

2º de bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Bloque 1 de 3 - Números y Álgebra

www.ebaumatematicas.com

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de números y álgebra (Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones y programación lineal) que han aparecido en las pruebas de acceso a la universidad del año 2017 al 2025 en todas las comunidades autónomas españolas. Si se desea ver la resolución de los ejercicios consultar en la web www.ebaumatematicas.com.



Álgebra en las pruebas de acceso a la universidad de las distintas comunidades autónomas de ESPAÑA	2
ANDALUCÍA	2
ARAGÓN	15
ASTURIAS	30
BALEARES	46
CANARIAS	63
CANTABRIA	76
CASTILLA LA MANCHA	92
CASTILLA Y LEÓN	113
CATALUÑA	124
EXTREMADURA	142
GALICIA	157
LA RIOJA	170
MADRID	187
MURCIA	203
NAVARRA	215
PAÍS VASCO	231
VALENCIA	245

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com

Álgebra en las pruebas de acceso a la universidad de las distintas comunidades autónomas de ESPAÑA

ANDALUCÍA



1. Andalucía. Extraordinaria 2025. Bloque A EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. Expresa el problema en forma matricial y discuta, a partir de la matriz del sistema, si se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica. En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

b) **(0.75 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $2X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) placas A B C . El sistema es compatible determinado. Cada

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Prueba 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2960 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 1} \\ \text{Prueba 2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2990 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 2} \\ \text{Prueba 3} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2870 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Prueba 3} \end{array}$$

placa del modelo A generó 450 W, cada placa del modelo B generó 500 W y cada placa del modelo C

generó 520 W. b) $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

2. Andalucía. Extraordinaria 2025. Bloque A EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?



Solución: El gasto mínimo de agua cumpliendo con las restricciones es de 13500 litros y se consigue cultivando 900 lechugas iceberg y 0 lechugas romana.

3. Andalucía. Ordinaria 2025. Bloque A EJERCICIO 1

a) (1.75 puntos) Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:

El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) (0.75 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

Solución: a)

	horas	demos	viajes		
	↓	↓	↓		El vendedor A cobra
Zona A →	40	10	5	· $\begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{€ / hora} \\ \text{€ / demos} \\ \text{€ / viaje} \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} 7250 \\ 12500 \\ 17500 \end{pmatrix}$ ← Zona A
Zona B →	80	15	8		← Zona B
Zona C →	100	25	10		← Zona C

6162.5 €, el B cobra 10250 € y el C cobra 14350 €. b) La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0.8.

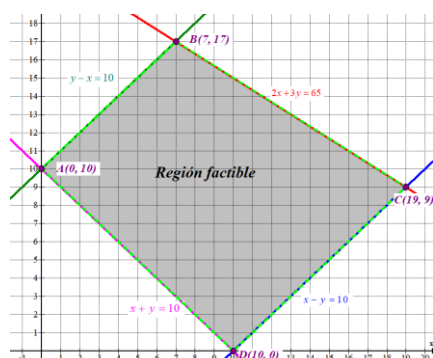
4. Andalucía. Extraordinaria 2024. Bloque A EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$

5. Andalucía. Extraordinaria 2024. Bloque A EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?



Solución: La máxima audiencia es de 1 462 000 personas y se consigue al contratar 7 anuncios por radio y 17 por televisión.

6. Andalucía. Ordinaria 2024. Bloque A EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a \text{ un número real.}$$

a) (0.75 puntos) Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

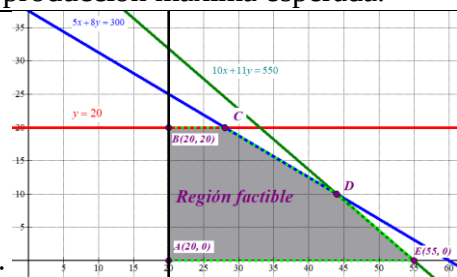
$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 5.

b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 11/2 \end{pmatrix}$ c) Las dimensiones de la matriz D deben ser 1×3 .

7. Andalucía. Ordinaria 2024. Bloque A EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de 30000 m³ de agua, de 5500 kg de abono y de 3000 kg de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita 1500 m³ de agua, 110 kg de abono y 80 kg de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de 100 kg de abono y 50 kg de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de 5000 kg en secano y 10000 kg en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.



Solución: La máxima producción es de 340 000 kg de oliva y se consigue con 28 hectáreas de secano y 20 de regadío.

8. Andalucía. Extraordinaria 2023. Bloque A EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$.
- b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) La matriz X es de dimensiones 3×2 . $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

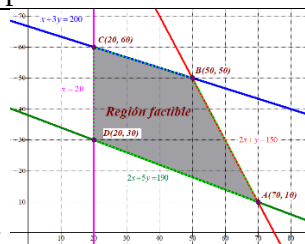
9. Andalucía. Extraordinaria 2023. Bloque A EJERCICIO 2

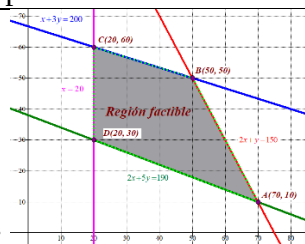
(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.

Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad.

Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.

Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?



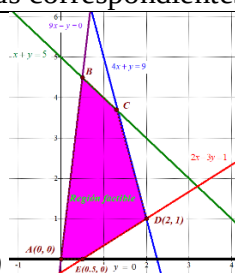
Solución:  Fabricando 50 anillos de cada tipo obtenemos unas ventas máximas semanales por valor de 3550 euros.

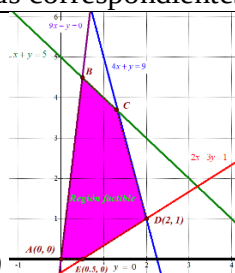
10. Andalucía. Ordinaria 2023. Bloque A EJERCICIO 1

Sean la función $F(x, y) = 5x - 3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x - 3y \leq 1; \quad 4x + y \leq 9; \quad x + y \leq 5; \quad 9x - y \geq 0; \quad y \geq 0$$

- a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
- b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
- c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.



Solución: a)  Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0.5, 4.5), C($\frac{4}{3}, \frac{11}{3}$), y

D(2, 1) y E(0.5, 0). b) El punto A(2, 2) está fuera de la región y el B(2, 3.5) está dentro. c) El máximo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto D(2, 1) y el mínimo es -11 y se alcanza en B(0.5, 4.5).

11. Andalucía. Ordinaria 2023. Bloque A EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.
 b) **(1.5 puntos)** Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$

Solución: a) Para que tengan inversa las dos matrices A y B debe ser a distinto de 0 y de 2.

b) $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

12. Andalucía. Extraordinaria 2022. Bloque A EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

- a) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.
 b) **(1 punto)** Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}$

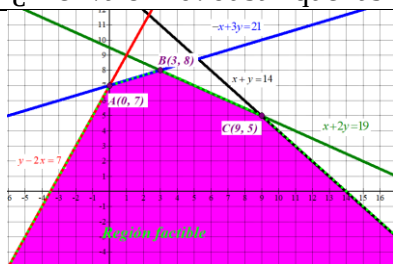
b) Las matrices P y Q deben tener dimensiones 2×3 .

13. Andalucía. Extraordinaria 2022. Bloque A EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

- a) **(1.4 puntos)** Represente dicho recinto y determine sus vértices.
 b) **(0.6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.
 c) **(0.5 puntos)** ¿Podrá tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.



Solución: a) , los vértices de la región factible son $A(0, 7)$, $B(3, 8)$ y $C(9, 5)$.

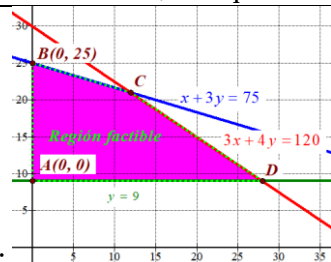
b) El máximo valor es 35 y se alcanza en el vértice $B(3, 8)$. No hay valor mínimo. c) No puede alcanzar un valor superior al máximo ($40 > 35$). El valor 20 se alcanza en muchos puntos: $D(0, 5)$, ...

14. Andalucía. Ordinaria 2022. Bloque A EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer

tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.

Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.



Solución: El número máximo de cajas es de 37 que se consigue con 28 del primer tipo y 9 del segundo. Con este número de cajas usamos 120 piononos y 110 pestiños.

15. Andalucía. Ordinaria 2022. Bloque A EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (0.75 puntos)** Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.
- (0.75 puntos)** Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A .
- (0.75 puntos)** Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

Solución: a) Tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y de 1. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

16. Andalucía. Extraordinaria 2021. Bloque A EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

- (0.7 puntos)** Determine para qué valores del parámetro a , la matriz A tiene inversa
- (1 punto)** Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- (0.8 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de -8

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/9 & -2/9 \\ 1/9 & -2/9 & 4/9 \\ -2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

17. Andalucía. Extraordinaria 2021. Bloque A EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

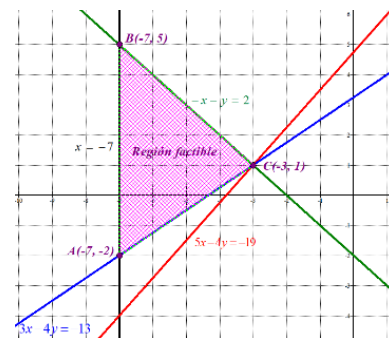
$$5x - 4y \leq -19 \quad 3x - 4y \leq -13 \quad x \geq -7 \quad -x - y \geq 2$$

- (1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

- b) **(0.5 puntos)** ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?
- c) **(0.5 puntos)** Responda de forma razonada si la función $G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Solución:

- a) Los vértices son $A(-7, -2)$, $B(-7, 5)$ y $C(-3, 1)$
- b) El máximo valor de $G(x, y)$ es 13.9 y se alcanza en el vértice $B(-7, 5)$ y el mínimo valor es -3.6 y se alcanza en el vértice $A(-7, -2)$
- c) No es posible.



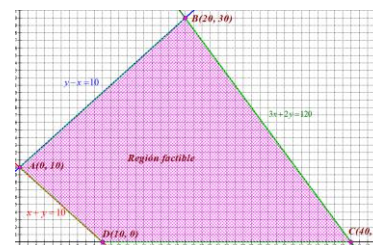
18. Andalucía. Ordinaria 2021. Bloque A EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución: El beneficio máximo es 6800 € que se consigue en el vértice $B(20, 30)$.

Con la producción de 20 baterías de tipo A y 30 de tipo B se consigue el beneficio máximo de 6800 €.



19. Andalucía. Ordinaria 2021. Bloque A EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

- a) **(0.7 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A ?
- b) **(1.8 puntos)** Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$

Solución: a) La matriz inversa de A existe cuando $m \neq -1$ y $m \neq 2.5$

b) $X = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$

20. Andalucía. Extraordinaria 2020. Bloque A EJERCICIO 1

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

- a) **(1 punto)** Expresar, mediante una matriz A , los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
- b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
- c) **(0,5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D ? ¿Y de la matriz A ? Justifique las respuestas.

Solución:

a)

individuales	dobles	triples		centro1	centro2	centro3	
↘	↓	↙		↘	↓	↙	
$A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}$			→ Agencia 1	$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$			→ n° habitaciones individuales
			→ Agencia 2				→ n° habitaciones dobles
							→ n° habitaciones triples

b) Calculamos $A \cdot D$

Al primer instituto le interesa la primera agencia ($1678 \text{ €} < 1691 \text{ €}$)

Al segundo instituto le interesa la primera agencia ($1670 \text{ €} < 1682 \text{ €}$)

Al tercer instituto le interesa la segunda agencia ($2148 \text{ €} < 2153 \text{ €}$)

c) La matriz A no es cuadrada y no existe inversa. Existe la inversa de la matriz D .

21. Andalucía. Extraordinaria 2020. Bloque A EJERCICIO 2

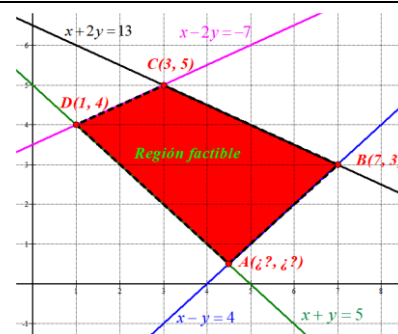
- a) **(1,75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices.

$$x + 2y \leq 13 \quad x - y \leq 4 \quad x - 2y \geq -7 \quad x + y \geq 5$$

- b) **(0,75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

- a) $A(4,5)$, $B(7,3)$, $C(3,5)$ y $D(1,4)$



- b) El máximo valor de la función es 10 y se alcanza en el vértice $B(7,3)$.

El valor mínimo es 5 y se alcanza en los vértices A y D . Por lo que este valor mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento AD : $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, etc.

22. Andalucía. Ordinaria 2020. Bloque A EJERCICIO 1

Sean A , B , X e Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

- a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.
- b) **(1,5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y .

Solución: a) Se demuestra utilizando las matrices inversas. b) $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

23. Andalucía. Ordinaria 2020. Bloque A EJERCICIO 2

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena A produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena B produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas A y B es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena A puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena B. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas A y B para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices.

$$x + 2y \geq 7 \quad 4x - y \geq 1 \quad 2x - y \leq 4 \quad 3x + 2y \leq 20 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

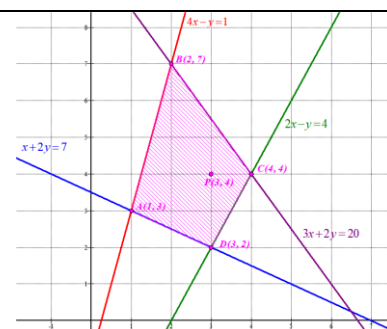
Solución:

a) El conjunto de las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Y la función}$$

objetivo que deseamos minimizar es el coste de funcionamiento de las dos cadenas de montaje $C(x, y) = 1200x + 1500y$.

b) Los vértices son $A(1, 3)$; $B(2, 7)$; $C(4, 4)$ y $D(3, 2)$. El valor mínimo se alcanza en el vértice $A(1, 3)$ siendo este valor mínimo igual a 5.

**24. Andalucía. Septiembre 2019. Opción A. EJERCICIO 1**

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

- 1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
- 2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1'5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

Solución: a) 1) Si es cierta 2) No es cierta

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

25. Andalucía. Septiembre 2019. Opción B. EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1'75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

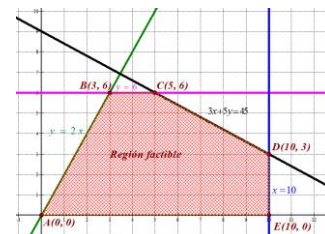
- b) (0'25 puntos) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.
- c) (0'5 puntos) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

a) $A(0, 0)$, $B(3, 6)$, $C(5, 6)$, $D(10, 3)$ y $E(10, 0)$

b) Estos valores suponen un punto $(7, 5)$ que no pertenece a la región factible.

c) El máximo beneficio es de 34 € y se obtiene vendiendo 5 kg de A y 6 de B.



- 26. Andalucía. Junio 2019. Opción A EJERCICIO 1** (2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

Función a optimizar:

$$F(x,y) = 5x + 4y.$$

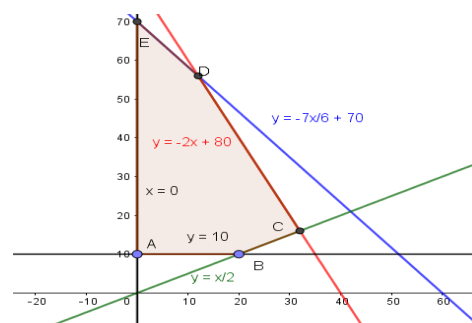
Restricciones:

$$70x + 60y \leq 4200;$$

$$20x + 10y \leq 800;$$

$$y \geq 10; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0.$$

El máximo beneficio es de 284€ y se obtiene fabricando 12 camisetas lisas y 56 estampadas



- 27. Andalucía. Junio 2019. Opción B EJERCICIO 1.** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (0'5 puntos) Razone si la matriz, A es simétrica.

b) (1 punto) Calcule A^{-1} .

c) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3 \cdot I_3 = O$.

Solución: a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ La matriz A no es simétrica.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$

- 28. Andalucía. Septiembre 2018. Opción A EJERCICIO 1.**

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11 \quad x \geq 2y - 5 \quad 3x + y \leq 18 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

a) (1'8 puntos) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

- b) (0'5 puntos) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.
- c) (0'2 puntos) Justifique si el punto $(5, 2)$ pertenece a la región factible.

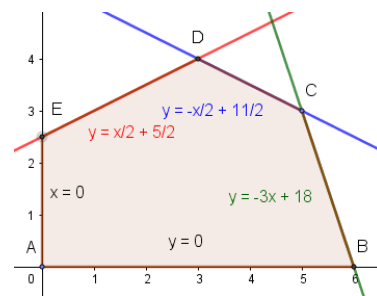
Solución:

a) Los vértices tienen coordenadas:

$A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(5, 3)$, $D(3, 4)$ y $E(0, 5/2)$.

b) El máximo absoluto de la función F en la región es 19 (el mayor valor en los vértices) y se alcanza en el vértice $B(5, 3)$, y el mínimo absoluto de la función F en la región es 0 (el menor valor en los vértices) y se alcanza en el vértice $A(0, 0)$.

c) El punto $(5, 2)$ no verifica todas las inecuaciones de la región factible.



29. Andalucía. septiembre 2018. Opción B EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

b) (1 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$.

Solución: a) $A^{2018} + A^{2019} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$

30. Andalucía. Junio 2018. Opción A EJERCICIO 1.

a) (1 punto) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar.

“Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo.”

b) (1'5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0$$

$$x \leq 2y + 2$$

$$x + y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x, y) = 4x + 3y$ en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

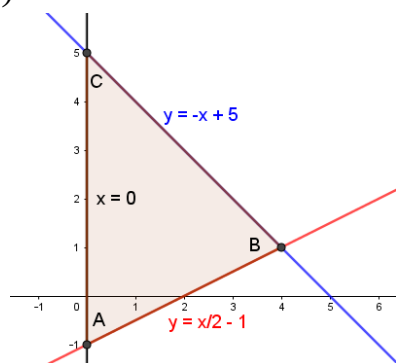
Solución:

a) Sea $x = n^\circ$ de kilos de maíz. Sea $y = n^\circ$ de kilos de pienso.

Función a optimizar es $F(x, y) = 0'50x + 0'25y$.

Restricciones: $600x + 300y \geq 1800$; $200x + 600y \geq 2400$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

b)



El máximo absoluto de la función F en la región es 19 (el mayor valor en los vértices) y se alcanza en el vértice $B(4,1)$.

31. Andalucía. Junio 2018. Opción B EJERCICIO 1.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1'2 puntos) ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$?

b) (1'3 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2B^t + I_2$.

Solución: a) No se verifica. b) $X = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

32. Andalucía. Septiembre 2017. Opción B. EJERCICIO 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Justifique cuales de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado: A^2 $A - B$ $A \cdot B$ $A \cdot B^t$.

b) (1 puntos) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

Solución: a) $A^2 = A_{2 \times 3} \cdot A_{2 \times 3}$, no se puede operar. $A_{2 \times 3} - B_{3 \times 2}$, no se puede operar.

$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$, si se puede operar. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{2 \times 3} \cdot B_{2 \times 3}^t$, no se puede operar b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

33. Andalucía. Septiembre 2017. Opción B. EJERCICIO 1.

a) (0'8 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 3 \quad 2x + y \geq 4 \quad y \geq -1$$

b) (0'25 puntos) Razone si el punto (2,1) pertenece al recinto anterior.

c) (1'2 puntos) Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x, y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

d) (0'25 puntos) Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

Solución:

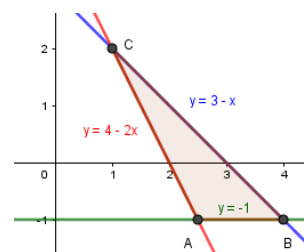
a)

b) (2,1) pertenece al recinto.

c) Los vértices son $A(2'5, -1)$, $B(4, -1)$ y $C(1, 2)$.

El máximo absoluto de la función F en la región es 16 y se alcanza en el vértice $B(4, -1)$, y el mínimo absoluto de la función F en la región es 8'5 y se alcanza en el vértice $A(2'5, -1)$.

d) La respuesta es afirmativa, porque $8'5 \leq 9 \leq 16$.

**34. Andalucía. Junio 2017. Modelo 5 EJERCICIO 1 A.**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule la matriz A^{2017} .

b) (1'5 puntos) ¿Se verifica la expresión $(B + A) \cdot (B - A) = B^2 - A^2$?

Solución: a) $A^{2017} = A$. b) Es falsa.

35. Andalucía. Junio 2017. Opción B EJERCICIO 1. (2'5 puntos)

Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del

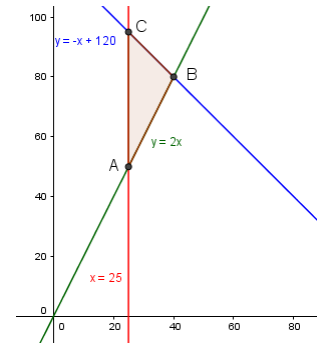
servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386 € de beneficio, mientras que cada particular le produce 229 €. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Solución:

Función a optimizar es $F(x,y) = 386x + 229y$.

Restricciones: $x \geq 25$; $y \geq 2x$; $x + y \leq 120$.

El máximo absoluto de la función F en la región es 33760 y se alcanza en el vértice $B(40,80)$, es decir, el beneficio máximo es de 33760 € y se alcanza teniendo en la cartera 40 empresas y 80 particulares.



ARAGÓN

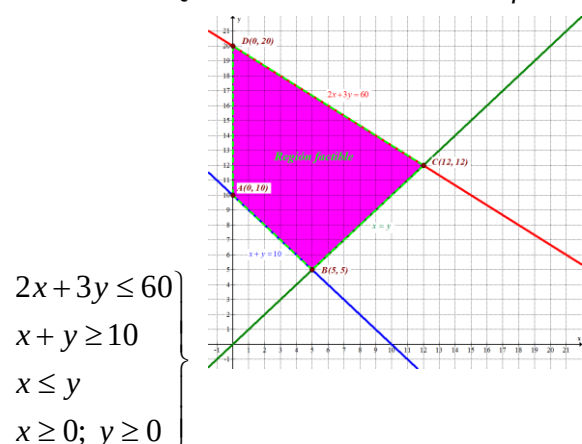


1. Aragón. Extraordinaria 2025. 1.- (10 puntos) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- (2 puntos) Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

Solución: a.- Queremos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 800x + 500y$. Las restricciones son:



. Plantando 12 hectáreas de trigo y otras 12 de maíz se

cumplen las restricciones y se obtienen unos beneficios máximos de 15600 €.

. b.- Con la nueva función beneficio el valor máximo es 24000 y se obtiene en los vértices C(12, 12) y D(0, 20).. El punto (3, 18) pertenece al segmento CD por lo que (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

2. Aragón. Extraordinaria 2025. Opción I Q1.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

Solución:
$$X = \frac{1}{3} A^{-1} (B + C) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

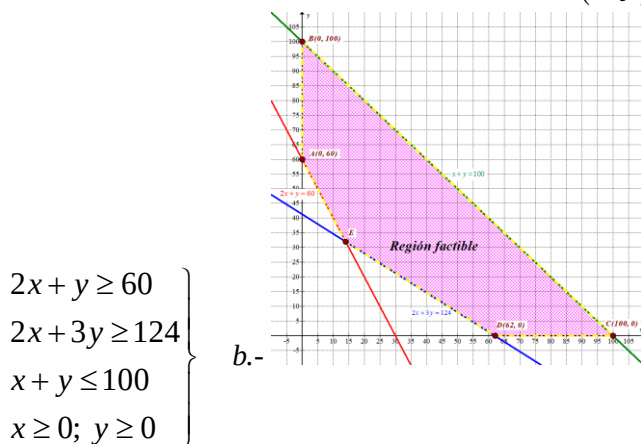
3. Aragón. Ordinaria 2025. 1.- (10 puntos) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barritas de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barritas: A y B. Cada barrita A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barrita B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento,

Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barritas en total.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barritas de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

Solución: a.- Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 1.5x + 1.2y$. Las restricciones son:



b.-

Con 14 barritas A y 32 tipo B se cumplen las

restricciones con un coste mínimo de 59.4 €.

4. Aragón. Ordinaria 2025. Opción I Q2.- (5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Solución: $X = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Aragón. Ordinaria 2025. Opción II Q1.- (5 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-Frobenius y, si es posible, calcule la solución.

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases} (S)$$

Solución: El rango de la matriz A es 3, al igual que el de A/B. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius podemos afirmar que el sistema es compatible determinado. La solución del sistema es $x = -2, y = 0, z = -1$.

6. Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones

para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

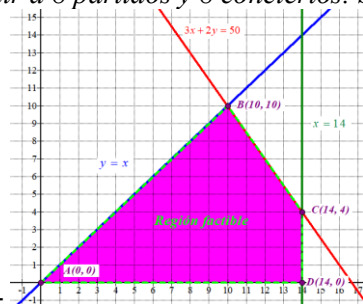
Solución: a.- $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. b.- Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 unidades en tienda online y 192 en tienda de segunda mano.

7. Aragón. EvAU Extraordinaria 2024. 2.- (10 puntos) Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Solución: a.- Si puede acudir a 8 partidos y 8 conciertos. Se gastaría 800 €, por lo que no se gasta todo



el presupuesto (1000 €). b.- El mayor número de salidas cumpliendo las restricciones son 20 debiendo ir a 10 partidos y a 10 conciertos

8. Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$

esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X .

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

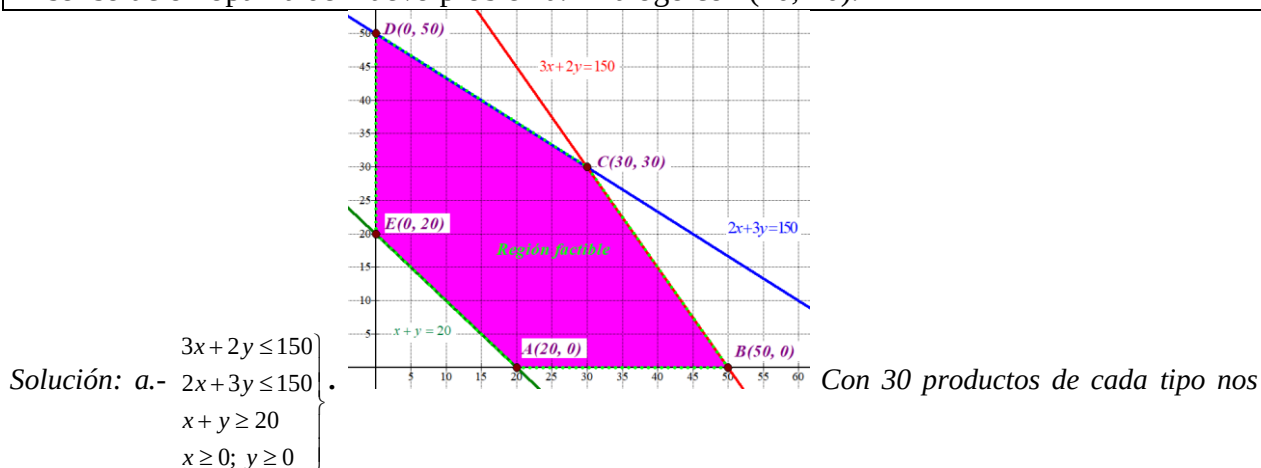
Solución: a.- Las dimensiones de la matriz X deben ser 2×3 . $X = A^{-1}(C - 3B)$. $X = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

b.- Se han vendido 110 participaciones de 10 €, 220 participaciones de 25 € y 100 de 10 €. Las ganancias han sido de 1475 €.

9. Aragón. EvAU Ordinaria 2024. 2.- (10 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150

horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

- a.- (8 puntos)** Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.
- b.- (2 puntos)** Considerando la región factible del apartado **a.-** y una nueva función objetivo dada por: $\max f(x, y) = 30x + by$. donde b es un valor desconocido. Razone que $(40, 40)$ no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con $(20, 20)$.



ajustamos a las restricciones y obtenemos una máxima ganancia por valor de 2100 €.

b.- El punto $(40, 40)$ está situado fuera de la región factible y no cumple las restricciones del problema. No puede ser solución del problema. El punto $(20, 20)$ si pertenece a la región factible y el punto cumple las restricciones, pero no puede ser solución óptima pues es un punto interior de la región factible. Cualquier solución óptima debe estar situada en las rectas que delimitan la región.

10. Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

- a.- (5 puntos)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

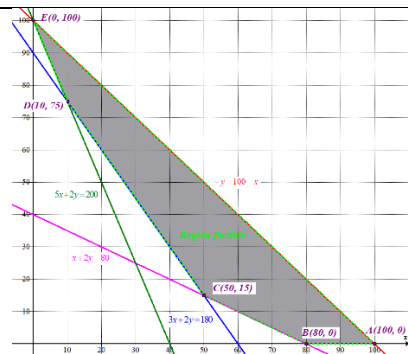
- b.- (5 puntos)** Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{array} \right\}$$

Solución: a.- La matriz X es de dimensiones 2×3 . $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$. b.-
$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

11. Aragón. EvAU Extraordinaria 2023. 2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B . Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1

de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?



Solución: Con 50 sacos A y 15 sacos B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un mínimo coste de 290 €.

12. Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:
a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule X.}$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + 3z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 3x + my + z &= 0 \end{aligned} \right\} (S)$$

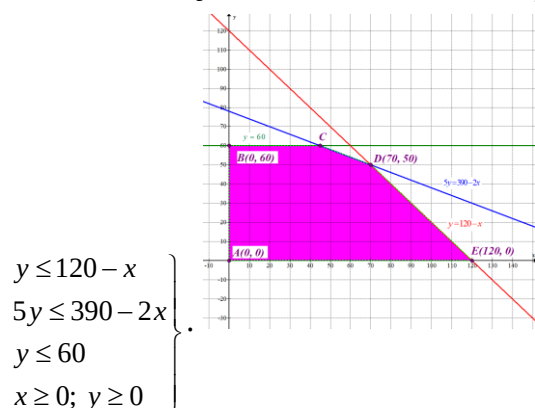
Solución: a.- La matriz X es de dimensiones 2×1 . $X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}$ b.- Tiene solución para cualquier valor de m . Para $m = 3$ las soluciones del sistema son: $x = -2\lambda$; $y = \lambda$; $z = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

13. Aragón. EvAU Ordinaria 2023. 2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

Solución: a.- Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 90x + 180y$. Las restricciones son



$$\left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Con 70 lotes A y 50 lotes B nos ajustamos a las

restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 15300 €. b.- Se gastan todos los jamones y las botellas de vino y solo sobran 40 botellas de cava.

14. Aragón. EvAU Extraordinaria 2022. 1.- (10 puntos) Dado el sistema lineal:

$$\left. \begin{array}{l} (m+1)x = m-2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y + mz = -8 \end{array} \right\} \text{ . Se pide:}$$

a.- (3 puntos) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b.- (3 puntos) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c.- (4 puntos) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a.-.

Solución: a.-
$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ . Para } m \neq 0 \text{ y } m \neq -1$$

b.- $m = 0$. Las soluciones son: $x = -2$; $y = 1$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$. c.- $X = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}$

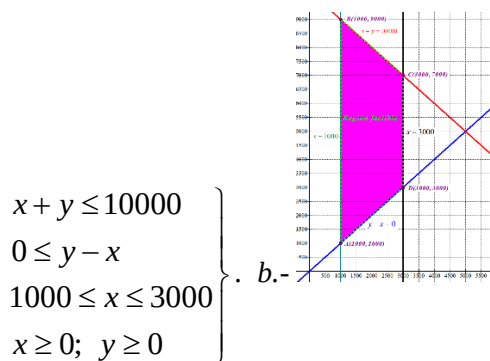
15. Aragón. EvAU Extraordinaria 2022. 2.- (10 puntos) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b.- (5 puntos) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c.- (2 puntos) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Solución: a.- Queremos maximizar la rentabilidad: $R(x, y) = 0.3x + 0.05y$. Las restricciones son:



$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ 0 \leq y - x \\ 1000 \leq x \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} .$$

b.- Invirtiendo 3000 € en criptomonedas y 7000 € en fondos de inversión se obtiene una rentabilidad máxima de 1250 €. c.- Si es una solución óptima del problema.

16. Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 1.- (10 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

b.- (4 puntos) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (3 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: a.- $m \neq \frac{8}{7}$ b.- $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ c.- Soluciones: $\begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$

17. Aragón. EvAU Ordinaria 2022. 2.- (10 puntos) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

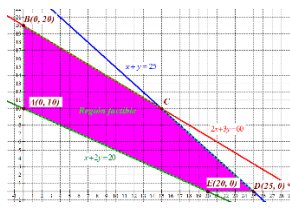
b.- (5 puntos) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Solución: a.- Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 15x + 18y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ x + y \leq 25 \\ x + 2y \geq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b.-



Abriendo 15 sucursales rurales y 10 urbanas nos

ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 405000 €. c.- Se generan 105 empleos y se invierten los 3 millones de euros.

18. Aragón. EvAU Extraordinaria 2021. 1.-

(10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a.- (3 puntos) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1} .

b.- (3 puntos) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: a.- Para cualquier valor de m distinto de 1.5 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b.- Si $m \neq 1.5$ la solución es $x = z = \frac{2}{2m-3}$; $y = \frac{1}{3-2m}$ Si $m = 1.5$ el sistema es incompatible.

19. Aragón. Extraordinaria 2021. 2.- (10 puntos) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- (2 puntos) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

Solución: a.- Llamamos "x" a los kilos de soja e "y" a los kilos de maíz que deben consumir los cerdos. Deseamos minimizar el coste que viene dado por

la expresión $C(x, y) = 3x + 2y$. Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 5x + y \geq 28 \\ x + y \geq 12 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} . \text{ El}$$

coste mínimo es de 28 € y se produce con el consumo de 4 kilos de soja y 8 de maíz.



b.- La dieta sugerida no sería la óptima. Aunque es más cara no satisface todas las restricciones

20. Aragón. Ordinaria 2021. 1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b.- (3 puntos) Calcula la matriz X , que verifica $2X - AB = BA$.

c.- (4 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: a.- $(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ b.- $X = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$

c.- La solución es $x = -t$; $y = t$; $z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

21. Aragón. Ordinaria 2021. 2.- (10 puntos) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

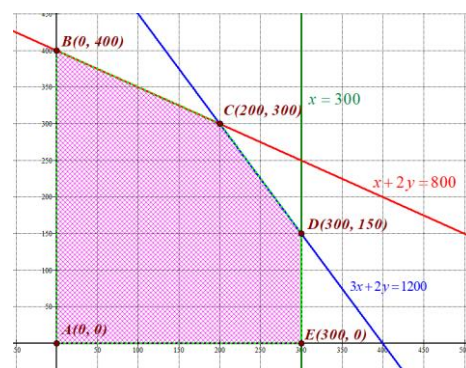
Solución: a.- Llamamos x = número de ofertas A, y = número de ofertas B

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 360x + 120y$. Las

$$\text{restricciones son } \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ x \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Con la venta de 300 lotes de la oferta A y 150 lotes de la oferta B se cumplen las restricciones y se consiguen los máximos ingresos, siendo estos de 126000 €.

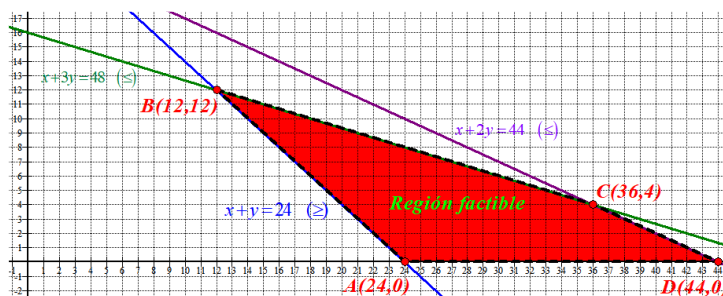
b.- Solo quedan 200 pares de botas sin vender



22. Aragón. Extraordinaria 2020. 1.- (10 puntos) Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica 1 hora, corre 15 km y consume 1200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Solución:

El máximo consumo de kilocalorías son 53200 kilocalorías y se produce con 36 entrenamientos cortos y 4 largos.



23. Aragón. Extraordinaria 2020. 2.- (10 puntos) En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 600 \\ z = 2(x + y) \\ y + 100 = x + z \end{array} \right\} \rightarrow \text{Visitaron el museo 24 niños, 28 jóvenes y 104 adultos.}$$

24. (Aragón Ordinaria 2020) 1.- (10 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.- (3 puntos) ¿Es posible calculara $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b.- (3 puntos) Encontrar, si existe, una matriz X , que verifique $2X + 3B = 2C$.

c.- (3 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .

Solución:

$$a) (BA)^2 \text{ se puede calcular. } (BA)^2 = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad b) X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix} \quad c) D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

25. Aragón. Ordinaria 2020. 2.- (10 puntos) Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

Solución:

Las restricciones son:

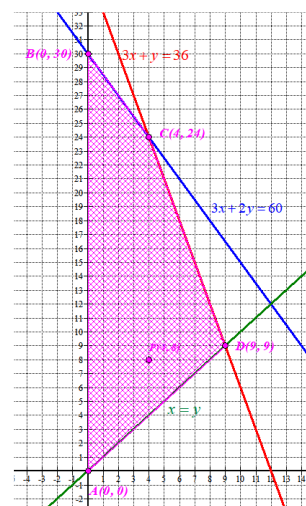
$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 36 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Y la función objetivo son los beneficios que los deseamos maximizar

$$B(x, y) = 100x + 65y.$$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice $C(4, 24)$ con un beneficio de 1960 €.

Hay que fabricar 4 vestidos de fiesta y 24 de calle para obtener un beneficio máximo de 1960 €.



26. Aragón. Septiembre 2019. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos)

Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

Solución:

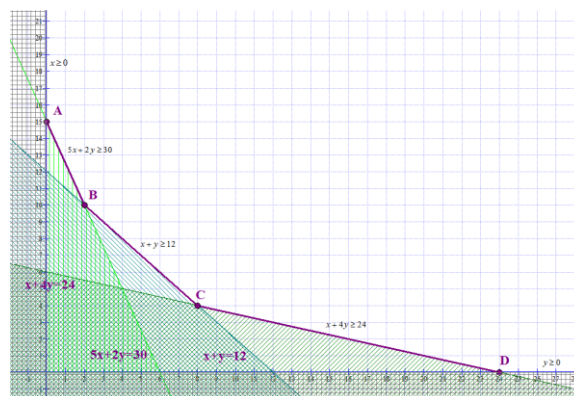
La función de Gasto del restaurante es

$$G(x, y) = 8x + 10y. \text{ Se desea minimizar el gasto.}$$

Resumimos las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \end{array} \right\}$$

El gasto es mínimo en el punto $C(8, 4)$. Se deben comprar solo 8 lotes del tipo A y 4 lotes del tipo B, satisfacemos las necesidades y el coste es el más bajo posible: 104 €.



27. Aragón. Septiembre 2019. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos)

Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ y = 3(x + z) \end{array} \right\}$$

La solución es 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 habitaciones familiares.

28. Aragón. Junio 2019. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

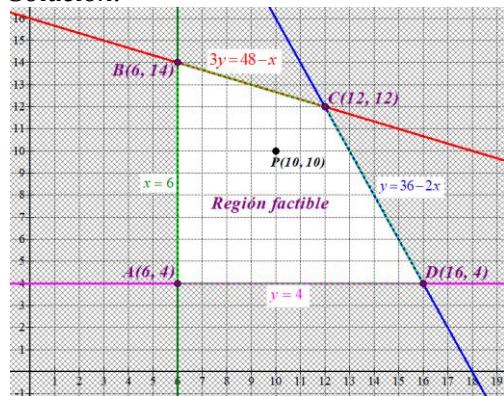
b) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .

Solución: a) $x = -\frac{9}{5}$; $y = \frac{3}{10}$ b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

29. Aragón. Junio 2019. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos)

Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

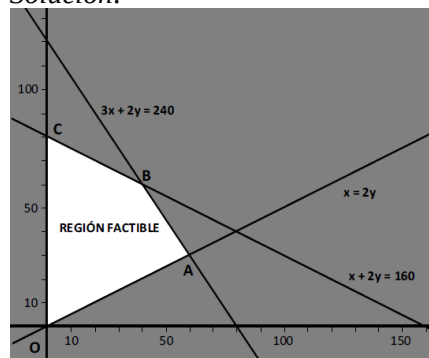
Solución:



El máximo beneficio es de 1440 € y se obtiene fabricando 12 sillas y 12 taburetes.

30. Aragón. Septiembre 2018. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos) Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

Solución:



Para maximizar el beneficio debe fabricar 40 cisnes y 60 elefantes. El beneficio máximo será de 880 €.

31. Aragón. Septiembre 2018. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular $(AB)^2$.

b) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.

c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de D .

Solución: a) $(AB)^2 = \begin{pmatrix} -41 & -115 \\ 230 & 350 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 20/3 & 2 & -2 \\ -4/3 & -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ c) $D^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

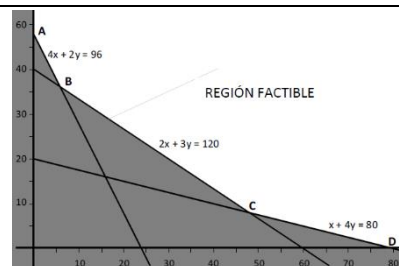
32. Aragón. Junio 2018. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Solución: Llamamos $x = n^{\circ}$ horas de fábrica A e $y = n^{\circ}$ horas de fábrica B. La función objetivo es $F(x, y) = 1500x + 1000y$. Las restricciones son

$$\{x \geq 0; y \geq 0; x + 4y \geq 80; 2x + 3y \geq 120; 4x + 2y \geq 96\}$$

La función se minimiza en el vértice B(6, 36).

El coste mínimo es de 45000 € y se consigue con 6 horas de la fábrica A y 36 horas de la fábrica B.



33. Aragón. Junio 2018. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos) Discutir, según los valores de a , el sistema:

$$2x + ay + az = 4$$

$$-x + ay + z = a$$

$$x + y + az = 3$$

Resolverlo para $a = -3$.

Solución: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = -1$ el sistema es incompatible.

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $a = -3$ la solución es $x = 2, y = 1/4, z = -1/4$

34. Aragón. Septiembre 2017. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular AB ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) (0,5 puntos) ¿Se puede calcular BA ? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) (1,25 puntos) Calcular, si existe, la matriz inversa de C .

d) (1 punto) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C+4X=3D$.

Solución: a) Si se puede. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 14 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix}$ b) No, porque nº de columnas de B son 3 y no coincide con el nº de filas de A que son 2. c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -1/3 \\ -5/3 & 0 & -1/3 \\ 19/3 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/2 & 3/4 & -1/2 \\ 13/4 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$

35. Aragón. Septiembre 2017. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, “Grupal-A” y “Grupal-B” con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo “Grupal-A” permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo “Grupal-B” permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.

• Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo “Grupal-A” y 2 entradas de tipo “Grupal-B”. La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo “Grupal-A” y “Grupal-B” debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

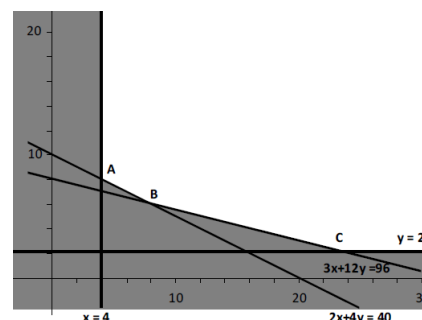
Solución: Llamamos x = entradas grupal A e y = entradas grupal B.

La función objetivo es $F(x, y) = 85x + 230y$ que deseamos minimizar. Las restricciones son

$$\{x \geq 4; y \geq 2; 2x + 4y \geq 40; 3x + 12y \geq 96\}$$

El valor mínimo se alcanza en el vértice B (8, 6).

El coste mínimo es de 2060 € y se consigue comprando 8 entradas del tipo Grupal A y 6 entradas del tipo Grupal B.



36. Aragón. Junio 2017. OPCIÓN A. 1. (3,25 puntos) Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

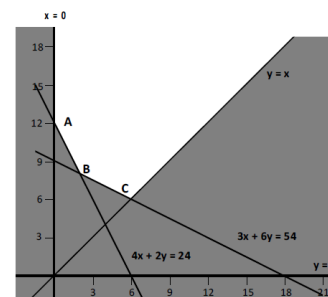
Solución: Llamamos x al nº de furgonetas del tipo A que se alquilan e y al nº de furgonetas del tipo B.

La función objetivo es $F(x, y) = 240x + 400y$.

Las restricciones son $\{x \geq 0; y \geq 0; y \geq x; 4x + 2y \geq 24; 3x + 6y \geq 54\}$

El coste mínimo se alcanza en el vértice B(2, 8).

El coste mínimo es de 3680 € y se obtiene alquilando 2 furgonetas del tipo A y 8 furgonetas del tipo B.



37. Aragón. Junio 2017. OPCIÓN B. 1. (3,25 puntos) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

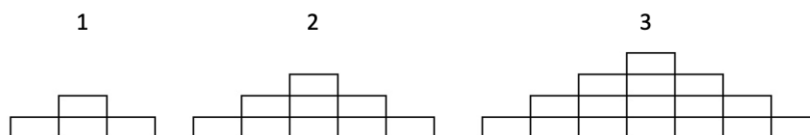
Solución: Llamamos “x” a la inversión en el fondo A, “y” a la inversión en el B, “z” a la inversión en el C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ 5x + 10y + 2z = 49700 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{array} \right\} \text{Invirtió 7500 € en el fondo A, 900 € en el fondo B y 1600 € en el fondo C.}$$

ASTURIAS



1. Asturias. Extraordinaria 2025. Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.



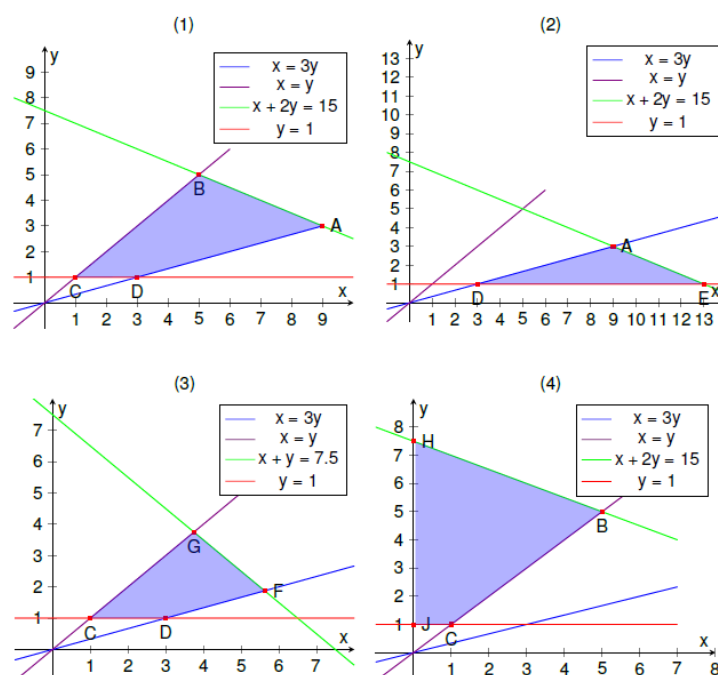
- a) Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: “con n represento el número de figura”). **(2 puntos)**
- b) Encuentra un número “ x ” mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente “ x ” rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

Solución: a) En la figura “ n ” habrán $r_n = (n+1)^2$ rectángulos b) Nos sirve la figura 17, 18, 19, ...

2. Asturias. Extraordinaria 2025. Pregunta 2. Opción B.

Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

- a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**
- b) Si llamamos “ x ” al número de sesiones de tipo A e “ y ” al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



- c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

Solución: a) Como solo dedica 7 horas y media a estas sesiones no sería posible lo planteado.

b) La región factible se corresponde con la gráfica (1). Los vértices de la región factible son $A(9,3)$, $B(5,5)$, $C(1,1)$ y $D(3, 1)$. c) El beneficio máximo se alcanza si en el día planea 5 sesiones de tipo A y 5 de tipo B.

- 3. Asturias. Extraordinaria 2025. Pregunta 3. Opción A.** Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y :

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1,5 puntos)**

- b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10 + m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

Solución: a) Para cualquier valor de m distinto de -20 . b) Si tomamos $\lambda = -15$ y $m = -20$ las infinitas soluciones tienen la expresión $x = y + 15$. Si tomamos $y = 0$ tenemos que $x = 0 + 15 = 15$. Una de las soluciones es $x = 15$ e $y = 0$.

- 4. Asturias. Extraordinaria 2025. Pregunta 3. Opción B.** Dadas las matrices:

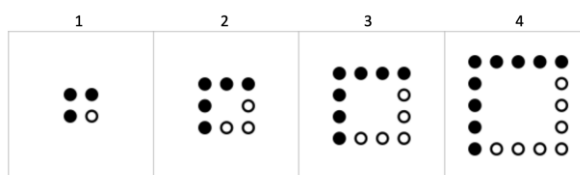
$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**

- b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

Solución: a)
$$\begin{cases} 3mx + (3 - 2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{cases}$$
 b) Para $m = 0$ el sistema queda
$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$
 y no tiene solución.

- 5. Asturias. Ordinaria 2025. Pregunta 2. Opción A.** En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



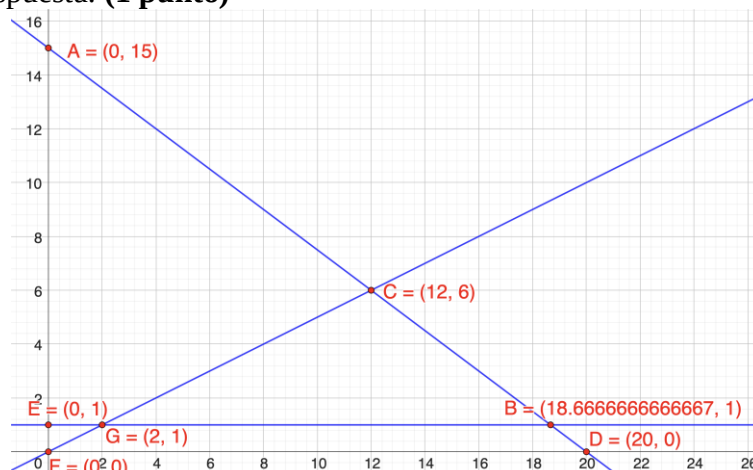
- a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: n es el número de figura). **(2 puntos)**
- b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: uno dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Solución: a) En la figura “n” habrán $(n+1) + n = 2n+1$ puntos negros y $n + (n-1) = 2n-1$ puntos blancos. b) Si observamos la secuencia del número de puntos negros es: 3, 5, 7, 9, ... En cada nueva figura se añaden 2 puntos negros más por lo que el número de puntos negros empieza siendo impar y se va a mantener siempre con valor impar.

6. Asturias. Ordinaria 2025. Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

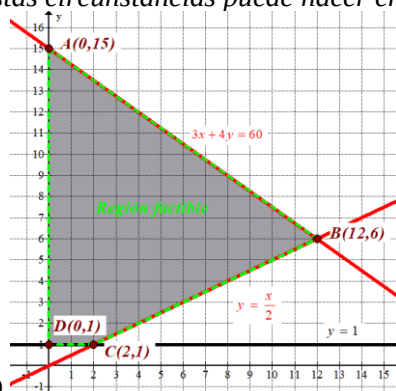
a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo “x” el número de viajes en el dragón rojo e “y” el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción. Señala los vértices (p. ej.: B, D, F y G) y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Solución: a) En estas circunstancias puede hacer entre 4 y 9 viajes en el gran loop. Puede subir 6 veces a



cada atracción. b) . c) Como máximo puede gastar 78 € haciendo 12 viajes con el dragón rojo y 6 con el gran loop. Como mínimo puede gastar 3 € haciendo 1 viaje con el dragón rojo y 0 con el gran loop.

7. Asturias. Ordinaria 2025. Pregunta 3. Opción A. En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, “x” e “y”. Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

- a) Si $m = 15$, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**
 b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**
 c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución: a) Con $m = 15$ el pase VIP cuesta 75 € y el normal 5 €. b) Si tomamos $m = 5$ el sistema tiene solución, pero la solución es $x = \frac{45 \cdot 5}{5 - 6} = -225$, e $y = \frac{15(5 - 12)}{5 - 6} = 105$. Esta solución es absurda pues tenemos un valor negativo para las entradas VIP. c) No tiene solución para $m = 6$.

8. Asturias. Ordinaria 2025. Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8 - m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 \\ 6m - 8 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}$$

- a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2} D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
 b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Solución: a)
$$\begin{cases} -2mx + 3y = 2 \\ (2m - 8)x - 9y = m - 4 \end{cases}$$
 b) Para $m = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

9. Asturias. Extraordinaria 2024. Pregunta 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1.25 puntos]** Si $(A \cdot B - C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.

Solución: a)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (-1 + m)x + y = 1 \end{cases}$$
 b) El sistema tiene solución para cualquier valor de m . La solución es única cuando $m \neq 2$. Para $m = -1$ la solución es $x = 0$, $y = 1$.

10. Asturias. Extraordinaria 2024. Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

- a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
 b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?



Solución: a) Si pueden asistir 40 adultos y 35 niños. b) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 2760 euros con la venta de 120 entradas de adulto y 60 de menor.

11. Asturias. Ordinaria 2024. Pregunta 1. Sean las matrices

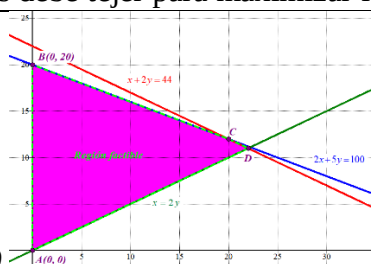
$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) [1.25 puntos] Si $\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [1.25 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Solución: a)
$$\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{cases}$$
 b) El sistema tiene solución para cualquier valor de m . La solución es única cuando $m \neq \pm 2$. Para $m = 1$ la solución es $x = 3$, $y = 0$.

12. Asturias. Ordinaria 2024. Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

- a) [1.75 puntos] ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?
- b) [0.75 puntos] Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?



Solución: a) Si se pueden tejer 12 gorros y 8 bufandas b) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 462 euros con la confección de 22 gorros y 11 bufandas.

13. Asturias. Extraordinaria 2023. Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron $3 \cdot m$ litros de vino.

- a) [0.5 puntos] Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

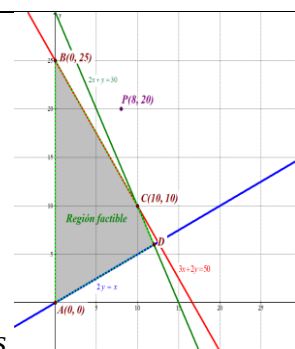
Solución: a) $\begin{cases} x+y=20m \\ x-my=0 \end{cases}$. b) El sistema tiene solución para cualquier valor de m distinto de -1 .

La solución es única. Si se consumieron 9 litros de vino se bebieron 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco

14. Asturias. Extraordinaria 2023. Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) [0.75 puntos] El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?



Solución: a) Las restricciones son $\begin{cases} 3x+2y \leq 50 \\ 2x+y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$. La región factible es . No

se pueden comprar 8 coches grandes y 20 pequeños. b) El máximo beneficio es de 160 000 euros y se obtiene comprando 10 coches de cada tipo.

15. Asturias. Ordinaria 2023. Pregunta 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] Si $\frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .

b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -2$.

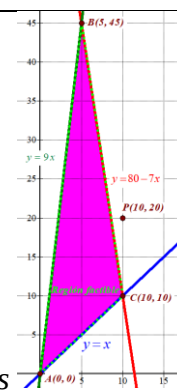
Solución: a) $\begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=1 \end{cases}$ b) El sistema tiene solución cuando $m \neq -1$. La solución es única cuando $m \neq \pm 1$. Para $m = -2$ la solución es $x = -1$, $y = -1$.

16. Asturias. Ordinaria 2023. Pregunta 2. Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 €	300 €

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50% de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10% de los anuncios totales. Por otro lado, se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 €.

- a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?
- b) **[0.75 puntos]** Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?



Solución: a) Las restricciones son:
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 80 - 7x \\ y \geq x \\ 9x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} . \text{ La región factible es } \text{La región factible es } \text{La región factible es} . \text{ No se pueden}$$

hacer 10 anuncios en televisión y 20 en radio. b) La máxima audiencia es de 1 310 000 personas y se obtiene haciendo 5 anuncios de televisión y 45 de radio.

17. Asturias. Extraordinaria 2022. 1A. La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80% con el café y un m% con la leche, obtiene por ellos un importe total de 2900 + 20m euros.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.
- b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20%?

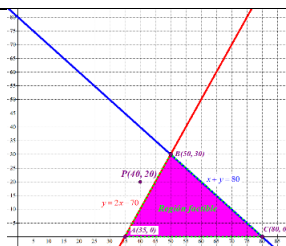
Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 80x + my = 4000 + 2000m \end{array} \right\} \text{ b) El sistema tiene solución para cualquier valor de m. La solución es única cuando } m \neq 80. \text{ Si el beneficio de venta de la leche es del 20\% el café costó 500 €}.$$

18. Asturias. Extraordinaria 2022. 1B. Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma 1 punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podría aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

- b) [0,75 puntos] ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

Solución: a)
$$\begin{cases} y \leq 2x - 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 80 \end{cases}$$



. El punto $P(40, 20)$ queda fuera de la región del plano

en la que se encuentran todas las soluciones del problema planteado dicho resultado no nos permite aprobar el examen. b) El número máximo de preguntas sin responder para poder aprobar es de 45. En este caso, se deberían responder las 35 de forma correcta y ninguna mal. Los puntos que se obtendrían son 35.

19. Asturias. Ordinaria 2022. 1A. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un $m\%$ de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6% de beneficios.

- a) [0,5 puntos] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.
b) [2 puntos] Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4%? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

Solución: a)
$$\begin{cases} mx + 6y = 128000 \\ x + y = 22000 \end{cases}$$
 b) Si es posible. Se invierten 2000 € en la primera y 20000 € en la 2ª.

20. Asturias. Ordinaria 2022. 1B. En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

- a) [1,75 puntos] ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?
b) [0,75 puntos] ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

Solución: a)
$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



. El punto $(20, 50)$ no pertenece a la región factible, por lo

que no se pueden tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos en el almacén.

b) El máximo beneficio es de 21000 € y se obtiene en el vértice $B(30, 60)$ lo que significa tener 30 lavadoras y 60 frigoríficos. Para minimizar el número de lavadoras se debe tener en almacén 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

21. Asturias. Extraordinaria 2021. 1A. Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Solución: a)
$$\begin{cases} x + 2y = 1000 \\ x + my = 500m \end{cases}$$
 b) El sistema tiene solución para cualquier valor de m , pero solo es

única para m distinto de 2. Si el proveedor B vende el vino a 2 € significa que $m = 2$, por lo que en ese caso el sistema tiene infinitas soluciones. Si compra 400 litros de cerveza compraría 300 de vino.

Si el precio del vino no son 2 € estaríamos en el caso de $m \neq 2$ entonces el sistema es compatible determinado y podemos hallar su solución. Compraría 500 litros de vino y ninguno de cerveza

22. Asturias. Extraordinaria 2021. 1B. Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2 . Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2 ?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

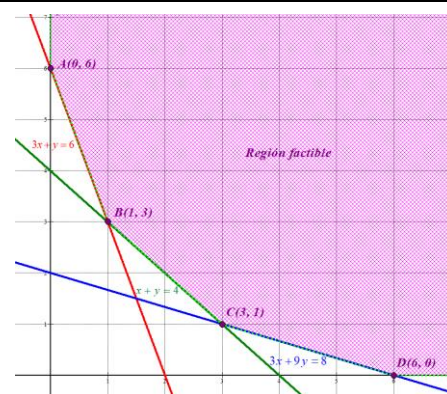
Solución: a) Llamamos " x " al número de latas diarias de M_1 e " y " al número de latas de M_2 .

La región factible es la solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ 3x + 9y \geq 18 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

No se le puede dar 1 lata de M_1 y dos latas de la marca M_2

b) La función a minimizar es el coste que viene dado en función del número de latas por la expresión: $C(x, y) = 22x + 24y$. El valor mínimo es 0 € y se alcanza en el vértice $A(0, 6)$, lo que significa una dieta con solo 6 latas de la marca M_2 .



23. Asturias. Ordinaria 2021. 1A. Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2m euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98m euros.

- a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.
- b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Solución: a) $\left. \begin{array}{l} x + y = 22,5 \\ 7mx + 2my = 98m \end{array} \right\}$ b) si el precio de la sal es 0,2 € por kg el valor de m será 0,1 y el sistema será compatible determinado. Compró 11,9 kg de sal y 10,6 kg de azúcar

24. Asturias. Ordinaria 2021. 1B. Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller T1 y 4 horas de preparación en el taller T2. Cada palé tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller T1 y 3 horas de preparación en el taller T2. Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller T1 y de 60 horas de uso del taller T2. Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

- a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar 4 palés de cada tipo en una semana?
- b) **[0,75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2000 euros con la venta de cada palé tipo A y de 1000 euros con cada palé tipo B, ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

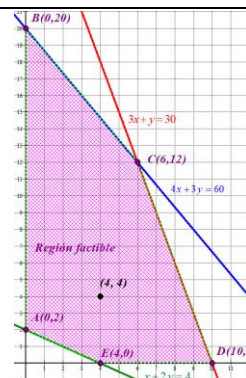
Solución: a) Llamamos " x " a los palés tipo A que se preparan por semana. " y " al número de palés tipo B. Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 30 \\ 4x + 3y \leq 60 \\ x + 2y \geq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \cdot 4 \text{ palés de cada tipo es el punto } (4, 4) \text{ que si está contenido en la}$$

región factible y si cumple las restricciones.

b) Deseamos maximizar el beneficio que viene dado por la expresión:

$B(x, y) = 2000x + 1000y$. El máximo beneficio es de 24000 € y se obtiene en el vértice $C(6, 12)$ lo que significa preparar 6 palés tipo A y 12 palés tipo B.



25. Asturias. Extraordinaria 2020. 1A. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$$

- a) **[1 punto]** Si $(A + B) \cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

$$a) \left. \begin{array}{l} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{array} \right\} \quad b) \text{ Para } m \neq 1 \text{ y } m \neq -1 \text{ es compatible determinado. Para } m = -1 \text{ es incompatible.}$$

Para $m = 1$ es compatible indeterminado. Tiene solución para $m \neq -1$. Sólo es única para $m \neq 1$ y $m \neq -1$.

Para $m = 2$ la solución es $x = -\frac{1}{3}$; $y = -\frac{5}{3}$

26. Asturias. Extraordinaria 2020. 1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

- a) [1,75 puntos] ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?
- b) [0,75 puntos] Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

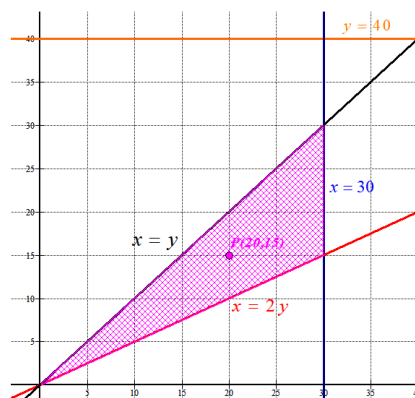
Solución:

a) Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) La función beneficio es $B(x, y) = 240x + 200y$.

El beneficio máximo que se puede obtener es de 13200 € con la contratación de 30 trabajadores de cada tipo.



27. Asturias. Ordinaria 2020. 1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

- a) [0,5 puntos] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución:

- a)
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{array} \right\}$$
- b) El sistema tiene solución si $m \neq 0$ y es única. Para el precio de 2 céntimos la fotocopia en color se realizaron 500 fotocopias en blanco y negro y 50 en color.

28. Asturias. Ordinaria 2020. 1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 . El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

- a) [1,75 puntos] ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?
- b) [0,75 puntos] Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas

mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

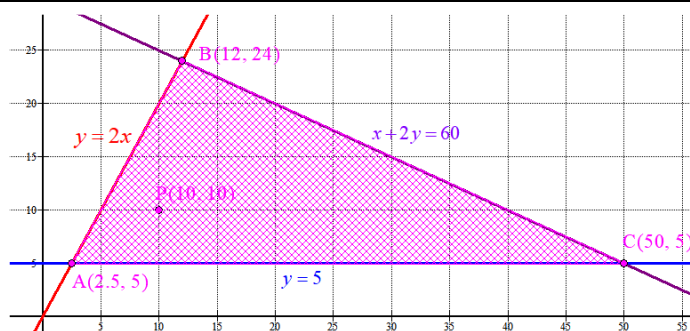
Solución:

a) Resumimos las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ y \geq 5 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

El punto (15, 15) pertenece a la región factible y puede darse esa posibilidad, pero no sería una solución óptima al ser interior y no estar en los límites de la región.

b) Deseamos maximizar los beneficios que vienen expresados en función del número de mesas como $B(x, y) = 20x + 25y$. Se obtienen un máximo beneficio en $C(50, 5)$. Con 50 mesas altas y 5 bajas se obtiene un beneficio máximo, siendo este de 1125 €.



29. Asturias. Julio 2019. Opción A. 1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.

b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

Solución: a) $\left. \begin{array}{l} x - my = 0 \\ 0,1x + 0,2y = 4000 \end{array} \right\}$ b) Para cualquier valor de m distinto de -2 y esa solución es única. Si es posible, se invirtió 20000 € en la empresa A.

30. Asturias. Julio 2019. Opción B. 1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además, las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

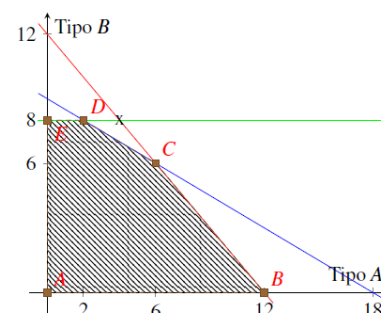
a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Solución: a) Si representamos por x e y el número de motocicletas fabricadas de tipo A y de tipo B las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 36 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{No se pueden fabricar 4 motos de A y 8 de B.}$$

b) El beneficio viene dado por $B(x, y) = 200x + 320y$. Es máximo fabricando 6 motocicletas de cada tipo. Si se desea maximizar el



número de motocicletas tipo A la función es $M(x,y) = x$. El máximo se alcanza si se fabrican 12 motocicletas de tipo A y ninguna del tipo B.

31. Asturias. Junio 2019. Opción A. 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1 punto]** Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución: a)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x + (m-2)y = -4 \end{cases} \quad \text{b) El sistema tiene solución para cualquier valor de } m \neq -1/4 \text{ y dicha}$$

solución es siempre única. Si $m = 1$ la solución es $x = y = 1$

32. Asturias. Junio 2019. Opción B. 1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

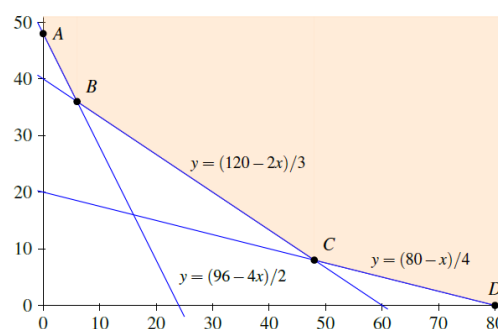
- a) **[2 puntos]** ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?
 b) **[1 punto]** El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución: a) Si representamos por x e y el número de horas de trabajo de la máquina A y de la B, respectivamente, en una semana, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones

$$\{x + 4y \geq 80; 4x + 2y \geq 96; 2x + 3y \geq 120; x \geq 0; y \geq 0\}$$

No puede usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B.

b) El coste viene dado por $C(x, y) = 2500x + 2000y$. El coste mínimo se alcanza si se usa 6 horas la máquina A y 36 horas la máquina B. Esta organización de la producción supone un coste de 87000 euros.



33. Asturias. Julio 2018. Opción A. 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

- a) **[1 punto]** Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución: a)
$$\begin{cases} -x + my = 4 \\ -(m+1)x + 3my = 12 \end{cases} \quad \text{b) El sistema tiene solución para cualquier valor de } m \neq 0 \text{ y dicha}$$

solución es única. Para $m = 1$ la solución es $x = 0, y = 4$

34. Asturias. Julio 2018. Opción B. 1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

a) [2 puntos] ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?

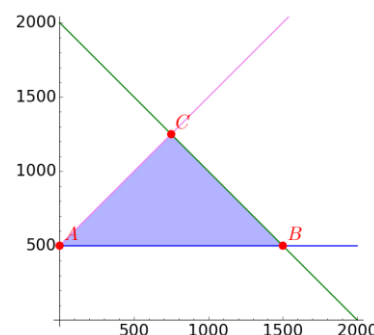
b) [1 punto] El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución: a) Si representamos por x e y el número de lápices de tipos A y B, respectivamente, que se producen en un día, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} -x + y \leq 500 \\ x + y \leq 2000 \\ y \geq 500 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Sí podrían producirse 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B}$$

B puesto que el punto $(1000, 600)$ pertenece a la región factible.

b) La función coste es $C(x, y) = 0.25x + 0.2y$. Su valor mínimo es 100 € y se consigue con la fabricación de ningún lápiz de tipo A y 500 de tipo B.



35. Asturias. Junio 2018. Opción A. 1. En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.

b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

Solución: a) $\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ 6x + my = 13,6 \end{cases}$ b) El sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 3$ y dicha solución es siempre única. Si $m = 4$ el café costaría 1.2 €

36. Asturias. Junio 2018. Opción B. 1. Una pintura se comercializa en dos colores A y B que se obtienen a partir de los tres colores primarios: rojo, azul y amarillo. Para obtener un bote de color A se necesitan 3 unidades de rojo y 2 unidades de azul. Para obtener un bote de color B se necesitan 5 unidades de rojo y 1 unidad de amarillo. Un día concreto, la empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo.

a) [2 puntos] ¿Cuántos botes de color A y cuántos de color B puede obtener ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían obtener 2 botes de cada color?

b) [1 punto] Si el beneficio obtenido con cada bote de color A es de 100 euros y con cada bote de color B es de 200 euros y se supone que vende todo lo que fabrica, ¿cuántos botes de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de botes fabricados?

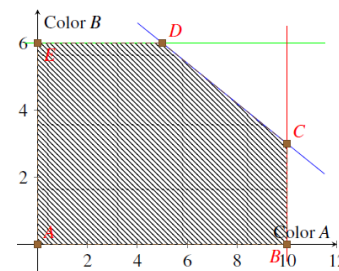
Solución: a) Si representamos por x e y el número de botes fabricados de color A y de color B, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a

formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 45 \\ 2x \leq 20 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si podrían fabricarse 2 unidades de cada tipo, puesto que el punto (2,2) pertenece a la región factible.

b) La función beneficio es $B(x, y) = 100x + 200y$. El beneficio máximo se alcanza si se fabrican 5 botes de color A y 6 de color B. El máximo de número de botes se alcanza si se fabrican 10 botes de color A y 3 de color B.



37. Asturias. Julio 2017. Opción A. 1. Una persona compró acciones de dos compañías A y B a un precio de 1 y m euros la acción, respectivamente. El importe total de la compra fue de 90 euros y el número total de acciones compradas fue de 47 acciones.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada compañía.

b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Qué cantidad de acciones de la compañía B habría comprado si cada una costase a 2 euros?

Solución: a) $\begin{cases} x + my = 90 \\ x + y = 47 \end{cases}$ b) El sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 1$ y dicha solución es

siempre única. Si $m = 2$ la solución es $x = 4$ e $y = 43$. Habría comprado 43 acciones de B

38. Asturias. Julio 2017. Opción B. 1. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda,

a) [2 puntos] ¿Cuántas unidades se podrían enviar desde cada almacén? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) [1 punto] Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros por unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

Solución: a) Llamamos " x " e " y " al número de reproductores de DVD enviados desde el almacén A y el B.

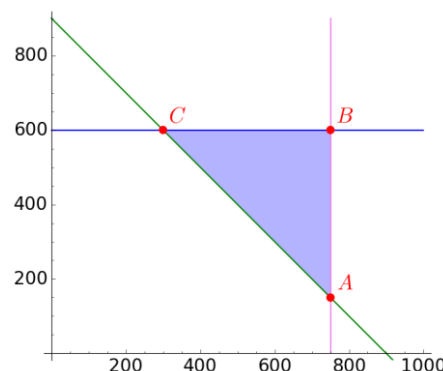
Las restricciones son

$$\begin{cases} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

No podrían enviarse 400

unidades desde cada almacén, puesto que el punto (400,400) no pertenece a la región factible

b) La función coste es $C(x, y) = 0.3x + 0.25y$. El coste mínimo es de 240 € y se alcanza si se envían 300 reproductores desde el almacén A y 600 desde el B.



39. Asturias. Junio 2017. Opción A. 1. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3105 euros.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de libros de cada tipo vendidos.

- b) [2 puntos] Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente? Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

Solución: a) $\begin{cases} x + y = 84 \\ 5mx + 4my = 3105 \end{cases}$ b) Con ese precio si es posible pues $m = 9$ y el sistema tiene solución

única para $m \neq 0$. Si $m = 9$ Se han vendido 9 libros de los de 45 € y 75 libros de los de 36 €.

40. Asturias. Junio 2017. Opción B. 1. Una empresa fabrica dos productos A y B con tres ingredientes distintos I1, I2 e I3. Para fabricar el producto A necesita 3 unidades del ingrediente I1 y 1 unidad del ingrediente I2. Para fabricar el producto B necesita 2 unidades del ingrediente I1 y otras 2 del ingrediente I3. Un día concreto, tiene en el almacén 18 unidades del ingrediente I1, 4 del I2 y 12 del I3. Se sabe además que el beneficio obtenido con cada producto A es de 30 euros y con cada producto B es de 50 euros.

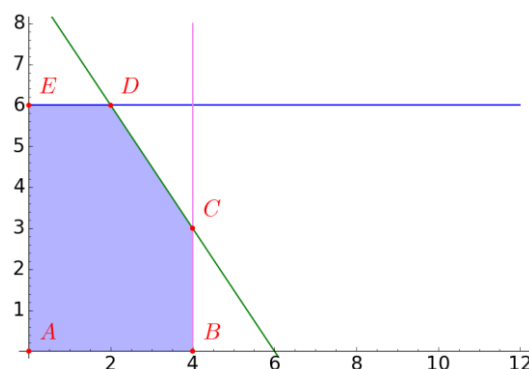
- a) [2 puntos] ¿Cuántos productos de tipo A y cuántos de tipo B puede fabricar ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 2 productos de cada tipo en ese día?
- b) [1 punto] ¿Cuántos debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de productos fabricados?

Solución: a) Llamamos x e y al número de productos A y

B. Las restricciones son $\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ x \leq 4 \\ y \leq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ Sí se podrían fabricar

2 productos de cada tipo pues el punto $(2, 2)$ pertenece a la región factible. b) El beneficio es $B(x, y) = 30x + 50y$.

El beneficio máximo se consigue fabricando 1 productos de A y 6 del tipo B. Para maximizar el número total de productos fabricados deben fabricarse 2 de A y 6 de B.



BALEARES



1. Baleares. Extraordinaria 2025. Problema B1. — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.

- Cada vestido requiere 5 m² de tejido y 5 botones.
- Cada camiseta requiere 4 m² de tejido y 3 botones.
- Cada falda requiere 4 m² de tejido y ningún botón.

a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m² de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**

b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} \quad (1.5 \text{ pt})$$

c) Si disponemos de 100 m² de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)**

Solución: a) Hacen falta 190 m² de tejido y 95 botones. b) Las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} x = 12 + \frac{12}{5}\lambda \\ y = -20 - 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} . \text{ c) No es posible.}$$

2. Baleares. Extraordinaria 2025. Problema B2. — Considera las matrices cuadradas A, B, M y N de tamaño 3×3.

a) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pt})$$

b) Encuentre una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$. **(1 pt)**

c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$? **(1 pt)**

Solución: a) $x = -2$. b) $B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) Es cierto que $C^2 = C$.

3. Baleares. Ordinaria 2025. Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

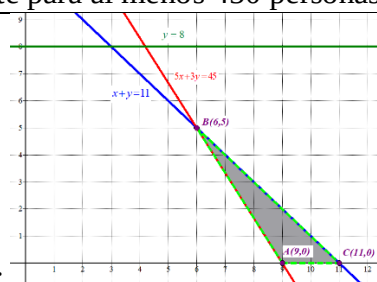
- a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? (1 pt)
 b) Calcula x tal que $Ax = v$. (1 pt)
 c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2y = x$. (1 pt)

Solución: a) Si es cierto. b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$. c) $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. Baleares. Ordinaria 2025. Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

- Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
- Cada minibus tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste? (3 pt)



Solución: El coste mínimo se consigue con la contratación de 6 autocares y 5 minibuses siendo ese coste mínimo de un importe de 875 €.

5. Baleares. Extraordinaria 2024. P1. Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

- a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)
 b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €... pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

Solución: a) Se han vendido 70 pantalones y 30 camisas. b) No es posible pues sale un número negativo de pantalones. Los datos son incorrectos.

6. Baleares. Extraordinaria 2024. P2. Considera las matrices siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A . ¿Cuál es este valor x ? (3 pt)
 b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I)$. (4 pt)
 c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A ? (3 pt)

Solución: a) El valor buscado es $x = 8$. b) $(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. c) No existen valores de y, z de manera que C sea la inversa de A .

7. Baleares. Extraordinaria 2024. P3. Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

- a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)
- b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

Solución: a) El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo las restricciones es de 2320 € y se obtiene produciendo y vendiendo 10 aspiradoras y 60 baterías. b) Con un precio de la aspiradora inferior a 88 €.

8. Baleares. Ordinaria 2024. P1. Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

- a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos? (2 pt)
- b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)
- c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

Solución: a) Se necesitan 100 kg de madera y 300 kg de metal. b) Tenemos que fabricar 40 armarios modelo A, 60 del modelo B y 50 del modelo C para utilizar completamente todos los recursos. c) No es posible utilizar completamente el metal, las horas y el almacén.

9. Baleares. Ordinaria 2024. P2. Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

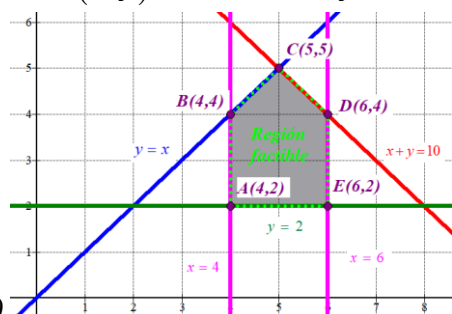
El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

- a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)
- b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
- c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

Solución: a) Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x \geq y \\ 4 \leq x \leq 6 \\ 2 \leq y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{. La función a maximizar es el interés}$$

anual $I(x, y) = 0.06x + 0.02y$ con el resultado en miles de euros.



b) 6000 € en acciones y 4000 € en bonos.

c) El interés anual máximo es de 440 € y se consigue invirtiendo

10. Baleares. Extraordinaria 2023. P1. Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

Solución: a) El consumo por autopista es de 0.222 Kwh por kilómetro, por ciudad es de 0.167 Kwh por kilómetro y por montaña es de 0.208 Kwh por kilómetro. b) Puede circular durante 300 kilómetros.

11. Baleares. Extraordinaria 2023. P2. Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camino solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)

b) Si queremos llenar el camino solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

Solución: a) Debe transportar 120/11 metros cúbicos de arena y 12/11 metros cúbicos de ceniza. b) La cantidad de metros cúbicos de gravilla no puede ser negativa. Por lo que esta situación no tiene solución real.

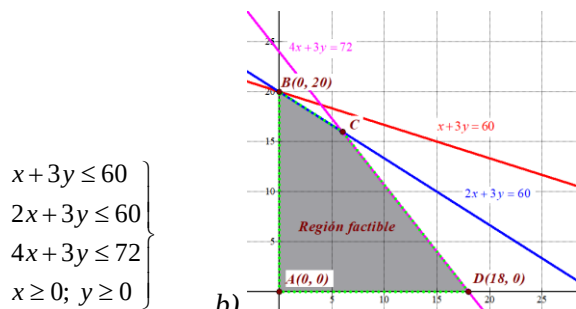
12. Baleares. Extraordinaria 2023. P3. En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

- Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal con dos variables. (3 pt)
- Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)
- ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

Solución: a) La función a maximizar es el beneficio: $B(x, y) = 4x + 8y$. Las restricciones son:



b)

Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B(0, 20)$

, $C(6, 16)$ y $D(18, 0)$. c) Con 0 ofertas tipo A y 20 tipo B se satisfacen todas las restricciones y el beneficio es máximo, siendo este de 160 €.

13. Baleares. Ordinaria 2023. P1. Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.
- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.
- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

- Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes y y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

- Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)
- Con x clientes y y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Solución: a) Hubiese costado menos cara la empresa B, solo 800 €. b) La previsión es de 60 clientes y 200 facturas. c) La empresa C nos costaría $100 + 5y$ €. Si utilizamos los datos del apartado b) nos costaría $100 + 5 \cdot 200 = 1100$ €

14. Baleares. Ordinaria 2023. P2.

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

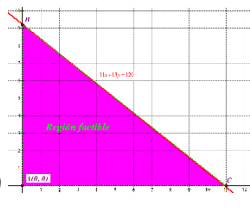
- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

- Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)
- Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)
- Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Solución: a) La función a maximizar es la facturación: $f(x, y) = 55x + 75y + 300$. Las restricciones

$$\text{son } \begin{cases} 11x + 13y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



b) $\left\{ \begin{array}{l} 11x + 13y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$, los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B\left(0, \frac{120}{13}\right)$ y $C\left(\frac{120}{11}, 0\right)$. c) La facturación máxima es de 992.31 € y para conseguirla se debe transportar 16.615 toneladas de gravilla y 1.385 toneladas de ceniza.

15. Baleares. Extraordinaria 2022. 1. Dado el sistema siguiente:

$$3x + 2y + z = 1$$

$$-mx + 2y + z = 2$$

dependiente del parámetro m .

a) Discuta para qué valores de m el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (5 puntos)

b) Encuentre la solución para $m = 2$. (5 puntos)

Solución: a) El sistema tiene infinitas soluciones cuando $m \neq -3$. b) $x = -\frac{1}{5}$; $y = t$; $z = \frac{8}{5} - 2t$; $t \in \mathbb{R}$

16. Baleares. Extraordinaria 2022. 2. Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuáles Y es invertible. (3 puntos)

b) Encuentre la inversa de Y para $k = 1$. (3 puntos)

c) Determine los valores de m y n para los que la matriz X satisfice

$$X^2 - 4X + nId = 0,$$

Donde Id denota la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

Solución: a) Si $k \neq -4$. b) $Y^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ c) Hay dos soluciones: $m = n = 3$ o $m = 1$ y $n = 3$.

17. Baleares. Extraordinaria 2022. 3. El dueño de una tienda de chucherías dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para su mejor venta confeccionará dos tipos de paquetes: el tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1'5 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la tienda como un problema de programación lineal. (4 puntos)

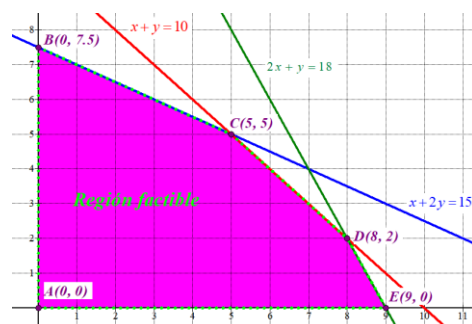
b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de paquetes de tipo A y B que se tienen que confeccionar y vender para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

Solución: a) Función objetivo (maximizar):

$$B(x, y) = 1.5x + 2y \text{ . Restricciones: } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

c) Confeccionando y vendiendo 5 paquetes de cada tipo se consiguen unos beneficios máximos de 17.5 €.



18. Baleares. Ordinaria 2022. 1. Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio, las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones de cada empresa. (5 puntos)

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 100 \\ 1.50a + 1.10b + 0.85c = 102 \\ c = a + b \end{array} \right\}$$

b) Se han invertido 11250 € en acciones de A, 38750 € en acciones de B y 50000 € en acciones de C.

19. Baleares. Ordinaria 2022. 2. En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0.9 m² de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo necesitan 1.2 m² de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m² de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 por una del segundo.

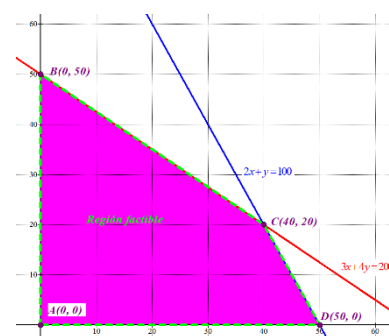
a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de bolsas de cada tipo que se tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} B(x, y) = 30x + 25y \\ 3x + 4y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

c) Fabricando 40 bolsas del primer tipo y 20 del segundo se consiguen unos beneficios máximos de 1700 €.



20. Baleares. Ordinaria 2022. 3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

21.

en función del parámetro a .

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso. (6 puntos)

b) Encuentre la solución para $a = -2$.

(4 puntos)

Solución: a) Si $a \neq 13$ y $a \neq -2$ el sistema tiene una única solución y si $a = 13$ o $a = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones. b) $x = 2t$; $y = -2t$; $z = t$, $t \in \mathbb{R}$

22. Baleares. Extraordinaria 2021. 1. El barco de Dénia a Ibiza lleva automóviles y camiones en la bodega. Cada camión ocupa cuatro plazas de automóvil. La superficie total de la bodega permite ubicar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1000 kg y cada camión, 9000 kg. El peso total permitido para la carga es de 300.000 kg. La compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

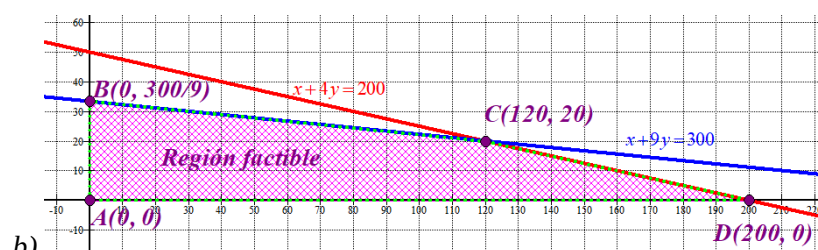
a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcule el número de coches y camiones a cargar para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de automóviles e “ y ” al número de camiones. La función objetivo

es el ingreso que viene dada por $I(x, y) = 50x + 300y$. Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 200 \\ x + 9y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$


b)

c) El beneficio máximo se obtiene con 120 coches y 20 camiones. Dicho beneficio máximo es de 12000 €.

23. Baleares. Extraordinaria 2021. 2. Dadas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 .

b) Encuentra a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ b) Hay dos soluciones: $a = c = -1, b = 1$ o bien $a = c = 1, b = -1$

24. Baleares. Extraordinaria 2021. 3. En una tienda de fruta hemos comprado manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euro y piñas a 1.5 euros la prenda. Al llegar a la caja nos damos cuenta de que llevamos 70 piezas de fruta, cuyo coste total es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra saldría 4 euros más barata.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales. (5 puntos)

b) Determine el número de piezas de cada fruta que hemos comprado. (5 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al número de manzanas, “y” al número de aguacates y “z” al número de

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ 0.5x + y + 1.5z = 68 \\ 0.5y + x + 1.5z = 68 - 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{piñas.} \\ b) \text{ Se han comprado 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.} \end{array}$$

25. Baleares. Ordinaria 2021. 1. Dado el sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$x + y + z = 5$$

$$5x + ay - z = 11$$

$$3x - y + az = 2.$$

a) Discute para qué valores de a el sistema tiene solución y cuantas tiene en cada caso.

(6 puntos)

b) Encuentra la solución del sistema para $a = 2$. (4 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -1$ y $a \neq 9$ el sistema tiene una única solución. Si $a = -1$ o $a = 9$ el sistema no tiene solución. b) La solución es $x = \frac{8}{7}$; $y = \frac{64}{21}$; $z = \frac{17}{21}$

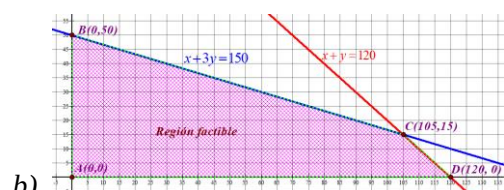
26. Baleares. Ordinaria 2021. 2. Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas, de dos tipos, A y B. Por eso la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y el de tipo B de 300.000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20000 euros y por la venta de uno tipo B es de 40000 euros.

a) Plantee la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal. (4 puntos)

b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)

c) Calcula el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

Solución: a) Llamamos x = número de viviendas tipo A e y = número de viviendas tipo B. La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 20000x + 40000y$. Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$


b) c) El máximo beneficio es de 2.700.000 € y se obtiene construyendo 105 viviendas del tipo A y 15 del tipo B.

27. Baleares. Ordinaria 2021. 3. Considera las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Razona si es posible calcular los productos $M \cdot N$ y M^2 . En el caso de que sea posible, calcúlalos. (2 puntos)

b) Calcula para qué valores de k es $M \cdot N$ invertible. (3 puntos)

c) Calcula la inversa de $M \cdot N$ para $k = 1$. (2 puntos)

d) Para $k=1$, encuentra la matriz X que cumple $(M \cdot N) \cdot X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 puntos)

Solución: a) $M \cdot N$ si es posible, pues el número de columnas de M es igual al número de filas de N .

$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}$. M^2 no es posible pues la matriz M no es cuadrada y no coinciden su número de

filas con el número de columnas. b) Para $k \neq 2/23$ y $k \neq 0$. c) $(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$ d)

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

28. Baleares. Extraordinaria 2020. OPCIÓN A. 1 Bernat quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 cervezas, 1 panecillo y 2 cafés con leche habían pagado 8,10 euros. En este bar todas las cervezas valen lo mismo y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifique las variables e interpreta el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales. (2 puntos)

b) Hoy Bernat ha vuelto con otros amigos y han tomado 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Combine las ecuaciones del apartado a) para deducir cuánto han pagado en total. (3 puntos)

c) Si 1 cerveza, 1 panecillo y 1 café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto valen la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente? (5 puntos)

Solución: a) Llamemos “x” al precio de una cerveza, “y” al precio de un panecillo y “z” al precio de un café con leche.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,5 \\ 2x + y + 2z = 8,1 \end{cases}$$

b) Debe pagar 11,4 euros por las 2 cervezas, los 2 panecillos y los 3 cafés con leche.

c) Cada cerveza cuesta 1,8 euros, cada panecillo cuesta 2,1 y un café con leche 1,2 euros

29. Baleares Extraordinaria 2020. OPCIÓN B. 1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 , A^3 . (2 puntos)

b) Propón una fórmula para A^n y utilízala para calcular A^{14} . (4 puntos)

c) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} B^t \cdot B = 2A$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

(4 puntos)

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$ c)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 3/5 & 11/5 \end{pmatrix}$$

30. Baleares. Extraordinaria 2020. OPCIÓN B. 2. Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad.

- a) Plantee la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Sabiendo que se vendió toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo hay que producir para obtener el máximo beneficio e indica cuál es ese beneficio. (2 puntos)

Solución: a) La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 35x + 55y$.

Las restricciones son

$$\begin{cases} 3x + y \leq 75 \\ x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

b) $A(0,0)$, $B(0,30)$, $C(18,21)$ y $D(25,0)$.

c) El beneficio máximo es de 1785 € y se obtiene fabricando 18 anillos modelo A y 21 anillos modelo B.



31. Baleares. Ordinaria 2020. OPCIÓN A. 1 Dado el sistema siguiente:

$$x + (a+1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

- a) Discute el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)
- b) Resuélvelo para $a = -2$. (4 puntos)

Solución: a) Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ es incompatible. Para $a = -2$ es compatible indeterminado. b) $x = 1+t$; $y = t$ $t \in \mathbb{R}$

32. Baleares. Ordinaria 2020. OPCIÓN B. 1 Un trayecto de 600 km debe realizarse combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, y el del autobús, de 0.1 euros/km. El recorrido nos ha costado 150 euros, y se sabe que se han hecho el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determine las distancias que se han recorrido con cada medio de transporte. (10 puntos)

Solución:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 600 \\ 0.5x + 0.2y + 0.1z &= 150 \\ y &= 2(x + z) \end{aligned} \right\} \text{El trayecto consta de 125 kilómetros en taxi, 400 en ferrocarril y 75 en autobús.}$$

33. Baleares. Ordinaria 2020. OPCIÓN B. 2. Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hornada de pasteles 6 kg. y 1 kg de mantequilla. Se sabe que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 euros y, de 30 euros al vender una hornada del tipo B.

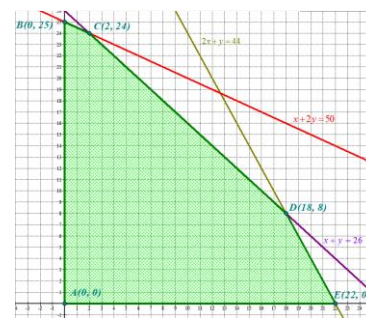
- a) Plantee la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal. (4 puntos)
- b) Dibuje la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 puntos)
- c) Determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determine también este beneficio máximo. (2 puntos)

Solución: a) La función objetivo que deseamos maximizar es la función beneficio $B(x, y) = 20x + 30y$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ \text{Las restricciones son } 2x + y \leq 44 \\ x + y \leq 26 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Los vértices son $A(0, 0)$; $B(0, 25)$; $C(2, 24)$; $D(18, 8)$ y $E(22, 0)$

c) El máximo beneficio está en el vértice $C(2, 24)$. Se obtiene un máximo beneficio de 760 € con 2 hornadas del pastel A y 24 del pastel B.



34. Baleares. Julio 2019. OPCIÓN A. 1. a) Dadas A, una matriz cuadrada invertible cualquiera, y A^{-1} su inversa; qué matriz se debe obtener al calcular $A \cdot A^{-1}$ y $A^{-1} \cdot A$? Describa/indica cómo es esta matriz. (1 punto)

b) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

i) Calcula los valores de x para los cuales se cumple que $A^2 = 2 \cdot A$ (5 puntos)

ii) Para $x = -1$, calcula A^{-1} . Comprueba el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$. (4 puntos)

Solución: a) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ b) i) $x = 0, x = -2$ ii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

35. Baleares. Julio 2019. OPCIÓN B. 1. Un instituto tiene tres partidas presupuestarias: libros, material de cocina y muebles. El presupuesto para muebles de este instituto es cinco veces la suma del de libros más el del material de cocina. El presupuesto para libros es el triple del de material de cocina. La suma del presupuesto para muebles y material de cocina es 7 veces el presupuesto de libros.

a) Con estos datos, ¿podemos saber el dinero destinado a cada partida presupuestaria? (7 puntos)

b) Determine las cantidades si para libros hay 2100 €. (3 puntos)

Solución: a) No podemos saber cuanto se destina a cada compra b) 1400 € para muebles y 700 para material de oficina

36. Baleares. Julio 2019. OPCIÓN B. 2. KSE es una empresa que fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene disponibles 900 horas de tiempo en el departamento de producción, 300 horas en el departamento de acabado y 100 horas en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y los beneficios, en €, se dan en la siguiente tabla:

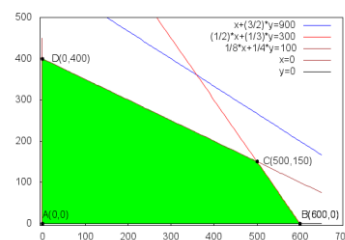
	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	1/2	1/8	4
De lujo	3/2	1/3	1/4	8

¿Cuántos pares de cada modelo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es éste beneficio? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación o lineal, dibujando la región factible de soluciones, determinando y dibujando sus vértices.

Solución:

El beneficio máximo es de 3200 €. Se consigue fabricando 500 guantes normales y 150 de lujo o bien ninguno normal y 400 de lujo. Aunque hay más opciones, cualquiera que pertenezca al segmento DC.



37. Baleares. Junio 2019. OPCIÓN A. 1. Considera la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Resuelve la ecuación $|A| = 0$. ($|A|$ es el determinante de la matriz A) (3 puntos)
- Si $x = 0$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? (2 puntos)
- Si $x = 2$, ¿tiene inversa la matriz A? ¿Por qué? En caso afirmativo, resuelve la ecuación $A \cdot Z = I$; donde I es la matriz identidad 3×3 . (5 puntos)

Solución: a) $x = 0, x = -2$ b) No tiene inversa c) Si tiene inversa. $Z = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

38. Baleares. Junio 2019. OPCIÓN B. 1. Una empresa de autobuses tiene tres líneas: A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses en la línea A, 3 en la B y 4 en la C. El martes salieron 2 autobuses en la línea A, 1 en la B y 4 en la C. El miércoles salieron 1 autobús en la línea A, 3 en la B y 5 en la C.

- Representa los datos en forma de matriz. (2 puntos)
- ¿Tiene inversa la matriz construida en el apartado a)? En caso negativo, justifica la respuesta. En caso positivo, calcule su inversa. (4 puntos)
- Si D es la matriz construida en el apartado a), resuelve, si es posible, el sistema de ecuaciones:

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ puntos})$$

Solución: a) Las filas son los días y las columnas las líneas. $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$b) D \text{ sí tiene inversa } D^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -7 & 3 & -8 \\ 6 & -21 & 12 \\ -5 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

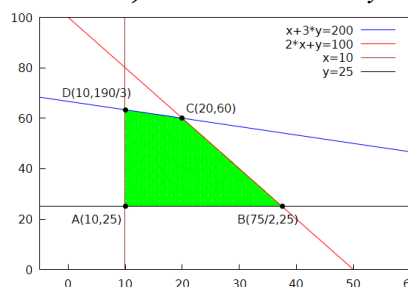
39. Baleares. Junio 2019. OPCIÓN B. 2. Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En ese momento están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote tipo B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y deben elaborar, al menos, 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?
Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región

factible de soluciones y determinante y dibujando sus vértices.

(10 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” e “y” al número de lotes de tipo A y de B.



El mínimo coste es de 46.5 € y se consigue con 10 lotes de tipo A y 25 del tipo B.

40. Baleares. Julio 2018. OPCIÓN A. 1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- a) Calcula $A \cdot B$, y determina en función de los valores reales de k si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa. (4 puntos)
- b) Estudia lo mismo que en el apartado a) pero ahora para la matriz $B \cdot A$. (4 puntos)
- c) Para $k = -2$ calcula la matriz inversa de $B \cdot A$. (2 puntos)

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ No tiene inversa para ningún valor de k

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$ Tiene inversa para cualquier valor de k. c) $(B \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$

41. Baleares. Julio 2018. OPCIÓN B. 1. El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 € por persona. Los niños pagan el 50% de ese precio, y los jubilados pagan el 60% de ese precio. Determine el número de personas que no son ni niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25% del número de niños y recaudaron un total de 5.680 € por la estancia de todos. (10 puntos)

Solución: 144 niños, 36 jubilados y 20 que no son ni jubilados ni niños.

42. Baleares. Julio 2018. OPCIÓN B. 2. Considera la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representa el conjunto de puntos del plano definido por:

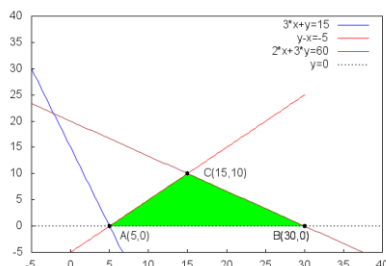
$$A = \{(x, y) : 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que se obtenga el mismo conjunto? (5 puntos)

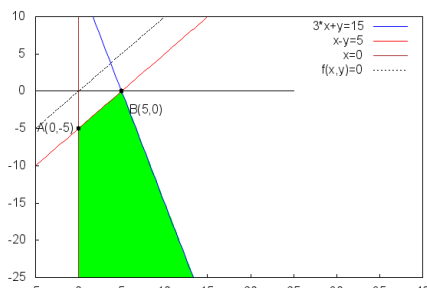
b) Indica si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto: (5 puntos)

$$B = \{(x, y) : 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

Solución:



- a) El máximo se consigue en el vértice B(30, 0) y vale 30. Se puede eliminar la inecuación $3x + y \geq 15$ y tendríamos la misma región.



- b) No se alcanza un valor máximo de $f(x,y)$ en la región B.

43. Baleares. Junio 2018. OPCIÓN A. 1. Calcular una matriz X que cumpla: (6 puntos)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la matriz inversa de X. (4 puntos)

Solución: $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ $X^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -14/3 & 2 & 2 \\ -23/3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

44. Baleares. Junio 2018. OPCIÓN B. 1.

El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber qué cobra por hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello, sabe que:

- En el 4º B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3º A, pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En el 1º A, mi casa, estuvo 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil, y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional? (10 puntos)

Solución: El electricista gana 28 € por hora de trabajo, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

45. Baleares. Junio 2018. OPCIÓN B. 2. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2 , de la misma empresa pueden llevar a cabo un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Tienen que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G1 y en 4.000 € para el grupo G2.

¿Cuántas semanas tendrá que trabajar cada grupo para terminar el proyecto con el coste mínimo? (10 puntos)

Debe plantearse el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Solución: La función objetivo es el coste: $C(x, y) = 3300x + 4000y$ que deseamos minimizarlo.

Las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y \geq 20 \\ 2x + y \geq 10 \\ x + y \geq 7 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

El mínimo coste es de 24500 € y se produce en el punto C(5, 2) que significa que deben trabajar 5 semanas el grupo G1 y 2 semanas el grupo G2.



46. Baleares. Septiembre 2017. OPCIÓN A. 1. Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcula $A^2 - B \cdot C^t$, donde C^t es la matriz traspuesta de la matriz C. (5 puntos)

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$. (5 puntos)

Solución: a) $A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

47. Baleares. Septiembre 2017. OPCIÓN B. 1. Un grupo de estudiantes financia su viaje de final de curso con la venta de participaciones de lotería por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado un total de 620 € y han vendido el doble participaciones de 1 € que de 5 €. Si han vendido un total de 280 participaciones, calcule el número de participaciones que han vendido de cada importe. (10 puntos)

Solución: 120 participaciones de 1 €, 100 de 2 € y 60 de 5 €.

48. Baleares. Septiembre 2017. OPCIÓN B. 2. Una fábrica de papel quiere liquidar hasta 88 kg de papel reciclado y hasta 148 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes de tipo A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes de tipo B, por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote de tipo A es de 1.1 € y el de cada lote de tipo B es de 1.5 €. ¿Cuántos lotes de tipos A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos? (10 puntos)

Se debe plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

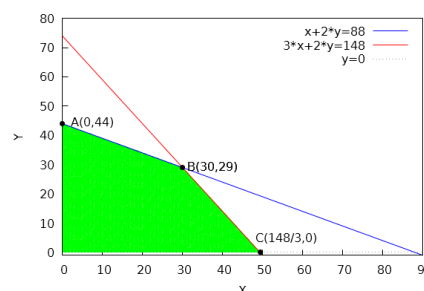
Solución: $x = n^\circ$ de lotes A, $y = n^\circ$ de lotes B. Las restricciones

$$\text{son} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y \leq 88 \\ 3x + 2y \leq 148 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

La función objetivo es $F(x, y) = 1.1x + 1.5y$

Los ingresos son máximos con 30 lotes de tipo A y 29 de tipo B.

Estos ingresos máximos son de 76.5 €.



49. Baleares. Junio 2017. OPCIÓN A. 1. Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los relojes de tipo A los vende a 300 €; los de tipo B, en 600 €, y los de tipo C, en 200 €. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió este mes de tipo B fue igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcule cuántos relojes vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fue de 89.000 €. (10 puntos)

Solución: 90 del tipo A, 100 del tipo B y 10 del tipo C

50. Baleares. Junio 2017. OPCIÓN B. 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Se pide:

a) Determina los valores de k para los que el sistema es compatible determinado. (6 puntos)

b) Resuelve el sistema cuando $k = 2$. (4 puntos)

Solución: a) Para $k \neq -1$ b) $x = 1/4, y = 1/4, z = -1/4$

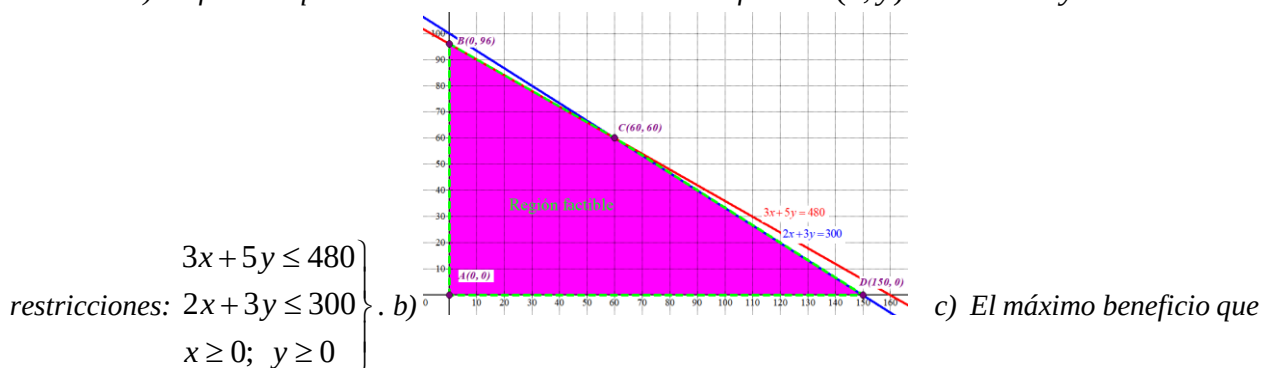
CANARIAS



1. Canarias. Extraordinaria 2025. 4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicos y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicos y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicos y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

- Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.
- Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
- ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 80x + 130y$ sometida a las



2. Canarias. Extraordinaria 2025. 4B. En la cafetería “Desayuna como un mencey” ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
- ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**

Solución: a)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 12,25 \\ 2,4z + 2x = 13,9 \\ y = -x + 2z - 1 \end{cases}$$
 b) c) Un batido de frutas cuesta 2.75 €, un yogur con cereales vale 3.25 € y por una tortita debemos pagar 3.5 €.

3. Canarias. Ordinaria 2025. 4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será

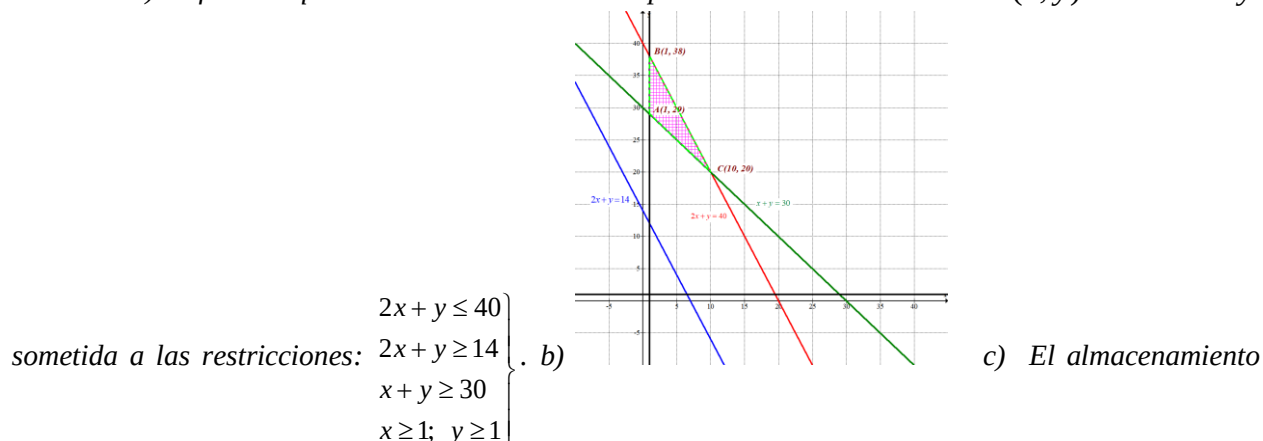
necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. (1 punto)

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (0,75 puntos)

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? (0,75 puntos)

Solución: a) La función que deseamos maximizar la capacidad de almacenamiento $C(x, y) = 9.6x + 1.2y$



máximo es de 120 Tb y se consigue en el vértice $C(10, 20)$, que significa instalar 10 discos SATA y 20 discos SSD.

La capacidad media es de $\frac{6}{35}$ Tb por ordenador.

4. Canarias. Ordinaria 2025. 4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? (1 punto)

Solución: a) $\left. \begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array} \right\} . \text{ b) Hay 117 clientes en Solo Alojamiento, 78 en Alojamiento y Desayuno, 234 en Todo Incluido.}$

5. Canarias. Extraordinaria 2024. A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

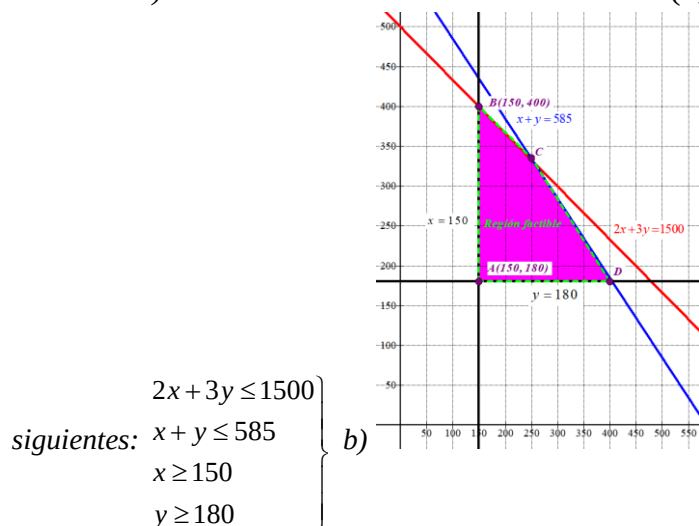
b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

Solución: a) $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 8z = 280 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{array} \right\} . \text{ b) Se vendieron 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles}$

6. Canarias. Extraordinaria 2024. B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

- Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)
- Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
- Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

Solución: a) Deseamos maximizar la recaudación $R(x, y) = 18x + 20y$ sometida a las restricciones



c) La recaudación máxima es de 11190 € y se

consigue fabricando 255 lotes A y 330 lotes B.

7. Canarias. Ordinaria 2024. A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).
- Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)
- ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 160x + 225y$ sometida a

las restricciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 150 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{b)}$$

fabricando 18 mesas y 24 estanterías

8. Canarias. Ordinaria 2024. B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)
- ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y + z = \frac{51}{0.3} = 170 \\ 5z = 2y \end{array} \right\} \text{ b) La jugadora ha participado en 100 torneos locales, 50 nacionales y 20 internacionales.}$$

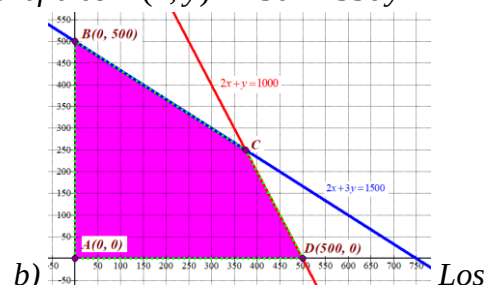
9. Canarias. Extraordinaria 2023. A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible y determinar sus vértices.
- ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 250x + 350y$

sometida a las restricciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 1000 \\ 2x + 3y \leq 1500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 500)$, $C(375, 250)$ y $D(500, 0)$ c) El beneficio máximo es de 181250 € y se consigue fabricando 375 puertas TIMANFAYA y 250 puertas TABURIENTE.

10. Canarias. Extraordinaria 2023. B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

Solución: Hay 8 asientos de primera clase, 16 asientos tipo business y 120 asientos tipo turista.

11. Canarias. Ordinaria 2023. A4. Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.

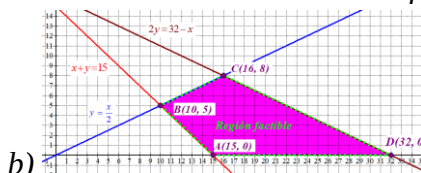
Para maximizar el beneficio diario:

- Formular el correspondiente problema de programación lineal.
- Representar la región factible.
- ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 70x + 160y$. Las

restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 15 - x \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 2y \leq 32 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



b)

c) El beneficio máximo es de

2400 € y se consigue en el vértice $C(16, 8)$, que significa fabricar 16 relojes tipo A y 8 de tipo B.

12. Canarias. Ordinaria 2023. B4. En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

c) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

Solución: a) Llamamos “x” al número de niños y jóvenes, “y” al número de adultos y “z” al

número de jubilados.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 875 \\ 5y = 8x \\ 9x + 9y = 26z \end{array} \right\}$$

b) www.ebaumatematicas.com

c) Hay 250 personas

entre niños y jóvenes, 400 adultos y 225 jubilados.

13. Canarias. Extraordinaria 2022. A4. Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40€, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45 €. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

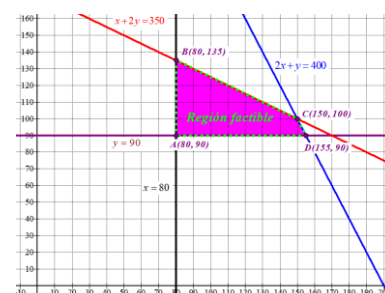
a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x, y) = 40x + 45y$ sometida a las restricciones siguientes.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 350 \\ 2x + y \leq 400 \\ x \geq 80 \\ y \geq 90 \end{array} \right\}$$



c) Se deben vender 150 lotes del tipo A y 100 del tipo B

14. Canarias. Extraordinaria 2022. B4. Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30% los de la primera edición, y del 40% los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos de las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

Solución: Se han vendido 120 libros de la 1ª edición, 80 de la 2ª y 400 de la 3ª.

15. Canarias. Ordinaria 2022. A4. Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios

por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 €, 20 € y 60 € respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 € ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle surf.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

$$\text{Solución: a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x = 3y \end{array} \right\}$$

b) Acuden 30 personas a paddle surf, 10 a kayak y 5 a moto acuática

16. Canarias. Ordinaria 2022. B4. Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2€ por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50€ por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

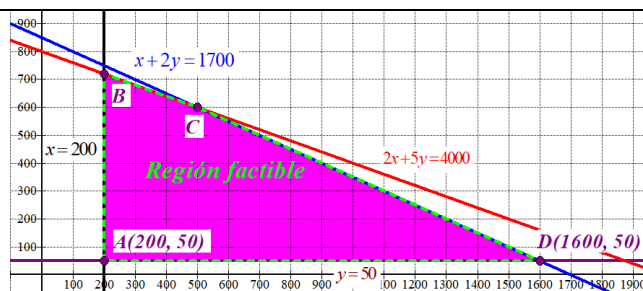
b) Representar la región factible.

c) ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución: a) La función que deseamos maximizar son los beneficios

$B(x, y) = 2x + 4.5y$ sometida a las restricciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 4000 \\ x + 2y \leq 1700 \\ x \geq 200 \\ y \geq 50 \end{array} \right\}$$



c) El beneficio máximo es de 3700 € y se consigue envasando 500 tarrinas pequeñas y 600 grandes.

17. Canarias. Extraordinaria 2021. A4. Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

a) Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal

b) Representar la región factible e indicar sus vértices

c) Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

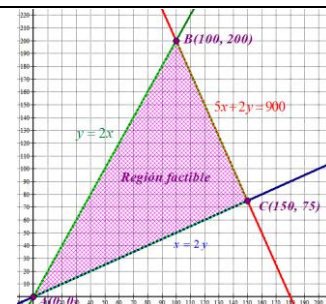
Solución: a) Llamamos "x" al número de plataneras de la plantación e "y" al número de naranjeros. Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 900 \\ x \leq 2y \\ y \leq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar:

$$B(x, y) = 15x + 8y$$

b) Los vértices de la región factible son: A(0, 0), B(100, 200) y C(150, 75).



c) El máximo beneficio que se puede obtener es de 3100 € y se obtiene con 100 plataneras y 200 naranjeros.

18. Canarias. Extraordinaria 2021. B4. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución: a) Llamamos a = número de pantalones tipo A, b = número de pantalones tipo B, c = número de

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 70 \\ -2a + 5b + 5c = 0 \\ 5a + 4b + 2c = 320 \end{array} \right\} \text{pantalones tipo C.}$$

b) La solución del sistema es $a = 50$, $b = 15$ y $c = 5$ c) Hay 50 pantalones tipo A, 15 tipo B y 5 tipo C.

19. Canarias. Ordinaria 2021. A4. Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30 €, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 €. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

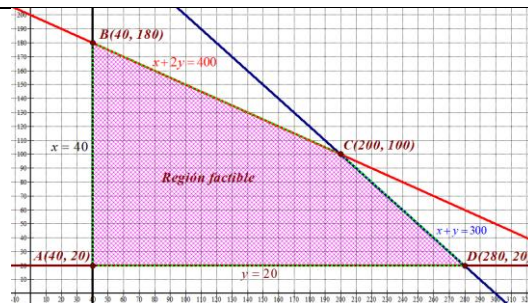
b) Representar la región factible.

c) Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución: a) Llamamos x = número de lotes A y y = número de lotes B. La función que deseamos maximizar son las ganancias $f(x, y) = 30x + 40y$ sometida a las

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \\ x \geq 40 \\ y \geq 20 \end{array} \right\} \text{c) Las ganancias}$$

máximas son 10000 € y se consiguen en el vértice C(200, 100), que significa vender 200 lotes de A y 100 lotes de B.



20. Canarias. Ordinaria 2021. B4. Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver el sistema.

c) ¿Cuánto aporta cada nieto?

Solución: a) Llamamos “ x ” a la aportación de Luis, el mayor. “ y ” a la aportación de Carmen. “ z ” a la

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = 3y + 3z \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right\} \text{de Pedro}$$

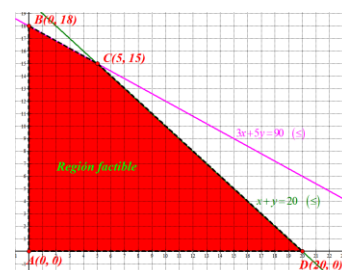
b) La solución es $x = 45$, $y = 9$, $z = 6$ c) Luis aporta 45 €, Carmen 9 € y Pedro 6 €

21. Canarias. Extraordinaria 2020. A4. Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

- Representar la región factible y los vértices.
- Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

Solución:

- En el dibujo.
- El máximo beneficio es de 2835 € y se obtiene en el vértice $C(5, 15)$, que significa comprar 5 gabardinas de paño y 15 de piel.



22. Canarias. Extraordinaria 2020. B4. En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

- Plantear el correspondiente sistema.
- ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Solución: Llamamos “e” al número de turistas españoles, “a” al de alemanes e “i” al de ingleses.

$$\left. \begin{array}{l} e + a + i = 400 \\ a = 1,2i \\ i + e = a + 40 \end{array} \right\} \rightarrow \text{En el hotel hay 70 turistas españoles, 150 ingleses y 180 alemanes.}$$

23. Canarias. Ordinaria 2020. A4. En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

- Plantear el problema y representar la región factible.
- ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Solución:

a) Las restricciones:

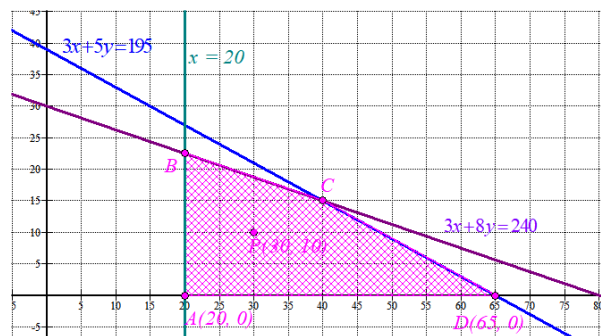
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 195 \\ 3x + 8y \leq 240 \\ x \geq 20; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Deseamos maximizar la función Ingresos

$$I(x, y) = 10x + 18y$$

b) Los vértices son $A(20,0)$; $B(20, 22.5)$; $C(40, 15)$ y $D(65, 0)$

Hay que preparar 40 cajas del tipo A y 15 del tipo B para obtener unos ingresos máximos de 670 €.



24. Canarias. Ordinaria 2020. B4. Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de

15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ a) \quad 5x + 15y + 20z = 160 \\ z = \frac{x + y}{4} \end{array} \right\} b) \text{ Ha comprado 8 pendrives de 32 Gb, 4 pendrives de 64 Gb y 3 de 128 Gb.}$$

25. Canarias. Julio 2019. PRUEBA A. 4. Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2,5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80€, por cada estantería un beneficio de 120€ y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

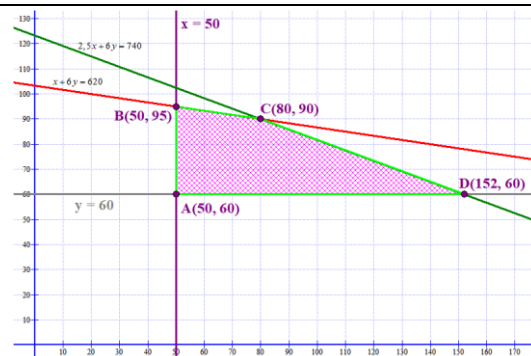
b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

Solución:

a) La función beneficio es $B(x, y) = 80x + 120y$. Las

restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 50 \\ y \geq 60 \\ 2,5x + 6y \leq 740 \\ x + 6y \leq 620 \end{array} \right\}$$



b) El máximo beneficio de 19360 euros se obtiene al fabricar 152 mesas y 60 estanterías.

26. Canarias. Julio 2019. PRUEBA B. 4. En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1115 \\ a) \quad 0,20x + 0,20y + 0,40z = 265 \\ x - y + 0,5z = -40 \end{array} \right\} b) \text{ Son 380 alumnos de ESO, 525 de Bachillerato y 210 de Ciclos}$$

Formativos.

27. Canarias. Junio 2019. PRUEBA A. 4. Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65 € y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 € y con 50 kgr.

de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

Solución:

a) Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 30x + 50y \leq 3000 \end{array} \right\}$$

La función beneficio es $B(x, y) = 65x + 95y$.

b) El Ingreso óptimo es de 6300 € y se obtiene con 75 plazas del tipo A y 15 del B.



28. Canarias. Junio 2019. PRUEBA B. 4. Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 3 \\ 2x = y + z + 0,05 \\ x + 0,05 = 2z \end{array} \right\} \quad \text{b) Un lápiz cuesta } 0,55 \text{ €, un impreso } 0,75 \text{ € y una carpeta } 0,30 \text{ €}$$

29. Canarias. Julio 2018. PRUEBA A. 4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

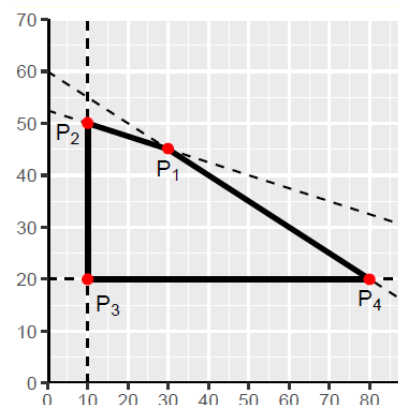
- a) Formular el correspondiente problema y representar la región factible.
b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

Solución: a) Llamamos x al nº de declaraciones que realiza a personas físicas e y al nº que realiza a pymes.

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos que vienen dados por $I(x, y) = 120x + 300y$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y \leq 360 \\ x + 4y \leq 210 \\ x \geq 10 \\ y \geq 20 \end{array} \right\}$$

b) Por tanto el máximo nivel de ingresos se alcanza en P_1 , es decir, cuando se hacen 45 declaraciones para pymes y 30 declaraciones a particulares. Dichos ingresos ascienden en ese caso a 17.100 €



30. Canarias. Julio 2018. PRUEBA B. 4. Un kiosco vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosco la semana pasada?

Solución: a) Llamamos x al total de libros vendidos, y al total de periódicos y z al total de revistas. El

$$\left. \begin{array}{l} \text{sistema de ecuaciones es entonces } y + 5z + 12x = 1500 \\ \frac{y}{z} = \frac{10}{3} \\ 12x = \frac{y + 5z}{4} \end{array} \right\} \text{ b) 480 periódicos, 144 revistas y 25 libros.}$$

31. Canarias. Junio 2018. PRUEBA A. 4. En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80% del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

Solución: Llamamos x al número de estudiantes, y al número de empleados y z al de personas sin

$$\left. \begin{array}{l} \text{ocupación. } x + y + z = 288 \\ z = 0.8(x + y) \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \text{ b) 100 estudiantes, 60 empleados y 128 sin ocupación.}$$

32. Canarias. Junio 2018. PRUEBA B. 4. La encargada de una floristería ha de hacer un pedido semanal de plantas de interior y plantas de exterior. Al proveedor le paga 1€ por cada planta de interior y 2€ por cada planta de exterior. Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido le supone unos costes, que son de 0,60€ por cada planta de interior y 0,80€ por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48€ de costos de transporte por cada pedido semanal. Por otro lado, la encargada recibe una prima de 0,60€ por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50€ por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido.

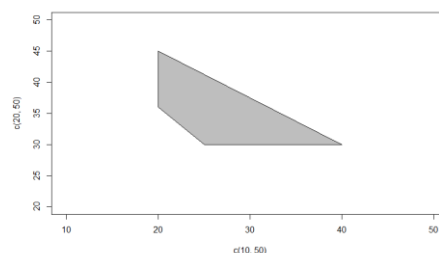
a) Si quiere minimizar el precio que le tiene que pagar al proveedor, formular el correspondiente problema. Dibujar la región factible.

b) Resolver el problema planteado en a) calculando también cuánto le paga al proveedor y cuánto es el gasto de transporte.

Solución: a) Llamamos x al número de plantas de interior, y al número de plantas de exterior. La función objetivo es $f(x, y) = x + 2y$ que deseamos minimizar. Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \geq 30 \\ 0.6x + 0.8y \leq 48 \\ 0.6x + 0.5y \geq 30 \end{array} \right\} \text{ b) Debe pedir 25 plantas de interior y 30 de}$$

exterior siendo el pago al proveedor de 85 € y el gasto de transporte de 39 €.



33. Canarias. Julio 2017. PRUEBA A. 4. Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos. El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades. Además, por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos marineros de cada nacionalidad hay en el barco?

Solución: a) Sea c el número de marineros chinos, f el número de filipinos y g el número de griegos el

$$\text{sistema es } \left. \begin{array}{l} c + f + g = 30 \\ 2c + 2f - g = 0 \\ 3c - 2f = 0 \end{array} \right\} \text{ b) 4 chinos, 6 filipinos y 20 griegos.}$$

34. Canarias. Julio 2017. PRUEBA B. 4. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla y electrónica en dos calidades distintas: calidad A, cuya carcasa es de plástico y calidad B cuya carcasa es de aluminio. El coste de producción unitario es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad B. Asimismo los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase B. Si, para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcassas de aluminio.

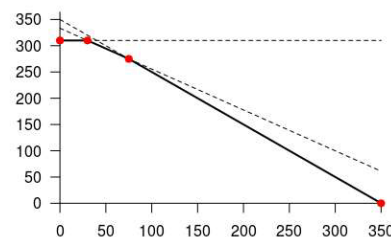
a) Plantear el problema que determina el número de móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

Solución: a) Llamamos x al número de móviles de calidad A e y al número de móviles de calidad B que fabrica la empresa. El beneficio de la venta es $B(x, y) = 30x + 60y$. Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 310 \\ 70x + 90y \leq 30000 \\ x + y \leq 350 \end{array} \right\} \text{ b) El beneficio máximo es de 19500 € y se obtiene}$$

produciendo 30 teléfonos de clase A y 310 de clase B



35. Canarias. Junio 2017. PRUEBA A. 4. En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25% del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

Solución: a) Llamamos “ p ” a la inversión en proyectos, “ f ” a gastos de funcionamiento, “ s ” a gastos

$$\text{sociales. } \left. \begin{array}{l} p + f + s = 125 \\ p = 0.5625(f + s) \\ \frac{s}{f} = \frac{9}{11} \end{array} \right\} \text{ b) 45 millones a proyectos, 44 a funcionamiento y 36 a gastos sociales.}$$

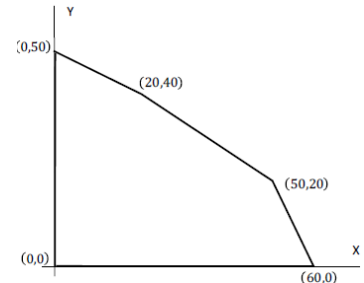
36. Canarias. Junio 2017. PRUEBA B. 4. Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4

- bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:
- Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.
 - Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

Solución: a) Llamamos “x” al número de cajas azules e “y” al número de cajas rojas. La función a maximizar es $R(x,y) = 8x + 10y$. Las

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y \leq 320 \\ 4x + 2y \leq 240 \\ 2x + 4y \leq 200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{restricciones son} \\ \text{b) La máxima recaudación es de 600 € y} \end{array}$$

se consigue con 50 cajas azules y 20 rojas



CANTABRIA

**1. Cantabria. Extraordinaria 2025. Apartado 1 [3 puntos]. Opción 1.**

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.

Tarea 1.1B [2 PUNTOS]. Para $a = 1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX = 2N$$

Solución: 1.1A. La matriz M tiene inversa para cualquier valor de “ a ” distinto de 2 y 3.

$$1.1 B. X = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Cantabria. Extraordinaria 2025. Apartado 1 [3 puntos]. Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

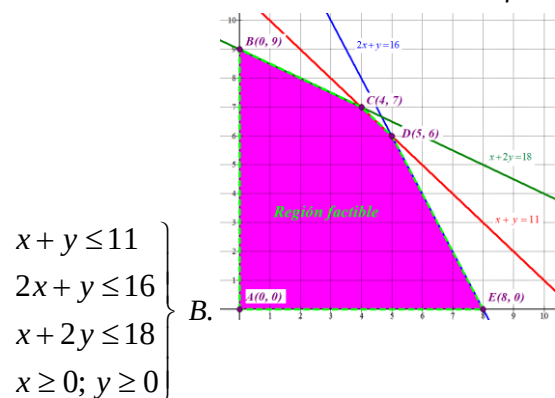
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

Solución: A. Deseamos maximizar el beneficio $B(x, y) = 1.5x + 2y$. Las restricciones son:



C. El máximo beneficio se obtiene fabricando 4 sobaos y

7 quesadas.. D. El máximo beneficio es de 20 €.

3. Cantabria. Ordinaria 2025. Apartado 1 [3 puntos]. Opción 1.

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 33 \\ 4x + 6y + 9z = 171 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solución: A.} \\ \text{B. El sistema es compatible determinado (una única solución).} \end{array}$$

C. Se vendieron 21 lotes Clásicos, 7 lotes Selección y 5 lotes Premium.

4. Cantabria. Ordinaria 2025. Apartado 1 [3 puntos]. Opción 2.

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tupper. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tupper fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

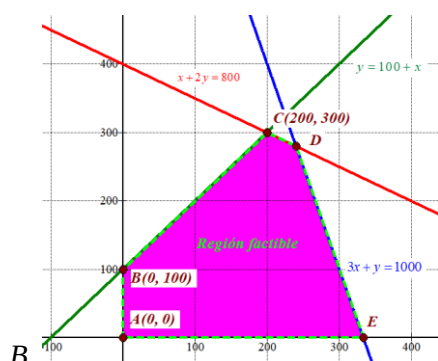
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 3x + y \leq 1000 \\ y \leq 100 + x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solución: A. Deseamos maximizar los ingresos } I(x, y) = 5x + 7y. \text{ Las restricciones son:} \end{array}$$



B. Los máximos ingresos se obtienen fabricando 240 botellas de plástico y 280 tupper. D. Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 3160 €.

5. Cantabria. Extraordinaria 2024. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de

cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución: A.
$$\begin{cases} 5x + 6y + 2z = 500 \\ 2y - z = 0 \\ x + y = 70 \end{cases}$$
 B. El sistema es compatible determinado (una única solución). C. Deben

comprarse 40 banderas, 30 camisetas y 60 gorras si se pretende agotar el presupuesto disponible.

6. Cantabria. Extraordinaria 2024. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

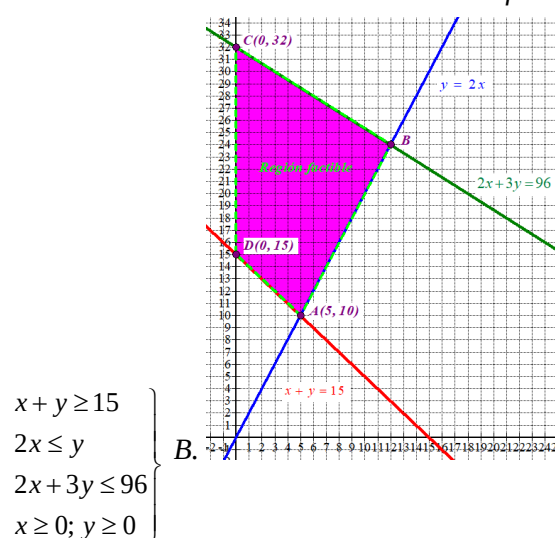
A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: A. Deseamos maximizar el beneficio $B(x, y) = 50x + 70y$. Las restricciones son:



B. C. Se deben cocinar 12 menús A y 24 menús B para

maximizar los beneficios. D. El máximo beneficio es de 2280 €.

7. Cantabria. Ordinaria 2024. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

- A.** [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

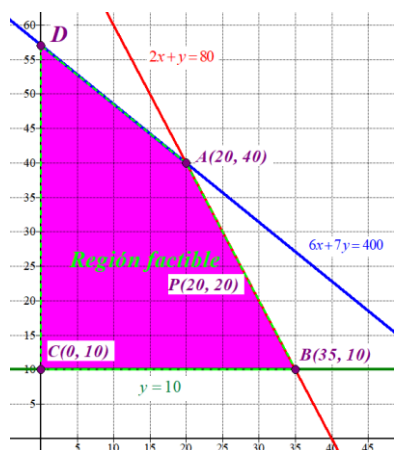
Solución: A.
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{B. El sistema es compatible determinado (una única solución).} \\ \text{C. El precio de 1 kilo de tierra es 10 €, el kilo de piedras a 20 € y el de semillas a 60 €} \end{array}$$

8. Cantabria. Ordinaria 2024. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: A. Deseamos maximizar el beneficio $B(x, y) = 5x + 4y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$


- B.** Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios. **D.** El máximo beneficio es de 260 €.

9. Cantabria. Extraordinaria 2023. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

- A.** [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.
- B.** [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 244 \\ \text{Solución: A. } x = 4\left(\frac{y}{2} + 0.4 \cdot z\right) \\ x = 8z \end{array} \right\} \text{ B. La empresa tiene 160 operarios, 64 supervisores y 20 gerentes.}$$

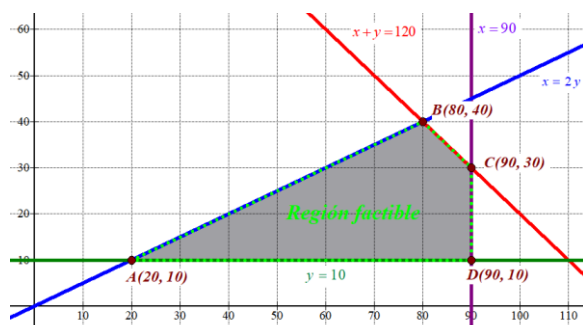
10. Cantabria. Extraordinaria 2023. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

- A.** [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
- B.** [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
- C.** [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?
- D.** [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: A. La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 25000x + 40000y. \text{ Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 90; y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



- B.** **C.** Se deben comprar 80 utilitarios y 40 deportivos para obtener un beneficio máximo. **D.** 3.600.000 euros

11. Cantabria. Ordinaria 2023. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierta día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

- A.** [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.
- B.** [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 180 \\ \text{Solución: A. } (25x + 50y + 100z) \cdot 4 = 29200 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \text{ B. Se vendieron 120 sacos de 25 kg, 34 sacos de 50 kg y 26 sacos de 100 kg.}$$

12. Cantabria. Ordinaria 2023. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m³ anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m³ de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m³ anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

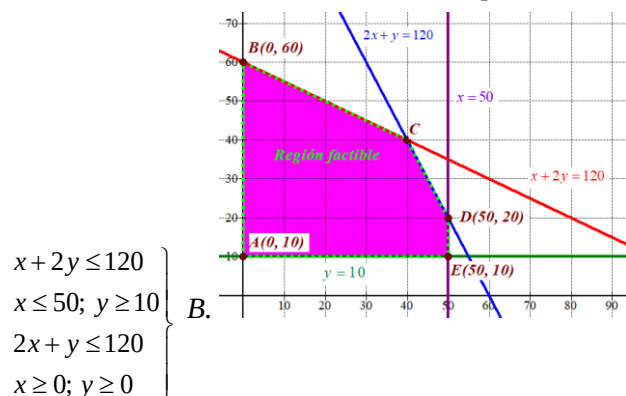
A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

Solución: A. Deseamos maximizar es la producción $P(x, y) = 450x + 600y$. Las restricciones son:



C. Se deben cultivar 40 hectáreas de hortalizas y 40

de frutales para maximizar la producción anual. **D.** La máxima producción es de 42000 kg.

13. Cantabria. Extraordinaria 2022. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20 €. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 €. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 €, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x + y = 4 \end{array} \right\} \text{ B. Un helado cuesta 3 €, un granizado 1 € y una horchata 2 €}.$$

14. Cantabria. Extraordinaria 2022. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350 €, y por cada frisona uno de 500 €. Tiene claro que no comprará más de 50

pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

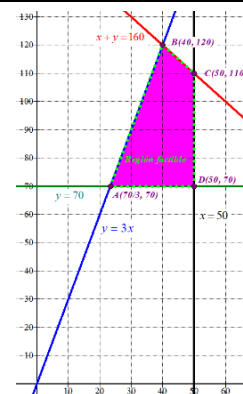
Solución: A. La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios:

$$B(x, y) = 350x + 500y. \text{ Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 160 \\ y \leq 3x \\ x \leq 50; y \geq 70 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

B. Los vértices son $A(70/3, 70)$; $B(40, 120)$; $C(50, 110)$ y $D(50, 70)$.

C. Debe comprar 40 vacas pardas y 120 frisonas.

D. El máximo beneficio es de 74 000 €.



15. Cantabria. Ordinaria 2022. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

A. [1 PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

B. [1,5 PUNTOS] Resuélvalo.

$$\left. \begin{array}{l} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array} \right\} \text{ B. En el suministrador A el cemento cuesta a 8 €/kg, el ladrillo a } 12 \text{ €/kg y el azulejo a 40 €/kg.}$$

16. Cantabria. Ordinaria 2022. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 44 €. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 €.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

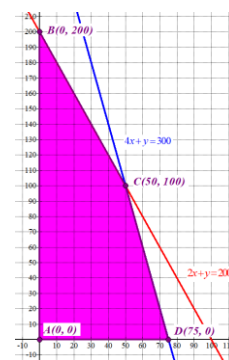
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: A. La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como: $B(x, y) = 44x + 16y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ 4x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

B. Los vértices son $A(0, 0)$; $B(0, 200)$; $C(50, 100)$ y $D(75, 0)$.

C. El máximo beneficio se obtiene haciendo 50 packs A y 100 packs B.



17. Cantabria. Extraordinaria 2021. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.

El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Solución: A. Llamamos “x” al tiempo empleado por Cristina, “y” al tiempo empleado por Juan y “z” al tiempo empleado por Pedro.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x - 1.4y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

B. Como el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

C. Cristina dedica 7 horas, Juan 5 horas y Pedro 6 horas

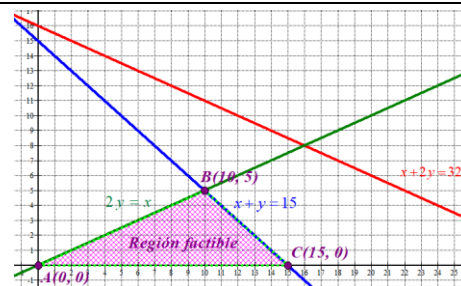
18. Cantabria. Extraordinaria 2021. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Solución: Llamamos “x” al número de lotes A, “y” al número de

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 32 \\ x + y \leq 15 \\ 2y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Deben prepararse y venderse 10 lotes del tipo A y 5 del tipo B para conseguir unos máximos ingresos de 1500 €



19. Cantabria. Ordinaria 2021. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 €; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 €.

A. [1 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

B. [1 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,25 PUNTOS] Resolverlo.

D. [0,25 PUNTOS] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución: A. Llamamos a = tarifa de adulto, n = tarifa de niño, j = tarifa de jubilado.

$$\left. \begin{array}{l} a - 5n + j = 0 \\ 5a + 3n + 3j = 222 \\ 3a + 2n + 4j = 168 \end{array} \right\}$$

B. El rango de la matriz A es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado. C. La tarifa de adulto es 30 €, la de niño es 9 € y la de jubilado es 15 €.

20. Cantabria. Ordinaria 2021. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

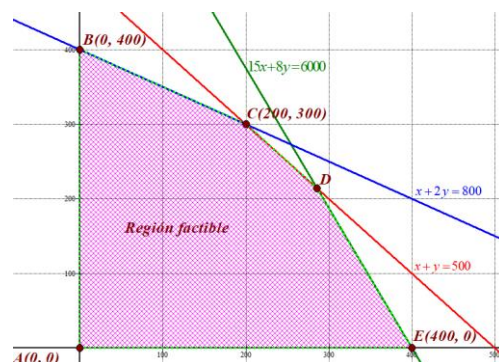
Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución: Llamamos x = kilogramos de A, y = kilogramos de B. La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como $B(x, y) = 5x + 7y$.

Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{El máximo beneficio}$$

es de 3100 € y se produce en el vértice C (200, 300) que significa vender 200 kilos de producto A y 300 del producto B



21. Cantabria. Extraordinaria 2020. BLOQUE 1. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

A. Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

- [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
- [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
- [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Solución:

Llamemos " x " al número de archivadores, " y " al número de cuadernos y " z " al número de carpetas.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 600 \\ y = \frac{z}{4} \\ x + z = 165 \end{array} \right\} \text{Es compatible determinado. Tiene una solución única.}$$

La solución es 45 archivadores, 30 cuadernos y 120 carpetas.

22. Cantabria. Extraordinaria 2020. BLOQUE 1. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones

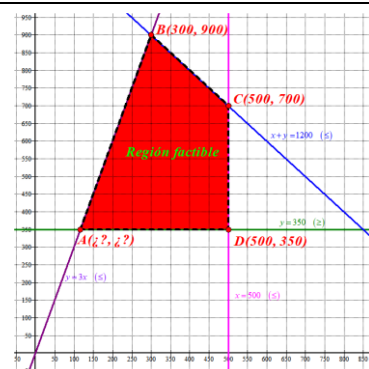
B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución: Llamamos x e y al número de acciones de A y de B.

La función objetivo es el beneficio obtenido: $B(x, y) = 0,2x + 0,08y$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

Debe comprar 500 acciones clase A y 700 de clase B para obtener un máximo beneficio de 156 €.



23. Cantabria. Ordinaria 2020. BLOQUE 1. Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.

Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.

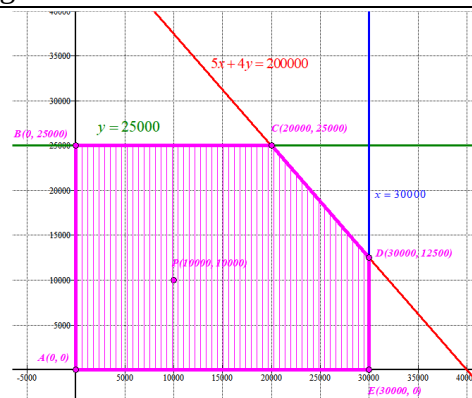
Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:

La función a maximizar son los ingresos $f(x, y) = 1,5x + 1,75y$.

$$\left. \begin{array}{l} 0,5x + 0,4y \leq 20000 \\ 0,5x \leq 15000 \\ 0,6y \leq 15000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

Los máximos ingresos cumpliendo las restricciones son de 73 750 € y se consiguen en el punto $C(20000, 25000)$, es decir, con 20 000 litros de A y 25 000 litros de B.



24. Cantabria. Ordinaria 2020. BLOQUE 1. Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Solución:

- $$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 750 \\ A. \ a + c = 2b \\ 10a + 8b + 11c = 7200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B. \text{ El sistema tiene solución única. Es compatible determinado.} \\ C. \text{ Se han vendido 300 televisores del modelo A, 250 del modelo B y 200 del modelo C.} \end{array}$$

25. Cantabria. Julio 2019. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\begin{cases} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

Solución: Si $k \neq 25$ el sistema no tiene solución. Si $k = 25$ el sistema tiene una única solución. Si $k = 25$ la solución es $x = 10$ cajas del tipo A y $y = 15$ cajas del tipo B.

26. Cantabria. julio 2019. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos.

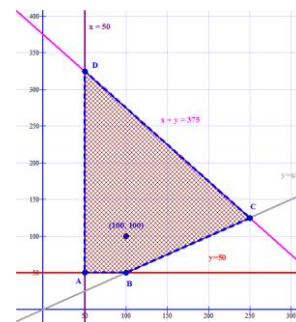
¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 50 \\ \text{Las restricciones son } y \geq 50 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \leq 375 \end{array} \right\}$$

Debemos maximizar la función ingresos $I(x, y) = 30x + 20y$

El máximo ingreso se obtiene con 250 estampados del tipo A y 125 del tipo B.

**27. Cantabria. Junio 2019. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1**

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $B X B = B (X+A)$.

Solución: A1. $\left. \begin{array}{l} 325 = 5x + 10y + 15z \\ x + y + z = 35 \\ x + y = 6z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A2. Este sistema es compatible determinado.} \end{array}$

A3. La solución es $x = 10$, $y = 20$, $z = 5$ A4. La factura será de 265 €.

B. Suponemos B una matriz invertible, siendo B^{-1} su matriz inversa, se obtendría $X = A(B-I)^{-1}$. Hemos supuesto también que la matriz $(B-I)$ es invertible.

28. Cantabria. Junio 2019. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1.

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = \frac{5a}{2} \\ 5x + 2y = a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a , los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

Solución:

A1. Si $a \neq 2$ y $a \neq 3$ el sistema no tiene solución. Si $a = 2$ o $a = 3$ el sistema tiene una única solución.

A2. Si $a = 2$ la solución es $x = \frac{2}{11}$; $y = \frac{17}{11}$. Si $a = 3$ la solución es $x = \frac{12}{11}$; $y = \frac{39}{22}$

29. Cantabria. Septiembre 2018. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1.

A. [1 PUNTO] Calcular los valores del parámetro a para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & -3 \\ -1 & a+3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa.

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, determinar para qué valores del parámetro a , las siguientes matrices tienen inversa:

B1. [0,25 PUNTOS] A^2

B2. [0,25 PUNTOS] La traspuesta de A : A^t

C. [2 PUNTOS] Consideremos la matriz del apartado A para $a = 1$, y las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $A^{-1}XB + C = \text{Id}$.

Solución:

A. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de -4 .

B1. A^2 tiene inversa si a es distinto de 0 y de -4 .

B2. La matriz traspuesta tendrá inversa cuando a sea distinto de 0 y de -4 .

C.
$$X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{11}{6} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

30. Cantabria. Septiembre 2018. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1.

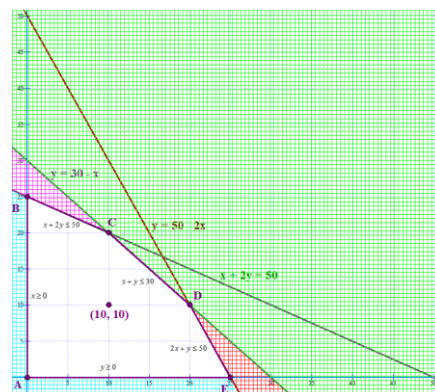
Una asociación de vecinos ha programado una excursión en la que se han inscrito 540 personas. La compañía con la que han contratado el viaje dispone de 12 autocares de 60 plazas y de 9 de 40 plazas, pero en las fechas previstas para el viaje solo se podrá contar con 10 conductores. Por otro lado, alquilar un autocar grande supone 100 euros; y uno pequeño, 65 euros. ¿Cuántos autocares de cada tipo deberán alquilarse para minimizar los costes?

Solución:

El coste es $C(x, y) = 100x + 65y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ y \leq 9 \\ x + y \leq 10 \\ 60x + 40y \geq 540 \end{array} \right\}$$

El coste mínimo de 895 € se consigue alquilando 7 autobuses de 60 plazas y 3 de 40 plazas.

**31. Cantabria. Junio 2018. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1.**

A. [2,5 PUNTOS] Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

$$\begin{array}{ll} \text{B1. [0,25 PUNTOS]} \begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} & \text{B2. [0,25 PUNTOS]} \begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \end{array}$$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado B.

Solución: A. Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3. Para $a = -1$ o $a = 2$ el rango es 2.

B1. Es incompatible. B2. Tiene solución única. C. La solución del apartado B2 es $x = -\frac{8}{3}$; $y = -\frac{2}{3}$

32. Cantabria. Junio 2018. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1.

Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

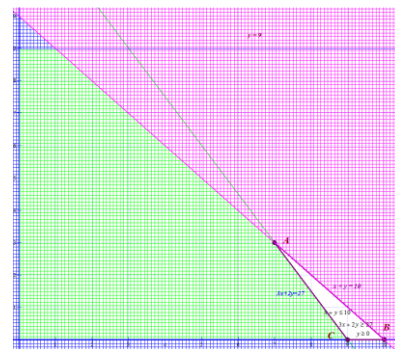
Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Solución:

La función beneficio es $B(x, y) = 15x + 25y$.

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2,5x + 5y \leq 125 \\ x + 0,5y \leq 25 \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$$



El beneficio máximo de 650 € se consigue con 10 docenas de tartas de hojaldre y 20 de chocolate.

33. Cantabria. Septiembre 2017. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1.

A. [3 PUNTOS] Resolver la ecuación matricial $(A+X)B = C$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ con determinante $|M| = 8$, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

B2. [0,25 PUNTOS] $\begin{vmatrix} 4a & -3b & c \\ 4d & -3e & f \\ 4g & -3h & i \end{vmatrix}$

Solución: A. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ B1. 8 B2. -96

34. Cantabria. Septiembre 2017. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1.

Considérese una pequeña empresa dedicada a la fabricación de mobiliario. En concreto, produce dos modelos de armario: A y B. Se dispone de 12 carpinteros para ensamblar los muebles, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias.

El tiempo de ensamblado de cada tipo de mueble y los beneficios obtenidos por la venta de cada unidad se muestran en la tabla adjunta:

	Tiempo de ensamblado	Beneficios
Una unidad del modelo A	3 horas	70 euros
Una unidad del modelo B	6 horas	160 euros

La producción diaria total debe ser de 15 unidades como mínimo, con la condición de que el número de unidades del modelo B debe ser como máximo la mitad del número de muebles del modelo A.

Si la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos armarios de cada modelo deben producirse al día para obtener los máximos beneficios diarios?

Solución:

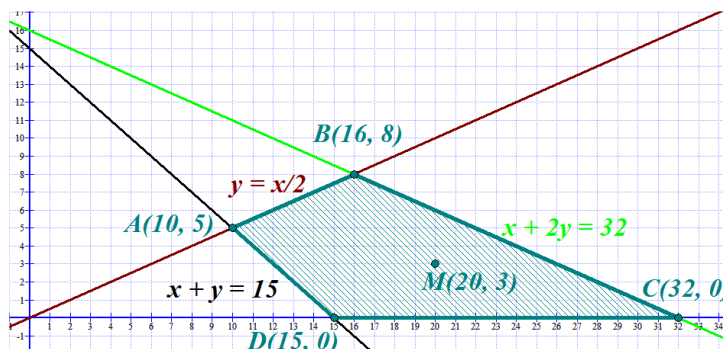
La función que deseamos maximizar es el beneficio $f(x, y) = 70x + 160y$.

Reuniendo todas las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 15 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ 3x + 6y \leq 96 \end{array} \right.$$

El máximo se alcanza en el punto $B(16, 8)$.

Es decir, los máximos beneficios diarios se obtienen fabricando 16 armarios del modelo A y 8 del modelo B, siendo ese beneficio máximo de 2400 €.



35. Cantabria. Junio 2017. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1.

Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja del tipo A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

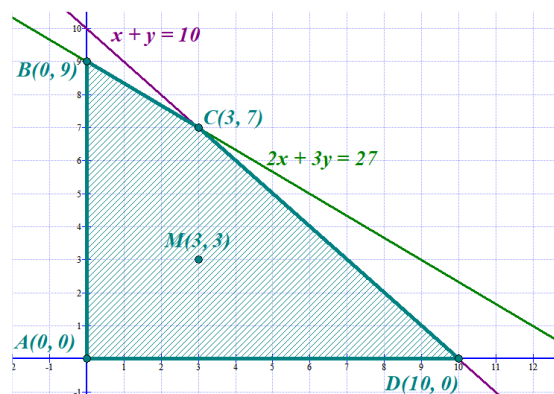
Solución:

La función a maximizar es $f(x, y) = 7,5x + 8,5y$.

Las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 5y \leq 50 \\ 2x + 3y \leq 27 \end{array} \right.$$

Los máximos ingresos se obtienen en el punto $C(3, 7)$ que significa hacer 3 cajas tipo A y 7 del tipo B.



36. Cantabria. Junio 2017. OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2. Ejercicio 1.

A. [3 PUNTOS] Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten k euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y = 480 \\ 4x + 6y = k \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro k), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución: A. Para $k \neq 840$ No tiene solución.

Para $k = 840$ Tiene una única solución. En este caso el empleado puede acabar 120 unidades del primer modelo y 60 del segundo.

B. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada A/B del apartado anterior (en el caso 2) y ya hemos

comprobado que su determinante es nulo, por lo que no tiene inversa.

CASTILLA LA MANCHA



1. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2025. Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

Solución: a) $x + y + z = 25$

$140x + 130y + 160z = 3610$

$y = \frac{x+z}{4}$

b) En el Parador se alojaron ayer 12 italianos, 5 portugueses y

8 japoneses.

2. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2025. Ejercicio 3.-

Apartado a) ...

Apartado b) ...

b.1) ...

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2025. Ejercicio 4.- Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

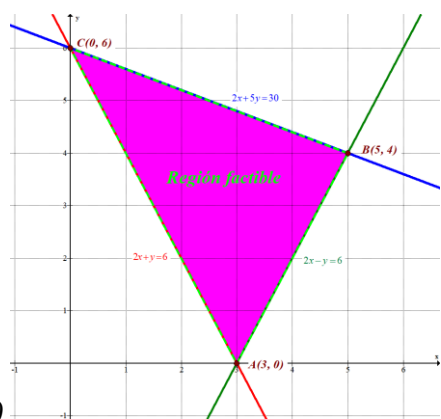
“Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$ ”

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? Razona tu respuesta. **(1.25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3,0)? Razona tu respuesta. **(0.75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? (0.5 puntos) **(0.5 puntos)**



Solución: a.1) La respuesta de Laura no es correcta pues el punto (1, 2) no cumple todas las restricciones. a.2) Si es cierto, aunque no es el único punto de la región que cumple las restricciones y donde se alcanza el valor mínimo. a.3) 16.

4. Castilla la Mancha. Ordinaria 2025. Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Solución: En el examen de Historia Lucía ha obtenido 1.4 puntos en la primera pregunta, 1 punto en la segunda y 4.8 en la tercera.

5. Castilla la Mancha. Ordinaria 2025. Ejercicio 3.-

Apartado a) ...

Apartado b) ...

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Solución: $X = (AB - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

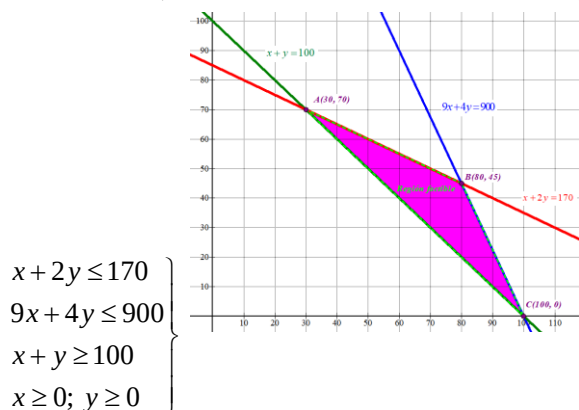
6. Castilla la Mancha. Ordinaria 2025. Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

Solución: a.1) Deseamos maximizar dichos beneficios $B(x, y) = 20x + 17y$. Las restricciones son:



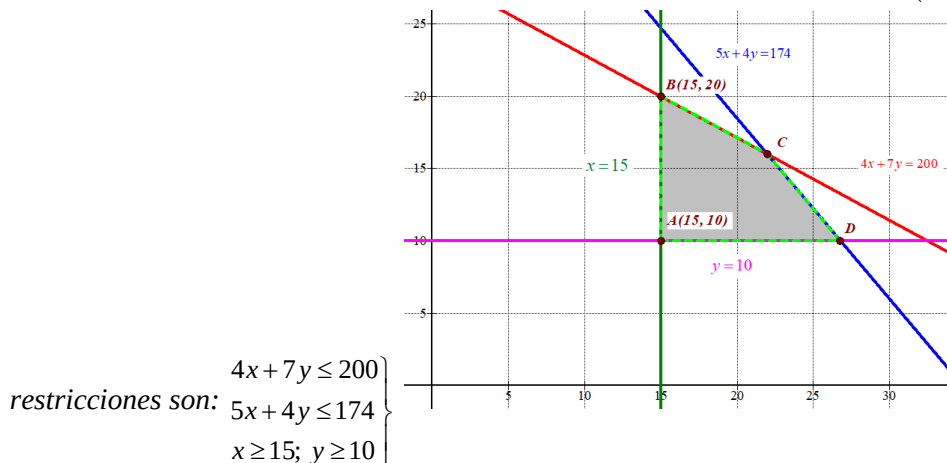
a.2) Se deben elaborar 80 paquetes tipo A y 45

paquetes tipo B para obtener un beneficio máximo de 2365 €.

7. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2024. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 € en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 €, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 € siendo el beneficio de 30 €. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088 € en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución: a) Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 45x + 30y$. Las



b) Se deben fabricar 26.8

kilos de plancha de acero y 10 kilos de plancha de aluminio para obtener un beneficio máximo de 1508 €.

8. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2024. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3 . El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 156 \\ \text{Solución: a) } z = 2x - 2y \\ 3y = z \end{array} \right\} \text{ b) En el embalse de Torre de Abraham hay } 60 \text{ hm}^3, \text{ en el de Gasset hay } 24 \text{ hm}^3 \text{ y en el de Azután hay } 72 \text{ hm}^3.$$

9. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2024. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 72 \\ \text{Solución: a) } x + z = y \\ 3x = 3z + y \end{array} \right\} \text{ b) Se han inscrito 24 bebés con el nombre de Alba, 36 con el nombre de Pablo y 12 con el nombre de David.}$$

10. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2024. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

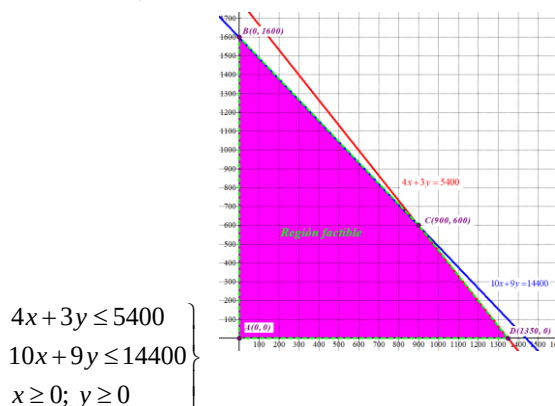
- a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
 b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

$$\text{Solución: a) } A^2 = 2A - I = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \text{ b) } A^4 = 4A^2 - 4A + I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

11. Castilla la Mancha. Ordinaria 2024. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m² de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m² de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10 € la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m² de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50 € la unidad.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
 b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución: a) Deseamos maximizar dichos beneficios $B(x, y) = 2.1x + 1.5y$. Las restricciones son:



$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 5400 \\ 10x + 9y \leq 14400 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Se deben fabricar 1350 carpetas tamaño folio y 0

carpetas tamaño cuartilla para obtener un beneficio máximo de 2835 €.

12. Castilla la Mancha. Ordinaria 2024. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z = 2y - 6 \end{array} \right\}$$

b) Se repartieron 6 medallas de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

13. Castilla la Mancha. Ordinaria 2024. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ -x - y + 19z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Inés recibió 32 votos, Nerea recibió 25 y 3 votos fueron nulos.

14. Castilla la Mancha. Ordinaria 2024. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$ (0.75 puntos)

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$? (1.25 puntos)

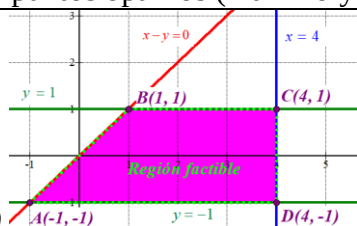
$$\text{Solución: a) } C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ b) No son iguales.}$$

15. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2023. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)



Solución: a) $A(-1, -1)$ $B(1, 1)$ $C(4, 1)$ $D(4, -1)$ b) El máximo se alcanza en el vértice $A(-1, -1)$ con un valor de 16. El mínimo se alcanza en el vértice $C(4, 1)$ con un valor de 1.

16. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2023. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución: a)
$$\begin{cases} x + y + z = 70000 \\ z = x + y \\ z - y = 3(y - x) \end{cases}$$
 b) Se vendieron 15.000 discos del tipo I, 20.000 del tipo II y 35.000 del tipo III.

17. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2023. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10% de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al número de entradas para jubilados, “y” al número de entradas para adultos y “z” al número de entradas para niños.

$$\begin{cases} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ x + y - 10z = 0 \end{cases}$$

b) Se han vendido 120 entradas a jubilados, 480 a adultos y 60 a niños.

18. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2023. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4. Dadas las

$$\text{matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

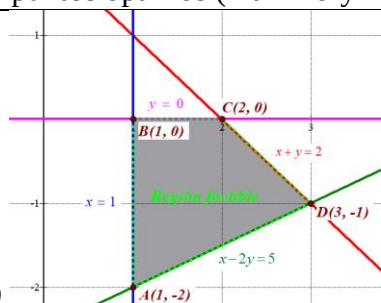
Solución: a) $A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{3}B^2 - I = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}$ c) El producto no se puede realizar.

19. Castilla la Mancha. Ordinaria 2023. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)



Solución: a) b) El máximo se alcanza en el vértice $C(2, 0)$ con un valor de 5. El mínimo se alcanza en el vértice $A(1, -2)$ con un valor de -9.

20. Castilla la Mancha. Ordinaria 2023. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40% de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al número de cuadros de arte urbano, “y” al número de cuadros de arte

$$\left. \begin{array}{l} \text{abstracto y “z” al número de cuadros de grafiti.} \\ x + y + z = 110 \\ x + y = 70 \\ 2y = 3z \end{array} \right\} \text{ b) Hay expuestos 10 cuadros de arte}$$

urbano, 60 cuadros de arte abstracto y 40 cuadros de grafiti.

21. Castilla la Mancha. Ordinaria 2023. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quintuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al número de botellas de vino blanco, “y” al número de botellas de vino

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ 2x = 5z \\ 2x = y + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rosado y “z” al número de botellas de vino tinto.} \\ \text{b) El pedido lleva 15 botellas de vino} \end{array}$$

blanco, 29 de vino rosado y 6 de vino tinto.

22. Castilla la Mancha. Ordinaria 2023. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4.

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Solución: a) Las matrices M y N conmutan. b) $X = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$

23. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2022. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1.

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 8x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)



Solución: a) Los vértices de la región factible son $A(0, 1)$, $B(0, 3)$, $C\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y

$D(2, 0)$. b) El máximo se produce en el vértice $D(2, 0)$ y alcanza un valor de 16.

El mínimo se produce en el vértice $A(0, 1)$ y alcanza un valor de 3.

24. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2022. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2.

El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15 Goyas. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los premios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 15 \\ \text{Solución: a) } x - 3z = -1 \\ z = \frac{3}{4}y \end{array} \right\} \quad \text{b) Isabel ha recibido 8 premios Goya, Carmen 4 y Enma 3.}$$

25. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2022. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3.

Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851000 euros. El coche deportivo vale 2000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos. (0.75 puntos)
 b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 6y + 3z = 851000 \\ \text{Solución: a) } x = y + 2000 \\ 5x = 6z + 13000 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{b) Un coche deportivo cuesta 47000 €, uno familiar 45000 y un} \\ \text{monovolumen 37000 €} \end{array}$$

26. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2022. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$. (1.5 puntos)
 b) Calcula $-\frac{1}{2}A - 2B^T + C$. (0.5 puntos)

$$\text{Solución: a) } X = \begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix} \quad \text{b) } -\frac{1}{2}A - 2B^T + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

27. Castilla la Mancha. Ordinaria 2022. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1.

Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
 b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución: a) La función objetivo es el beneficio que queremos maximizar: $B(x, y) = 28x + 30y$. Las

$$\text{restricciones son: } \left. \begin{array}{l} 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \\ x + y \leq 1200 \end{array} \right\} . \quad \text{b) Vendiendo 600 zapatillas de hombre y otras 600 de mujer se}$$

obtiene un beneficio máximo de 34800 €.

28. Castilla la Mancha. Ordinaria 2022. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2.

La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\text{Solución: a) } \left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 6z = 51 \\ x = y + 1 \\ y = z - 0.5 \end{array} \right\} \quad \text{b) Cada bombón de chocolate negro cuesta 2.5 €, cada uno de}$$

chocolate con leche cuesta 1.5 € y cada uno de chocolate blanco cuesta 2 €.

29. Castilla la Mancha. Ordinaria 2022. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 3.

En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

$$\text{Solución: a) } \left. \begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = \frac{z}{4} \\ x + y + z = 115 \end{array} \right\} \quad \text{b) La sección de humor dura 14 minutos, la de magia 9 y la de noticias 92.}$$

30. Castilla la Mancha. Ordinaria 2022. Sección 2 (3 puntos) Bloque 2. 4.

a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación

$$X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} E^T \quad (1 \text{ punto})$$

Solución: a) El producto de matrices no es conmutativo, se puede cumplir en casos particulares.

$$\text{b) } m = 2 \text{ y } p = 5 \quad \text{c) } X = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$$

31. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2021. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo

que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al precio de la mesa de gama baja, “y” al precio de la mesa de gama media y “z” al precio de la mesa de gama superior. El sistema es

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\} \text{ b) Los precios de las mesas}$$

son 200 € la de gama baja, 300 € la de gama media y 500 € la de gama superior.

32. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2021. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

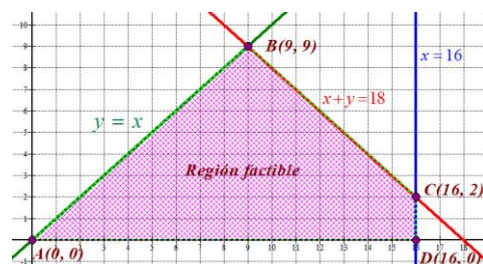
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” a las hectáreas dedicadas al aguacate e “y” a las hectáreas dedicadas al mango. Se desea maximizar la ganancia $G(x, y) = 10000x + 12000y$ b)

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 18 \\ x \leq 16 \\ y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ c) Hay que plantar 9 hectáreas de aguacate y}$$

otras 9 de mangos para obtener un beneficio máximo, siendo este de 198.000 €



33. Castilla la Mancha. Ordinaria 2021. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 1. En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x, y) = 12x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x \geq y$$

$$x + y \geq 0$$

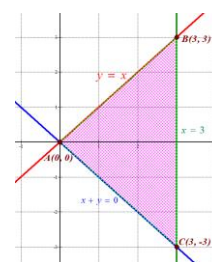
$$x \leq 3$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

Solución: Las coordenadas de los vértices son: A(0, 0), B(3, 3) y C(3, -3). El valor máximo de $f(x, y) = 12x - 2y$ es 42 y se obtiene en el vértice C(3, -3)



34. Castilla la Mancha. Ordinaria 2021. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Solución: a) Llamamos “x” al número de personas que elige la opción A, “y” al número de personas que

$$\left. \begin{array}{l} \text{elige la opción B y “z” al número de personas que elige la opción C.} \\ x + y + z = 120 \\ x = 3(y + z) \\ z = 2y \end{array} \right\}$$

b) 90 personas eligen la opción A, 10 eligen la B y 20 la opción C

35. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2020. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1 Ejercicio 1. Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{array} \right\} \quad \text{b) Los precios son de 200 € el teléfono de precio reducido, 300 € el de precio medio y 500 € el de precio superior.}$$

36. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2020. Sección 1 (3 puntos) Bloque 1. 2. En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Solución:

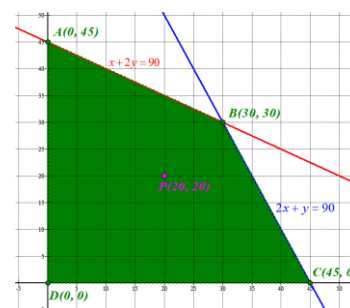
a) $B(x, y) = 5x + 4y$

b)

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 90 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

c) El beneficio máximo se produce en el vértice B(30, 30).

Vendiendo 30 tartas de cada tipo se obtiene un beneficio máximo de 270 €.



37. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2020. Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1 Ejercicio 5. La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de

1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50% de votos más que C.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ \text{Solución: a) } x = 2(y + z) \\ y = 1,5z \end{array} \right\} \text{ b) La película A recibe 800 votos, la B 240 y la C recibe 160 votos.}$$

38. Castilla la Mancha. Extraordinaria 2020. Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1 Ejercicio 6.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - B)^2$. (0.75 pts)

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A - B)^2$? (0.25 pts)

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$? (0.5 pts)

$$\text{Solución: a) } (A - B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \text{ b) } |(A - B)^2| \neq 0 \text{ y tiene inversa. c) Se cumple cuando } AB = BA.$$

39. Castilla la Mancha. Ordinaria 2020. Sección 1 Bloque 2 Ejercicio 1.

Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ \text{Solución: a) } x - z = y \\ 3z = x \end{array} \right\} \text{ b) Se vendieron 15 botines, 10 botas de media caña y 5 de caña alta.}$$

40. Castilla la Mancha. Ordinaria 2020. Sección 1 Bloque 2. Ejercicio 2.

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 6x - 2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2; \quad x - y \leq 2; \quad y \leq 1; \quad x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 pts)

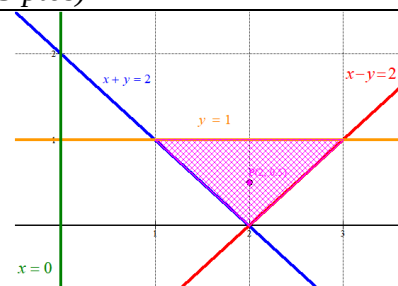
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 pts)

Solución:

Los vértices son A(2, 0), B(1, 1) y C(3, 1).

El valor máximo es 16 que se alcanza en el punto C(3, 1).

El valor mínimo es 4 que se alcanza en el punto B(1, 1).



41. Castilla la Mancha. Ordinaria 2020. Sección 3 Bloque 1 ejercicio 5.

Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

$$\left. \begin{array}{l} 1640 = 2.5x + 3.5y + 3z \\ y = z + 40 \\ y = 3x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solución: a) El sistema queda} \\ \text{b) Se venden 80 paquetes de tortitas de arroz con} \end{array}$$

espelta, 240 de tortitas con amapola y 200 con chía.

42. Castilla la Mancha. Ordinaria 2020. Sección 3 Bloque 1 Ejercicio 6.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A \cdot C - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ (0.75 ptos)

$$\text{Solución: a) } M = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) La matriz buscada es } X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

43. Castilla la Mancha. Julio 2019. Propuesta A. 1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuantos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

$$\left. \begin{array}{l} b + c + p = 40 \\ 2.75b + 3c + 2.5p = 111.5 \\ b + c = 3p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Solución: a) } \\ \text{b) Se vendieron 14 kg de judías blancas, 16 kg de judías canela y} \\ \text{10 kg de judías pintas} \end{array}$$

44. Castilla la Mancha. Julio 2019. Propuesta A. 2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1 , T_2). Disponen de 160 m² del tejido T_1 y 240 m² del tejido T_2 . Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m² de T_1 y 2 m² de T_2 , el conjunto del pantalón utiliza 1 m² de T_1 y 3 m² de T_2 . El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

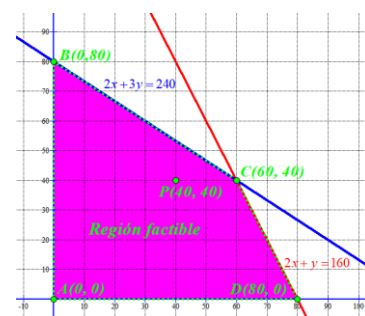
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 ptos)

Solución: a) Llamamos x = número de conjuntos chaqueta falda, y = número de conjuntos chaqueta pantalón. El beneficio viene expresado con la función $B(x, y) = 250x + 350y$

$$b) \begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

c) El beneficio máximo es de 29000 € y se obtienen en el punto $C(60, 40)$. Se maximizan los beneficios (29000 €) con la venta de 60 conjuntos chaqueta falda y 40 conjuntos chaqueta pantalón.



45. Castilla la Mancha. Julio 2019. Propuesta B. 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A \cdot B - C^T$. (0.75 pts)

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado. (0.75 pts)

Solución: a) $A \cdot B - C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$ b) Al ser su determinante nulo la matriz C no tiene matriz inversa. No

coinciden los valores de columnas de D^2 y de filas de B

46. Castilla la Mancha. Julio 2019. Propuesta B. 2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos x = precio de una sesión por la mañana, y = precio de una sesión al mediodía, z

$$\begin{cases} 150x + 30y + 270z = 15900 \\ z - x = \frac{y}{2} \\ y + z = 2x \end{cases} \quad b) \text{ Los precios de las sesiones son } 30 \text{ €}$$

por la mañana, 20 € por la tarde y 40 € por la tarde

47. Castilla la Mancha. Junio 2019. Propuesta A. 1. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande.

Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 pts)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos x = Peso de un saco pequeño, y = Peso de un saco mediano, z = Peso de un saco grande.

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 14y + 6z = 1800 \\ 2x + 3y = 2z \\ z = 4x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{b) El saco pequeño pesa 25 kilos, el mediano 50 kilos y el grande 100 kilos} \end{array}$$

48. Castilla la Mancha. Junio 2019. Propuesta A. 2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0$$

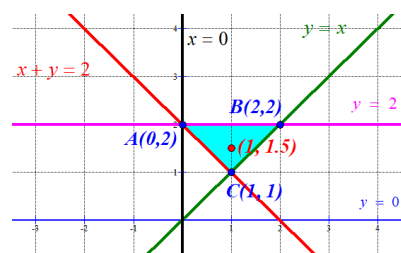
a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

Solución: Los vértices de la región factible son $A(0, 2)$, $B(2, 2)$ y $C(1, 1)$. c) El máximo valor de la función es 14 y se alcanza en el punto $B(2, 2)$.

El mínimo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto $C(1, 1)$



49. Castilla la Mancha. Junio 2019. Propuesta B. 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten. (1.5 ptos)

Solución: Los valores buscados son $a = 5$ y $b = 1$

50. Castilla la Mancha. Junio 2019. Propuesta B. 2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2 :

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución: a) Llamamos x = número de becas B_1 , y = número de becas B_2 , z = número de becas B_3 .

$$\left. \begin{array}{l} 400x + 160y + 200z = 43400 \\ x + y + z = 145 \\ x = 5y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{b) Se reparten 75 becas } B_1, 15 \text{ becas } B_2 \text{ y } 55 \text{ becas } B_3 \end{array}$$

51. Castilla la Mancha. Julio 2018. Propuesta A. 1. En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.

El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

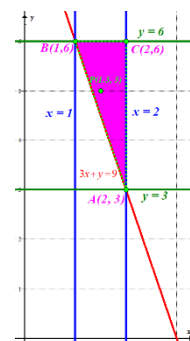
- b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 pts)
- c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 pts)

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de bicicletas de paseo montadas e “ y ” al número de bicicletas de montaña montadas. El objetivo es minimizar el tiempo necesario para fabricar las bicicletas. Buscamos minimizar la función

$$T(x, y) = x + 2y.$$

- $$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 6 \\ 3x + y \geq 9 \end{array} \right\} \text{ c) El tiempo mínimo son 8 horas que se alcanzan en el punto } A(2,3) \text{ que}$$

significa montar 2 bicicletas de paseo y 3 de montaña



52. Castilla la Mancha. Julio 2018. Propuesta A. 2. Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:

Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.

Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 pts)
- b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “ a ” al número de acciones de la empresa A, “ b ” a las de B y “ c ” a las de C.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 255 \\ 2a - b - c = 0 \\ 4a + 5b + 8c = 1400 \end{array} \right\} \text{ b) Hemos comprado 85 acciones de A, 100 de B y 70 de C.}$$

53. Castilla la Mancha. Julio 2018. Propuesta B. 1. a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide

que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$. (0.75 pts)

b) Calcula A^3 y A^4 . (0.75 pts)

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$ b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A$

54. Castilla la Mancha. Julio 2018. Propuesta B. 2. Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 pts)
- b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “a” al valor de una acción de la empresa A, “b” al de la empresa B y “c” al de $85a + 100b + 70c = 7000$

C. $c = 2a$ } b) Las acciones de la empresa A valen 20 € cada una, 25 € cada una de B
 $b = 5 + a$ }
 y 40 € cada una de C

55. Castilla la Mancha. Junio 2018. Propuesta A. 1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

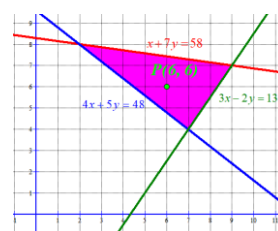
Minimizar la función $F = -x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 7y \leq 58 \quad ; \quad 4x + 5y \geq 48 \quad ; \quad 3x - 2y \leq 13$$

- Dibuja la región factible. (1 pto)
- Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)
- Indica la solución óptima del problema y su valor. (0.25 ptos)

Solución: Los vértices tienen coordenadas A(2,8), B(9,7) y C(7,4).

c) El valor mínimo de la función F se alcanza en el punto C(7,4)



56. Castilla la Mancha. Junio 2018. Propuesta A. 2. En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además, sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.

- Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. (1.5 ptos)
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución: a) Llamaremos b al número de botellas de blanco, t al número de botellas de tinto y r al

$$\left. \begin{array}{l} b + t - 3r = 0 \\ -b + t + r = 40 \\ b + t + r = 280 \end{array} \right\} \text{ b) Antonio tiene en su bodega 70}$$

botellas de vino rosado, 120 de vino blanco y 90 de vino tinto

57. Castilla la Mancha. Junio 2018. Propuesta B. 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- De los siguientes productos, explica razonadamente cuales pueden realizarse y cuáles no: $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot D$; $C \cdot D$. (0.5 ptos)
- De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada. (1 pto)

Solución: a) $A \cdot B$ y $A \cdot C$ si son posibles; $A \cdot D$ no es posible; $C \cdot D$ si es posible. b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$;

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

58. Castilla la Mancha. Junio 2018. Propuesta B. 2. Cierta concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada tipo. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) x = número de coches gasolina, y = número de coches diésel, z = número de coches

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{array} \right\} \text{ b) Tienen guardados 35 coches gasolina, 45 diésel y 20 híbridos}$$

59. Castilla la Mancha. Septiembre 2017. Propuesta A. 1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 pts)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I, \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad de orden 2. (1 pt).}$$

$$\text{Solución: a) } X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \quad \text{b) } X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}$$

60. Castilla la Mancha. Septiembre 2017. Propuesta A. 2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “ x ” al peso de la pesa más pesada, “ y ” a la intermedia, “ z ” a la menos pesada.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 950 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + 4z = 0 \end{array} \right\} \text{ b) Las pesas son de 200 gramos, 100 gramos y 50 gramos.}$$

61. Castilla la Mancha. Septiembre 2017. Propuesta B. 1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.

El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

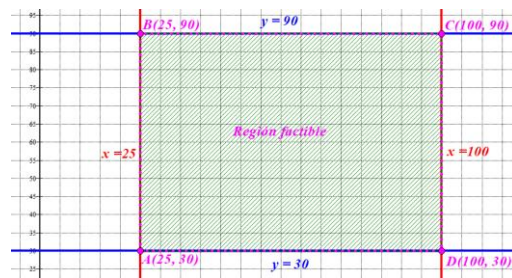
a) Expresa la función objetivo. (0.25 pts)

- b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 pts)
- c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de sacos de cemento e “ y ” al número de sacos de yeso. La función objetivo es el peso de todos los sacos $P(x, y) = 30x + 20y$. Y deseamos minimizarla.

$$\left. \begin{array}{l} 25 \leq x \leq 100 \\ 30 \leq y \leq 90 \end{array} \right\} \quad \text{c) Se minimiza el peso en el punto } A(25, 30).$$

Significa transportar 25 sacos de cemento y 30 de yeso con un peso total de 1350 kilos



62. Castilla la Mancha. Septiembre 2017. Propuesta B. 2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 pts)
- b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “ x ” al precio de la entrada al estreno de cine, “ y ” al precio de la función teatral

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 5y + 15z = 6460 \\ \frac{2}{5}y = x \\ z = \frac{3}{2}y \end{array} \right\} \quad \text{y “} z \text{” al precio de la entrada al concierto de música.}$$

b) Una entrada al estreno de cine cuesta 8 €, una a la función teatral vale 20 € y la entrada al concierto de música cuesta 30 €.

63. Castilla la Mancha. Junio 2017. Propuesta A. 1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ (siendo M^t la matriz transpuesta de M). (0.5 pts)
- b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P \cdot X = M \cdot M^t$. (0.5 pts)
- c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior. (0.5 pts)

$$\text{Solución: a) } M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t \quad \text{c) } X = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

64. Castilla la Mancha. Junio 2017. Propuesta A. 2. A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

Solución: a) Llamamos “x” al número de entradas al estreno de cine, “y” al número de entradas a la función teatral y “z” al número de entradas al concierto de música.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 320 \\ 4x + 10y + 15z = 3230 \\ z = 3y \end{array} \right\}$$

b) El número de entradas vendidas son 120 para el cine, 50 para el teatro y 150 para el concierto musical

65. Castilla la Mancha. Junio 2017. Propuesta B. 1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

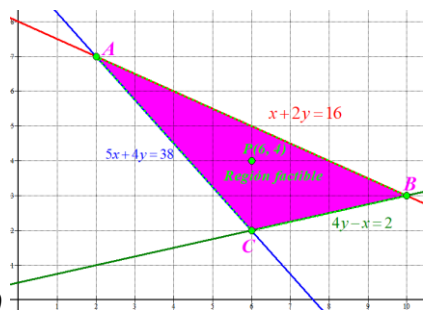
Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

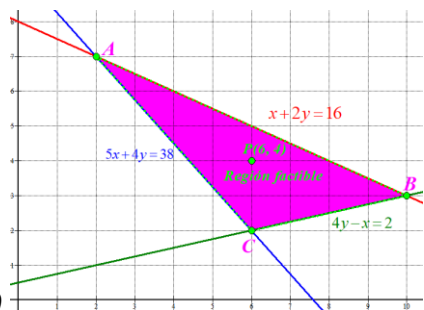
$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

a) Dibuja la región factible (1 pto).

b) Determina los vértices de la región factible (0.25 pts).

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 pts).



Solución: a)  b) Los vértices son A(2,7), B(10,3), C(6,2)

c) El valor mínimo de la función es 31 y se alcanza en el punto A de coordenadas (2,7)

66. Castilla la Mancha. Junio 2017. Propuesta B. 2. Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

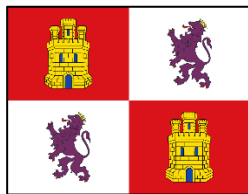
Solución: a) Llamamos “x” al número de pesas de 200 g, “y” al número de pesas de 100 g, “z” al

número de pesas de 50 g.

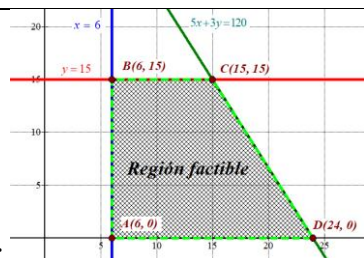
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ -x - y + z = 8 \\ 4x + 2y + z = 68 \end{array} \right\}$$

b) Son 6 pesas de 200 gramos, 10 pesas de 100 g y 24 pesas de 50 gramos.

CASTILLA Y LEÓN



1. Castilla y León. Extraordinaria 2025. APARTADO 1 (Bloques A+C) 1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos. Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?



Solución:

El beneficio máximo cumpliendo con las restricciones es de 6750 euros y se consigue fabricando 15 máquinas de cada tipo..

2. Castilla y León. Ordinaria 2025. APARTADO 1 (Bloques A+C) 1.

Dado el sistema con los parámetros a y b :

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (1.1, 1.2, 1.3):

1.1 [1.5 puntos] Si $b = -1$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .

1.2 [1.5 puntos] Si $a = 3$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro b .

1.3 [1.5 puntos] Resolver el sistema para $a = 1$ y $b = -2$.

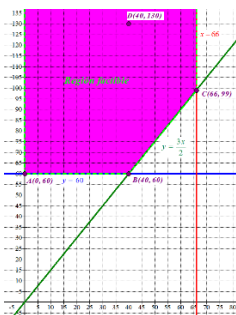
Solución: 1.1) Si $a \neq 18$ el sistema tiene una única solución y si $a = 18$ el sistema no tiene solución.

1.2) El sistema es compatible determinado (una única solución) para cualquier valor de b .

1.3) $x = \frac{52}{25}$, $y = \frac{-17}{25}$, $z = \frac{7}{25}$

3. Castilla y León. Extraordinaria 2024. P1.

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.



Solución: No existe solución que optimice el beneficio.

4. Castilla y León. Extraordinaria 2024. P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Solución: a) Si $a \neq -2$ el sistema tiene una única solución y si $a = -2$ el sistema no tiene solución. b)

$$x = 9, y = \frac{-20}{3} \text{ y } z = \frac{38}{3}$$

5. Castilla y León. Extraordinaria 2024. C1.

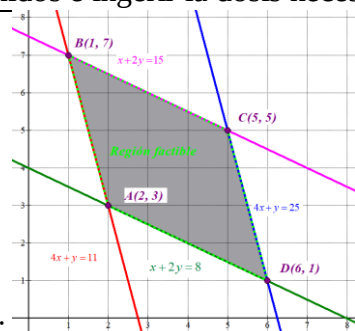
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si B^t es la matriz traspuesta de

B , determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Solución: La matriz X debe tener dimensiones 3×1 .

6. Castilla y León. Ordinaria 2024. P1.

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.



Solución: Para minimizar el número de comprimidos que se deben tomar consiguiendo la ingesta de la vitamina C y magnesio recomendado se deben tomar 2 comprimidos de VITAMIN y 3 de MAGNE, un total de 5 comprimidos.

7. Castilla y León. Ordinaria 2024. P2.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5 - k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k .

b) Resolver el sistema para $k = 1$

Solución: a) Si $k \neq 0$ y $k \neq 5$ el sistema tiene una única solución, si $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones y si $k = 5$ el sistema no tiene solución. b) $x = \frac{25}{2}$, $y = 0$ y $z = \frac{-5}{2}$

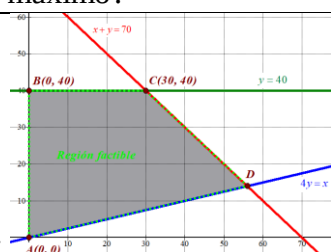
8. Castilla y León. Ordinaria 2024. C1. (Números y álgebra)

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A + X) = B - 2X$.

Solución: $X = (C + 2I)^{-1}(B - CA)$

9. Castilla y León. Extraordinaria 2023. P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?



Solución: Se deben repartir 56 unidades de formato S y 14 unidades de formato L para obtener un beneficio máximo de 203.000 euros

10. Castilla y León. Extraordinaria 2023. P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Solución: a) Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

b) La solución del sistema es $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

11. Castilla y León. Extraordinaria 2023. C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

Solución: Los valores buscados son $a = -\frac{1}{2}$, $b = 16$, $c = 32$.

12. Castilla y León. Ordinaria 2023. P1. (Números y álgebra)

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

Solución: La entrada al teatro cuesta 30 €, al baloncesto cuesta 40 € y al concierto cuesta 60 €.

13. Castilla y León. Ordinaria 2023. P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$.

b) Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$.

Solución: Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 2$. b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

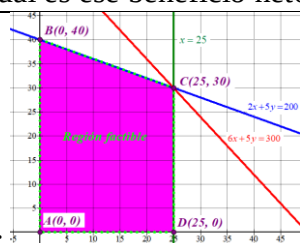
14. Castilla y León. Ordinaria 2023. C1. (Números y álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado

Solución: Este sistema es compatible indeterminado.

15. Castilla y León. Extraordinaria 2022. P1. (Números y álgebra)

Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de 1 € mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1.5 €. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?



Solución: El máximo beneficio es de 70 € y se produce en el vértice $C(25, 30)$ que significa imprimir 25 figuras y 30 fichas.

16. Castilla y León. Extraordinaria 2022. P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
b) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Si $a \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

b) La solución es $x = -2$; $y = \frac{7}{2}$; $z = \frac{1}{2}$

17. Castilla y León. Extraordinaria 2022. C1. (Números y álgebra)

Dadas tres matrices A , B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3 , determinar las dimensiones que debe tener A .

Solución: La matriz A es de dimensiones 2×4 .

18. Castilla y León. Ordinaria 2022. P1. (Números y álgebra)

Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal al día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen en la parcela.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + z = 24 \\ 6x + 4y + 4z = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Se producen 6 kilos de maíz, 2 de trigo y 4 de centeno.}$$

19. Castilla y León. Ordinaria 2022. P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = (4 \quad -1)$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

- a) Sea A^T la matriz traspuesta de A , indicar razonadamente cuáles de los productos de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.
b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

Solución: ¿ $A \cdot B$? Si es posible. Dimensiones 3×2 . ¿ $B \cdot A^T$? Si es posible. Dimensiones 2×3 .

¿ $C \cdot D$? Si es posible. Dimensiones 1×2 . ¿ $D \cdot A$? No es posible. b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

20. Castilla y León. Ordinaria 2022. C1. (Números y álgebra)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B .

Solución: Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

21. Castilla y León. Extraordinaria 2021. P1. (Números y álgebra)

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.

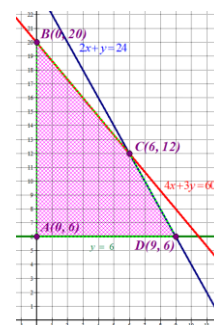
Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

Solución: Llamamos “ x ” al número de tartas a hornear e “ y ” al número de bizcochos. La función a maximizar son los ingresos que vienen dados por la expresión

$$I(x, y) = 10x + 6y.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ 2x + y \leq 24 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

Los máximos ingresos son 132 € y se consiguen con la preparación de 6 tartas y 12 bizcochos



22. Castilla y León. Extraordinaria 2021. P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución: a) Para $a \neq 1.25$ el sistema es compatible determinado, para $a = 1.25$ el sistema es incompatible.

b) La solución es $x = 4, y = 6, z = 9$

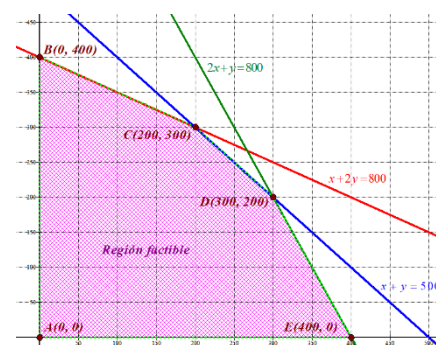
23. Castilla y León. Ordinaria 2021. P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

Solución: Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B. La función a maximizar son los ingresos $f(x, y) = 12x + 14y$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 800 \\ 2x + y \leq 800 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones forman un sistema de inecuaciones}$$

Los máximos ingresos son 6600 € que se obtienen en el vértice $D(200, 300)$. Significa que se maximizan los ingresos con 200 lotes A y 300 lotes B



24. Castilla y León. Ordinaria 2021. P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B .
 b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

Solución: a) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

25. Castilla y León. Extraordinaria 2020. P1. (Números y álgebra)

La asociación “Stop Stress” tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x = y + z - 18 \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hay 21 personas que corren, 15 que hacen yoga y 24 que nadan.}$$

26. Castilla y León. Extraordinaria 2020. P2. (Números y álgebra)

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B.

Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

Solución:

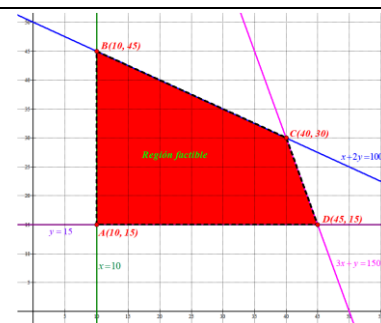
Función objetivo: $B(x, y) = 3x + 2y$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 150 \\ x \geq 10; \quad y \geq 15 \end{array} \right\}$$

El valor máximo del beneficio es 180 y se obtiene en el vértice $C(40, 30)$.

Para obtener un beneficio máximo de 180 € deben venderse 40 lotes A y 30 lotes B



27. Castilla y León. Ordinaria 2020. P1. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y - az = -1 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a . (hasta 2 puntos)
 b) Resuelve el sistema para $a = -2$. (hasta 1 punto)

Solución: a) Para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = -1$ el sistema es incompatible.

b) La solución del sistema es $x = 1$; $y = 0$; $z = -1$

28. Castilla y León. Ordinaria 2020. P2. (Números y álgebra)

Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.

Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

Solución:

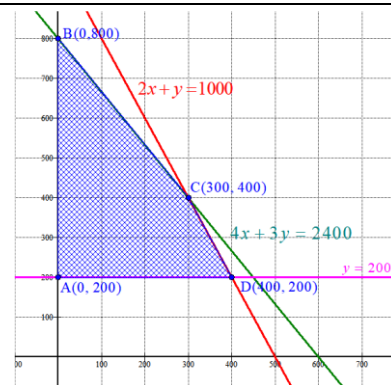
La función objetivo son los beneficios que deseamos maximizar $\rightarrow$

$B(x, y) = 70x + 50y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 2400 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 200 \end{array} \right\}$$

El beneficio máximo se obtiene con 300 televisores LED y 400 televisores QLED.

Siendo este beneficio máximo de 41000 €.



29. Castilla y León. Julio 2019. Opción A 1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2000 \\ 150x + 100y \leq 350000 \\ x + y \leq 3000 \end{array} \right\}$$

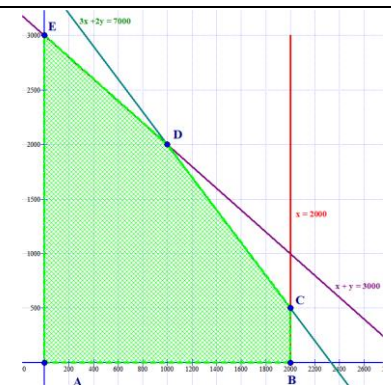
Las restricciones son

La función que deseamos maximizar es el beneficio:

$$B(x, y) = 15x + 11y$$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(1000, 2000). Debe comprar 1000 lámparas del modelo A y 2000 del modelo B.

Obteniendo un beneficio de 37000 €.



30. Castilla y León. Julio 2019. Opción B 1B- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - (1 - a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Solución: El sistema tiene distintas soluciones de la trivial cuando $a = 3$ o $a = -3$

31. Castilla y León. Junio 2019. Opción A 1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = -1$.

Solución: a) Para $a \neq \frac{19}{6}$ el sistema es compatible determinado y para $a = \frac{19}{6}$ es incompatible.

b) La solución es $x = \frac{2}{5}$; $y = \frac{4}{5}$; $z = \frac{4}{5}$

32. Castilla y León. Junio 2019. Opción B 1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Solución:

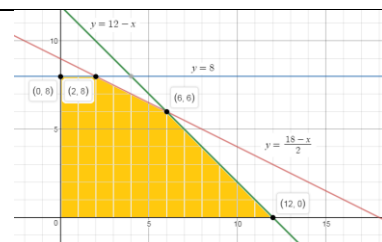
$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ z = \frac{2}{3}y \\ x + y + z = 3250 \end{array} \right\} \text{ El hijo recibe 750 €, la madre 1500 € y el padre 1000 €.$$

33. Castilla y León. Julio 2018. Opción A 1A- Una empresa de asistencia ha de enviar enfermeros y médicos a una residencia de mayores para cubrir las vacaciones. Por limitación de espacio, sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales. Además, en cada visita cada enfermero acumula 2 descansos y cada médico acumula 4 descansos. La empresa sólo dispone de 8 médicos y no le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia. Si la empresa obtiene un beneficio neto de 50 euros por cada enfermero y de 80 euros por cada médico que va a la residencia, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos enfermeros y médicos han de acudir cada vez a la residencia para obtener el máximo beneficio neto por parte de la empresa de asistencia. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Solución: Llamamos " x " al número de enfermos, " y " al número de

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12 \\ 2x + 4y \leq 36 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ El beneficio máximo es 780 € y se}$$

obtiene enviando a 6 enfermeros y 6 médicos al centro



34. Castilla y León. Julio 2018. Opción B 1B- En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada portugués y 160 € a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los 3 países.

Solución: 12 italianos, 5 portugueses y 8 japoneses.

35. Castilla y León. Junio 2018. Opción A 1A- Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se

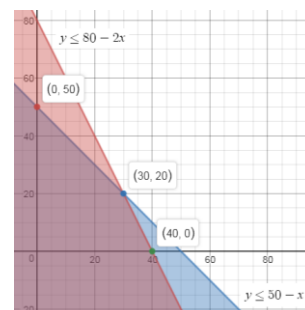
emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución: Llamamos "x" al número de collares e "y" al número de pulseras.

Las restricciones son
$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo que hay que maximizar: $F(x, y) = 5x + 4y$

El mayor beneficio es de 230 €, y se obtiene elaborando 30 collares y 20 pulseras



36. Castilla y León. Junio 2018. Opción B 1B- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + (a-1)z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

Solución: a) Si $a \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 4$ el sistema es incompatible.

b) $x = -13/2$, $y = -3/2$, $z = 12$

37. Castilla y León. Septiembre 2017. Opción A 1A- Una conocida cadena de ropa ha rebajado sus precios. Un pantalón, una camisa y un abrigo valían en temporada 360 euros en total. En las primeras rebajas, el pantalón se rebajó un 10% y la camisa un 20%, con lo que un cliente podía llevarse ambas prendas por 137 euros. En las segundas rebajas, y sobre el precio de temporada, el pantalón se rebajó un 20% y el abrigo un 30%, por lo que juntos costaban 212 euros. Calcula el precio de cada prenda en temporada.

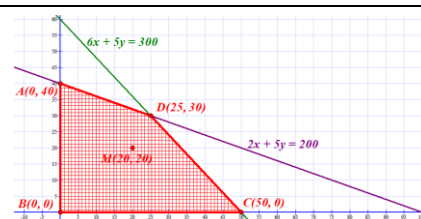
Solución:
$$\begin{cases} x + y + z = 360 \\ 0,9x + 0,8y = 137 \\ 0,8x + 0,7z = 212 \end{cases}$$
 Los precios son de 90 € el pantalón, 70 € la camisa y 200 € el abrigo.

38. Castilla y León. Septiembre 2017. Opción B 1B- Una empresa dispone de dos talleres para la reparación de motos y coches. El primero de los talleres dispone de 300 horas de trabajo como máximo y necesita 6 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El segundo de los talleres dispone de 200 horas de trabajo como máximo y necesita 2 horas para reparar cada moto y 5 horas para cada coche. El beneficio neto que obtiene la empresa por cada moto reparada es de 1000 € mientras que el beneficio neto que obtiene por cada coche reparado es de 1500 €. Calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos coches y motos ha de reparar para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

Solución:

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 300 \\ 2x + 5y \leq 200 \end{cases}$$



La función Beneficio que deseamos maximizar es $B(x, y) = 1000x + 1500y$

El beneficio máximo que se obtiene es de 70000 € reparando 25 motos y 30 coches.

39. Castilla y León. Junio 2017. Opción A 1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - az = 2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

Solución: a) Para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = -1$ el sistema es incompatible.

b) La solución es $x = 3$; $y = 4$; $z = 1$.

40. Castilla y León. Junio 2017. Opción B 1B- Queremos conseguir al menos 210 kg de hidratos de carbono y al menos 100 kg de proteínas adquiriendo dos alimentos A y B que sólo contienen estos dos nutrientes. Cada kg de A contiene 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.4 kg de proteínas. Cada kg de B contiene 0.9 kg de hidratos de carbono y 0.1 kg de proteínas. Si los costes de A y B son 12 y 6 euros por kg, respectivamente, utiliza técnicas de programación lineal para calcular cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para que el coste sea mínimo. ¿A cuánto asciende ese coste mínimo?

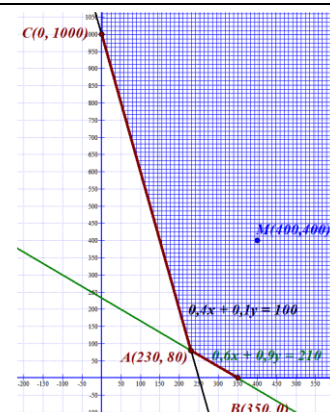
Solución: Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,6x + 0,9y \geq 210 \\ 0,4x + 0,1y \geq 100 \end{array} \right\}$$

La función Coste que deseamos minimizar es:

$$f(x, y) = 12x + 6y$$

El coste mínimo se obtiene en el punto A(230, 80). Significa 230 kg del nutriente A y 80 kg del nutriente B con un coste de 3240 €.



CATALUÑA

**1. Cataluña. Extraordinaria 2025. Ejercicio 2**

Una marca de zapatos conocida puso a la venta uno de sus modelos más populares y vendió toda su producción en la temporada de verano. El precio de cada par de zapatos era de 90 €, pero algunos se vendieron al precio original, otros con un 20% de descuento y el resto con un 50% en la liquidación de final de temporada. En total se produjeron 820.000 pares de zapatos de este modelo, que proporcionaron unos ingresos de 63.837.000€. Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20% que al 50%.

Encuentre cuántos pares de zapatos se vendieron al precio original, cuántos con un 20% de descuento y cuántos al 50%. [2,5 puntos]

Solución: Se vendieron 451000 pares de zapatos a 90 €, 246000 con un descuento del 20% y 123000 con un descuento del 50%.

2. Cataluña. Extraordinaria 2025.**Ejercicio 4**

Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000€ y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000€.

	Coches eléctricos	Coches de motor de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de 1€ para los vehículos eléctricos y de 6€ para los de motor de combustión.

El 2% de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1% de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

OPCIÓN A

a) Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez se hayan vendido todos los coches. Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor de combustión si sabemos que ha salido defectuoso? [1.5 puntos]

b) ...

$$\text{Solución: a) } AB = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.200.000 \\ 4.200.000 \\ 4.900.000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{matrix}$$

b) El número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película es de 512

3. Cataluña. Ordinaria 2025. Ejercicio 1

Queremos alojar a 10 personas en un hotel que tiene habitaciones individuales, dobles y triples. Sabemos que si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles, debemos pagar 702 €, y

si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples.

a) Determine los precios de la habitación doble y de la triple en función del precio de la individual. [1,25 puntos]

b) Si el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual, ¿cuál es el precio de cada tipo de habitación? De las tres opciones planteadas para alojar a las 10 personas, ¿con cuál obtenemos el precio más bajo y cuál es ese precio? [1,25 puntos]

Solución: a) El precio de la habitación doble es 351 € menos el triple del precio de la habitación individual. El precio de la habitación triple es 702 € menos 7 veces el precio de la habitación individual.. b) La habitación individual cuesta 78 €, la doble 117 € y la triple 156 €. Lo más económico es reservar “1 individual + 3 triples” o bien “2 dobles + 2 triples”.

4. Cataluña. Ordinaria 2025.

Ejercicio 4

En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.

A estas alturas, un 10% de los docentes inscritos son de universidad, un 50% son de secundaria y el resto son de infantil y primaria. Por otra parte, un 40% de los docentes inscritos de universidad, un 52% de los docentes inscritos de secundaria y un 65% de los docentes inscritos de infantil y primaria son mujeres.

OPCIÓN B

a) La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo D1 para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo D2 para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo D3 para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos E1, E2 y E3. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos D1, D2 y D3 (filas) según las empresas E1, E2 y E3 (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z) , en el que x representa la cantidad de detalles de tipo D1, y es la cantidad de detalles de tipo D2 y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo D3 a comprar.

La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.

Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.

[1.25 puntos]

b) Un hotel...

Solución: $\begin{matrix} D1 & D2 & D3 & E1 & E2 & E3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$ $\begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix}$. El mejor precio lo ofrece la

$$(100 \ 500 \ 400) \begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow D1 \\ \rightarrow D2 \\ \rightarrow D3 \end{matrix} = (900 \ 940 \ 1020)$$

empresa E1, siendo el precio de 900 €.

5. Cataluña. Extraordinaria 2024. 2. Una inversora quiere invertir su capital en un banco especializado en criptomonedas que ofrece distintos depósitos con los siguientes intereses:
— BTC (bitcoin): 15 % anual.

— ETH (ether): 10 % anual.

— LNK (link): 13 % anual.

La inversora quiere invertir la misma cantidad en bitcoins que entre las otras dos criptomonedas juntas y desea obtener un rendimiento anual global de un 13 %.

a) ¿Cuál debe ser la relación entre la inversión en ethers y en links? [1,25 puntos]

b) Si se sabe que la inversión total será de 150.000 €, ¿qué cantidad invertirá en cada criptomoneda? [1,25 puntos]

Solución: a) El dinero invertido en ether debe ser el doble del invertido en link. b) Se invertirá 75.000 € en bitcoin, 50.000 € en ether y 25.000 € en link.

6. Cataluña. Extraordinaria 2024. 4. Un cine dispone de dos salas en las que se proyectan dos películas diferentes. La siguiente tabla muestra el número de personas que han asistido a la proyección de cada película en la última semana, agrupadas por franjas de edad:

Franja de edad	Película de la sala 1	Película de la sala 2
Menores de 18 años	122	620
18-65 años	930	433
Mayores de 65 años	384	281

La información de la tabla anterior se registra con la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

a) Considerando la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule el producto $A \cdot B$. Explique el significado de la matriz obtenida.

Se sabe que una entrada para menores de 18 años cuesta 5 €, una entrada para adultos de entre 18 y 65 años cuesta 8,5 € y una entrada para mayores de 65 años cuesta 6,5 €. Encuentre una matriz $C(a \ b \ c)$ de forma que el producto $C \cdot A \cdot B$ dé los ingresos semanales totales obtenidos por la venta de entradas, y calcule los ingresos correspondientes a esta semana. [1,5 puntos]

b) Al cabo de unos meses, el registro semanal viene dado por la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix}$$

pero hay un valor que se ha borrado, el del número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película, y lo hemos denotado por x . Calcule el valor de x sabiendo que los ingresos totales de esa semana fueron de 12.076 €. [1 punto]

Solución: a) $C(5 \ 8.5 \ 6.5)$, Los ingresos correspondientes a esta semana son 19618 euros.

b) El número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película es de 512

7. Cataluña. Ordinaria 2024. 2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica. [1,25 puntos]

b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que

en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado. [1,25 puntos]

Solución: a) Con la información proporcionada en el ejercicio solo podemos determinar que en la segunda fábrica se hicieron 630 sofás. El número de sofás hechos en la primera y tercera fábrica quedan indeterminados, a falta de algún dato más. b) Se han producido 310 sofás en la primera fábrica, 630 en la segunda y 320 en la tercera.

8. Cataluña. Ordinaria 2024. 4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*. Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$.

Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas). [1,25 puntos]

b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí? [1,25 puntos]

$$\begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 10 + 41 + 3 &= 54 \\ 11 + 18 + 25 &= 54 \\ 33 - 5 + 26 &= 54 \end{aligned}$$

Solución: a) $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

La constante mágica de la matriz es 54.

54 54 54

b) El padre de Martí cumple 51 años.

9. Cataluña. Extraordinaria 2023. 1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]

b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

$$\text{Solución: a) } \left. \begin{aligned} x + y + z &= 45 \\ x &= 3y \\ 2x + y + 3z &= 85 \end{aligned} \right\} \text{ b) De los 45 clientes 30 realizaron esquí acuático, 10 realizaron}$$

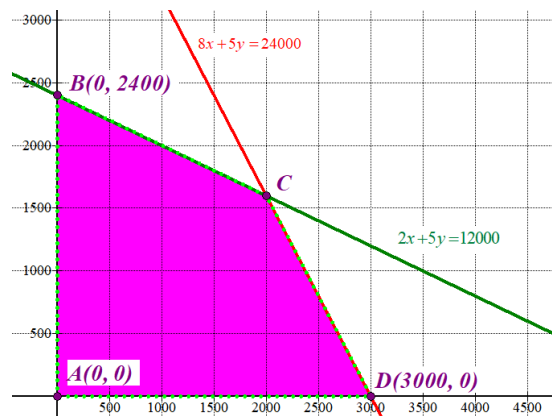
kayak y 5 realizaron moto acuática

10. Cataluña. Extraordinaria 2023. 3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

Solución: a) Función objetivo: $I(x, y) = 6.2x + 6.5y$. Las restricciones: $\left. \begin{array}{l} 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$



b) Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas son 22 800 € y se consiguen vendiendo 2000 cajas tipo A y 1600 tipo B.

11. Cataluña. Extraordinaria 2023. 5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]
 b) Para $a = -1$, calcule A^2 , A^3 , y A^4 . Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23} . [1,5 puntos]

Solución: a) El valor buscado es $a = 0$. b) $A^2 = -I$; $A^3 = -A$; $A^4 = I$; $A^{-1} = -A$;

$$A^{23} = -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Cataluña. Extraordinaria 2023. 6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3 , es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.

- a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3 ? [1,5 puntos]
 b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

Solución: a) 210 centimos y 224 centimos. El descuento debe ser del 25 %. b) $\frac{100}{m} \%$.

13. Cataluña. Ordinaria 2023. 2. Un centro cívico ofrece cursos de francés de nivel principiante, intermedio y avanzado. Los alumnos inscritos, si lo desean, tienen garantizada una plaza para el siguiente curso. Es por ello que, antes de terminar el curso, se hacen las reservas de plaza para el próximo curso. Del alumnado de nivel principiante, un 15% quiere repetir el mismo curso, un 50% quiere realizar el curso intermedio y un 5% quiere pasar directamente al curso de nivel avanzado.

En cuanto al alumnado de nivel intermedio, un 10 % quiere repetir el curso y un 60 % quiere realizar el curso de nivel avanzado. Por último, del alumnado de nivel avanzado, un 20% quiere repetir el curso. Ningún alumno pide reserva de plaza para un curso de nivel inferior y el resto de alumnos no quieren continuar en el centro el próximo curso. Este año ha habido 100 alumnos matriculados de nivel novato, 90 de nivel intermedio y 60 de nivel avanzado.

- Calcule el número de plazas a reservar de cada nivel para el curso siguiente mediante un producto de matrices. [1,25 puntos]
- El mismo centro cívico ofrece dos horarios de yoga, uno por la mañana y uno por la tarde. Para el próximo curso, el 50 % de los alumnos que actualmente hacen yoga por la mañana quieren continuar con el mismo horario, mientras que un 30 % quieren pasar al horario de tarde. El resto de alumnos por la mañana no continuarán. En cuanto a los alumnos que actualmente realizan yoga por la tarde, un 40% quieren pasar al horario de mañana y un 60% quieren continuar haciendo el horario de tarde. Si sabemos que para el curso siguiente es necesario reservar 49 plazas para el horario de mañana y 51 plazas para el horario de tarde, ¿cuántos alumnos están matriculados actualmente en cada horario? [1,25 puntos]

Solución: a) El número de plazas a reservar son 15 en nivel principiante, 59 en nivel intermedio y 71 en avanzado. b) Hay matriculados 50 alumnos en horario de mañana y 60 en horario de tarde.

14. Cataluña. Ordinaria 2023. 3. Robert ha realizado tres pruebas de una asignatura. Haciendo la media aritmética de las notas obtenidas en cada una de las tres pruebas le ha quedado una nota global de 6. Robert sabe que la nota de la tercera prueba ha sido igual que la media aritmética de las notas de las otras dos pruebas.

- Con esta información, ¿puede saber alguna de las tres notas? En caso afirmativo, ¿de qué prueba y cuál sería la nota obtenida? [1,25 puntos]
- La profesora le dice que ha sido muy irregular y que si sólo se tuvieran en cuenta las notas de las dos últimas pruebas habría obtenido una media de 7. ¿Qué nota ha obtenido en cada prueba? [1,25 puntos]

Solución: a) Solo podemos obtener la tercera nota (6). Las otras dos notas no tienen una solución concreta. b) Las notas de las pruebas han sido 4 en la primera, 8 en la segunda y 6 en la tercera.

15. Cataluña. Ordinaria 2023. 4. Una empresa de Menorca quiere ofrecer dos tipos de actividades: bautizos de submarinismo desde una barca y excursiones en barca por la costa para bañarse en calas. El bautizo de submarinismo tiene un precio de 60 euros por persona y en cada embarcación irán 10 participantes y 5 instructores. La excursión por la costa tiene un precio de 18 euros por persona y en cada embarcación irán 25 participantes y 2 instructores. La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales y de 75 instructores que pueden realizar salidas de submarinismo o excursiones en barca por las calas indistintamente. Su intención es obtener el máximo de ingresos suponiendo que llenará todas las embarcaciones.

- Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
- ¿Cuántas salidas de cada tipo debe ofrecer la empresa todos los días para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuánto dinero ingresará a diario? [1,25 puntos]

Solución: a) Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 600x + 450y$. Las

restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} .$$
 b) Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas

son 14.250 € y se consiguen utilizando 5 barcas para los bautizos de submarinismo y 25 para las excursiones.

16. Cataluña. Extraordinaria 2022. 2.

Martí le explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se averió justo a la mitad del trayecto. Desde ese punto fue andando hasta la población más próxima, de manera que recorrió a pie una vigésima parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que recorrió 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

- a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros recorrió en autocar, a pie y en taxi. [1,75 puntos]
- b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí anduvo a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en recorrer todo el trayecto? [0,75 puntos]

Solución: a) Se han recorrido 50 kilómetros en autocar, 5 a pie y 45 en taxi.

b) Martí tardó 2 horas en hacer todo el recorrido.

17. Cataluña. Extraordinaria 2022. 4.

La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Se quiere usar esta técnica para tratar alimentos que ya han empezado a deteriorarse.

Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Se sabe que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

- a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays. Para hacerlo, determine cuál es la función objetivo que debe minimizarse y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,5 puntos]
- b) Si se aplica un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia a sus alrededores). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a)? [1 punto]

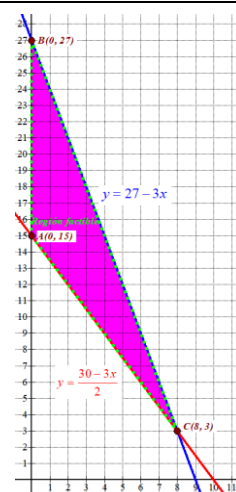
Solución: a) Queremos minimizar la función $F(x, y) = 4x + 5y$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 30 \\ \text{Las restricciones son } 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima deben radiarse 8 grays de rayos de cobalto y 3 grays de rayos de cesio

b) El punto $M(7, 5)$ pertenece a la región factible.

$$F(7, 5) = 28 + 25 = 53 > F(8, 3) = 47$$

**18. Cataluña. Extraordinaria 2022. 5.**

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Calcule para qué valor de a las dos matrices conmutan, es decir, para qué valor de a se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden dos. [1,25 puntos]

- b) Para el valor de a encontrado en el apartado anterior, calcule las matrices inversas de las matrices A y B . Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2 \cdot I$. [1,25 puntos]

Solución: a) $a = 1$. b) $A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. Cataluña. Ordinaria 2022. 1. En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

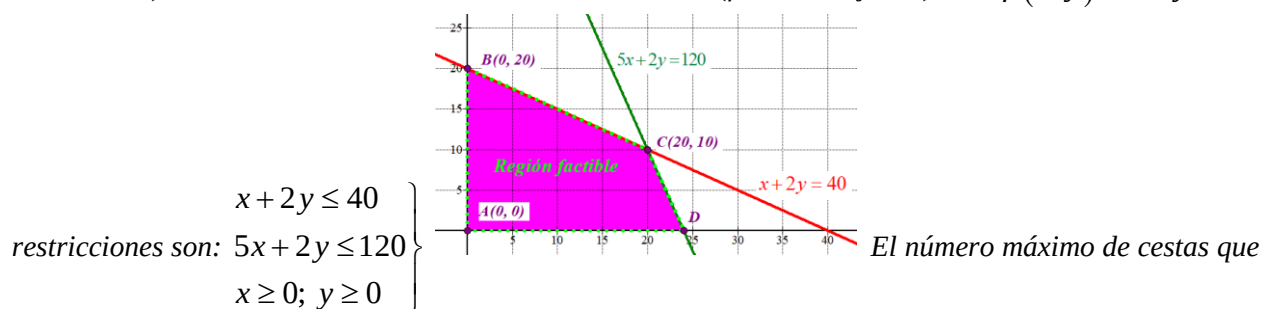
- a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo? [1,75 puntos]
 b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos? [0,75 puntos]

Solución: a) Se han elaborado 50 ramos clásicos, 20 pequeños y 15 grandes. b) 400 €.

20. Cataluña. Ordinaria 2022. 3. Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa? [1,75 puntos]
 b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer? [0,75 puntos]

Solución: a) Queremos maximizar el número de cestas (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = x + y$. Las



se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 30 y se consiguen con 20 del tipo A y 10 del tipo B. b) Se deben hacer 13 cestas de cada tipo.

21. Cataluña. Ordinaria 2022. 5. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

donde a es un parámetro real.

- a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$. [1,5 puntos]
 b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

Solución: a) $a = 8/5$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

22. Cataluña. Extraordinaria 2021. 1. La tabla siguiente muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Se ha recogido la información anterior en la matriz A , en la que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix}$$

a) Considere los vectores $v = (1 \ 1 \ 1)$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Realice las operaciones $v \cdot A$ y $A \cdot w$. Interprete

en cada caso el resultado obtenido. [1,25 puntos]

b) La matriz B recoge los resultados del siguiente trimestre, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Se desconoce el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que se ha denominado x , pero se sabe que el rango de la matriz B es 2. Encuentre el valor de x . [1,25 puntos]

Solución: a) $v \cdot A = (39,5 \ 39,7 \ 10,7)$ El vector tiene unos elementos que se corresponden con los ingresos totales en miles de euros del conjunto de los tres locales en los meses de enero (39,5), febrero

(39,7) y marzo (10,7) de 2020. $A \cdot w = \begin{pmatrix} 30,9 \\ 27,3 \\ 31,7 \end{pmatrix}$ En esta matriz aparecen los ingresos totales durante los

tres meses en cada uno de los locales.

b) $x = 7$

23. Cataluña. Extraordinaria 2021. 2. Filomena hace una fiesta e invita a sus amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta de que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 €, la segunda 6,5 € y la última 3,5 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema. [0,75 puntos]

b) Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno. [1,75 puntos]

Solución: a) Llamamos x, y, z al precio de una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar moreno, respectivamente.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6.5 \\ x + z = 3.5 \end{array} \right\} \text{ b) El precio de una docena de huevos es de 1.5 €, el de una bolsa de harina de almendra es 2.5 € y el de un paquete de azúcar moreno es de 2 €}.$$

24. Cataluña. Extraordinaria 2021. 3. Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

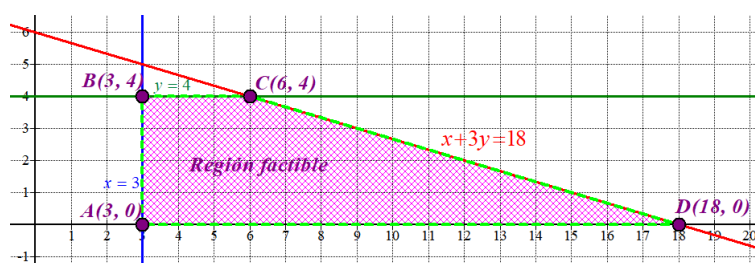
a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá? [1,25 puntos]

Solución: a) La función objetivo es el número de clientes que aumentan y lo deseamos maximizar

$f(x, y) = 10x + 60y$. Las restricciones

$$\text{son } \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



b) El número máximo de clientes nuevos es 300 y se consigue con 6 anuncios de radio y 4 de TV

25. Cataluña. Ordinaria 2021. 2. En una pastelería quieren preparar cajitas de *panellets* para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 *panellets* de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 *panellets* de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los *panellets* de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los *panellets* disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo. [1,25 puntos]

Solución: a) Llamamos " x " al número de cajitas de *panellets* del primer tipo e " y " al número de cajitas de *panellets* del segundo tipo. Queremos maximizar el número de cajitas (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = x + y$

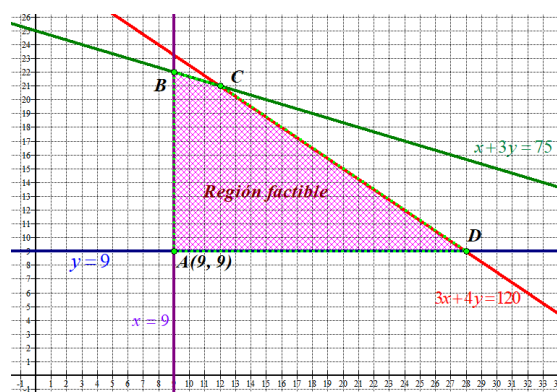
. Reunimos todas las restricciones en un sistema

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 9; y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x + 3y \leq 75 \end{array} \right\}$$

b) El número máximo de cajitas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 37 y se consiguen con 28 del tipo 1 y 9 del tipo 2.

Se disponen de 120 *panellets* de piñones y se utilizan todos.

Se disponen de 150 *panellets* de coco y utilizamos 110, nos sobran 40 *panellets* de coco.



26. Cataluña. Ordinaria 2021. 3. En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.

a) Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta. [0,75 puntos]

b) Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado. [1,75 puntos]

Solución: a) Llamamos “x” al número de hombres, “y” al número de mujeres y “z” al número de niños.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{array} \right\} \text{ b) Acuden a la fiesta 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños}$$

27. Cataluña. Ordinaria 2021. 5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la expresión general de A^n . Demuestre que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$. [1,25 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. Cataluña. Extraordinaria 2020. 1. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$. [2,5 puntos]

Solución: Los valores de x buscados son $x = 3$ o $x = -3$.

29. Cataluña. Extraordinaria 2020. 3. Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en frascos pequeños que cuestan 70 euros, y la colonia, que es más diluida y que se vende en frascos más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar un frasco de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar uno de colonia necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos? [1,25 puntos]

Solución:

a) Se desean maximizar los ingresos $I(x, y) = 70x + 82y$.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ 4x + 9y \leq 3000 \\ x \geq 120; \quad y \geq 70 \end{array} \right\}$$

b) Los ingresos máximos son de 37400 € que se obtienen con la fabricación de 300 ampollas de perfume y 200 de colonia.



30. Cataluña. Extraordinaria 2020. 5. Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte distintas: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Se sabe que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay que recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Se sabe también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.

[2,5 puntos]

Solución: El triatlón consta de 3 km nadando, 60 km en bicicleta y 12 nadando.

31. Cataluña. Ordinaria 2020. 1. Un vendedor de una librería de viejo cobra, además de un sueldo fijo, varias comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela.

Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y consiguió en total una comisión de 30 €.

¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo? [2,5 puntos]

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 2z = 30 \\ x = y - 5 \\ y = 2z \end{array} \right\} \text{Vende 5 comics, 10 revistas y 5 novelas.}$$

32. Cataluña. Ordinaria 2020. 4. Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

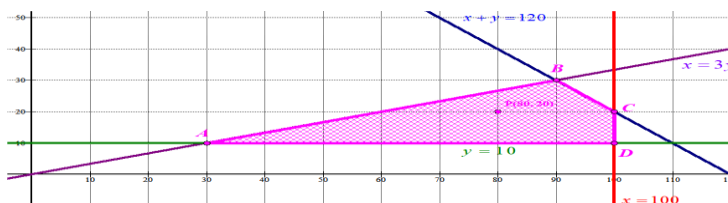
b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio? [1,25 puntos]

Solución:

La función objetivo es $B(x, y) = 20x + 25y$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \end{array} \right\}$$



El máximo beneficio es de 2550 € y se consigue en el punto B(90, 30) que significa una producción de 90 sillas y 30 mesas.

33. Cataluña. Ordinaria 2020. 5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Compruebe que se cumple que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]
 b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

Solución: a) Debe cumplirse que $A^2 \cdot A = I$ y $A \cdot A^2 = I$. b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

34. Cataluña. Septiembre 2019. 1. Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X = (d \ m \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X \cdot A + B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

- a) Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, ¿cuál es el vector codificado que se enviará? [0,75 puntos]
 b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036 \ 1 \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar? [1,25 puntos]

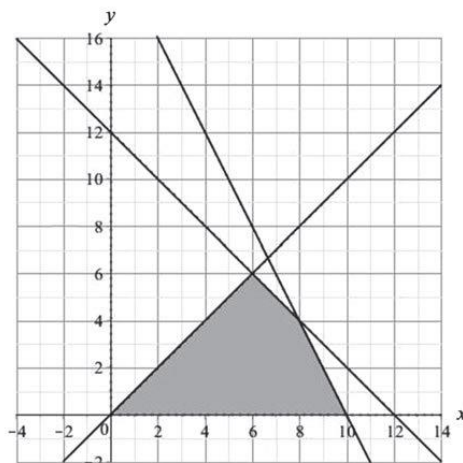
Solución: a) $(2025 \ -4 \ 3)$ b) $x = 12$, $y = 6$ i $z = 2019$. 12 de junio de 2019.

35. Cataluña. Septiembre 2019. 4. En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos. [2 puntos]

Solución:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 51 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 11 \end{array} \right\} \text{ En el primer sorteo aciertan 31 personas, 3 en el segundo y 17 en el tercero.}$$

36. Cataluña. Septiembre 2019. 6. Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.

Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y , el número de panecillos de cereales.

a) Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible. [1 punto]

b) Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 €, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos? [1 punto]

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} y \leq -2x + 20 \\ y \leq -x + 12 \\ y \leq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{b) La función objetivo es } R(x, y) = 8x + 10y. \text{ La recaudación máxima es de}$$

108 € y se obtiene con 6 panes integrales y 6 de cereales.

37. Cataluña. Junio 2019. 1. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto.

[2 puntos] Solución: a) Llamamos x, y, z al número de participantes que escogen el producto A, B, C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{array} \right\}$$

133 personas escogen el producto A, 266 el producto B y 101 el producto C.

38. Cataluña. Junio 2019. 2. Resuelva las siguientes cuestiones:

a) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad

$$M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y es la matriz nula } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1 punto]

b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz

A, es decir, que cumplan que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punto]

Solución: a) $a = -1, b = -12$ b) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$, siendo x e y valores reales

39. Cataluña. Junio 2019. 5. En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.

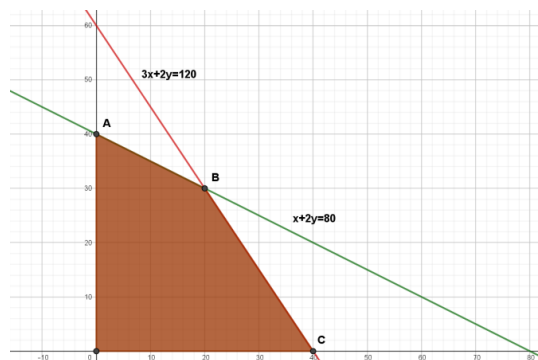
a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio. [0,75 puntos]

Solución: a) Llamamos “x” al número de bicicletas de montaña e “y” al número de bicicletas de paseo. La función objetivo son los beneficios y viene dada por la expresión $B(x, y) = 200x + 150y$.

Las restricciones son
$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) El máximo beneficio es de 8500 € y se obtiene fabricando 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo.



40. Cataluña. Septiembre 2018. 2. Al acabar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 €, y los verdes, que traen 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 €. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches. Necesita preparar como mínimo 40 estuches y el número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes. Con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos obsequios.

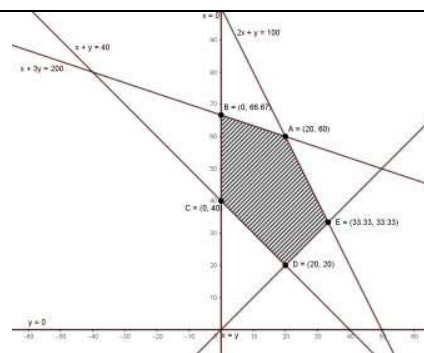
a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es este gasto mínimo. [0,75 puntos]

Solución: a) La función objetivo es $D(x, y) = 9x + 15y$. Las

restricciones son
$$\begin{cases} x + y \geq 40 \\ x \leq y \\ x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$
 b) El gasto mínimo es de 480 € y

corresponde a 20 estuches rojos y 20 verdes.



41. Cataluña. Septiembre 2018. 3. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 € después de invertir un total de 40.000 € en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente forma: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tres empresas? [2 puntos]

Solución: Llamamos x, y, z a las cantidades invertidas en A, B, C.
$$\begin{cases} x + y + z = 40000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150000 \end{cases}$$

La solución es 2000 € en A, 20000 en B y 18000 en C.

42. Cataluña. Septiembre 2018. 5. Resuelva las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine el valor de a , b , c y d para que se verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$

43. Cataluña. Junio 2018. 1. Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. [1 punto]

b) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M . Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

Solución: a) $a = -1$ o $a = 1$. b) $a = -1$

44. Cataluña. Junio 2018. 3. Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total. [1 punto]

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado? [1 punto]

Solución: a) Llamamos “ x ” al precio de un refresco, “ y ” al precio de un bocadillo y “ z ” al precio de la bola de helado. $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19.5 \\ 2x + y + 2z = 8.1 \end{cases}$ Ha pagado 30.9 €

b) $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19.5 \\ 2x + y + 2z = 8.1 \\ x + y + z = 5.1 \end{cases}$ 1.8 el refresco, 2.1 el bocadillo y 1.2 la bola de helado.

45. Cataluña. Junio 2018. 4. Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.

a) Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$. [1 punto]

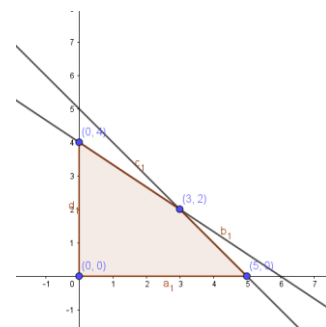
b) Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos. [1 punto]

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de piezas del modelo A e “ y ” al número de piezas del modelo B.

Las restricciones son
$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$
 Los beneficios vienen dados por la

expresión $B(x, y) = 40x + 50y$

b) El beneficio máximo es de 220 € y se obtiene fabricando 3 piezas del modelo A y 2 del modelo B.



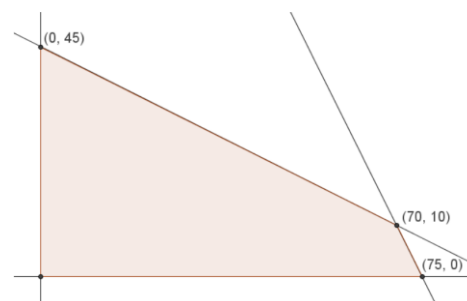
46. Cataluña. Septiembre 2017. 1. Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg del ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo deben fabricarse para maximizar los ingresos? [2 puntos]

Solución: Llamamos “ x ” a la cantidad de cajas de helado del tipo G1 e “ y ” a la cantidad de cajas del tipo G2.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Los ingresos vienen dados por $f(x, y) = 10x + 15y$.

El ingreso máximo es de 850 € y se obtiene fabricando 70 cajas de G1 y 10 de G2.



47. Cataluña. Septiembre 2017. 4. Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7%:

a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero? [1 punto]

b) Cuánto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos? [1 punto]

Solución: a. Llamamos “ x ” a lo invertido en letras, “ y ” a lo invertido en bonos y “ z ” a lo invertido en acciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 6000 \\ 0.1x + 0.08y + 0.04z = 420 \end{cases} \quad x = 2z - 3000, y = 9000 - 3z, \text{ siendo “} z \text{” una cantidad comprendida}$$

entre 1500 y 3000 €

$$b. \begin{cases} x + y + z = 6000 \\ 0.1x + 0.08y + 0.04z = 420 \\ x = y + z \end{cases} \quad 3000 \text{ en letras, } 0 \text{ en bonos y } 3000 \text{ en acciones.}$$

48. Cataluña. Septiembre 2017. 5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $A^3 - I = 0$ donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado a. [1 punto]

Solución: a) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^{11} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

49. Cataluña. Junio 2017. 3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A-B) \cdot (A+B) = A^2 - B^2$. [1 punto]

b) Determine m y n para que las matrices B y C conmuten, es decir, $B \cdot C = C \cdot B$. [1 punto]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $m = -1$ y $n = 1$

50. Cataluña. Junio 2017. 4. Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.

a) Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta. [1 punto]

b) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas. [1 punto]

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de monedas de la primera fila, “ y ” a las de la segunda y “ z ” a las

de la tercera. $\begin{cases} x+10 = y+2 \\ x+10 = z-2 \end{cases}$ Es un sistema compatible indeterminado y no podemos determinar la

cantidad de monedas que hay en cada fila, solo que $x = z - 22$; $y = z - 14$; $z = z$.

b) $\begin{cases} x+10 = y+2 \\ x+10 = z-2 \\ x+y+z = 51 \end{cases}$ La solución es 7 monedas en la primera fila, 15 en la segunda y 29 en la tercera.

51. Cataluña. Junio 2017. 5. Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona - El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones del tipo A, que pueden transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo B, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo A cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo B cuesta 1.000:

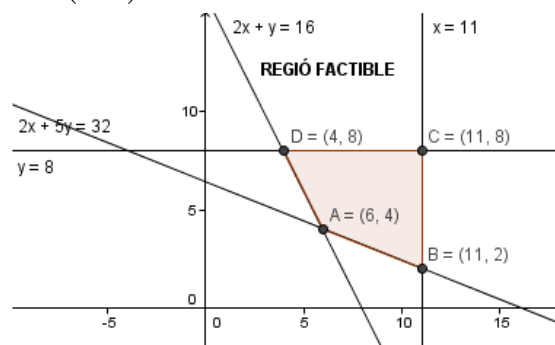
a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía. [1 punto]

b) Calcule el número de aviones de cada tipo a contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es ese coste mínimo. [1 punto]

Solución: a) Llamamos “ x ” al número de aviones de tipo A e “ y ” al número de aviones del tipo B. La función objetivo es el coste que viene dado por la expresión $C(x, y) = 4000x + 1000y$.

Las restricciones son $\begin{cases} 2x + y \geq 16 \\ 2x + 5y \geq 32 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \end{cases}$

b) El coste mínimo es de 24000 € y se obtiene contratando 4 aviones del tipo A y 8 del tipo B.



EXTREMADURA

**1. Extremadura. Extraordinaria 2025. B1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

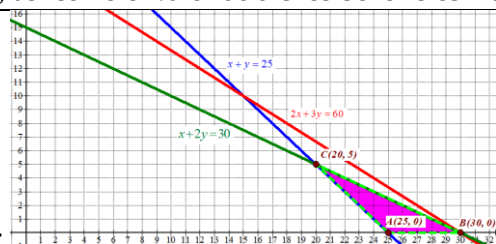
se pide, justificando las respuestas:

- Hallar los valores de x para los que no existe la matriz inversa de $A+C$.
- Para $x=3$, obtener la matriz Y que verifica la ecuación matricial $A \cdot Y = C - B \cdot Y$.

Solución: a) Para $x = -1$ y $x = 4$ no existe la matriz inversa de $A+C$.

$$b) Y = (A+B)^{-1} C = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 24 \\ 3 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

2. Extremadura. Extraordinaria 2025. B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos



Solución: Se obtienen unos máximos beneficios de 155 euros con la fabricación de 20 quesos de oveja y 5 quesos de cabra.

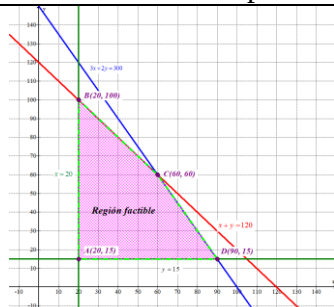
3. Extremadura. Ordinaria 2025. B1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5x & 4 \\ -x & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & y \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matriz identidad de orden 2}$$

- Calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $I + A^t = B \cdot C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A .
- Tomando $x=1$, determinar los valores de y para los que $A \cdot B$ tiene inversa.

Solución: a) $x=3, y=2, z=4$ b) La matriz $A \cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de " y " distinto de -12 .

4. Extremadura. Ordinaria 2025. B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.



Solución: Se obtienen unos máximos beneficios de 5400 euros plantando 60 hectáreas de maíz y 60 de trigo

5. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \\ 2 \cdot X + Y = B \end{cases}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$

6. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

- Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**
- Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $(A \cdot B^t) \cdot Y = 2 \cdot I$. **(1 punto)**

Solución: a) La matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de 1. b) $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

7. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. PROBLEMA 3 (2 puntos)

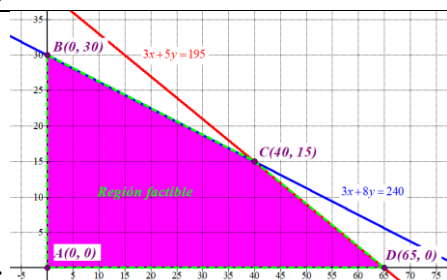
Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierta día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Solución: Ese día se vendieron 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

8. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2024. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16

salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.



Solución: El beneficio máximo que se puede conseguir es de 1340 euros, obteniéndose con la venta de 40 lotes A y 15 lotes B

9. Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X - 2I = B^t - A \cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

10. Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A \cdot B^t + 3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B . **(1.5 puntos)**
- Calcular la inversa de $A \cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

Solución: a) La matriz $A \cdot B^t + 3C$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de -2 .

b) $(A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

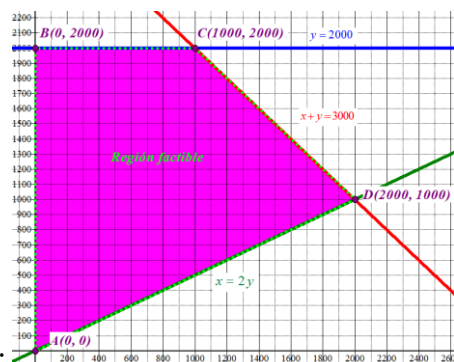
11. Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Solución: El tiempo de lavado es de 60 minutos, 20 minutos de aclarado y 10 de centrifugado.

12. Extremadura. EBAU Ordinaria 2024. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.



Solución: Los ingresos máximos se obtienen elaborando 2000 litros de aceite de oliva virgen y 1000 litros de aceite de orujo, siendo 27 000 € los ingresos máximos que se pueden obtener.

13. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A . Justificar la respuesta.

Solución: $X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

14. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

- a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**
 b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} . **(1 punto)**

Solución: a) El valor buscado es $x = 1$. b) $A^{43} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

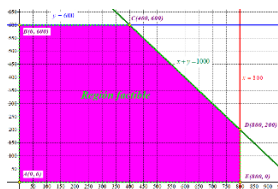
15. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Solución: Vendió 7 kg de lomos, 13 kg de salchichones y 40 kg de chorizos.

16. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2023. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.



Solución: Los ingresos máximos se obtienen fabricando y vendiendo 800 móviles y 200 tabletas. Siendo 684000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

17. Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución: $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

18. Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A . (1 punto)

b) Para $x=1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

Solución: a) La inversa de A existe para cualquier valor de x distinto de 0 y -1 .

b) $X = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$

19. Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. PROBLEMA 3 (2 puntos)

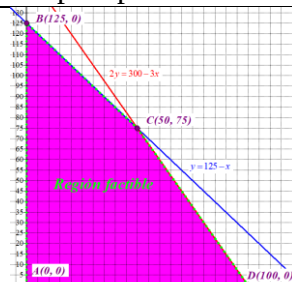
Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Solución: El hotel cuenta con 40 habitaciones sencillas, 130 dobles y 25 triples.

20. Extremadura. EBAU Ordinaria 2023. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300000 euros para comprar vehículos al precio de 3000 euros

cada coche y 2000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.



Solución: El beneficio máximo se obtiene comprando y vendiendo 50 coches y 75 motocicletas. Siendo 55000 € los beneficios máximos que se pueden obtener.

21. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $AX - B^t = C + 3X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B .

Justificar la respuesta.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

22. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A .

(1 punto)

b) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

(1 punto)

Solución: a) Para cualquier valor de x distinto de 1 y de -1 . b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

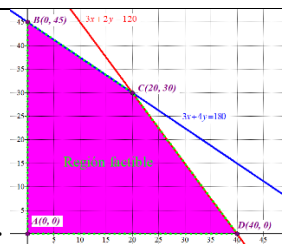
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Solución: La solución del sistema planteado es $x = -1, y = 1, z = 2$.

24. Extremadura. EBAU Extraordinaria 2022. PROBLEMA 4 (2 puntos)

En una pastelería se elaboran pasteles de tipo A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de

240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.



Solución: El beneficio máximo se obtiene vendiendo 20 pasteles del tipo A y 30 del tipo B. Siendo 255 € los beneficios máximos que se obtienen con esta venta.

25. Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2 \cdot X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B .

Justificar la respuesta.

Solución: $X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

26. Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A .

(1 punto)

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(1 punto)

Solución: a) Para cualquier valor de x distinto de 1 y de 3. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

27. Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

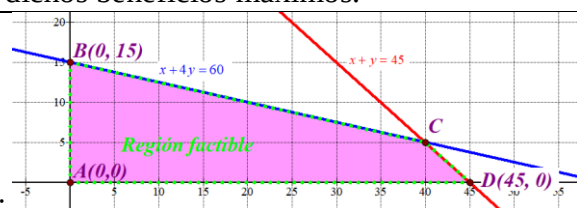
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

Solución: La solución del sistema planteado es $x = -2, y = 1, z = 1$.

28. Extremadura. EBAU Ordinaria 2022. PROBLEMA 4 (2 puntos)

En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que, previamente, ha fabricado necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el

número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.



Solución: vendiendo 40 espejos y 5 cuadros.

El beneficio máximo es de 5700 € y se obtiene

29. Extremadura. Extraordinaria 2021. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B . Justificar la respuesta.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -11 & -1 \\ 1 & 20 & 1 \end{pmatrix}$

30. Extremadura. Extraordinaria 2021. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A .

(1 punto)

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

(1 punto).

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de x distinto de 1

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

31. Extremadura. Extraordinaria 2021. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Resolver, justificando la respuesta, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Solución: La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

32. Extremadura. Extraordinaria 2021. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m² de tela de forro y 120 m² de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m² de tela de forro y 3 m² de tela de paño y una cazadora requiere 2 m² de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 € y en cada cazadora 70 €, calcular, justificando las respuestas:

a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

(1,5 puntos)

b) El valor de dichos beneficios máximos.

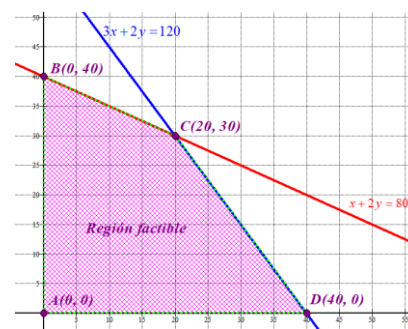
(0,5 puntos)

Solución: Llamamos “x” al número de abrigo a confeccionar semanalmente e “y” al número de cazadoras. Queremos maximizar las ganancias que vienen dadas por la expresión

$$G(x, y) = 80x + 70y. \text{ Las restricciones son } \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Las ganancias son máximas confeccionando 20 abrigo y 30 cazadoras.

b) Los beneficios máximos son de 3700 €



33. Extremadura. Ordinaria 2021. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

34. Extremadura. Ordinaria 2021. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

- a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.
b) Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$.

(0,5 puntos)

(1,5 puntos).

Solución: a) No existe la inversa de A para $x = 1$ b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \\ 15 & -7 \end{pmatrix}$

35. Extremadura. Ordinaria 2021. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^t \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución: Los valores buscados son $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$

36. Extremadura. Ordinaria 2021. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m² de tela con un beneficio de 40 €, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m² de tela con un beneficio de 100 €. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m² de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.

Calcular, justificando la respuesta:

- a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.
b) El valor de dichos beneficios máximos.

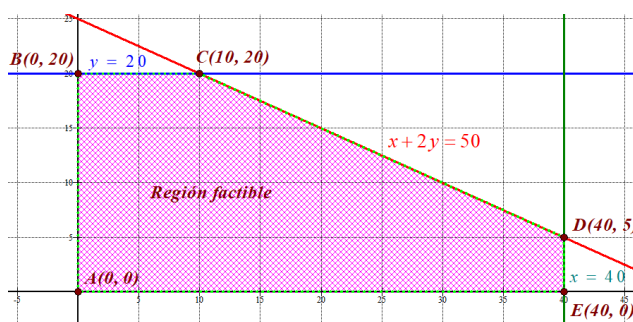
(1,5 puntos)

(0,5 puntos)

Solución: Llamamos x = número de butacas a tapizar diariamente, y = número de sillones a tapizar diariamente. Se desea maximizar los beneficios, siendo estos $B(x, y) = 40x + 100y$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ x \leq 40; y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

Se deben tapizar 10 butacas y 20 sillones para conseguir el máximo beneficio de 2400 €



37. Extremadura. Extraordinaria 2020. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuesto A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

Solución: Se obtiene un beneficio máximo de 8400 € fabricando 60 envases del tipo A y 20 del tipo B.

38. Extremadura. Extraordinaria 2020. PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m² de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m² de piel, siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m² de piel. ¿Cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Solución: Se obtiene un beneficio máximo de 3700 € fabricando 30 pares de zapatos y 20 de botas.

39. Extremadura. Extraordinaria 2020. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A, B e I las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/10 & 7/5 \end{pmatrix}$

40. Extremadura. Extraordinaria 2020. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea X, I y O las matrices siguientes:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

Solución: Los valores del parámetro " a " son 1 y 3.

41. Extremadura. Ordinaria 2020. PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos

y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

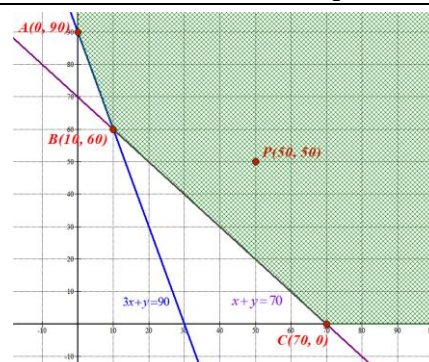
Solución:

$$\text{Las restricciones son } \left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 90 \\ x + y \geq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el coste que viene dado por la expresión:

$$C(x, y) = 30000x + 20000y.$$

El coste mínimo se localiza en el vértice $B(10, 60)$ lo que significa 10 días de trabajo en la fábrica A y 60 en la fábrica B.



42. Extremadura. Ordinaria 2020. PROBLEMA 2 (2 puntos)

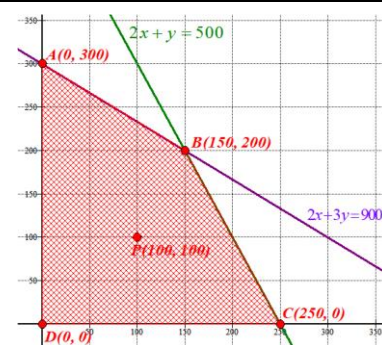
Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

$$\text{Solución: Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 900 \\ 2x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el beneficio, que deseamos maximizar:

$$B(x, y) = 15x + 12y$$

Con la realización de 150 lotes A y 200 lotes B se consigue un beneficio máximo de 4650 €.



43. Extremadura. Ordinaria 2020. PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array} \right\}$$

$$\text{Solución: } X = \frac{-3}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 36 \\ 0 & -22 \end{pmatrix}$$

44. Extremadura. Ordinaria 2020. PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución: $x = 0$

45. Extremadura. Julio 2019. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

(3 puntos)

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

(0.5 puntos)

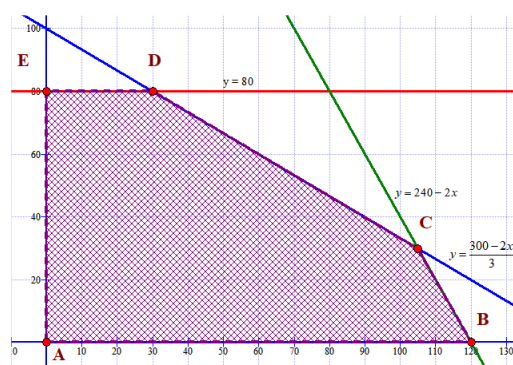
Solución: Las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 120 \end{array} \right\}$$

Deseamos maximizar los beneficios que vienen dados por

$$B(x, y) = 220x + 280y$$

a) El máximo beneficio se obtiene con la fabricación de 105 motores del tipo A y 30 motores del tipo B.

b) 31500 €

**46. Extremadura. Julio 2019. OPCIÓN B PROBLEMA 1**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A .

(1.5 puntos)

(b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - I$.

(2 puntos)

Solución: a) $b = \frac{3}{2}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

47. Extremadura. Junio 2019. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? (3 puntos)

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

(0.5 puntos)

Solución: Las restricciones son:

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$x + y \leq 20$$

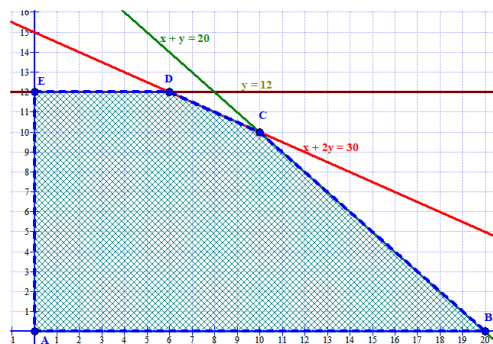
$$y \leq 12$$

$$100x + 200y \leq 3000 \Rightarrow x + 2y \leq 30$$

La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 30x + 50y$

a) El máximo beneficio se produce con 10 cocinas vitrocerámicas y 10 de inducción.

b) Siendo el beneficio máximo de 800 €.



48. Extremadura. Junio 2019. OPCIÓN B PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$.

(2 puntos)

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.

(1.5 puntos)

Solución: a) No existe inversa para $x = \frac{1}{5}$ b) $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

49. Extremadura. Julio 2018. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A lo produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:

(a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios? (3 puntos)

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? (0,5 puntos)

Solución: La función objetivo es $B(x, y) = 30x + 40y$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

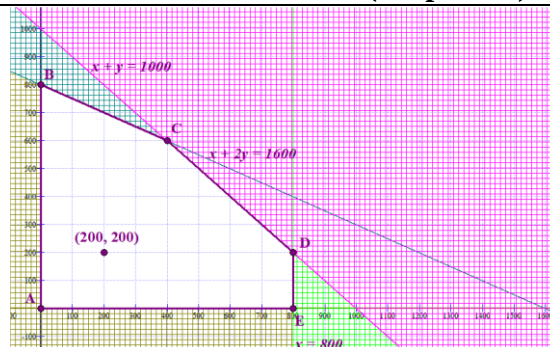
Las restricciones son: $x + 2y \leq 1600$

$$x \leq 800$$

$$x + y \leq 1000$$

(a) El máximo beneficio se obtiene con 400 lotes A y 600 lotes B.

(b) Es de 36000 €



50. Extremadura. Julio 2018. OPCIÓN B PROBLEMA 1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = 2A$.

(2 puntos)

(b) Hallar la matriz inversa de A .

(1.5 puntos)

Solución: (a) $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

51. Extremadura. Junio 2018. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

(a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios?

(3 puntos)

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

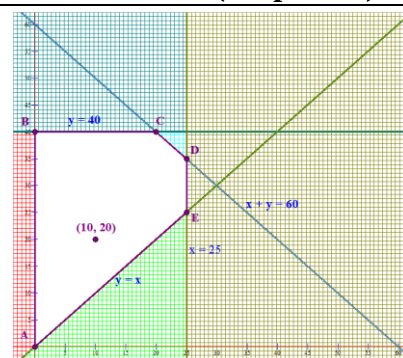
(0.5 puntos)

Solución: La función objetivo es el beneficio: $B(x, y) = 3x + 2,5y$

Las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x < y \\ x + y \leq 60 \\ y \leq 40 \\ x \leq 25 \end{array} \right\}$$

(a) El máximo beneficio se obtiene con la venta de 25000 botellas de vino blanco y 35000 de vino tinto.

(b) El beneficio máximo es de 162500 €.



52. Extremadura. Junio 2018. OPCIÓN B PROBLEMA 1

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifique $A.X - B = B.X + A$. Justificar la respuesta.

(3,5 puntos)

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -10/3 & -11/3 \end{pmatrix}$

53. Extremadura. Julio 2017. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, se pide:

(a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

(3 puntos)

(b) El valor de dicho beneficio máximo.

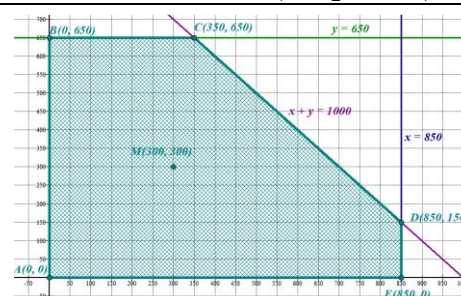
(0.5 puntos)

Solución: Deseamos maximizar el beneficio:

$$B(x, y) = 150x + 200y.$$

Las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 850 \\ y \leq 650 \\ x + y \leq 1000 \end{array} \right\}$$

(a) El máximo beneficio se obtiene fabricando 350 trajes de señora y 650 de caballero. (b) 182500 € es el máximo beneficio.



54. Extremadura. Julio 2017. OPCIÓN B PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B. En caso afirmativo, calcularlas.

(2 puntos)(b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$ **(1.5 puntos)**

Solución: (a) No existe la inversa de B, si existe la inversa de A y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$(b) X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -14 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

55. Extremadura. Junio 2017. OPCIÓN A PROBLEMA 1

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio por envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

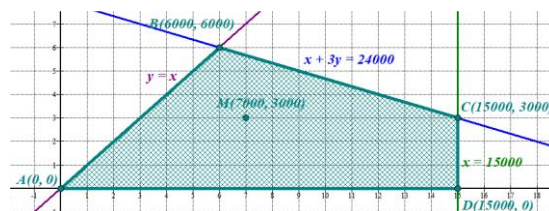
(a) ¿Cuántos envases de cada tipo han de producirse diariamente para hacer máximos los beneficios?

(3 puntos)

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

(0.5 puntos)

Solución: Las restricciones serían:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,1x + 0,3y \leq 2400 \\ x \leq 15000 \\ x \geq y \end{array} \right\}$$
Deseamos maximizar el beneficio: $B(x, y) = 0,5x + 1,4y$

El beneficio máximo es de 11700 € y se obtiene con 15000 envases pequeños y 3000 grandes.

56. Extremadura. Junio 2017. OPCIÓN B PROBLEMA 1

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar las matrices inversas de A y de B.

(1 punto)(b) Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ **(1 punto)**(c) Hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = B$ **(1.5 puntos)**

Solución: (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ (b) Calculamos la matriz resultado de cada miembro de la

igualdad y compruebo que se obtiene el mismo resultado. (c) $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

GALICIA

**1. Galicia. Extraordinaria 2025. 2.1.** Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A .

2.1.2. Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).

2.1.3. Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = BA^t$ y calcúlela.

Solución: 2.1.1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 2.1.2) $BA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Tiene rango 1.

2.1.3) $X = (BA^t - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}$

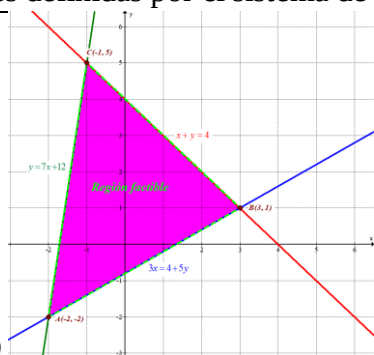
2. Galicia. Extraordinaria 2025. 2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \leq 4 \qquad 3x \leq 4 + 5y \qquad y \leq 7x + 12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.



Solución: 2.2.1) Los vértices de la región factible son los puntos $A(-2, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(-1, 5)$. 2.2.2) El punto $P(2, 1)$ si pertenece a la región factible y el punto $Q(0, -1)$ está situado fuera de la región factible. 2.2.3) El valor mínimo es -56 y se alcanza en el punto $C(-1, 5)$. El valor máximo es 8 y se alcanza en los puntos $A(-2, -2)$ y $B(3, 1)$. Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$.

3. Galicia. Ordinaria 2025. 2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A , A^{-1} .

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A , $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

Solución: 2.1.1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. 2.1.2) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

2.1.3) $X = (A - I)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$

4. Galicia. Ordinaria 2025. 2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4$$

$$x + y \leq 8$$

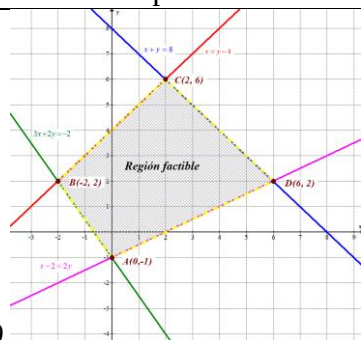
$$3x + 2y \geq -2$$

$$x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

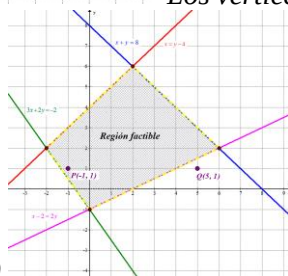
2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.



Solución: 2.2.1)

Los vértices de la región factible son los puntos $A(0, -1)$,



$B(-2, 2)$, $C(2, 6)$ y $D(6, 2)$.

2.2.2) El punto $P(-1, 1)$ si pertenece y el punto $Q(5, 1)$ está situado fuera de la región factible. **2.2.3)** El valor mínimo es -20 y se alcanza en el punto $C(2, 6)$. El valor máximo es 4 y se alcanza en los punto $A(0, -1)$ y en $D(6, 2)$. Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$.

5. Galicia. ABAU Extraordinaria 2024. EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A .

b) Justifique cual es el rango de A si $k = -5$.

c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para $k = -2$.

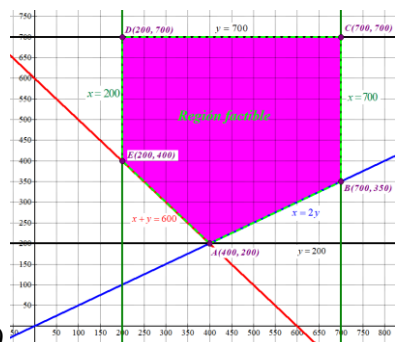
Solución: a) La matriz A no tiene inversa para $k = -5$. b) El rango de A es 2.

$$c) A^{-1} = \begin{pmatrix} -10/9 & -1/9 & 7/9 \\ 8/9 & -1/9 & -2/9 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

6. Galicia. ABAU Extraordinaria 2024. EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

- a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
 b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
 c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

Solución: a) Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 2x + 3y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$


- b) Los vértices de la región factible son los puntos A(400, 200), B(700, 350), C(700, 700), D(200, 700) y E(200, 400). c) Hay que comprar 400 metros de tela al distribuidor A y 200 al distribuidor B para conseguir un coste mínimo de 1400 €.

7. Galicia. ABAU Ordinaria 2024. EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.
 b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

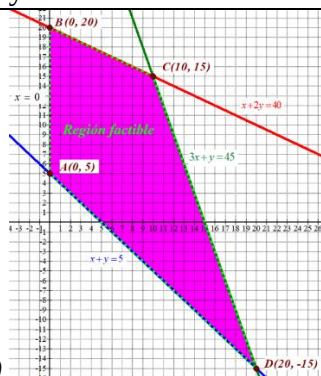
Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. El rango de la matriz B es 2. b) $X = (A \cdot B^t - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 7 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

8. Galicia. ABAU Ordinaria 2024. EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$

- a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

- b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.



Solución: a) Los vértices de la región factible son los puntos $A(0, 5)$, $B(0, 20)$, $C(10, 15)$ y $D(20, -15)$. b) El valor mínimo es -60 y se alcanza en el punto $B(0, 20)$ y el valor máximo es 85 y se alcanza en el punto $D(20, -15)$.

9. Galicia. ABAU Extraordinaria 2023. EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 1$, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A .

- c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

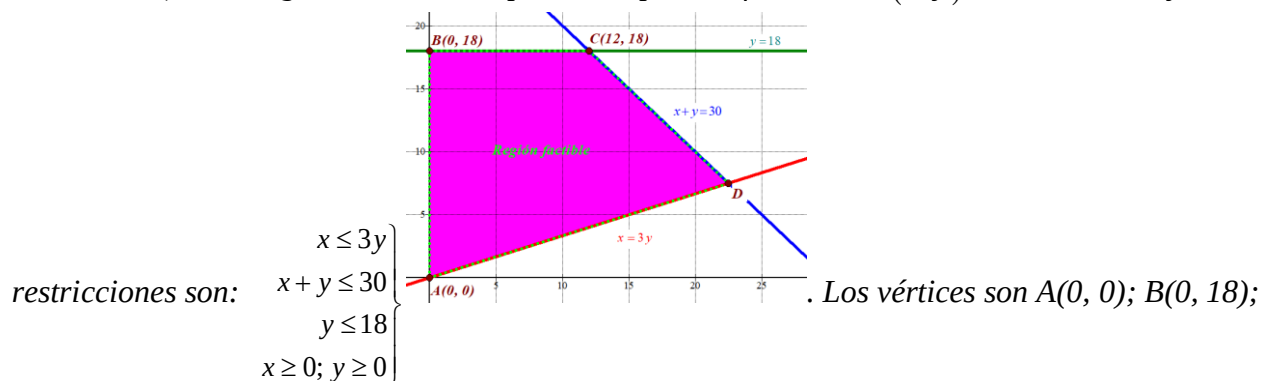
Solución: a) La matriz A tiene inversa si $a \neq \frac{2}{3}$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

10. Galicia. ABAU Extraordinaria 2023. EJERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm. Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

- a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.
b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?
c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Solución: a) Los ingresos vienen expresados por la función: $I(x, y) = 5000x + 6000y$. Las



11. Galicia. ABAU Ordinaria 2023. EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

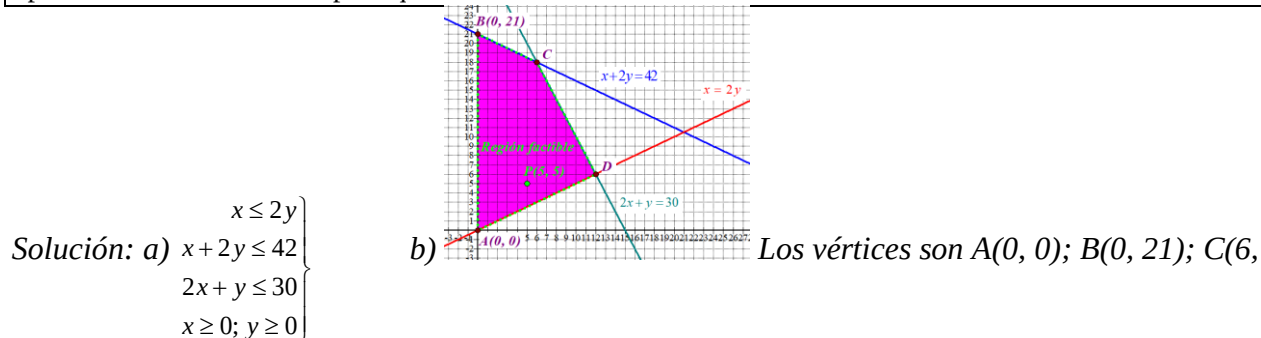
a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcule $A \cdot B$.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

Solución: a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

12. Galicia. ABAU Ordinaria 2023. EJERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?



18) y $D(12, 6)$. c) El máximo beneficio es de 504 000 € y se obtiene con 6 plantas de producción A y 18 de B.

13. Galicia. ABAU Extraordinaria 2022. EJERCICIO 1. Álgebra. Para dos matrices A y B se verifica que:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices A y B

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = (A - I)^{-1} B; X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

14. Galicia. ABAU Extraordinaria 2022. EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

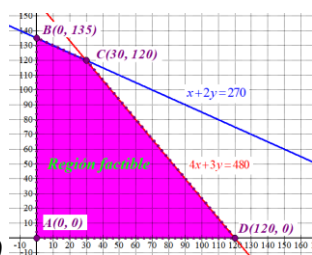
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

Solución: a) La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados

como: $B(x, y) = 1500x + 2000y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 480 \\ x + 2y \leq 270 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}.$$



b) Los vértices son A(0, 0); B(0, 135); C(30, 120) y D(120, 0).

c) El máximo beneficio es de 285.000 € y se produce ensamblando mensualmente 30 motores de moto y 120 de coche.

15. Galicia. ABAU Ordinaria 2022. EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, en donde I representa la matriz identidad de orden 3.

b) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

c) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

Solución: a) $A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}; A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

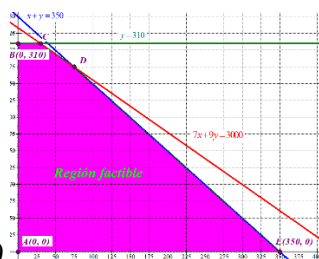
$$c) X = (A^2 - B)(A - I)^{-1}; X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Galicia. ABAU Ordinaria 2022. EJERCICIO 2. Álgebra. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A⁺ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A⁺. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A⁺. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcassas de aluminio

- Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

Solución: a) La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como

$$B(x, y) = 30x + 60y. \text{ Las restricciones son } \begin{cases} 7x + 9y \leq 3000 \\ x + y \leq 350 \\ y \leq 310 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



- Los vértices son A(0, 0); B(0, 310); C(30, 310), D(75, 275) y E(350, 0).
- El máximo beneficio es de 19500 € y se produce comprando 30 móviles calidad A y 310 calidad A⁺.

17. Galicia. ABAU Extraordinaria 2021. EJERCICIO 1. Álgebra.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
- Calcule A⁻¹ para x = 3, y = 1, z = 0.
- Resuelva el sistema B·A = C para a = 1.

Solución: a) Para y = 0 o z = 1 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) La solución es x = 3, y = -1, z = $\frac{1}{3}$

18. Galicia. ABAU Extraordinaria 2021. EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

- Plantee el problema para maximizar los ingresos.
- Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

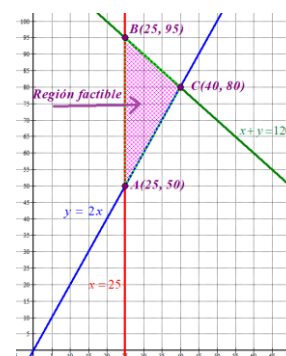
- c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

Solución: a) Llamamos “x” al número de empresas como clientes e “y” al

número de clientes particulares. Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \end{array} \right\}$. Deseamos

maximizar los ingresos que vienen dados en función del número de clientes con la expresión $I(x, y) = 386x + 229y$

c) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 33760 € que se consiguen con 40 empresas y 80 clientes particulares.



19. Galicia. Ordinaria 2021. EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m=1$.

Solución: a) Para $m \neq 0$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

20. Galicia. Ordinaria 2021. EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2 \quad x + y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

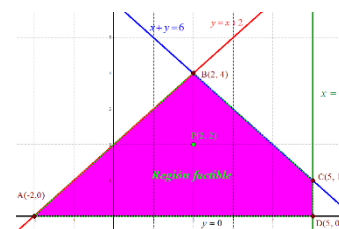
c) Determine esos valores máximo y mínimo.

Solución:

b) El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto D(5, 0)

El mínimo es -2 y se alcanza en toda el segmento AB, en los puntos A(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), ..., B(2, 4).

c) El valor máximo es 5 y el mínimo es -2



21. Galicia. Extraordinaria 2020. PREGUNTA 1. Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Solución:

a) Llamamos “x” al número de pollos de la granja A, “y” al de la granja B y “z” al de la C.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1,2y \\ y = 2z \\ x + y + z = 405 \end{array} \right\}$$

b) La granja A tiene 180 pollos, la B 150 y la C 75 pollos

22. Galicia. Extraordinaria 2020. PREGUNTA 2. Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

- Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
- Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
- Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:

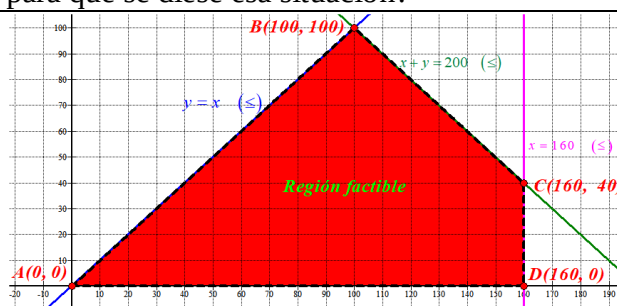
Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Sus vértices tienen coordenadas: A(0,0), B(100, 100), C(160, 40) y D(160, 0).

El coste del alojamiento es la función

$C(x, y) = 80x + 50y$. El coste máximo es de 14800 € contratando 160 habitaciones de tipo A y 40 de tipo B.



23. Galicia. Ordinaria 2020. PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$.
- Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A + B = 3C - B$ y resuélvalo.

Solución: a) $A + B = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $3C - B = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $a = -3, b = 3, c = 1$.

24. Galicia. Ordinaria 2020. PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

- Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.
- Represente la región factible y calcule sus vértices.
- Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Solución:

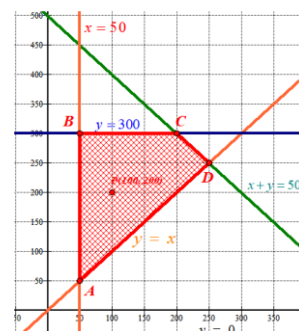
Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Sus vértices tienen coordenadas: $A(50,50)$, $B(50, 300)$, $C(200, 300)$ y $D(250, 250)$.

La función beneficio es $B(x, y) = 60x + 40y$.

El máximo beneficio es de 25000 € y se obtiene produciendo 250 focos tipo A y otros 250 del tipo B.



25. Galicia. Julio 2019. OPCIÓN A 1. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto.

- Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema.
- Escríbelo en forma matricial.
- Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Solución: a) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 80 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ La

solución es $x=16$; $y=8$; $z=12$. 16 billetes de 5 €, 8 de 10 € y 12 de 20 €.

26. Galicia. Julio 2019. OPCIÓN B 1. Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.

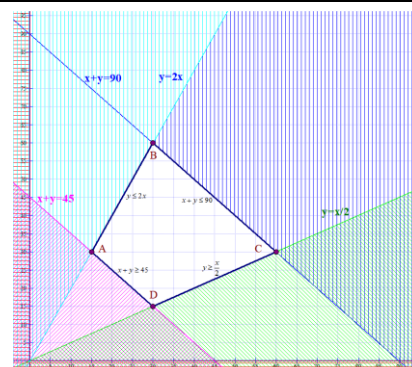
- Plantea y representa gráficamente el problema.
- ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

Solución: Las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ x \leq 2y \\ 2x \geq y \\ x + y \geq 45 \end{array} \right\}$$

La función Ingresos es $I(x, y) = 8x + 6y$, expresado en millones de euros.

El ingreso máximo se obtiene con 60 millones de litros de vino blanco y 30 de vino tinto. El ingreso máximo es 660 millones de euros.



27. Galicia. Junio 2019. OPCIÓN A 1. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcula la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.
- Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.
- Despeja la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcúlala.

Solución: a) $B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $X = (A-I)^{-1} B$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

28. Galicia. Junio 2019. OPCIÓN B 1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

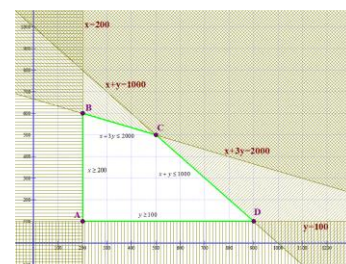
- a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.
 b) Representa la región factible.
 c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución: Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{array} \right\}$$

El valor máximo se alcanza en el punto D(500, 500).

Para maximizar los ingresos se deberían vender 500 lotes de la oferta 1 y otros 500 de la oferta 2. Con esas ventas los ingresos ascenderían a 40 000 €.



29. Galicia. Septiembre 2018. OPCIÓN A 1. Las ventas de tres productos P1, P2 y P3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x, y, z las ventas de los productos P1, P2 y P3 respectivamente

- a) Expresa el sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula la matriz inversa de A, siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes. c) Calcule las ventas x, y, z de esos tres productos.

Solución: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $x = 1, y = 2, z = 3$

30. Galicia. Septiembre 2018. OPCIÓN B 1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:

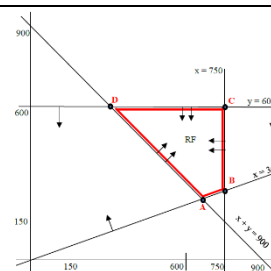
- a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

Solución: a) Llamamos "x" al n° de reproductores de A, "y" al n° de

reproductores de B. Las restricciones son $\left\{ \begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right.$ No se pueden enviar 400

unidades desde cada almacén, pues (400, 400) no pertenece a la región factible.

b) La función a minimizar son los costes $C(x, y) = 0.3x + 0.25y$



El coste mínimo es de 240 € y para ello deben enviarse 300 unidades desde A y 600 desde B.

31. Galicia. Junio 2018. OPCIÓN A 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices $B - C$ y $A \cdot B$. Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$

Solución: $a = 2$, b puede ser cualquier valor, $c = 2$.

32. Galicia. Junio 2018. OPCIÓN B 1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,

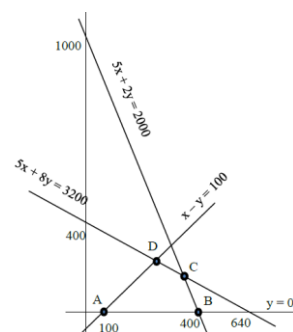
- a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

Solución: Llamamos " x " al n° de bizcochos suaves e " y " al n° de bizcochos duros. La función objetivo es maximizar los beneficios por las ventas $f(x, y) = 6x + 4.5y$.

Las restricciones son

$$\begin{cases} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x - y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Para maximizar las ventas debe fabricar 320 bizcochos suaves y 200 duros para obtener unas ventas de 2820 €.



33. Galicia. Septiembre 2017. OPCIÓN A 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$.

(a) Calcula los valores de a , b y c para que se satisfaga la igualdad $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidad de orden 3.

(b) Para $a = 4$, $b = -3$ y $c = 1$ calcula el rango de la matriz $A + B - 2C$.

Solución: (a) $a = 4$, $b = -3$, $c = 1$ (b) El rango es 2.

34. Galicia. Septiembre 2017. OPCIÓN B 1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.

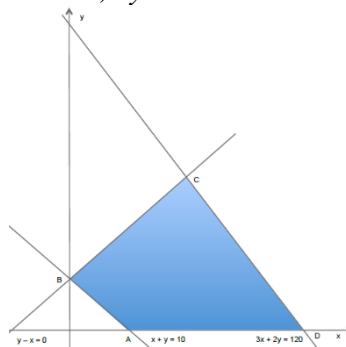
(a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.

(b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?

Solución: (a) Llamamos “x” al n° de colectores A, “y” al n° de colectores B.

Las restricciones son

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 150x + 100y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



(b) Deseamos maximizar los beneficios dados por la expresión $B(x, y) = 130x + 140y$

El máximo beneficio se obtiene produciendo 20 colectores del tipo A y 30 del tipo B.

35. Galicia. Junio 2017. OPCIÓN A 1. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula los valores de x e y para los que se cumple la igualdad $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determina el rango de las matrices A y B.

(c) Calcula X en la ecuación matricial $X + A^t = 2I + B$, A^t matriz traspuesta de A e I matriz identidad de orden 3.

Solución: (a) $x = 5/3$ $y = -4/3$ b) Rango de A es 3 y el rango de B es 2 c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

36. Galicia. Junio 2017. OPCIÓN B 1. Sea la función lineal $f(x, y) = 2x - 3y$ sujeta a las restricciones $x + 2y \leq 40$, $x + y \geq 5$, $3x + y \leq 45$, $x \geq 0$.

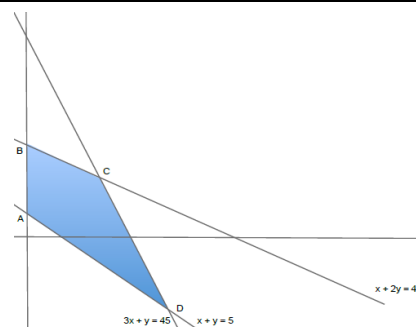
(a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

(b) Calcula el punto o puntos de esa región donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

Solución: (a) Los vértices tienen coordenadas A(0, 5), B(0, 20), C(10, 15) y D(20, -15)

(b) El valor máximo se alcanza en el vértice D(20, -15).

El valor mínimo se alcanza en el punto B(0, 20)

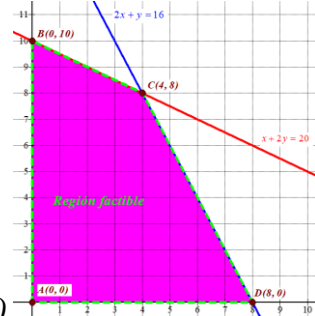


LA RIOJA



- 1. La Rioja. Extraordinaria 2025. 1.** Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:
- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
 - (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
 - (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
 - (0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

Solución: a) La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 200x + 300y$. Nuestro objetivo es

maximizarlo. Las restricciones son $x + 2y \leq 20$ y $2x + y \leq 16$. b)  c) Los vértices de la

región factible son A(0, 0), B(0, 10), C(4, 8) y D(8, 0). d) El beneficio máximo tiene un valor de 3200 € y se consigue con la fabricación y venta de 4 armarios tipo A y 8 tipo B.

- 2. La Rioja. Extraordinaria 2025. 2.1.** a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix}$ verifique la igualdad: $A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) **(1 PUNTO)** Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$. Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución: a) $k = -8$ b) $B^{-1} = B$. $X = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix}$

- 3. La Rioja. Extraordinaria 2025. 2.2.** Dadas las matrices $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, se pide:

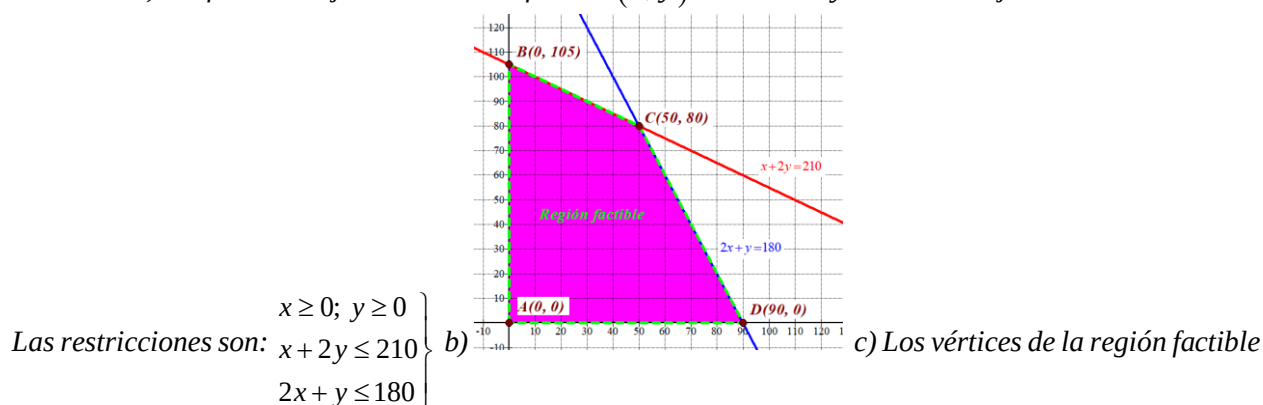
- a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$ (A^T representa la matriz traspuesta de A)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$.

4. La Rioja. Ordinaria 2025. 1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 350 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

Solución: a) La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 60x + 80y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.



son $A(0, 0)$, $B(0, 105)$, $C(50, 80)$ y $D(90, 0)$. d) El beneficio máximo es de 9400 € y se consigue con la fabricación de 50 joyas tipo A y 80 tipo B.

5. La Rioja. Ordinaria 2025. 2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k : número real), se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “ k ” la matriz A posee rango 3.

- b) **(1 PUNTO)** Para $k = 1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

Solución: a) La matriz A tiene rango 3 para cualquier valor de “ k ” distinto de 2 y de 3. b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. La Rioja. Ordinaria 2025. 2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada

llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanes, bolas y llaveros) que han vendido.

Solución: Se han vendido 25 imanes, 20 bolas navideñas y 16 llaveros.

7. La Rioja. Extraordinaria 2024. 1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \quad [1.75 \text{ puntos}]$$

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? [0.75 puntos]

Solución: La solución del sistema es $x = 2$; $y = -1$; $z = 1$. Debemos sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación por $-\frac{1}{2}$ para que resulte un sistema sin soluciones.

8. La Rioja. Extraordinaria 2024. 1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

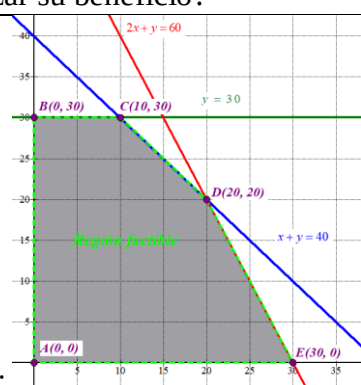
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [2.5 \text{ puntos}]$$

Solución: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices que cumple $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. La Rioja. Extraordinaria 2024. 1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.

Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.

Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? [2.5 puntos]



Solución: El beneficio máximo son 180 € y se consigue cocinando 20 pasteles de cada clase.

10. La Rioja. Ordinaria 2024. 1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? [2.5 puntos]

Solución: Nos dan 4 ducados por cada cordero, 6 por cada puerco y 8 por cada ternero.

11. La Rioja. Ordinaria 2024. 1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale -1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X?

[2.5 puntos]

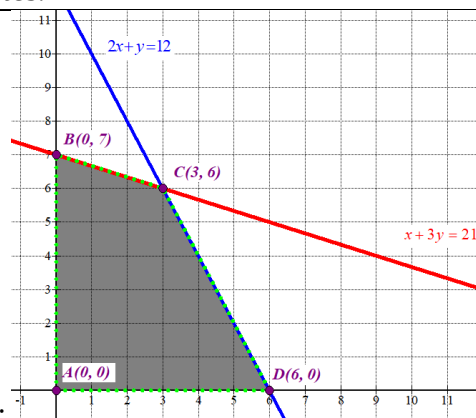
Solución: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. El determinante de A vale -2 y el de X vale 2.

12. La Rioja. Ordinaria 2024. 1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes.

[2.5 puntos]



Solución: El beneficio máximo es de 39 monedas y se consigue con 3 metros de algodón ecológico y 6 metros de lino de alta calidad. El objetivo de maximizar el beneficio con las nuevas condiciones se consigue con 0 metros de algodón ecológico y 7 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 70 monedas.

13. La Rioja. Extraordinaria 2023. 1.1.- Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas;
- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto;
- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

[2.5 puntos]

Solución: Se deben dar 4 puntos por victoria, 2 por empate y 1 por derrota.

14. La Rioja. Extraordinaria 2023. 1.2.- Una de las dos matrices siguientes tiene matriz inversa. Calcúlala:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2 puntos]

¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

[0.5 puntos]

Solución: La matriz inversa de A^{-1} es la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. La matriz B no tiene inversa pues su determinante vale 0.

15. La Rioja. Extraordinaria 2023. 1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que

$$0 \leq y, 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 4,$$

$$x + 2y \leq 6, y$$

$$x \leq 3.$$

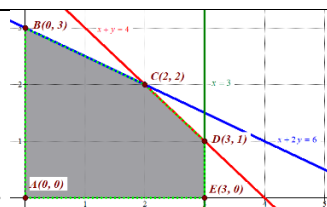
[1 punto]

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones:

i) $x + \frac{1}{2}y$

ii) $x + \frac{3}{2}y$

iii) $x + 3y$

[1.5 puntos]

Solución: El valor máximo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ se obtiene en el punto $D(3, 1)$. El valor máximo de la función $g(x, y) = x + \frac{3}{2}y$ se obtiene en el punto $C(2, 2)$. El valor máximo de la función $h(x, y) = x + 3y$ se obtiene en el punto $B(0, 3)$.

16. La Rioja. Ordinaria 2023. 1.1.- Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva, por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase?

[2 puntos]

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total?

[0.5 puntos]

Solución: (i) Ha comprado 25 botellas de vino joven, 40 de vino de crianza y 35 de vino reserva. (ii) Ha gastado 840 €.

17. La Rioja. Ordinaria 2023. 1.2.- Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlela:

(i) A

(ii) B

(iii) C

(iv) ABC

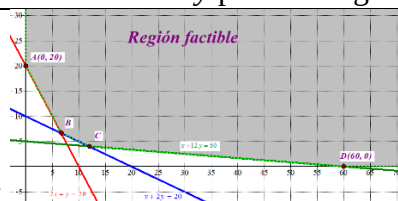
(v) BC

[2.5 puntos]

Solución: (i) No existe la inversa de la matriz A . (ii) La inversa de B existe y es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(iii) Existe la inversa y es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. (iv) No existe la inversa de la matriz ABC. (v) Existe y la inversa es $(BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

18. La Rioja. Ordinaria 2023. 1.3.- Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x , y después usaremos la segunda durante un tiempo y .
Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.
¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible? **[2.5 puntos]**



Solución: El objetivo de minimizar el tiempo necesario para realizar lo pedido en el ejercicio se logra dedicando $20/3$ a la primera técnica y lo mismo a la segunda. El tiempo total es de $40/3$. Dedicaríamos 6 horas y 40 minutos a cada técnica.

19. La Rioja. Extraordinaria 2022. 1.1.- Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:
(i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;
(ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;
(iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.
¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? **[1.75 puntos]**

Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? **[0.75 puntos]**

Solución: (a) Cada pieza A pesa 2 gramos, cada pieza B pesa 3 gramos y cada pieza C pesa 7 gramos.
(b) No es posible pues sale un peso **negativo** para la pieza C.

20. La Rioja. Extraordinaria 2022. 1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma

$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b . **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022} . **[0.5 puntos]**

Solución: (i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$ No es posible. (ii) $A^{2022} = A$

21. La Rioja. Extraordinaria 2022. 1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{aligned} 0 \leq y, 0 \leq x, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 10, \\ x + 2y \leq 10. \end{aligned}$$

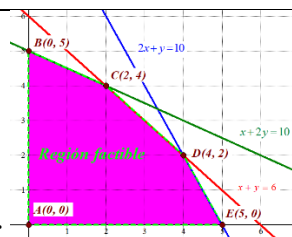
[1 punto]

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x, y) = 4x + 3y.$$

[1 punto]

Si dicho valor máximo se alcanza en el punto (x_0, y_0) , ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0) ? [0.5 puntos]



Solución: : El máximo valor de $f(x, y) = 4x + 3y$ en la región factible es 22. Se alcanza en el punto $C(2, 4)$. La función $g(x, y) = 4y + 3x$ alcanza su máximo en el punto $D(4, 2)$.

22. La Rioja. Ordinaria 2022. 1.1.- ¿Para qué valores de a tiene soluciones el siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + az = 12 \end{cases}$$

[0.75 puntos]

Resuelve el sistema en el caso $a = 0$. [1.25 puntos]

Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante? [0.5 puntos]

Solución: El sistema tiene solución para los valores de a distintos de 4. Para $a = 0$ la solución es $x = 7, y = -1, z = 3$. Si hacemos el cambio el sistema será compatible indeterminado

23. La Rioja. Ordinaria 2022. 1.2.- Justifica que la siguiente matriz es regular, y calcula su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.5 puntos]

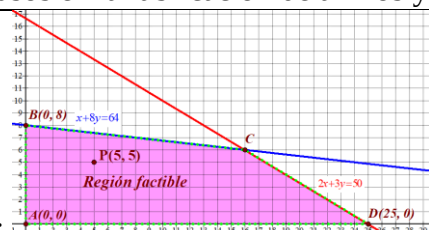
Solución: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

24. La Rioja. Ordinaria 2022. 1.3.- Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 €, y el del brazalete 320 €. A cambio, por cada anillo gana 10 € y por cada brazalete gana 90 €.

Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2560 €, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio?

[1.75 puntos]

¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes? **[0.75 puntos]**



Solución: El beneficio máximo se obtiene elaborando 8 brazaletes a la semana y ningún anillo. Si tuviese apalabrados 8 anillos cambiaría la respuesta, pues la solución óptima es no hacer ninguno. En la primera situación (sin apalabrar nada) emplearía 24 horas. En la segunda situación (apalabrados 8 anillos) emplearía 37 horas semanales.

25. La Rioja. Extraordinaria 2021. 1.1.- En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? **[2 puntos]**

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? **[0.5 puntos]**.

Solución: (a) De los 3 números llamamos “x” al mayor, “y” al intermedio, “z” al menor.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 73 \\ x - 3 = y + z \\ 2z + x = 3y + 8 \end{array} \right\} \text{ Los números son 38, 20 y 15} \quad (b) \text{ El cuarto número es el 29}$$

26. La Rioja. Extraordinaria 2021. 1.2.- Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) **[0.75 puntos]**

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[1.75 puntos]**

Solución: (i) $X = \frac{1}{2}A^{-1}$ $Y = \frac{1}{2}I$ (ii) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

27. La Rioja. Extraordinaria 2021. 1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

$$x + y \leq 3, \quad y$$

$$x + 3y \leq 6$$

[1.25 puntos]

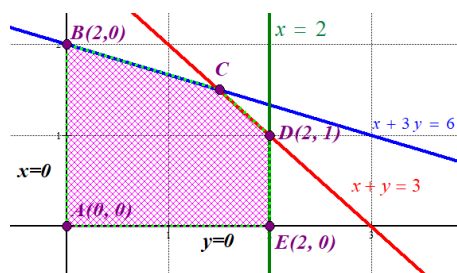
Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \quad y \quad g(x, y) = x + 5y \quad \textbf{[1.25 puntos]}$$

Solución:

El valor máximo de $f(x, y) = 7x + 5y$ en la región es 19 y se alcanza en el punto $D(2, 1)$.

El valor máximo de $g(x, y) = x + 5y$ en la región es 10 y se alcanza en el punto $B(0, 2)$.



28. La Rioja. Ordinaria 2021. 1.1.- Discute el siguiente sistema en función del parámetro a [1.25 puntos]:

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ 2x - ay + 2az &= 5 \\ x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$ [1.25 puntos].

Solución: Si $a \neq 0$ y $a \neq 3/2$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 0$ es incompatible. Si $a = 3/2$ es compatible indeterminado.

Para $a = 1$ la solución es $x = 0$; $y = 1$; $z = 3$.

29. La Rioja. Ordinaria 2021. 1.2.- Consideramos la ecuación matricial

$$X^2 - X = 2I$$

Donde I es la matriz identidad.

(i) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación? [2 puntos]

(ii) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices? [0.25 puntos]

(iii) Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango? [0.25 puntos]

Solución: (i) Las matrices serían $X = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$ o bien $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $X^2 - X = X(X - I)$ (iii) El rango de X es n .

30. La Rioja. Ordinaria 2021. 1.3.- En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad x de polvo sintético con una cantidad y de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 6 && \text{(para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),} \\ 5x + 4y &\leq 20 && \text{(para mantener la gama de color adecuada),} \\ y &\leq x && \text{(para que la viscosidad no sea excesiva).} \end{aligned}$$

(a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones. [0.75 puntos]

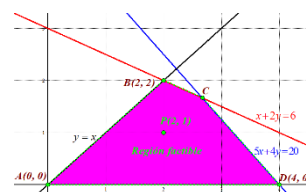
(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar? [0.75 puntos]

(c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo ($x + y$) que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo? [1 punto]

Solución: (a)

(b) El mayor valor de y es 2

(c) La cantidad máxima de polvo es $13/3$ que contiene $8/3$ de polvo sintético y $5/3$ de polvo mineral



37. La Rioja. Extraordinaria 2020. 1.1.- De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

(I) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo? **(2 puntos)**

(II) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía? **(0,5 puntos)**

Solución: (I) 18 bebés se llaman Alba, 24 Pedro y 6 se llaman Mateo. (II) 15 Se llaman Lucía.

31. La Rioja. Extraordinaria 2020. 1.2.- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30} . **(1 punto)**

(III) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 punto)**

Solución: (I) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A$ (II) $A^{15} = A$; $A^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (III) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

32. La Rioja. Extraordinaria 2020. 1.3.- Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil euros y la de viura 3 mil euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

(I) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones?

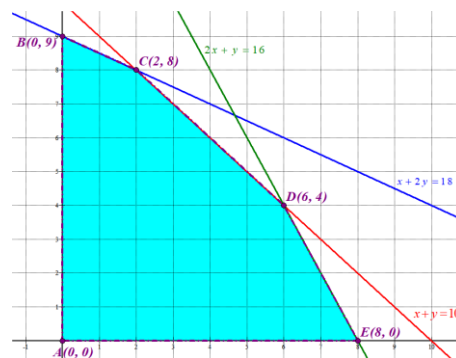
Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos. **(1,25 puntos)**

(II) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo. **(1,25 puntos)**

Solución: I) Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

II) $B(x, y) = 2x + 3y$. Con 2 hectáreas de tempranillo y 8 de viura se cumplen las restricciones del problema y se obtiene un beneficio máximo de 28 mil euros.



33. La Rioja. Ordinaria 2020. 1.1.- Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$ay + az = 0$$

$$y + z = 0$$

$$4x - 2y + az = a$$

(I) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado? **(0.75 puntos)**

(II) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones? **(0.5 puntos)**

(III) Resuelve el sistema si $a = 0$. **(1.25 puntos)**

Solución:

(I) Nunca es compatible y determinado. (II) El sistema siempre tiene solución.

(III) La solución es $x = -\frac{1}{2}t$; $y = -t$; $z = t$

34. La Rioja. Ordinaria 2020. 1.2.- Dada una matriz cuadrada A

(I) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo? **(0.5 puntos)**

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la inversa de A . **(0.75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$3X + 2Y = A$$

(1.25 puntos)

$$X + Y = 2A$$

Solución:

(I) Sí. Calculando su determinante. Si es distinto de cero la matriz tiene inversa.

(II) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (III) $X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$

35. La Rioja. Ordinaria 2020. 1.3.- Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

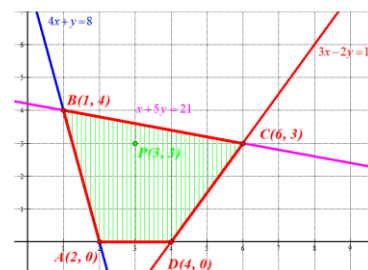
$$4x + y \geq 8 \quad 3x - 2y \leq 12 \quad x + 5y \leq 21 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1.25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1.25 puntos)**

Solución:

El máximo beneficio es 10 y se obtiene para $x = 6$ e $y = 3$.



36. La Rioja. Julio 2019. A1.1.- Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Solución:
$$\left. \begin{array}{l} a + b + n = 65 \\ 2a = 3b \\ 2n = a \end{array} \right\} \text{Alba ha marcado 30 goles, Blanca ha marcado 20 y Naia 15.}$$

37. La Rioja. Julio 2019. A2.1.- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3 . **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} . **(0.5 puntos)**

(III) ¿Existe alguna matriz X , (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? **(1 punto)**

Solución: (I) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (II) $A^{15} = A^{14} = A^{13} = \dots = A^3 = A^2 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(III) Existen infinitas matrices que cumplen lo pedido, todas las que tengan la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$.

Por ejemplo si tomamos $a = 1$ y $b = 1 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

38. La Rioja. Julio 2019. B2.1.- Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). **(1 punto)**

(II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. **(1 punto)**

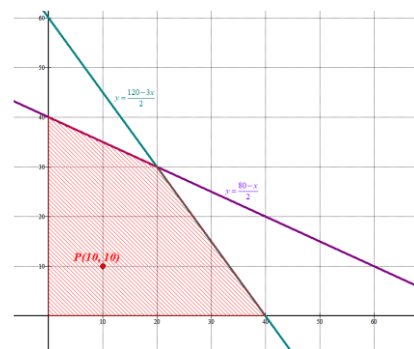
Solución:

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{array} \right\}$$

(II) $\text{Ingresos}(x, y) = 200x + 150y$

El máximo ingreso es de 8500 € y se produce en el punto D, que significa producir 20 coches y 30 cunas.



39. La Rioja. Junio 2019. Al. 1.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A . **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A ? **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z) . Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

Solución: (I) $|A| = -a^2(a+1)$ (II) La matriz A tiene inversa cuando a es distinto de 0 y de -1 .

(III) La solución es $x = -t$; $y = -t$; $z = t$

40. La Rioja. Junio 2019. A2.1.- Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? **(1 punto)**

(II) Si la herencia fuese de 99000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? **(1 punto)**

Solución:

$$a) \begin{cases} 2a - b - n = 6000 \\ -a + 2b - n = 0 \\ -a - b + 2n = -6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = n + 2000 \\ a = n + 4000 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Alba recibe 4000 euros más que Naia y Blanca recibe 2000 más} \\ \text{que Naia. Por lo tanto, Alba recibe 2000 euros más que Blanca.} \end{array} \right.$$

b) Alba recibe 35000 €, Blanca recibe 33000 € y Naia recibe 31000 €.

41. La Rioja. Junio 2019. B2.1.- Las restricciones de un problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

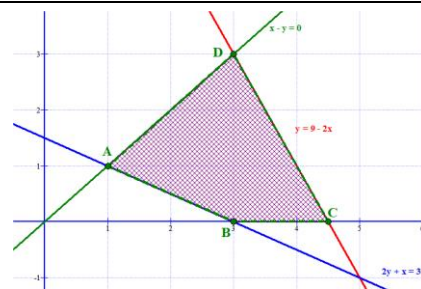
(I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. **(1 punto)**

(II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? **(1 punto)**

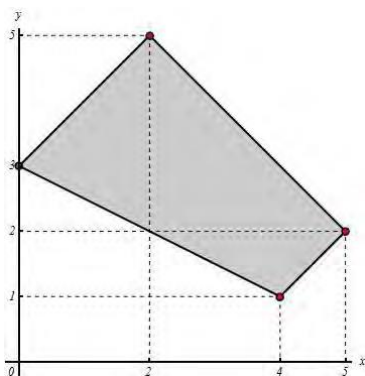
Solución:

La función ingresos $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ tiene el mismo valor máximo en $A(1, 1)$ que en $D(3, 3)$. También lo tendrá en $E(2, 2)$. Cualquiera de estos 3 puntos dan un máximo ingreso.

También cualquier punto del segmento AD .



42. La Rioja. Julio 2018. Pregunta A1.2. (1+1 puntos) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



a) Determina el citado conjunto de restricciones.

b) Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

Solución:

$$\begin{cases} y - x \leq 3 \\ 2y + x \geq 6 \\ y - x \geq -3 \\ y + x \leq 7 \end{cases}$$

a) Las restricciones serían

b) El máximo se alcanza en el punto $B(2, 5)$

43. La Rioja. Julio 2018. Pregunta A2.2. (1+1 puntos) Consideramos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2(a-1)x - y + 2z = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + y + 2(a+1)z = 4 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real.

- a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?
 b) Resuelve el sistema para $a = 0$. ¿Es posible resolver el sistema para $a = 1$?

Solución:

a) Para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$. b) Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. La solución es $x = 2 - t$; $y = 0$; $z = t$. Para $a = 1$ el sistema es incompatible.

44. La Rioja. Julio 2018. Pregunta B2.2. (1+1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a-7 & -6 \\ 6 & 3a+6 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .
 b) Tomando $a = 1/3$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X + 6 \cdot I_2 = A^3 + A \cdot A^t$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Solución: a) Existe la matriz inversa de A cuando a es distinto de 1 y de $-2/3$. b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

45. La Rioja. Junio 2018. Pregunta A1.2. (0.5+1+0.5 puntos) La productora cinematográfica *Filmtropía* va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película uno	Película dos	Película tres
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (en miles de euros)	17	40	27

- a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.
 b) Determina dichos honorarios.
 c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + tz = 17 \\ 4x + 4y + (3t-2)z = 40 \\ 2x + 3y + (2t-1)z = 27 \end{array} \right\} \quad \text{b) La solución es } x = 5 - t; \quad y = 7 - 2t; \quad z = 4$$

c) Los sueldos se fijarían en 3000 € por día para actores y actrices y 4000 € por día para cada intérprete infantil.

46. La Rioja. Junio 2018. Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a+2 & 2(a+1) \\ -(a+1) & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = 3 \cdot A^t + A - 3 \cdot I_2$

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Solución: a) Existe la matriz inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de $-\frac{1}{2}$. b) $X = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}$

47. La Rioja. Junio 2018. Pregunta B2.2. (1+0.5+0.5 puntos) Sean

$$\begin{cases} 3(y-2) \leq x \leq 2y \\ 2(2-y) \leq x \leq 6-y \end{cases},$$

las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

a) Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.

b) ¿Cuál es máximo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región factible?

c) Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x, y) = ax + 3y$ en la región factible es quince, ¿cuál es el valor de a ?

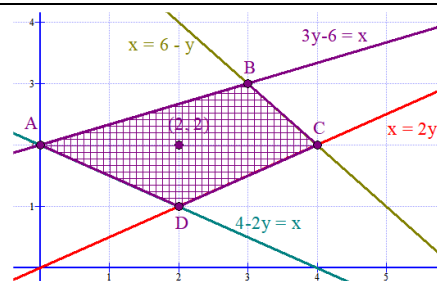
Solución:

a) Las coordenadas de los vértices son:

$A(0, 2)$; $B(3, 3)$; $C(4, 2)$ y $D(2, 1)$.

b) El máximo se alcanza en el punto $C(4, 2)$.

c) El máximo está en B . El valor de a es 2.



48. La Rioja. Julio 2017. Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) Sea a un parámetro real.

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + 2az = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?

b) Calcular la solución para $a = 1$.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$. b) La solución es $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 0$.

49. La Rioja. Julio 2017. Pregunta A2.1. (1+1 puntos) Cierta empresa fabrica puertas y ventanas. Las instalaciones de la empresa imponen las siguientes restricciones sobre la producción diaria:

1. El número de puertas realizadas debe ser mayor o igual al número de ventanas, pero nunca puede superar su doble.
2. La empresa puede fabricar, entre puertas y ventanas, un máximo de 900 unidades diarias, y el número de puertas debe ser al menos de 400 unidades.

Con estos datos, se pide:

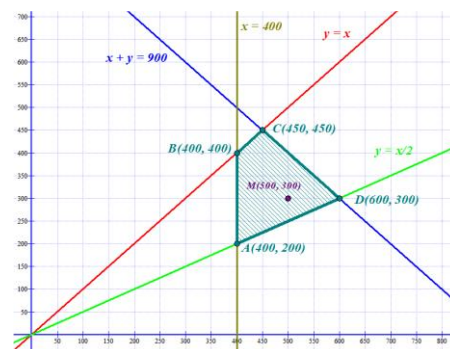
a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.

b) Si precio de venta de las puertas es de cien euros la unidad y el de las ventanas es de ciento veinte euros, ¿cómo debe ser la producción de la empresa para maximizar los ingresos diarios?

Solución:

$$a) \text{ Las restricciones son } \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x \geq y \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 900 \\ x \geq 400 \end{array} \right\}$$

b) Deseamos maximizar los ingresos $f(x, y) = 100x + 120y$. El máximo ingreso es de 99000 € y se consigue produciendo 450 puertas y 450 ventanas.



50. La Rioja. Julio 2017. Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5-3a & 2-a \\ 2(2-a) & 1-a \end{pmatrix}.$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = -2$, determinar una matriz X tal que $4 \cdot X \cdot A = A^t + A^2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A .)

Solución: a) Existe inversa de la matriz A cuando $a \neq \sqrt{3}$ y $a \neq -\sqrt{3}$. b) $X = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

51. La Rioja. Junio 2017. Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de <i>snacks</i> vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.

b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Solución:

$$a) \left. \begin{array}{l} 20x + 40y + 20z = 210 \\ 12x + 25y + 13z = 131 \\ 15x + 32y + 24z = 178 \end{array} \right\} b) \text{ El precio del refresco es 2 €, el bocadillo 3,5 € y la bolsa de snacks es 1,5 €.$$

52. La Rioja. Junio 2017. Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Tomando $a = -1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = A^t - A + 8 \cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Solución: a) Existe la matriz inversa para todos los valores de a distintos de 1 y 3. b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$

53. La Rioja. Junio 2017. Pregunta B2.2. (1 + 1 puntos) Los productores de las películas de *James Bond* ya se han puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.

Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

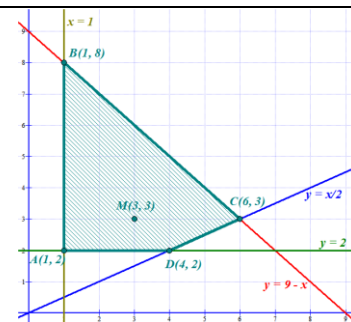
- a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.
- b) Si cada escena de acción aporta 0.8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1.2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 9 \end{array} \right\} \text{a) El conjunto de las restricciones es}$$

b) La función que nos da el número de espectadores (en millones) es $f(x, y) = 1,2x + 0,8y$.

El máximo se obtiene en el punto $C(6, 3)$, que significa 6 persecuciones y 3 escenas de acción. El número máximo de espectadores es 9,6 millones.



MADRID

**1. Madrid. Extraordinaria 2025. Pregunta 2.1**

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución: a) Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) Para $a = 2$ las soluciones del sistema son

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

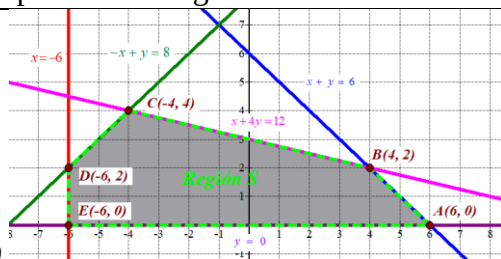
2. Madrid. Extraordinaria 2025. Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, y \geq 0, -x + y \leq 8, x + 4y \leq 12, x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S . Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.



Solución: a) Los vértices de la región S son $A(6, 0)$, $B(4, 2)$, $C(-4, 4)$, $D(-6, 2)$ y $E(-6, 0)$. b) El valor máximo que alcanza la función en la región S es 22 y se consigue en el vértice $D(-6, 2)$.

3. Madrid. Ordinaria 2025.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.

El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

Solución: a) Para recaudar el importe de 5400 euros debe vender 1125 kilos de sandía rayada, 900 de sandía negra sin pepitas y 675 de sandía negra con pepitas. b) La solución no es única: debe vender 675 kilos de sandía negra con pepitas, una cantidad de kilos entre 0 y 2025 de sandía rayada y los kilos restantes de sandía negra sin pepitas hasta llegar a completar los 2700 kilos totales.

4. Madrid. Extraordinaria 2024. 1. (2 puntos) Se consideran las matrices M , P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

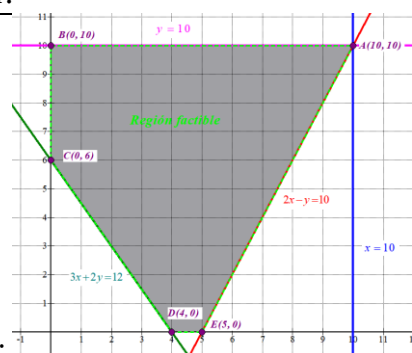
a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \quad \text{y} \quad (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

Solución: a) $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$. b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

5. Madrid. Extraordinaria 2024. 5. (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?



Solución: Los números buscados son 4 y 0. Siendo la suma mínima 4.

6. Madrid. Extraordinaria 2024. 6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ \text{Solución: } y + z = x \\ 4x + 2y + z = 180 \end{array} \right\} \text{En la tienda de música tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.}$$

7. Madrid. Extraordinaria 2024. 7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array} \right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución: a) Para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado y para $a = 3$ el sistema es compatible

indeterminado. b) Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

8. Madrid. Ordinaria 2024. 1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

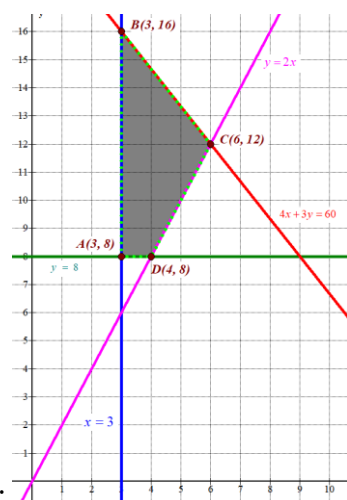
a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ a para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$, calcule A^{-1} .

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $-1, 0$ y 2 .

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

9. Madrid. Ordinaria 2024. 5. (2 puntos) Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?



Solución: El beneficio máximo es de 21 € y se consigue fabricando 6 tabletas de 4 gramos y 12 de 3 gramos.

10. Madrid. Ordinaria 2024. 6. (2 puntos) Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 10x + 8y + 5z = 4900 \\ x = 2z \end{array} \right\} \text{ Se han vendido 200 entradas generales, 300 para estudiantes y 100 entradas infantiles.}$$

11. Madrid. Ordinaria 2024. 7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 0$ es incompatible (sin solución) y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Para $a = 1$ las soluciones del sistema son
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right. ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

12. Madrid. Extraordinaria 2023. A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine A^3 y A^{2023} .

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución: a) $A^3 = Id_3$; $A^{2023} = A$ b) La matriz inversa de A existe y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. Madrid. Extraordinaria 2023. B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

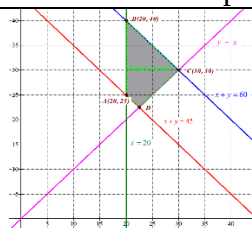
$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución: a) Si $a \neq 1$; $a \neq 2$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a = 2$ o $a = -3$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) La solución del sistema es: $x = \frac{-1}{3}$; $y = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1}{6}$.

14. Madrid. Extraordinaria 2023. B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?



Solución: La rutina más beneficiosa consta de 20 minutos de ejercicio de fuerza y 40 de ejercicios cardiovasculares. La menos beneficiosa es la que consta de 22 minutos y medio de cada tipo de ejercicios.

15. Madrid. Ordinaria 2023. A.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que

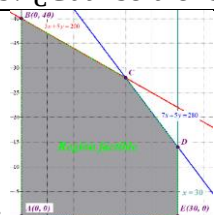
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

16. Madrid. Ordinaria 2023. B.1. (2 puntos) Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Solución: Hay 40 buñuelos de chocolate, 120 de nata y 60 de crema.

17. Madrid. Ordinaria 2023. B.2. (2 puntos) Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?



Solución: El beneficio máximo es de 53.6 € y se consigue en el vértice $C(20, 28)$, que significa fabricar 20 litros de pintura VERDE1 y 28 de pintura VERDE2.

18. Madrid. Extraordinaria 2022. A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

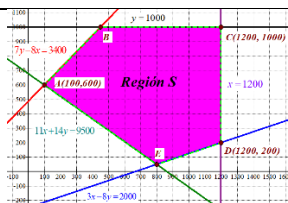
b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

Solución: a) La matriz A tiene inversa cuando a sea distinto de 0. b) $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{5}{4}$; $z = -2$

19. Madrid. Extraordinaria 2022. A.2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por $7y - 8x \leq 3400$, $3x - 8y \leq 2000$, $11x + 14y \geq 9500$, $x \leq 1200$, $y \leq 1000$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S , indicando el punto de la región en el cual se alcanza.



Solución: a) Los vértices de la región S son: $A(100, 600)$, $B(450, 1000)$, $C(1200, 1000)$, $D(1200, 200)$ y $E(800, 50)$

b) El valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S es 800 y se alcanza en el punto $A(100, 600)$.

20. Madrid. Extraordinaria 2022. B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 2 \\ x - az &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Si $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $a = -1$ el sistema es incompatible (sin solución).
b) La solución del sistema es: $x = 0, y = 0, z = 2$.

21. Madrid. Ordinaria 2022. A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A

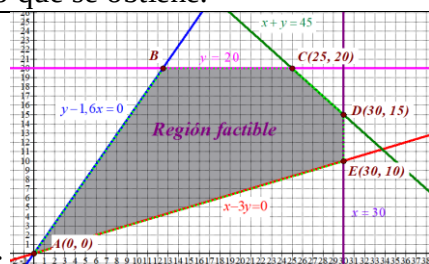
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.
b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

Solución: a) Para ser invertible el valor de a debe ser distinto de $1 - \sqrt{3}$ y de $1 + \sqrt{3}$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

22. Madrid. Ordinaria 2022. A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1;6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1e y por cada litro de chocolate un beneficio de 2e. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.



Solución: El beneficio máximo es de 65 € y se consigue mezclando 25 litros de leche con 20 litros de chocolate líquido.

23. Madrid. Ordinaria 2022. B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= a \\ ax - y - az &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución: a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$ es compatible indeterminado. Si $a = 0$ el sistema es incompatible.

b) La solución es $x = \frac{1}{4}$; $y = 1$; $z = -\frac{1}{4}$

24. Madrid. Extraordinaria 2021. A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

Solución: a) Para $a \neq -1$ b) $X = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

25. Madrid. Extraordinaria 2021. A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

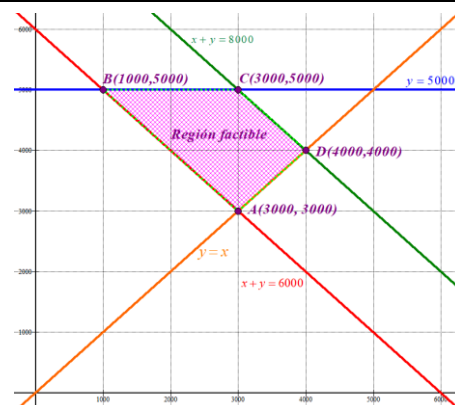
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución: a) Llamamos " x " a la cantidad de metros del modelo A2020 e " y " a la de metros del modelo B2020. Las restricciones

son $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x + y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ Los vértices tienen coordenadas $A(3000, 3000)$;

$B(1000, 5000)$; $C(3000, 5000)$ y $D(4000, 4000)$

b) El coste mínimo satisfaciendo las restricciones se produce en el vértice $B(1000, 5000)$, es decir, con 1000 metros de cable A2020 y 5000 metros de cable B2020. El coste mínimo es de 4500 €.



26. Madrid. Extraordinaria 2021. B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{array} \right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. b) La solución es: $x = 2$; $y = -1$; $z = 4$.

27. Madrid. Ordinaria 2021. A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para que se verifique $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

Solución: a) Se cumple cuando $a = 0$ y $b = 1$, también cuando $a = 0$ y $b = -1$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

28. Madrid. Ordinaria 2021. B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución: a) Si $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado (única solución) y si $a = \pm 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) Las soluciones son: $x = 1, y = t, z = 2 + t$.

29. Madrid. Ordinaria 2021. B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

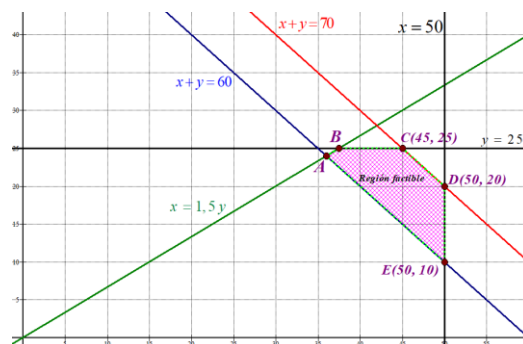
Solución: Llamemos $x =$ “kilos de almendras en la mezcla”, $y =$ “kilos de avellanas en la mezcla”.

Deseamos maximizar el beneficio $B(x, y) = x + 2y$.

Las restricciones del problema son

$$\begin{cases} x + y \leq 70 \\ x + y \geq 60 \\ x \geq 1,5y \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 95 € y se consigue mezclando 45 kg de almendras con 25 de avellanas.

**30. Madrid. Extraordinaria 2020. A.1.** (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

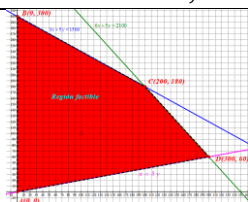
- a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.
- b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución: a) $a = \pm 1$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

31. Madrid. Extraordinaria 2020. A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

- a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.
- b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.



Solución: a) Los vértices de esta región son $A(0, 0)$; $B(0, 300)$; $C(200, 180)$ y $D(300, 60)$. b) El beneficio máximo es de 20800 € y se obtiene produciendo 200 m^3 de sustrato tipo A y 180 m^3 del tipo B.

32. Madrid. Extraordinaria 2020. B.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute el sistema para los diferentes valores de a .
- b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución: a) Para $a \neq -1$ y $a \neq 4$ el sistema es compatible determinado. Para $a = -1$ es incompatible.

Para $a = 4$ es compatible indeterminado. b) $x = y = -\frac{1}{2}$; $z = -\frac{3}{2}$

33. Madrid. Ordinaria 2020. A.1. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ x + ay + (a+1)z &= a \end{aligned} \right\}$$

- a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a .
- b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Para $a = -1$ es incompatible.

b) Las soluciones del sistema son $x = 0$; $y = t$; $z = 0$ siendo $t \in \mathbb{R}$

34. Madrid. Ordinaria 2020. B.1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
 b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución: a) Para $m = 4$ se cumple la identidad.

b) Para $m = 1 \rightarrow |A| = 4 \neq 0$. La matriz A es invertible. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

35. Madrid. Ordinaria 2020. B.2. (2 puntos)

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \quad 0 \leq y \leq 15, \quad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \quad y - x \leq 10, \quad y + 20 \geq 2x$$

- a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S .
 b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

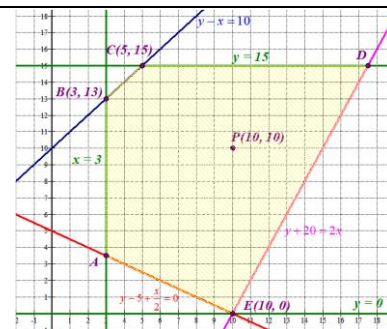
Solución:

a) Los vértices son: $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$; $B(3, 13)$; $C(5, 15)$; $D\left(\frac{35}{2}, 15\right)$ y

$E(10, 0)$.

b) El valor mínimo es 6.5 y se alcanza en el punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$

El valor máximo es 32.5 y se alcanza en el punto $D\left(\frac{35}{2}, 15\right)$

**36. Madrid. Julio 2019. Opción A Ejercicio 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
 b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Solución: a) La matriz A no tiene inversa para $a = 0$ y $a = 2$.

b) Para $a = 3$ la matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y la solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

37. Madrid. Julio 2019. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además, su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho.

Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

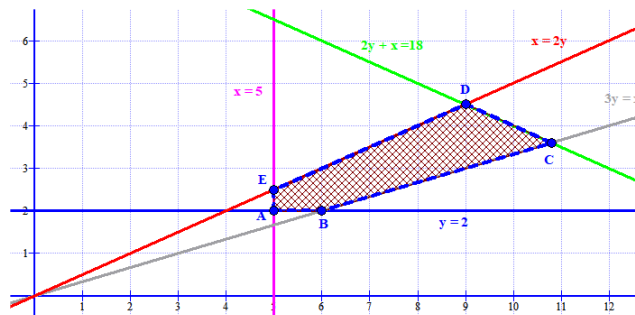
- Determinése la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
- Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determinése el largo del estanque y su coste.

Solución:

a) Resumiendo las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 2 \\ x \geq 5 \\ 3y \geq x \\ x \geq 2y \\ 1000y + 500x \leq 9000 \end{array} \right\}$$

b) El estanque debe tener 4,5 metros de ancho y 9 metros de largo. El coste es 9000 €.



38. Madrid. Julio 2019. Opción B Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz B es tal que $(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1} .

b) Calcúlese B^{-1} .

Solución: a) $A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

39. Madrid. Junio 2019. Opción A Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Obtégase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
- Determinése si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución: a) $k = \frac{29}{2}$

b) C no es invertible, pues no es cuadrada. $C^t \cdot C$ es cuadrada y su determinante vale $|C^t \cdot C| = 3 \neq 0$.

$C^t \cdot C$ es invertible. Su inversa es $(C^t \cdot C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

40. Madrid. Junio 2019. Opción A Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros

de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

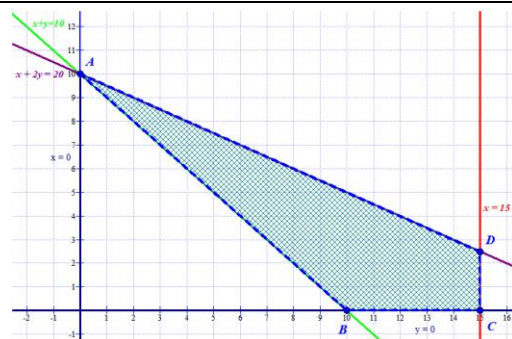
a) Representétese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución: a) Resumiendo todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) La función beneficio es $B(x, y) = 25x + 12y$. El máximo beneficio se obtiene para el punto $D(15, 2.5)$, que significa 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata. Consiguendo un beneficio de 405 €.



41. Madrid. Junio 2019. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m :

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{array} \right\}$$

a) Determinénse los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.

b) Resuélvase el sistema para $m = 1$.

Solución: a) Para $m = 1$ o $m = -1$. b) $x = t$; $y = 0$; $z = t$

42. Madrid. Julio 2018. Opción A Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz $\left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11}$.

b) Determinénse el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$.

Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X .

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M .

Solución: a) $\left[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t \right]^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) La matriz X es de dimensión 1×2 .

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 2×3 no es cuadrada y no puede ser invertible. $X = (2 \quad 3)$

43. Madrid. Julio 2018. Opción A Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 4; x + 2y \leq 12; x \leq 4; -x + 2y \leq 12\}$$

a) Representétese gráficamente la región S y calcúlese las coordenadas de sus vértices.

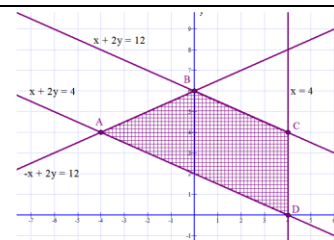
- b) Determinénse los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

Solución:

a) Los vértices son $A(-4, 4)$; $B(0, 6)$; $C(4, 4)$ y $D(4, 0)$

b) El valor máximo se alcanza en $D(4, 0)$ siendo este valor 12

El valor mínimo se alcanza en $A(-4, 4)$ siendo este valor -16



44. Madrid. Julio 2018. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= a \\ 2x + ay - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a .

b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución: a) Para $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, para $a = -2$ el sistema es incompatible. b) La solución es $x = 4$; $y = 0$; $z = 0$.

45. Madrid. Junio 2018. Opción A Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución: a) Hagamos el producto de las matrices y comprobemos si se obtiene la matriz identidad.

$A \cdot B = B \cdot A = Id$. b) $X = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

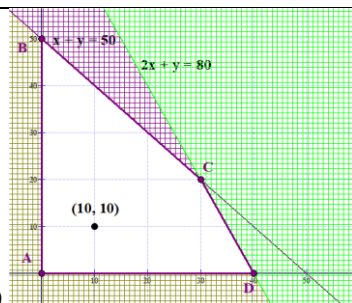
46. Madrid. Junio 2018. Opción A Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \leq 50, 2x + y \leq 80, x \geq 0, y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son: A (0, 0). B (0, 50), C (30, 20), D (40, 0). b) La función alcanza su valor máximo en el punto C(30, 20) siendo este valor máximo 230.

47. Madrid. Junio 2018. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a + 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discútase en función de los valores del parámetro a .
b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 1$ el sistema es incompatible.

b) La solución es $x = -\frac{13}{2}$; $y = -\frac{3}{2}$; $z = 12$.

48. Madrid. Septiembre 2017. Opción A Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left\{ \begin{aligned} x - 2y - z &= -2 \\ -2x - az &= 2 \\ y + az &= -2 \end{aligned} \right.$$

- a) Discútase en función de los valores del parámetro a .
b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución: a) Para $a \neq \frac{2}{3}$ el sistema es compatible determinado, para $a = \frac{2}{3}$ el sistema es incompatible.

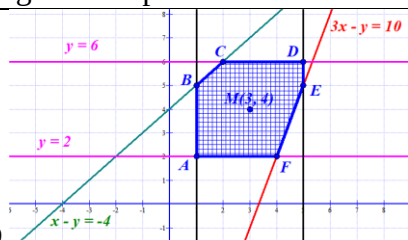
b) La solución es $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$.

49. Madrid. Septiembre 2017. Opción A Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5; \quad 2 \leq y \leq 6; \quad x - y \geq -4; \quad 3x - y \leq 10.$$

- a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténganse los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son $A(1, 2)$; $B(1, 5)$; $C(2, 6)$; $D(5, 6)$; $E(5, 5)$ y $F(4, 2)$. b) El valor mínimo es 400 y se obtiene en el punto $F(4, 2)$. El valor máximo es 3200 y se obtiene en el punto $C(2, 6)$.

50. Madrid. Septiembre 2017. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determínese la matriz C^{40} .
b) Calcúlese la matriz X que verifica

$$X \cdot A + 3B = C.$$

Solución: a) $C^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

51. Madrid. Junio 2017. Opción A Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) Determinése para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Solución: a) La matriz A tiene inversa para los valores de k distintos de 1 y de -1 .

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

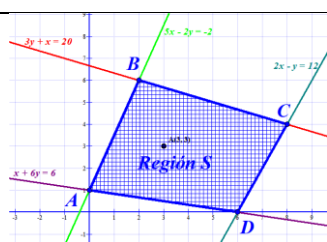
52. Madrid. Junio 2017. Opción A Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6 \ ; \ 5x - 2y \geq -2 \ ; \ x + 3y \leq 20 \ ; \ 2x - y \leq 12\} .$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determinénse los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.



Solución: a) Las coordenadas de sus vértices son $A(0, 1)$; $B(2, 6)$; $C(8, 4)$ y $D(6, 0)$. b) La función alcanza un mínimo en el vértice $B(2, 6)$, es decir, para los valores $x = 2$ e $y = 6$. Su valor mínimo es -10 . La función alcanza un máximo en el punto $D(6, 0)$, es decir, para los valores $x = 6$ e $y = 0$. Su valor máximo es 24 .

53. Madrid. Junio 2017. Opción B Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2 - a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución: a) Para $a \neq -2$ y $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado, para $a = -2$ el sistema es compatible indeterminado y para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

b) La solución es $x = 4t$; $y = 2t$; $z = t$

MURCIA

1. Murcia. Extraordinaria 2025. **APARTADO 1 CUESTIÓN 1:** [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a . [1 punto]

b) Resuelve el sistema para $a = 1$. [1 punto]

Solución: $a = 1$ a) Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 2$ el sistema es incompatible. b) $x = 0, y = 5, z = 6$

2. Murcia. Extraordinaria 2025. **APARTADO 1 CUESTIÓN 2:**

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. [0,5 puntos]

b) Representa la región factible. [0,75 puntos]

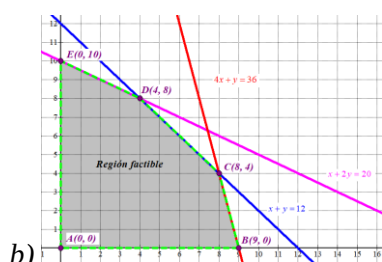
c) Encuentra los vértices de esta región. [0,5 puntos]

d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? [0,5 puntos]

e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. [0,25 puntos]

Solución: a) La función objetivo son los ingresos semanales que deseamos maximizar:

$$I(x, y) = 40x + 20y. \text{ Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones } \left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 36 \\ x + 2y \leq 20 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



b) c) Los vértices son: $A(0,0)$, $B(9,0)$, $C(8,4)$, $D(4,8)$ y $E(0,10)$

d) Se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos. e) 400 euros.

3. Murcia. Ordinaria 2025. APARTADO 1 CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2 . [0,25 puntos]

b) Halla $A + B + C^2$. [0,25 puntos]

c) Encuentra $(A - B)^{-1}$. [0,25 puntos]

d) Resuelve la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$. [0,75 puntos]

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Solución: a) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. c) $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

Este sistema es compatible determinado. La solución del sistema es $x = 1, y = 1, z = 2$.

4. Murcia. Ordinaria 2025. APARTADO 1 CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. [0,5 puntos]

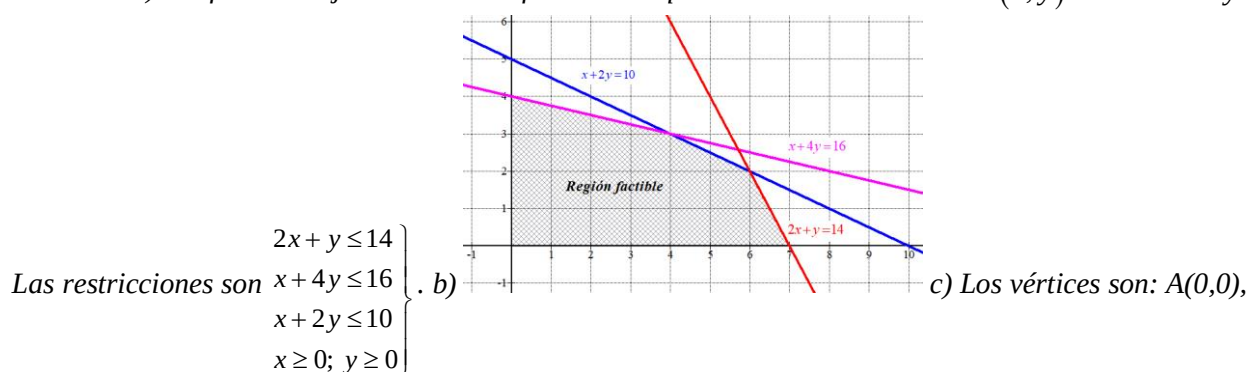
b) Representa la región factible. [0,75 puntos]

c) Encuentra los vértices de esta región. [0,5 puntos]

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? [0,5 puntos]

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. [0,25 puntos]

Solución: a) La función objetivo es el beneficio diario que deseamos maximizar: $B(x, y) = 400x + 500y$.



B(0,4), C(4, 3), D(6, 2) y E(7, 0) d) Se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos e) 3400 euros.

5. Murcia. Extraordinaria 2024. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

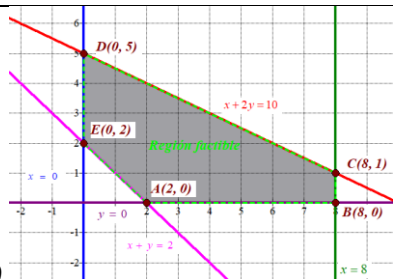
- El producto $A \cdot B$. (0,5 puntos)
- La inversa C^{-1} . (0,5 puntos)
- La diferencia $D - A \cdot B$. (0,5 puntos)
- Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot B + C \cdot X = D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $D - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$

6. Murcia. Extraordinaria 2024. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
- Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son: A(2,0), B(8,0),

C(8, 1), D(0, 5) y E(0, 2)

b) El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto E(0, 2). El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto C(8, 1).

7. Murcia. Ordinaria 2024. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

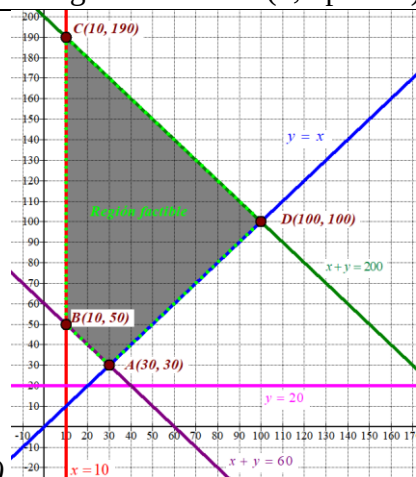
Solución: a) Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = -2$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) b) La solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$.

8. Murcia. Ordinaria 2024. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso

compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de pienso y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)



Solución: a) El coste mínimo se obtiene almacenando 30 contenedores de cada tipo. b) El gasto mínimo es de 150 euros.

9. Murcia. Extraordinaria 2023. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos)

Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 3$. (0,5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a = 0$ el sistema no tiene solución. Para $a = 3$ la solución es

$$x = \frac{1}{3}; y = 0; z = \frac{2}{3}.$$

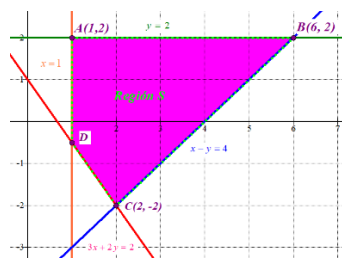
10. Murcia. Extraordinaria 2023. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos)

Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 4x - 5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son: $A(1,2)$, $B(6,2)$, $C(2,-2)$ y $D(1,-0.5)$. b) El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice $C(2,-2)$ y el mínimo valor de la función es -6 y se obtiene en el vértice $A(1,2)$.

11. Murcia. Ordinaria 2023. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos)

Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \end{array} \right\} (2 \text{ puntos})$$

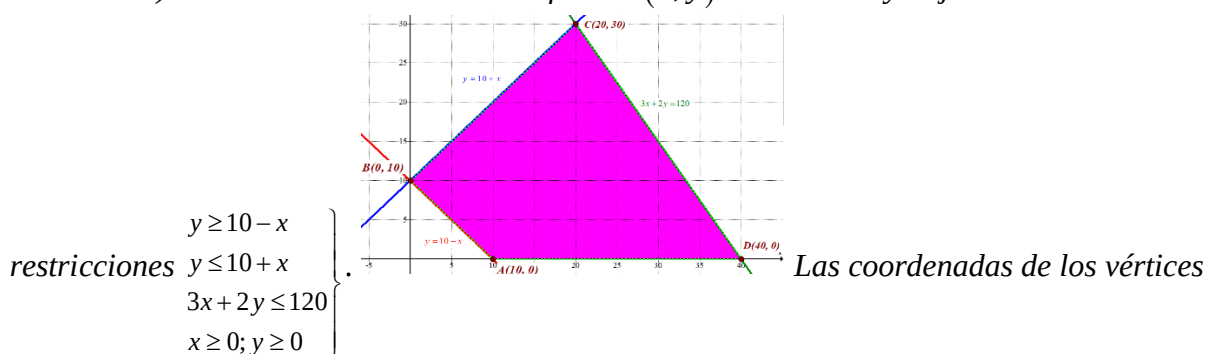
Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = 1$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Para $a = 0$ la solución es $x = 0$; $y = -1$; $z = 2$.

12. Murcia. Ordinaria 2023. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

- a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

Solución: a) Deseamos maximizar el beneficio $B(x,y) = 130x + 140y$. Ajustándose a las



son: $A(10,0)$, $B(0,10)$, $C(20,30)$ y $D(40,0)$. b) El máximo beneficio es de 6800 euros y se obtiene fabricando 20 smartwatch del tipo A y 30 del tipo B.

13. Murcia. Extraordinaria 2022. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

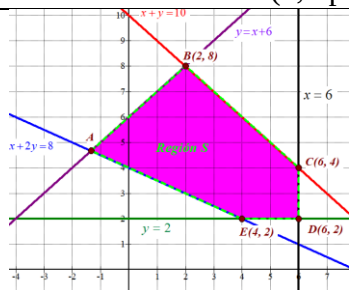
- a) Calcular el valor de a para el que $B^2 = A$ (0,75 puntos)
 b) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)
 c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$ (1 punto)

Solución: a) $a = 1$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 \\ 3/2 & 9 \end{pmatrix}$

14. Murcia. Extraordinaria 2022. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array} \right\}$$

- a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
 b) Determine el punto de la región factible dónde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)



Solución: a) . Los vértices tienen coordenadas $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $B(2, 8)$, $C(6, 4)$, $D(6, 2)$ y $E(4, 2)$. b) El valor mínimo en la región factible es -2 y se alcanza en el vértice $D(6, 2)$.

15. Murcia. Ordinaria 2022. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{array} \right\} \quad (2 \text{ puntos})$$

Resolverlo para $a = 1$. (0,5 puntos)

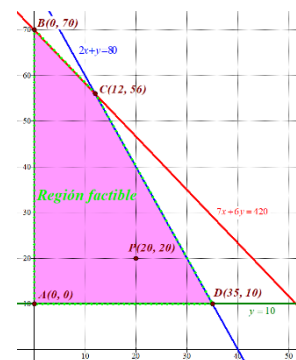
Solución: Si $a \neq 4$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 4$ o $a = -1$ es compatible indeterminado. Para $a = 1$ la solución es $x = 0$; $y = 0$; $z = -\frac{1}{2}$.

16. Murcia. Ordinaria 2022. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnica y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:

- a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio. (2 puntos)
 b) El valor de dicho beneficio máximo. (0,5 puntos)

Solución:

- a) El máximo beneficio se obtiene fabricando 12 camisetas técnicas y 56 casuales.
b) El máximo beneficio es de 284 euros.



17. Murcia. Extraordinaria 2021. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $AB = BA$.
b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación $XB - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $a = 1$ y $b = 4$. b) $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

18. Murcia. Extraordinaria 2021. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

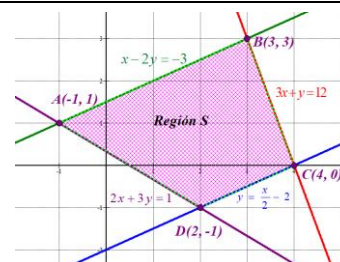
$$\left. \begin{aligned} 3x + y &\leq 12 \\ y &\geq \frac{x}{2} - 2 \\ x - 2y &\geq -3 \\ 2x + 3y &\geq 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)
b) Calcular los puntos de la región S donde la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

Solución:

a) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$ y $D(2, -1)$

b) El valor máximo se alcanza en el vértice $C(4, 0)$ y el mínimo en el vértice $A(-1, 1)$



19. Murcia. Ordinaria 2021. CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ ax + 2z &= 0 \\ ay - z &= a \end{aligned} \right\}$$

Resolverlo para $a = 1$.

Solución:

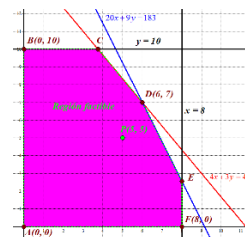
Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $a = -1$ el sistema es incompatible. Para $a = 1$ la solución es $x = -2$; $y = 2$; $z = 1$

20. Murcia. Ordinaria 2021. CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3 . Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

- Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben planta para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.
- Obtener la producción máxima.

Solución:

La máxima producción que se puede obtener sometiéndose a las restricciones del ejercicio son 5100 kg de naranjas. Obteniéndose con 6 hectáreas del naranjo tipo A y 7 hectáreas del naranjo tipo B.



21. Murcia. Extraordinaria 2020. CUESTIÓN 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcule $(A - B)$ (0,5 puntos)
- Calcule $(A - B)^{-1}$ (0,5 puntos)
- Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$ (1 punto)

Solución:

$$a) A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad b) (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad c) X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Murcia. Extraordinaria 2020. CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x - 4, y \leq x - 1, 2y \geq x, x \geq 0, y \geq 0\}$$

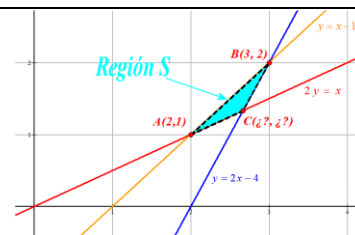
- Representar la región S y obtener sus vértices.
- Maximizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.
- Minimizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

$$a) A(2, 1), B(3, 2) \text{ y } C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

b) El máximo valor que alcanza la función es -1 en el punto $A(2, 1)$.

c) El valor mínimo que alcanza la función es -3 en el punto $B(3, 2)$.



23. Murcia. Ordinaria 2020. CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ 2y + az &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Resolverlo para $a = 3$.

Solución: Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ es incompatible. Para $a = 1$ es compatible indeterminado. La solución para $a = 3$ es $x = \frac{1}{3}$; $y = 0$; $z = \frac{2}{3}$

24. Murcia. Ordinaria 2020. CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

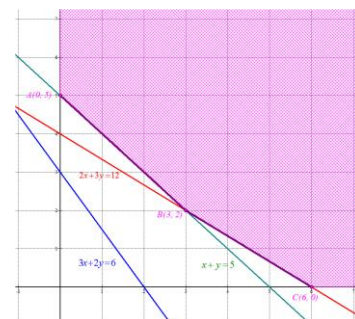
Solución:

Las restricciones son

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y &\geq 6 \\ 2x + 3y &\geq 12 \\ x + y &\geq 5 \\ x \geq 0; y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

La función objetivo $C(x, y) = 33000x + 35000y$

Con 3 semanas de la primera empresa y 2 semanas de la segunda empresa se consiguen plantar los árboles pedidos con un coste mínimo de 169000 €.



25. Murcia. Septiembre 2019. CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ ax - y - z &= a - 1 \\ 3x - 2az &= a - 1 \end{aligned} \right\} \text{ (2,5 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$ (0,5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ es compatible indeterminado. Para $a = -3$ es incompatible. Para $a = 0$ la solución es $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{5}{6}$; $z = \frac{1}{6}$

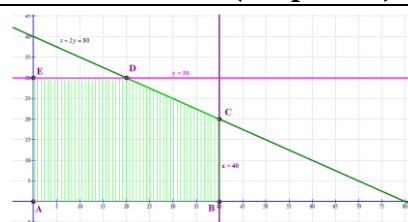
26. Murcia. Septiembre 2019. CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? (2,5 puntos)

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? (0,5 puntos)

Solución: a) Las restricciones asociadas al problema son:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0; y &\geq 0 \\ x &\leq 40 \\ y &\leq 30 \\ x + 2y &\leq 80 \end{aligned} \right\} \text{ La función beneficio es } B(x, y) = 150x + 250y$$



Hay que fabricar 40 ordenadores del tipo A y 20 del tipo B para maximizar el beneficio.

b) Solo sobran 10 memorias de alta capacidad.

27. Murcia. Junio 2019. CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^{-1} . (1 punto)

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$. (1 punto)

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $a = 0$ c) $a = 0$

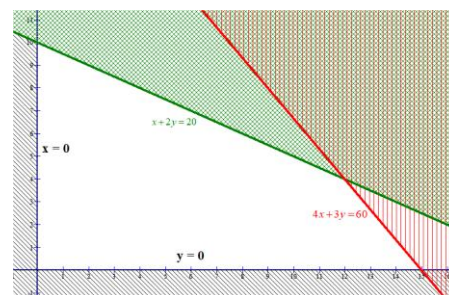
28. Murcia. Junio 2019. CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos)

Solución:

Las restricciones aplicables al problema son
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es $\text{Beneficio} = 15x + 12y$

El máximo beneficio (228 €) se obtiene con 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.



29. Murcia. Septiembre 2018. CUESTIÓN A1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Hallar x , y , z para que se cumpla $A^t(B + C) = D$. (3 puntos)

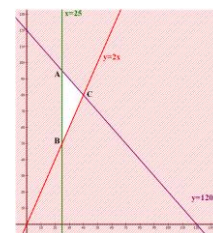
Solución: $x = -6$; $y = -5$; $z = -1$

30. Murcia. Septiembre 2018. CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

Solución: Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 2x \end{array} \right\}$ y la función a maximizar es:

$$\text{Beneficio}(x) = 300x + 215y.$$

Con 40 hectáreas del cultivo A y 80 hectáreas del cultivo B se obtiene un beneficio máximo de 29200 €



31. Murcia. Junio 2018. CUESTIÓN A1. Discute el siguiente sistema en función del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 6 \\ y + z = 1 \\ ax + y - 2z = 4 \end{array} \right\} (2'5 \text{ puntos})$$

Resuélvelo para $a = 2$. (0'5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ el sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado, la solución es $x = -1; y = \frac{8}{3}; z = \frac{-5}{3}$.

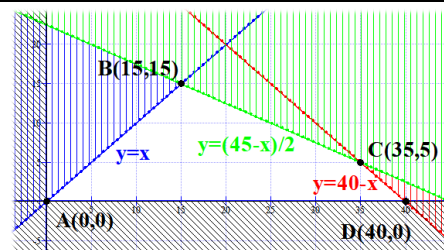
32. Murcia. Junio 2018. CUESTIÓN B1. Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m² de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m² de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m² de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (3 puntos)

Solución:

$$\text{Las restricciones son } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 40 \\ x + 2y \leq 45 \\ x \geq y \end{array} \right.$$

El beneficio es $B(x, y) = 50x + 80y$.

El beneficio máximo es para el punto C (35, 5) que significa fabricar 35 bolsos del tipo A y 5 del tipo B. Dicho beneficio máximo es de 2150 €



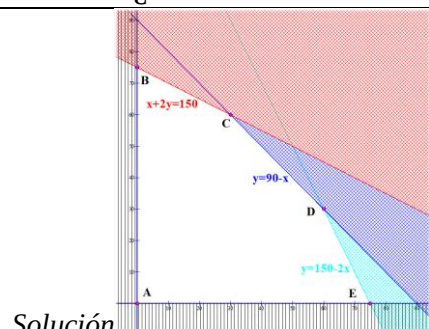
33. Murcia. Septiembre 2017. CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C. (3 puntos)

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 800 \\ a = 3b \\ a + b = c \end{array} \right\} \text{La solución del problema es A recorre 300 km, B recorre 100 km y C recorre 400 km}$$

34. Murcia. Septiembre 2017. CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume,

2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio? (3 puntos)



Solución: Las restricciones son
$$\left. \begin{aligned} x &\geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y &\leq 150 \\ 2x + 2y &\leq 180 \\ x + 2y &\leq 150 \end{aligned} \right\} \text{ y la función objetivo es}$$

Beneficio = $45x + 30y$. El beneficio máximo se obtiene para 60 lotes del tipo 1 y 30 lotes del tipo 2.

35. Murcia. Junio 2017. CUESTIÓN A1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular A^t . (0,25 puntos)

b) Calcular $A \cdot B$. (0,75 puntos)

c) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. (2 puntos)

Solución: a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

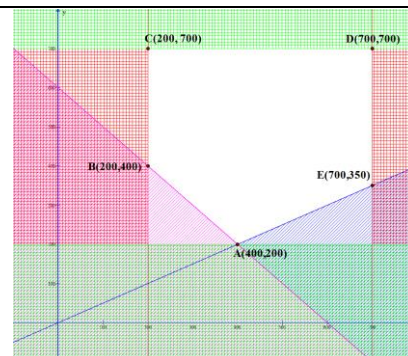
36. Murcia. Junio 2017. CUESTIÓN B1. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo. (3 puntos)

Solución:

El coste de la compra es $C(x, y) = 2x + 3y$ que deseamos

$$\left. \begin{aligned} 200 &\leq x \leq 700 \\ 200 &\leq y \leq 700 \\ 600 &\leq x + y \\ x &\leq 2y \end{aligned} \right\} \text{ minimizar. Las restricciones son}$$

El coste mínimo es para el punto A (400, 200) que significa un pedido de 400 metros al distribuidor A y 200 metros al distribuidor B. Dicho coste mínimo es de 1400 €





- i) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a para los cuales la matriz B tiene inversa. (0.75 puntos)
- ii)...

i) La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{2}{3}$.

4. Navarra. Ordinaria 2025. PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierta día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

ii) Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

Solución:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 5 + y \\ x + 2y + 4z = 120 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ii) Se han vendido 30 cajas de galletas de 250 gramos, 25 cajas de 500} \\ \text{gramos y 10 de 1 kilogramo.} \end{array}$$

5. Navarra. Ordinaria 2025. PREGUNTA 4 OPCIÓN A:

i) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de a y b para que se cumpla

$$AB = BA. \text{ (1 punto)}$$

ii) Calcule el ...

Solución: i) Los valores buscados son $a = 1$ y $b = \frac{-8}{3}$.

6. Navarra. Ordinaria 2025. PREGUNTA 4 OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial

$$XD - C = I. \text{ (1.25 puntos)}$$

ii) En un barrio ...

Solución: i) $X = (I + C)D^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

7. Navarra. Extraordinaria 2024. EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro a para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)

ii) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa A^{-1} . (3 puntos)

iii) Para $a = 2$, despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $XA + I = B^t \cdot C$, siendo I la matriz identidad. (5 puntos)

Solución: i) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y -4 .

$$b) A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad c) X = (B^t \cdot C - I) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

8. Navarra. Extraordinaria 2024. EJERCICIO 2:

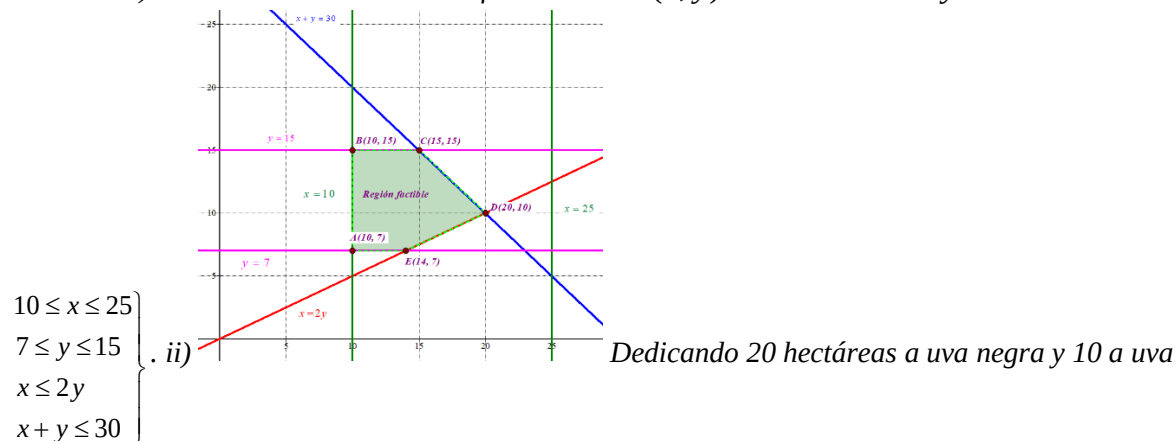
Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €. Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

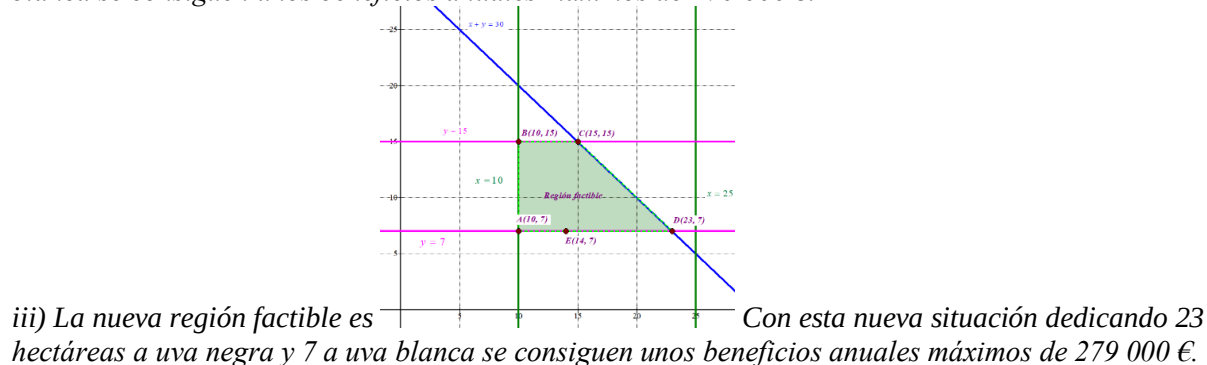
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

Solución: i) Se desea maximizar el beneficio anual: $B(x, y) = 10000x + 7000y$. Las restricciones son



blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 270 000 €.



9. Navarra. Ordinaria 2024. EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)

ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} s + r + c = 45 \\ 2s + r + 3c = 85 \\ 3r = s \end{array} \right\} \text{ii) 30 personas hicieron senderismo, 10 hicieron rápel y 5 hicieron ciclismo}$$

de montaña.

10. Navarra. Ordinaria 2024. EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.

La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

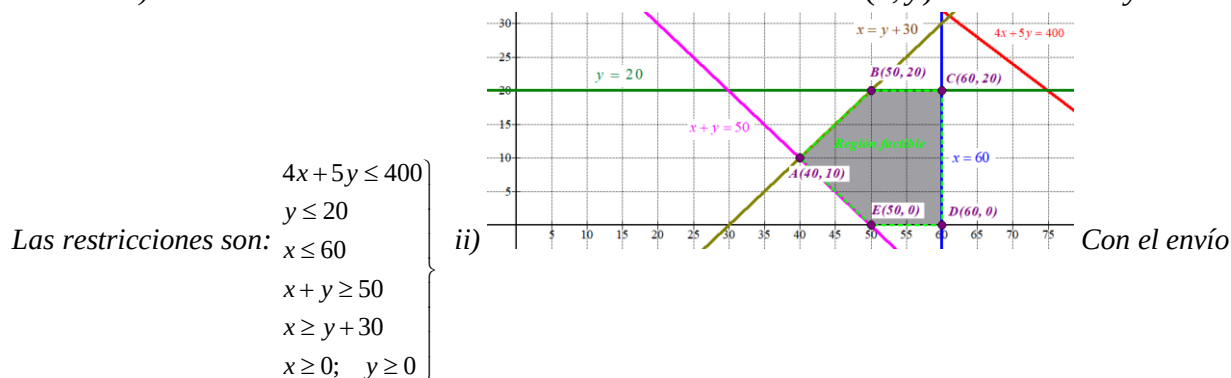
Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resu  valo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

Solución: i) Se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental: $C(x, y) = 0.06x + 0.02y$



diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2 la contaminación ambiental es mínima con un valor de 2.6 mg/litro. iii) La nueva región factible no existe. Es un conjunto

de restricciones que no cumple ningún punto del plano.



11. Navarra. Extraordinaria 2023. EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. (7 puntos)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

ii) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute. (3 puntos)

Solución: i) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones son

$$\begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 - 7\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{ii) El valor buscado es } k = 2.$$

12. Navarra. Extraordinaria 2023. EJERCICIO 2:

Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máquina M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

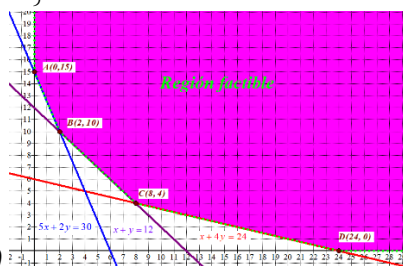
i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual. (2 puntos)

Solución: i) Llamamos $x =$ “número de horas de M1”. $y =$ “número de horas de M2”. Las

restricciones son $\begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + 2y \geq 30 \\ x + y \geq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ y la función que deseamos minimizar es el coste



$C(x, y) = 800x + 100y$. ii) Con 0 horas de la máquina M1 y 15 horas de la máquina M2 cumplimos todas las restricciones con un coste mínimo de 1500 €.

iii) Cambia la región factible y ahora el mínimo coste es de 2000 € y se produce con 0 horas de la máquina M1 y 20 horas de la máquina M2.

13. Navarra. Ordinaria 2023. EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

- i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D , para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)
 ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)
 iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

Solución: i) La matriz D debe ser de dimensiones 3×1 . ii) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

14. Navarra. Ordinaria 2023. EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

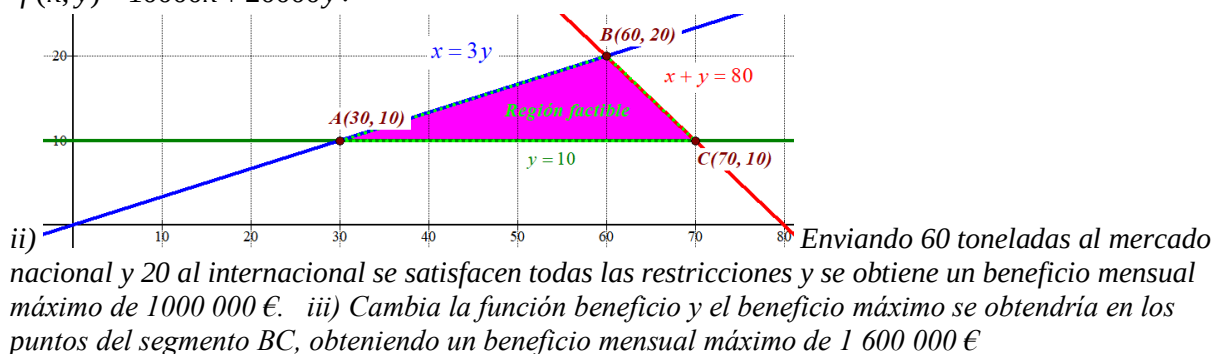
Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

Solución: i) Llamamos $x =$ "Toneladas para el mercado nacional". $y =$ "Toneladas para el mercado

internacional". Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 80 \\ x \geq 3y \\ y \geq 10 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$ y la función a maximizar es

$$f(x, y) = 10000x + 20000y.$$



15. Navarra. Extraordinaria 2022. EJERCICIO 1:

Se considera la siguiente matriz dependiente del parámetro real k :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}.$$

- i) Determine los valores de k para los cuales A tiene inversa. (2 puntos)
 ii) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A . (5 puntos)
 iii) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$. (3 puntos)

Solución: i) el valor de k debe ser distinto de 0 y de 2. ii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

$$\text{iii) } (A - 2A^t)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Navarra. Extraordinaria 2022. EJERCICIO 2:

Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	P1	P2	Disponibilidad semanal
R1	6	3	180
R2	4	5	200
R3	1	1.5	70

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg. (2 puntos)

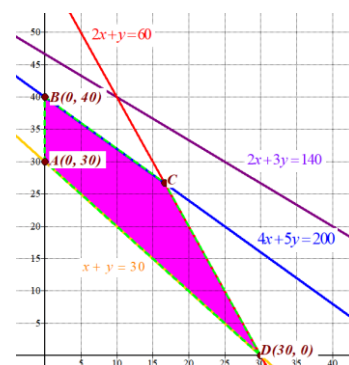
Solución: i) Se desea minimizar el coste de producción:

$C(x, y) = 20x + 15y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 60 \\ 4x + 5y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 140 \\ x + y \geq 30 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

ii) El mínimo coste es de 450 € y se obtiene con 0 kg del

producto P1 y 30 kg del producto P2. iii) el coste mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$.



17. Navarra. Ordinaria 2022. EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa. (3 puntos)
 ii) Determine las matrices X e Y que verifican el sistema:
$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$$
 (7 puntos)

Solución: i) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}$. Como su determinante vale -59 y es no nulo la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa. ii) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

18. Navarra. Ordinaria 2022. EJERCICIO 2:

Un joven estudiante ganó 20000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20% y no más del 50% del premio. Un asesor le aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7%, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4%. El estudiante decide invertir no más de 8000 euros en la cartera C1 y al menos 3000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

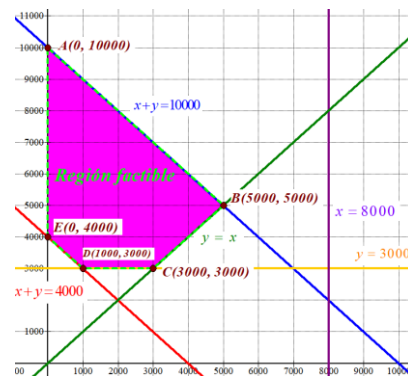
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2500 euros en la cartera C1. (2 puntos)

Solución: i) Se desea maximizar la rentabilidad. La función objetivo sería: $f(x, y) = 0.07x + 0.04y$.

Las restricciones son: $\left. \begin{array}{l} 4000 \leq x + y \leq 10000 \\ x \leq 8000; \quad y \geq 3000 \\ y \geq x \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$

ii) La máxima rentabilidad es de 550 € y se obtiene con 5000 euros invertidos en la cartera C1 y otros 5000 euros en la cartera C2.

iii) Con la nueva situación la solución que maximiza la rentabilidad es invirtiendo 7500 € en C2, siendo este nuevo beneficio de 475 €. Menor que el anterior pues he limitado la inversión en la cartera C1.



19. Navarra. Extraordinaria 2021. EJERCICIO 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10 €, 20 € y 50 €. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €. El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)

ii) Resuelva el sistema por el método de Gauss. (7 puntos)

Solución: i) Llamamos “x” al número de billetes de 10 €, “y” al número de billetes de 20 € y “z” al número de billetes de 50 €. $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 21000 \\ x = y + z \end{array} \right\}$ ii) Hay 400 billetes de 10 €, 100 de 20 € y 300 de 50 €

20. Navarra. Extraordinaria 2021. EJERCICIO 2:

Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0.1 kg de grasas, 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0.2 kg de grasas, 0.3 kg de hidratos de carbono y 0.5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

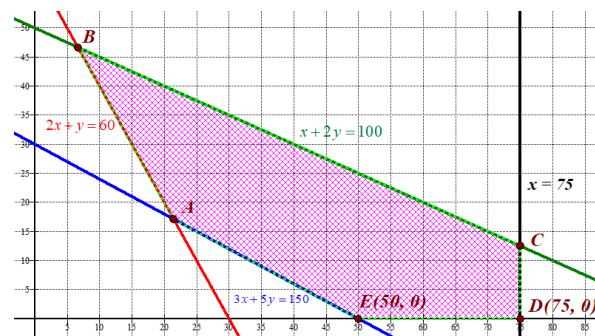
- ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina. (2 puntos)

Solución: i) Llamamos x = kilos comprados de alimento A, y = kilos comprados de alimento B. La función a minimizar es el coste total de la compra:

$$C(x, y) = 10x + 30y$$

Las restricciones del problema son

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 3x + 5y \geq 150 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



- ii) El coste mínimo de 500 € se consigue comprando solo 50 kg del alimento A.
 iii) Hay que comprar 75 kg del alimento A y 12,5 kilos del alimento B para cumplir las restricciones y obtener un máximo aporte de vitaminas.

21. Navarra. Ordinaria 2021. EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las

siguientes cuestiones:

- i) Calcule A^{-1} y B^{-1} (3 puntos)
 ii) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$. (3 puntos)
 iii) Resuelva la ecuación matricial $AXB = C$. (4 puntos)

Solución: i) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 11/2 \end{pmatrix}$ iii) $X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$

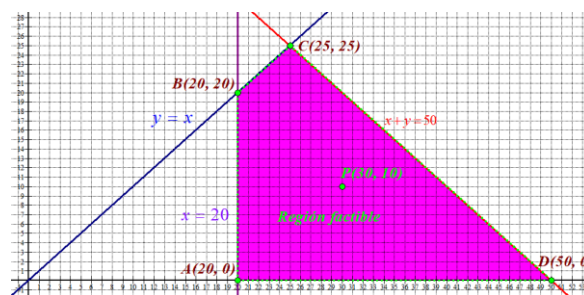
22. Navarra. Ordinaria 2021. EJERCICIO 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2%. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

- i) Plantee el problema. (4 puntos)
 ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
 iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2. (2 puntos)

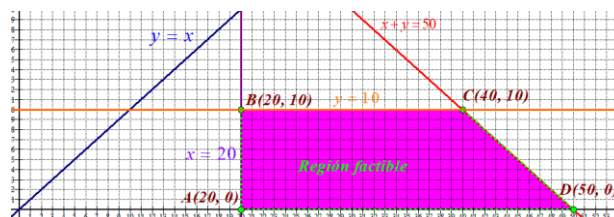
Solución: i) Llamamos x = “número de horas de formación F1”. y = “número de horas de formación F2”. Se desea maximizar el aumento de la productividad. La función objetivo sería $f(x, y) = 0.01x + 0.02y$. Las restricciones son

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ x \geq 20; \quad y \leq 35 \\ x \geq y \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$



ii) La máxima productividad ($0.75 = 75\%$) se obtiene con 25 horas de formación tipo F1 y 25 horas del tipo F2.

iii) Con la nueva situación la solución que maximiza el aumento de la productividad es $C(40, 10)$. Con 40 horas de cursos de formación F1 y 10 de cursos de formación F2 se obtiene un aumento máximo de la productividad de un $0.60 = 60\%$



23. Navarra. Extraordinaria 2020. EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (7 \text{ puntos})$$

ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B . (3 puntos)

Solución: i) Tiene infinitas soluciones. Las soluciones son $x = 1 - 2t$; $y = t$; $z = 2 + 3t$ con $t \in \mathbb{R}$

ii) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La inversa de A es B y la inversa de B es A .

24. Navarra. Extraordinaria 2020. EJERCICIO 4: Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m² y 100 euros/m², respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m² de telas. Para elaborar un m² de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m² de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m² de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m² de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m² de tela T1 que de tela T2. (2 puntos)

Solución:

i) y ii) La función objetivo es $B(x, y) = 45x + 90y$

Las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 15 \\ 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

Todos los puntos del segmento que une el punto B con C dan un beneficio de 1800 €. La solución no es única.

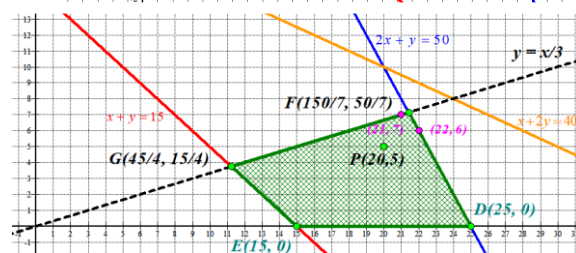
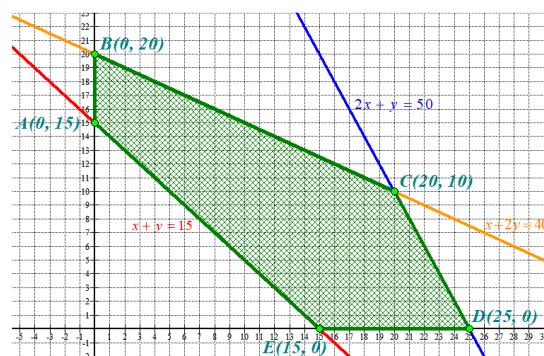
Una solución: 0 m² de tela T1 y 20 de tela T2.

Otra solución: 2 m² de tela T1 y 19 de T2.

...

Última solución: 20 m² de tela T1 y 10 de T2.

iii) La solución del problema es ahora el punto $F(150/7, 50/7)$. O si los metros cuadrados deben ser un valor entero, el punto de coordenadas enteras más próximo (21,7) con un beneficio de 1575, superior al de (22,6) que tiene de beneficio 1530.



25. Navarra. Ordinaria 2020. EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de m para que $AB = BA$ (3.5 puntos)

ii) Calcule CB^{-1} y DC^t . (3.5 puntos)

iii) ¿Qué dimensión debe tener una matriz N para que pueda calcularse el producto DNC ? ¿Y para que NBD^t sea matriz cuadrada? Razone las respuestas. (3 puntos)

Solución: i) $m = -2$. ii) $CB^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $DC^t = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

iii) Para poder calcular los dos productos de DNC la matriz N debe ser de dimensión 2×1 . Para que NBD^t sea cuadrada La matriz N debe ser de dimensión 3×2

26. Navarra. Ordinaria 2020. EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que

fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación. (2 puntos)

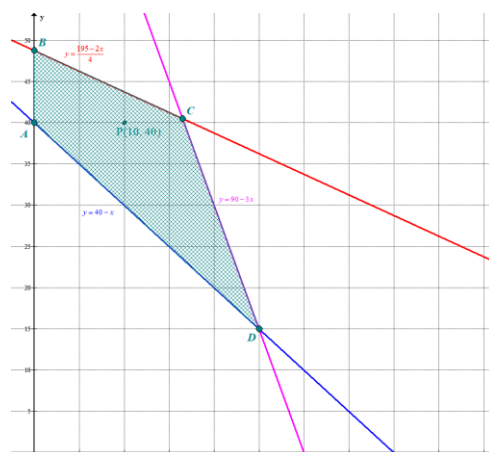
Solución: i) y ii) $f(x, y) = 2000x + 1800y$. Es la función objetivo que deseamos maximizar.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \geq 40 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ 3x + y \leq 90 \end{array} \right\}$$

El máximo precio se consigue con una producción de 16.5 toneladas del biocombustible T1 y de 40.5 toneladas del biocombustible T2.

iii) La mínima contaminación se produce en el punto D(25, 15). De deben fabricar 25 toneladas del biocombustible T1 y 15 del T2 para minimizar la contaminación.



27. Navarra. Julio 2019. Opción A EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)

ii) Calcule $(A - B)(A + B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1}C^t - I$ (1.5 puntos)

Solución: i) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ ii) $(A - B)(A + B) = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$ iii) $C^{-1}C^t - I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

28. Navarra. Julio 2019. Opción B EJERCICIO 1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

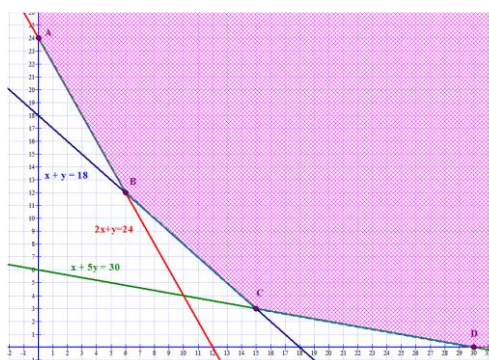
Solución: i) y ii) La función a minimizar es la función gasto diario, que es $f(x, y) = 70x + 120y$.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 10x + 10y \geq 180 \\ 10x + 50y \geq 300 \\ 20x + 10y \geq 240 \end{array} \right\}$$

El gasto es mínimo en C(15,3). Es decir 15 horas diarias en la planta P1 y 3 horas diarias en planta P2.

iii) La producción de bobinas A1 no influirá en la minimización del gasto.



29. Navarra. Junio 2019. Opción A EJERCICIO 1:

Sea la expresión matricial $B^t - AX = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz X . (1 punto)

ii) Calcule la matriz X . (2.5 puntos)

Solución: i) $X = A^{-1}(-B + B^t)$ ii) $X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

30. Navarra. Junio 2019. Opción B EJERCICIO 1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

Solución:

i) y ii) Las restricciones se resumen:

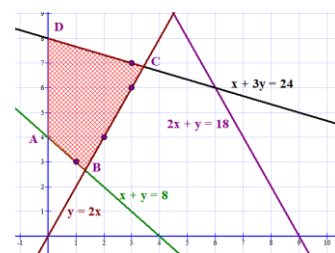
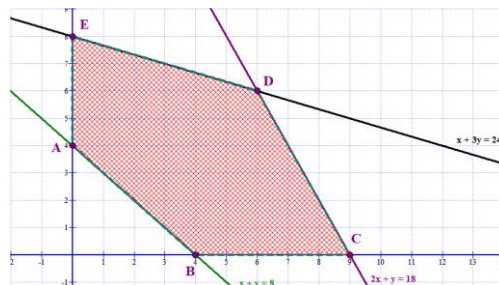
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + y \leq 18 \\ x + 3y \leq 24 \end{array} \right\}$$

La función beneficio es $B(x, y) = 3000x + 1500y$

La solución es múltiple:

9 hectáreas de C1 y 0 de C2 o bien 6 hectáreas de C1 y 6 de C2. También 8 de C1 y 2 de C2, 7 de C1 y 4 de C2.

iii) El máximo beneficio es en el punto $H(3,7)$, es decir, 3 hectáreas de C1 y 7 de C2.

**31. Navarra. Septiembre 2018. Opción A EJERCICIO 1:**

En una tienda por comprar 3 video juegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros. Si volvemos a la tienda y compramos 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros.

i) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)

ii) Si nos cobran 70 euros por 1 video juego y 1 memoria USB, plantee y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones. (1.75 puntos)

$$\text{Solución: i) } \left. \begin{array}{l} 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{290 - 3z}{5} \quad y = \frac{280 - z}{5}$$

$$\text{ii) } \left. \begin{array}{l} x + z = 70 \\ 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + z - y = 60 \end{array} \right\} \rightarrow \text{El video juego cuesta 40 €, el auricular 50 € y la memoria USB 30 €}.$$

32. Navarra. Septiembre 2018. Opción B EJERCICIO 1:

Los estudiantes de bachillerato de un centro escolar han recolectado 6000 euros que quieren destinar a proyectos benéficos. Han seleccionado dos proyectos: el proyecto P1 colabora en la vacunación de niños y el proyecto P2 proporciona suplementos nutricionales a niños con alimentación incompleta. Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños. Los estudiantes deciden repartir el dinero en los proyectos de forma que se done para vacunas no más del doble de la donación para suplementos nutricionales. Además, quieren donar al menos 1500 euros al proyecto de vacunación y no más de 3500 euros al proyecto de alimentación. Determine cuántos euros deberán invertir en cada proyecto si se desea maximizar el número total de niños beneficiados.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se elimina la restricción de no invertir más de 3500 euros en suplementos nutricionales. (0.5 puntos)

Solución:

i) y ii) La función a maximizar es el número de niños beneficiados $\rightarrow$

$$B(x, y) = 3x + 5y$$

$$\text{Las restricciones son } \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq 3500 \\ x + y \leq 6000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 1500 \end{array} \right\}$$

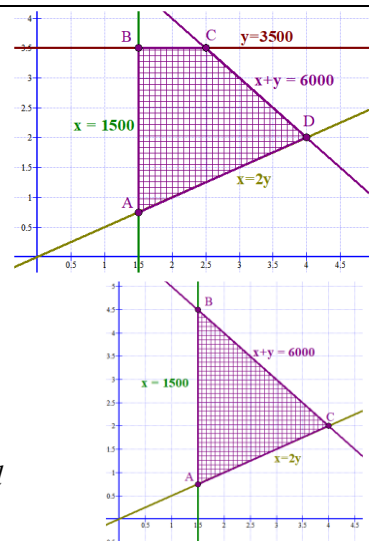
El máximo número de beneficiarios se alcanza en el punto C(2500, 3500).

Con 2500 € destinados al proyecto P1 y 3500 € al proyecto P2.

iii) La nueva región es la del dibujo:

El máximo número de beneficiarios se alcanza en el punto B(1500, 4500).

Se maximizan los beneficiarios de estos proyectos invirtiendo 1500 € en el proyecto P1 y 4500 en el proyecto P2.



33. Navarra. Junio 2018. Opción A EJERCICIO 1:

Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio de venta(€)
P1	4	7	2	0	0	0.8
P2	4	5	3	2	3	0.6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de

pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso. (0.5 puntos)

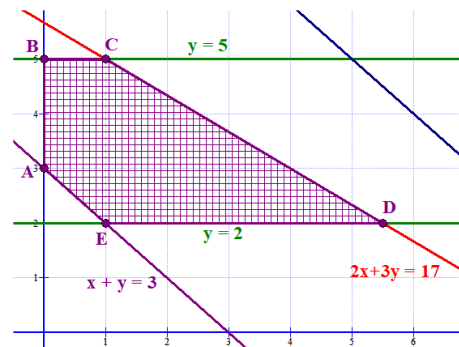
Solución: i) y ii) Deseamos maximizar las proteínas ingeridas.

$$P(x, y) = 7x + 5y$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 3 \leq x + y \leq 10 \\ 2 \leq y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 17 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

La máxima dosis de proteínas se consigue en el punto D(5.5, 2), pero las raciones del pienso P1 es decimal. Si deseamos unas raciones enteras, la solución es el punto (5, 2). La solución es 5 raciones del pienso P1 y 2 raciones del pienso P2.

iii) El gasto mínimo se obtiene con el punto A. Con 3 raciones del pienso P2



34. Navarra. Junio 2018. Opción B EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule: $A \cdot A^t - B \cdot B^t$ (1.25 puntos)

ii) Calcule: $(C^{-1})^2$ (1.25 puntos)

iii) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta. (0.5 puntos)

Solución: i) $A \cdot A^t - B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$ ii) $(C^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ iii) No tiene inversa.

35. Navarra. Septiembre 2017. Opción A EJERCICIO 1:

Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos (A y B). El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas (M1 y M2), de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades de M1 y 3 unidades de M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no supere el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa. (0.5 puntos)

Solución:

i) y ii) La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 175x + 225y$

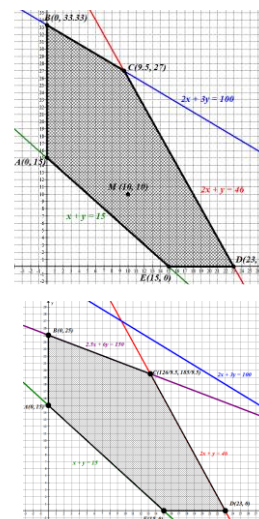
Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 46 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

El máximo beneficio se obtiene en el punto $C(9.5, 27)$. Hay que producir 9,5 toneladas del producto A y 27 del producto B para maximizar el beneficio.

iii) La región factible se reduce a la nueva gráfica.

El nuevo valor máximo se alcanza en el punto $C(13.26, 19.47)$. Deben producirse 13.26 toneladas de A y 19.47 de B.



36. Navarra. Junio 2017. Opción A EJERCICIO 1:

Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios para sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas diarias. (0.5 puntos)

Solución: La función a maximizar es el número de horas que trabajan $\rightarrow f(x, y) = 10x + 8y$.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ y \leq 8 \\ x \leq 9 \\ 2y + 3x \leq 31 \end{array} \right\}$$

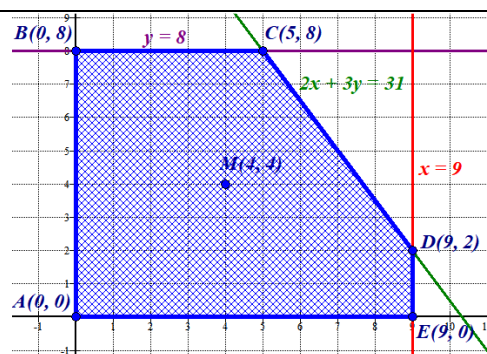
El valor máximo se alcanza en el punto $C(5, 8)$. Significa que se deben contratar 5 cajeras y 8 dependientas para cubrir el máximo posible de horas, atendiendo a las restricciones consideradas.

iii) La nueva función a maximizar es $f(x, y) = 12x + 8y$ Como en el punto $C(5, 8)$ y $D(9, 2)$ se obtiene el mismo número máximo de horas, la solución al problema serían todos los puntos con valores enteros comprendidos en el segmento CD:

$C(5, 8) \rightarrow 5$ cajeras y 8 dependientas

$F(7, 5) \rightarrow 7$ cajeras y 5 dependientas

$D(9, 2) \rightarrow 9$ cajeras y 2 dependientas



37. Navarra junio 2017. Opción B EJERCICIO 1:

Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

i) Despeje la matriz X. (1 punto)

ii) Calcule la matriz X. (2.5 puntos)

$$\text{Solución: i) } X = -2(A - 2I)^{-1}B \quad \text{ii) } X = \begin{pmatrix} -3/2 & 4 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

PAÍS VASCO



1. País vasco. Extraordinaria 2025. PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua.

La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel.

Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol.

A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/ L y el del perfume B es de 40 €/L.

La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

- a) [2 puntos] ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?
- b) [0, 5 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?



Solución: a) Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración de 600 litros de perfume A y 400 litros de perfume B. b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 30 400 €.

2. País vasco. Extraordinaria 2025. APARTADO 2.1 [2,5 puntos]

El cajero automático de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes. Además, el número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros.

- a) [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero automático.
- b) [1, 5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 8 \\ x + 2y + 5z = 29 \\ x = 2y \end{array} \right\} \text{ b) Hemos sacado 2 billetes de 10 €, 1 billete de 20 € y 5 de 50 €.$$

3. País vasco. Extraordinaria 2025. APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

- a) [0, 4 puntos] Exprésalo a través de una ecuación matricial.
 b) [0, 8 puntos] ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Razona tu respuesta.
 c) [1, 3 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

Solución: a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$. b) Si tiene inversa. c) Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$.

4. País vasco. Ordinaria 2025. PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

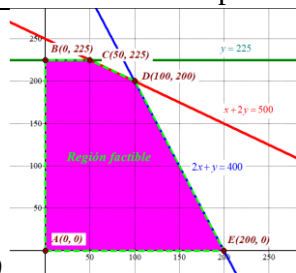
Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

- a) [1,6 puntos] ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
 b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
 c) [0,6 puntos] ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?



Solución: a) Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 100 metros lineales de tapiz tipo A y 200 metros de tapiz tipo B. b) 800 000 €. c) Gastamos todo el hilo de seda y el de plata y nos quedan 2,5 kg de hilo de oro..

5. País vasco. Ordinaria 2025. APARTADO 2.1 [2,5 puntos]

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.

Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) [1 punto] Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) [1,5 puntos] Resuelve el problema.

Solución: a)
$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 20 \\ a + 2b + 4c = 40 \\ a + 1.8b + 3.3c = 35.6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{b) Hemos comprado 8 latas del fabricante A, 8 del fabricante B y 4} \\ \text{del fabricante C.} \end{array}$$

6. País vasco. Ordinaria 2025. APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0,6 puntos] Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.

b) [1 punto] Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.

c) [0,9 puntos] Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

Solución: a) El determinante de $A^2(a)$ vale 4 para $a = -2$ y $a = 2$. b) $A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}; |M| = 1$

7. País vasco. Extraordinaria 2024. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [0,75 puntos] Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A.

b) [0,75 puntos] Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) [1 punto] Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

8. País vasco. Extraordinaria 2024. B 1 [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

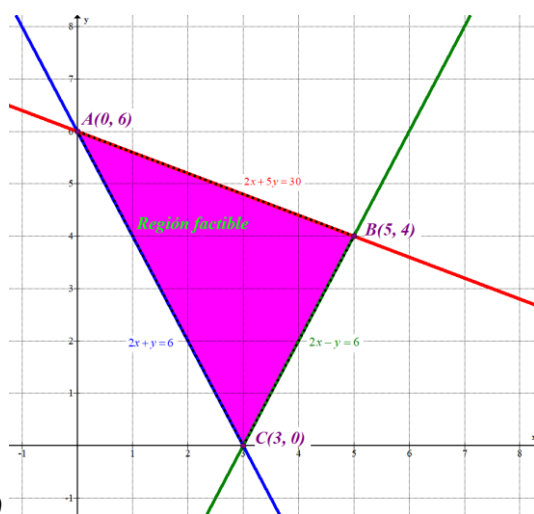
$$2x + y \geq 6; 2x + 5y \leq 30; 2x - y \leq 6$$

a) **[2,2 puntos]** Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).

- ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2)?.
- ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas.

b) **[0,3 puntos]** ¿Cuánto vale dicho mínimo?



Solución: a)

El punto (1, 2) está fuera de la región factible, por lo que no cumple todas las restricciones y no puede ser solución del problema planteado. Es cierto que el valor mínimo se alcanza en el punto (3, 0), pero no es el único punto donde se alcanza. La afirmación es correcta, aunque no es totalmente precisa por no ser el único punto donde se alcanza. b) El valor mínimo es 16

9. País vasco. Ordinaria 2024. A 1 [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Solución: Aitor ha obtenido 1.4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4.8 en el tercero.

10. País vasco. Ordinaria 2024. B 1 [hasta 2.5 puntos]

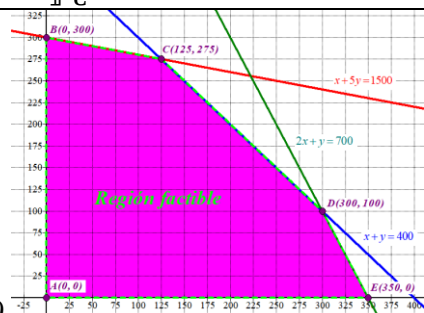
Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

- a) [2,2 puntos] ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?
 b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?



Solución: a) Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 125 trufas dulces y 275 amargas. b) Los máximos ingresos que se pueden obtener son 482.5 €.

11. País vasco. Extraordinaria 2023. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [0,75 puntos] Comprueba que la matriz B es la inversa de la matriz A.
 b) [0,75 puntos] Calcula la matriz $(A - 2I_2)^2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 c) [1 punto] Calcula la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

12. País vasco. Extraordinaria 2023. B 1 [hasta 2.5 puntos]

En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

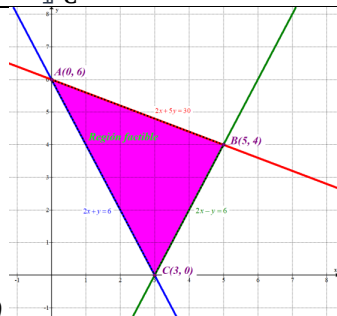
“Indica dónde alcanza el mínimo la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \geq 6; 2x + 5y \leq 30; 2x - y \leq 6$$

- a) [2,2 puntos] Jimena responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) e Iván, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).
 • ¿Es cierto que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2)?
 • ¿Es exacta la respuesta de Iván?

Razona tus respuestas.

- b) [0,3 puntos] ¿Cuánto vale dicho mínimo?



Solución: a) El punto (1, 2) está fuera de la región factible, por lo que no cumple todas las restricciones y no puede ser solución del problema planteado. Es cierto que el valor mínimo se alcanza en el punto (3, 0), pero no es el único punto donde se alcanza. La afirmación de Iván es correcta, aunque no es totalmente precisa por no ser el único punto donde se alcanza. b) El valor mínimo es 16 y se alcanza en cualquier punto del segmento AC: (0, 6), (1, 4), (2, 2), ..., (3, 0).

13. País vasco. Ordinaria 2023. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

b) [1,5 puntos] Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

Solución: a) La matriz P debe ser de dimensiones 2×3 . La matriz Q debe ser de dimensiones 3×2 .

b) $X = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}$

14. País vasco. Ordinaria 2023. B 1 [hasta 2.5 puntos]

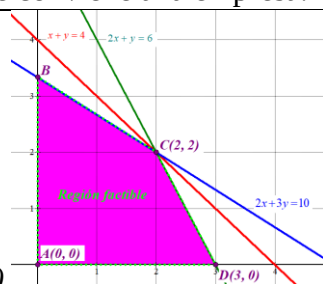
Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar **los ingresos**, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

- El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) [2,1 puntos] Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) [0,4 puntos] Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.



Solución: a) El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 100 € y se consigue fabricando 2 sillas y 2 mesas cada día. b) Fabricar 1 silla y 1 mesa cumple todas las restricciones, pero no es la solución óptima

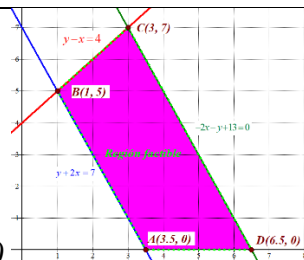
15. País vasco. Extraordinaria 2022. A 1 [hasta 2.5 puntos]

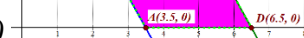
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.

b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.



Solución: a) . b) El máximo valor de la función es 25 y se obtiene en cualquier punto del segmento CD, siendo C(3,7) y D(6.5, 0). El mínimo valor de la función es 13 y se obtiene en cualquier punto del segmento AB. Siendo A(3.5, 0) y B(1, 5)

16. País vasco. Extraordinaria 2022. B 1 [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

b) [1 punto] Igualmente, para que se cumpla:

$$B + C = A^{-1}$$

c) [0,75 puntos] Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = 0$

17. País vasco. Ordinaria 2022. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos.

¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 6x - 2.5y - 1.5z = 210 \\ z + x = 2y \end{array} \right\} \text{Para conseguir los 210 puntos con las condiciones del ejercicio}$$

debe tener 50 aciertos, 30 fallos y 10 preguntas no contestadas.

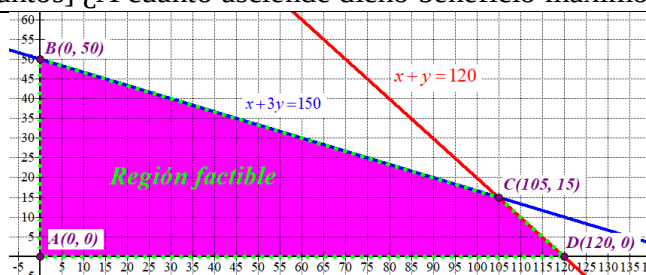
18. País vasco. Ordinaria 2022. B 1 [hasta 2.5 puntos]

El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.

Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda de tipo A es 100.000 €, y el de la del tipo B 300.000 €. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 € y por una del tipo B a 40.000 €.

	Coste de construcción	Beneficio
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.000 €

- a) [2,2 puntos] ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?
- b) [0,3 puntos] ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?



Solución: El máximo beneficio que se puede obtener es 2 700 000 € y se obtiene construyendo 105 casas del tipo A y 15 del tipo B.

19. País vasco. Extraordinaria 2021. A 1 [hasta 2.5 puntos]

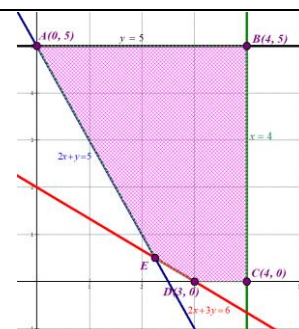
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.
- b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Solución: a)

b) El valor máximo de la función es 40 y se alcanza en el punto B(4,5) y el mínimo valor de la función es 13.25 y se alcanza en el punto E(2,25, 0.5)



20. País vasco. Extraordinaria 2021. B 1 [hasta 2.5 puntos]

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- a) [0,75 puntos] ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$?
- b) [1,75 puntos] Resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = 2B^t + I_2$$

Solución: a) Si se verifica

$$b) X = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$$

21. País vasco. Ordinaria 2021. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) [0,75 puntos] Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.
 b) [0,75 puntos] Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.
 c) [1 punto] Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2$$

Solución: a) $m = -1$ y $n = 5$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

22. País vasco. Ordinaria 2021. B 1 [hasta 2.5 puntos]

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.

La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.

Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

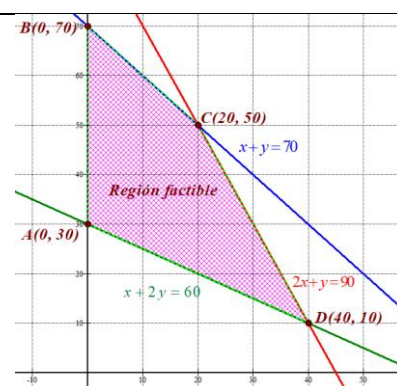
- a) [2 puntos] Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.
 b) [0,5 puntos] ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B? Razona la respuesta.

Solución: a) Llamamos " x " a las unidades de camisas de tipo A que debe producir e " y " a las unidades de camisa tipo B. La función a maximizar es el beneficio $B(x, y) = 60x + 50y$. Las restricciones del

problema son
$$\begin{cases} 2x + y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x + 2y \geq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 3700 € y se obtiene fabricando 20 camisas del tipo A y 50 del tipo B.

b) Fabricar 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B viene reflejado en el punto (40, 20). Este punto está fuera de la región factible y por tanto no cumple todas las restricciones pedidas en el ejercicio.



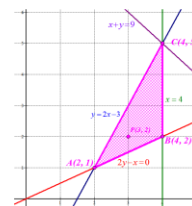
23. País vasco. Extraordinaria 2020. A 1 [hasta 2.5 puntos]

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

La función objetivo toma un valor máximo de 40 en el punto $C(4, 5)$, para $x = 4$ e $y = 5$.



24. País vasco. Extraordinaria 2020. B 1 [hasta 2,5 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) [0,75 puntos] ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) [0,5 puntos] Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \quad \text{y} \quad A^t \cdot B$$

Solución: a) $(A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$ b) $|A^t \cdot A| = 0$. La matriz $(A^t \cdot A)$ no tiene inversa.

c) $A \cdot B = \text{No es posible}$ $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

25. País vasco. Ordinaria 2020. A 1 [hasta 2,5 puntos]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 puntos] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) [2 puntos] Resuelve la ecuación matricial.

Solución: a) La matriz X debe ser de dimensión 3×1 . b) $X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$

26. País vasco. Ordinaria 2020. B 1 [hasta 2,5 puntos]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ♦ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ♦ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto

asciende dicho coste?

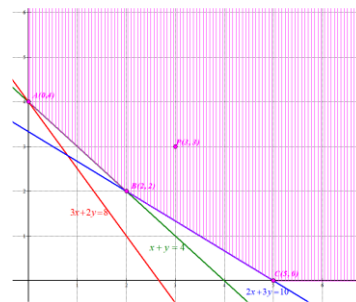
Solución:

La función objetivo es el coste $\rightarrow C(x, y) = 210x + 230y$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 8 \\ 2x + 3y \geq 10 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

El coste mínimo es de 800 € y se obtiene comprando 2 paquetes de cada agencia.



27. País vasco. Julio 2019. A 1 [hasta 3 puntos]

Sea la región definida por las inecuaciones:

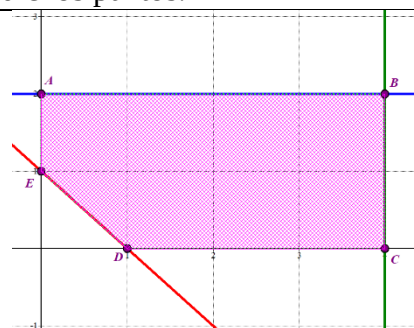
$$x + y - 1 \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Solución:

La función alcanza un máximo en el punto $B(4, 2)$ siendo $F(4, 2) = 20$.

La función alcanza un mínimo en el punto $E(0, 1)$ siendo $F(0, 1) = 2$.



28. País vasco. Julio 2019. B 1 [hasta 3 puntos]

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de $A - B$

b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

Solución: a) $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

29. País vasco. Junio 2019. A 1 [hasta 3 puntos]

Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

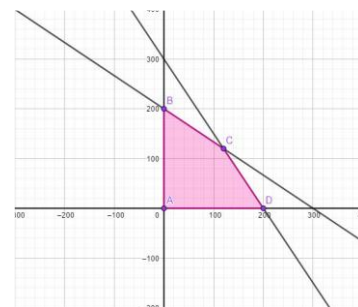
	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Solución: Llamamos “x” al nº de tartas tipo A e “y” al nº de tartas de tipo B. La función objetivo es $f(x, y) = 24x + 30y$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 300 \\ 1.5x + y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son}$$

Para conseguir el ingreso máximo se deberían hacer 120 tartas de cada tipo. Ese ingreso máximo es de 6480 €



30. País vasco. Junio 2019. B 1 [hasta 3 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

- a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Solución: a) $(I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$

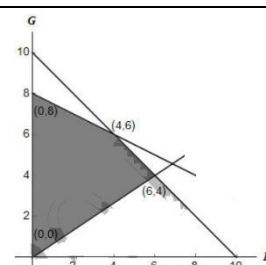
31. País vasco. Julio 2018. A 1 [hasta 3 puntos]

Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, $2/3$ de la de queroseno K , donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

- a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
b) La función $F(G, K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

Solución: a)

b) El trayecto más largo que se puede realizar es de 68 km eligiendo $G = 6$ y $K = 4$.



32. País vasco. Julio 2018. B 1 [hasta 3 puntos]

- a) Calcula los parámetros a, b, c, d para que se cumpla la igualdad $F \cdot G = H \cdot K$, con las siguientes matrices:

$$F = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Determinar el exponente n de la matriz A para que se cumpla:

$$A^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $a = 11/3, b = 1, c = 0, d = 12$ b) $n = 22$

33. País vasco. Junio 2018. A 1 [hasta 3 puntos]

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

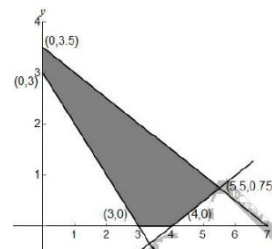
$$x + 2y \leq 7, \quad x + y \geq 3, \quad 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x, y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a)

Solución:

b) El máximo de la función es 13.25 y está en el punto (5.5, 0.75).

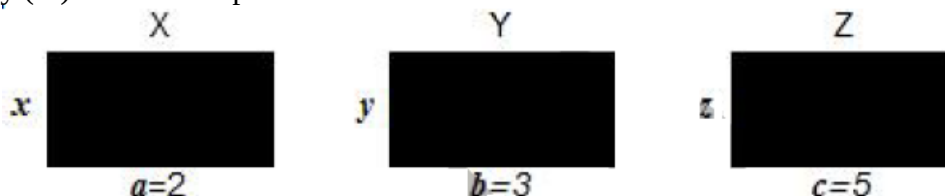
c) El máximo está en (5, 1) y el valor máximo es de 13.

**34. País vasco. Junio 2018. B 1 [hasta 3 puntos]**

- Dadas las matrices $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes

$x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.

- Se conoce la longitud, $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



Solución: a) $x = 1, y = -2$

b) $x = 7, y = 5, z = 7$

35. País vasco. Julio 2017. A 1 [hasta 3 puntos]

Sean las cuatro inecuaciones lineales:

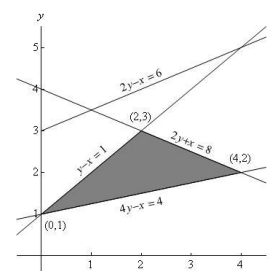
$$(i) 4y - x \geq 4, \quad (ii) 2y - x \leq 6, \quad (iii) y - x \leq 1, \quad (iv) 2y + x \leq 8$$

- Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).
- ¿Cuál es el máximo de la función $F(x, y) = 3x + 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

Solución: a)

Es superflua la inecuación (ii) $2y - x = 6$

b) El máximo de la función es 8 y se alcanza en el vértice C (4, 2).

**36. País vasco. Julio 2017. B 1 [hasta 3 puntos]**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2 , $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

- a) $AMB = C$
b) $AHB^{-1} = C$

Solución: a) $p = 1$, $q = -3$, $r = 5$, $s = -2$ b) $f = 13$, $g = 15$, $h = -13$, $i = 49$

37. País vasco. Junio 2017. A 1 [hasta 3 puntos]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
b) Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

Solución: a) $x = 5$, $y = -1$, $z = 4$ b) $E^{20} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$

38. País vasco. Junio 2017. B 1 [hasta 3 puntos]

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos “P” y de tomates “T”. Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

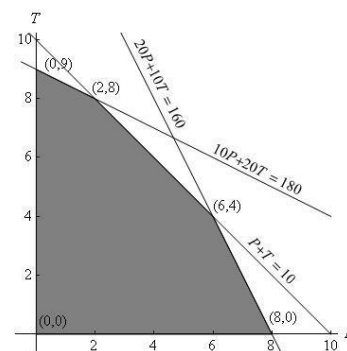
- a) Dibuja en el plano (P, T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
b) Escribe la función que calcula el beneficio $F(P, T)$ y encuentra el valor (P, T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

Solución: a) Las restricciones son

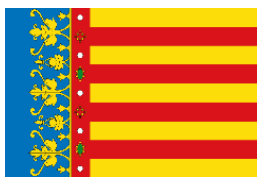
$$\{P + T \leq 10, 10P + 20T \leq 180, 20P + 10T \leq 160\}$$

b) Función objetivo: $F(P, T) = 200P + 250T$

El máximo de la función es 2400 y se alcanza en el punto C (2, 8). Hay que sembrar 2 áreas de pimiento y 8 de tomate.

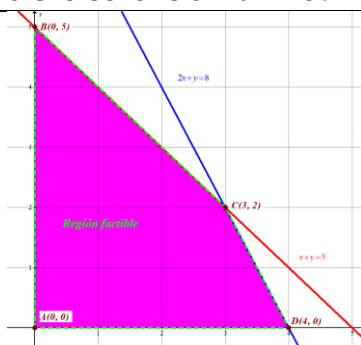


VALENCIA



1. Valencia. Extraordinaria 2025. Problema 1. A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

- a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)



Solución: a) Los beneficios más altos se consiguen con 3 excursiones a la montaña y 2 a la playa. b) Los beneficios más altos que se pueden conseguir son de 3100 euros

2. Valencia. Extraordinaria 2025. Problema 1. B. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

- b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. (1 punto)

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 4 & 19/4 & -5/4 \\ 1/2 & 3/4 & -1/12 \\ 2 & 7/4 & -1/4 \end{pmatrix}$. b) $z = \frac{1}{2}$

3. Valencia. Ordinaria 2025. Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En

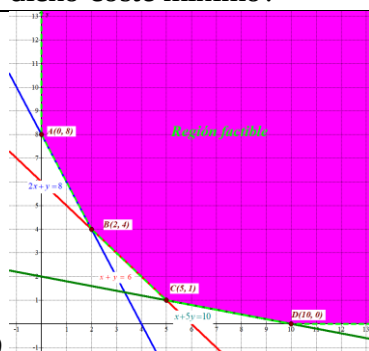
los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo?

(3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo?

(0,5 puntos)



Solución: a) Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B. b) 375 000 euros.

4. Valencia. Ordinaria 2025. Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

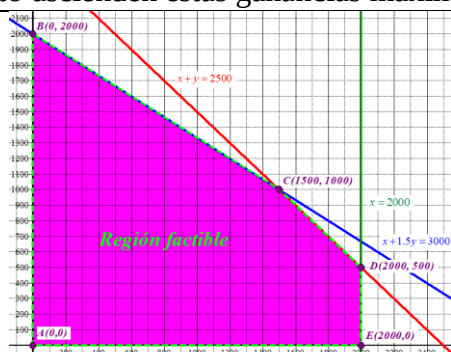
Solución: Han pagado el 20 % de la entrada 300 espectadores, el 50% lo han pagado 50 espectadores y la entrada completa la han pagado 150 espectadores.

5. Valencia. Extraordinaria 2024. Problema 1.

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)



Solución: a) Se deben producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados para maximizar las ganancias. b) Las ganancias máximas que se pueden obtener son 1450 €.

6. Valencia. Extraordinaria 2024. Problema 2.

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz $AB - 2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B . (4 puntos)

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$. (3 puntos)

Solución: a) $AB - 2I$ es invertible. b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ c) Se cumple lo pedido para $z = 4$.

7. Valencia. Ordinaria 2024. Problema 1.

Una tienda de televisores ha obtenido 247 250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1 250 euros y los otros dos modelos son un 10 % y un 20 % más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

Solución: Se han vendido 55 televisores *ULED*, 108 televisores *QLED* y 57 televisores *LD*.

8. Valencia. Ordinaria 2024. Problema 2. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$. (2 puntos)

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ c) $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Valencia. Extraordinaria 2023. Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa. (5 puntos)

b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$. (5 puntos)

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $(A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ b) $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$

10. Valencia. Extraordinaria 2023. Problema 2. Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que

ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

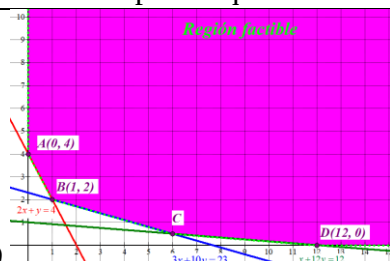
(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)

Solución: El millonario le ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones a la mediana y 21 millones a la menor.

11. Valencia. Ordinaria 2023. Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (8 puntos)

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? (2 puntos)



Solución: a) Con 1 lata de la marca A y 2 latas de la marca B se satisfacen las necesidades del perro con un coste mínimo de 42 €. b) 42 €.

12. Valencia. Ordinaria 2023. Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (4 puntos)

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^t X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ puntos})$$

Solución: a) $x = 2$. b) $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

13. Valencia. Extraordinaria 2022. Problema 1.

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B + 2CA$ (1 punto)

a.2) $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC . (2 puntos)

a.3) CAB (2 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial

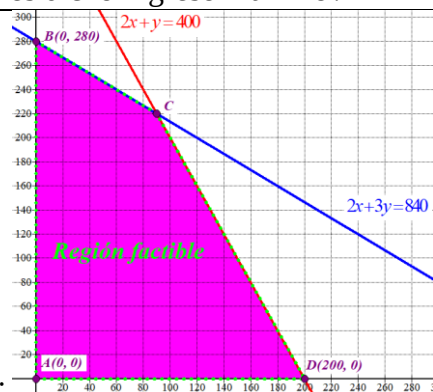
$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$$

Siendo C^T la matriz traspuesta de C . (5 puntos)

Solución: a.1) No es posible a.2) $A - (BC)^T = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ a.3) $CAB = (16)$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

14. Valencia. Extraordinaria 2022. Problema 2. Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

- a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo. (8 puntos)
b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo? (2 puntos)



Solución: Con 90 kilos de café mezclado a partes iguales y 220 kilos del café mezclado 1 a 3 se satisfacen las restricciones con unos ingresos máximos de 3550 €.

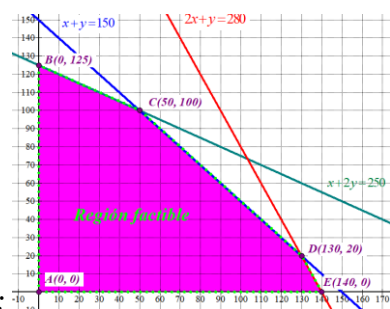
15. Valencia. Ordinaria 2022. Problema 1. Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:
$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1650 \\ \frac{5}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z &= 132 \\ x &= 2(y + z) \end{aligned} \right\} \text{ El alquiler es de 1100, 330 y 220 € al mes por el primer, } \\ \text{segundo y tercer local, respectivamente.}$$

16. Valencia. Ordinaria 2022. Problema 2. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 puntos)
b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)



Solución: Con 130 cajas del tipo A y 20 del tipo B se satisfacen las restricciones con un beneficio máximo de 1010 €.

17. Valencia. Extraordinaria 2021. Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniano, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Solución: Llamamos "x" a los kilos de café colombiano de la mezcla, "y" a los kilos de café brasileño y "z" a los kilos de café keniano.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 6y + 8z = 8.5 \cdot 100 \\ x = 3y \end{array} \right\} \text{ Los porcentajes de cada café en la mezcla es 37.5 \% de café colombiano, 12.5 \% de café brasileño y 50 \% de café keniano.}$$

% de café brasileño y 50 % de café keniano.

De 8 partes se echan 4 de café keniano, 3 de café brasileño y 1 de café colombiano.

18. Valencia. Extraordinaria 2021. Problema 2. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. (3 puntos)

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3 , que satisface la ecuación $XA + C = XB$. (4 puntos)

c) ¿Es posible hacer el producto BC ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Solución: a) $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) No es posible hacer BC , pues el número de columnas de B (3) no coincide con el de filas de C (2). Si es posible hacer CB , pues el número de columnas de C (3) es igual al número de filas de B (3).

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

19. Valencia. Ordinaria 2021. Problema 1. En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

- a) ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? (8 puntos)
- b) ¿cuál sería dicho coste mínimo? (2 puntos)



Solución: a) Llamamos “x” al número de sacos semanales a comprar de la marca A e “y” al número de sacos semanales a comprar de B. La función objetivo que deseamos minimizar es el coste semanal: $C(x, y) = 12x + 11y$. Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{Con 140 sacos de A y 420 de B se satisfacen las restricciones con un coste semanal mínimo (6300 €)}$$

20. Valencia. Ordinaria 2021. Problema 2. En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa? (Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Solución: Llamamos “x” al número de trabajadores de categoría A, “y” a los de categoría B y “z” a los de categoría C.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000 \\ 832x + 1000y + 1800z = 60760 \end{array} \right\}$$

En la empresa hay 30 trabajadores de la categoría A, 16 de B y 11 de C

21. Valencia. Extraordinaria 2020. Problema 1. Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

Solución: Se producen 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.

22. Valencia. Extraordinaria 2020. Problema 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)

b) Calcula $C + AB$. (2 puntos)

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$? (4 puntos)

Solución: a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) Son iguales

23. Valencia. Ordinaria 2020. Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)

b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

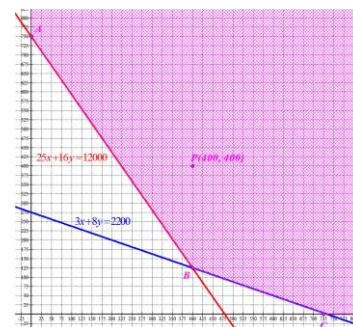
Solución:

La función objetivo es el coste $\rightarrow f(x, y) = 1,2x + 1,6y$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 8y \geq 2200 \\ 25x + 16y \geq 12000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

El mínimo coste se produce en el vértice B(400, 125). Con 400 kilos del fertilizante A y 125 del fertilizante B el coste de fertilizar la parcela es mínimo. Ese coste mínimo es de 680 €.



24. Valencia. Ordinaria 2020. Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se

pide:

a) Halla la matriz inversa de A. (3 puntos)

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$. (3 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $|B| = 0$. B no tiene inversa. c) $|AB| = 0$. d) $X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

25. Valencia. Julio 2019. Opción A Problema 1. Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos.

Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

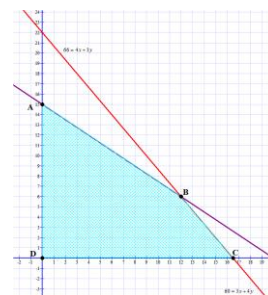
¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso?

¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución: El beneficio viene dado por la función: $B(x, y) = 40x + 35y$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Para obtener el máximo ingreso cada día hay que producir 12 unidades del producto A y 6 del B. Con esta producción el máximo ingreso será de 690€.



26. Valencia. Julio 2019. Opción B Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A. (2 puntos)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. (4 puntos)

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } |A| &= 1 & \text{b) } A^t &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \text{c) } x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

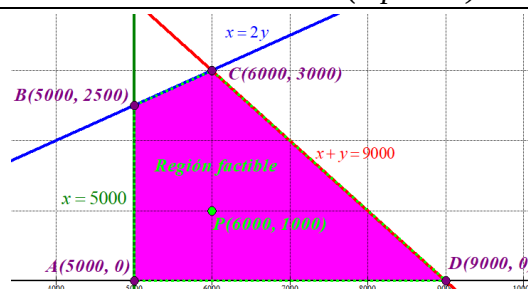
27. Valencia. Junio 2019. Opción A Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7% y la del producto B del 6,3%.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? (8 puntos)

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? (2 puntos)

Solución: a) Llamamos x = cantidad invertida en el producto A; y = cantidad invertida en el producto B. Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 9000 \\ x \geq 5000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



La rentabilidad total será: $B(x, y) = \frac{2.7}{100}x + \frac{6.3}{100}y$. Esta

función es la que deseamos maximizar.

El máximo se alcanza en el punto C(6000, 3000). Lo que significa invertir 6000 € en producto A y 3000 € en producto B.

b) 351 €

28. Valencia. Junio 2019. Opción B Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Calcular $(AB)^{-1}$. (3 puntos)
- b) Calcular $AB^t - A^tB$. (3 puntos)
- c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$. (4 puntos)
- siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B , respectivamente.

Solución: a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$ b) $AB^t - A^tB = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

29. Valencia. Julio 2018. Opción A Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1} . (2 + 4 puntos)
- b) Determina el vector x que verifica $Ax = B^tc$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B . (4 puntos)

Solución: a) $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $x = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$

30. Valencia. Julio 2018. Opción B Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

- a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
- b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
- c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

Solución: x = cantidad invertida en cuenta de ahorro (5%), y = cantidad invertida en depósito (7%),
 z = cantidad invertida en bonos (9%).

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 42000 \\ 5x + 7y + 9z &= 260000 \\ 5x - 7y - 9z &= -20000 \end{aligned} \right\}$$

En la cuenta de ahorro invirtió 24000 euros, en el depósito 11000 euros y en los bonos 7000 euros

31. Valencia. Junio 2018. Opción A Problema 1. Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas EXTRA incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que las cajas denominadas DELUXE contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B. Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas EXTRA, e y al número de cajas DELUXE que vende, se pide:

- a) Calcula la función de beneficios de la pastelería. (2 puntos)
- b) Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. (6 puntos)

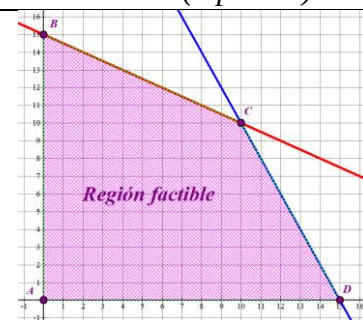
Calcula dicho beneficio máximo.

(2 puntos)

Solución: a) $B(x, y) = 19.5x + 21y$

b) El valor máximo de la función beneficio se consigue en el vértice $C(10, 10)$.

10 cajas de cada clase proporcionan un beneficio máximo de 405 €.



32. Valencia. Junio 2018. Opción B Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) Calcula A^{-1} .

(5 puntos)

b) Calcula una matriz X , de orden 3×3 , que cumpla $AX = C$.

(5 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ b) $X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

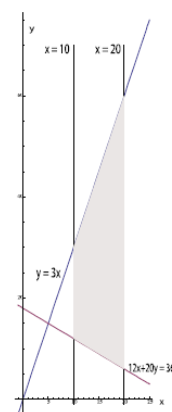
33. Valencia. Julio 2017. Opción A Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Solución: Sus vértices tienen coordenadas $(10, 30)$, $(10, 12)$, $(20, 6)$, $(20, 60)$.

El valor mínimo de la función es -100 y se alcanza en el punto $(20, 60)$.



34. Valencia. Julio 2017. Opción B Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 7.5 \\ z - y = 1 \\ 6x - 5z = 0 \end{cases} \quad \text{La solución es } x = 2.5, y = 2, z = 3 \text{ puntos en las preguntas 1, 2 y 3.}$$

35. Valencia. Junio 2017. Opción A Problema 1. Una empresa produce dos tipos de cerveza artesanal, A y B. La demanda mínima de cerveza tipo A es de 200 litros diarios. La producción de cerveza tipo B es al menos el doble que la de tipo A. La infraestructura de la empresa no permite producir en total más de 900 litros diarios de cerveza. Los beneficios que obtiene por litro de A y B son 2 y 2,5 euros, respectivamente. ¿Cuántos litros diarios se han de producir de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución: Llamamos “x” a los litros de cerveza A e “y” a los litros de cerveza B. La función que hay que maximizar es el beneficio que viene dado por

$$f(x, y) = 2x + 2.5y$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 200 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 900 \end{array} \right\} \text{ Las restricciones son:}$$

El beneficio máximo que se puede conseguir es de 2150 € con 200 litros de cerveza A y 700 litros de la cerveza B.



36. Valencia. Junio 2017. Opción B Problema 1. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$X + 2Y = A^t + B$$

$$X - Y = AB$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 5 & 4/3 & -1 \\ 7 & 3 & 7/3 \\ 9 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 1 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$