un punto C por el que pasa.

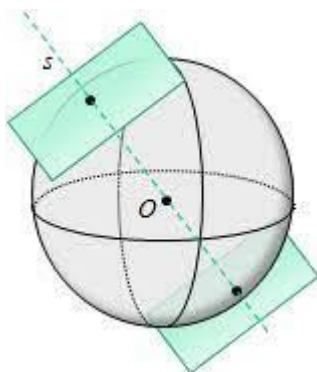
$$\text{La recta } t \text{ tiene ecuación } t \equiv \begin{cases} C(7, 1, 0) \in t \\ \vec{w}_t = (3, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}}$$

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro (0,0,0), y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r .

(2.5 puntos)



El plano π pedido es perpendicular a la recta, por lo que su vector normal será el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -2) \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 1, -2)$$

$$\pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0$$

Como el plano es tangente a la esfera, la distancia de su centro $O(0,0,0)$ al plano debe ser igual al radio que vale 3.

$$d(O, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|0+0-0+D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|D|}{3} = 3 \Rightarrow |D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} D = 9 \\ D = -9 \end{cases}$$

Hay dos planos como solución de esta situación:

$$\boxed{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0}$$

Hallamos los puntos de tangencia, que llamamos T_1 y T_2 .

La recta s que contiene el radio de la esfera es perpendicular al plano $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$ y tiene como vector director el normal del plano $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y pasa por el punto $O(0,0,0)$ luego tiene ecuación:

$$s \equiv \begin{cases} \vec{v} = (2, 1, -2) \\ O(0,0,0) \in s \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

El punto de tangencia T_1 es el punto de corte de la recta s con el plano π_1 .

$$s \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow 2(2t) + t - 2(-2t) + 9 = 0 \Rightarrow 4t + t + 4t + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9t = -9 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1(-2, -1, 2)}$$

La recta s' que contiene el radio de la esfera es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0$ y tiene como vector director el normal del plano $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ luego tiene la misma ecuación que la anterior recta s :

$$s' \equiv \begin{cases} \vec{v} = (2, 1, -2) \\ O(0, 0, 0) \in s \end{cases} \Rightarrow s' \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}$$

El punto de tangencia T_2 es el punto de corte de la recta s' con el plano π_2 .

$$s' \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \Rightarrow 2(2t) + t - 2(-2t) - 9 = 0 \Rightarrow 4t + t + 4t - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2(2, 1, -2)}$$

Como la recta r es perpendicular a los planos π_1 y π_2 hallamos los puntos de corte A_1 y A_2 de la recta con cada uno de los planos y las rectas que pasan por los puntos de tangencia y son perpendiculares a r serán:

Una de ellas la que pasa por A_1 y T_1 y la otra la que pasa por A_2 y T_2 .

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases} \Rightarrow 2(3 + 2t) + 4 + t - 2(-4 - 2t) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 4t + 4 + t + 8 + 4t + 9 = 0 \Rightarrow 9t = -27 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 6 = -3 \\ y = 4 - 3 = 1 \\ z = -4 + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_1(-3, 1, 2)}$$

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 4+t \\ z = -4-2t \end{cases} \Rightarrow 2(3+2t) + 4+t - 2(-4-2t) - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 6 + 4t + 4 + t + 8 + 4t - 9 = 0 \Rightarrow 9t = -9 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 = 1 \\ y = 4 - 1 = 3 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_2(1, 3, -2)}$$

La recta que pasa por A_1 y T_1 .

$$\left. \begin{array}{l} A_1(-3, 1, 2) \in s_1 \\ T_1(-2, -1, 2) \in s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1T_1} = (-2, -1, 2) - (-3, 1, 2) = (1, -2, 0) \\ T_1(-2, -1, 2) \in s_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{0}}$$

La recta que pasa por A_2 y T_2 .

$$\left. \begin{array}{l} A_2(1, 3, -2) \in s_2 \\ T_2(2, 1, -2) \in s_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 = \overrightarrow{A_2T_2} = (2, 1, -2) - (1, 3, -2) = (1, -2, 0) \\ T_2(2, 1, -2) \in s_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s_2 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{0}}$$

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

Primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3}} &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Indeterminación en denominador} \\ \infty - \infty \\ \text{Utilizamos el conjugado} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3 + 2x^2} - \sqrt{3x^3})(\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3 + 2x^2})^2 - (\sqrt{3x^3})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{3x^3 + 2x^2 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/2} (\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3})}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3}}{2x^{2-1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3}}{2x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x^2} + \sqrt{3x^3}}{2\sqrt{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3}} + \sqrt{\frac{3x^3}{x^3}}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{\infty}} + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Segundo límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \infty \cdot \sin \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0 = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} \cdot \cos \frac{1}{x}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{\infty} = \cos 0 = \boxed{1}$$

P6) Se considera la función $f(x) = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) La función es composición y suma de funciones continuas. Solo hace falta ver que la expresión que está dentro del logaritmo es siempre positiva para que no haya problemas en su definición.

Como $-1 \leq \sin \frac{\pi(x+1)}{4} \leq 1$ y además:

$$x \in [6, 7] \Rightarrow 6 \leq x \leq 7 \Rightarrow \frac{6-5}{2} \leq \frac{x-5}{2} \leq \frac{7-5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{x-5}{2} \leq 1 \Rightarrow 2^{1/2} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2^1 \Rightarrow \sqrt{2} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2$$

Sumamos ambas expresiones.

$$-1 + \sqrt{2} \leq \sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2 + 1 \Rightarrow 0.41 \leq \sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 3$$

Por lo que $\sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}$ es positivo en el intervalo $[6, 7]$.

b) Vamos a aplicar el teorema de Bolzano.

Si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y cumple que $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Tomamos el intervalo $[6, 7]$ y la función $f(x) = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$. Hemos comprobado que es continua en el intervalo, veamos el valor de la función en cada uno de los extremos del intervalo.

$$\boxed{f(6)} = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(6+1)}{4} + 2^{\frac{6-5}{2}} \right] = \log_2 \left[\sin \frac{7\pi}{4} + 2^{\frac{1}{2}} \right] = \log_2 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right] = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} < 0}$$

$$\boxed{f(7)} = \log_2 \left[\sin \frac{\pi(7+1)}{4} + 2^{\frac{7-5}{2}} \right] = \log_2 \left[\sin 2\pi + 2^1 \right] = \log_2 2 = \boxed{1 > 0}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c \in (6, 7)$ tal que $f(c) = 0$.

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 2)$ y $\beta \in (2, 3)$ tal que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

a) El radicando es suma de funciones continuas. Solo falta ver que el radicando es positivo en el intervalo $[1, 3]$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in [1, 3] \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq x + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

La función es continua.

b) Vamos a aplicar el teorema de Rolle:

Si una función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función también es derivable en el intervalo $[1, 3]$.

$$f(x) = \sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{2\sqrt{x + \sin \frac{\pi x}{2}}}$$

Como el radicando es positivo en el intervalo $[1, 3]$ y no se anula el denominador en dicho intervalo entonces la función es derivable

Consideramos el intervalo $[1, 2]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2 + \sin \frac{2\pi}{2}} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(2)$$

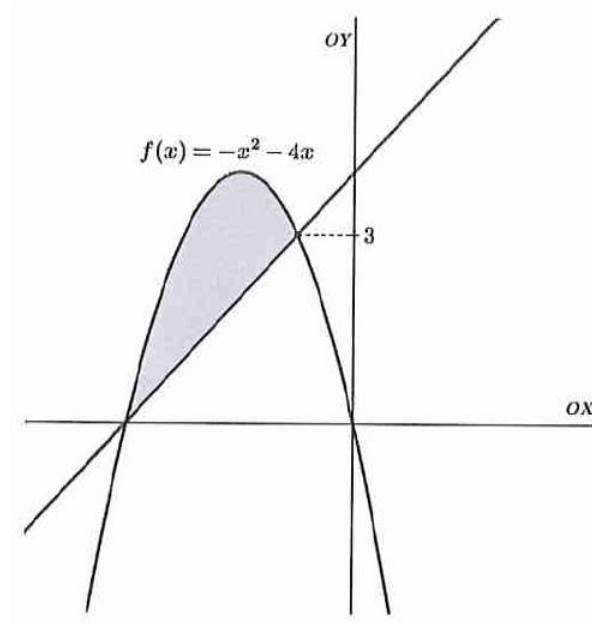
Aplicamos el teorema de Rolle y existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = 0$

Consideramos el intervalo $[2, 3]$.

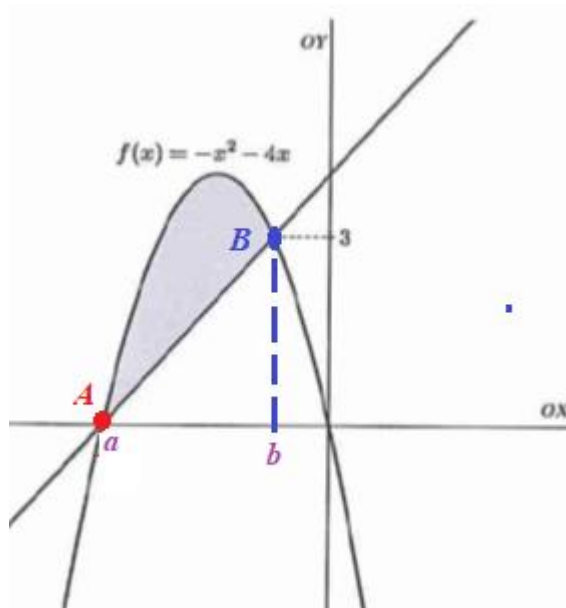
$$\left. \begin{array}{l} f(2) = \sqrt{2 + \sin \frac{2\pi}{2}} = \sqrt{2} \\ f(3) = \sqrt{3 + \sin \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = f(3)$$

Aplicamos el teorema de Rolle y existe $d \in (2, 3)$ tal que $f'(d) = 0$

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)



Hallamos las coordenadas del punto A de corte de la parábola con el eje OX

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 4x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

El punto A tiene coordenadas A(-4, 0).

Hallamos el valor de “b” punto de corte de la parábola y la recta del dibujo.

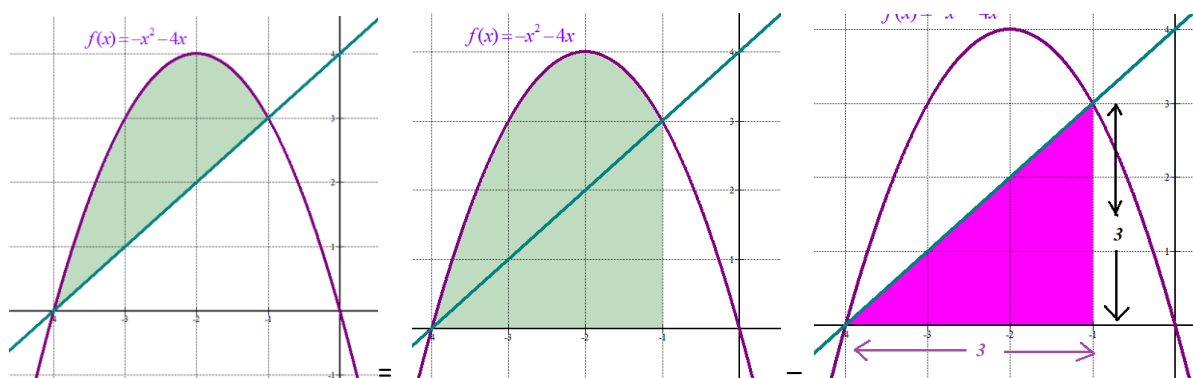
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 - 4x \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 - 4x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4-2}{2} = -3 \\ \frac{-4+2}{2} = -1 \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos el valor válido es $b = -1$.

El punto B tiene coordenadas $B(-1, 3)$.

Calculamos el área de la región sombreada como indica el esquema siguiente.



Calculamos la integral definida entre -4 y -1 de la función $f(x) = -x^2 - 4x$

$$\text{Área} = \int_{-4}^{-1} -x^2 - 4x dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 2(-4)^2 \right] = \frac{1}{3} - 2 - \frac{64}{3} + 32 = 30 - \frac{63}{3} = 6$$

El área del triángulo de color rosa es $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5$

El área del recinto sombreado del ejercicio es $9 - 4.5 = 4.5 \text{ u}^2$

EvAU Ordinaria 2021

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II


 Universidad Pública de Navarra
 Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2 - a - 2)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u.

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log \left[2^{x-1} \sin \frac{\pi(x+2)}{6} \right]}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$ (1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}$$

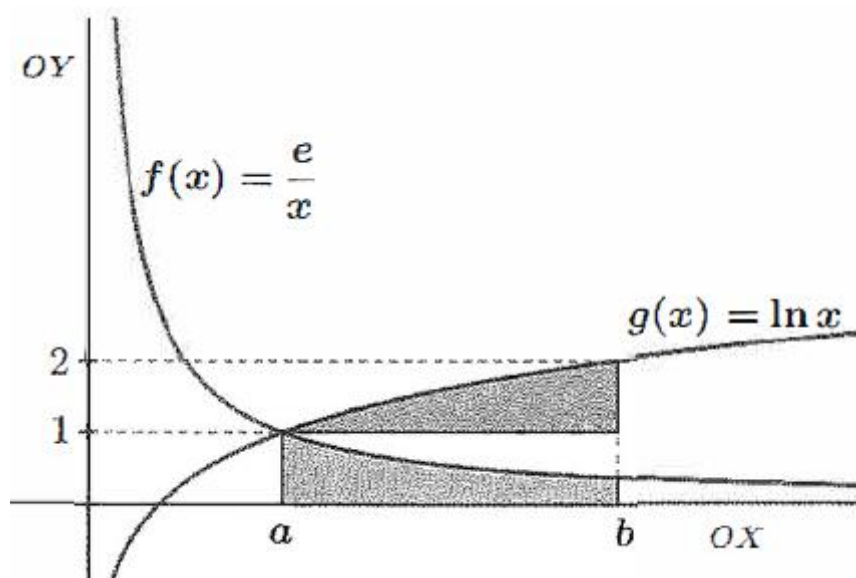
(2.5 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = \ln \left(\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{3}{2} \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

P8) Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2 - a - 2)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ a-1 \quad a+1 \quad a-2 \quad -2a \\ -a+1 \quad 1 \quad 0 \quad -3 \\ \hline 0 \quad a+2 \quad a-2 \quad -2a-3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2a+2 \quad -a \quad a^2-a-2 \quad 3a-1 \\ 2a-2 \quad -2 \quad 0 \quad 6 \\ \hline 0 \quad -a-2 \quad a^2-a-2 \quad 3a+5 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -a-2 \quad a^2-a-2 \quad 3a+5 \\ 0 \quad a+2 \quad a-2 \quad -2a-3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2-4 \quad a+2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La nueva matriz de coeficientes tiene determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix} = (a-1)(a+2)(a^2-4) = (a-1)(a+2)(a+2)(a-2)$$

Vemos cuando se anula. $|A| = 0 \Rightarrow (a-1)(a+2)(a+2)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \\ a=2 \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Lo resolvemos por Cramer.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & a-2 \\ a+2 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-2)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ a+2 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)(a+2)\cancel{(a-2)}} = \\
 &= \frac{\cancel{(a+2)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)\cancel{(a+2)}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)} = \frac{3(a+2)-1-2a-3}{(a-1)(a+2)} = \\
 &= \frac{3a+6-1-2a-3}{(a-1)(a+2)} = \frac{\cancel{a+2}}{(a-1)\cancel{(a+2)}} = \boxed{\frac{1}{a-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 3 & 0 \\ 0 & -2a-3 & a-2 \\ 0 & a+2 & a^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)(-2a-3)(a^2-4)-(a-1)(a-2)(a+2)}{(a-1)(a+2)(a+2)(a-2)} = \\
 &= \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}\cancel{(a+2)}[(-2a-3)-1]}{\cancel{(a-1)}(a+2)\cancel{(a+2)}\cancel{(a-2)}} = \frac{-2a-4}{a+2} = \frac{-2\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = \boxed{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 3 \\ 0 & a+2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a-2}
 \end{aligned}$$

La solución es $x = \frac{1}{a-1}$, $y = -2$, $z = \frac{1}{a-2}$

CASO 2. $a=1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} -y = 3 \\ 3y - z = -5 \\ -3z = 3 \end{array} \right\} . \text{ Lo intentamos resolver.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -y = 3 \\ 3y - z = -5 \\ -3z = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3 \\ 3y - z = -5 \Rightarrow 3(-3) - (-1) = -5 \Rightarrow -9 + 1 = -5 \text{ ¡IMPOSIBLE!} \\ z = \frac{3}{-3} = -1 \end{array} \right.$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a = 2$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 4y = -7 \\ 0 = 4 \end{array} \right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 4. $a = -2$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

por lo que el rango de A es 2, el de la ampliada también 2 y es menor que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} -3x - y = 3 \\ -4z = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3x - 3 = y \\ \boxed{z = -\frac{1}{4}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -3 - 3t \\ z = -\frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

Resumiendo: Para $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado con solución:

$x = \frac{1}{a-1}$, $y = -2$, $z = \frac{1}{a-2}$, para $a = 1$ y $a = 2$ el sistema es incompatible y para $a = -2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones: $x = t$; $y = -3 - 3t$; $z = -\frac{1}{4}$, para cualquier valor de $t \in \mathbb{R}$.

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Calculamos el determinante de la matriz A .

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco factor común en 1ª columna}\} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t(t+2) & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \{\text{Saco factor común en 2ª fila}\} = t(t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = \{\text{Le sumo a la 3ª fila la 1ª}\} = \\ &= t(t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{\text{Le resto a la 2ª fila la 1ª}\} = t(t-1) \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t(t-1)(1) = t(t-1) \end{aligned}$$

Ponemos la condición pedida $|A^3| = 8$ y tenemos que:

$$|A| = t(t-1) \Rightarrow |A|^3 = [t(t-1)]^3 \Rightarrow |A^3| = [t(t-1)]^3 \left. \begin{matrix} \\ |A^3| = 8 \end{matrix} \right\} \Rightarrow [t(t-1)]^3 = 8 \Rightarrow t(t-1) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=t} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=t} \end{cases}$$

Los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$ son $t = -1$ y $t = 2$.

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x=7-6y+z \end{cases} \Rightarrow 7-6y+z+2y+z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+2z+10=0 \Rightarrow -2y+z+5=0 \Rightarrow z=-5+2y \Rightarrow x=7-6y-5+2y=2-4y$$

$$r \equiv \begin{cases} x=2-4t \\ y=t \\ z=-5+2t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (-4, 1, 2) \\ P_r(2, 0, -5) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3, 3, 1) \\ P_s(3, -2, -2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-4, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (3, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{-4}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{1} \text{? No se cumple ninguna de las igualdades.}$$

Las rectas o son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_r P_s} &= (3, -2, -2) - (2, 0, -5) = (1, -2, 3) \\ [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] &= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -36 + 1 - 12 - 6 - 9 - 8 = 1 - 71 = -70 \neq 0 \end{aligned}$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano pedido tendrá como vector normal el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-4, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (3, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 10j - 15k = (-5, 10, -15) \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 3)$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv x - 2y + 3z + D = 0$.

Para obtener el valor de D le añadimos la condición de ser equidistante de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} d(r, \pi) = d(s, \pi) \Rightarrow d(P_r, \pi) = d(P_s, \pi) \\ \pi \equiv x - 2y + 3z + D = 0 \\ P_s(3, -2, -2) \\ P_r(2, 0, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|2 - 0 - 15 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 4 - 6 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-13 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|1 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-13 + D| = |1 + D| \Rightarrow \begin{cases} -13 + D = 1 + D \Rightarrow -12 = 0 \text{ ¡NO ES VÁLIDO!} \\ -13 + D = -(1 + D) \Rightarrow -13 + D = -1 - D \Rightarrow 2D = 12 \Rightarrow \boxed{D = 6} \end{cases}$$

El plano equidistante de las dos rectas tiene ecuación $\pi \equiv x - 2y + 3z + 6 = 0$.

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u. (2.5 puntos)

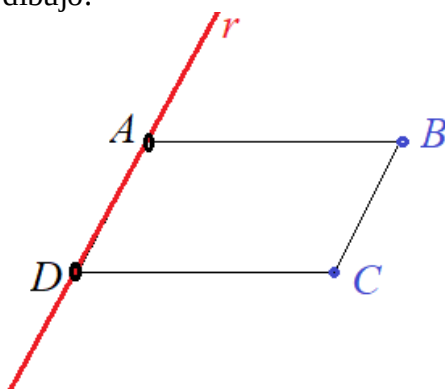
Un punto P de la recta r tiene coordenadas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow P(1 - 2t, -1 - t, 1 + 2t)$$

El punto $A(-1, -2, 3)$ pertenece a la recta. Con $t = 1$ tenemos $\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$

El punto $B(2, -2, -1)$ no pertenece a la recta r . $\begin{cases} 2 = 1 - 2t \\ -2 = -1 - t \\ -1 = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2t \\ -1 = -t \\ -2 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2t \\ 1 = t \\ -1 = t \end{cases}$ ¡IMPOSIBLE!

La situación planteada es la del dibujo:



El punto D pertenece a la recta r , por lo que sus coordenadas son $D(1 - 2t, -1 - t, 1 + 2t)$ y el punto C se obtiene sumando al punto D el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1) - (-1, -2, 3) = (3, 0, -4)$$

$$C = D + \overrightarrow{AB} = (1 - 2t, -1 - t, 1 + 2t) + (3, 0, -4) = (4 - 2t, -1 - t, -3 + 2t)$$

Los vértices del paralelogramo son $A(-1, -2, 3)$, $B(2, -2, -1)$, $C(4 - 2t, -1 - t, -3 + 2t)$ y $D(1 - 2t, -1 - t, 1 + 2t)$.

Como el perímetro es 16 se debe cumplir que la suma de los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ sea 8.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (3, 0, -4) \\ \overrightarrow{AD} &= (1 - 2t, -1 - t, 1 + 2t) - (-1, -2, 3) = (2 - 2t, 1 - t, -2 + 2t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \right| + \left| \overrightarrow{AD} \right| = \frac{16}{2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} + \sqrt{(2-2t)^2 + (1-t)^2 + (-2+2t)^2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + \sqrt{4 + 4t^2 - 8t + 1 + t^2 - 2t + 4 + 4t^2 - 8t} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 4t^2 - 8t + 1 + t^2 - 2t + 4 + 4t^2 - 8t} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t^2 - 18t + 9 = 9 \Rightarrow 9t^2 - 18t = 0 \Rightarrow 9t(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}$$

Existen dos soluciones del problema:

$$\bullet \text{ Si } t = 0 \text{ los puntos son } \left. \begin{array}{l} C(4-2t, -1-t, -3+2t) \\ D(1-2t, -1-t, 1+2t) \\ t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C = (4, -1, -3); \quad D(1, -1, 1)}$$

$$\bullet \text{ Si } t = 2 \text{ los puntos son } \left. \begin{array}{l} C(4-2t, -1-t, -3+2t) \\ D(1-2t, -1-t, 1+2t) \\ t=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C = (0, -3, 1); \quad D(-3, -3, 5)}$$

P5) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log \left[2^{x-1} \sin \frac{\pi(x+2)}{6} \right]}$

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$ (1.25 puntos)
- b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

a) Vemos si la base es positiva.

$$x^2 - 3x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2} = \text{No existe}$$

Es una parábola que no corta el eje de abscisas y es siempre positiva, pues en un punto cualquiera, por ejemplo, $x = 2 \rightarrow 2^2 - 6 + 10 = 8 > 0$.

Vemos si el contenido del logaritmo es positivo, para que pueda estar definido.

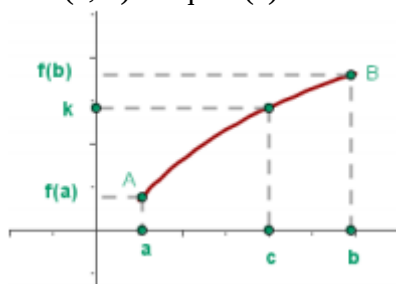
$$x \in [1, 3] \Rightarrow x + 2 \in [3, 5] \Rightarrow \frac{x+2}{6} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right] \Rightarrow \frac{\pi(x+2)}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right] = [90^\circ, 150^\circ] \Rightarrow \sin \frac{\pi(x+2)}{6} > 0$$

$$x \in [1, 3] \Rightarrow \sin \frac{\pi(x+2)}{6} > 0 \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} > 0 \\ \sin \frac{\pi(x+2)}{6} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{x-1} \sin \frac{\pi(x+2)}{6} > 0$$

La función está bien definida y es composición y producto de funciones continuas. Luego es continua.

b) Aplicamos el teorema de los valores intermedios.

Si una función es continua en el intervalo $[a, b]$ y k es un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe algún c en (a, b) tal que $f(c) = k$.



Lo aplicamos a nuestra función.

$f(x)$ es continua en $[1, 3]$.

$$f(1) = (1^2 - 3 + 10)^{\log \left[2^{1-1} \sin \frac{\pi(1+2)}{6} \right]} = 8^{\log \left(\sin \frac{\pi}{2} \right)} = 8^0 = 1,$$

$$f(3) = (3^2 - 9 + 10)^{\log \left[2^{3-1} \sin \frac{\pi(3+2)}{6} \right]} = 10^{\log 4 \sin \frac{5\pi}{6}} = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{4}{2} = 2$$

Como $f(1) = 1 < \frac{3}{2} < 2 = f(3)$ entonces existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

El denominador de la función se anula para $x = -2$ y $x = 2$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$?

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 - 4(-2) - 1}{(-2)^2 - 4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 - 4(-2) - 1}{(-2)^2 - 4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

¿ $x = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \frac{(2)^3 - 4(2) - 1}{(2)^2 - 4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \frac{(2)^3 - 4(2) - 1}{(2)^2 - 4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x - 1 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2 - 4} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$

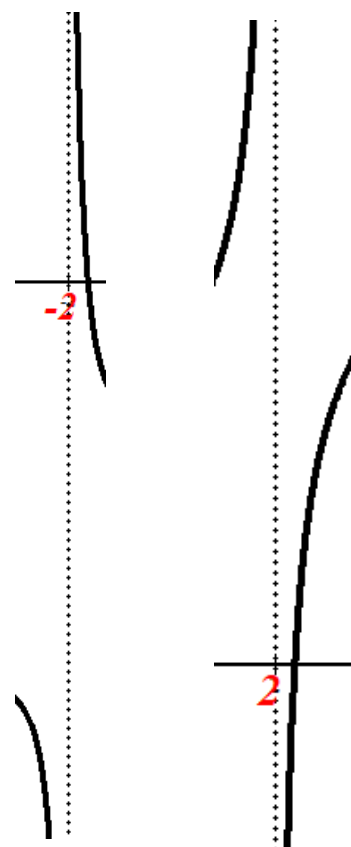
Comprobamos si la función se acerca a la asíntota por encima o por debajo valorando la función y la asíntota en $x = 100$ y en $x = -100$.

$$f(100) = \frac{100^3 - 400 - 1}{100^2 - 4} \approx 99.99 \text{ y la asíntota vale } y = 100$$

En el $+\infty$ la función se acerca a la asíntota por debajo.

$$f(-100) = \frac{(-100)^3 + 400 - 1}{(-100)^2 - 4} \approx -100.0001 \text{ y la asíntota vale } y = -100$$

En el $-\infty$ la función se acerca a la asíntota por debajo.



P7) Sea la función $f(x) = \ln \left(\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right)$.

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)
- b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 3/2 \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.5 puntos)

- a) Vemos si el cociente que contiene el logaritmo neperiano es positivo y está bien definida la función.

¿El numerador es positivo?

$$x \in [1, 2] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \Rightarrow 0 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -x \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow 1 \leq 5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$x \in [1, 2] \Rightarrow 5x \in [5, 10] \Rightarrow 5x - 2 \in [3, 8]$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow -1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 0 \Rightarrow -3 \leq -x \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow 5 \leq 5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$x \in [2, 3] \Rightarrow 5x \in [10, 15] \Rightarrow 5x - 2 \in [8, 13]$$

En los dos tramos el numerador es positivo.

¿El denominador es positivo?

$$x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{¡NO EXISTE!}$$

El denominador es una parábola que no corta el eje OX, y por tanto es siempre positiva.

$$x = 10 \Rightarrow 10^2 - 4 \cdot 10 + 6 = 66 > 0.$$

Está bien definida la función en el intervalo $[1, 3]$ y es composición, producto y división de funciones continuas que no se anulan, por lo que es continua.

- b) Usamos el teorema del valor medio (Lagrange)

Sea $f(x)$ una función real. Si se cumple que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

entonces se tiene que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Lo aplicamos a nuestra función.

$$f(x) = \ln \left(\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right) = \ln \left(5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2} \right) - \ln(x^2 - 4x + 6)$$

$$f'(x) = \frac{5 - \sin \frac{\pi x}{2} - x \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}} - \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6}$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{5x - 2 - x \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6} \right) \text{ es continua en } [1, 3] \text{ y derivable en } (1, 3).$$

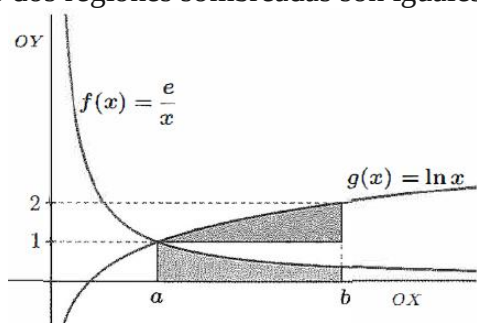
Entonces existe $c \in [1, 3]$ tal que $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$.

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\ln \left(\frac{15 - 2 - 3 \sin \frac{3\pi}{2}}{9 - 12 + 6} \right) - \ln \left(\frac{5 - 2 - \sin \frac{\pi}{2}}{1 - 4 + 6} \right)}{2} = \frac{\ln \frac{16}{3} - \ln \frac{2}{3}}{2}$$

$$f'(c) = \frac{\ln 16 - \ln 3 - \ln 2 + \ln 3}{2} = \frac{\ln 2^4 - \ln 2}{2} = \frac{4 \ln 2 - \ln 2}{2} = \frac{3 \ln 2}{2}$$

Existe $c \in [1, 3]$ tal que $f'(c) = \frac{3 \ln 2}{2}$.

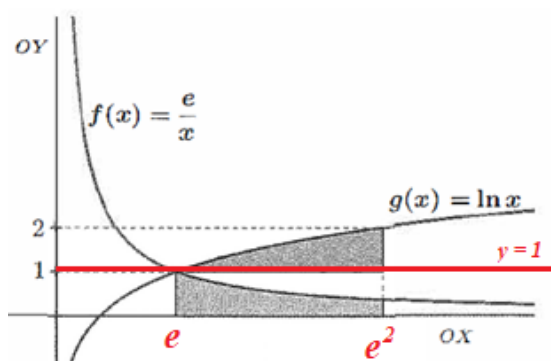
P8) Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

Como $g(a) = f(a) = 1$ entonces $g(a) = 1 = \ln a \Rightarrow \boxed{a = e}$.

Como $g(b) = 2 = \ln b \Rightarrow \boxed{b = e^2}$



El área inferior es:

$$\text{Área inferior} = \int_e^{e^2} \frac{e}{x} dx = e \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [e \ln x]_e^{e^2} = [e \ln e^2] - [e \ln e] = 2e - e = \boxed{e u^2}$$

El área superior es el área encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y la recta horizontal $y = 1$ entre e y e^2 .

$$\text{Área superior} = \int_e^{e^2} \ln x - 1 dx$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \ln x - 1 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x - 1 \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x(\ln x - 1) - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - x - \int dx = x \ln x - x - x = x \ln x - 2x + K$$

Calculamos el área superior.

$$\text{Área superior} = \int_e^{e^2} \ln x - 1 dx = [x \ln x - 2x]_e^{e^2} = [e^2 \ln e^2 - 2e^2] - [e \ln e - 2e] =$$

$$= 2e^2 \ln e - 2e^2 - e + 2e = \boxed{e u^2}$$

Como se comprueba las dos áreas valen $e u^2$.

EvAU Extraordinaria 2020

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a + 1)z = a + 6 \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2 - a)z = a + \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2, 0, 5)$, $P_2(1, -2, 2)$ y $P_3(3, -1, 2)$. Una esfera con centro en $C(0, 1, -3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx$$

(1.25 puntos)

$$\int e^{2x} \sin(2x+1) dx$$

(1.25 puntos)

P4) Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \ln \frac{x^2+2}{3} & x < 1 \\ \frac{x^2}{3} & x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ determina la matriz } B.$$

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a + 1)z = a + 6 \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2 - a)z = a + \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Utilizamos el método de Gauss para discutir el sistema.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a + 1)z = a + 6 \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2 - a)z = a + \sqrt{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a + 1)z = a + 6 \\ \hline -(a^2 - 2)x - 2y - z = -a - 2 \\ \hline 2y + az = 4 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2 - a)z = a + \sqrt{2} \\ \hline -(a^2 - 2)x - 2y - z = -a - 2 \\ \hline (1 - a)z = \sqrt{2} - 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ 2y + az = 4 \\ (1 - a)z = \sqrt{2} - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos cuando se anulan los elementos de la diagonal principal del sistema.

La diagonal se anula en $a = 1$ y cuando $a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Nos planteamos cuatro situaciones que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq \sqrt{2}; a \neq -\sqrt{2}$ y $a \neq 1$

En este caso ninguno de los elementos de la diagonal se anula y podré determinar los valores únicos de la solución.

El sistema es **compatible determinado**. Lo resolvemos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ 2y + az = 4 \\ (1 - a)z = \sqrt{2} - 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ 2y + az = 4 \\ \boxed{z = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a}} \end{cases} \\ \\ \Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y + \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} = a + 2 \\ 2y = 4 - a \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y = a + 2 - \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} \\ 2y = \frac{4 - 4a - \sqrt{2}a + 2a}{1 - a} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - 2)x + 2y = a + 2 - \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} \\ y = \frac{4 - 2a - \sqrt{2}a}{2(1 - a)} \end{cases} \Rightarrow (a^2 - 2)x + \cancel{2} \frac{4 - 2a - \sqrt{2}a}{\cancel{2}(1 - a)} = a + 2 - \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a} - \frac{4 - 2a - \sqrt{2}a}{1 - a} \Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - \frac{\sqrt{2} - 2 + 4 - 2a - \sqrt{2}a}{1 - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - \frac{\sqrt{2} + 2 - 2a - \sqrt{2}a}{1 - a} \Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - \frac{(2 + \sqrt{2}) - a(2 + \sqrt{2})}{1 - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - \frac{\cancel{(1 - a)}(2 + \sqrt{2})}{\cancel{1 - a}} \Rightarrow (a^2 - 2)x = a + 2 - 2 - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2)x = a - \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a - \sqrt{2}}{a^2 - 2} = \frac{a - \sqrt{2}}{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})} = \boxed{\frac{1}{a + \sqrt{2}}} = x$$

La solución es $\boxed{x = \frac{1}{a + \sqrt{2}}; \quad y = \frac{4 - a(2 + \sqrt{2})}{2(1 - a)}; \quad z = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - a}}$

CASO 2. $a = \sqrt{2}$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2y + z = \sqrt{2} + 2 \\ 2y + \sqrt{2}z = 4 \\ (1 - \sqrt{2})z = \sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = \sqrt{2} + 2 \\ 2y + \sqrt{2}z = 4 \\ \boxed{z = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \\ 2y + \sqrt{2}\sqrt{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 2 \\ 2y + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Sus soluciones son $\boxed{x = t; \quad y = 1; \quad z = \sqrt{2}}$

CASO 3. $a = -\sqrt{2}$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2y + z = -\sqrt{2} + 2 \\ 2y - \sqrt{2}z = 4 \\ (1 + \sqrt{2})z = \sqrt{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = -\sqrt{2} + 2 \\ 2y - \sqrt{2}z = 4 \\ \boxed{z = \frac{\sqrt{2} - 2}{1 + \sqrt{2}} = 4 + \sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4 + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + 2 \\ 2y - \sqrt{2}(4 + \sqrt{2}) = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = -2\sqrt{2} - 2 \\ 2y - 4\sqrt{2} - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -2\sqrt{2} - 2 \\ 2y = 4\sqrt{2} + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2} - 1 < 0 \\ y = 2\sqrt{2} + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{No es posible}$$

El sistema es **incompatible**

CASO 4. $a=1$

En este caso el sistema queda $\begin{cases} (1-2)x + 2y + z = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

$$0 = \sqrt{2} - 2 \rightarrow \text{Es imposible}$$

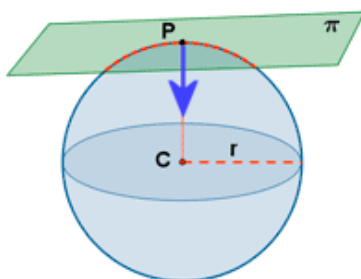
El Sistema es incompatible.

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección. (2.5 puntos)

Hallamos primero la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(2,0,5) \in \pi \\ \overrightarrow{P_2P_1} = (2,0,5) - (1,-2,2) = (1,2,3) \\ \overrightarrow{P_2P_3} = (3,-1,2) - (1,-2,2) = (2,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$6y + z - 5 - 4z + 20 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x + 6y - 3z + 21 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + z - 7 = 0}$$



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto C. Después determinamos el punto de corte de plano y recta (P) y el radio es el módulo del vector que une C y P.

La recta tiene como vector director el normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{n} = (1, -2, 1) \\ C(0, 1, -3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P de intersección de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 7 = 0 \\ x = \lambda \\ r \equiv y = 1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 2(1 - 2\lambda) - 3 + \lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda - 2 + 4\lambda - 3 + \lambda - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 - 4 = -3 \\ z = -3 + 2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(2, -3, -1)}$$

El radio de la esfera es la distancia de C a P, el módulo del vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\overrightarrow{PC} = (0, 1, -3) - (2, -3, -1) = (-2, 4, -2)$$

$$Radio = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = \boxed{2\sqrt{6} = Radio}$$

También se puede hallar el radio como la distancia de C al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z - 7 = 0 \\ C(0, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow Radio = d(C, \pi) = \frac{|0 - 2 - 3 - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\int e^{2x} \sin(2x+1) dx \quad (1.25 \text{ puntos})$$

Primera integral. La resolvemos utilizando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$x-7 = A(x+3) + B(x-2)$$

$$\bullet x=2 \rightarrow 2-7=5A \rightarrow A=-1$$

$$\bullet x=-3 \rightarrow -3-7=B(-5) \rightarrow B=2$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{x+3} dx = \boxed{-\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C}$$

Segunda integral. La resolvemos utilizando el método de integración por partes.

$$\int e^{2x} \sin(2x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \sin(2x+1) \rightarrow du = 2 \cos(2x+1) dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \int \frac{1}{2} e^{2x} 2 \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \int e^{2x} \cos(2x+1) dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(2x+1) \rightarrow du = -2 \sin(2x+1) dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cos(2x+1) - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-2 \sin(2x+1)) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \frac{1}{2} e^{2x} \cos(2x+1) - \int e^{2x} \sin(2x+1) dx
\end{aligned}$$

Hemos conseguido que aparezca de nuevo la integral inicial. Planteamos la igualdad y despejamos la integral que deseamos calcular.

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \sin(2x+1) dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \frac{1}{2} e^{2x} \cos(2x+1) - \int e^{2x} \sin(2x+1) dx \Rightarrow \\
\Rightarrow 2 \int e^{2x} \sin(2x+1) dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \sin(2x+1) - \frac{1}{2} e^{2x} \cos(2x+1) \Rightarrow \\
\Rightarrow \boxed{\int e^{2x} \sin(2x+1) dx} &= \frac{e^{2x}}{4} (\sin(2x+1) - \cos(2x+1)) + C
\end{aligned}$$

P4) Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \ln \frac{x^2 + 2}{3} & x < 1 \\ \frac{x^2}{3} & x \geq 1 \end{cases}.$$

- a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$. (1 punto)
 b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso. (1.5 puntos)

- a) El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

La función polinómica y el logaritmo neperiano de una expresión que siempre es positiva es continua, por lo que es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Comprobemos si es continua en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3} + \ln \frac{x^2 + 2}{3} = \frac{1}{3} + \ln 1 = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$. La función es continua en $\mathbb{R}$.

La función en $\mathbb{R} - \{1\}$ es derivable pues cada una de sus funciones lo es en su dominio.

$$\text{Siendo } f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{x^2 + 2}{3}} = \frac{2x}{x^2 + 2} & x < 1 \\ \frac{2x}{3} & x > 1 \end{cases}.$$

Veamos si es derivable en $x = 1$. Calculamos sus derivadas laterales y vemos si coinciden.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 2} = \frac{2}{3} \\ f'(1^+) &= \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = \frac{2}{3} = f'(1^+)$$

La función es derivable en $x = 1$ y su derivada es $f'(1) = \frac{2}{3}$.

$$\text{La función es derivable en } \mathbb{R} \text{ y su derivada es: } f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 2} & x < 1 \\ \frac{2x}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

- b) Consideramos la función $g(x) = f'(x) - 1$. Esta función es continua en el intervalo $(0, 2)$.

$$g(0) = f'(0) - 1 = \frac{0}{0^2 + 2} - 1 = -1 < 0 \quad \text{y} \quad g(2) = f'(2) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0.$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano siendo $g(x) = f'(x) - 1$ continua en $(0, 2)$ y como la función toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo ($g(0) < 0$ y $g(2) > 0$) entonces existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Por lo que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $g(\alpha) = f'(\alpha) - 1 = 0 \Rightarrow f'(\alpha) = 1$.

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B . (2.5 puntos)

Sabemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que :

$$A \cdot B (A \cdot B)^{-1} = I \Rightarrow A \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

Si multiplicamos por la inversa de A en la igualdad anterior.

$$A^{-1} \cdot I = A^{-1} \cdot A \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = I \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6a+b & a \\ -6c+d & c \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = -6a + b \\ -1 = a \\ -1 = -6c + d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = 6 + b \\ -1 = a \\ -1 = -6 + d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 = b \\ -1 = a \\ 5 = d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Pasamos la ecuación de r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x=7-3z \end{cases} \Rightarrow 7-3z+2y+z-1=0 \Rightarrow 2y=-6+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=7-3\lambda \\ y=-3+z \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow y=-3+z \Rightarrow r \equiv y=-3+\lambda$$

El vector director de r es $\vec{v}_r = (-3, 1, 1)$ y un punto de la recta es $P_r(7, -3, 0)$

El vector director de s es $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$ y un punto de la recta es $P_s(-2, 0, -3)$

Veamos la posición relativa de las rectas r y s .

Sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0}$$

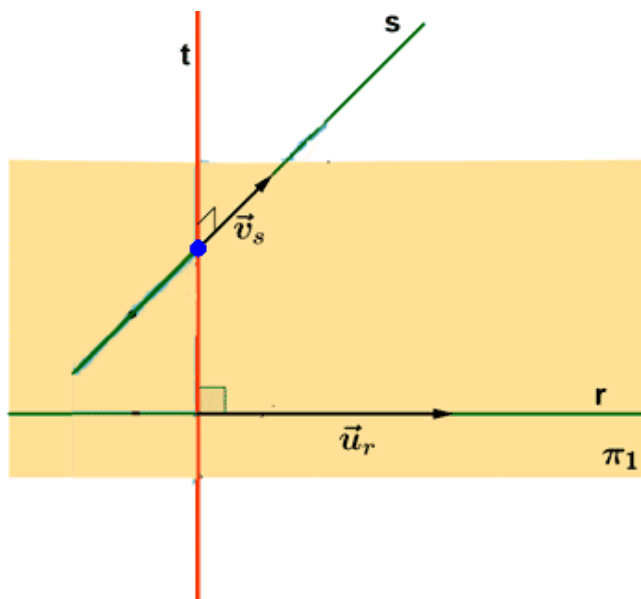
, luego ni son paralelas ni coincidentes.

Para ver si se cortan (son coplanarias y coinciden en un punto) o se cruzan (no son coplanarias) tomamos los vectores $\vec{v}_r = (-3, 1, 1)$, $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{P_r P_s} = (-2, 0, -3) - (7, -3, 0) = (-9, 3, -3)$.

Su producto mixto es:

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 6 + 9 + 6 = 30 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.



Hallo el vector director de la recta t con el producto vectorial de los vectores directores de r y s .

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - 3k - 2k - i = -i + 2j - 5k = (-1, 2, -5)$$

Hallo la ecuación del π_1 que contiene a la recta r y tiene como segundo vector director $\vec{v}_t$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(7, -3, 0) \in \pi_1 \\ \vec{v}_r = (-3, 1, 1) \\ \vec{v}_t = (-1, 2, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-7 & y+3 & z \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$-5x + 35 - y - 3 - 6z + z - 15y - 45 - 2x + 14 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv -7x - 16y - 5z + 1 = 0}$$

El punto de corte del plano π_1 y la recta s será un punto de la recta t .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv -7x - 16y - 5z + 1 = 0 \\ x = -2 + 2\lambda \\ s \equiv y = \lambda \\ z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -7(-2 + 2\lambda) - 16\lambda + 15 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 - 14\lambda - 16\lambda + 15 + 1 = 0 \Rightarrow -30\lambda = -30 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 + 2 = 0 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow P_t(0, 1, -3)$$

Tenemos el vector director $\vec{v}_t = (-1, 2, -5)$ y un punto de la recta $P_t(0, 1, -3)$. Su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} P_t(0, 1, -3) \\ \vec{v}_t = (-1, 2, -5) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-5}}$$

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Derivamos la función y averiguamos sus puntos críticos.

$$f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = \pi e^{\pi x} \cdot \sin \pi x + \pi e^{\pi x} \cdot \cos \pi x = \pi e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \pi e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x) = 0 \Rightarrow \sin \pi x + \cos \pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x \Rightarrow \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} = -\frac{\cos \pi x}{\cos \pi x} \Rightarrow \operatorname{tg} \pi x = -1 \Rightarrow \pi x = \frac{3\pi}{4} + k\pi; \quad k \in \mathbb{N}$$

$$x = \frac{3}{4} + k; \quad k \in \mathbb{N}$$

Como nos limitamos al intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ sólo nos sirven: $x = \frac{3}{4}$ y $x = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$.

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x) \Rightarrow f''(x) = \pi^2 e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x) + \pi^2 e^{\pi x} (\cos \pi x - \sin \pi x)$$

$$f''(x) = \pi^2 e^{\pi x} (\sin \pi x + \cos \pi x + \cos \pi x - \sin \pi x) = 2\pi^2 e^{\pi x} \cos \pi x$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 2\pi^2 e^{\pi \frac{3}{4}} \cos \pi \frac{3}{4} < 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{3}{4} \text{ hay un máximo relativo}$$

$$f''\left(\frac{7}{4}\right) = 2\pi^2 e^{\pi \frac{7}{4}} \cos \pi \frac{7}{4} > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{7}{4} \text{ hay un mínimo relativo}$$

Veamos el valor de la función en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo para obtener los máximos y mínimos absolutos en $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

$$\text{Extremo inferior del intervalo} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\pi \frac{1}{2}} \cdot \sin \pi \frac{1}{2} = e^{\pi \frac{1}{2}} = 4.81$$

$$\text{Máximo relativo} \rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\pi \frac{3}{4}} \cdot \sin \pi \frac{3}{4} = 7.46$$

$$\text{Mínimo relativo} \rightarrow f\left(\frac{7}{4}\right) = e^{\pi \frac{7}{4}} \cdot \sin \pi \frac{7}{4} = -172.64$$

$$\text{Extremo superior del intervalo} \rightarrow f(2) = e^{2\pi} \cdot \sin 2\pi = 0$$

El máximo relativo $x = \frac{3}{4}$ es máximo absoluto en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

El mínimo relativo $x = \frac{7}{4}$ también lo es absoluto.

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Buscamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \sqrt{x-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = (\sqrt{x-2})^2 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{4} = x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x - 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = 6 = x \\ \frac{8-4}{2} = 2 = x \end{cases} \end{aligned}$$

Lo comprobamos:

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= \frac{6}{2} + 1 = 4 \\ g(6) &= \sqrt{6-2} + 2 = 2 + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(6) = g(6) = 4$$

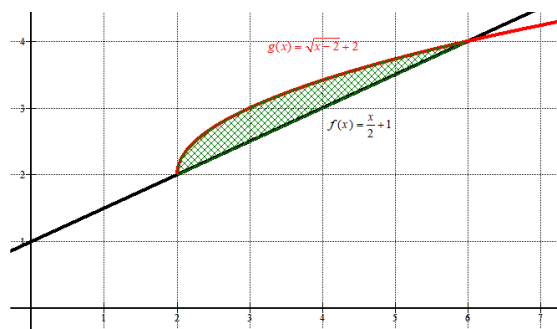
Se cortan en (6, 4) y en (2, 2)

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2}{2} + 1 = 2 \\ g(2) &= \sqrt{2-2} + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(2) = g(2) = 2$$

Como $f(4) = \frac{4}{2} + 1 = 3$ y $g(4) = \sqrt{4-2} + 2 = 2 + \sqrt{2} = 3.4142$ la función $g(x)$ está por encima de la función $f(x)$ en el intervalo (2, 6).

El área es la integral definida entre $x = 2$ y $x = 6$ de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_2^6 \sqrt{x-2} + 2 - \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \int_2^6 \sqrt{x-2} + 1 - \frac{x}{2} dx = \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{1}{2}x dx = \\ &= \left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} + x - \frac{x^2}{4} \right]_2^6 = \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{(6-2)^3} + 6 - \frac{6^2}{4} \right] - \left[\frac{2}{3} \sqrt{(2-2)^3} + 2 - \frac{2^2}{4} \right] = \frac{16}{3} + 6 - 9 - 2 + 1 = \boxed{\frac{4}{3} u^2} \end{aligned}$$



EvAU Ordinaria 2020

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II


 Universidad Pública de Navarra
 Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta

$s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$ y pasa por el punto

$P \equiv (-1, 3, 1)$.

(2.5 puntos)

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2 - x}} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 7} \right) \quad (1.25 \text{ puntos})$$

P4) Sea la función $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2} \right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 2]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1.75 puntos)

P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$$

(2.5 puntos)

P6) Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

(2.5 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ y } g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema y la matriz ampliada, comparamos sus rangos y por el teorema de Rouché-Frobenius vemos que tipo de sistema es.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A para establecer los diferentes casos que se nos pueden plantear en función de su valor nulo o no.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{vmatrix} = (a+1)(-a^2)(a^2-1) - (a^2+a)(-a-1)(a^2-1) = \\ &= (a+1)(a^2-1)(-a^2) + (a+1)(a^2-1)(a^2+a) = (a+1)(a^2-1)[-a^2 + a^2 + a] = a(a+1)(a^2-1) \end{aligned}$$

Igualamos a cero el determinante

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)(a^2-1)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \\ a=0 \end{cases}$$

El determinante se anula cuando $a = -1$, $a = 1$ o $a = 0$. Establecemos cuatro casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$, $a \neq 1$ y $a \neq 0$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3 al igual que el número de incógnitas. Según el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es **compatible determinado**.

Obtenemos su solución utilizando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + \text{Fila 2}^a \\ a+1 \quad a^2+a \quad 0 \quad 2 \\ -a-1 \quad -a^2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad a \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad a \quad a^2-1 \quad 3-a \\ 0 \quad -a \quad 0 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2-1 \quad 1-a \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

Pasamos al sistema de ecuaciones y resolvemos teniendo en cuenta que $a^2 - 1 \neq 0$ y podemos despejar en la 3ª ecuación.

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ ay = 2 \\ (a^2-1)z = 1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ y = \frac{2}{a} \\ z = \frac{1-a}{a^2-1} = \frac{-(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{-1}{a+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x + (a^2+a)\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow (a+1)x + \frac{2\cancel{a}(a+1)}{\cancel{a}} = 2 \Rightarrow (a+1)x + 2a + 2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x = -2a \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2a}{a+1}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{-2a}{a+1}$; $y = \frac{2}{a}$; $z = \frac{-1}{a+1}$. Esta solución existe pues el valor del parámetro a no es ni 0, ni 1, ni -1.

CASO 2. $a = -1$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} (-1+1)x + (1-1)y = 2 \\ (1-1)x - y = 0 \\ -y + (1-1)z = 3+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \\ -y = 0 \\ -y = 4 \end{cases}$$

El sistema es **incompatible**, pues la primera ecuación es imposible y las restantes ofrecen solución contradictoria.

CASO 3. $a = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} (0+1)x + (0+0)y = 2 \\ (0-1)x - 0y = 0 \\ 0y + (0^2-1)z = 3-0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -x = 0 \\ -z = 3 \end{cases}$$

Este sistema es **incompatible**, pues la solución para x es doble (0 y 2).

CASO 4. $a = 1$

El sistema queda
$$\begin{cases} (1+1)x + (1^2+1)y = 2 \\ (-1-1)x - 1^2y = 0 \\ y + (1^2-1)z = 3-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x - y = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$
 Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 2 \\ -2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ -2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuaciones} \\ \text{iguales} \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\boxed{y = 2}$$

El sistema es **compatible indeterminado** con soluciones: $x = -1$; $y = 2$; $z = \lambda$. Tiene infinitas soluciones pues el valor de z puede ser cualquiera.

Resumiendo: Para $a \neq -1$, $a \neq 1$ y $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado con solución:

$x = \frac{-2a}{a+1}$; $y = \frac{2}{a}$; $z = \frac{-1}{a+1}$, para $a = -1$ y $a = 0$ el sistema es incompatible y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones: $x = -1$; $y = 2$; $z = \lambda$.

P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta

$$s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}, \text{ es paralela al plano de ecuación } \pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0 \text{ y pasa por el punto } P \equiv (-1, 3, 1). \quad (2.5 \text{ puntos})$$

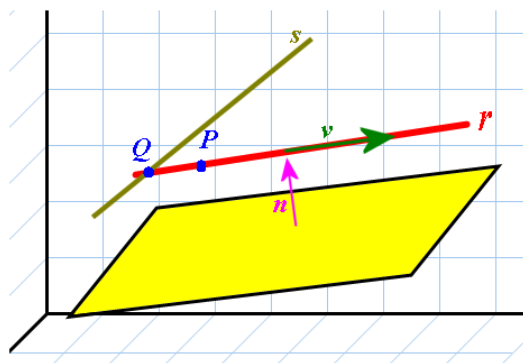
Pasamos la ecuación de la recta s a paramétricas.

$$s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow 3x + (5 - x) - z - 7 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x + 5 - x - z - 7 = 0 \Rightarrow 2x - z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{z = -2 + 2x}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

Como la recta r corta a s coinciden en un punto de s que tiene coordenadas $Q(\lambda, 5 - \lambda, -2 + 2\lambda)$.



Un vector director de la recta r es

$$\left. \begin{array}{l} Q(\lambda, 5 - \lambda, -2 + 2\lambda) \in r \\ P \equiv (-1, 3, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (\lambda, 5 - \lambda, -2 + 2\lambda) - (-1, 3, 1) = (\lambda + 1, 2 - \lambda, -3 + 2\lambda)$$

Además, es paralela al plano por lo que es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (2, -1, 3)$.

El producto escalar del vector director de la recta $\vec{v}_r$ y el normal del plano $\vec{n}$ debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (\lambda + 1, 2 - \lambda, -3 + 2\lambda) \\ \vec{n} = (2, -1, 3) \\ \vec{n} \perp \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2, -1, 3) \cdot (\lambda + 1, 2 - \lambda, -3 + 2\lambda) = 0$$

$$2(\lambda + 1) - (2 - \lambda) + 3(-3 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda + 2 - 2 + \lambda - 9 + 6\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1$$

Por lo que el vector director de la recta r pedida es

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (\lambda + 1, 2 - \lambda, -3 + 2\lambda) \\ \lambda = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -1)$$

Y la ecuación continua de la recta r queda:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, -1) \\ P \equiv (-1, 3, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}}$$

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2 - x}} \quad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 7} \right) \quad (1.25 \text{ puntos})$$

El primer límite es:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2 - x}} &= \left(2 + \sin \frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{1}{1^2 - 1}} = (2 - 1)^{\infty} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación (nº e)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} - 1 \right) \frac{1}{x^2 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right) \frac{1}{x^2 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sin \frac{3\pi x}{2}}{x^2 - x}} \end{aligned}$$

Calculo el límite del exponente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sin \frac{3\pi x}{2}}{x^2 - x} &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (Aplico L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0 + \frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi x}{2}}{2x - 1} = \frac{\frac{3\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{2}}{2 - 1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Colocamos el valor obtenido en el límite que deseamos calcular.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 + \sin \frac{3\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2 - x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sin \frac{3\pi x}{2}}{x^2 - x}} = e^0 = \boxed{1}$$

El segundo límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 7} \right) = \infty - \infty = \text{Indeterminación (Utilizamos el conjugado)} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - 7} \right) \left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7} \right)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right)^2 - \left(\sqrt{x^4 - 7} \right)^2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1 - (x^4 - 7)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^4} - x^2 + 1 - \cancel{x^4} + 7}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 8}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^4 - 7}} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^4} + \sqrt{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

P4) Sea la función $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x$.

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 2]$. (0.75 puntos)
 b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1.75 puntos)

- a) En el intervalo $[1, 2]$ la función seno es continua, la función $1 + \sin \frac{\pi x}{2}$ es siempre positiva pues en el intervalo $[1, 2]$ toma valores positivos en los extremos del intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \rightarrow 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2 \\ x=2 \rightarrow 1 + \sin \frac{\pi 2}{2} = 1 + \sin \pi = 1 - 0 = 1 \end{array} \right\}$$

Y no se anula en el intervalo.

$$1 + \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \frac{\pi x}{2} = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -3 \\ \dots \end{cases} \text{ Ningún valor pertenece a } [1, 2].$$

La función exponencial con base positiva también es continua.

La composición de dichas funciones también es continua y esta es la función

$$f(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x.$$

- b) Calculamos la derivada de la función $f(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x$.

Al ser la función positiva, por derivación logarítmica la obtenemos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x \Rightarrow \ln(f(x)) = x \cdot \ln\left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) \\ \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln\left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left[\ln\left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}} \right] \end{aligned}$$

Esta derivada en los extremos del intervalo $[1, 2]$ toma valores de distinto signo.

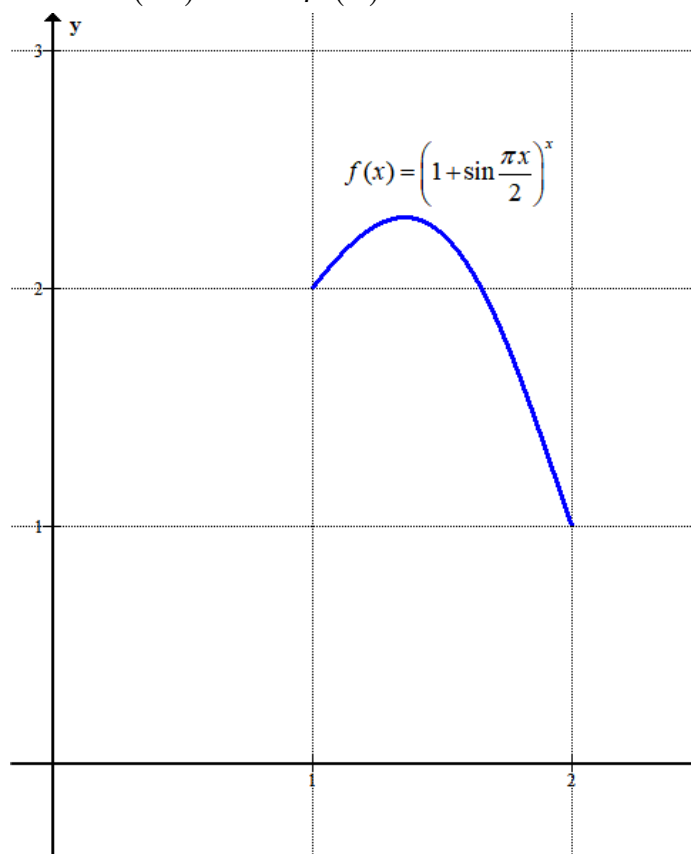
$$x = 1 \rightarrow f'(1) = \left(1 + \sin \frac{\pi}{2}\right)^1 \cdot \left[\ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} \right] = 2 \cdot [\ln 2] = 1,38 > 0$$

$$x = 2 \rightarrow f'(2) = (1 + \sin \pi)^2 \cdot \left[\ln(1 + \sin \pi) + 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \pi}{1 + \sin \pi} \right] = 1 \cdot [0 - \pi] = -\pi < 0$$

La función derivada $f'(x) = \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right)^x \cdot \left[\ln \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{1 + \sin \frac{\pi x}{2}} \right]$ es continua

en $[1, 2]$, pues $1 + \sin \frac{\pi x}{2}$ es positiva en el intervalo $[1, 2]$.

Utilizando el teorema de Bolzano para la función $f'(x)$ continua y tal que $f'(1) > 0$ y $f'(2) < 0$ existe un valor $\alpha \in (1, 2)$ donde $f'(\alpha) = 0$.



P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$$

(2.5 puntos)

Utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$$a) |A^t| = |A|$$

$$b) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$c) |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$d) \left. \begin{array}{l} |2 \cdot B| \\ B \text{ de dimensión } 3 \times 3 \end{array} \right\} \Rightarrow |2 \cdot B| = 2^3 \cdot |B|$$

Aplicándolas obtenemos:

$$|C| = \left| (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2 \right| = \left| 2 \cdot A^t \cdot B^{-1} \right|^2 = \left(2^3 \cdot |A^t \cdot B^{-1}| \right)^2 = \left(2^3 \cdot |A^t| \cdot |B^{-1}| \right)^2 = \left(2^3 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|B|} \right)^2$$

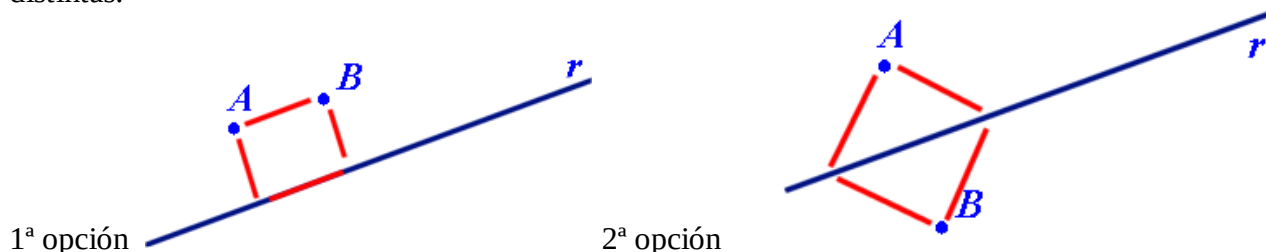
$$|C| = \left(2^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \right)^2 = 8^2 = 64$$

P6) Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

(2.5 puntos)

Depende de la relación entre los puntos y la recta el cuadrado se puede construir de dos formas distintas.



Debemos de averiguar la posición relativa de la recta r con la recta s que pasa por los puntos A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv (-1, 2, 1) \\ B \equiv (2, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \overrightarrow{AB} = (2, 5, 1) - (-1, 2, 1) = (3, 3, 0) \\ B \equiv (2, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \\ B \equiv (2, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Como la recta r tiene ecuación en paramétricas

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(0, 4, -1) \\ \vec{v}_r = (-1, 1, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4 + \alpha \\ z = -1 - 4\alpha \end{cases}$$

Las rectas r y s no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-4}$$

Ya sabemos que los vértices A y B no son consecutivos y estamos en la situación 2ª.

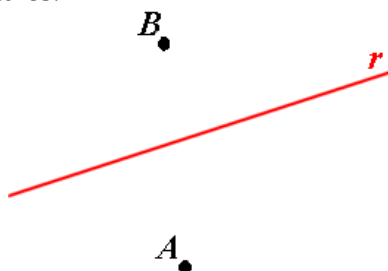
¿Las rectas se cortan o cruzan? Esto nos dirá si la recta y los puntos están en el mismo plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, 1, -4) \\ B(2, 5, 1) \\ P(0, 4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} PB = (2, 5, 1) - (0, 4, -1) = (2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 2 + 4 = 0$$

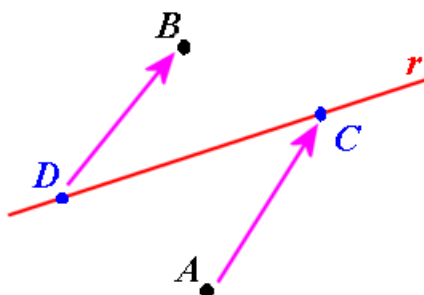
Las rectas se cortan y por tanto los puntos A y B y la recta r son coplanarios.

El cuadrado se puede formar como aparece en la 2ª opción.

La situación de los puntos y la recta es:



Buscamos dos puntos C y D de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4 + \alpha \\ z = -1 - 4\alpha \end{cases}$ tales que el polígono ACBD sea un cuadrado. Estos puntos tienen coordenadas $C(-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha)$ y $D(-\alpha', 4 + \alpha', -1 - 4\alpha')$



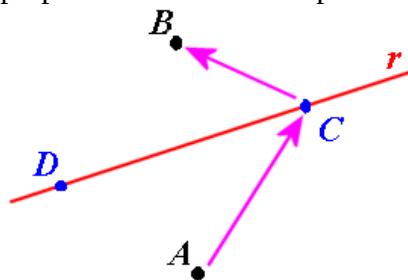
Para ser un cuadrado deben ser iguales los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha) - (-1, 2, 1) = (1 - \alpha, 2 + \alpha, -2 - 4\alpha) \\ \overrightarrow{DB} &= (2, 5, 1) - (-\alpha', 4 + \alpha', -1 - 4\alpha') = (2 + \alpha', 1 - \alpha', 2 + 4\alpha') \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 + \alpha', 1 - \alpha', 2 + 4\alpha') = (1 - \alpha, 2 + \alpha, -2 - 4\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + \alpha' &= 1 - \alpha \\ 1 - \alpha' &= 2 + \alpha \\ 2 + 4\alpha' &= -2 - 4\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha' &= -1 - \alpha \\ -\alpha' &= 1 + \alpha \\ 4\alpha' &= -4 - 4\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha' = -1 - \alpha}$$

Y además el vector $\overrightarrow{AC}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{CB}$. Su producto escalar debe ser nulo.



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= (-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha) - (-1, 2, 1) = (1 - \alpha, 2 + \alpha, -2 - 4\alpha) \\ \overrightarrow{CB} &= (2, 5, 1) - (-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha) = (2 + \alpha, 1 - \alpha, 2 + 4\alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha, 2 + \alpha, -2 - 4\alpha)(2 + \alpha, 1 - \alpha, 2 + 4\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)(2 + \alpha) + (2 + \alpha)(1 - \alpha) + (-2 - 4\alpha)(2 + 4\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \alpha - \alpha^2 + 2 - \alpha - \alpha^2 - 4 - 8\alpha - 8\alpha - 16\alpha^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18\alpha^2 - 18\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 0} \\ o \\ \boxed{\alpha = -1} \end{cases}$$

Tiene dos soluciones posibles.

$$\left. \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha' = -1 - \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha' = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} C(-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha) = (0, 4, -1) \\ D(-\alpha', 4 + \alpha', -1 - 4\alpha') = (1, 3, 3) \end{matrix} \right]$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \alpha' = -1 - \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \alpha' = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} C(-\alpha, 4 + \alpha, -1 - 4\alpha) = (1, 3, 3) \\ D(-\alpha', 4 + \alpha', -1 - 4\alpha') = (0, 4, -1) \end{matrix} \right]$$

Realmente es la misma solución: $C(1, 3, 3)$ y $D(0, 4, -1)$.

P7) Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$.

- a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$. (1 punto)
- b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1.5 puntos)

- a) La función $(x+3)$ es continua y positiva en el intervalo $[-1, 0]$, pues en los extremos toma valores positivos: $(-1+3) = 2 > 0$ y $(0+3) = 3 > 0$, siendo una función lineal es positiva en $[-1, 0]$.

La función exponencial también es continua.

La composición de ambas también es continua $(x+3)^{\sin(\pi x)}$.

La función $(x^2 - x + 2)$ es continua al ser un polinomio y es positivo pues es una parábola que toma valores positivos en los extremos $((-1)^2 - (-1) + 2) = 4 > 0$ y $(0^2 - 0 + 2) = 2 > 0$ y no corta

el eje de abscisas, pues $(x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \nexists$.

El logaritmo neperiano de $(x^2 - x + 2)$ existe y es continuo.

El producto de dos funciones continuas es otra función continua.

- b) Vamos a aplicar el teorema de Lagrange. Para ello la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$ debe ser continua en $[-1, 0]$, ser derivable en $(-1, 0)$ y se cumple que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha)$ es igual a la pendiente de la recta que une los extremos de la función en el intervalo $(-1, 0)$. Existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{(0+3)^{\sin(0)} \ln(0+2) - (-1+3)^{\sin(-\pi)} \ln(1+1+2)}{1}$$

$$f'(\alpha) = \frac{\ln 2 - \ln 4}{1} = \ln\left(\frac{2}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

La función $g(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)}$ es derivable en el intervalo $(-1, 0)$, pues en dicho intervalo $-1 < x < 0 \Rightarrow -1+3 < x+3 < 0+3 \Rightarrow 2 < x+3 < 3$ y por tanto la base de la función exponencial es positiva y mayor que 1 y la composición de funciones derivables es también derivable. También se cumple en el intervalo $(-1, 0)$ que:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ -1 < x < 0 \rightarrow 0 < -x < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x^2 - x < 1+1 \Rightarrow 0+2 < x^2 - x + 2 < 2+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 < x^2 - x + 2 < 4 \Rightarrow \boxed{x^2 - x + 2 > 0}$$

Por lo que el logaritmo existe y la función $h(x) = \ln(x^2 - x + 2)$ es derivable en el intervalo $(-1, 0)$.

El producto de funciones derivables es derivable. La función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$ es derivable en el intervalo $(-1, 0)$. También es continua en $[-1, 0]$.

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \sin(\pi x) \text{ y } g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Igualemos las funciones $f(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) = |x^2 - x|$.

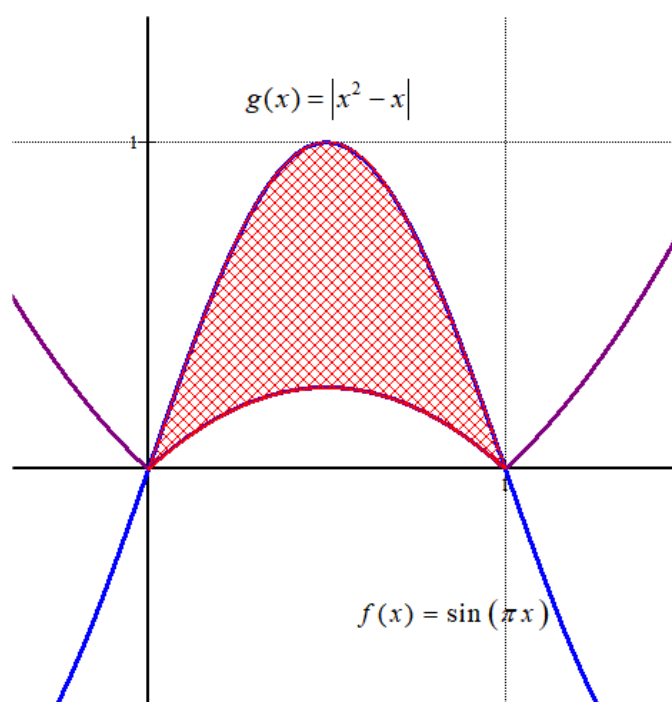
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin(\pi x) = |x^2 - x| \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ pues } \sin(0) = |0^2 - 0| \\ 0 \\ x = 1, \text{ pues } \sin(\pi) = |1^2 - 1| \end{cases}$$

El área es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

En el intervalo $[0,1]$ la función $g(x)$ tiene la expresión $g(x) = |x^2 - x| = x - x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^1 \sin(\pi x) - (x - x^2) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| = \\ &= \left| \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi) - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] - \left[-\frac{1}{\pi} \cos(0) - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} \right] \right| = \left| \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \right| = \boxed{0,47 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Lo dibujamos para comprobar este valor del área. Concuera pues en la imagen se observa que la zona rayada ocupa aproximadamente medio cuadradito.



EvAU Julio 2019



Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones, A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2 + a - 2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2

(2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos).

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 9) & x \leq 1 \\ \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª} \} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)(a-1)(a+1-1) = |A| = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix} =$$

$$= \{ \text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª} \} = (a+1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)(a-1)(a+1-1) = (a+1)(a-1)a$$

Lo igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow (a+1)(a-1)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Estudiemos los cuatro casos siguientes.

CASO 1. $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq -1$.

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución. Utilizamos la regla de Cramer para obtener la solución del sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 0 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a-1)} \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)\cancel{(a-1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)a} =$$

$$= \frac{\cancel{(a+1)} \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{a} = \frac{-a^2 - 2a - 1 - 1 + 1 + a^2 + 3a + 2}{a} = \frac{a+1}{a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 1-a \\ -a-1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ a+1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1-a \\ -1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a-1)a} =$$

$$= \frac{\cancel{(a-1)} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{\cancel{(a-1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{a} = \frac{a+1+a^2+3a+2-1-a^2-2a-1}{a}$$

$$\boxed{y = \frac{2a+1}{a}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a-1)a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{(a-1)a} =$$

$$z = \frac{1 + \cancel{a^2} + \cancel{2a} + 1 - \cancel{a^2} - \cancel{2a} - 1 - a - 1}{(a-1)a} = \frac{-\cancel{a}}{(a-1)\cancel{a}} = \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$$

La solución es $x = \frac{a+1}{a}$, $y = \frac{2a+1}{a}$, $z = \frac{1}{1-a}$.

CASO 2. $a = 0$.

El sistema queda
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - 2z = -1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible. Las ecuaciones 1ª y 3ª tienen igual el primer miembro y diferente el 2º.

CASO 3. $a = 1$.

El sistema queda
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Vuelve a ser un sistema incompatible, las ecuaciones 2ª y 3ª no se pueden cumplir al mismo tiempo.

CASO 4. $a = -1$

El sistema queda

$$\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -2z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 0 \\ \boxed{z = \frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow -y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = t$, $y = 1$, $z = 0,5$.

Resumiendo: Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado siendo su solución:

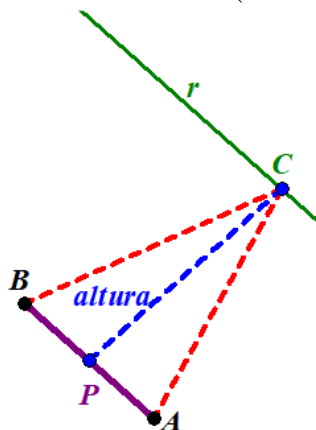
$x = \frac{a+1}{a}$, $y = \frac{2a+1}{a}$, $z = \frac{1}{1-a}$, si $a = 0$ o $a = 1$ el sistema es incompatible y si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $x = t$, $y = 1$, $z = 0,5$, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.

A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2 (2 puntos)

La recta r tiene ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, -2) \\ P_r(3, 4, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

El tercer vértice está en la recta y tiene coordenadas $C \equiv (3 + 2t, 4 - t, 4 - 2t)$



El vector $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -2) - (2, -3, 2) = (-2, 4, -4)$.

La longitud de la base es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

El punto medio del segmento AB es $P = \frac{(0, 1, -2) + (2, -3, 2)}{2} = \frac{(2, -2, 0)}{2} = (1, -1, 0)$.

La altura del triángulo es el módulo del vector que une P con C.

$$|\overrightarrow{PC}| = |(3 + 2t, 4 - t, 4 - 2t) - (1, -1, 0)| = |(2 + 2t, 5 - t, 4 - 2t)| =$$

$$= \sqrt{(2 + 2t)^2 + (5 - t)^2 + (4 - 2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + 8t + 25 + t^2 - 10t + 16 + 4t^2 - 16t} = \sqrt{9t^2 - 18t + 45}$$

Como el área del triángulo es 18 se cumple:

$$18 = \frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{9t^2 - 18t + 45}}{2} \Rightarrow 36 = 6 \cdot \sqrt{9t^2 - 18t + 45} \Rightarrow 6 = \sqrt{9t^2 - 18t + 45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = 9t^2 - 18t + 45 \Rightarrow 9t^2 - 18t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1}$$

El tercer vértice del triángulo es el punto C.

$$\left. \begin{array}{l} C \equiv (3 + 2t, 4 - t, 4 - 2t) \\ t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C \equiv (5, 3, 2)}$$

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

La función es continua en el intervalo $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$, determinamos su derivada utilizando la derivación logarítmica.

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{e}{x} \ln (x + ex - e)$$

Derivamos la expresión obtenida.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e}$$

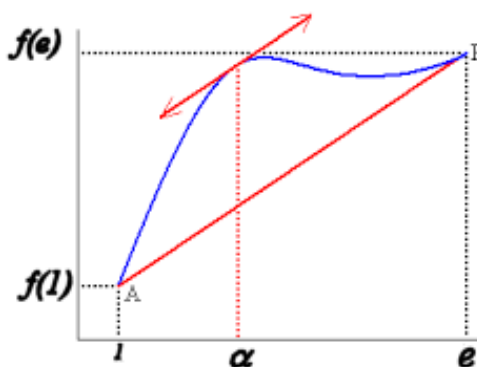
$$f'(x) = f(x) \left[-\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \right]$$

$$f'(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \left[-\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \right]$$

Calculamos $f(1) = (1 + e - e)^{\frac{e}{1}} = 1$; $f(e) = (e + e^2 - e)^{\frac{e}{e}} = e^2$

La pendiente de la recta que une el punto $(1, 1)$ con el punto (e, e^2) es

$$\text{pendiente} = \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \frac{(e-1)(e+1)}{e-1} = e + 1$$



Según el teorema de Rolle, existe un valor $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}$.

Es decir, existe un valor $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = e + 1$

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

Hallamos los puntos de corte de las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \Rightarrow \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 1$$

Por tanteo, comprobamos que $x = 0$ cumple la ecuación, pues $\cos 0 = \frac{0}{\pi^2} + 1$. Es cierto.

También se cumple para $x = \pi$ pues $\cos \pi = \frac{-2\pi^2}{\pi^2} + 1 = -2 + 1 = -1$. Es cierto.

También se cumple para $x = -\pi$ pues $\cos(-\pi) = \frac{-2\pi^2}{\pi^2} + 1 = -2 + 1 = -1$. Es cierto.

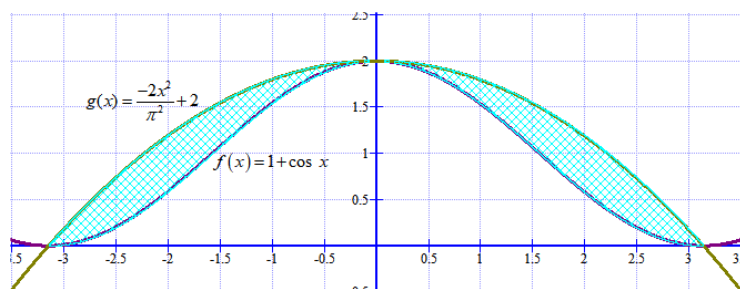
El área se calcula hallando el valor de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre $x = -\pi$ y $x = 0$ y de la integral definida entre $x = 0$ y $x = \pi$.

El valor del área se obtiene sumando sus valores absolutos.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 1 + \cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \right) dx &= \int_{-\pi}^0 1 + \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 2 dx = \int_{-\pi}^0 \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1 dx = \\ &= \left[\sin x + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_{-\pi}^0 = \left[\sin 0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] - \left[\sin(-\pi) + \frac{2(-\pi)^3}{3\pi^2} - (-\pi) \right] = \\ &= \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = \boxed{-\frac{1}{3}\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 1 + \cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \right) dx &= \int_0^{\pi} \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1 dx = \left[\sin x + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left[\sin \pi + \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi \right] - \left[\sin 0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] = \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = \boxed{-\frac{1}{3}\pi} \end{aligned}$$

El área de la región que nos piden calcular vale $\left| -\frac{1}{3}\pi \right| + \left| -\frac{1}{3}\pi \right| = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$ unidades cuadradas.



OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos la suma y el producto de las matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2-t+t & -t^2+t^2-t & -t^2-t+t^2+t \\ t^2+t+1-t^2+1 & t-t^2+t-1 & 1-t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes del producto y de la suma.

El determinante de $A+B$ es 0 ya que la columna segunda es todo ceros.

El determinante de $A \cdot B$ es:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común en 1ª fila } (t-1) \\ \text{y en 2ª fila } (t) \end{array} \right\} =$$

$$= (t-1)t \begin{vmatrix} 1 & t-1 & t+1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común en 3ª columna } (t+1) \right\} =$$

$$= (t-1)t(t+1) \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t+2 \end{vmatrix} = (t-1)t(t+1)(t-2 - \cancel{t^2} - 2t^2 + t + t + 2 - \cancel{t^2} + 3t^2 - 2t)$$

$$|A \cdot B| = (t-1)t(t+1)(t^2+t) = (t-1)t(t+1)t(t+1)$$

Entonces

$$|A \cdot B| = |A + B| \Rightarrow (t-1)t(t+1)t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Halleemos la ecuación del plano π que contiene a la recta r y el punto P . Después la ecuación del plano π' que contiene a la recta s y el punto P . La recta t es la definida por ambos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv a(-x + y - z - 1) + b(3y - 2z + 3) = 0 \\ P(1, -2, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow a(-1 - 2 + 1 - 1) + b(-6 + 2 + 3) = 0$$

$$-3a - b = 0 \Rightarrow b = -3a$$

El plano π tiene ecuación:

$$\begin{aligned} \pi &\equiv a(-x + y - z - 1) - 3a(3y - 2z + 3) = 0 \Rightarrow (-x + y - z - 1) - 3(3y - 2z + 3) = 0 \\ \pi &\equiv -x - 8y + 5z - 10 = 0 \end{aligned}$$

El plano π' pasa por $P \equiv (1, -2, -1)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 1, -1)$ y

$\overrightarrow{AP} = (1, -2, -1) - (3, 1, -1) = (-2, -3, 0)$, siendo $A(3, 1, -1)$ un punto de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, -2, -1) \in \pi' \\ \vec{u} = (0, 1, -1) \\ \overrightarrow{AP} = (-2, -3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + 4 + 2z + 2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi' \equiv -3x + 2y + 2z + 9 = 0$$

La recta t es la definida por la intersección de los planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x - 8y + 5z - 10 = 0 \\ \pi' \equiv -3x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{array} \right\}$$

Obtenemos la ecuación continua de la recta.

El vector director de la recta $t \equiv \begin{cases} -x - 8y + 5z - 10 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16i - 15j - 2k - 24k + 2j - 10i = -26i - 13j - 26k = (-26, -13, -26)$$

Reduciendo las coordenadas del vector dividiendo por -13 , podemos tomar como vector director de la recta $\vec{v}_r = (2, 1, 2)$

Un punto de la recta se puede tomar el punto $P(1, -2, -1)$.

La ecuación continua de la recta t es $\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}}$

OTRA MANERA DE RESOLVERLO

Veamos cual es la posición relativa de las rectas r y s .

El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2i - 3k - 2j + 3i = i - 2j - 3k = (1, -2, -3)$$

Y el vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$

¿Son paralelas o coincidentes? ¿Son las coordenadas de los vectores directores proporcionales?

$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r = (1, -2, -3) \\ \vec{v}_s = (0, 1, -1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{¿} \frac{1}{0} = \frac{-2}{1} = \frac{-3}{-1} \text{?}$, la respuesta es que no son ciertas las igualdades y las rectas

solo pueden ser secantes o se cruzan.

Averiguemos un punto de la recta r .

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow -x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x = -2$$

El punto de la recta r es $P_r = (-2, -1, 0)$

Un punto de s puede ser $P_s = (3, 1, -1)$

El vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (3, 1, -1) - (-2, -1, 0) = (5, 2, -1)$

Calculemos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r = (1, -2, -3)$, $\vec{v}_s = (0, 1, -1)$ y $\overrightarrow{P_r P_s} = (5, 2, -1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 10 + 15 + 2 = 26 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtengamos las coordenadas genéricas de un punto cualquiera de cada una de las rectas.

La ecuación de la recta r es

$$\left. \begin{matrix} P_r = (-2, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (1, -2, -3) \end{matrix} \right\} r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases} \Rightarrow Q_r = (-2 + t, -1 - 2t, -3t)$$

Y la ecuación de la recta s es

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t' \\ z = -1 - t' \end{cases} \Rightarrow Q_s = (3, 1 + t', -1 - t')$$

El vector director de la recta t debe pasar por un punto de r y otro de s . Por lo que los vectores $\overrightarrow{PQ_s}$ y $\overrightarrow{PQ_r}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ_r} = (-2+t, -1-2t, -3t) - (1, -2, -1) = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ \overrightarrow{PQ_s} = (3, 1+t', -1-t') - (1, -2, -1) = (2, 3+t', -t') \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} = \frac{1-3t}{-t'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} \\ \frac{-3+t}{2} = \frac{1-3t}{-t'} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (-3+t)(3+t') = 2(1-2t) \\ -t'(-3+t) = 2(1-3t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -9-3t'+3t+tt'=2-4t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3t'+tt'=11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} t'(-3+t) = 11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t' = \frac{11-7t}{-3+t} \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{11-7t}{-3+t} = \frac{-2+6t}{-3+t} \Rightarrow 11-7t = -2+6t$$

$$-7t - 6t = -2 - 11 \Rightarrow -13t = -13 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

Para $t=1$ el vector director de la recta t es:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = \overrightarrow{PQ_r} = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_t = (-2, -1, -2)$$

La recta t tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = (2, 1, 2) \\ P \equiv (1, -2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 9) & x \leq 1 \\ \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

La función en el intervalo $(-\infty, 1)$ tiene la expresión $f(x) = \log(x^2 + 9)$. Esta expresión existe pues $x^2 + 9 > 0$. La función es continua en $(-\infty, 1)$.

La función en el intervalo $(1, +\infty)$ tiene la expresión $f(x) = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)}$. Esta expresión existe pues el denominador se anula para $x = 1 \notin (1, +\infty)$. La función es continua en $(1, +\infty)$.

Para que sea continua en todo $\mathbb{R}$ debe de serlo en $x = 1$. Para ello se deben cumplir:

- Existe $f(1) = \log(1^2 + 9) = \log 10 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log(x^2 + 9) = \log 10 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{a \cdot (1-1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplico L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{\pi}{2a}$$

- Los tres valores son iguales. $\frac{\pi}{2a} = 1 \Rightarrow \pi = 2a \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

La derivada de $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$ es

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Resolver la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi \sin(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$

Y esta ecuación es demasiado compleja.

Acudamos al teorema de Bolzano. La función $f'(x)$ es continua en el intervalo $(-1, 0)$, pues el denominador se anula en $x = 1$ y $x = 2$, que no pertenecen al intervalo.

Hallamos el valor de $f'(x)$ en los extremos del intervalo $(-1, 0)$.

$$f'(-1) = -\pi \sin(-\pi) \cdot \ln(1 + 3 + 2) + \cos(-\pi) \cdot \frac{-2 - 3}{1 + 3 + 2} = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

Y

$$f'(0) = -\pi \sin(0) \cdot \ln(0^2 - 0 + 2) + \cos(0) \cdot \frac{0 - 3}{0^2 - 0 + 2} = \frac{-3}{2} < 0$$

Por lo tanto, existe un punto donde la función $f'(x)$ se anula. Este sería un punto crítico de la función $f(x)$ y como la derivada pasa de positiva (crece $f(x)$) a negativa (decrece $f(x)$), entonces debe de ser un máximo relativo.

EvAU Junio 2019



Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019 CONVOCATORIA: JUNIO

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2 - a)z = 3a - 1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades. (2 puntos)

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}} \quad (1 \text{ punto})$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) $P \equiv (1, -1, 1)$, $Q \equiv (5, -3, 5)$, $R \equiv (7, -7, 1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln \left[x - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right) \right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y

$g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{vmatrix} = \{\text{Sacamos factor comun } a+2 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ columna}\} =$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & 2 & a^2-a \\ 1 & -2 & 2-2a \end{vmatrix} = (a+2)(4-4a-a^2+a-2a+2a-2+2a+2a^2-2a) =$$

$$= (a+2)(a^2-3a+2)$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow (a+2)(a^2-3a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ a^2-3a+2=0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro casos distintos a considerar.

CASO 1. $a \neq 2, a \neq 1$ y $a \neq -2$

En esta situación el sistema es compatible determinado ya que el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada y el número de incógnitas.

Su solución se puede obtener por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -1 & -a \\ 3a-1 & 2 & a^2-a \\ -2a & -2 & 2-2a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4a+4a^2+2a^3-2a^2+6a^2-2a-4a^2-2+2a+6a-6a^2-2a^3+2a^2}{(a+2)(a^2-3a+2)}$$

$$x = \frac{-2+2a}{(a+2)(a^2-3a+2)} = \frac{2\cancel{(a-1)}}{(a+2)\cancel{(a-1)}(a-2)} = \frac{2}{a^2-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & -a & -a \\ -a-2 & 3a-1 & a^2-a \\ a+2 & -2a & 2-2a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+2)} \begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ -1 & 3a-1 & a^2-a \\ 1 & -2a & 2-2a \end{vmatrix}}{\cancel{(a+2)}(a^2-3a+2)} =$$

$$y = \frac{6a-6a^2-2+2a-a^3+a^2-2a^2+3a^2-a-2a+2\cancel{a^2}+2a^3-2\cancel{a^2}}{a^2-3a+2}$$

$$y = \frac{a^3-4a^2+5a-2}{a^2-3a+2} = \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}(a-1)}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}} = a-1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & 3a-1 \\ a+2 & -2 & -2a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & 2 & 3a-1 \\ 1 & -2 & -2a \end{vmatrix}}{\cancel{(a+2)}(a^2-3a+2)} =$$

$$= \frac{-4a-3a+1-\cancel{2a}+\cancel{2a}+2a+6a-2}{a^2-3a+2} = \frac{a-1}{a^2-3a+2} = \frac{\cancel{a-1}}{\cancel{(a-1)}(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

La solución es $x = \frac{2}{a^2-4}$; $y = a-1$; $z = \frac{1}{a-2}$.

CASO 2. $a = -2$

El sistema queda

$$\begin{cases} -y+2z=2 \\ 2y+6z=-7 \\ -2y+6z=4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Divido la ecuación 3ª entre 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -y+2z=2 \\ 2y+6z=-7 \\ -y+3z=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ -y+3z=2 \\ y-2z=-2 \\ \hline z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -y=2 \\ 2y=-7 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ y=-7/2 \\ z=0 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

El sistema queda $\begin{cases} 4x-y-2z=-2 \\ -4x+2y+2z=5 \\ 4x-2y-2z=-4 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 4x - y - 2z = -2 \\ -4x + 2y + 2z = 5 \\ 4x - 2y - 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 4x \quad -2y \quad -2z = -4 \\ -4y \quad +2y \quad +2z = 5 \\ \hline 0 \quad \quad = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y - 2z = -2 \\ -4x + 2y + 2z = 5 \\ \mathbf{0 = 1} \end{cases}$$

Este sistema es incompatible.

CASO 4. $a=1$

El sistema queda

$$\begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ -3x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ 3x \quad -2y \quad = -2 \\ -3x \quad +2y \quad = 2 \\ \hline 0 \quad \quad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ -3x + 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = -1 - 3x \\ 2y = 2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = -1 - 3x \\ \boxed{y = \frac{2 + 3x}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2 + 3x}{2} - z = -1 - 3x \Rightarrow -2 - 3x - 2z = -2 - 6x \Rightarrow -2z = -3x \Rightarrow \boxed{z = \frac{3x}{2}}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Con solución $x = t; y = 1 + \frac{3t}{2}; z = \frac{3t}{2}$.

Resumiendo: Si $a \neq 2, a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado siendo su solución:

$x = \frac{2}{a^2 - 4}; y = a - 1; z = \frac{1}{a - 2}$, si $a = -2$ o $a = 2$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema

es compatible indeterminado siendo sus soluciones $x = t; y = 1 + \frac{3t}{2}; z = \frac{3t}{2}$, para cualquier valor $t \in \mathbb{R}$.

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades. (2 puntos)

Un plano paralelo a r tiene como vector director el director de r y como también debe ser paralelo a s , por lo que también tiene como vector director $\vec{v}_s = (1, 2, 2)$.

Hallamos el vector director de r como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 2k - 2j + 2i = 3i - 2j + 2k = (3, -2, 2)$$

El vector normal del plano π es el producto vectorial de los dos vectores directores

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 2, 2) \\ \vec{v}_r = (3, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 6j - 2k - 6k - 2j + 4i = 8i + 4j - 8k = (8, 4, -8)$$

El plano π tiene ecuación

$$\vec{n} = \vec{v}_s \times \vec{v}_r = (8, 4, -8) \Rightarrow \pi \equiv 8x + 4y - 8z + D = 0$$

Como la distancia de s a π es 3 se cumple

$$d(s, \pi) = 3 \Rightarrow d((-2, 1, 1), \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|-16 + 4 - 8 + D|}{\sqrt{64 + 16 + 64}} = 3 \Rightarrow \frac{|-20 + D|}{\sqrt{144}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-20 + D}{12} = 3 \Rightarrow -20 + D = 36 \Rightarrow \boxed{D = 56} \\ \frac{-20 + D}{12} = -3 \Rightarrow -20 + D = -36 \Rightarrow \boxed{D = -16} \end{cases}$$

Hay dos planos solución del problema.

$$\pi \equiv 8x + 4y - 8z + 56 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y - 2z + 14 = 0}$$

$$\pi' \equiv 8x + 4y - 8z - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + y - 2z - 4 = 0}$$

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}} \quad (1 \text{ punto})$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \quad (1 \text{ punto})$$

Primera derivada.

Simplificamos al máximo la expresión de la función antes de derivar.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}} = \ln \left(\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} (\ln \sin x - \ln \cos x) \end{aligned}$$

Derivamos la nueva expresión de la función $f(x) = \frac{1}{2} (\ln \sin x - \ln \cos x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} \right) = \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

La derivada tiene la expresión $f'(x) = \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$.

Segunda derivada. Utilizamos la derivación logarítmica.

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = x^x \Rightarrow \ln g(x) = \ln x^x \Rightarrow \ln g(x) = x \cdot \ln x$$

Derivamos la igualdad obtenida y despejamos $g'(x)$.

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = g(x)(\ln x + 1) = x^x (1 + \ln x)$$

La derivada tiene la expresión $g'(x) = x^x (1 + \ln x)$.

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

La función $f(x) = \left[x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$ es continua en el intervalo $(-1, 3)$.

Estudiamos el signo de la expresión $x^2 - 2x + 7$.

$$x^2 - 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-24}}{2} = \text{No existe}$$

La expresión nunca se anula. Por tanto, siempre es positiva o siempre negativa. Sustituimos un valor y comprobamos cual de estas dos circunstancias se da.

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 - 2 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$$

La expresión $x^2 - 2x + 7$ es siempre positiva, en particular es positiva en el intervalo $(-1, 3)$. Por tanto, el logaritmo existe.

La expresión que es la base $x^2 + \log(x^2 - 2x + 7)$ es positiva en el intervalo $(-1, 3)$

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= x^2 - 2x + 7 \rightarrow g'(x) = 2x - 2 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$g''(x) = 2 \Rightarrow g''(1) = 2 > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo de la función $g(x)$.

$$g(1) = 1^2 - 2 + 7 = 6$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 7 \geq 6 \Rightarrow \log(x^2 - 2x + 7) \geq \log 6 \Rightarrow x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \geq 0 + \log(6) > 0$$

La función $f(x)$ es derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

Si consideramos la función $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x$ tenemos que esta nueva función es derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

$$\left. \begin{aligned} g(-1) &= f(-1) - \frac{1}{4} = (1 + \log 10)^1 - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ g(3) &= f(3) + \frac{3}{4} = (9 + \log 10)^0 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-1) = g(3).$$

Utilizando el teorema de Rolle existe un valor $c \in (-1, 3)$ donde $g'(c) = 0$.

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{4}.$$

OPCIÓN B

B1) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Comprobamos que la matriz A es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La matriz A es invertible. Calculamos su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos sucesivas potencias de A.

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A^{-1}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

.....

Todas las potencias de A con exponente 3 o múltiplos de 3 son igual a la matriz identidad I.

$$A^3 = A^6 = \dots = A^{24} = \dots = A^{33} = I$$

Por lo que

$$A^{35} = A^{33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = A^{-1}$$

$$A^{25} = A^{24} \cdot A = I \cdot A = A$$

La ecuación $X \cdot A^{35} = A^{25}$ se resuelve utilizando lo anterior.

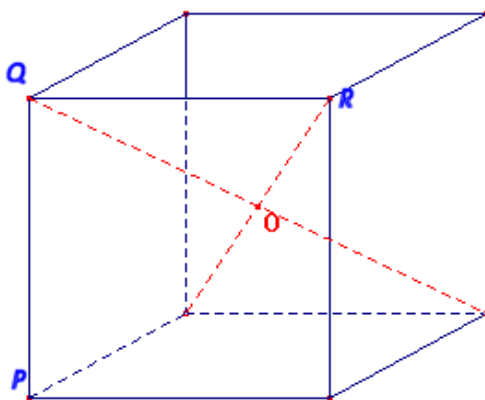
$$X \cdot A^{35} = A^{25} \Rightarrow X \cdot A^{-1} = A \Rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = A \cdot A \Rightarrow X = A^2 = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

B2) $P \equiv (1, -1, 1)$, $Q \equiv (5, -3, 5)$, $R \equiv (7, -7, 1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

Observemos el dibujo para aclararnos con lo que deseamos conseguir

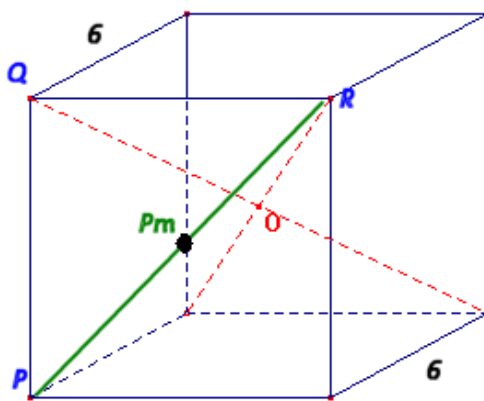


Buscamos el punto O.

Comprobamos que los puntos están dispuestos como en el dibujo. Para ello el vector $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ deben ser perpendiculares y medir lo mismo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (5, -3, 5) - (1, -1, 1) = (4, -2, 4) \\ \overrightarrow{QR} = (7, -7, 1) - (5, -3, 5) = (2, -4, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6 \\ |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = (4, -2, 4)(2, -4, -4) = 8 + 8 - 16 = 0 \end{array} \right\}$$

Es correcto el planteamiento del dibujo.



Hallamos el plano definido por los tres puntos.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (4, -2, 4) \\ \overrightarrow{QR} = (2, -4, -4) \\ \text{Pasa por } P(1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x - 8 + 8y + 8 - 16z + 16 + 4z - 4 + 16y + 16 + 16x - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x + 24y - 12z + 12 = 0 \Rightarrow \pi: 2x + 2y - z + 1 = 0$$

El punto medio del segmento $\overline{PR}$ es $Pm = \frac{(1, -1, 1) + (7, -7, 1)}{2} = (4, -4, 1)$.

El punto O cumple que está en la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto Pm y a una distancia de 3 unidades del punto Pm (3 es la mitad de la longitud de la arista del cubo). Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, -1) \\ \text{Pasa por } Pm(4, -4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 4 + 2t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 - t \end{array} \right\} \Rightarrow O = (4 + 2t, -4 + 2t, 1 - t)$$

Aplicamos que el punto O pertenece a la recta y $d(O, Pm) = 3$.

$$\overline{PmO} = (4 + 2t, -4 + 2t, 1 - t) - (4, -4, 1) = (2t, 2t, -t)$$

$$d(Pm, O) = 3 \Rightarrow |\overline{PmO}| = 3 \Rightarrow \sqrt{4t^2 + 4t^2 + t^2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3t = 3 \Rightarrow t = 1 \\ 3t = -3 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Los posibles puntos son dos:

$$t = 1 \Rightarrow O = (4 + 2, -4 + 2, 1 - 1) = (6, -2, 0)$$

$$t = -1 \Rightarrow O' = (4 - 2, -4 - 2, 1 + 1) = (2, -6, 2)$$

Depende de hacia qué lado construyas el cubo el centro es uno de estos puntos: $O(6, -2, 0)$ u $O'(2, -6, 2)$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln \left[x - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right) \right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Para poder utilizar el teorema de Bolzano a esta función en este intervalo debe cumplirse que sea continua y que cambie de signo de un extremo a otro del intervalo.

El denominador de la fracción se anula en $x = 0$ y $x = 4$, que no están incluidos en el intervalo $(1, 3)$.

La expresión $x - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right)$ es siempre positiva en el intervalo dado. Se anula cuando

$$x - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right) = 0 \Rightarrow x + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right) = 1$$

Y esto es imposible con los valores comprendidos entre 1 y 3 ya que siempre son mayores que 1. El logaritmo neperiano no presenta discontinuidades en $(1, 3)$.

El requisito de la continuidad la cumple.

Veamos el signo de la función en $x = 1$

$$f(1) = \frac{\ln \left[1 - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]}{4 - 1^2} = \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \right)}{3} = -0,23 < 0$$

Veamos el signo de la función en $x = 3$

$$f(3) = \frac{\ln \left[3 - 1 + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]}{12 - 3^2} = \frac{\ln \left(2 + \frac{1}{2} \right)}{3} = 0,3 > 0$$

Se cumple los requisitos para poder aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)$ en el intervalo $(1, 3)$ y podemos afirmar que:

$f(x) = \frac{\ln \left[x - 1 + \sin^2 \left(\frac{\pi x}{4} \right) \right]}{4x - x^2}$ es continua en $(1, 3)$; $f(1) < 0$; $f(3) > 0$ entonces existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

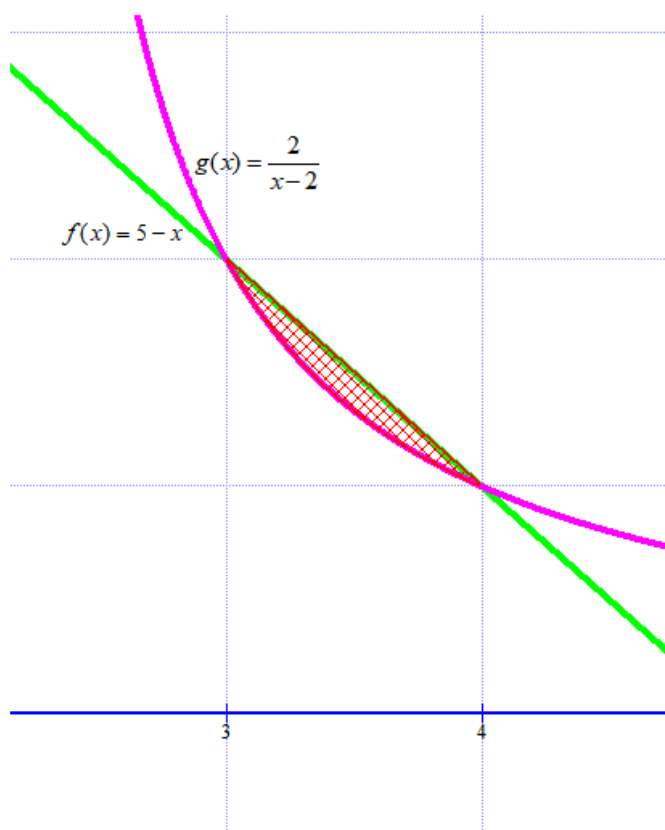
B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5 - x = \frac{2}{x-2} \Rightarrow 5x - 10 - x^2 + 2x = 2 \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{-2} = \begin{cases} \frac{-7+1}{-2} = 3 \\ \frac{-7-1}{-2} = 4 \end{cases}$$

Como $f(3) = 5 - 3 = 2$ y $f(4) = 5 - 4 = 1$ las funciones se cortan en $P(3, 2)$ y $Q(4, 1)$



El área pedida es la integral definida de $f(x) - g(x)$ entre 3 y 4.

$$\int_3^4 f(x) - g(x) dx = \int_3^4 5 - x - \frac{2}{x-2} dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln|x-2| \right]_3^4 =$$

$$= \left[5 \cdot 4 - \frac{4^2}{2} - 2 \ln|4-2| \right] - \left[5 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} - 2 \ln|3-2| \right] = 20 - 8 - 2 \ln 2 - 15 + 4,5 = 1,5 - 2 \ln 2 = \boxed{0,11 u^2}$$

EvAU Julio 2018



Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017/2018 IKASTURTEA

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (2a-6)x + (3a-6)y + 5z = -1 \\ (3-a)x + (a-2)z = a^2 - 4a + 5 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Halla el simétrico del punto $P \equiv (2, 5, 2)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad (2 \text{ puntos})$$

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$, siendo

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

A4) La gráfica de la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ divide al cuadrado de centro $(0, 0)$ y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$

(3 puntos)

B3) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4} dx \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx \quad (1 \text{ punto})$$

B4) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 - x^2 \quad (3 \text{ puntos})$$

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (2a-6)x + (3a-6)y + 5z = -1 \\ (3-a)x + (a-2)z = a^2 - 4a + 5 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Aplicamos el método de Gauss para triangular el sistema.

$$\begin{cases} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ 2(a-3)x + 3(a-2)y + 5z = -1 \\ -(a-3)x + (a-2)z = a^2 - 4a + 5 \end{cases} \Rightarrow A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1 \\ -(a-3) & 0 & a-2 & a^2 - 4a + 5 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -(a-3) & 0 & a-2 & a^2 - 4a + 5 \\ a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ \hline 0 & a-2 & a & a^2 - 4a + 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1 \\ -2(a-3) & -2(a-2) & -4 & 2 \\ \hline 0 & a-2 & 1 & 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & a & a^2 - 4a + 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 & a-2 & a & a^2 - 4a + 4 \\ 0 & -a+2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & a-1 & a^2 - 4a + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2 - 4a + 3 \end{array} \right)$$

Nos planteamos cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado según sea cada elemento de la diagonal principal nulo o todos no nulos.

CASO 1. $a \neq 1, a \neq 2$ y $a \neq 3$

En este caso todos los elementos de la diagonal principal son no nulos y el sistema se puede resolver obteniendo una única solución. El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente a la ampliada obtenida con el método de Gauss y teniendo en cuenta que $a-1 \neq 0$; $a-2 \neq 0$; $a-3 \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (a-2)y + z = 1 \\ (a-1)z = a^2 - 4a + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (a-2)y + z = 1 \\ z = \frac{a^2 - 4a + 3}{a-1} = \frac{(a-1)(a-3)}{a-1} = a-3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-3)x + (a-2)y + 2(a-3) = -1 \\ (a-2)y + a - 3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-3)x + (a-2)y = -2a + 5 \\ (a-2)y = 4 - a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a-3)x + (a-2)y = -2a + 5 \\ y = \frac{4-a}{a-2} \end{array} \right\} \Rightarrow (a-3)x + (a-2) \frac{4-a}{a-2} = -2a + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-3)x + 4 - a = -2a + 5 \Rightarrow (a-3)x = 1 - a \Rightarrow x = \frac{1-a}{a-3}$$

La solución es $x = \frac{1-a}{a-3}$; $y = \frac{4-a}{a-2}$; $z = a-3$.

CASO 2. $a=1$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1-2 & 2 & -1 \\ 0 & 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1^2-4+3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} -2x - y + 2z = -1 \\ -y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - y + 2z = -1 \\ z = 1 + y \end{array} \right\} \Rightarrow -2x - y + 2(1+y) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - y + 2 + 2y = -1 \Rightarrow -2x = -3 - y \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Las soluciones son: $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$; $y = t$; $z = 1+t$ con $t \in \mathbb{R}$.

CASO 3. $a = 2$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-3 & 2-2 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 & 2^2-8+3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible.

CASO 4. $a = 3$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-3 & 3-2 & 2 & -1 \\ 0 & 3-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 & 3^2-12+3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución:

$x = \frac{1-a}{a-3}$; $y = \frac{4-a}{a-2}$; $z = a-3$. Si $a = 3$ o $a = 2$ el sistema es incompatible. Si $a = 1$ el sistema es

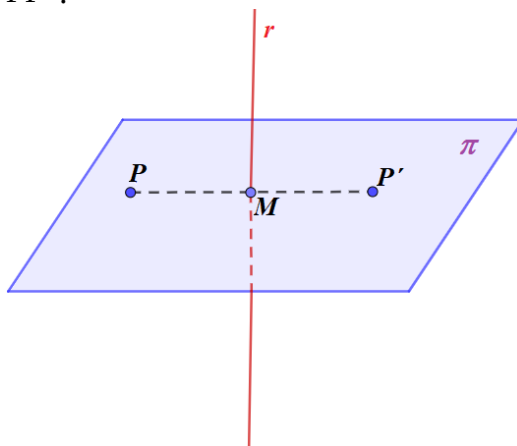
compatible indeterminado siendo sus soluciones $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$; $y = t$; $z = 1+t$ con $t \in \mathbb{R}$.

A2) Halla el simétrico del punto $P \equiv (2, 5, 2)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

(2 puntos)

Vamos a determinar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P , después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P' sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Hallamos la ecuación del plano π . Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, -1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, -1, 2) \\ P(2, 5, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(2, 5, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 5 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$. Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-1 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow -2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 2 + 4\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow M(1, 1, 1)$$

Hallamos las coordenadas del punto P' .

$$\overrightarrow{PM} = (1, 1, 1) - (2, 5, 2) = (-1, -4, -1) \Rightarrow P' = M + \overrightarrow{PM} = (1, 1, 1) + (-1, -4, -1) = (0, -3, 0)$$

El punto simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(0, -3, 0)$.

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$, siendo

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Por la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$\sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Por tanto:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2)$$

Derivamos la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2e^x + 2 - 2x}{2e^x + 2x - x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= -\pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x + 2x - x^2) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2e^x + 2 - 2x}{2e^x + 2x - x^2} \end{aligned}$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo $[0, 2]$ y para ello debe existir el $\ln(2e^x + 2x - x^2)$ y la expresión $2e^x + 2x - x^2$ debe ser positiva.

$$\text{Si } x \in [0, 2] \Rightarrow e^x \geq e^0 = 1 \Rightarrow 2e^x > 2 \Rightarrow 2x - x^2 + 2e^x > 2x - x^2 + 2$$

$$2x - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \approx 2.7 \notin (0, 2) \\ \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \approx -0.7 \notin (0, 2) \end{cases}$$

Si tomamos $x = 1$ la expresión $2x - x^2 + 2$ es positiva.

$$2 \cdot 1 - 1^2 + 2 = 3 > 0$$

Como $2x - x^2 + 2$ es positivo en el intervalo, $2x - x^2 + 2e^x$ es positivo en $[0, 2]$.

Por tanto, la función $f(x)$ y $f'(x)$ existe en el intervalo $[0, 2]$

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. f es continua en $[0, 2]$ pues es producto de funciones continuas.
2. f es derivable en $(0, 2)$. Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[0,2]$ y existe α en el intervalo abierto $(0,2)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

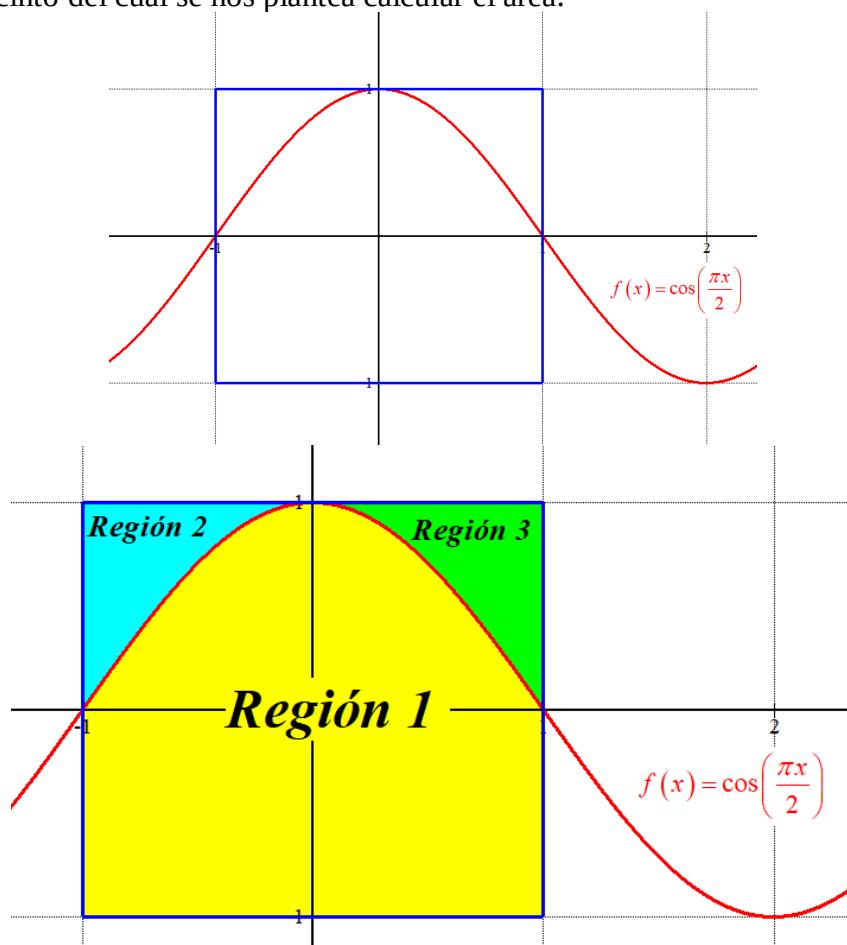
$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\cos^2\left(\frac{2\pi}{2}\right) \cdot \ln(2e^2 + 4 - 2^2) - \cos^2\left(\frac{0}{2}\right) \cdot \ln(2e^0 + 0 - 0^2)}{2} \Rightarrow$$

$$f'(\alpha) = \frac{\cos^2(\pi) \cdot \ln(2e^2) - \cos^2(0) \cdot \ln(2)}{2} = \frac{\ln(2e^2) - \ln(2)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{2e^2}{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$f'(\alpha) = \frac{\ln(e^2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

A4) La gráfica de la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ divide al cuadrado de centro $(0, 0)$ y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones. (3 puntos)

Dibujamos el recinto del cual se nos plantea calcular el área.



Observamos que la región 2 y 3 son simétricas y por tanto tienen el mismo valor de área. El área del cuadrado es 4 unidades cuadradas. Por lo tanto, basta hallar el área del recinto azul para determinar el área del resto.

El área del recinto azul (Región 2) se calcula con una integral definida entre -1 y 0 de la diferencia de la función $y = 1$ y la función $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Área Región 2} &= \int_{-1}^0 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[0 - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{0}{2}\right) \right] - \left[-1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right] = 1 + \frac{2}{\pi}(-1) = \boxed{1 - \frac{2}{\pi} u^2} \end{aligned}$$

$$\text{Área región 3} = \text{Área región 2} = 1 - \frac{2}{\pi} u^2$$

$$\text{Área región 1} = 4 - \text{Área región 2} - \text{Área región 3} = 4 - 2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 4 - 2 + \frac{4}{\pi} = 2 + \frac{4}{\pi} u^2$$

OPCIÓN B

B1) Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Utilizamos la propiedad de los determinantes que dice $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Se puede demostrar esta propiedad utilizando que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices.

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{-1} = -1$$

La condición dada en el ejercicio se convierte en que $|A| = -1$.

Averiguamos cuando se cumple esta condición.

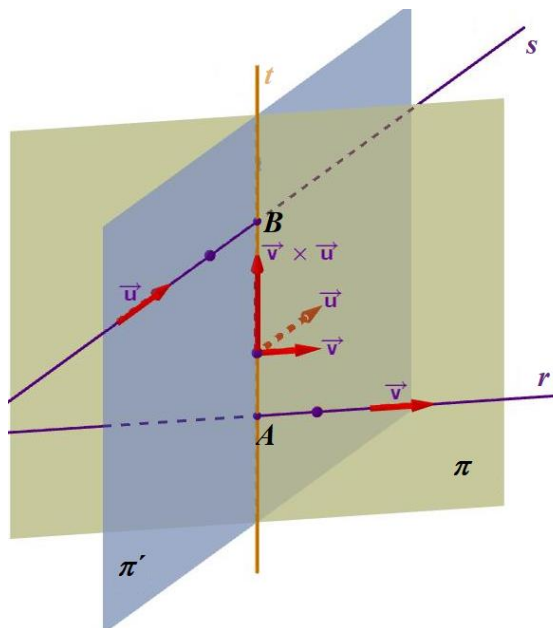
$$|A| = \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 - 2t + 4t = t^2 + 2t \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow t^2 + 2t = -1 \Rightarrow \\ |A| = -1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Se cumple cuando $t = -1$.

B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (3 \text{ puntos})$$



Obtenemos las ecuaciones paramétricas y hallamos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ z=5-2x \end{cases} \Rightarrow x+y+5-2x-3=0 \Rightarrow y=-2+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=-2+\beta \\ z=5-2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(0, -2, 5) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-2\alpha \\ y=-3+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ Q_s(2, -3, 1) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. El producto vectorial de los vectores directores $\vec{v}_r \times \vec{u}_s$ está en la dirección de la recta buscada.

$$\vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j + k + 2k - j + 2i = 3i + 3j + 3k = (3, 3, 3)$$

Hallamos la recta t perpendicular común a las dos rectas como la intersección del plano π que tiene como vector director el producto vectorial $\vec{v}_r \times \vec{u}_s$ y que contiene a la recta r con el plano π' que tiene como vector director el producto vectorial $\vec{v}_r \times \vec{u}_s$ y que contiene a la recta s .

Ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (3, 3, 3) \\ \vec{v}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(0, -2, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 3y + 6 + 3z - 15 - 3z + 15 + 6y + 12 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x + 9y + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y - 2 = 0}$$

Ecuación del plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r \times \vec{u}_s = (3, 3, 3) \\ \vec{u}_s = (-2, 1, 1) \\ Q_s(2, -3, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 6 - 6y - 18 + 3z - 3 + 6z - 6 - 3y - 9 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y + 9z - 36 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv y - z + 4 = 0}$$

Ecuación de la recta t .

$$t \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

B3) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4} dx \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx \quad (1 \text{ punto})$$

Para el cálculo de la primera integral realizamos una descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4(-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{2} = 1 \\ \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{x+1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)} \Rightarrow x+1 = A(x+4)+B(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1+1 = A(1+4)+B(1-1) \rightarrow 2 = 5A \rightarrow A = \frac{2}{5} \\ x=-4 \rightarrow -4+1 = A(-4+4)+B(-4-1) \rightarrow -3 = -5B \rightarrow B = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{2/5}{x-1} + \frac{3/5}{x+4}$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la primera integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4} dx = \int \frac{2/5}{x-1} + \frac{3/5}{x+4} dx = \int \frac{2/5}{x-1} dx + \int \frac{3/5}{x+4} dx = \frac{2}{5} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{1}{x+4} dx =$$

$$= \boxed{\frac{2}{5} \ln|x-1| + \frac{3}{5} \ln|x+4| + K}$$

Calculamos la segunda integral usando el cambio de variable $e^x = t$.

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \\ dx = \frac{1}{e^x} dt \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{e^x}}{1+2t+t^2} \frac{1}{\cancel{e^x}} dt = \int \frac{1}{1+2t+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = \int (1+t)^{-2} dt = \frac{(1+t)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+t} = \boxed{-\frac{1}{1+e^x} + K}$$

B4) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 - x^2$$

(3 puntos)

Obtenemos los puntos críticos de la función.

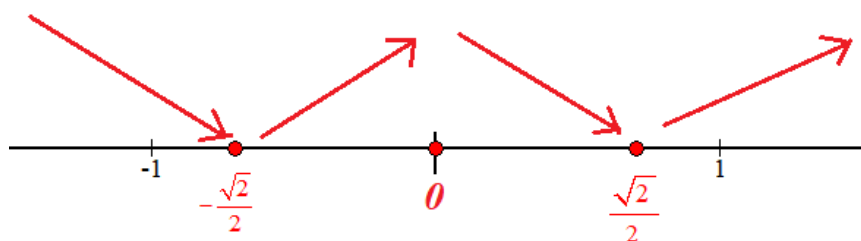
$$f(x) = x^4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores críticos obtenidos.

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1) = -2 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -0.1$ y la derivada vale $f'(-0.1) = 4(-0.1)^3 - 2(-0.1) = 0.196 > 0$. La función crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
- En $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale $f'(0.1) = 4(0.1)^3 - 2(0.1) = -0.196 < 0$. La función decrece en $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 4(1)^3 - 2 = 2 > 0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y otro en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y un máximo relativo en

$$x = 0. \text{ Como } f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, y $f(0) = 0^4 - 0^2 = 0$ los mínimos relativos tienen coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y el máximo relativo está en $(0, 0)$.

Para hallar los puntos de inflexión utilizamos la segunda derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 2$$

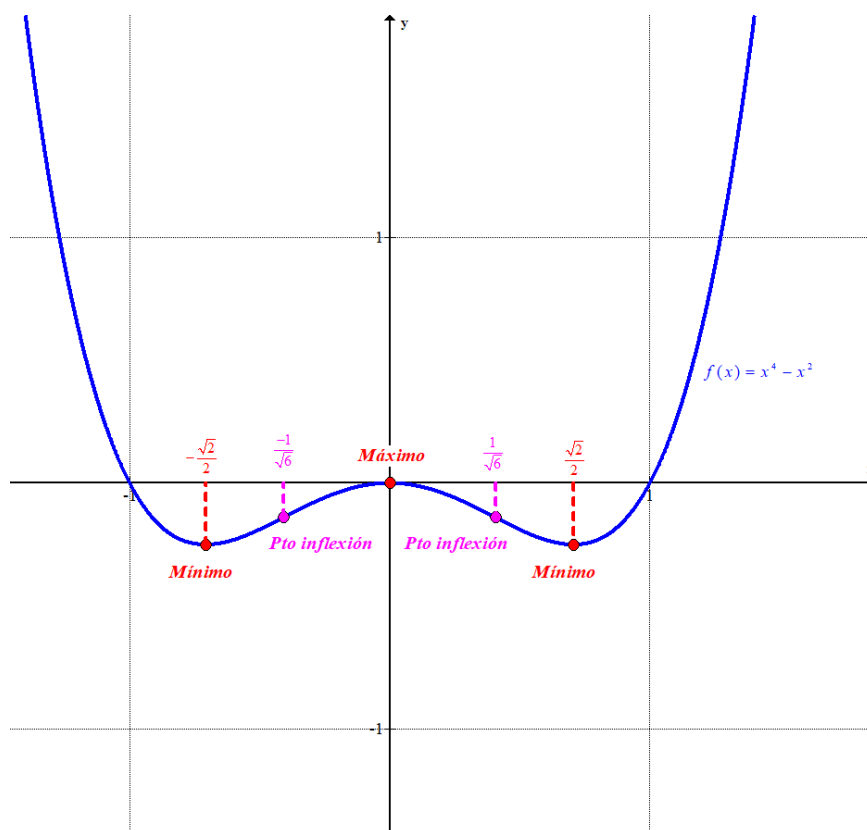
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{12}} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula en estos valores.

$$f''(x) = 12x^2 - 2 \Rightarrow f'''(x) = 24x \Rightarrow \begin{cases} f'''(-\frac{1}{\sqrt{6}}) = -\frac{24}{\sqrt{6}} \neq 0 \\ f'''(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{24}{\sqrt{6}} \neq 0 \end{cases}$$

La función presenta puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Como $f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^4 - \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{36}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{5}{36}$, las coordenadas de los puntos de inflexión son $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{36}\right)$.



EvAU Junio 2018

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017/2018 IKASTURTEA

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + (a+4)y + (a+1)z = 0 \\ -(a+2)y + (a^2 + 3a + 2)z = a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Sean los puntos $P \equiv (7, 4, 2)$, $Q \equiv (1, 2, -2)$ y $R \equiv (2, 1, -3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los dos vértices restantes. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función

$$y = \frac{2x^2 + 6}{x - 1} \quad (3 \text{ puntos})$$

OPCIÓN B

B1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tal que $|A| = -1$. Calcula el determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$

siendo $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix}$

(2 puntos)

B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 0, 5)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (2, 3)$ tal que $f(\alpha) = -\frac{3}{2}$, siendo

$$f(x) = \cos(\pi x) \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \leq 2 \\ 3-x & x > 2 \end{cases}. \text{ Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.}$$

(3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + (a+4)y + (a+1)z = 0 \\ -(a+2)y + (a^2 + 3a + 2)z = a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2 + 3a + 2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2 + 3a + 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2) \\ \text{Sacamos factor comun } a+2 \text{ en la 3ª fila} \end{cases} = \\ &= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+2)(a^2 + a + 4a + 4 - 2a - 2 + a + 1) = (a+2)(a^2 + 4a + 3) \\ |A| = 0 &\Rightarrow (a+2)(a^2 + 4a + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+2 = 0 \Rightarrow a = -2 \\ \text{o} \\ a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Hay cuatro casos distintos a considerar.

CASO 1. $a \neq -1$, $a \neq -2$ y $a \neq -3$

En esta situación el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la ampliada y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Su solución se puede obtener por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a+1 \\ a+4 & -(a+2) & (a+1)(a+2) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 1 \\ a+4 & -(a+2) & a+2 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a+2)(a+3)}$$

$$x = \frac{(a+4)(a+2)+2(a+4)+(a+2)}{(a+2)(a+3)} = \frac{a^2+2a+4a+8+2a+8+a+2}{(a+2)(a+3)}$$

$$x = \frac{a^2+9a+18}{(a+2)(a+3)} = \frac{\cancel{(a+3)}(a+6)}{(a+2)\cancel{(a+3)}} = \boxed{\frac{a+6}{a+2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+4 & (a+1)(a+2) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a+4 & a+2 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a+2)(a+3)} =$$

$$y = \frac{-a-2-a-4}{(a+2)(a+3)} = \frac{-2a-6}{(a+2)(a+3)} = \frac{-2\cancel{(a+3)}}{(a+2)\cancel{(a+3)}} = \boxed{\frac{-2}{a+2}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+4 & 0 \\ 0 & -(a+2) & a+4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2+4a+4a+16-a-2-2a-8}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^2+5a+6}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$z = \frac{\cancel{(a+2)}\cancel{(a+3)}}{(a+1)\cancel{(a+2)}\cancel{(a+3)}} = \frac{1}{a+1}$$

La solución es $x = \frac{a+6}{a+2}$; $y = \frac{-2}{a+2}$; $z = \frac{1}{a+1}$

CASO 2. $a = -1$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \\ -y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \\ \boxed{y=-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6=1 \\ x-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=9 \end{cases} \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

Este sistema es incompatible.

CASO 3. $a = -2$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y-z=0 \\ \mathbf{0=2} \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

Este sistema es incompatible

CASO 4. $a = -3$

$$\text{El sistema queda } \begin{cases} x+2y=1 \\ x+y-2z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \text{ Lo intentamos resolver.}$$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y-2z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y=-1 \\ \hline -y-2z=-1 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -y-2z=-1 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ y+2z=1 \\ -y-2z=-1 \\ \hline 0=0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -y-2z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ \boxed{y=1-2z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2(1-2z)=1 \Rightarrow x+2-4z=1 \Rightarrow \boxed{x=4z-1}$$

Este sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=4t-1$; $y=1-2t$; $z=t$; siendo $t \in \mathbb{R}$

A2) Sean los puntos $P \equiv (7, 4, 2)$, $Q \equiv (1, 2, -2)$ y $R \equiv (2, 1, -3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los dos vértices restantes. (2 puntos)

Debemos determinar qué punto está en el centro del rombo.

Utilizamos que debe formarse un ángulo recto en el punto central.

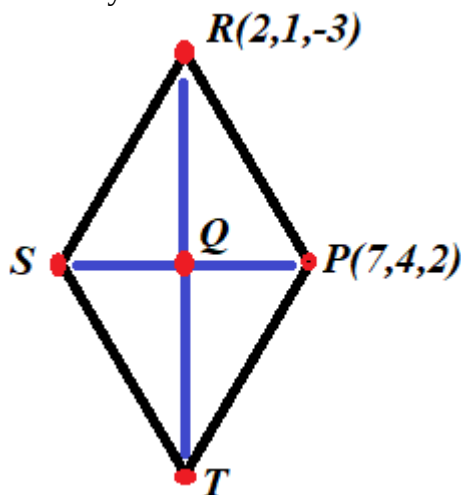
Suponemos el punto Q central y hallamos los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{QP} = (7, 4, 2) - (1, 2, -2) = (6, 2, 4)$$

$$\overrightarrow{QR} = (2, 1, -3) - (1, 2, -2) = (1, -1, -1)$$

Calculamos su producto escalar $\rightarrow \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = (6, 2, 4)(1, -1, -1) = 6 - 2 - 4 = 0$

Se cumple que el punto Q es el central y el rombo es como el de la figura.



Debemos hallar las coordenadas de los puntos S y T.

El punto T se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{RQ}$.

$$\overrightarrow{QR} = (1, -1, -1) \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = -(1, -1, -1) = (-1, 1, 1)$$

$$T = Q + \overrightarrow{RQ} = (1, 2, -2) + (-1, 1, 1) = (0, 3, -1)$$

El punto S se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{QP} = (6, 2, 4) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -(6, 2, 4) = (-6, -2, -4)$$

$$S = Q + \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -2) + (-6, -2, -4) = (-5, 0, -6)$$

Las coordenadas de los dos vértices que faltaban son: S(-5, 0, -6) y T(0, 3, -1)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

La primera integral la calculamos usando el cambio de variable $\cos 3x = t$.

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos 3x = t \rightarrow -3 \cdot \sin 3x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-3 \sin 3x} \end{array} \right\} = \int e^t \cancel{\sin 3x} \frac{dt}{-3 \cancel{\sin 3x}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = \boxed{-\frac{1}{3} e^{\cos 3x} + K}$$

La segunda integral la calculamos usando el cambio de variable $\cos 2x = t$.

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos 2x = t \rightarrow -2 \cdot \sin 2x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-2 \sin 2x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{\sin 2x}}{1 + t^2} \frac{dt}{-2 \cancel{\sin 2x}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + t^2} dt = -\frac{1}{2} \arctgt = \boxed{-\frac{1}{2} \arctg \cos 2x + K}$$

A4) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función

$$y = \frac{2x^2 + 6}{x - 1} \quad (3 \text{ puntos})$$

El dominio de la función $y = \frac{2x^2 + 6}{x - 1}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador. Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} = \frac{7}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 6}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 6}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{2x^2} + 6 - \cancel{2x^2} + 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y = 2x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

Para determinar los extremos relativos utilizamos la derivada de la función.

$$y = \frac{2x^2 + 6}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{4x(x - 1) - (2x^2 + 6)}{(x - 1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 6}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x - 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

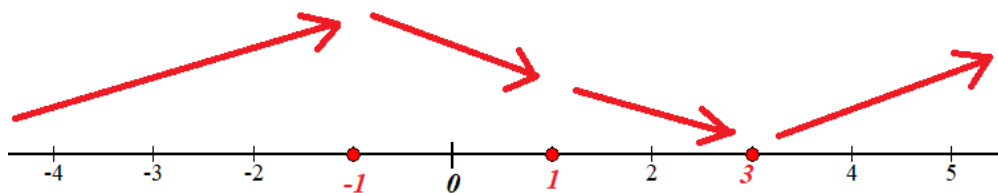
$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

La función tiene dos valores críticos: $x = -1$ y $x = 3$. En el dominio se ha excluido el valor $x = 1$.

Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{2(-2)^2 - 4(-2) - 6}{(-2-1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$
- En $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0-0-6}{(0-1)^2} = -6 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$
- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 6}{(2-1)^2} = -6 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 6}{(4-1)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(-1) = \frac{2(-1)^2 + 6}{-1-1} = -4$ y $f(3) = \frac{2(3)^2 + 6}{3-1} = 12$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, -4)$ y el mínimo relativo $(3, 12)$.

OPCIÓN B

B1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tal que $|A| = -1$. Calcula el determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$ siendo $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separamos en dos determinantes} \\ \text{por la resta de la 2ª fila} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Separamos el primer determinante en dos determinantes} \\ \text{por la resta de la 3ª fila.} \\ \text{El 2º determinante vale 0 pues la fila 1ª y 2ª son iguales.} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{El primer determinante vale 0} \\ \text{pues la fila 2ª es el doble de la 3ª} \end{array} \right\} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sacamos 2 factor común} \\ \text{en la 2ª fila.} \\ \text{Sacamos -1 factor común} \\ \text{en la 3ª fila} \end{array} \right\} = -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Permutamos fila 1ª y 3ª} \\ \text{por lo que el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2|A| = 2(-1) = -2$$

Tenemos que $|B| = -2$ y que $|A| = -1$. Lo utilizamos para calcular el determinante de $A^2 \cdot B^t$.

$$|A^2 \cdot B^t| = |A \cdot A \cdot B^t| = |A| \cdot |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |A| \cdot |B| = (-1)(-1)(-2) = \boxed{-2}$$

Hemos utilizado que el determinante del producto de matrices es igual que el producto de cada uno de los determinantes y que el determinante de una matriz y su traspuesta son iguales.

B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 0, 5)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad (3 \text{ puntos})$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s . Para ello obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x = -1 - y \end{cases} \Rightarrow -1 - y + y + z - 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ P_r(-1, 0, 2) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ Q_s(2, 3, 0) \end{cases}$$

Vemos que los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

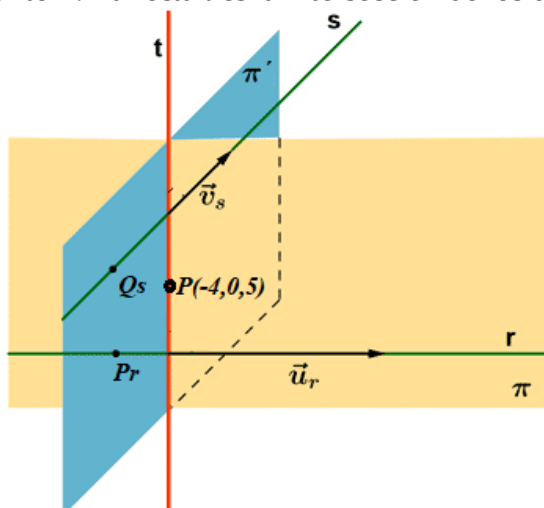
Las rectas se cortan o cruzan.

Averiguamos su posición relativa con el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, 3, 0) - (-1, 0, 2) = (3, 3, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 4 + 3 = 12 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

La recta t pedida se obtiene hallando el plano π que contiene a la recta r y el punto P y el plano π' que contiene la recta s y el punto P . La recta t es la intersección de los dos planos.



El plano π pasa por el punto P y tiene como vectores directores $\vec{u}_r = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{PP_r}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_r = (-1, 1, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_r} = (-1, 0, 2) - (-4, 0, 5) = (3, 0, -3) \\ P(-4, 0, 5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y & z-5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 12 - 3z + 15 - 3y = 0 \Rightarrow -3x - 3y - 3z + 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

El plano π' pasa por el punto P y tiene como vectores directores $\vec{v}_s = (2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{PQ_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_s = (2, 1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_s} = (2, 3, 0) - (-4, 0, 5) = (6, 3, -5) \\ P(-4, 0, 5) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y & z-5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x - 20 + 6y + 3z - 30 - 6z + 30 + 10y - 3x - 12 = 0 \Rightarrow -8x + 16y - 3z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi' \equiv x - 2y + 4 = 0$$

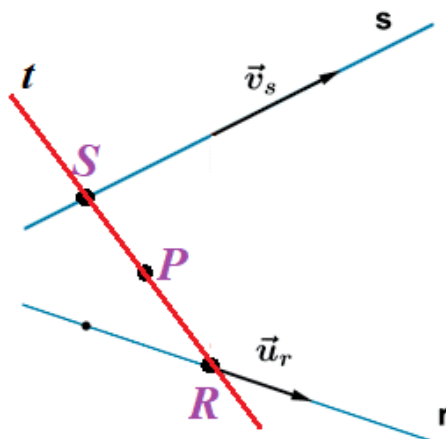
La recta t es la intersección de los planos π y π' . Su ecuación es:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x - 2y + 4 = 0 \\ \pi \equiv x + y + z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - 4 + y + z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + z - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 5 - 3y} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-3}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Debemos encontrar un punto R de la recta r y un punto S de la recta s tal que junto con el punto P estén alineados.



$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow R(-1 - \alpha, \alpha, 2)$$

$$s \equiv \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow S(2 + 2\beta, 3 + \beta, \beta)$$

Como los puntos P, R y S deben estar alineados los vectores $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{RP} &= (-4, 0, 5) - (-1 - \alpha, \alpha, 2) = (-3 + \alpha, -\alpha, 3) \\ \overrightarrow{SP} &= (-4, 0, 5) - (2 + 2\beta, 3 + \beta, \beta) = (-6 - 2\beta, -3 - \beta, 5 - \beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-3 + \alpha}{-6 - 2\beta} = \frac{-\alpha}{-3 - \beta} = \frac{3}{5 - \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-\alpha}{-3 - \beta} = \frac{3}{5 - \beta} \Rightarrow -5\alpha + \alpha\beta = -9 - 3\beta \Rightarrow & 3\beta - 5\alpha + \alpha\beta = -9 \\ \frac{-3 + \alpha}{-6 - 2\beta} = \frac{3}{5 - \beta} \Rightarrow -15 + 3\beta + 5\alpha - \alpha\beta = -18 - 6\beta \Rightarrow & \underline{9\beta + 5\alpha - \alpha\beta = -3} \end{cases}$$

$$12\beta + 0 + 0 = -12 \rightarrow \beta = \frac{-12}{12} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S(2 - 2, 3 - 1, -1) = (0, 2, -1)}$$

No es necesario hallar las coordenadas del punto R. Basta con conocer las coordenadas de uno de los puntos. Usamos como vector director de la recta t el vector $\overrightarrow{SP}$.

$$\left. \begin{aligned} P(-4, 0, 5) &\in t \\ \vec{v}_t = \overrightarrow{SP} &= (-4, 0, 5) - (0, 2, -1) = (-4, -2, 6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-5}{6}}$$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $f(\alpha) = -\frac{3}{2}$, siendo

$$f(x) = \cos(\pi x) \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Comprobamos que se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}$ en el intervalo $[2, 3]$.

La función $g(x)$ es continua en el intervalo $[2, 3]$ pues es continua la función coseno y la función raíz cúbica.

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$g(x) = f(x) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \cos(\pi x) \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} g(2) = \frac{3}{2} + \cos(2\pi) \sqrt[3]{2^3 - 2 \cdot 2^2 - 1} = \frac{1}{2} > 0 \\ g(3) = \frac{3}{2} + \cos(3\pi) \sqrt[3]{3^3 - 2 \cdot 3^2 - 1} = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

Se cumplen las condiciones exigidas por el teorema de Bolzano y con su aplicación sabemos que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Por lo que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $g(\alpha) = f(\alpha) + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{3}{2}$.

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \leq 2 \\ 3-x & x > 2 \end{cases}. \text{ Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.}$$

(3 puntos)

Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

Si $x \leq 2$ buscamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 3x \\ g(x) = \frac{x}{2} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = -x^2 + 3x \Rightarrow x = -2x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-\infty, 2] \\ 0 \\ 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \notin (-\infty, 2] \end{cases}$$

Si $x > 2$ buscamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 3x \\ g(x) = 3 - x \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - x = -x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \in (2, +\infty) \\ 0 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \notin (2, +\infty) \end{cases}$$

Las gráficas de las funciones se cortan en $x = 0$ y en $x = 3$.

El área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ será la suma del valor absoluto de dos

integrales definidas: Una entre 0 y 2 de $f(x) - g(x) = (-x^2 + 3x) - \left(\frac{x}{2}\right)$ y otra entre 2 y 3 de

$$f(x) - g(x) = (-x^2 + 3x) - (3 - x).$$

Calculamos el valor de esas dos integrales definidas.

$$\int_0^2 f(x) - g(x) dx = \int_0^2 -x^2 + 3x - \frac{x}{2} dx = \int_0^2 -x^2 + \frac{5x}{2} dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4} \right]_0^2 =$$

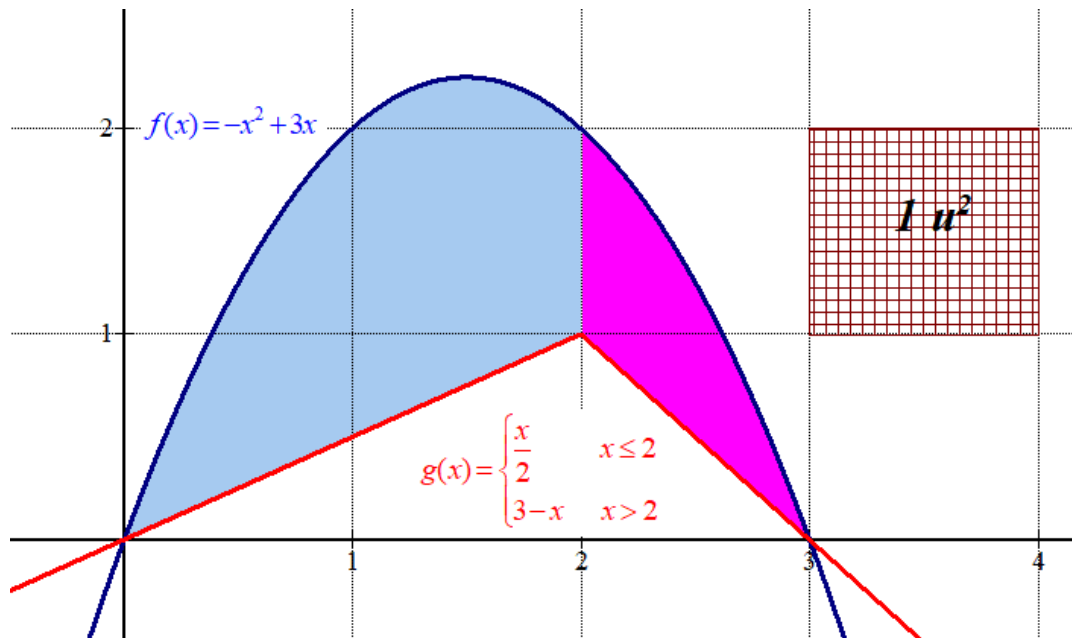
$$= \left[-\frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{5 \cdot 0^2}{4} \right] = -\frac{8}{3} + 5 = \boxed{\frac{7}{3}}$$

$$\int_2^3 f(x) - g(x) dx = \int_2^3 -x^2 + 3x - (3 - x) dx = \int_2^3 -x^2 + 4x - 3 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_2^3 =$$

$$= \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \right] = -9 + 18 - 9 + \frac{8}{3} - 8 + 6 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

El área del recinto es la suma de estos dos valores $\rightarrow \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$ unidades cuadradas.

No pide dibujarlo, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución obtenida.



EvAU Julio 2017



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

(2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso

(3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = BB^t X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$

Encuentra un punto, D, de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3 .

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Dadas las funciones $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

(3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

Aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2 + 2 & 3 & 3 \\ -2 & -(a^2 + 2) & a - 3 & \sqrt{2} - 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad a^2 + 2 \quad 3 \quad 3 \\ -2 \quad -4 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad a^2 - 2 \quad 2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ -2 \quad -(a^2 + 2) \quad a - 3 \quad = \sqrt{2} - 3 \\ 2 \quad a^2 + 2 \quad 3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a \quad \sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & \sqrt{2} \end{array} \right)$$

Nos planteamos cuando se anulan los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{cases} a^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \\ o \\ a = 0 \end{cases}$$

Se nos plantean cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el sistema es compatible determinado, hallamos su solución.

$$\left. \begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = 2 \\ az = \sqrt{2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \left. \begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = 2 \\ \boxed{z = \sqrt{2}/a} \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} 2x + 4y + \frac{\sqrt{2}}{a} = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2 \frac{\sqrt{2}}{a} = 2 \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} 2x + 4y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{a - \sqrt{2}}{a} \\ (a^2 - 2)y = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{a} = \frac{2a - 2\sqrt{2}}{a} \rightarrow y = \frac{2(a - \sqrt{2})}{a(a^2 - 2)} = \frac{2(a - \sqrt{2})}{a(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})} \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y = \frac{a - \sqrt{2}}{a} \\ y = \frac{2}{a(a + \sqrt{2})} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 4 \cdot \frac{2}{a(a + \sqrt{2})} = \frac{a - \sqrt{2}}{a} \Rightarrow 2x = \frac{a - \sqrt{2}}{a} - \frac{8}{a(a + \sqrt{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{a(a + \sqrt{2})} - \frac{8}{a(a + \sqrt{2})} = \frac{a^2 - 2 - 8}{a(a + \sqrt{2})} = \frac{a^2 - 10}{a(a + \sqrt{2})} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2 - 10}{2a(a + \sqrt{2})}}$$

CASO 2. $a = 0$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right) \text{ El sistema es incompatible}$$

CASO 3. $a = \sqrt{2}$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + z = 1 \\ 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + z = 1 \\ \boxed{z = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 4y + 1 = 1 \Rightarrow 2x + 4y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2y}$$

Las soluciones son: $x = -2t$; $y = t$; $z = 1$ **CASO 4.** $a = -\sqrt{2}$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm\sqrt{2}$ el sistema es compatible determinado y su solución es

$$x = \frac{a^2 - 10}{2a(a + \sqrt{2})}, \quad y = \frac{2}{a(a + \sqrt{2})}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \text{si } a = 0 \text{ o } a = -\sqrt{2} \text{ el sistema es incompatible (si}$$

solución) y si $a = \sqrt{2}$ el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones tienen la expresión $x = -2t$; $y = t$; $z = 1$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

(2 puntos)

Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, -2) \\ P_r(1, -1, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 1, 2) \\ Q_s(0, 0, -3) \end{cases}$$

Para que se corten deben tener vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 2, -2) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{2}$$

También debe ser el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$ nulo.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, -1, 1) \\ Q_s(0, 0, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 0, -3) - (1, -1, 1) = (-1, 1, -4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 2, -2) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (-1, 1, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 - 4 - 2 + 16 - 2 = 0$$

Hemos comprobado que las rectas se cortan.

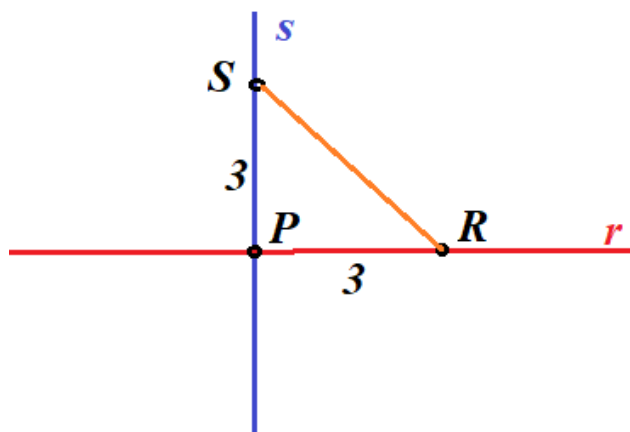
Comprobamos que forman 90° viendo que el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 2, -2) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{u}_s = (1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Las rectas se cortan perpendicularmente.

Averiguamos su punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases} \\ s &\equiv \begin{cases} x=2\beta \\ y=\beta \\ z=-3+2\beta \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=1+\alpha \\ \beta=-1+2\alpha \\ -3+2\beta=1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1+2\alpha)=1+\alpha \\ -3+2(-1+2\alpha)=1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} -2+4\alpha=1+\alpha \\ -3-2+4\alpha=1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=3 \\ 6\alpha=6 \end{cases} \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=-1+2=1 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(2,1,-1)}
 \end{aligned}$$



Tenemos que hallar los puntos S y R del dibujo. Aunque hay varias soluciones solo he dibujado una de ellas.

Determino el punto $R \in r$.

$$\begin{aligned}
 r &\equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow R(1+\alpha, -1+2\alpha, 1-2\alpha) \\
 & \quad R \in r
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{RP} = (2,1,-1) - (1+\alpha, -1+2\alpha, 1-2\alpha) = (1-\alpha, 2-2\alpha, -2+2\alpha)$$

$$|\overrightarrow{RP}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (-2+2\alpha)^2} = 3 \Rightarrow (1-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (-2+2\alpha)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha = 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\alpha(\alpha-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \rightarrow R(1+0, -1+0, 1-0) = (1, -1, 1) \\ o \\ \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow R(1+2, -1+4, 1-4) = (3, 3, -3) \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del punto $S \in s$.

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3 + 2\beta \\ S \in s \end{array} \right\} \Rightarrow S(2\beta, \beta, -3 + 2\beta)$$

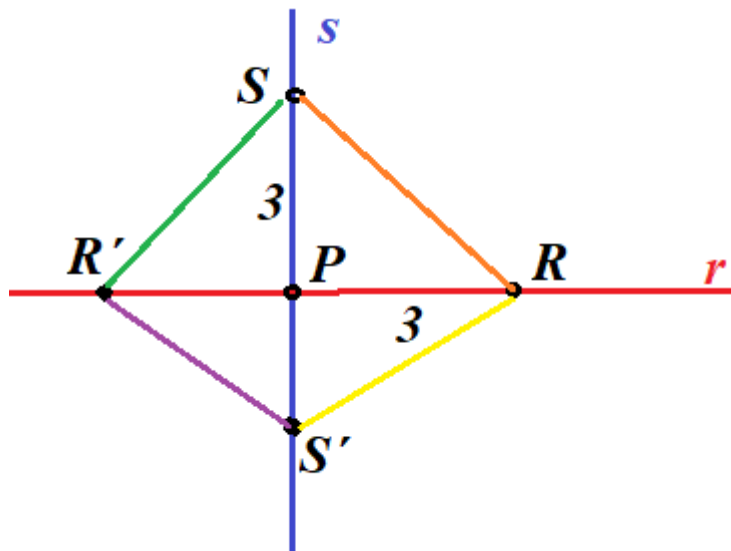
$$\overrightarrow{SP} = (2, 1, -1) - (2\beta, \beta, -3 + 2\beta) = (2 - 2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta)$$

$$|\overrightarrow{SP}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(2 - 2\beta)^2 + (1 - \beta)^2 + (2 - 2\beta)^2} = 3 \Rightarrow (2 - 2\beta)^2 + (1 - \beta)^2 + (2 - 2\beta)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\beta^2 - 8\beta + 1 + \beta^2 - 2\beta + 4 + 4\beta^2 - 8\beta = 9 \Rightarrow 9\beta^2 - 18\beta + 9 = 9 \Rightarrow 9\beta^2 - 18\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\beta(\beta - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \rightarrow S(0, 0, -3) \\ o \\ \beta - 2 = 0 \rightarrow \beta = 2 \rightarrow S'(4, 2, 1) \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas se reflejan, de forma aproximada en el siguiente dibujo.



A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

Para el cálculo de la primera integral realizamos una descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x+1)(x-2)$$

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow 1 = A(-1-2) + B(-1+1) \rightarrow 1 = -3A \rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ x = 2 \rightarrow 1 = A(2-2) + B(2+1) \rightarrow 1 = 3B \rightarrow B = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2}$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la primera integral.

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{-1/3}{x+1} + \frac{1/3}{x-2} dx = \int \frac{-1/3}{x+1} dx + \int \frac{1/3}{x-2} dx = \frac{-1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= \boxed{\frac{-1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + K}$$

Calculamos la segunda integral usando el método de integración por partes.

$$\int x^2 e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ x^2 = u \rightarrow 2x dx = du \\ e^{2x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} 2x dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int e^{2x} x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ x = u \rightarrow dx = du \\ e^{2x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \boxed{\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + K}$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso

(3 puntos)

Derivamos la función:

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \Rightarrow \ln f(x) = (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) - (x-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) + (x-1) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) - (x-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) + (x-1) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{1}{x+1} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) - (x-1) \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x+1) + (x-1) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{1}{x+1} \right]$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo $[0, 2]$ y para ello debe existir el $\ln(x+1)$ y la expresión $x+1$ debe ser positiva. Tampoco se anula el denominador de $\frac{1}{x+1}$.

Por tanto, la función $f(x)$ y $f'(x)$ existe en el intervalo $[0, 2]$

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. f es continua en $[0, 2]$ pues es producto de funciones continuas.
2. f es derivable en $(0, 2)$. Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y existe α en el intervalo abierto

$(0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = (2+1)^{(2-1)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = 3^{\cos\pi} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \\ f(0) = (0+1)^{(0-1)\cos\left(\frac{0}{2}\right)} = 1^0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = BB^t X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$7A - A^7 = BB^t X \Rightarrow (BB^t)^{-1} (7A - A^7) = X$$

Comprobamos que existe $(BB^t)^{-1}$ y la calculamos.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|BB^t| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } (BB^t)^{-1}$$

$$(BB^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}((BB^t)^t)}{|BB^t|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz correspondiente a $(7A - A^7)$

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(7A - A^7) = 7 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Utilizamos lo obtenido para determinar la expresión de X.

$$X = (BB^t)^{-1} (7A - A^7) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$. Encuentra un punto, D, de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3 . (3 puntos)

Calculamos primero los puntos de corte de los ejes coordenados con el plano π :

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow A(0, 0, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0, 0)$$

Al pertenecer el punto D a la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ sus coordenadas son:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow D(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda)$$

Aplicamos la fórmula del volumen del paralelepípedo haciendo que valga 6 u^3 .

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (0, 0, 4) = (0, 2, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 0, 0) - (0, 0, 4) = (1, 0, -4)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1 + \lambda, 3, 3 - \lambda) - (0, 0, 4) = (1 + \lambda, 3, -1 - \lambda)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 + \lambda & 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -8 - 8\lambda - 12 + 2 + 2\lambda = -18 - 6\lambda$$

$$\text{Volumen} = 6 \Rightarrow |-18 - 6\lambda| = 6 \Rightarrow \begin{cases} -18 - 6\lambda = -6 \Rightarrow -6\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = -2 \\ -18 - 6\lambda = 6 \Rightarrow -6\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = -4 \end{cases}$$

$$\lambda = -4 \left\{ \begin{array}{l} \\ D(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{D(-3, 3, 7)}$$

$$\lambda = -2 \left\{ \begin{array}{l} \\ D(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{D(-1, 3, 5)}$$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Derivamos la función:

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x+1)^{(x+1)} = (x+1) \ln (x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} = 1 + \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = f(x) [1 + \ln(x+1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^{(x+1)} [1 + \ln(x+1)]$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo $[0, 1]$ y para ello la expresión $x+1$ debe ser positiva y lo es en el intervalo $[0, 1]$.

Por tanto, la función $f(x)$ y $f'(x)$ existe en el intervalo $[0, 1]$

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. f es continua en $[0, 1]$ pues es producto de funciones continuas.
2. f es derivable en $(0, 1)$. Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y existe α en el intervalo abierto

$$(0, 1) \text{ tal que } f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = (1+1)^{(1+1)} = 2^2 = 4 \\ f(0) = (0+1)^{(0+1)} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$

B4) Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 4x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow x(x^2 - 4) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ pues } 0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}0\right) = \operatorname{sen}(0) \\ x = 2, \text{ pues } 0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}2\right) = \operatorname{sen}(\pi) \\ x = -2, \text{ pues } 0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(-2)\right) = \operatorname{sen}(-\pi) \end{cases}$$

Las funciones se cortan en $x = -2$, $x = 0$ y en $x = 2$.

Calculamos el área pedida como la suma de los dos recintos en que se divide la región del plano delimitada por las dos gráficas y para ello usamos la integral definida.

Calculamos la integral indefinida.

$$\int (x^3 - 4x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Calculamos las áreas de los dos recintos que delimitan las funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_{-2}^0 = \\ &= \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}0\right) \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(-2)\right) \right] = \\ &= 0 - 0 + \frac{2}{\pi} \cos(0) - 4 + 8 - \frac{2}{\pi} \cos(-\pi) = \frac{2}{\pi} + 4 + \frac{2}{\pi} = 4 + \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Área recinto 1} = \boxed{4 + \frac{4}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^3 - 4x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}2\right) \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}0\right) \right] = \end{aligned}$$

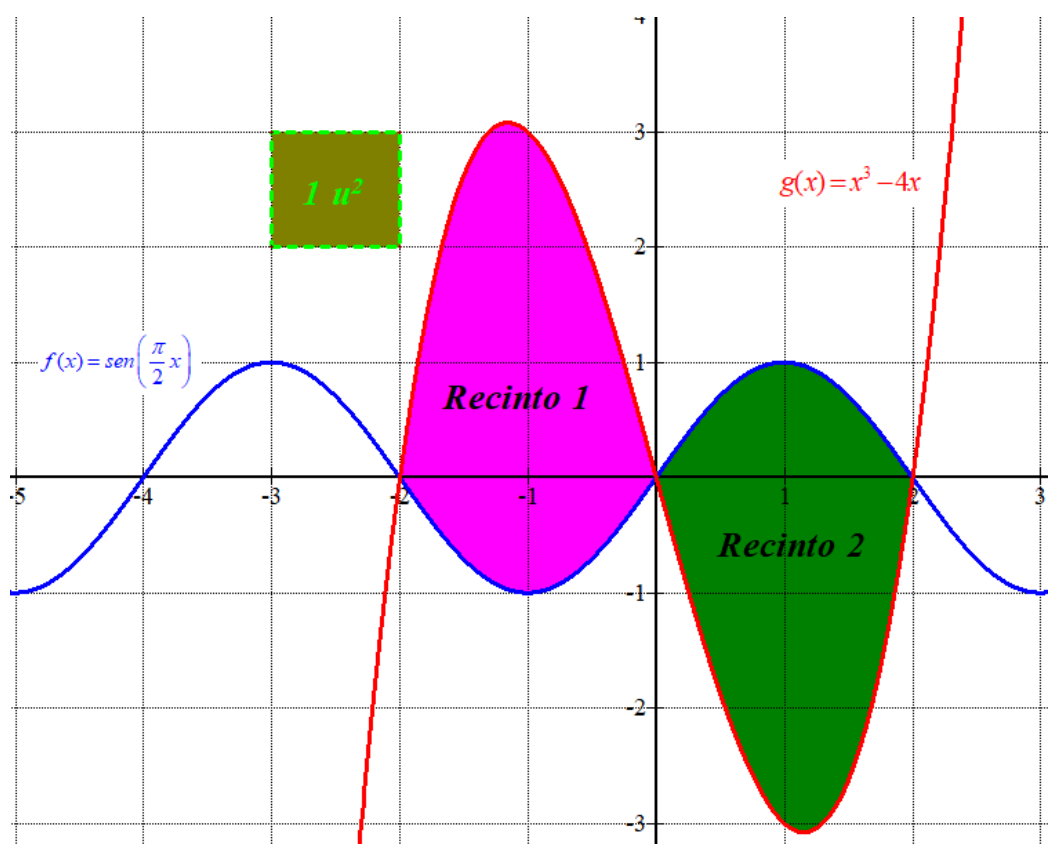
$$= 4 - 8 + \frac{2}{\pi} \cos(\pi) - 0 + 0 - \frac{2}{\pi} \cos(0) = -4 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = -4 - \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Área recinto 2} = \left| -4 - \frac{4}{\pi} \right| = \boxed{4 + \frac{4}{\pi}}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área} = \left(4 + \frac{4}{\pi} \right) + \left(4 + \frac{4}{\pi} \right) = \boxed{8 + \frac{8}{\pi} \approx 10.55 u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos las funciones y los recintos que limitan para estimar la bondad de la solución obtenida.



EvAU Junio 2017



Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y

$g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 & -a + 4 \end{array} \right)$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 \end{vmatrix} = (a-1)(a^2 - 5a + 5) + 2(a-1) - (a-1) =$$

$$= (a-1)(a^2 - 5a + 5 + 2 - 1) = (a-1)(a^2 - 5a + 6)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2 - 5a + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \rightarrow \boxed{a=1} \\ a^2 - 5a + 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 24}}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3=a} \\ 0 \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2=a} \end{cases} \end{cases}$$

Nos surgen cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1, a \neq 2$ y $a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado y hallamos su solución utilizando el método de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -2 & a-1 & 2 \\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-1)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\cancel{(a-1)}(a^2-5a+6)} =$$

$$= \frac{-a^2+5a-5-2a+8+a-4+2a^2-10a+10}{a^2-5a+6} = \frac{a^2-6a+9}{(a-2)(a-3)} = \frac{(a-3)(a-3)}{(a-2)(a-3)} = \boxed{\frac{a-3}{a-2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -a+4 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{-2a^2+10a-10-2+2+2a-8}{(a-1)(a-2)(a-3)} =$$

$$= \frac{-2a^2+12a-18}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \frac{-2(a^2-6a+9)}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \frac{-2\cancel{(a-3)}(a-3)}{(a-1)(a-2)\cancel{(a-3)}} = \boxed{\frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 1 & 0 & -a+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)(-a+4)-2(a-1)+(a-1)}{(a-1)(a^2-5a+5+2-1)} =$$

$$= \frac{\cancel{(a-1)}(-a+4-2+1)}{\cancel{(a-1)}(a-2)(a-3)} = \frac{-a+3}{(a-2)(a-3)} = \frac{-(a-3)}{(a-2)(a-3)} = \boxed{\frac{-1}{a-2}}$$

La solución es $x = \frac{a-3}{a-2}$; $y = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}$; $z = \frac{-1}{a-2}$

CASO 2. $a=1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+z=-1 \\ 2z=-2 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-1 \\ \boxed{z=-1} \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ x-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible

CASO 3. $a=2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y = -2 - 2z \\ x = 2 + z \end{cases} \Rightarrow 2 + z - 2 - 2z + z = -1 \Rightarrow 0 = -1$$

El sistema es incompatible

CASO 4. $a = 3$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2y + 2z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ y = -1 - z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow 1 + z - 2 - 2z + z = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

Resumiendo: Si $a \neq 1, a \neq 2$ y $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución:

$$x = \frac{a-3}{a-2}; y = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}; z = \frac{-1}{a-2}, \text{ si } a=1 \text{ o } a=2 \text{ el sistema es incompatible y si } a=3 \text{ el}$$

sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

Averiguamos la posición relativa de las dos rectas.

Para ello obtenemos sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ y = 3x - 4z + 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3x + 4z - 6 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2z - 5 = 0 \Rightarrow x = 2z - 5 \Rightarrow y = 3(2z - 5) - 4z + 6 = 2z - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -5 + 2\alpha \\ y = -9 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ P_r(-5, -9, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 0 \\ z = -1 + \beta \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 0, 1) \\ Q_s(1, 0, -1) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-5, -9, 0) \\ Q_s(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, -1) - (-5, -9, 0) = (6, 9, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (6, 9, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 9 + 2 - 18 = 5 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano π que se pide tiene como vectores directores el vector $\vec{v}_r = (2, 2, 1)$ director de la recta r y el vector director $\vec{u}_s = (1, 0, 1)$ de la recta s .

El vector normal del plano π es el producto vectorial de dichos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k - 2j = 2i - j - 2k = (2, -1, -2)$$

Por lo que el plano π tiene ecuación $\pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

Para determinar el valor de D utilizamos que la distancia del plano al punto P debe ser 2.

Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \\ d(P, \pi) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|3 + D|}{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow |3 + D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3 + D = 6 \rightarrow D = 3 \rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0} \\ 0 \\ 3 + D = -6 \rightarrow D = -9 \rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0} \end{cases}$$

Existen dos planos cumpliendo las condiciones pedidas:

$$\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0$$

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

Primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) &= \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} \right)^2 - \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right)^2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1 - (2x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 3x + 1 - \cancel{2x^2} + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 6}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8x}{x} - \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{6}{x}}{\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \\ &= \frac{8 - 0}{\sqrt{2 + 0 + 0} + \sqrt{2 - 0 + 0}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Segundo límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left(\cos(\pi) + 2^1 \right)^{\frac{1}{\ln 1}} = 1^\infty = \text{Indeterminación} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} (\cos(\pi x) + 2^x - 1)} = \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} (\cos(\pi x) + 2^x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 2^x - 1}{\ln x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) + 2^x \ln 2}{\frac{1}{x}} = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi) + 2^1 \ln 2}{\frac{1}{1}} = 2 \ln 2 = \ln 4 \end{aligned}$$

$$\dots = e^{\ln 4} = \boxed{4}$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Para que la función tenga un extremo relativo su derivada debe anularse.

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2 + x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2 + x} + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Comprobamos que la función derivada cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $(1, 3)$.

1. La función $f'(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ pues es producto y suma de funciones continuas. Solo falta ver que $x^2 + x$ no se anula en dicho intervalo ni es negativo para que exista la raíz y la fracción.

$$x \in [1, 3] \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x(x+1) \geq 1 \cdot (1+1) = 2$$

La expresión $x^2 + x$ es siempre positivo y la función $f'(x)$ es continua.

2. La función $f'(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[1, 3]$.

$$f'(3) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{3^2 + 3} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{6+1}{2\sqrt{3^2 + 3}} = 0 - \frac{7}{2\sqrt{12}} < 0$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1^2 + 1} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{2+1}{2\sqrt{1^2 + 1}} = 0 + \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema y existe $\alpha \in (1, 3)$ donde la función $f'(x)$ se anula, es decir, tal que $f'(\alpha) = 0$.

$x = \alpha$ es un punto crítico de la función $f(x)$.

Como hemos visto que la derivada toma valor positivo en $x = 1$ la función crece antes de $x = \alpha$ y como la derivada toma valor negativo en $x = 3$ la función decrece después de $x = \alpha$, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = \alpha$.

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Para que la matriz no sea regular su determinante debe ser nulo. Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -(t+1) & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco } t+1 \text{ factor común} \\ \text{en 2ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= (t+1) \begin{vmatrix} -t & 1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) [-2t+2+t-1-1+t^2-t] = (t+1) [t^2-2t] = (t+1)t(t-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (t+1)t(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+1=0 \rightarrow \boxed{t=-1} \\ o \\ \boxed{t=0} \\ o \\ t-2=0 \rightarrow \boxed{t=2} \end{cases}$$

La matriz A no es regular cuando $t = -1$ o $t = 0$ o $t = 2$.

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

Estudiamos la posición relativa de las dos rectas. Obtenemos sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x=-2y+3 \end{cases} \Rightarrow 2(-2y+3)+3y+z-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+6+3y+z-1=0 \Rightarrow -y+z+5=0 \Rightarrow z=-5+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5+\alpha \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \\ P_1(3, 0, -5) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=-1-2\beta \\ y=-3+3\beta \\ z=-2+3\beta \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$$

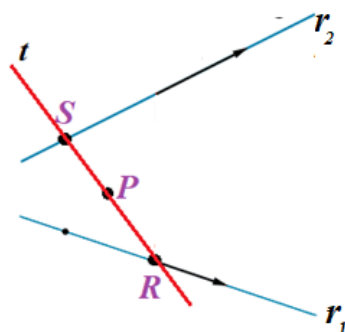
Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(3, 0, -5) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (-1, -3, -2) - (3, 0, -5) = (-4, -3, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1Q_2} = (-4, -3, 3) \\ \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 6 - 18 + 6 - 18 + 12 = -23 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

Debemos encontrar un punto R de la recta r_1 y un punto S de la recta r_2 tal que junto con el punto P estén alineados.



Hallamos la recta t pedida determinando el plano π que contiene a la recta r_2 y al punto P. Dicho plano corta a la recta r_1 en el punto R buscado.

Determino el plano π . Este plano tiene como vectores directores el vector director de r_2 y el vector que une un punto cualquiera de r_2 con el punto P.

$$r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_2} = (-1, -3, -2) - (-4, 2, 0) = (3, -5, -2) \Rightarrow \\ P(-4, 2, 0) \in \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x - 24 + 9y - 18 + 10z - 9z - 4y + 8 + 15x + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 9x + 5y + z + 26 = 0$$

Determinamos el punto R de r_1 de corte con el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 9x + 5y + z + 26 = 0 \\ r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -5 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 9(3 - 2\alpha) + 5\alpha - 5 + \alpha + 26 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 - 18\alpha + 5\alpha - 5 + \alpha + 26 = 0 \Rightarrow -12\alpha + 48 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 8 = -5 \\ y = 4 \\ z = -5 + 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow R(-5, 4, -1)$$

Hallamos la ecuación de la recta t que pasa por P con vector director $\overrightarrow{RP}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = \overrightarrow{RP} = (-4, 2, 0) - (-5, 4, -1) = (1, -2, 1) \\ P(-4, 2, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}}$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

La función es continua en el intervalo $[-2, 4]$ pues es producto de dos funciones continuas. Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

Localizamos los extremos relativos usando la derivada.

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x+2} + (-1)(x^2 - 3)e^{-x+2} = (2x - x^2 + 3)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x - x^2 + 3)e^{-x+2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)3}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \in [-2, 4] \\ 0 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \in [-2, 4] \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos obtenidos.

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = ((-2)^2 - 3)e^{2+2} = e^4 \simeq 54.6 \text{ ¡Máximo!}$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{1+2} = -2e^3 < 0 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = (3^2 - 3)e^{-3+2} = \frac{6}{e} \simeq 2.21$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = (4^2 - 3)e^{-4+2} = 13e^{-2} = \frac{13}{e^2} \simeq 1.76$$

La función en el intervalo $[-2, 4]$ tiene un máximo absoluto en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = -1$.

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

lo comprobamos $\rightarrow$
$$\begin{cases} x = -2 \rightarrow f(-2) = \cos\left(\frac{-2\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{(-2)^2}{4} - 1 = g(-2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{2^2}{4} - 1 = g(2) \end{cases}$$

Hallamos la integral definida entre -2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) dx &= \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + 1 dx = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^3}{12} + x \right]_{-2}^2 = \\ &= \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \frac{2^3}{12} + 2 \right] - \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{4}\right) - \frac{(-2)^3}{12} - 2 \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{2}{3} + 2 = \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} + 2 + \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{\pi} + 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{\pi} + \frac{8}{3} \approx 5.21} \end{aligned}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida calculada: $\frac{8}{\pi} + \frac{8}{3} \approx 5.21 u^2$

No pide dibujarla, pero lo hacemos para comprobar la solución obtenida.

