

2º de bachillerato
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Bloque 1 de 3 - Números y Álgebra

www.ebaumatematicas.com

Tema 1. Matrices.....	2
1. Definición de matriz. Tipos de matrices	2
2. Operaciones con matrices	5
2.1. Igualdad de matrices	5
2.2. Suma de matrices	5
2.3. Producto de una matriz por un número (escalar)	5
2.4. Producto de matrices	6
3. Trasposición de Matrices.	9
4. Matriz inversa	10
5. Resolución de ecuaciones matriciales	11
Tema 2. Determinantes.....	16
1. Definición general de determinantes	16
2. Determinante de matrices de orden 1, 2 y 3.	16
2.1. Determinante de matrices cuadradas de orden 1	16
2.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 2	16
2.3. Determinante de matrices cuadradas de orden 3	16
3. Determinante de algunas matrices especiales	18
4. Propiedades de los determinantes	19
5. Cálculo de la matriz inversa.	22
6. Rango de una matriz	24
Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales	31
1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos	32
1.1. Definición, sistemas equivalentes	32
1.2. Tipos de sistemas de ecuaciones.	33
1.3. Expresión de sistemas en forma matricial.....	33
2. Sistemas de Cramer	34
3. Teorema de Rouché-Fröbenius. Discusión de un sistema	36
4. Discusión y resolución de sistemas por Gauss.	36
5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.	37
5.1. Sistemas compatibles determinados.....	37
5.2. Sistemas compatibles indeterminados	38
6. Resolución de sistemas homogéneos.	39
Tema 4. Programación lineal	50
1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas.....	50
2. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas	52
3. El problema de la programación lineal	55
4. Resolución analítica del problema de programación lineal	57
5. Resolución gráfica del problema de programación lineal	60
Ejercicios de matrices, sistemas de ecuaciones y programación lineal en pruebas PAU y EBAU de Murcia	67

Tema 1. Matrices

1. Definición de matriz. Tipos de matrices

Se define la matriz A de dimensión $m \times n$ al conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{siendo } a_{ij} = \text{elemento de la matriz } A \text{ situado en la fila } i \text{ y columna } j$$

La matriz A se denota también como $A = (a_{ij})$

La dimensión $m \times n$ de una matriz es el número de filas y columnas de la misma (el primer número indica el número de filas (m) y el segundo el número de columnas (n)).

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de dimensión } 2 \times 3.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de dimensión } 1 \times 4.$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ es una matriz de dimensión } 2 \times 1.$$

Tipos de matrices:

1. **Matrices cuadradas:** son las matrices que tienen igual número de filas que de columnas ($m=n$). Cuando se habla de su dimensión se dice matriz cuadrada de orden n .

Ejemplos:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una matriz cuadrada de orden } 2.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ es una matriz cuadrada de orden } 3.$$

Elementos de las matrices cuadradas:

- a. **Diagonal principal:** elementos de la forma a_{ii} .

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Son los elementos rodeados.

- b. **Diagonal secundaria:** elementos de la forma a_{ij} donde $i + j = n + 1$.

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Son los elementos rodeados.

2. **Matrices triangulares superiores e inferiores:** son las matrices cuadradas tal que:
 Superior: elementos por debajo de la diagonal principal son nulos $a_{ij} = 0$ si $i > j$
 Inferior: elementos por encima de la diagonal principal son nulos $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Ejemplos:

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular superior.}$$

$$TI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular inferior.}$$

3. **Matrices simétricas:** matrices cuadradas donde $a_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 12 \\ 3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \quad SS = \begin{pmatrix} -1 & 23 \\ 23 & 4 \end{pmatrix} \quad SSS = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Matrices diagonales:** matrices cuadradas donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

Ejemplos:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Matriz escalar:** matriz diagonal en el que todos los términos de la diagonal son iguales:

Ejemplos:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad EE = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Matriz unidad o matriz identidad:** matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. Se denota como I o Id .

Ejemplos:

$$Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 2}$$

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 3}$$

$$Id_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz identidad de orden 4}$$

7. **Matriz nula** (o cero): la matriz con todos los elementos iguales a 0.

Ejemplos:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. **Matriz columna:** toda matriz con una sola columna.

Ejemplos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. **Matriz fila:** toda matriz con una única fila.

Ejemplos:

$$G = (-3 \ 0) \quad H = (2 \ 1 \ 0) \quad J = (-1 \ -2 \ 1 \ 2)$$

Observaciones:

1. Toda matriz diagonal es triangular, tanto superior como inferior, pues los elementos por encima y por debajo de la diagonal son nulos.
2. Toda matriz escalar es diagonal.
3. La matriz identidad es una matriz escalar.

2. Operaciones con matrices

2.1. Igualdad de matrices

Dos matrices M y N se dicen que son iguales ($M = N$) si se cumplen:

- misma dimensión
- elementos que ocupan la misma posición son iguales.

2.2. Suma de matrices

Solo se pueden sumar matrices de la misma dimensión.

Veamos en qué consiste la suma de matrices:

La suma de dos matrices A y B de la misma dimensión es otra matriz que se denota como $A+B$ con misma dimensión que las otras dos y definida como:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir $A+B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices que se están sumando.

Ejemplos:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ No se puede sumar}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+2 \\ 1-3 & 0+1 \\ 3+0 & 5+1 \end{pmatrix} \text{ Si se puede sumar}$$

2.3. Producto de una matriz por un número (escalar)

Sea k un número real (escalar) y $A = (a_{ij})$ una matriz de dimensión $m \times n$. El producto de k por A es otra matriz $k \cdot A$ de misma dimensión tal que:

$$k \cdot A = k(a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

, es decir la matriz $k \cdot A$ se obtiene de multiplicar por k cada elemento de la matriz A .

Ejemplos:

$$\text{a) } 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -12 & 0 & -4 \\ -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

- Se puede sacar factor común en una matriz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -8 & -11 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

- Una matriz escalar se puede expresar en función de la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5Id_3$$

2.4. Producto de matrices

El producto de matrices es una operación más compleja que las anteriores.

Si A y B son dos matrices, para poder realizar $A \cdot B$ es necesario que el nº de columnas de la primera matriz (A) del producto sea igual al nº de filas de la segunda matriz (B).

El producto de la matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times p$ es otra matriz $C = A \cdot B$, con igual nº de filas que A y de columnas que B, tal que el elemento C_{ij} de la matriz C se obtiene multiplicando la fila i-esima de la primera matriz (A) con la columna j-esima de la segunda (B).

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)) = (-5)$$

$$1 \times \boxed{2} = \boxed{2} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 1 \longrightarrow 3 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{¡¡No se puede realizar el producto!!}$$

$$3 \times \boxed{2} \neq \boxed{3} \times 2$$

Ejercicios.

Ejercicio 1. Escribir matrices de los siguientes tipos:

- De dimensión 3×2
- Cuadrada de orden 4
- Triangular inferior de orden 3
- Diagonal de orden 4
- ¿Qué tipo de matriz es de dimensión 1×1 ? Pon un ejemplo. ¿Cuál será la matriz identidad de orden 1?

Ejercicio 2. Decir que tipo y de que dimensión son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calcule el valor de a, b, c y d para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & 7+a+b \\ -2+c+d & 3d+4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, realice las siguientes operaciones: a) $A+B$ b) $A-B-C$ c) $3A+5B-6C$

Ejercicio 5. Realice todos los productos posibles con las siguientes matrices y calcúlelos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Realiza los dos productos siguientes: $A \cdot B$ y $B \cdot A$, ¿Se obtiene el mismo resultado?

Ejercicio 7. Calcular A^2 , B^2 , $A^2 - B^2$, $(A+B)^2$ y $(A-B)^2$ siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Calcular los valores de las incógnitas que verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcule A^2 , A^3 , A^4 . Calcule A^{50} , A^{100} .

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

Soluciones:

$$1. \quad \begin{aligned} \text{a.} \quad & \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e. 1 fila y 1 columna. Los números reales, ejemplos 2,-1.3. La identidad de orden 1 es el número 1.

2. A es una matriz cuadrada, triangular superior, dimensión 3×3 o cuadrada de orden 3. B es una matriz columna de dimensión 4×1 . C es una matriz rectangular de dimensión 2×3 . D es una matriz cuadrada, escalar de dimensión 3×3 o simplemente matriz cuadrada de orden 3.

3. $2a = a + 5 \rightarrow a = 5$

$$2b = 7 + a + b \rightarrow b = 12$$

$$2c = -2 + c + d \rightarrow c = d - 2 \rightarrow c = -6$$

$$2d = 3d + 4 \rightarrow d = -4$$

$$4. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad A - B - C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \quad 3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} A \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix} \quad C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$6. \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 20 & 12 & 14 \\ 32 & 18 & 20 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 30 & 36 & 42 \end{pmatrix}$$

No es el mismo resultado. No siempre se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$, es decir no se cumple la propiedad conmutativa del producto de matrices. Existen algún tipo de matrices que si conmutan. $A \cdot B = B \cdot A$, si esto ocurre se dice que A y B conmutan.

$$7. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad (A-B)^2 = (A-B)(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Al no ser conmutativo el producto de las matrices las igualdades notables no son ciertas cuando A y B son matrices.

8. a) $x = y = 0$ b) $a = 2; b = 1; c = 0; d = -1$

9. $A^2 = -Id; \quad A^3 = -A; \quad A^4 = Id$

Cada 4 se repite la secuencia. Luego $A^{50} = A^{48} \cdot A^2 = Id \cdot A^2 = A^2 = -Id \quad A^{100} = Id$

10. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Trasposición de Matrices.

Sea **A** una matriz de dimensión $m \times n$ se llama matriz traspuesta y se escribe como A^t a la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas. Obteniendo una matriz de orden $n \times m$.

Ejemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Observaciones:

- $(A^t)^t = A$
- Si **B** es una matriz simétrica cumple que $B^t = B$
- Si **A** es una matriz escalar cumple que $A^t = A$

4. Matriz inversa

Se establece el concepto de matriz inversa solo para matrices cuadradas.

La matriz inversa de una matriz cuadrada A es otra matriz cuadrada de la misma dimensión que se denota como A^{-1} tal que se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$$

El método más sencillo para el cálculo de la inversa se realiza con ayuda del determinante de la matriz que se verá en el tema siguiente.

Para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ calculemos su inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Debe cumplirse:

$$A \cdot A^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a+2c=1 \\ 2b+2d=0 \\ 3a+7c=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a+2c=1 \\ 3a+7c=0 \end{cases} \xrightarrow{3 \cdot \text{Ecuación } 1^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a} \begin{cases} 6a+6c=3 \\ -6a-14c=0 \end{cases}$$

$$\underline{-8c=3} \rightarrow \boxed{c=-3/8}$$

$$\rightarrow 2a - 6/8 = 1 \rightarrow \boxed{a=7/8}$$

$$\begin{cases} 2b+2d=0 \\ 3b+7d=1 \end{cases} \xrightarrow{3 \cdot \text{Ecuación } 1^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^a} \begin{cases} 6b+6d=0 \\ -6b-14d=-2 \end{cases}$$

$$\underline{-8d=-2} \rightarrow \boxed{d=2/8}$$

$$\rightarrow 6b + 12/8 = 0 \rightarrow \boxed{b=-12/8}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/8 & -12/8 \\ -3/8 & 2/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se podría comprobar que también se cumple:

$$A^{-1} \cdot A = Id$$

5. Resolución de ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales son ecuaciones algebraicas donde los coeficientes y las incógnitas son matrices.

Ejemplos:

a) Resuelve la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1} \cdot B \cdot P = A$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver una ecuación matricial es obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad.

Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

- 1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

$$X + B = C \rightarrow X = C - B$$

$$X - B = C \rightarrow X = C + B$$

- 2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow Id \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot Id = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Ejemplos:

Veamos la resolución de los dos anteriores ejemplos.

a) Resuelve la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$ siendo $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$X \cdot B + B = B^{-1} \Rightarrow X \cdot B = B^{-1} - B \Rightarrow X = (B^{-1} - B) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = B^{-1} \cdot B^{-1} - Id$$

Necesitamos calcular la inversa de B:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \text{ Debe cumplirse } B \cdot B^{-1} = Id \rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a - c & 2b - d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - c = 3 \\ 2b - d = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ -b + 2d = 3 \end{cases}$$

Pudiendo separar las 4 ecuaciones en 2 sistemas de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - c = 3 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2a - 3 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow -a + 4a - 6 = 0 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2 \rightarrow \\ \rightarrow c = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{cases} 2b - d = 0 \\ -b + 2d = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 2b \\ -b + 2d = 3 \end{cases} \rightarrow -b + 4b = 3 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow b = 1 \rightarrow d = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así la solución es

$$X = B^{-1} \cdot B^{-1} - Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Encuentra la matriz B que cumple la ecuación $P^{-1} \cdot B \cdot P = A$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejemos B en la ecuación

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = A \xrightarrow[\text{Multiplicamos por } P^{-1} \text{ por la derecha}]{\text{Multiplicamos por } P \text{ por la izquierda}} B = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

Necesitamos calcular la inversa de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}. \text{ Debe cumplirse:}$$

$$P \cdot P^{-1} = Id \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+k \\ -a+g & -b+h & -c+k \\ -d+g & -e+h & -f+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ -a+g=0 \\ -b+h=1 \\ -c+k=0 \\ -d+g=0 \\ -e+h=0 \\ -f+k=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+d+g=1 \\ b+e+h=0 \\ c+f+k=0 \\ a=g \\ -b+h=1 \\ k=c \\ d=g \\ h=e \\ -f+k=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g+g+g=1 \\ b+e+e=0 \\ c+f+c=0 \\ -b+e=1 \\ -f+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g=1/3 \\ b=-2e \\ f=-2c \\ b=e-1 \\ c=f+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2e=e-1 \\ c=-2c+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1/3 \\ c=1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2/3 \\ f=-2/3 \\ a=g=1/3 \\ d=g=1/3 \\ h=e=1/3 \\ k=c=1/3 \end{cases}$$

Así queda la inversa de P como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz B solución de la ecuación matricial es:

$$\begin{aligned} B = P \cdot A \cdot P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: Se observa en este último ejemplo que es necesario un método más ágil y cómodo para el cálculo de la inversa. Lo volveremos a ver con el uso de determinantes (¿qué será?).

Ejercicios

1. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcule k tal que se cumpla la siguiente igualdad $(A - k \cdot Id)^2 = 0$

3. Calcule la matriz X , en la ecuación matricial $B(2A + Id) = AXA + B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sea I la matriz identidad de orden 2 y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halle X para que $BX + B = B^2 + I$.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^t A$ y AA^t , donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

b) Encuentra las matrices de la forma $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, tales que $A^t A Y = Y$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tales que: $AA^t X = X$

6. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a , b y c son tres números reales.

a) Encuentra A^n para todo natural n .

b) Calcula $(A^{35} - A)^2$

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^n , siendo n un número natural.

8. Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

9. Calcula los valores de x para que la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación

$A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y 0 son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

10. Siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla los valores de a y b de forma que $A^2 - 2A = B$.

Soluciones:

1. $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ La matriz D no tiene inversa.

2. $K = 1$

3. $X = 2 \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$

4. $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$

6. $A^n = 0$ para $n \geq 3$. $(A^{35} - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{3^n - 1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $x = 3, y = -8$

9. $x = 3$

10. Si $a = 0; b = \frac{-1}{2}$. Si $a = 2; b = \frac{1}{2}$

Tema 2. Determinantes

1. Definición general de determinantes

Solo se habla de determinantes en matrices cuadradas.

A cada matriz cuadrada A se le asigna un escalar denominado determinante de A, denotado por $|A|$. Este escalar se obtiene como combinación lineal de los elementos que componen la matriz.

La definición de determinante es más compleja, pero como nos limitamos a determinantes de matrices de orden 2 y 3 aprenderemos solo las reglas que nos permiten calcularlos. Aprenderemos una forma cómoda y rápida de calcular dicho determinante de la matriz.

2. Determinante de matrices de orden 1, 2 y 3.

2.1. Determinante de matrices cuadradas de orden 1

$$|a_{11}| = a_{11} \text{ El determinante es el propio número.}$$

2.2. Determinante de matrices cuadradas de orden 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

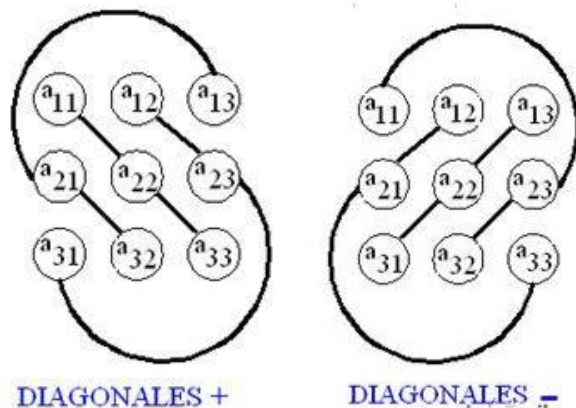
(El producto de la diagonal principal – el producto de la diagonal secundaria)

2.3. Determinante de matrices cuadradas de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Existen dos métodos para calcular este determinante de orden 3:

1. Regla de Sarrus



Los términos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Los términos con signo - están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Ejemplos:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-6 + 0 + 0) = 6$$

2. Otro método

Para calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Escribes a continuación, detrás de la 3ª columna, las **dos** primeras:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ahora realizas las sumas de los productos de los 3 elementos de la diagonal principal y diagonales paralelas a la misma (que son las líneas azules del dibujo). Y restas los productos de 3 elementos en la diagonal secundaria y paralelas a ella (son las líneas rojas del dibujo).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32})$$

Ejemplo:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 24 + 0 - (0 - 6 + 8) = -30$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

$$a) \begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$$

Solución: a) $a^2 + 25$ b) 23 c) $2 - 2a^2$ d) -2 e) 79 f) $-m^2 - 4m + 1$

3. Determinante de algunas matrices especiales

En este apartado calcularemos de forma sencilla el valor de los determinantes de algunas matrices cuadradas especiales.

1. Determinante de la matriz nula.

La matriz cuadrada nula es aquella en la que todos los coeficientes son cero, se denota como 0. Su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$$

2. Determinante de la matriz identidad

Recordemos que la matriz identidad es aquella donde todos los elementos fuera de la diagonal son nulos y los de la diagonal vale 1. Su determinante es 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

3. Determinante de la matriz diagonal

Matrices diagonales son aquellas donde los elementos fuera de la diagonal principal son nulos, pudiendo valer cualquier valor los elementos de la misma. Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

4. Determinante de la matriz triangular

El valor de un determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -4$$

4. Propiedades de los determinantes

En este apartado veremos las propiedades más importantes de los determinantes, a partir de las cuales será fácil calcular el valor de los determinantes de algunas matrices.

Propiedad 1: el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta:

$$|A| = |A^t|$$

Importante: a partir de esta propiedad todas las propiedades de los determinantes que relacionen columnas serán ciertas también para las filas y al revés.

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) - (-4) \cdot 2 = \boxed{23} \Rightarrow |A^t| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-5) - 2 \cdot (-4) = \boxed{23}$$

|-----!!IGUALES!!-----|

Propiedad 2: si los elementos de una fila (o columna) de una matriz se multiplican por un número el determinante de la nueva matriz queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:

$$\text{Sí } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13.$$

- Si multiplicamos la columna 3ª de la matriz A por 2 obtenemos otra matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ cuyo determinante valdrá 2 veces el determinante de A.}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 26 \rightarrow |B| = 2 \cdot |A|$$

- Si cambiamos el signo (multiplicamos por -1) de los elementos de la 2ª fila de la

$$\text{matriz obtenemos otra matriz } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ cuyo determinante valdrá lo mismo}$$

que el de A pero cambiado de signo.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13 \rightarrow |C| = -|A|$$

Propiedad 3: Si una matriz cuadrada A de orden n la multiplicamos por un número k ($B = k \cdot A$), el determinante de la nueva matriz, B , es k^n veces el determinante de A :

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13$$

Obtenemos una matriz B al multiplicar la matriz A por 3.

$$B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 15 \\ 6 & 9 & 18 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 13 = 351$$

Propiedad 4: Si los elementos de una columna i -ésima (o una fila) de una matriz cuadrada se puede descomponer como suma de dos números, su determinante será igual a la suma de los determinantes de las matrices que tienen las demás columnas (filas) iguales y la columna i -ésima de cada uno de ellas uno de los elementos de la suma.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 13$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3+2 \\ 2 & 3 & 5+1 \\ 0 & 1 & 1+0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3+2 \\ 2 & 3 & 5+1 \\ 0 & 1 & 1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= [3 - 0 + 6 - 0 + 6 - 5] + [0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 1] = 10 + 3 = 13 \end{aligned}$$

Propiedad 5: El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Propiedad 6: Si una matriz permuta dos columnas (o filas), su determinante cambia de signo.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Intercambiamos la fila 3ª y la 1ª.

Comprobamos que el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 6 - 6 - 3 - 10 = -13 = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Propiedad 7: Si una matriz tiene una fila o una columna formada por ceros su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8: Si en una matriz tiene dos filas o columnas iguales o proporcionales su determinante es cero.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \{ \text{Fila } 1^a = \text{Fila } 3^a \} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 18 - 30 - (15 - 30 - 18) = 0 \\ \{ \text{Columna } 3^a = 2 \cdot \text{Columna } 1^a \} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 4 - (-16 + 4) = 0 \end{aligned}$$

Propiedad 9: Si en una matriz cuadrada los elementos de una fila (o columna) son combinación lineal de las restantes filas (o columnas) entonces su determinante es cero. Y viceversa.

Ejemplo:

$$\{ \text{Fila } 3^a = \text{Fila } 1^a + \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 54 - (45 - 66) = 0$$

Propiedad 10: El determinante de la matriz A^{-1} es:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ejemplo:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos sus determinantes respectivos:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$|B^{-1}| = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$$

Propiedad 11: Si a los elementos de una fila (columna) se les suma una combinación lineal de otras filas (o columnas), su determinante no varía.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Si le sumo a la fila 2ª la fila 1ª multiplicada por -2

$$\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 6 \\ + & -2 & 6 & -10 \\ \hline 0 & 9 & -4 \end{array}$$

Con la nueva fila 2ª el determinante vale lo mismo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

5. Cálculo de la matriz inversa.

Una **matriz es regular** si tiene inversa.

Una matriz tiene inversa si su determinante **no** es cero. En caso contrario la matriz no tiene inversa.

$$|A| \neq 0 \rightarrow A \text{ es regular o inversible (existe } A^{-1})$$

$$|A| = 0 \rightarrow A \text{ es singular o no tiene inversa (no existe } A^{-1})$$

La fórmula del cálculo de la inversa de una matriz es:

$$A^{-1} = \frac{[\text{Matriz adjunta}(A)]^t}{|A|} = \frac{\text{Matriz adjunta}(A^t)}{|A|}$$

Para utilizar esta fórmula necesitamos definir varios conceptos:

Menor complementario

Se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al valor del determinante de orden $n-1$ que se obtiene al suprimir en la matriz la fila i y la columna j .

Adjunto

Se llama adjunto del elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo:

- El signo + si $i+j$ es par.
- El signo - si $i+j$ es impar.

Matriz adjunta

Se llama matriz adjunta a la compuesta por todos los adjuntos de cada elemento de la matriz inicial.

Ejemplos:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ veamos si se puede calcular su inversa, para ello

comprobamos si su determinante es 0 o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa de A y proseguimos con su cálculo.}$$

Para hacer el adjunto de cada elemento de la matriz basta con aplicar esta plantilla de cambio de signos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Vamos cambiando el signo al menor complementario de la posición con un menos (−) y dejamos sin cambio de signo el de posición con un más (+).

$$\text{Adjunto de } a_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{Adjunto de } a_{12} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ 2 & \cancel{-1} & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-10) = 10$$

$$\text{Adjunto de } a_{13} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{3} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{Adjunto de } a_{21} = - \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adjunto de } a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & \cancel{-1} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adjunto de } a_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 2 & -1 & \cancel{4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$\text{Adjunto de } a_{31} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 0 & 1 \\ \cancel{3} & 0 & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adjunto de } a_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & \cancel{0} & 1 \\ -1 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Adjunto de } a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cancel{1} \\ -1 & 0 & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz adjunta de A queda:

$$\text{Adjunta}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Y la traspuesta de la matriz adjunta de A queda:

$$\text{Adjunta}(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Procedemos al cálculo de su inversa.

1º. Cálculo del determinante: $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ Existe la inversa.

2º. Traspuesta de B $\rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3º. Matriz adjunta de $B^t \rightarrow \text{Adjunta}(B^t) = \begin{pmatrix} |2| & -|4| \\ -|0| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4º. Inversa de B $\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adjunta}(B^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

6. Rango de una matriz

Menor de orden k de una matriz A de dimensión $m \times n$ es toda submatriz con k filas y k columnas pertenecientes a la matriz A, obtenida quitando filas y columnas de la matriz original.

Ejemplo:

Dada la matriz A de dimensión 3x4, vamos a detallar distintos menores de distinto orden de dicha matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 4:
No existen. La matriz es de dimensión 3x4, no puedo extraer una matriz de orden 4.

- Menores de orden 3: Debo de quitar una columna, obteniendo 4 menores.

$$\text{Quito la columna } 4^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 3^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 2^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quito la columna } 1^{\text{a}} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Menores de orden 2 (hay muchos, detallamos algunos):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}; \dots$$

- Menores de orden 1 (hay doce, cada uno de los elementos de la matriz):

$$(1); (2); (3); (4); (5); \dots$$

Rango de una matriz A de dimensión $m \times n$ es el orden del mayor menor con determinante no nulo de la matriz A.

También se define como el número de filas o columnas linealmente independientes de la matriz A.

Una forma de obtener el rango de una matriz:

- 1) Calculamos todos los menores de mayor dimensión (k) de la matriz A.

$$k = \text{mínimo}(m, n)$$

$$1.a. \text{ Si algún menor es distinto de cero } \rightarrow \text{rang}(A) = k$$

$$1.b. \text{ Si todos los menores son iguales a cero } \rightarrow \text{rang}(A) < k$$

- 2) Calculamos los menores de dimensión $k - 1$.

$$2.a \text{ Si algún menor es distinto de cero } \rightarrow \text{rang}(A) = k - 1$$

$$2.b \text{ Si todos los menores son nulos } \rightarrow \text{rang}(A) < k - 1$$

Y así sucesivamente....

Esto termina cuando algún menor es distinto de cero, siendo nulos los calculados antes de mayor dimensión.

Una segunda forma:

Observar las filas y columnas de la matriz buscando líneas nulas, iguales o proporcionales.

También buscar si una línea es combinación lineal de las otras.

Ejemplos:

1. Calcular el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son iguales, su rango es 1.

2. Calcular el rango de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Comparando las filas las tres son iguales, su rango es 1.

3. Calcular el rango de $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comparando las filas o las columnas hay 2 iguales, su rango es 2.

4. Calcular el rango de $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Hay una columna nula su rango es como mucho 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0 \text{ y su rango es 2.}$$

5. Calcular el rango de $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como hay dos columnas nulas su rango es 1.

6. Calcular el rango de $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su

$$\text{determinante } |G| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11 \neq 0. \text{ El rango es 3.}$$

7. Calcular el rango de $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Su rango como mucho es 3, veamos el valor de su

determinante $|H| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$. El rango no es 3. Busquemos un menor de orden 2

no nulo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango es 2. Puedes observar que en la matriz H la 2ª y 3ª filas son proporcionales, por ello no puede ser 3 y el determinante de la matriz sale 0.

8. Calcular el rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. No se observa igualdad o proporcionalidad entre

filas o entre columnas. Procedemos con el método del determinante.

¿Rango de M es 3? $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0$ El rango no es 3.

¿Rango de M es 2? De $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ sacamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

El rango de M es 2.

9. Calcular el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso requiere más trabajo.

Buscaremos el menor de la matriz más grande posible con determinante no nulo.

Paso 1. Calculamos el determinante de los menores de orden 3 = mínimo(3,4):

$$\left. \begin{array}{l}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 3^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es tres veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ la columna } 2^{\text{a}} \text{ es dos veces la columna } 1^{\text{a}} \\
 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 9 \\ -6 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0
 \end{array} \right\} \rightarrow \text{rang}(A) < 3$$

Paso 2. Calculamos el determinante de los menores de orden 2, en busca de uno no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \text{ Pero hay uno que } \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 81 = 87 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Ejercicios

1. Calcular los siguientes determinantes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{vmatrix}$$

2. Calcula la matriz inversa, si es posible, de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Averigua para que valor de x las matrices son regulares:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -x \\ 2 & x & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Dadas las matrices: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot C$

5. Calcule el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ Discútase, según el valor de } a, \text{ el rango de la matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$7. \text{ Discutir, en función del número real } m, \text{ el rango de la matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Determina el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Indica el rango de la matriz identidad de orden 3 y de la matriz nula.

10. Determina el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

12. Estudia el rango de la matriz M según los valores de a . ¿Existe algún valor de a que haga que $\text{ran}(M) = 1$?

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Soluciones:

1. a) $a^2 + 25$ b) 23 c) $2 - 2a^2$ d) -2 e) 79 f) $-m^2 - 4m + 1$

$$2. A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{130} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 6 \\ -10 & -20 & 20 \\ 25 & -15 & 2 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. A es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y 1.

B es regular para cualquier número distinto de 6.

C es regular para cualquier valor de x distinto de 0 y 6.

$$4. X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rango es 2

6. Si $a = -1/3$ el rango es 2 y si a es distinto de $-1/3$ el rango es 3.

7. Si $m = 3$ o $m = -2$ el $\text{rang}(A) = 2$ y si m es distinto de -2 y 3 el $\text{rang}(A) = 3$.

8. El rango de A es 1 y el de B es 2.

9. El rango de Id_3 es 3 y el de la matriz nula es 0.

10. El rango de A es 3 y el de B es 2

$$11. X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Si $4 - a^2 = 0 \rightarrow a = 2, a = -2$: Las dos últimas filas coinciden $\rightarrow \text{ran}(M) = 2$.

Si $4 - a^2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2, a \neq -2$: $\text{ran}(M) = 3$. El rango de M no puede ser igual a 1 para ningún valor de a , ya que las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier a .

Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

DISCUSIÓN de UN SISTEMA

Discute según los valores de m :

$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}$$



$$\text{Strawberry} + \text{Orange} = 1800$$

$$\text{Lemon} + \text{Orange} = 1200$$

$$\text{Strawberry} + \text{Lemon} = 1600$$

$$\text{Apple} + \text{Apple} + \text{Apple} = 30$$

$$\text{Apple} + \text{Banana} + \text{Banana} = 18$$

$$\text{Banana} - \text{Coconut} = 2$$

$$\text{Apple} + \text{Apple} + \text{Apple} = 18$$

$$\text{Apple} + \text{Banana} + \text{Banana} = 14$$

$$\text{Banana} - \text{Cherry} = 2$$

$$\text{Cherry} + \text{Apple} + \text{Banana} = ?$$

**MATH
HEROES**

$$\text{Spider} + \text{Spider} = 32$$

$$\text{Superman} + \text{Superman} - \text{Spider} = 4$$

$$\text{Captain America} + \text{Captain America} = 6$$

$$\text{Wonder Woman} + \text{Wonder Woman} + \text{Superman} = 12$$

$$\text{Spider} + \text{Captain America} + \text{Wonder Woman} = ??$$

**STAR
MATHS**

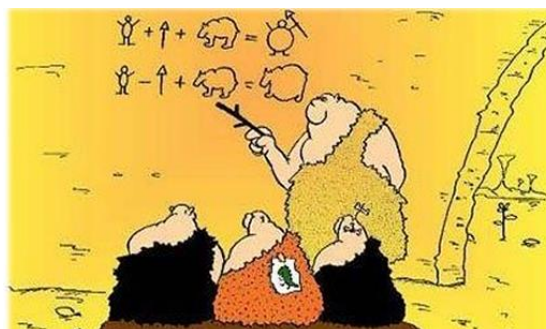
$$\text{Hy} + \text{Hy} + \text{Hy} = 18$$

$$\text{Millenium Falcon} + \text{Millenium Falcon} - \text{Hy} = 24$$

$$\text{Millenium Falcon} + \text{Millenium Falcon} = 8$$

$$\text{Millenium Falcon} + \text{Hy} - \text{Millenium Falcon} = 1$$

$$\text{Millenium Falcon} + \text{Millenium Falcon} + \text{Millenium Falcon} = ??$$



1. Definiciones, tipos de sistemas y distintas formas de expresarlos

1.1. Definición, sistemas equivalentes

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** al conjunto formado por **m** ecuaciones con **n** incógnitas.

[illegible]

Ejemplos:

1.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y + 5z = 13 \quad (1) \\ 2x + 3y = 2 \quad (2) \\ -x + y - z = -3 \quad (3) \end{array} \right\} 3 \text{ ecuaciones y 3 incógnitas}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+3y+t=6 \quad (1) \\ x-t=0 \quad (2) \end{array} \right\} 2 \text{ ecuaciones y 3 incógnitas}$$

Resolver un sistema es obtener todas sus posibles soluciones.
Debiendo ser solución de todas las ecuaciones.

Ejemplos:

1. La solución del ejemplo 1 es $x=1$; $y=0$; $z=2$.
2. Las soluciones del ejemplo 2 son $x=t$; $y=2-t$.

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Formas de obtener sistemas equivalentes:

- 1) Sumar una constante a ambos miembros de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+10=1+10 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+10=11 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\}$$

- 2) Multiplicar por una constante, distinta de cero, a ambos lados de la igualdad de una o varias ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3(x+y=1) \\ 3x+y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+3y=3 \\ 3x+y=3 \end{array} \right\}$$

- 3) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de la misma con las restantes ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2(x + y = 1) - (3x + y = 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\}$$

4) Añadir o quitar ecuaciones que sean combinación lineal de las restantes ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \\ 2(x + y = 1) - (3x + y = 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{array} \right\}$$

1.2. Tipos de sistemas de ecuaciones.

Existen dos criterios para clasificar los sistemas de ecuaciones lineales:

Los sistemas se pueden clasificar según el *valor de los términos independientes*:

- **Homogéneos**: todos los términos independientes son nulos.
- **No homogéneos**: algún término independiente es diferente de cero.

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right\} \text{No homogéneo}$$

$$\left. \begin{array}{l} -5x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right\} \text{Homogéneo}$$

Los sistemas se pueden clasificar según el *número de soluciones*:

- **Compatibles**: tienen solución
 - Compatibles Determinados**: tienen una única solución
 - Compatibles Indeterminados**: tienen infinitas soluciones
- **Incompatibles**: no tienen solución.

Ejemplos:

$$1) \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \text{Tiene una única solución} \rightarrow x = 1; y = 1$$

$$2) \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{array} \right\} \text{Tiene infinitas soluciones} \rightarrow x = y$$

$$3) \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \text{No tiene solución}$$

1.3. Expresión de sistemas en forma matricial

Una manera más cómoda y útil de trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales es de forma matricial.

[illegible]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Asignando a cada matriz una letra:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

El sistema queda: $AX = B$

La matriz **A** es la **matriz de los coeficientes**.

La **matriz ampliada** **A/B** es la matriz que resulta de añadirle a la matriz de los coeficientes una columna con los términos independientes:

$$\text{Matriz ampliada} = A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

La expresión matricial del sistema es:

$$AX = B, \text{ es decir, } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Sistemas de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

- Mismo número de ecuaciones que de incógnitas $n=m$

- El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero $|A| \neq 0$
 Los sistemas de Cramer son todos compatibles determinados (una única solución).

Existen dos métodos de resolución de los sistemas de Cramer.

Método 1: a partir de la matriz inversa.

El sistema de Cramer se puede escribir en forma matricial como $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, y tal que $\mathbf{A}$ tiene inversa al ser una matriz cuadrada con determinante distinto de cero.

Así podemos expresar las soluciones como:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \text{ ecuaciones} = 3 \text{ incógnitas. } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

El sistema es de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $x = y = z = 1$.

Método 2: por fórmula

En este método no tendremos que calcular la matriz inversa, sino tantos determinantes como incógnitas.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0; \text{ la fórmula es:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Ejercicio 1: Resuelve el sistema con el método de Cramer, si es posible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - z = -5 \\ -x - 2y + z = 4 \\ 5x + 4z = 8 \end{array} \right\}$$

3. Teorema de Rouché-Fröbenius. Discusión de un sistema

Sea un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas, el sistema es compatible (tiene soluciones) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada

$$\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A_{\text{ampliada}})$$

Según la relación entre el rango y el número de incógnitas tenemos que el sistema será compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Veámoslo en la siguiente tabla resumen:

$\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A_m)$ $\rightarrow$ El sistema no tiene solución

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m)$ $\rightarrow$ El sistema tiene solución, pero hay dos opciones:

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m) = n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$ El sistema tiene una solución única

$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A_m) < n^\circ \text{ incógnitas} \rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones

4. Discusión y resolución de sistemas por Gauss.

El método de Gauss también nos permite discutir los sistemas en función de los distintos valores del parámetro.

$$\text{Aplicuémoslo a la discusión del sistema} \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Su matriz ampliada es } A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vamos a transformarla hasta conseguir una matriz triangular superior equivalente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Fila 3}^a - a \cdot \text{Fila 1}^a]{\text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right)$$

El sistema equivalente queda
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ (a-1)y + (1-a)z = 0 \\ (2-a-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

Mirando la tercera ecuación los casos distintos aparecen al considerar cuando $2-a-a^2=0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $a=1$ y $a=-2$.

Distinguimos tres casos:

- **Caso 1.** $a \neq 1$ y $a \neq -2$. El sistema tendrá una única solución ya que se podrá hallar el valor de z y después el de las otras incógnitas.

- **Caso 2.** $a=1$ El sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

El sistema tiene infinitas soluciones
$$\begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

- **Caso 3.** $a=-2$ El sistema queda
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}.$$
 El sistema no tiene solución al aparecer

una igualdad imposible.

5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por Cramer.

Hemos resuelto sistemas con igual número de incógnitas que de ecuaciones cuando el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero (método de Cramer).

Vamos a ser más genéricos, resolviendo por Cramer todo tipo de sistema compatible; es decir sistemas en los que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A/B})$ tanto si son compatibles determinados como indeterminados.

5.1. Sistemas compatibles determinados

Para que un sistema sea compatible determinado es necesario que el número de ecuaciones sea mayor o igual que el de incógnitas, y que se cumpla que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A_m}) = \text{número de incógnitas}$.

De esta forma hay ecuaciones sobrantes y podemos eliminarlas. Es importante comprobar que las ecuaciones que no se eliminan sean independientes, lo cual se comprueba viendo que el rango del nuevo sistema continúe siendo el mismo. El nuevo sistema se puede resolver por Cramer.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \\ 7x - 2y = -14 \end{array} \right\}$$

El sistema no es de Cramer, **número de incógnitas $\neq$ número de ecuaciones**

Pero estudiemos si es compatible o no, utilizando los rangos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El menor de orden } 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 7 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es } 2.$$

Luego **$\text{rang}(A) = \text{rang}(Am) = 2 = \text{número de incógnitas} \rightarrow$** El sistema es compatible.

Como el rango es 2, tenemos sólo 2 ecuaciones linealmente independientes, de forma que podemos eliminar una de las 3 ecuaciones, el rango del sistema continua siendo 2.

Vamos a quitar la tercera ecuación pues, cuando calculamos el rango de A comprobamos que, para los coeficientes de las dos primeras ecuaciones, el determinante es distinto de cero.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 2x - y = -7 \end{array} \right\} \text{ Este nuevo sistema, equivalente al anterior, es de Cramer, ya que cumple que}$$

$$\text{Rang}(A) = \text{rang}(A/B) = \text{número de ecuaciones} = \text{número de incógnitas} = 2$$

$$\text{La solución es } x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-21}{-3} = 7$$

Ejercicio 2: Resuelve el sistema con el método de Cramer si es posible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = -5 \\ -x - y = 2 \\ 5x + 3y = -7 \end{array} \right\}$$

5.2. Sistemas compatibles indeterminados

Sea un sistema con m ecuaciones y n incógnitas, tal que **$\text{rang}(A) = \text{rang}(Am) = r < n$** , entonces el sistema es compatible indeterminado.

Tenemos que buscar un sistema equivalente con r ecuaciones y r incógnitas:

1. Tomamos $\mathbf{r}$ ecuaciones independientes (rango del sistema es $\mathbf{r}$)
2. Pasamos $\mathbf{n-r}$ incógnitas a la derecha de la igualdad y las tratamos como parte del término independiente.
3. El sistema se resuelve por Cramer, dependiendo la solución de esos parámetros.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ -x-y+2z=0 \\ x+y+4z=6 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

Si calculamos los rangos se cumple que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\mathbf{m}) = 2$. Luego el sistema es compatible indeterminado con un parámetro.

Como no observamos que ninguna ecuación sea igual o proporcional a otra, tomaremos la z como parámetro y las 2 primeras ecuaciones como independientes entre sí:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 - z \\ -x - y = -2z \end{array} \right\}$$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ por lo tanto, el rango de la matriz de los coeficientes no será 2, tenemos que o

bien coger la otra ecuación o cambiar de parámetro. Cambiaremos de parámetro tomando la y :

$$\left. \begin{array}{l} x+z=3-y \\ -x+2z=y \end{array} \right\}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A''| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0. \text{ El rango de la matriz de los coeficientes es}$$

2 = número de incógnitas = número de ecuaciones. El sistema es de Cramer y podemos dar sus soluciones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-y & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6-2y-y}{3} = \frac{6-3y}{3} = 2-y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-y \\ -1 & y \end{vmatrix}}{3} = \frac{y+3-y}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = y$$

6.Resolución de sistemas homogéneos.

Recordemos que los sistemas homogéneos tienen todos sus términos independientes nulos.

[illegible]

Una de las características más relevantes es que todo sistema homogéneo es compatible, ya que la última columna de la matriz ampliada es nula, con lo que siempre $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A/B})$. Además, es fácil ver que todo sistema homogéneo tiene como solución la denominada solución trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Para discutir y obtener la solución del de un sistema homogéneo tenemos el siguiente esquema $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A/B}) = r$ con n incógnitas:

- Si $r = n$, compatible determinado. La única solución la solución trivial.
- Si $r < n$, compatible indeterminado.

Ejemplos:

1. Estudiar el número de soluciones del siguiente sistema en función de m , resolver cuando sea posible.

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + my + mz &= 0 \\ 2x + (m+1)y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Obtengamos la matriz de coeficientes asociada al sistema y estudiemos su rango.

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + my + mz &= 0 \\ 2x + (m+1)y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de A en función de m igualando a 0 el determinante:

$$|A| = -m^2 + 2m - 1 \quad -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Según el valor de m el sistema de ecuaciones puede ser de las 2 formas siguientes:

- a) Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0$ y $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$, sistema compatible determinado.

b) Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = 1$, sistema compatible indeterminado

Resolvamos el sistema en cada caso de los estudiados.

- a) Si $m \neq 1$ (compatible determinado): La única solución es la trivial $x = y = z = 0$

- b) Si $m = 1$ (compatible indeterminado):

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow x + y + z = 0 \rightarrow z = -x - y \rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y \end{cases}$$

2. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real}$$

- a) Discutir el sistema en función del valor de a
 b) Resolver el sistema para $a = 0$
 c) Resolver el sistema para $a = 1$

Solución:

- a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array} \right)$$

Determinemos el rango de ambas.

- Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 - (1 + 0 + 0) = 0; \text{ El rango de A } < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \text{ El rango de A es 2}$$

Independientemente del valor de a .

- Rango de Matriz ampliada A/B:

Cambiamos la columna tercera de A por la de los términos independientes y veamos si se anula

el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 0 - (-1 + 0 + 0) = a^2 - 2a + 1$

Si igualamos a 0 nos sale $a = 1$.

Hay dos situaciones diferentes a estudiar, en función del valor de a :

- $a \neq 1 \rightarrow$ Rango de A/B = 3 distinto del rango de A = 2. Sistema sin solución.
- $a = 1 \rightarrow$ Rango de A = Rango de A/B = 2 < número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones (dependientes de 1 parámetro)

b) Para $a = 0$ el sistema es sin solución según lo visto en el apartado anterior.

c) Para $a = 1$ el sistema es con infinitas soluciones. Las determinamos:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{Quitamos la primera ecuación y nos quedamos con el sistema:}$$

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{La solución es } \begin{cases} y = 2 - z \\ x = 1 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

3. Sea a un parámetro real. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1 - a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del valor de a .
 b) Resolver el sistema para $a = 0$.

c) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a) Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema del problema:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 + a \\ (1-a)x + y + 2z = 1 \\ ax - y - z = 1 - a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2+a \\ 1-a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -1 & 1-a \end{array} \right)$$

Determinemos el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 - 1 + a - (a - a + a^2 - 2) = a^2 + a = 0 \rightarrow a(a+1) = 0;$$

El determinante de A es 0 cuando $a = 0$ y cuando $a = -1$.

Hay tres situaciones diferentes, en función del valor de a:

- $a \neq 0$ y $a \neq -1 \rightarrow$ Rango de A = Rango de A/B = número de incógnitas = 3.

El sistema tiene una única solución.

- $a = 0 \rightarrow |A| = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango de A = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Probamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª}$$

$$\text{columna } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 2 - (0 + 0 - 1) = 0 \rightarrow \text{Rango de A/B} = 2$$

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = número de incógnitas

El sistema tiene infinitas soluciones.

- $a = -1 \rightarrow |A| = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango de A = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \text{ Como la 3ª columna y la 1ª son iguales, probamos el menor}$$

de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 1 - (-2 + 2 + 1) = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de A/B} = 3$$

Rango de A $\neq$ Rango de A/B. El sistema no tiene solución.

- b) Para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Debemos eliminar una ecuación y la solución dependerá de un parámetro.

$$\begin{cases} x+z=2 \\ x+y+2z=1 \\ -y-z=1 \end{cases} \text{ quitamos la ecuación } 2^a \text{ que es } 1^a - 3^a \text{ y queda } \begin{cases} x+z=2 \\ -y-z=1 \end{cases}$$

Despejando la z la solución es $\boxed{\begin{cases} x=2-z \\ y=-1-z \\ z=z \end{cases}}$

c) Para $a=1$ el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-1+1+6}{-1+2-1+2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1+6-1}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1-3+1}{2} = \frac{-1}{2}$$

4. Discútase, en función del parámetro real k , el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Resolver cuando sea posible.

$$\begin{cases} kx+3y=0 \\ 3x+2y=k \\ 3x+ky=0 \end{cases}$$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} k & 3 \\ 3 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}; \quad A/B = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{pmatrix}$

Estudiemos el rango de A/B que puede ser 3 y el de A solo puede llegar a ser 2.

$$\begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & k & 0 \end{vmatrix} = 9k - k^3 = 0 \rightarrow k(9 - k^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 9 - k^2 = 0 \rightarrow 9 = k^2 \rightarrow k = \pm 3 \end{cases}$$

Estudiemos por separado cada uno de los cuatro casos posibles:

CASO 1. $k \neq 0; k \neq -3; k \neq 3 \rightarrow |A/B| \neq 0 \rightarrow$ El rango de A/B es 3 y como el rango de A es 2 o menos, entonces el sistema no tiene solución.

CASO 2. $k = 0 \rightarrow$ El sistema queda
$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$$
 El sistema tiene una única

solución: $x = y = 0$

CASO 3. $k = 3 \rightarrow$ El sistema queda
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$
 La ecuación 1ª y 3ª son iguales, podemos

suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$
 Lo podemos resolver utilizando

reducción:
$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -3x - 2y = -3 \rightarrow 3x + 3(-3) = 0 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3 \\ \hline y = -3 \end{cases}$$

El sistema tiene una única solución $x = 3; y = -3$

CASO 4. $k = -3 \rightarrow$ El sistema queda
$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$
 La ecuación 1ª y 3ª son iguales, podemos

suprimir la 1ª ecuación y el sistema queda
$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$$

Lo podemos resolver utilizando sustitución:

$$\begin{cases} -3x = -3y \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow 5y = -3 \rightarrow y = -\frac{3}{5} \rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

El sistema tiene una única solución $x = -\frac{3}{5}; y = -\frac{3}{5}$

5. Dado el sistema:

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y + (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad en función de los valores de **a**.

b) Resuélvelo cuando $a = 0$

Solución:

Vamos a discutirlo de dos formas distintas:

PRIMER MÉTODO (Gauss) Triangulando la matriz

$$\left. \begin{array}{l} (a+1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y + (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La matriz asociada al sistema de ecuaciones es}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right) \Rightarrow \{\text{Cambio fila } 1^a \text{ por fila } 3^a\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ a+1 & 2 & a-1 & a+1 \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 3^a \text{ la cambio por Fila } 3^a - (a+1) \cdot \text{Fila } 1^a \\ a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ -a-1 & -a-1 & -a^2-a & -a^2-a \\ \hline 0 & -a+1 & -a^2-1 & -a^2+1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 1-a & -a^2-1 & 1-a^2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc|c} \text{Fila } 3^a \text{ la cambio por } (a-1) \cdot \text{Fila } 2^a + (a+1) \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 & a^2-1 & a^2-1 & 2a-2 \\ 0 & 1-a^2 & -a^3-a^2-a-1 & 1-a^2+a-a^3 \\ \hline 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right)$$

Una vez obtenida la matriz equivalente triangular, igualamos los elementos de la diagonal a 0:

$$a + 1 = 0 \rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$-a^3 - a - 2 = 0 \rightarrow \text{Resolviendo por Ruffini } -1 \left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & -1 & -2 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & -1 & 1 & -2 \\ & & & 0 \end{array} \right| \text{ una de las raices es } a = -1$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $-a^2 + a - 2 = 0$ obtenemos

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-2} = \text{No tiene solución}$$

La única solución es $\boxed{a = -1}$

NOS PLANTEAMOS **dos** CASOS DISTINTOS:

- **CASO 1.** $a \neq -1$. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, ya que ningún elemento de la diagonal de la matriz equivalente es nulo y por tanto tiene una única solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right)$$

- **CASO 2.** $a = -1$

La matriz ampliada queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^3-a-2 & -a^3-a^2+3a-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

El sistema de ecuaciones equivalente al inicial queda así:

$$\left. \begin{array}{l} 2y - 2z = 0 \\ 0 = 2 \\ 0 = -4 \end{array} \right\} \text{ Este sistema es INCOMPATIBLE (las ecuaciones 2ª y 3ª son absurdas)}$$

SEGUNDO MÉTODO (Rouché - Frobenius) con el uso de los rangos

Estudiamos los rangos de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada (Teorema de Rouché-Frobenius) y los comparamos entre si y con el número de incógnitas (3).

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Para obtener el rango de esta matriz, estudiamos primero el valor de su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \\ &= a(a+1)(a+1) + 2(a+1) + (a-1) \cdot 0 \cdot 1 - ((a-1)(a+1) + 0 + (a+1)(a+1)) = \\ &= a^3 + 2a^2 + a + 2a + 2 - (a^2 - 1 + a^2 + 2a + 1) = \\ &= a^3 + \cancel{2a^2} + a + \cancel{2a} + 2 - \cancel{a^2} + 1 - \cancel{a^2} - \cancel{2a} - 1 = a^3 + a + 2 \end{aligned}$$

Para averiguar cuando se anula este determinante necesitamos usar Ruffini

$$a^3 + a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \text{ una de las raíces es } a = -1$$

y resolviendo la ecuación de 2º grado del cociente $a^2 - a + 2 = 0$ obtenemos

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{No tiene solución}$$

La única solución es $\boxed{a = -1}$

NOS PLANTEAMOS **dos** CASOS DISTINTOS:

- **CASO 1.** $a \neq -1$

No se anula el determinante de la matriz de los coeficientes, luego su rango es 3.

El rango de la matriz ampliada como máximo puede ser 3, luego es también 3.

Rango de la matriz de los coeficientes = Rango de la matriz ampliada = Número de incógnitas ($3 = 3 = 3$)

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO para $a \neq -1$.

- **CASO 2.** $a = -1$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila segunda y la columna

tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 2 & a-1 & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

Su rango es 3, ya que puedo elegir el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª

(proporcional a la columna segunda) $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - (0 + 0 + 0) = 4 \neq 0$

Rango de la matriz de los coeficientes $\neq$ Rango de la matriz ampliada ($2 \neq 3$) luego el sistema es INCOMPATIBLE para $a = -1$.

Ejercicios

1. Discute y resuelve en función del parámetro a y resuelve cuando sea posible:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases}$$

2. Dado el sistema
$$\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$$

- Estudia sus soluciones en función de a .
- Resuelve para $a = 1$

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ (1 + a)y + z = 4 \\ x + 2y + az = 4 \end{cases}$$

- Discútase el sistema según el valor del parámetro real a .
- Resuélvase el sistema para $a = 2$.

4. Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 4 \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}.$$

- Discútase según los valores de k e interprétese geoméricamente el resultado.
- Resuélvase el sistema para $k = 2$.

5. a) Discútase el sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a + 1)y - z = a - 1 \end{cases}, \text{ en función del valor de } a.$$

- Para el valor $a=1$, hállese, si procede, la solución del sistema.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

- ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea incompatible?
- ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado?
- Resuélvase el sistema para $a = 0$.

7. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}$$

- Discútase según los valores del parámetro λ .
- Resuélvase para $\lambda = -3$.
- Resuélvase para $\lambda = 1$.

8. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}, \text{ donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

- Discutir el sistema en función del valor de a .
- Resolver el sistema para $a = 1$.

Soluciones:

- Si $a=8$ el sistema tiene infinitas soluciones y si a es distinto de 8 el sistema tiene una única solución.
Para $a=8$ la solución es $x=114-112z$; $y=-19+20z$
- a) $a=3$ El sistema tiene infinitas soluciones; $a=-3/2$ no tiene solución y a distinto de 3 y $-3/2$ el sistema tiene una única solución. b) $x=1$; $y=2$; $z=3$
- a) Para $a=1$ o $a=-1$ el sistema no tiene solución y para un valor distinto tiene una única solución.
b) $x=0$; $y=1$; $z=1$
- a) $k=-2$ el sistema no tiene solución; $k=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y si k es distinto de 1 y -2 el sistema tiene una única solución b) $x=-3/4$, $y=1/4$, $z=9/4$.
- a) Si $a=0$ o $a=1/2$ el sistema no tiene solución y si a es distinto de 0 y $1/2$ el sistema tiene una única solución. b) $x=-6$, $y=10$, $z=2$
- a) $a=2$. b) $a \neq 2$ c) $x=2-3z$; $y=-1/2$
- a) Para $\lambda=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para valor distinto de 1 el sistema tiene una única solución. b) $x=y=z=-1$. c) $x=1-y-z$; $y=y$; $z=z$
- a) Si $a=-0,5$ el sistema no tiene solución; si $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para todo valor de a distinto de 1 y $-0,5$ tiene una única solución. b) $x=x$; $y=2-x$; $z=2$.

Tema 4. Programación lineal

La programación lineal surgió para dar respuesta a problemas de carácter logístico y militar y posteriormente se extendió a amplitud de problemas en el campo de la industria y la economía. Así, por ejemplo, permite resolver problemas de nutrición, distribuciones de factorías, distribuciones de personal en puestos de trabajo, almacenaje, planes de producción, etc.

1. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **inecuación lineal** o de primer grado **con dos incógnitas** es una desigualdad de uno de los siguientes tipos:

$$ax + by < c \quad ax + by \leq c$$

$$ax + by > c \quad ax + by \geq c$$

Llamamos coeficientes a los números reales a y b y término independiente al número real c .

El objetivo es averiguar qué región del plano cumple esa inecuación (*resolver la inecuación*).

Ejemplos:

1. Resuelve la siguiente inecuación lineal: $2x - y \geq -3$

Solución:

Dibujamos la recta asociada a la inecuación $\rightarrow 2x - y = -3 \Rightarrow y = 2x + 3$

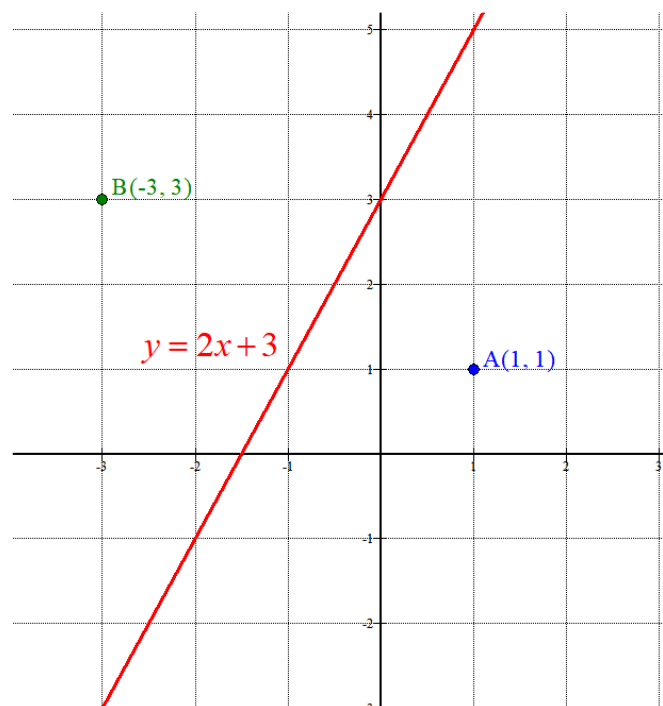
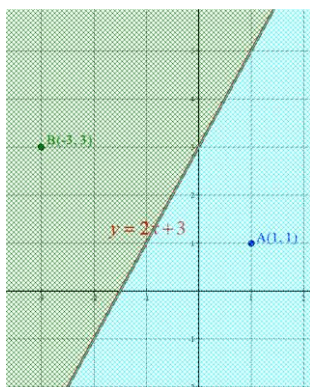
Con dos puntos de la recta se puede dibujar su gráfica. Por ejemplo, los puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -3/2$$

x	$y = 2x + 3$
0	3
$-3/2$	0

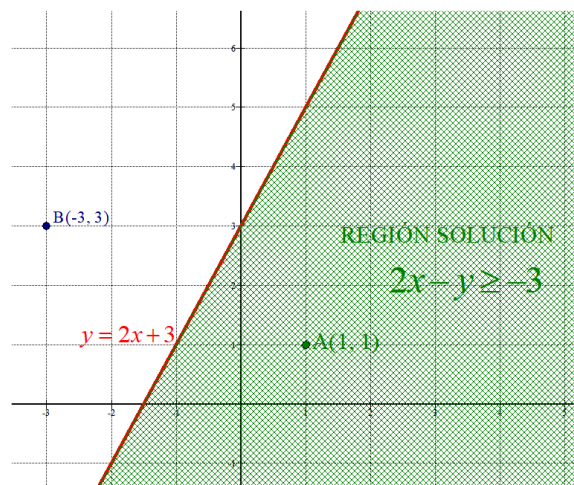
La gráfica de la recta son los puntos del plano que cumplen la **igualdad**. Esta línea recta divide el plano en dos semiplanos, averigüemos que semiplano cumple la **desigualdad** planteada en el problema.



Probamos con un punto de cada semiplano. Si el punto cumple la condición todos los puntos de esa región la cumplen y ya hemos encontrado lo buscado.

¿A(1,1) cumple la inecuación $2x - y \geq -3$? $\rightarrow$ ¿ $2 \cdot 1 - 1 \geq -3$? $\rightarrow$ ¿ $1 \geq -3$?

Es cierto. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene el punto A(1, 1) y que marcamos de verde en el dibujo inferior.



2. Representar las soluciones de la inecuación $x - y \geq 1$

Solución:

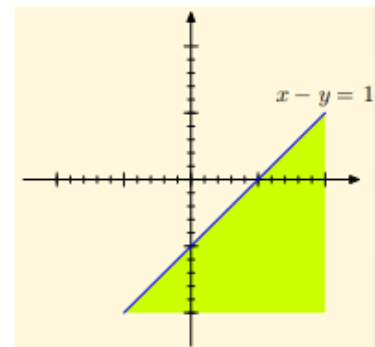
Se representa la recta $x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$

x	y = x - 1
1	0
3	2

Se despeja “y” en la inecuación dejándolo **positivo**.

$$x - y \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq y$$

Al quedar “y” de la forma $y \leq$ marcamos la parte *inferior*.



3. Representar las soluciones de la inecuación $x + y \geq 0$

Solución:

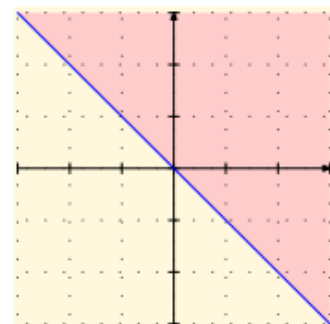
Se representa la recta $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

x	y = -x
0	0
1	-1

Se despeja “y” en la inecuación dejándolo positivo.

$$x + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x$$

Al quedar “y” de la forma $y \geq$ marcamos la parte *superior*.



Se puede comprobar que sustituyendo las coordenadas de cualquier punto de la región solución (la zona pintada) se cumple la inecuación inicial.

P(1, 1) está en la zona pintada y cumple que $1 + 1 \geq 0$. Y también lo cumple cualquier otro punto de esta zona pintada.

De la misma forma, sustituyendo las coordenadas de cualquier punto exterior a la zona pintada no se cumple la inecuación. $Q(-1, -1)$ está en la zona blanca y al sustituir sus coordenadas en la inecuación $-1-1 \geq 0$ ¡No se cumple! ¡Es falso!

2. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de inecuaciones de primer grado de la forma anterior.

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen **todas** sus inecuaciones.

La solución puede ser:

Acotada: El conjunto de las soluciones está delimitado en todas sus direcciones.

No acotada: El conjunto de las soluciones no está delimitado en alguna de sus direcciones.

Ejemplos:

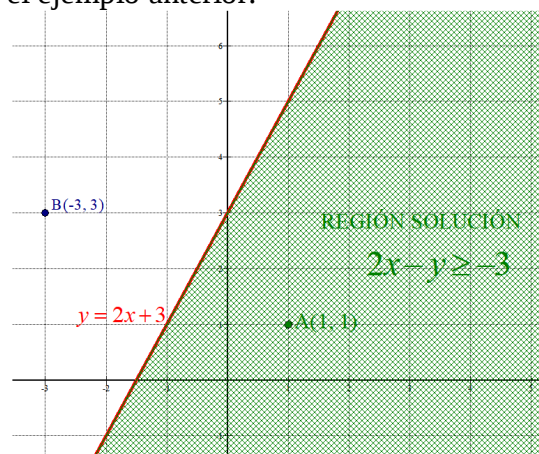
1. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 3 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$$

Solución:

Dibujamos las soluciones de cada inecuación del sistema.

Soluciones de la *primera* inecuación: $2x - y \geq -3$

La hemos hallado en el ejemplo anterior.



Soluciones de la *segunda* inecuación: $x + y < 3$

Dibujamos la recta asociada a la inecuación $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

x	$y = 3 - x$
0	3
3	0

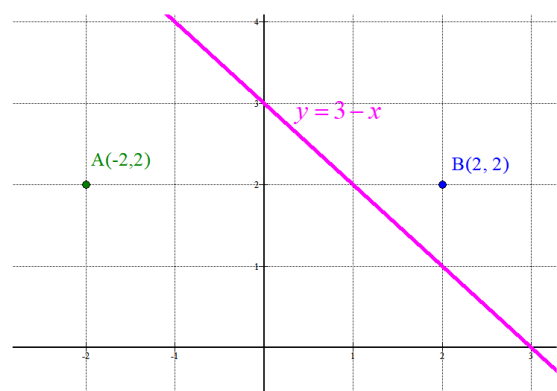
Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver cuál cumple la inecuación:

$$A(-2, 2) \rightarrow -2 + 2 < 3?$$

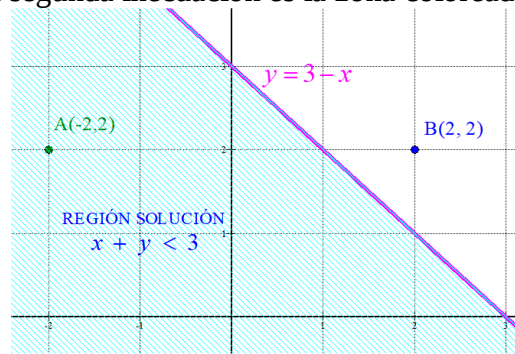
¡Si es cierto!

$$B(2, 2) \rightarrow 2 + 2 < 3?$$

¡No es cierto!



La región solución de la segunda inecuación es la zona coloreada de azul.



Soluciones de la *tercera* inecuación $y + 1 > 0$

Dibujamos la recta asociada a la inecuación $y = -1$.

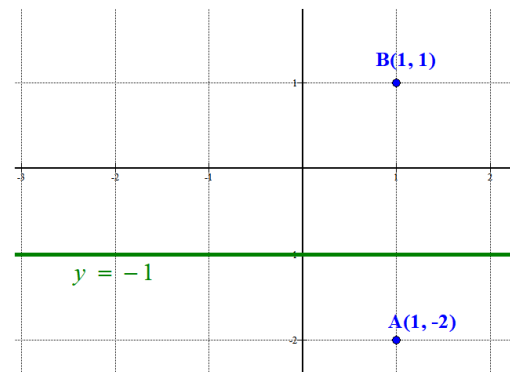
Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver cuál cumple la inecuación:

$$A(1, -2) \rightarrow ¿-2 + 1 > 0?$$

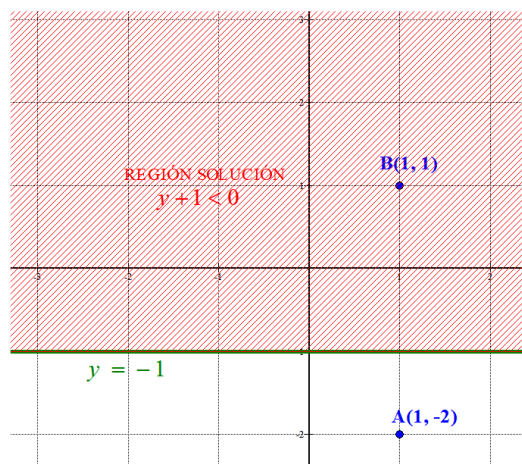
¡No es cierto!

$$B(1, 1) \rightarrow ¿1 + 1 > 0?$$

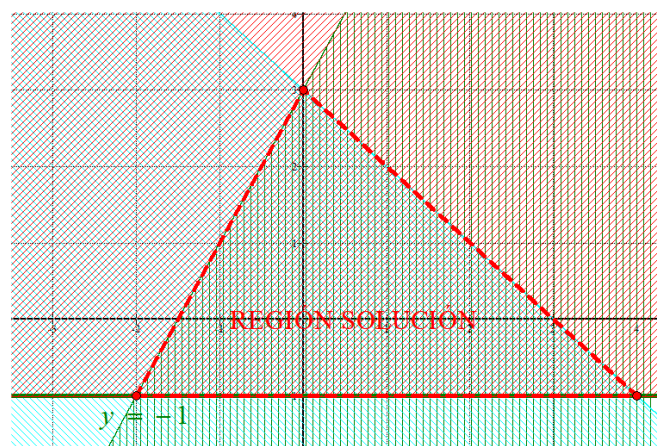
¡Si es cierto!



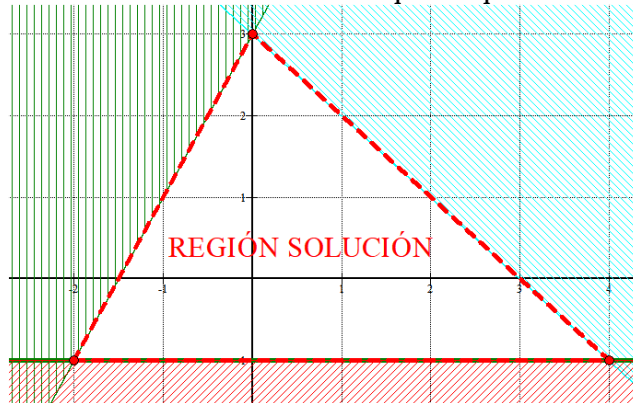
La región solución de la tercera inecuación es la zona rayada de rojo.



El conjunto de soluciones del sistema estará formado por aquellos puntos del plano que cumplan las tres inecuaciones, por tanto, la solución será la intersección de los tres semiplanos:



Otra forma de proceder es ir dejando en blanco la zona solución de cada inecuación, con lo que al final la solución del sistema será la zona que se quede sin colorear.



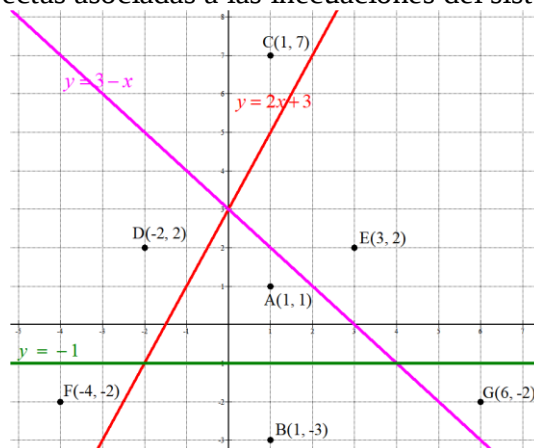
Esta es **una solución acotada**: El conjunto de las soluciones está delimitado en todas sus direcciones.

2. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 3 \\ y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Para resolverlo utilizaremos una forma más rápida de resolución.

Primero dibujo todas las rectas asociadas a las inecuaciones del sistema.



El plano se divide en 7 regiones delimitadas por las 3 rectas (roja, rosa y verde).

Elegimos un punto de cada una de ellas y probamos si cumple todas las inecuaciones. Cuando un punto cumpla todas las inecuaciones la región buscada es la región a la que pertenece.

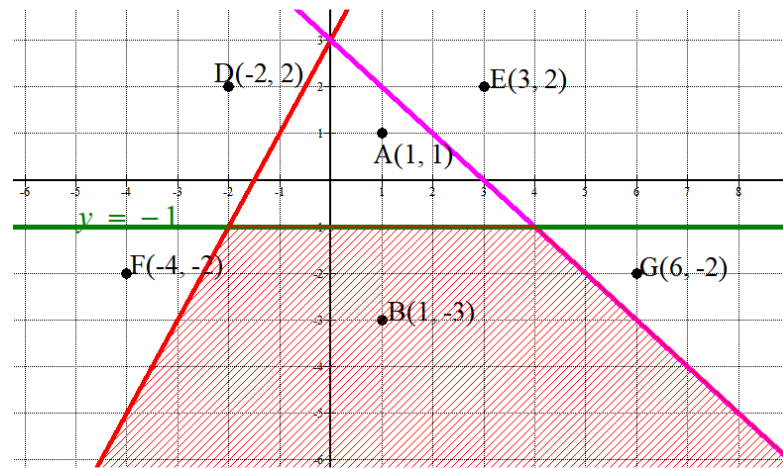
Para agilizar la búsqueda de la región solución podemos ayudarnos del siguiente procedimiento:

Despejamos “y” en cada inecuación dejando la “y” positiva y nos fijamos si la solución es superior o inferior a la recta en función que sea “y ≤” → Inferior, o bien “y ≥” → Superior.

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 3 \\ y + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq y \rightarrow \text{Inferior a recta roja } (y = 2x + 3) \\ y < 3 - x \rightarrow \text{Inferior a recta rosa } (y = 3 - x) \\ y \leq -1 \rightarrow \text{Inferior a recta verde } (y = -1) \end{cases}$$

$$\text{Probamos con el punto } B(1, -3) \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - (-3) \geq -3 \\ 1 + (-3) < 3 \\ (-3) + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 3 \geq -3 \\ 1 - 3 < 3 \\ -3 + 1 \leq 0 \end{cases} \text{ Se cumplen todas las}$$

inecuaciones y la región buscada es la zona que rayamos en el siguiente dibujo.



Esta es **una solución no acotada**: El conjunto de las soluciones no está delimitado en todas sus direcciones (es una región infinita).

3. El problema de la programación lineal

Los problemas de programación lineal consisten en optimizar una función lineal (la **función objetivo**), que está sujeta a una serie de **restricciones** (sistema de inecuaciones).

La programación lineal se utiliza en multitud de problemas y permite mejorar el rendimiento en una gran variedad de situaciones. Algunos ejemplos son:

- Problemas de transporte.
- Programación de la producción: control óptimo.
- Problemas de elaboración de patrones de corte en la industria textil.
- Problemas de distribución de capital en diversas carteras.
- Problemas de mezclas de componentes en productos alimentarios.
- Optimización de semáforos.
- Redes de comunicaciones internas de empresas.

Un problema de programación lineal con dos incógnitas x e y , consiste en optimizar (calcular el máximo o el mínimo según el caso) de una función lineal llamada **función objetivo**. Estas funciones tienen la forma $f(x, y) = ax + by$ sujeta a una serie de condiciones o restricciones establecidas mediante un sistema de inecuaciones lineales en las variables x e y .

Llamaremos **región factible** a la solución del sistema de inecuaciones obtenido a partir de las restricciones.

La región factible puede ser **acotada** o **no acotada**.

Entre los puntos de la región factible dada por las restricciones se encontrará, si existe, la solución del problema, a la cual llamaremos **solución óptima**.

Puede haber:

Ninguna solución óptima.

Una única solución óptima, que se encontrará en uno de los vértices de la región factible.

Infinitas soluciones óptimas: Si se alcanza el valor óptimo en dos de los vértices de la región factible, entonces también son solución todos los puntos del segmento que une dichos vértices.

Ejemplo:

Una persona tiene 15000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9% y el tipo B, del 5%. Decide invertir, como máximo, 9000 € en A, y como mínimo, 3000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

a) Calcula las condiciones o restricciones del problema de programación lineal

b) Dibuja la región factible

Solución:

a) Empezamos por traducir al lenguaje de la programación lineal el enunciado del problema.

Llamamos “x” al dinero invertido en acciones de tipo A.

Llamamos “y” al dinero invertido en acciones de tipo B.

Las restricciones del problema son:

“Tiene 15000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B” $\rightarrow x + y \leq 15000$

“Decide invertir, como máximo, 9000 € en A” $\rightarrow x \leq 9000$

“Decide invertir, como mínimo, 3000 € en B” $\rightarrow y \geq 3000$

“Quiere invertir en A tanto o más que en B” $\rightarrow x \geq y$

Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reuniendo todas las inequaciones anteriores se forma el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 15000 \\ x \leq 9000 \\ y \geq 3000 \\ x \geq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

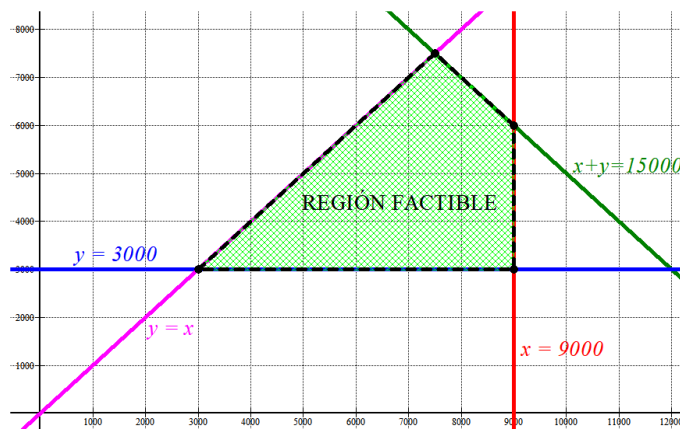
b) La región factible con estas restricciones sería la zona marcada de verde en el dibujo.

En ella hay infinitos puntos, pero la región factible está acotada.

A esta región factible pertenecen, por ejemplo, sus vértices: A(3000, 3000), B(7500, 7500), C(9000, 6000) y D(9000, 3000).

También tiene puntos interiores como E(4000, 4000), F(7000, 500), G(8000, 5000), etc..

Por el método analítico o geométrico del apartado siguiente se estudian las soluciones óptimas del problema que se corresponderán con las coordenadas de un punto de esta región factible.



4. Resolución analítica del problema de programación lineal

Hay que realizar los siguientes pasos:

- Se representa gráficamente la región factible.
- Se calculan los vértices de la región factible. Dichos vértices serán las intersecciones de las rectas frontera obtenidas en cada restricción.
- Como el máximo o el mínimo se alcanza en uno de estos puntos, se evalúa la función objetivo en cada uno de ellos, para ver en cuál se obtiene el valor óptimo.
- Si se trata de maximizar elegiremos el vértice que hace mayor la función objetivo y si se trata de minimizar elegiremos el vértice que hace menor la función objetivo.

Ejemplos:

1. Maximiza y minimiza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Solución:

Se representa gráficamente la región factible

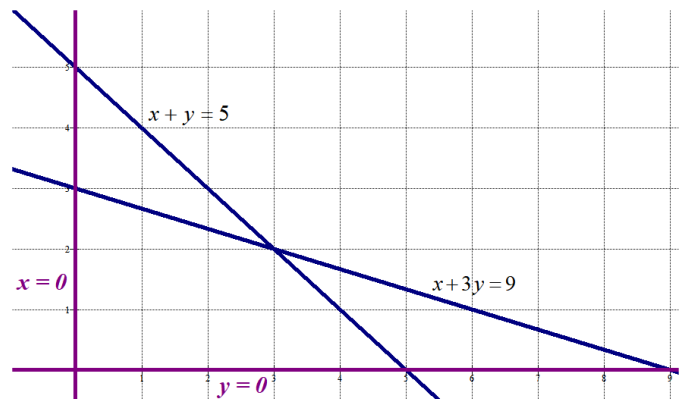
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones:

$$x \geq 0; \quad y \geq 0 \quad (\text{Primer cuadrante})$$

$$x + y = 5$$

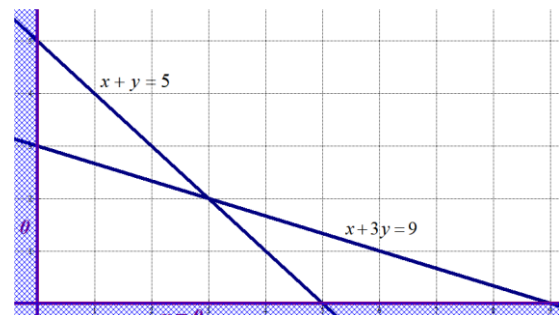
$$x + 3y = 9$$

x	$y = 5 - x$	x	$y = \frac{9 - x}{3}$
0	5	0	3
5	0	3	2

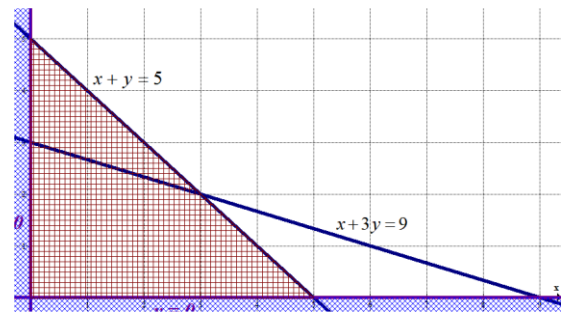


Despejamos la “y” en las inecuaciones y vamos tachando la región que no cumple cada inecuación.

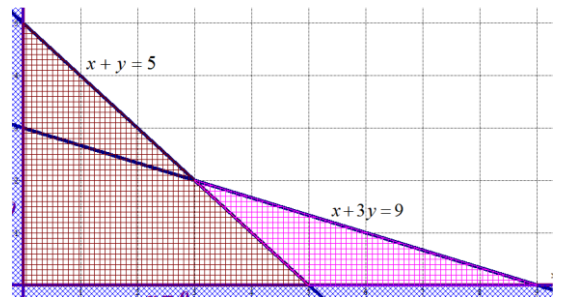
$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$ Esta región es el primer cuadrante,
tachamos 2º, 3º y 4º cuadrante.



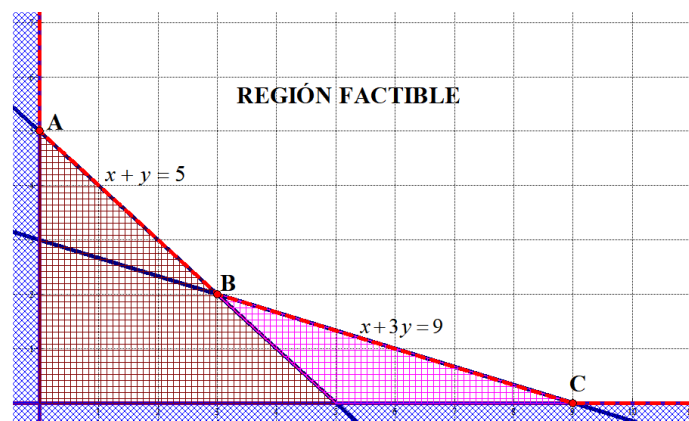
$x + y \geq 5 \Rightarrow y \geq 5 - x$. Como es $y \geq$ la zona válida es la superior, tachamos la parte inferior a la recta $x + y = 5$.



$x + 3y \geq 9 \Rightarrow 3y \geq 9 - x$. Como es $3y \geq$ la zona válida es la superior, tachamos la parte inferior a la recta $x + 3y = 9$.



La región factible es la zona que queda en blanco.



Se calculan los vértices de la región factible. Dichos vértices serán las intersecciones de las rectas frontera de cada restricción. En este caso no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones pues las coordenadas se obtienen de la observación de la gráfica: A(0, 5); B(3, 2) y C(9, 0).

Se localiza el valor máximo y mínimo de la función. Al ser una región no acotada superiormente no existe máximo. Pues cuan más grandes tomas los valores de x y y mayor es el valor de la función $F(x, y) = 2x + 3y$.

Averiguamos el mínimo, que está localizado en uno de los vértices, se evalúa la función objetivo en cada uno de ellos, para ver en cuál se obtiene el valor óptimo.

- $A(0, 5) \rightarrow F(0, 5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$
- $B(3, 2) \rightarrow F(3, 2) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$
- $C(9, 0) \rightarrow F(9, 0) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 0 = 18$

El mínimo se obtiene en el vértice B(3, 2).

El máximo de $F(x, y)$ no existe y el mínimo se alcanza en B(3, 2).

2. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas:

La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25€. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Solución:

Empezamos por traducir al lenguaje de la programación lineal el enunciado del problema.

Llamamos x a la cantidad de joyas del tipo A.

Llamamos y a la cantidad de joyas del tipo B.

Nos ayudamos de una tabla para establecer las restricciones y la función objetivo.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Beneficio
Número de joyas tipo A (x)	x	$1.5x$	$25x$
Número de joyas tipo B (y)	$1.5y$	y	$30y$
	$x + 1.5y$	$1.5x + y$	$25x + 30y$

Queremos maximizar el beneficio, es decir, la función que nos permite calcular el dinero obtenido de la venta de las joyas. Dicha función es $F(x, y) = 25x + 30y$

Las restricciones del problema son:

- “Solo se dispone de 750 g de cada metal” $\rightarrow x + 1.5y \leq 750$; $1.5x + y \leq 750$
- Las cantidades son positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Resumiendo, las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 750 \\ 1.5x + y \leq 750 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se representa gráficamente la región factible

Representamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$x \geq 0; y \geq 0 \quad (\text{Primer cuadrante})$$

$$x + 1.5y = 750$$

$$1.5x + y = 750$$

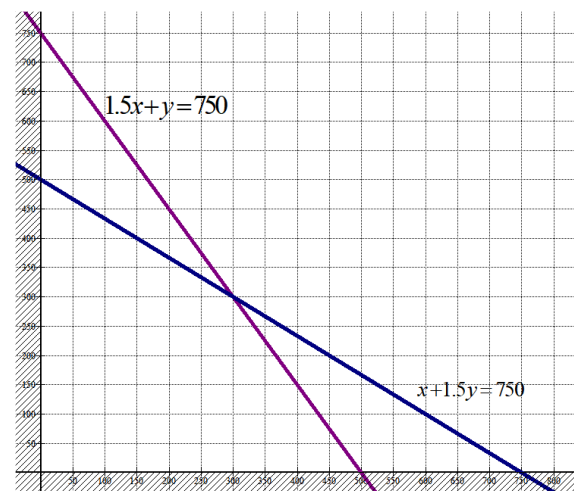
x	$y = \frac{750 - x}{1.5}$
0	500
750	0

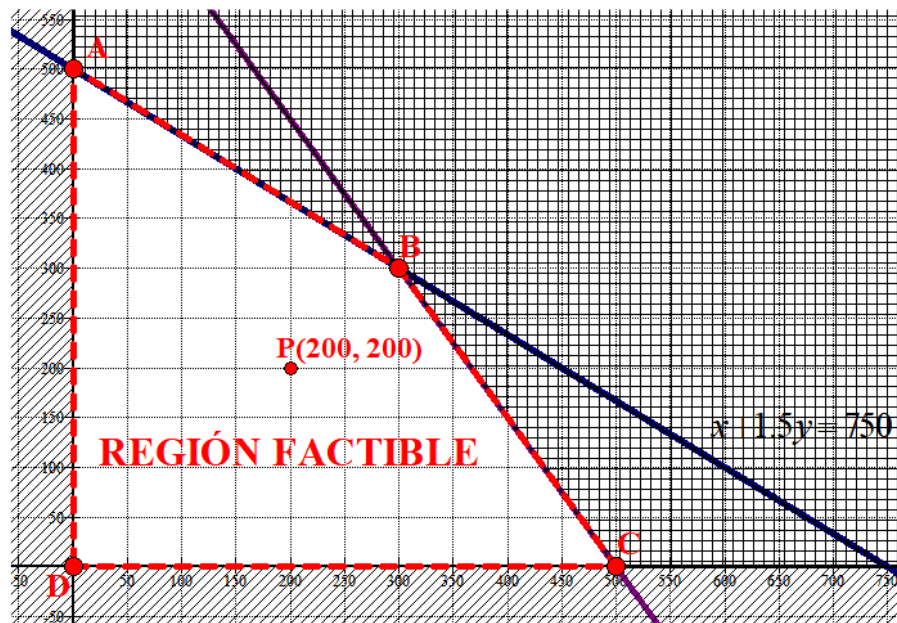
x	$y = 750 - 1.5x$
0	750
500	0

Despejamos “ y ” en cada inecuación para dejar sin colorear la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 750 \rightarrow 1.5y \leq 750 - x \\ 1.5x + y \leq 750 \rightarrow y \leq 750 - 1.5x \\ x \geq 0; y \geq 0 \quad \text{Primer cuadrante} \end{array} \right\}$$

La región factible es la zona inferior de ambas rectas contenida en el primer cuadrante.





Comprobamos que hemos determinado de forma correcta la región factible viendo si el punto $P(200, 200)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1.5y \leq 750 \\ 1.5x + y \leq 750 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 200 + 1.5 \cdot 200 \leq 750 \\ 1.5 \cdot 200 + 200 \leq 750 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 200 + 300 \leq 750 \\ 300 + 200 \leq 750 \\ 200 \geq 0; 200 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Son ciertas!}$$

La región factible es correcta.

Se calculan los vértices de la región factible. Dichos vértices serán las intersecciones de las rectas frontera de cada restricción: $A(0, 500)$, $B(300, 300)$, $C(500, 0)$ y $D(0, 0)$.

Se localiza el valor máximo de la función. Como el máximo se alcanza en uno de estos puntos, se evalúa la función objetivo en cada uno de ellos, para ver en cuál de ellos se obtiene dicho máximo.

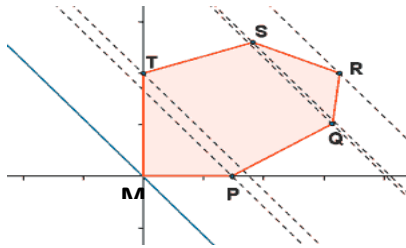
- $A(0, 500) \rightarrow F(0, 500) = 0 + 15000 = 15000 \text{ €}$
- $B(300, 300) \rightarrow F(300, 300) = 7500 + 9000 = 16500 \text{ €}$
- $C(500, 0) \rightarrow F(500, 0) = 12500 + 0 = 12500 \text{ €}$
- $D(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 0 \text{ €}$

El vértice que maximiza la función es el vértice B. Por tanto, habría que fabricar 300 joyas de cada uno de los tipos y se venderían por 16500 €.

5. Resolución gráfica del problema de programación lineal

Este es un segundo método para determinar la solución de un problema de programación lineal. Determinamos de forma gráfica el máximo o mínimo de la función objetivo una vez dibujada la región factible siguiendo los pasos siguientes:

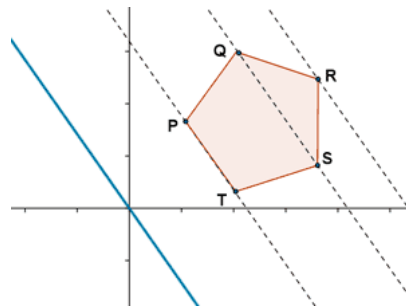
1. Dada la función objetivo $F(x, y) = ax + by$ se representa la recta la recta $ax + by = 0$.
2. Se trazan rectas paralelas a $ax + by = 0$, es decir, $ax + by = k$ que pasen por los vértices de la región factible. Estas líneas se llaman *líneas de nivel*.
3. Determinamos el máximo o mínimo con el siguiente análisis. Pueden plantearse varias situaciones:



La región factible es acotada y las curvas de nivel atraviesan la región hasta tocar en vértices de dicha región:

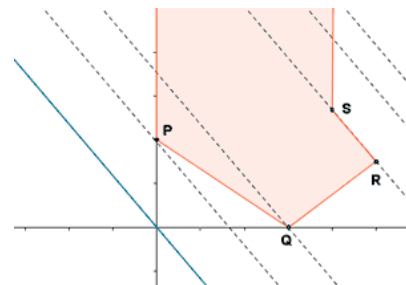
En el vértice M y R.

Valoramos la función en dichos puntos y uno será el máximo (el mayor valor obtenido) y otro el mínimo (el menor valor obtenido).



La región factible es acotada y las curvas de nivel atraviesan la región hasta tocar en un vértice de dicha región y también coincide con una recta que delimita la región: El vértice R y el segmento PT.

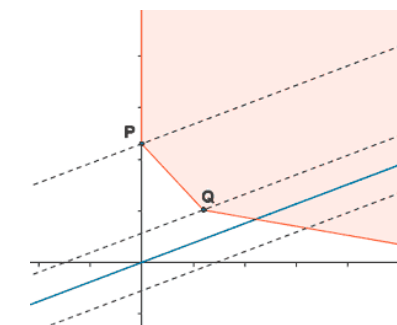
Valoramos la función en dichos puntos R, P y T, y uno será el máximo (el mayor valor obtenido) y otro el mínimo (el menor valor obtenido). Los valores de la función en P y T serán iguales y todos los puntos del segmento PT será máximo o mínimo según se obtenga.



La región factible no es acotada, por lo que el problema planteado puede no tener solución.

Valoramos la función en P y en otro punto cualquiera, por ejemplo S.

El valor obtenido en P será menor que el de S $\rightarrow$ tenemos un mínimo en P.



La región factible no es acotada, por lo que el problema planteado puede no tener solución.

En este caso no existe ni máximo ni mínimo pues las curvas de nivel no tocan ningún vértice de la región factible.

La función objetivo toma valores cada vez más grandes sin límite y valores cada vez más pequeños sin límites conforme avanzamos a derecha o a izquierda.

Ejemplos:

1. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema de programación lineal:

Máximo y mínimo de $F(x, y) = 12x + 4y$ sujeta a:

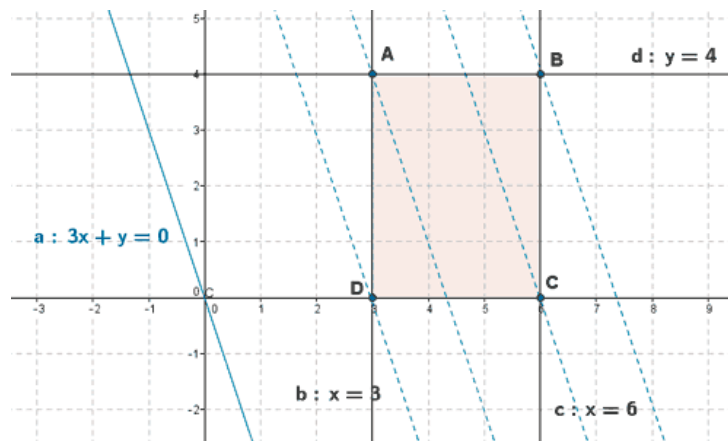
$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

Se representa la región factible que reflejan las restricciones.

Se representa la recta $3x + y = 0$ (que es la misma que la recta $12x + 4y = 0$).

Se trazan rectas paralelas a esta recta que pasen por cada uno de los vértices de la región factible. Tras los dos primeros pasos obtenemos la siguiente representación gráfica:



Se observa que las curvas de nivel tocan el vértice D(3, 0) y B(6, 4).

Valoramos la función $F(x, y) = 12x + 4y$ en dichos vértices:

- $D(3, 0) \rightarrow F(3, 0) = 36$
- $B(6, 4) \rightarrow F(6, 4) = 72 + 16 = 88$

La función tiene un valor máximo de 88 en B(6, 4) y un mínimo de 36 en D(3, 0).

2. Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2 , cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los que aparecen en la tabla:

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

El kilogramo de pienso P_1 vale 0,4 € y el de P_2 vale 0,6 €. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para suministrar a las reses las vitaminas requeridas con un gasto mínimo?

Solución:

Empezamos traduciendo el problema al lenguaje de la programación lineal:

Llamamos “x” a los kilogramos de pienso P_1 .

Llamamos “y” a los kilogramos de pienso P_2 .

Para ayudarnos a determinar la función objetivo y las restricciones construimos una tabla:

	A	B	Coste
Kg de pienso P_1 (x)	2x	6x	0,4x
Kg de pienso P_2 (y)	4y	3y	0,6y
	$2x + 4y$	$6x + 3y$	$0,4x + 0,6y$

Queremos minimizar el gasto en pienso. Dicha función es $G(x, y) = 0,4x + 0,6y$

Las restricciones son:

“Debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A” $\rightarrow 2x + 4y \geq 4$

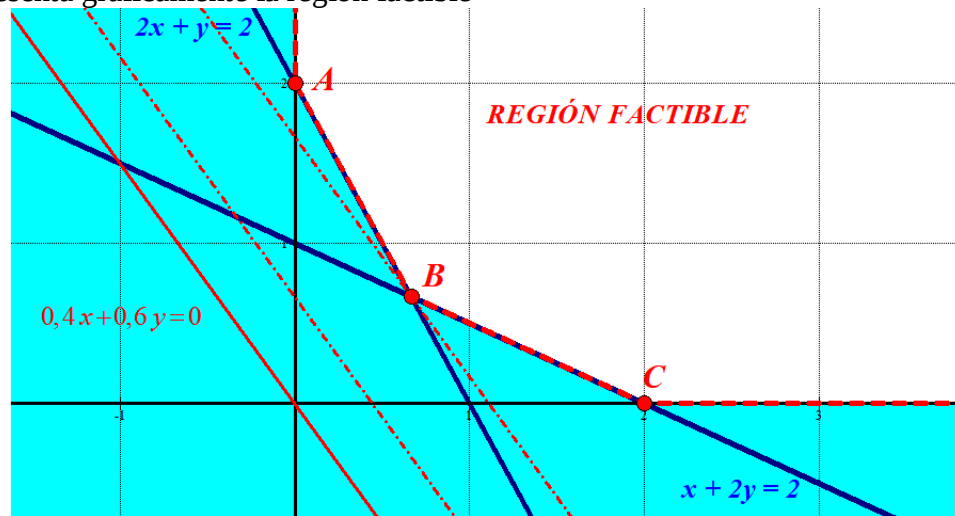
“Debe suministrar un mínimo diario de 6 mg de vitamina B” $\rightarrow 6x + 3y \geq 6$

Los kilogramos de pienso son cantidades positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Resumiendo:

$$\left. \begin{array}{l} 2x+4y \geq 4 \\ 6x+3y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y \geq 2 \\ 2x+y \geq 2 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se representa gráficamente la región factible



Los vértices de la región factible serán las intersecciones de las rectas frontera de cada restricción: A(0,2), B(2/3, 2/3) y C(2, 0).

Las coordenadas del punto B se hallan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x+2y=2 \\ 2x+y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x-4y=-4 \\ 2x+y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow -3y=-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{3}} \Rightarrow x+2\frac{2}{3}=2 \Rightarrow \boxed{x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}}$$

Buscamos el mínimo de la función $G(x, y) = 0,4x + 0,6y$.

Sabemos que dicho mínimo se alcanza en el vértice B. Calculamos el valor del Coste en dicho punto y en A para asegurarnos:

$$\left. \begin{array}{l} B(2/3, 2/3) \\ G(x, y) = 0,4x + 0,6y \end{array} \right\} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 0,4 \cdot \frac{2}{3} + 0,6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0,66$$

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 2) \\ G(x, y) = 0,4x + 0,6y \end{array} \right\} \Rightarrow G(0, 2) = 0,4 \cdot 0 + 0,6 \cdot 2 = 1,2$$

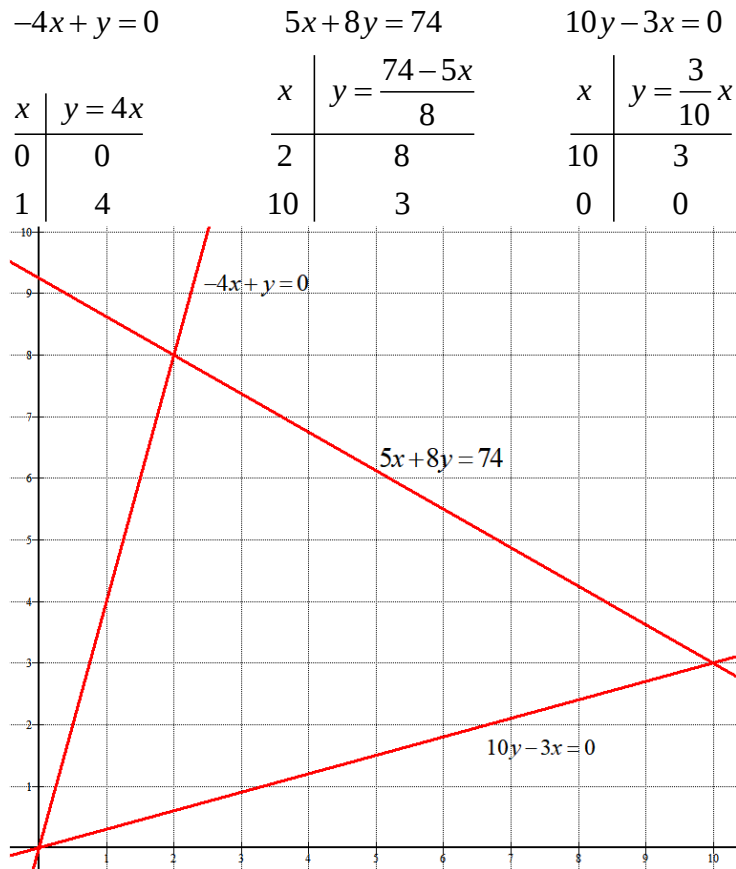
El vértice que minimiza la función es el vértice B. Por tanto la forma más barata de asegurar el suministro de las dos vitaminas a las vacas es darles 2/3 de kilo de cada uno de los tipos de pienso, con un gasto de 0,66 € por vaca y día.

3. Averigua los máximos y mínimos de la función $F(x, y) = y - 4x$ en la región del plano definida por las restricciones:

$$-4x + y \leq 0; \quad 5x + 8y \leq 74; \quad 10y - 3x \geq 0$$

Solución:

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

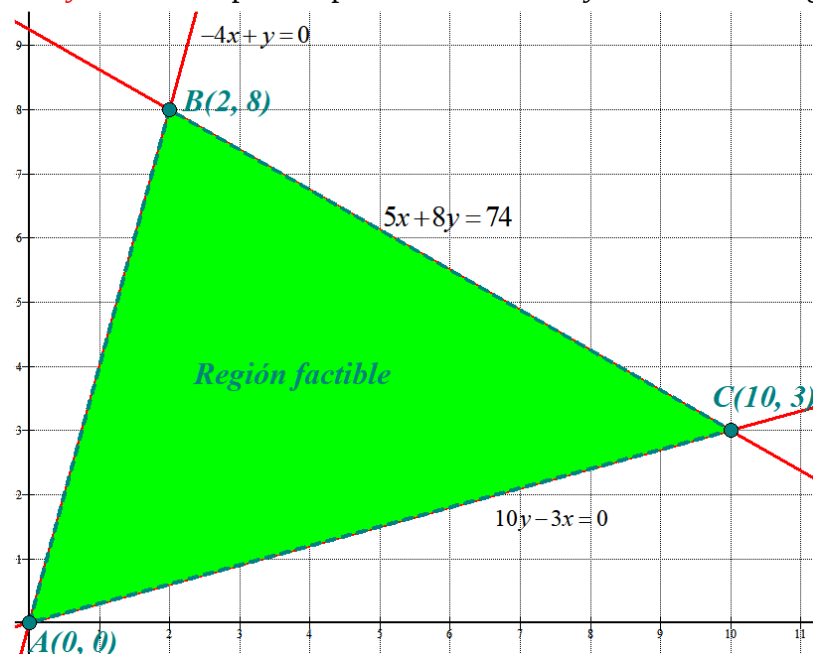


Para determinar la región factible despejo “y” en cada inecuación:

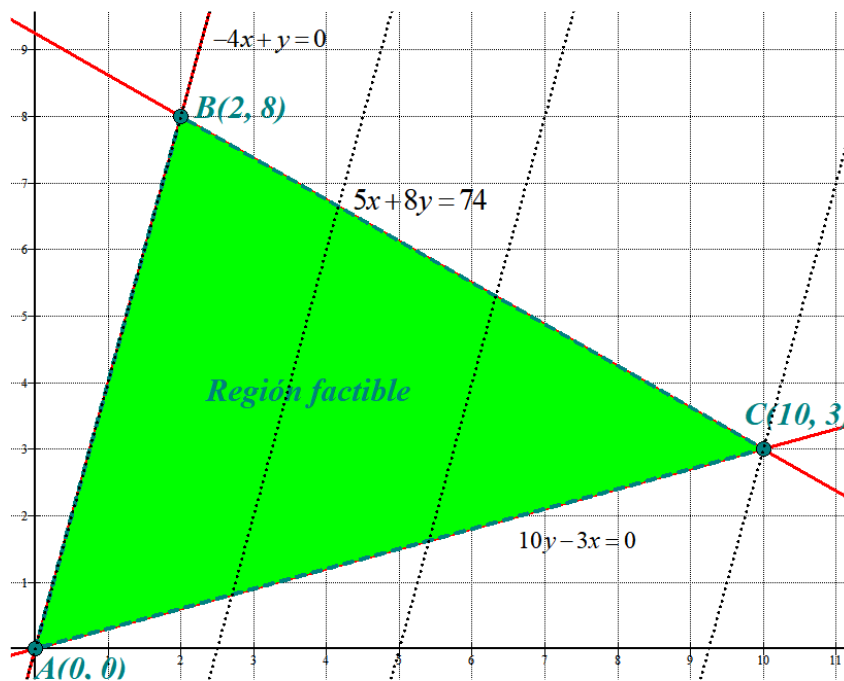
$-4x + y \leq 0 \rightarrow y \leq 4x \Rightarrow$ La parte inferior de la recta $-4x + y = 0$ es la región factible

$5x + 8y \leq 74 \rightarrow 8y \leq 74 - 5x \Rightarrow$ La parte inferior de la recta $5x + 8y = 74$ es la región factible

$10y - 3x \geq 0 \rightarrow 10y \geq 3x \Rightarrow$ La parte superior de la recta $10y - 3x = 0$ es la región factible



Con el método gráfico, dibujamos la recta de nivel para $F(x, y) = y - 4x \rightarrow 0 = y - 4x$ que es la recta que pasa por los vértices A y B. y dibujamos rectas de nivel paralelas.



Por lo que los puntos candidatos a máximos y mínimos son A, B y C. Valoramos la función en dichos puntos y decidimos:

$$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 0$$

$$B(2, 8) \rightarrow F(2, 8) = 8 - 8 = 0$$

$$C(10, 3) \rightarrow F(10, 3) = 3 - 40 = -37$$

La función tiene un mínimo en C(10, 3) y los máximos son todos los puntos del segmento AB, incluidos los extremos A(0, 0) y B(2, 3).

En este caso hubiese sido más rápido con el método analítico que directamente valora la función en los vértices y con ello se decide donde se sitúa el máximo y el mínimo.

4. Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

Solución:

	A	B	C	€ (beneficio)
x = nº botes de tinta para etiquetas de refrescos	10x	5x	5x	30x
y = nº botes de tinta para carteles	5y	5y	0	20y
	10x+5y	5x+5y	5x	30x+20y

La función objetivo es $f(x, y) = 30x + 20y$ que deseamos maximizar

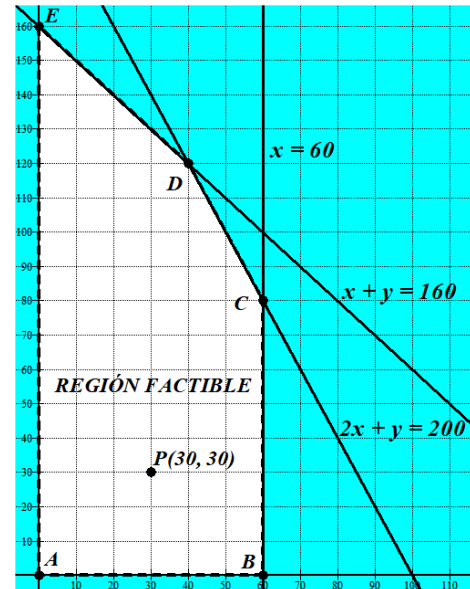
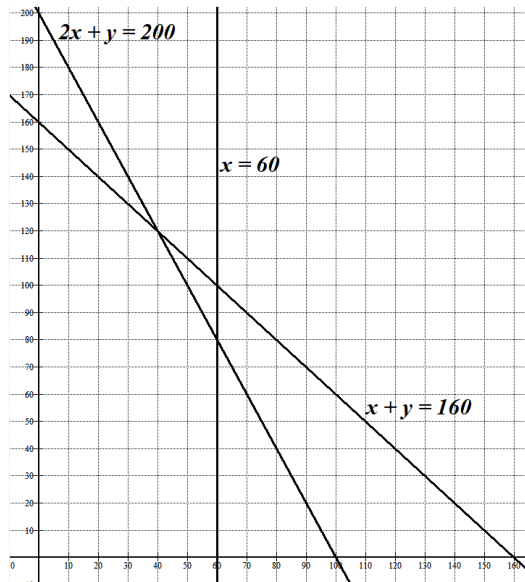
Con las restricciones:

- Dispone de 1000 kg del color A $\rightarrow 10x + 5y \leq 1000$
- Dispone de 800 kg del color B $\rightarrow 5x + 5y \leq 800$
- Dispone de 300 kg del color C $\rightarrow 5x \leq 300$

- x e y no pueden ser negativos $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Resumiendo y simplificando tenemos el sistema de inecuaciones de la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 5y \leq 1000 \\ 5x + 5y \leq 800 \\ 5x \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ x + y \leq 160 \\ x \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$



Las coordenadas de los 5 vértices se pueden determinar observando el dibujo.

$$A \rightarrow (0,0); B \rightarrow (60,0); C \rightarrow (60,80); D \rightarrow (40,120); E \rightarrow (0,160)$$

Para determinar el punto de la región factible en el que alcanza el valor máximo la función Beneficio $f(x, y) = 30x + 20y$, la valoramos en cada uno de los vértices.

$$\begin{array}{ll} A(0,0) & \rightarrow f(0,0) = 0 \\ B(60,0) & \rightarrow f(60,0) = 1800 \\ C(60,80) & \rightarrow f(60,80) = 1800 + 1600 = 3400 \\ D(40,120) & \rightarrow f(40,120) = 1200 + 2400 = \mathbf{3600 \text{ ¡Máximo!}} \\ E(0,160) & \rightarrow f(0,160) = 3200 \end{array}$$

El beneficio máximo se alcanza en el vértice D(40,120), por lo que se debe fabricar 40 botes para etiquetas y 120 para carteles.
El beneficio máximo es de 3600 €.

Ejercicios de matrices, sistemas de ecuaciones y programación lineal en pruebas PAU y EBAU de Murcia

Estas son las preguntas correspondientes al bloque de números y álgebra (Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones y programación lineal) que han aparecido en las pruebas EBAU o PAU de los últimos años en Murcia. Si se desea ver la resolución de los ejercicios ir al archivo correspondiente a la PAU o EBAU de ese año en la web www.ebaumatematicas.com.

EXTRAORDINARIA 2025

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a . **[1 punto]**

b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

Solución: 1ª pregunta: $a = 1$. 2ª pregunta: a) Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 2$ el sistema es incompatible. b) $x = 0, y = 5, z = 6$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

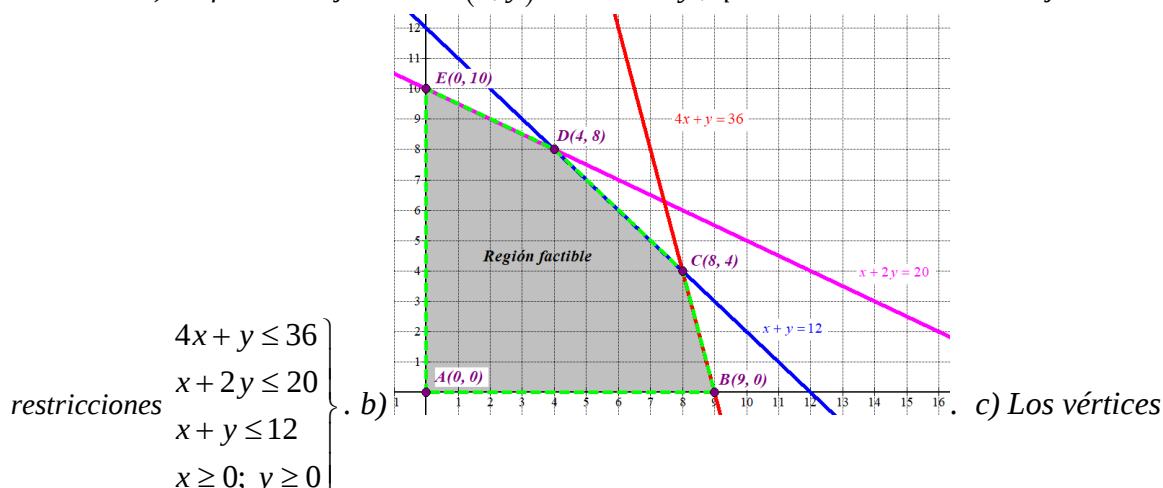
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

Solución: a) La función objetivo es $I(x, y) = 40x + 20y$, que deseamos maximizar bajo las



son: $A(0,0)$, $B(9,0)$, $C(8,4)$, $D(4,8)$ y $E(0,10)$. d) Se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos. e) 400 euros.

ORDINARIA 2025

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2 . [0,25 puntos]

b) Halla $A + B + C^2$. [0,25 puntos]

c) Encuentra $(A - B)^{-1}$. [0,25 puntos]

d) Resuelve la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$. [0,75 puntos]

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Solución: 1ª pregunta: a) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ d)

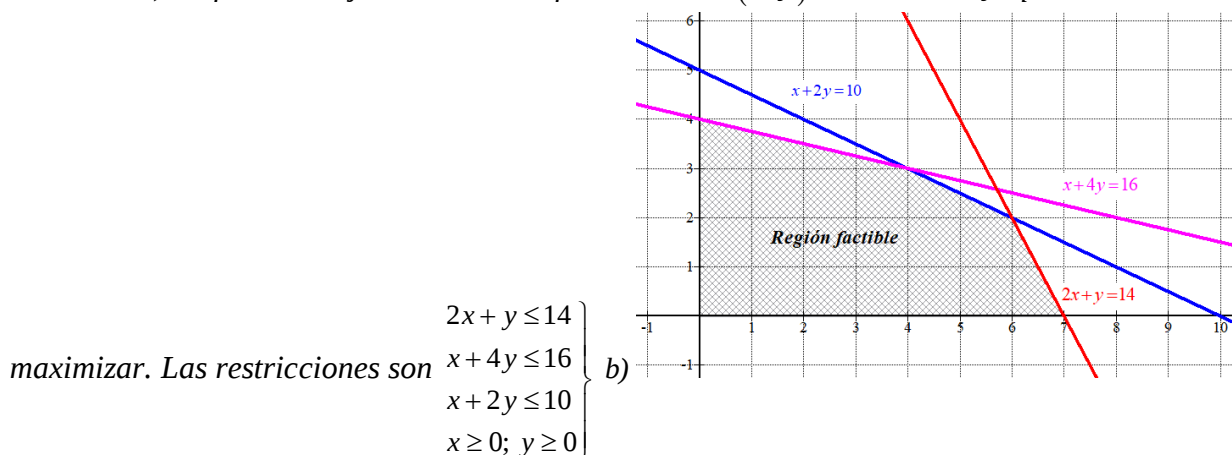
$X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ 2ª pregunta: Este sistema triangular obtenido es compatible determinado. La solución del sistema es $x=1, y=1, z=2$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

- a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. [0,5 puntos]
 b) Representa la región factible. [0,75 puntos]
 c) Encuentra los vértices de esta región. [0,5 puntos]
 d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? [0,5 puntos]
 e) Calcula el beneficio máximo diario posible. [0,25 puntos]

Solución: a) La función objetivo es el beneficio diario $B(x, y) = 400x + 500y$ que deseamos



c) Los vértices son: $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(4,3)$, $D(6,2)$ y $E(7,0)$. d) se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos. e) 3400 euros.

EXTRAORDINARIA 2024

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) El producto $A \cdot B$. (0,5 puntos)
 b) La inversa C^{-1} . (0,5 puntos)
 c) La diferencia $D - A \cdot B$. (0,5 puntos)

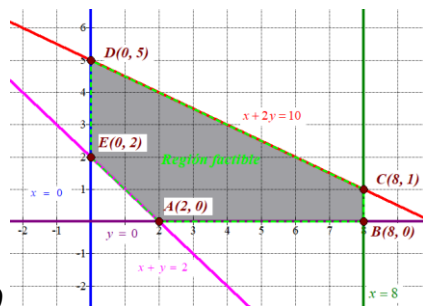
Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot B + C \cdot X = D$; es decir calcula la matriz X . (1 punto)

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $D - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} -1 & -18 \\ 2 & 31 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
 b) Determine los puntos de la región factible donde la función $f(x, y) = 2x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son: A(2,0), B(8,0), C(8,1), D(0,5) y E(0,2). b) El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto E(0,2). El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto C(8,1).

ORDINARIA 2024

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

Solución: a) Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = -2$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) La solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y pienso compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)



Solución: a) El coste mínimo se obtiene almacenando 30 contenedores de cada tipo. b) El gasto mínimo es de 150 euros.

EXTRAORDINARIA 2023

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 3$. (0,5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a = 0$ el sistema no tiene solución. Para $a = 3$ la solución es

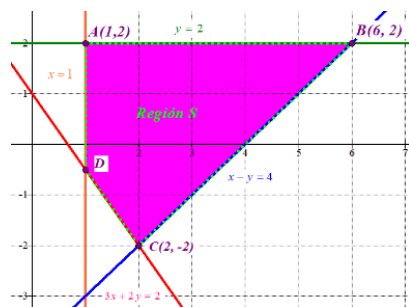
$$x = \frac{1}{3}; y = 0; z = \frac{2}{3}.$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x, y) = 4x - 5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)



Solución: a) Las coordenadas de los vértices son: $A(1,2)$, $B(6,2)$, $C(2,-2)$ y $D(1,-0.5)$. b) El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice $C(2,-2)$ y el mínimo valor de la función es -6 y se obtiene en el vértice $A(1,2)$.

ORDINARIA 2023

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

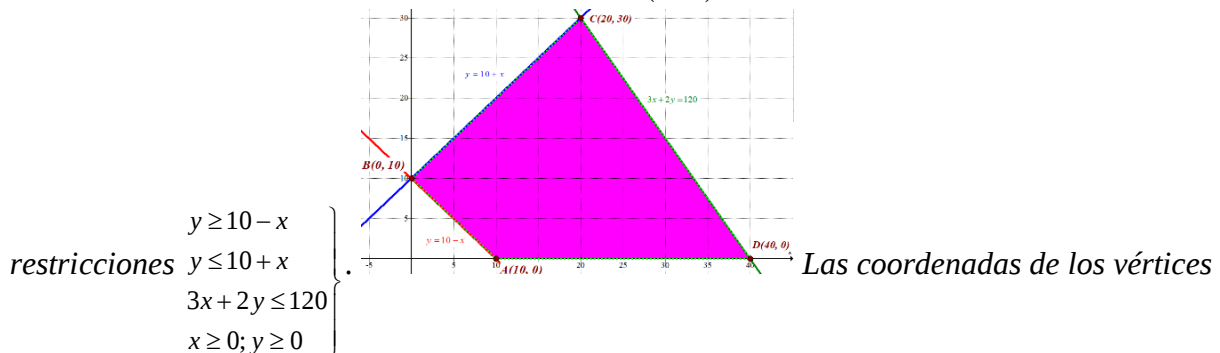
Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = 1$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Para $a = 0$ la solución es $x = 0$; $y = -1$; $z = 2$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)

b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

Solución: a) Deseamos maximizar el beneficio $B(x, y) = 130x + 140y$. Ajustándose a las



son: $A(10, 0)$, $B(0, 10)$, $C(20, 30)$ y $D(40, 0)$. b) El máximo beneficio es de 6800 euros y se obtiene fabricando 20 smartwatch del tipo A y 30 del tipo B.

EXTRAORDINARIA 2022

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para el que $B^2 = A$ (0,75 puntos)

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} (0,75 puntos)

c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$ (1 punto)

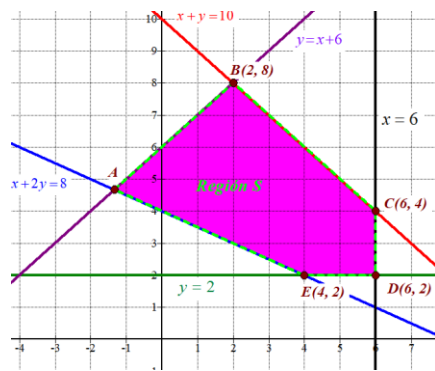
Solución: a) $a = 1$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/2 \\ 3/2 & 9 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine el punto de la región factible donde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor. (0,5 puntos)



Solución: a) . Los vértices tienen coordenadas $A\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$,

$B(2, 8)$, $C(6, 4)$, $D(6, 2)$ y $E(4, 2)$. b) El valor mínimo en la región factible es -2 y se alcanza en el vértice $D(6, 2)$.

ORDINARIA 2022

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{array} \right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 1$. (0,5 puntos)

Solución: Si $a \neq 4$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $a = 4$ o $a = -1$ es compatible indeterminado. Para $a = 1$ la solución es $x = 0$; $y = 0$; $z = -\frac{1}{2}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnica y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 € y cada casual de 4 €, calcule, justificando la respuesta:

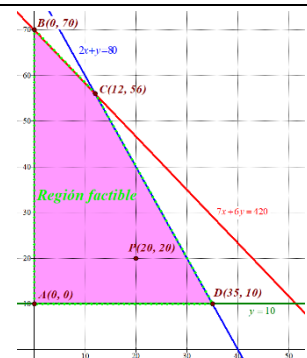
a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio. (2 puntos)

b) El valor de dicho beneficio máximo. (0,5 puntos)

Solución:

a) El máximo beneficio se obtiene fabricando 12 camisetas técnicas y 56 casuales.

b) El máximo beneficio es de 284 euros.



EXTRAORDINARIA 2021

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $AB = BA$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación $XB - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $a = 1$ y $b = 4$. b) $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

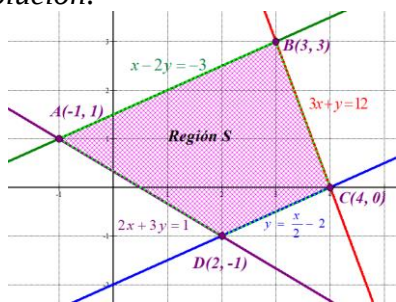
CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 12 \\ y \geq \frac{x}{2} - 2 \\ x - 2y \geq -3 \\ 2x + 3y \geq 1 \end{array} \right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

Solución:



a) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$ y $D(2, -1)$

b) El valor máximo se alcanza en el vértice $C(4, 0)$ y el mínimo en el vértice $A(-1, 1)$

ORDINARIA 2021

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{array} \right\}$$

Resolverlo para $a = 1$.

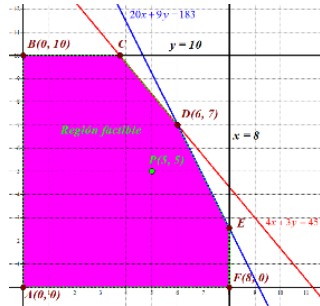
Solución: Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $a = -1$ el sistema es incompatible. Para $a = 1$ la solución es $x = -2$; $y = 2$; $z = 1$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3 . Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea

de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

- Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben planta para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.
- Obtener la producción máxima.

Solución:



La máxima producción que se puede obtener sometiéndose a las restricciones del ejercicio son 5100 kg de naranjas. Obteniéndose con 6 hectáreas del naranjo tipo A y 7 hectáreas del naranjo tipo B.

EXTRAORDINARIA 2020

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcule $(A - B)$ (0,5 puntos)
- Calcule $(A - B)^{-1}$ (0,5 puntos)
- Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$ (1 punto)

Solución:

$$a) A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad b) (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad c) X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x - 4, y \leq x - 1, 2y \geq x, x \geq 0, y \geq 0\}$$

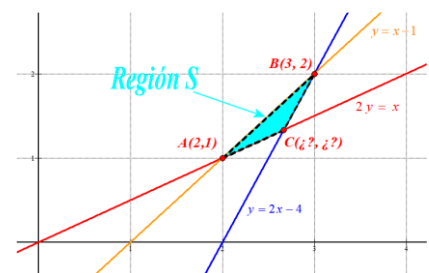
- Representar la región S y obtener sus vértices.
- Maximizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.
- Minimizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

$$a) A(2, 1), B(3, 2) \text{ y } C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

b) El máximo valor que alcanza la función en la región S es -1 en el punto $A(2, 1)$.

c) El valor mínimo que alcanza la función en la región S es -3 en el punto $B(3, 2)$.



ORDINARIA 2020

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ 2y + az &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Resolverlo para $a = 3$.

Solución: Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ es incompatible.

Para $a = 1$ es compatible indeterminado. La solución para $a = 3$ es $x = \frac{1}{3}$; $y = 0$; $z = \frac{2}{3}$

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresa diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:

Las restricciones son:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y &\geq 60 \\ 2x + 3y &\geq 120 \\ x + y &\geq 50 \\ x \geq 0; y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

La función objetivo $C(x, y) = 33000x + 35000y$

Con 3 semanas de la primera empresa y 2 semanas de la segunda empresa se consiguen plantar los árboles pedidos con un coste mínimo de 169000 €.



SEPTIEMBRE 2019

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ ax - y - z &= a - 1 \\ 3x - 2az &= a - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Resolverlo para $a = 0$ (0,5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ es compatible indeterminado. Para $a = -3$ es incompatible. Para $a = 0$ la solución es $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{5}{6}$; $z = \frac{1}{6}$

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

- a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? (2,5 puntos)
b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? (0,5 puntos)

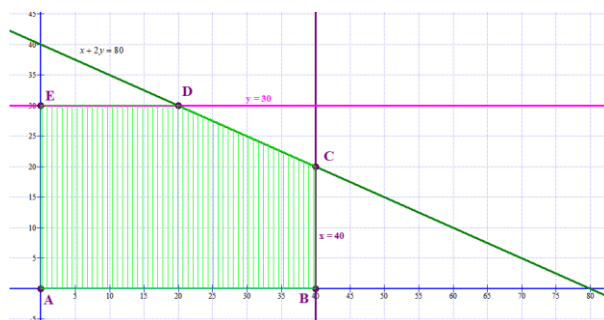
Solución: a) Las restricciones asociadas al problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x \leq 40 \\ y \leq 30 \\ x + 2y \leq 80 \end{array} \right\}$$

La función beneficio es $B(x, y) = 150x + 250y$

Hay que fabricar 40 ordenadores del tipo A y 20 del tipo B para maximizar el beneficio.

b) Solo sobran 10 memorias de alta capacidad.



JUNIO 2019

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1} . (1 punto)

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$. (1 punto)

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $a = 0$ c) $a = 0$

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos)

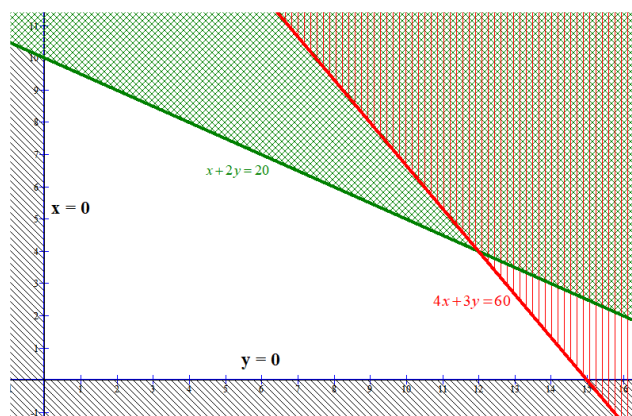
Solución:

Las restricciones aplicables al problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es $\text{Beneficio} = 15x + 12y$

El máximo beneficio (228 €) se obtiene con 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.



SEPTIEMBRE 2018

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

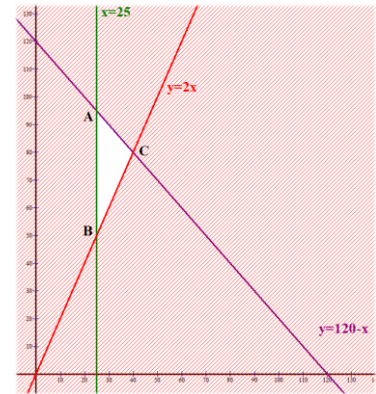
Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t(B + C) = D$. (3 puntos)

Solución: $x = -6$; $y = -5$; $z = -1$

CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

Solución: Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 2x \end{array} \right\}$$



y la función a maximizar es: $\text{Beneficio}(x) = 300x + 215y$

Con 40 hectáreas del cultivo A y 80 hectáreas del cultivo B se obtiene un beneficio máximo de 29200 €

JUNIO 2018

CUESTIÓN A1. Discute el siguiente sistema en función del parámetro a :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - z = 6 \\ y + z = 1 \\ ax + y - 2z = 4 \end{array} \right\} \text{ (2'5 puntos)}$$

Resuélvelo para $a = 2$. (0'5 puntos)

Solución: Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 1$ el sistema es incompatible.

Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado, la solución es $x = -1; y = \frac{8}{3}; z = \frac{-5}{3}$.

CUESTIÓN B1. Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m² de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m² de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m² de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo. (3 puntos)

Solución:

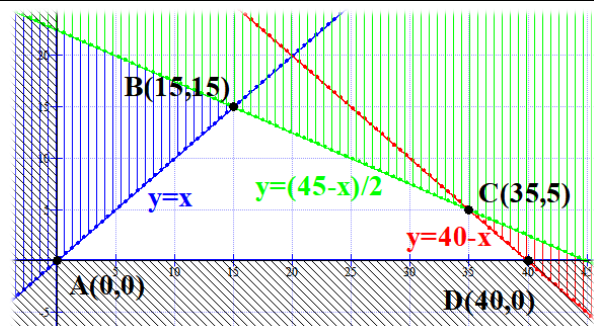
Las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 40 \\ x + 2y \leq 45 \\ x \geq y \end{array} \right.$$

El beneficio es $B(x, y) = 50x + 80y$.

El beneficio máximo es para el punto C (35, 5)

que significa fabricar 35 bolsos del tipo A y 5 del tipo B. Dicho beneficio máximo es de 2150 €



SEPTIEMBRE 2017

CUESTIÓN A1. Tres automóviles A, B y C salen del mismo punto en tres momentos distintos y los tres circulan a una velocidad constante de 100 km por hora. Actualmente la suma de las distancias recorridas por los tres es de 800 km y la distancia recorrida por A es el triple de la recorrida por B. Hallar la distancia recorrida por cada uno de ellos en la actualidad, sabiendo que cuando pase media hora (es decir, cuando todos hayan recorrido 50 km más) la suma de las distancias recorridas por A y B será 50 km más que la recorrida por C. (3 puntos)

Solución:
$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 800 \\ a = 3b \\ a + b = c \end{array} \right\} \text{La solución del problema es A recorre 300 km, B recorre 100 km y C recorre 400 km}$$

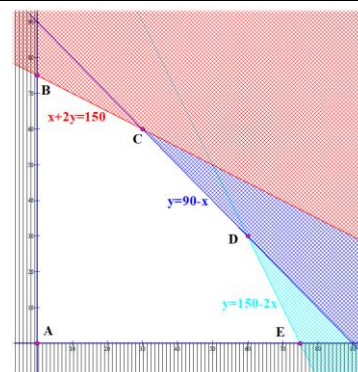
CUESTIÓN B1. Una perfumería prepara dos lotes de productos, el lote 1 contiene 2 perfumes, 2 jabones y 1 crema corporal y el lote 2 está formado por 1 perfume, 2 jabones y 2 cremas corporales. Sabiendo que dispone de 150 perfumes, 180 jabones y 150 cremas corporales y que el beneficio obtenido es de 45 euros por cada lote del tipo 1 y de 30 euros por cada lote del tipo 2, hallar el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio? (3 puntos)

Solución: Las restricciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + y \leq 150 \\ 2x + 2y \leq 180 \\ x + 2y \leq 150 \end{array} \right.$$

y la función objetivo es Beneficio = $45x + 30y$

El beneficio máximo se obtiene para 60 lotes del tipo 1 y 30 lotes del tipo 2.



JUNIO 2017

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^t . (0,25 puntos)

b) Calcular $A \cdot B$. (0,75 puntos)

c) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $A \cdot B \cdot X = C + I$ donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad. (2 puntos)

Solución:

$$a) A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b) A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad c) X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B1. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de

metros que al distribuidor B. Hallar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste. Determinar dicho coste mínimo. (3 puntos)

Solución:

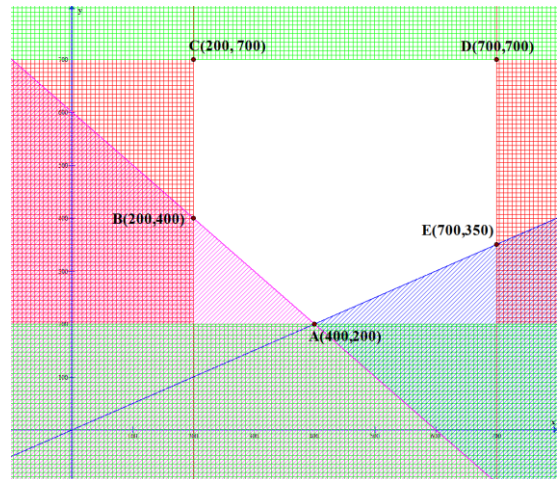
El coste de la compra es $C(x, y) = 2x + 3y$.

Función a minimizar.

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ 600 \leq x + y \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$

El coste mínimo es para el punto A (400, 200) que significa un pedido de 400 metros al distribuidor A y 200 metros al distribuidor B. Dicho coste mínimo es de 1400 €



SEPTIEMBRE 2016

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $C^t + I$, siendo I la matriz identidad. (0,5 puntos)

b) Hallar x , y y z para que se cumpla que $AB = C^t + I$. (2 puntos)

Solución: a) $C^t + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} y=1 \\ x=1 \\ z=-2 \end{cases}$

CUESTIÓN B1. Una empresa necesita, como mínimo, 180 uniformes de mujer y 120 de hombre. Los encarga a dos talleres A y B. El taller A confecciona diariamente 6 uniformes de mujer y 2 de hombre con un coste de 75 euros al día. El taller B hace diariamente 4 uniformes de mujer y 3 de hombre con un coste diario de 90 euros. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para satisfacer las necesidades de la empresa con el mínimo coste?, ¿cuánto vale dicho coste? (3 puntos)

Solución:

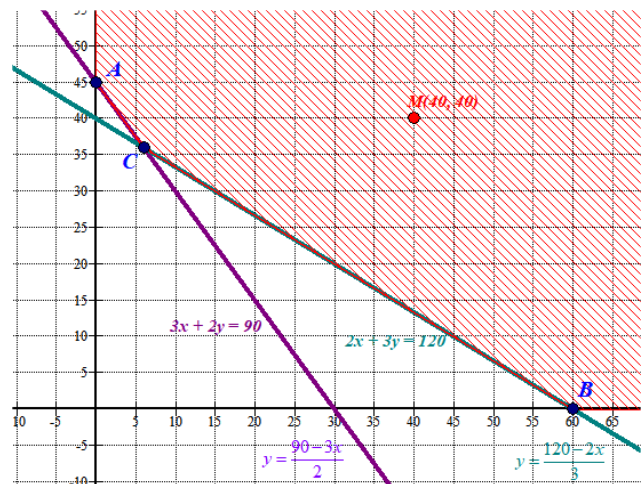
Las restricciones se resumen en:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 90 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el coste:

$$C(x, y) = 75x + 90y.$$

El mínimo coste satisfaciendo todas las restricciones se consigue en el punto C(6, 36), lo que significa que el taller A debe trabajar 6 días y el B 36 días con un coste mínimo de 3690 €.



JUNIO 2016

CUESTIÓN A. 1. En una empresa trabajan empleados de las categorías A, B y C. El salario mensual de cada trabajador es de 1200, 1700 y 2200 €, según que pertenezca a la categoría A, B o C, respectivamente. Todos los trabajadores destinan el 5% de su salario a un plan de pensiones, lo que asciende en un mes a un total de 4930 €. El número de trabajadores de la categoría A es el 150% de los de la categoría B. El número de trabajadores de la categoría B más el de la C supera en 3 el número de trabajadores de la categoría A. Halla el número de trabajadores de cada categoría. (2'5 puntos)

Solución: El sistema que hay que plantear es
$$\begin{cases} 60a + 85b + 110c = 4930 \\ a = 1.5b \\ b + c = a + 3 \end{cases}$$

La solución es 30 trabajadores de la categoría A, 20 de la categoría B y 13 de la C.

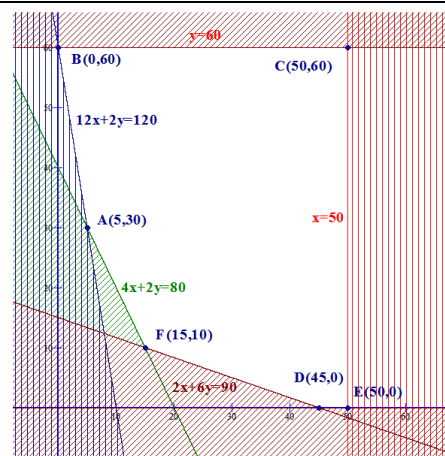
CUESTIÓN B. 1. Un supermercado necesita, al menos, 80 docenas de huevos de tamaño pequeño, 120 docenas de huevos de tamaño mediano y 90 docenas de tamaño grande. Se abastece de dos granjas A y B. La granja A suministra lotes de 4 docenas de huevos pequeños, 12 docenas de medianos y 2 docenas de grandes, y el coste de cada lote es de 6 €. La granja B proporciona lotes de 2 docenas de huevos pequeños, 2 docenas de medianos y 6 docenas de grandes, con un coste de 4 € por lote.

Además, la granja A puede suministrar como máximo, 50 lotes y la granja B, puede suministrar, como máximo, 60 lotes. Hallar el número de lotes que debe comprar a cada granja para satisfacer sus necesidades con el mínimo coste. (3 puntos)

Solución: La función objetivo es el coste total de la compra:

$$f(x, y) = 6x + 4y.$$

Resumimos todas las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 50 \\ 4x + 2y \geq 80 \\ 12x + 2y \geq 120 \\ 2x + 6y \geq 90 \\ y \geq 0 \\ y \leq 60 \end{cases}$$


Hay que comprar 15 lotes en la granja A y 10 lotes en la granja B para satisfacer las restricciones con el menor gasto posible (130 €).

SEPTIEMBRE 2015

CUESTIÓN A1. Hallar x , y , z para que se verifique

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ -1 & -\frac{y}{2} \\ 2 & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(3 puntos)

Solución: La solución es $x = -5, y = 1, z = 3$.

CUESTIÓN B1. Se quiere elaborar una dieta con dos preparados alimenticios, A y B. Una porción de A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio, y cuesta 5 euros. Una porción de B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio, y cuesta 3 euros. La dieta debe aportar, al menos, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio. Hallar cuántas porciones de cada preparado deben utilizarse para satisfacer estos requisitos con el mínimo coste. (3 puntos)



Solución: deben utilizarse 5 porciones de A y 5 de B para satisfacer los requisitos con el mínimo coste (40 €).

JUNIO 2015

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices:

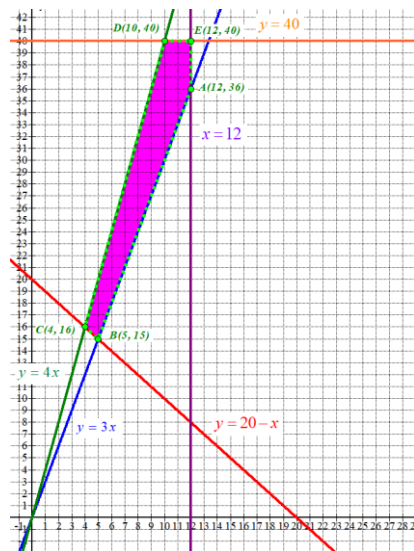
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $B^t + 2C$ (0,5 puntos)

b) Hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $AX = B^t + 2C$. (2 puntos)

Solución: a) $B^t + 2C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B1. En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor? (3 puntos)



Solución:

La combinación de máquinas que hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor es con 10 calientes y 40 frías.

SEPTIEMBRE 2014

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \\ a & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

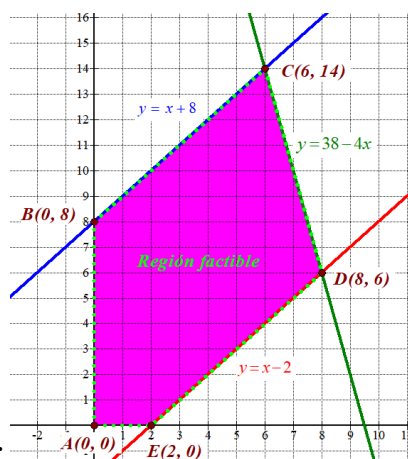
Hallar a y b para que $A \cdot B = B + C^t$. (2,5 puntos)

Solución: Se cumple lo pedido con los valores $a = 1$ y $b = 3$.

CUESTIÓN B1. Un profesor proporciona a sus alumnos un listado con 20 problemas del tema 1 y 20 del tema 2. Cada problema del tema 1 vale 5 puntos y cada problema del tema 2 vale 8 puntos. Los alumnos pueden hacer problemas de los dos temas, pero con las siguientes condiciones:

- 1) El número de problemas realizados del tema 1 no puede ser mayor que el número de problemas del tema 2 más 2, ni ser menor que el número de problemas del tema 2 menos 8.
- 2) La suma de 4 veces el número de problemas realizados del tema 1 con el número de problemas realizados del tema 2 no puede ser mayor que 38.

Hallar cuántos problemas del tema 1 y del tema 2 hay que hacer para obtener la máxima puntuación. (3 puntos)



Solución:

La máxima puntuación se obtiene haciendo 6 exámenes del tema 1 y 14 del tema 2. La máxima puntuación es de 142 puntos.

JUNIO 2014

CUESTIÓN A1. Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro a , siendo a un número real distinto de 0.

$$\left. \begin{array}{l} ax + y - 2az = 1 \\ ax - y = 2 \\ ax + y + (a-1)z = 3a - 1 \end{array} \right\}, (2 \text{ puntos})$$

Resolverlo para $a = 1$. (0,5 puntos)

Solución: El sistema es compatible determinado para $a \neq \frac{1}{3}$ y es incompatible para $a = \frac{1}{3}$. La

solución del sistema cuando $a = 1$ es $x = 2$; $y = 0$; $z = \frac{1}{2}$

CUESTIÓN B1. Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo? (3 puntos)



Solución: Con 40 botes de tinta para etiquetas y 120 de tinta para carteles se obtiene un beneficio máximo de 3600 €.

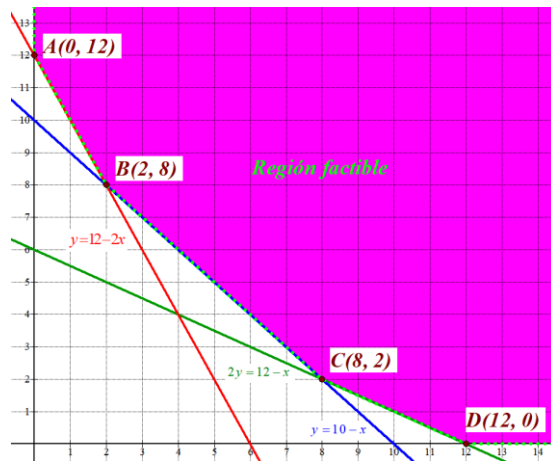
SEPTIEMBRE 2013

CUESTIÓN A1. En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión. (2,5 puntos)

Solución: En el avión viajan 90 mujeres, 240 hombres y 30 niños.

CUESTIÓN B1. Para elaborar un menú se dispone de un primer plato y un segundo plato. Una porción del primer plato contiene 6 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 20 mg de calcio, y aporta 110 calorías. Una porción del segundo contiene 3 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 40 mg de calcio, y aporta 65 calorías. ¿Cuántas porciones de cada plato deben utilizarse para que el menú

aporte el menor número de calorías, sabiendo que debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio? (3 puntos)



Solución: El menú que aporta menor número de calorías se hace con 2 porciones del primer plato y 8 del segundo, siendo el aporte de 740 calorías.

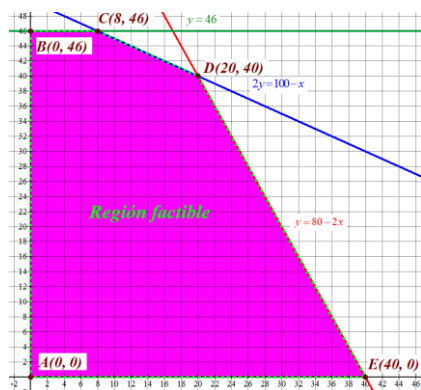
JUNIO 2013

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Hallar a , b y c para que se cumpla que $A \cdot B = C^t$. (C^t denota la traspuesta de C) (1,5 puntos)
b) Para $a = 0$ calcular la inversa de A . (1,5 puntos)

Solución: a) Los valores buscados son $a = 1$, $b = 1$ y $c = 2$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B1. Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo? (3 puntos)



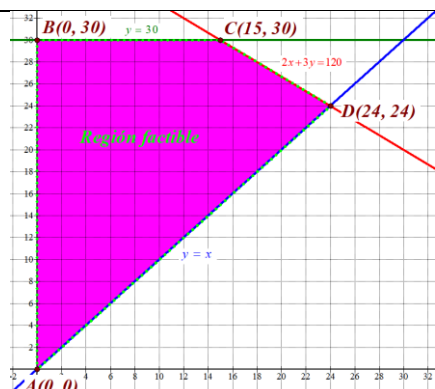
Solución: El máximo beneficio se obtiene haciendo 20 tartas de chocolate y 40 de chocolate y nata. Siendo este beneficio máximo de 680 €.

SEPTIEMBRE 2012

CUESTIÓN A1. Un cliente ha comprado en un supermercado botellas de agua de medio litro, 2 litros y 5 litros, cuyos precios respectivos son 0,5 euros, 1 euro y 3 euros. En total ha comprado 24 botellas, que corresponden a una cantidad de 36 litros, y que le han costado 22 euros. Determinar cuántas botellas de cada tipo ha comprado. (3 puntos)

Solución: El cliente compró 12 botellas de agua de medio litro, 10 de 2 litros y 2 de 5 litros.

CUESTIÓN B1. Un ayuntamiento desea ajardinar dos tipos de parcelas, tipo A y tipo B, y dispone de 6000 euros para ello. El coste de la parcela A es de 100 euros y el de la B de 150 euros. Se considera conveniente ajardinar al menos tantas parcelas de tipo B como las del tipo A y, en todo caso, no ajardinar más de 30 parcelas de tipo B. ¿Cuántas parcelas de cada tipo tendrá que ajardinar para maximizar el número total de parcelas ajardinadas?, ¿agotará el presupuesto disponible? (3 puntos)



Solución: El número máximo de parcelas que se puede ajardinar bajo las condiciones impuestas es de 24 del tipo A y 24 del tipo B.

El coste es de $24 \cdot 100 + 24 \cdot 150 = 6000$ €. Por lo que se agotará todo el presupuesto.

JUNIO 2012

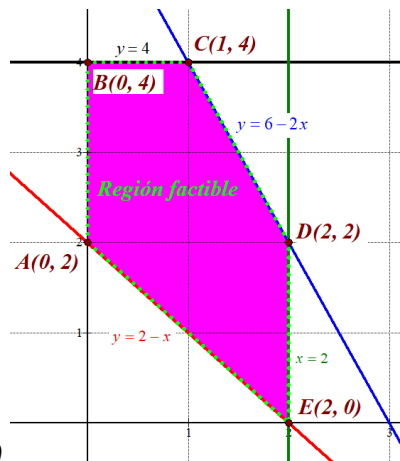
CUESTIÓN A1. María y Luis han realizado un desplazamiento en coche que ha durado 13 horas y durante el cual, un tiempo ha conducido María, otro ha conducido Luis y el resto han descansado. Luis ha conducido 2 horas más de las que han descansado, y el total de horas de descanso junto con las de conducción de Luis es 1 hora menos que las que ha conducido María. Encontrar el número de horas que ha conducido cada uno y las que han descansado. (3 puntos)

Solución: María ha conducido 7 horas, Luis ha conducido 4 y han descansado 2 horas.

CUESTIÓN B1. Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ 2x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array} \right\}$$

- Representar gráficamente el conjunto de soluciones. (1 punto)
- Considerar la función $f(x, y) = 3x + y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $f(x, y)$ en la región definida por el sistema. (1 punto)
- Considerar la función $g(x, y) = 3x + 3y$. Calcular, si existen, los puntos que dan el valor mínimo de la función $g(x, y)$ en la región definida por el sistema. (1 punto)



Solución: a) b) El mínimo se da en el punto $A(0, 2)$. c) El mínimo se obtiene en los puntos $A(0, 2)$ y $E(2, 0)$. También vale como punto donde se obtiene un valor mínimo de $g(x, y) = 3x + 3y$ cualquier punto del segmento AE . Por ejemplo, el punto de coordenadas $(1, 1)$.

SEPTIEMBRE 2011

CUESTIÓN A1. (3 puntos) Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

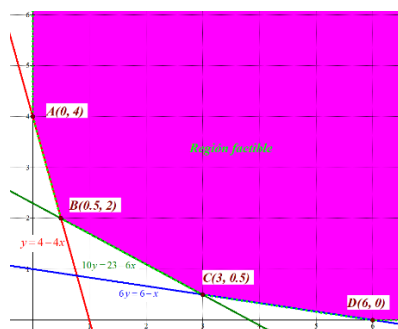
Solución: Las naranjas cuestan 2 euros el kilo, las manzanas 3 euros el kilo y 5 euros el kilo de melocotones.

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40g de un nutriente A, 60g de un nutriente B y 230g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 10 euros y el de un bote del producto P_2 es de 16 euros, determinar:

- ¿Qué cantidad de botes de P_1 y de P_2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?
- ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?



Solución: a) El precio mínimo es de 37 euros. Se consigue con medio bote de P_1 y 2 botes de P_2 . b) Se obtiene 40 gr de nutriente A, 125 gr de nutriente B y 230 gr de nutriente C.

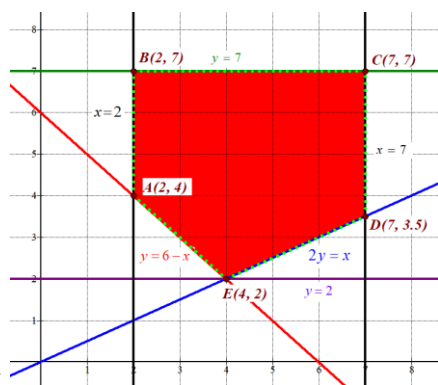
JUNIO 2011

CUESTIÓN A1. (3 puntos) Discutir el siguiente sistema en función del parámetro λ y resolverlo para $\lambda = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \lambda x + 2y = \lambda \\ 2x + \lambda y + 4z = -1 \end{array} \right\}$$

Solución: El sistema es **compatible determinado** para $\lambda \neq 2$ y es incompatible para $\lambda = 2$. Para $\lambda = 1$ la solución es $x = 7; y = -3; z = -3$.

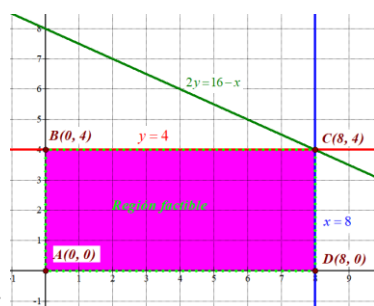
CUESTIÓN B1. (3 puntos) Una cadena de supermercados compra naranjas a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden las naranjas a 1000 y 1500 euros por tonelada, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para satisfacer su demanda, la cadena debe comprar en total como mínimo 6 toneladas. La cadena debe comprar como máximo al distribuidor A el doble de naranjas que al distribuidor B. ¿Qué cantidad de naranjas debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.



Solución: El coste mínimo es de 70000 euros. Se consigue con 4 toneladas del distribuidor A y 2 del distribuidor B.

SEPTIEMBRE 2010

CUESTIÓN A1. (3 puntos) En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?



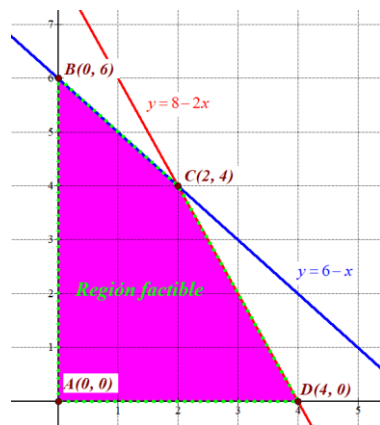
Solución: El beneficio máximo es de 460 euros. Se consigue con 8 artículos A y 4 artículos B.

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 12 & -6 & 0 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$

JUNIO 2010

CUESTIÓN A1. (3 puntos) En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con 20 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 30000 espectadores, mientras que otro programa con 10 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 10000 espectadores. Para un determinado periodo, la dirección de la red decide dedicar como máximo, 80 minutos de variedades y 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces tendrá que aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?



Solución: La máxima audiencia es de 120000 espectadores. Se consigue con 4 programas de 20 m de variedades y 1 m de publicidad y ninguno de los de 10 m de variedades y 1 m de publicidad.

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -\lambda \\ 2x + 3y = \lambda \end{array} \right\}$$

- a) Resolverlo para $\lambda = 3$
b) Estudiarlo para cualquier valor de λ

Solución: a) La solución es: $x = 6$; $y = -3$; $z = -3$ b) El sistema es compatible determinado, independientemente del valor de λ .