



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — En la lotería de Navidad, el número ganador del Gordo es un único número de 5 cifras. Todos los números tienen la misma probabilidad de resultar ganadores. Considera los siguientes sucesos:

A: el número ganador la Navidad de 2025 será el 00000.

B: el número ganador la Navidad de 2025 será el 72480.

C: el número ganador la Navidad de 2026 será el 72480.

- a) Expresa, con tus propias palabras, que quieren decir los dos términos siguientes: $P(C/B)$, y $P(A \cap B)$. **(1 pt)**
- b) Calcula $P(C/B)$ y $P(A \cap B)$. **(1 pt)**

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de los datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes totales y la cantidad de trabajadores por nacionalidad y sexo en España, que son los siguientes:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones
Cantidad de habitantes total.		

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	10.8 millones	1.9 millones
Mujeres	9.6 millones	1.7 millones
Cantidad de trabajadores.		

- a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje? **(1 pt)**
- b) Escogiendo un individuo al azar, ¿los sucesos “ser mujer” y “trabajar” son independientes? **(1 pt)**

Problema A3. — Después de una formación académica determinada, el tiempo que tardan los titulados en encontrar trabajo le podemos aproximar mediante una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional μ desconocida, y desviación típica $\sigma = 30$ días. Respecto de los 22 titulados de este año, el número medio de días que han tardado en encontrar trabajo ha sido de 86.

Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 80%. **(2 pt)**



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? (1 pt)
- b) Calcula x tal que $Ax = v$. (1 pt)
- c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2 y = x$. (1 pt)

Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

- Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
- Cada minibus tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste?

(3 pt)

Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, para $x \in [-1, \infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. (2 pt)
- b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? (1 pt)

Problema C2. — En psicología, la siguiente función modela cómo las personas valoran recompensas en un instante de tiempo futuro, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

donde r es una constante positiva, y t se mide en días.

- a) Si $r = 0.01$, ¿qué vale la función $V(t)$ en $t = 50$? (1 pt)
- b) ¿Para qué valor de r , la función $V(t)$ vale 0.75 en $t = 50$? (1 pt)
- c) Si $r = 0.03$, ¿a qué valor tiende la valoración de una recompensa en un futuro muy lejano? (1 pt)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — En la lotería de Navidad, el número ganador del Gordo es un único número de 5 cifras. Todos los números tienen la misma probabilidad de resultar ganadores. Considera los siguientes sucesos:

A: el número ganador la Navidad de 2025 será el 00000.

B: el número ganador la Navidad de 2025 será el 72480.

C: el número ganador la Navidad de 2026 será el 72480.

a) Expresa, con tus propias palabras, que quieren decir los dos términos siguientes: $P(C/B)$, y $P(A \cap B)$. (1 pt)

b) Calcula $P(C/B)$ y $P(A \cap B)$. (1 pt)

a) $P(C/B)$ es la probabilidad del suceso “el número ganador de la Navidad de 2026 será el 72480, sabiendo que el número ganador la Navidad de 2025 ha sido el 72480”.

$P(A \cap B)$ es la probabilidad de que en el sorteo de Navidad de 2025 salga ganador el 00000 y el 72480. Es la probabilidad de un suceso imposible pues el Gordo de Navidad solo le puede tocar a un número.

b) Como los sorteos de Navidad de 2025 y el de 2026 son independientes entre si, entonces se cumple que $P(C/B) = P(C)$. En el sorteo entran todos los números desde 00000 al 99999, es decir, hay 100000 números en el sorteo que pueden ser premiados y solo a uno de ellos le tocará el Gordo. La probabilidad de que el número premiado en el sorteo de Navidad de 2026 sea el 72480 vale $P(C/B) = P(C) = \frac{1}{100000} = 0.00001$.

Hemos visto que $A \cap B = \{\text{Salga premiado el 00000}\} \cap \{\text{Salga premiado el 72480}\} = \emptyset$.

No puede ocurrir que salgan los 2 números premiados, por lo que es el suceso imposible con probabilidad 0. $P(A \cap B) = 0$

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de los datos, para el 2023, sobre la cantidad de habitantes totales y la cantidad de trabajadores por nacionalidad y sexo en España, que son los siguientes:

	Espanoles	Extranjeros		Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones	Hombres	10.8 millones	1.9 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones	Mujeres	9.6 millones	1.7 millones
Cantidad de habitantes total.			Cantidad de trabajadores.		

- a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje? **(1 pt)**
 b) Escogiendo un individuo al azar, ¿los sucesos “ser mujer” y “trabajar” son independientes? **(1 pt)**

- a) Si sumamos todas las cifras de los habitantes españoles que son hombres: $20.6 + 3 = 23.6$ millones de habitantes de España son hombres en el año 2023.

Obtenemos el número total de hombres trabajadores: $10.8 + 1.9 = 12.7$ millones.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un hombre al azar este trabaje vale $\frac{12.7}{23.6} = \frac{127}{236} \approx 0.5381$.

- b) Hallamos el total de habitantes de España: $20.6 + 21.2 + 3 + 3.3 = 48.1$ millones.

Obtenemos el número de mujeres: $21.2 + 3.3 = 24.5$ millones.

Obtenemos el número de trabajadores: $10.8 + 9.6 + 1.9 + 1.7 = 24$ millones.

Para que los sucesos “ser mujer” y “trabajar” sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(Mujer \cap Trabajador) = P(Mujer)P(Trabajador)$.

Averiguamos si se cumple o no esta igualdad.

$$\left. \begin{aligned} P(Mujer \cap Trabajador) &= \frac{9.6+1.7}{48.1} \approx 0.235 \\ P(Mujer)P(Trabajador) &= \frac{24.5}{48.1} \cdot \frac{24}{48.1} \approx 0.2541 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Mujer \cap Trabajador) = 0.235 \neq 0.2541 = P(Mujer)P(Trabajador)$$

Los sucesos no son independientes.

Problema A3. — Después de una formación académica determinada, el tiempo que tardan los titulados en encontrar trabajo le podemos aproximar mediante una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional μ desconocida, y desviación típica $\sigma = 30$ días. Respecto de los 22 titulados de este año, el número medio de días que han tardado en encontrar trabajo ha sido de 86.

Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 80%. **(2 pt)**

Sea X = el tiempo, en días, que tardan los titulados en encontrar trabajo. $X = N(\mu, 30)$

La muestra es de tamaño $n = 22$ titulados. La media muestral es $\bar{x} = 86$ días.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 80% el valor de $z_{\alpha/2}$.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

$$1 - \alpha = 0.80 \rightarrow \alpha = 0.20 \rightarrow \alpha/2 = 0.10 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.90 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.28 + 1.29}{2} = 1.285$$

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.285 \cdot \frac{30}{\sqrt{22}} \approx 8.219$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (86 - 8.219, 86 + 8.219) = (77.781, 94.219)$$

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema B1.** — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Es cierto que $A = B^{-1}$? ¿Es cierto que $B = A^{-1}$? **(1 pt)**
 b) Calcula x tal que $Ax = v$. **(1 pt)**
 c) Con el valor de x del apartado anterior, calcula y tal que $B^2y = x$. **(1 pt)**

a) Comprobamos si $AB = I$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5-5 & 4-3 & -4+4 \\ 5-5 & 3-3 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Como se cumple podemos decir que $A = B^{-1}$ y que $B = A^{-1}$.b) Como $B = A^{-1}$ podemos despejar x en la igualdad $Ax = v$.

$$Ax = v \Rightarrow x = A^{-1}v = Bv = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-5 \\ -5+3+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

c) Despejamos y de la igualdad. Utilizamos que $A = B^{-1}$.

$$B^2y = x \Rightarrow BBy = x \Rightarrow B^{-1}BB y = B^{-1}x \Rightarrow By = B^{-1}x = Ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}By = B^{-1}Ax = AAx \Rightarrow y = A^2x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5-24+18 \\ 5-18+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5-4+5 \\ 5-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

- Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
- Cada minibús tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste?

(3 pt)

Llamamos x = número de autocares que se contratan, y = número de minibuses que se contratan.

La función a minimizar es el coste de la contratación: $C(x, y) = 100x + 55y$.

Las restricciones son:

“queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas” $\rightarrow 50x + 30y \geq 450$

“podemos contratar hasta 8 minibuses” $\rightarrow y \leq 8$

“Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos” $\rightarrow x + y \leq 11$.

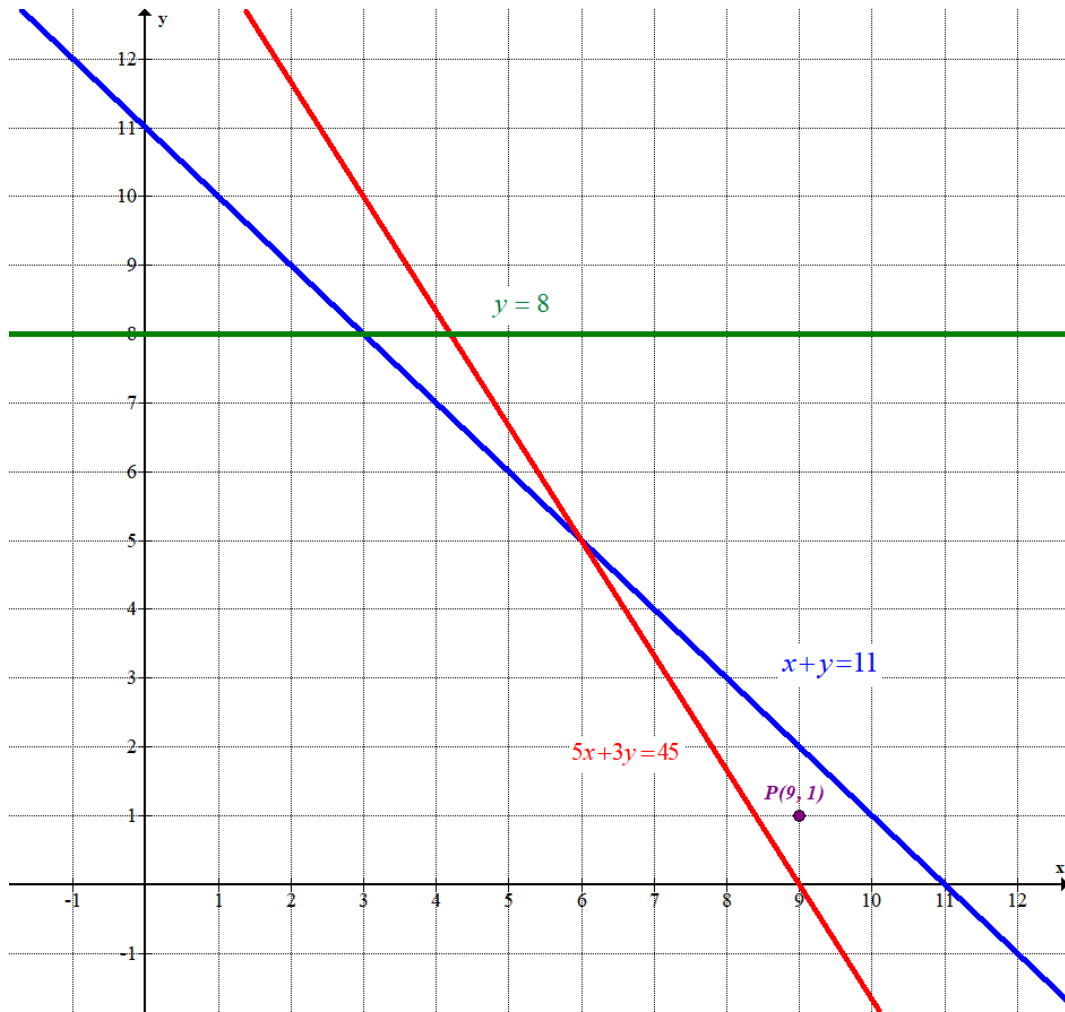
Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 30y \geq 450 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 3y \geq 45 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$5x + 3y = 45$	$x + y = 11$	$y = 8$	$x \geq 0; y \geq 0$																
$x \mid y = \frac{45 - 5x}{3}$ <table border="0"> <tr><td>0</td><td>15</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>9</td><td>0</td></tr> </table>	0	15	6	5	9	0	$x \mid y = 11 - x$ <table border="0"> <tr><td>0</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>0</td></tr> </table>	0	11	6	5	11	0	$x \mid y = 8$ <table border="0"> <tr><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td></tr> </table>	0	8	3	8	Primer cuadrante
0	15																		
6	5																		
9	0																		
0	11																		
6	5																		
11	0																		
0	8																		
3	8																		



La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones

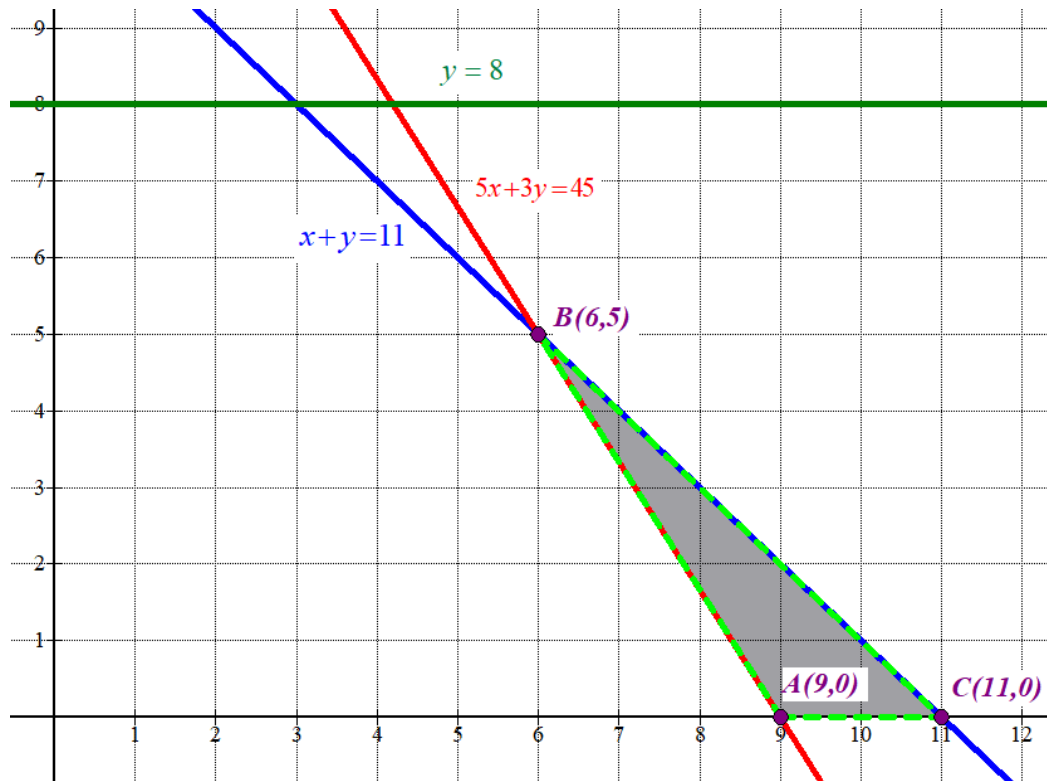
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y \geq 45 \\ x + y \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}, \text{ por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de la recta azul,}$$

por debajo de la recta horizontal verde y por encima de la recta roja.

Comprobamos que el punto $P(9, 1)$ perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \geq 45 \\ 9 + 1 \leq 11 \\ 1 \leq 8 \\ 9 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región es la indicada. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: $A(9, 0)$, $B(6, 5)$ y $C(11, 0)$.

Valoramos la función coste $C(x, y) = 100x + 55y$ en cada uno de los vértices.

$$A(9, 0) \rightarrow C(9, 0) = 100 \cdot 9 + 55 \cdot 0 = 900$$

$$B(6, 5) \rightarrow C(6, 5) = 100 \cdot 6 + 55 \cdot 5 = 875 \text{ Mínimo}$$

$$C(11, 0) \rightarrow C(11, 0) = 100 \cdot 11 + 55 \cdot 0 = 1100$$

El coste mínimo se consigue con la contratación de 6 autocares y 5 minibuses siendo ese coste mínimo de un importe de 875 €.

Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema C1.** — Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2$, para $x \in [-1, \infty)$.

- a) Haz una gráfica esquemática de la función $f(x)$. Calcula o justifica e indica sobre la gráfica el valor de la función en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos y absolutos. **(2 pt)**
- b) Sobre la misma gráfica, traza la recta tangente a la función en el punto $x=1$. ¿Cuál es el valor de su pendiente? **(1 pt)**

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

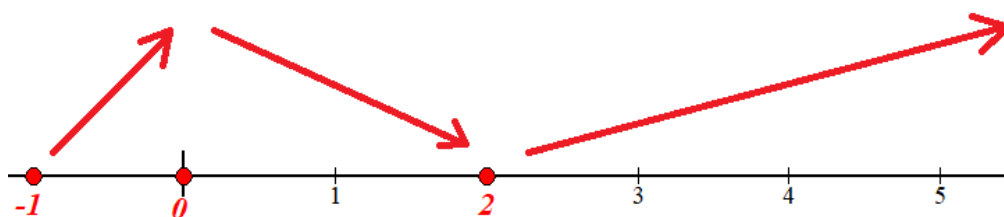
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = 3(-0.5)^2 - 6(-0.5) = 3.75 > 0$. La función crece en $[-1, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 2)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$ y $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$ las coordenadas del máximo relativo son $(0, 0)$ y las del mínimo relativo son $(2, -4)$.

En $x = -1$ la función vale $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4$.

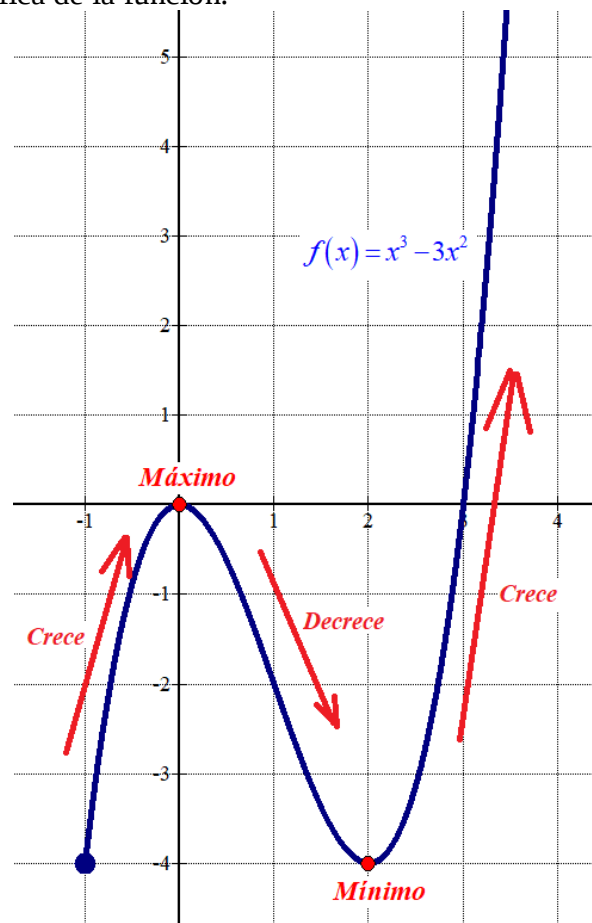
Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x^2 = +\infty$$

Como la función crece a partir de $x = 2$ tomando valores todo lo grandes que se quiera, podemos afirmar que no tiene máximo absoluto.

El mínimo absoluto de la función es -4 y se alcanza en $x=0$ y en $x=-1$.

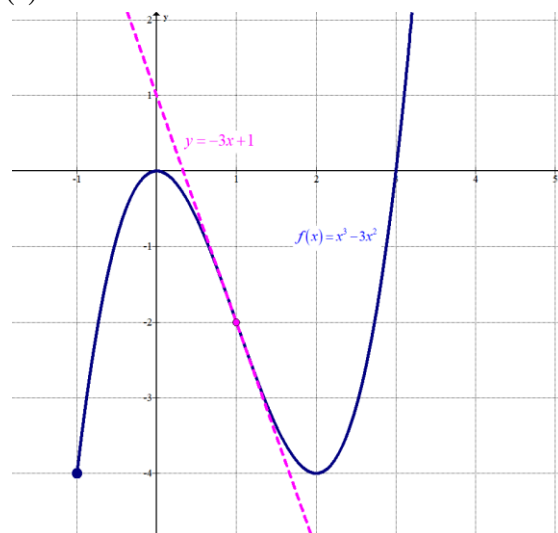
Representamos la gráfica de la función.



b) Hallamos la recta tangente a la función en el punto $x=1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 = -2 \\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = -3(x-1) \Rightarrow y + 2 = -3x + 3 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 1}$$

La recta tangente a la función en el punto $x=1$ tiene ecuación $y = -3x + 1$. Esta tangente tiene de pendiente $f'(1) = -3$.



Problema C2. — En psicología, la siguiente función modela cómo las personas valoran recompensas en un instante de tiempo futuro, t :

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty)$$

donde r es una constante positiva, y t se mide en días.

- a) Si $r = 0.01$, ¿qué vale la función $V(t)$ en $t = 50$? (1 pt)
 b) ¿Para qué valor de r , la función $V(t)$ vale 0.75 en $t = 50$? (1 pt)
 c) Si $r = 0.03$, ¿a qué valor tiende la valoración de una recompensa en un futuro muy lejano? (1 pt)

- a) Si $r = 0.01$ la función queda $V(t) = \frac{1}{(1+0.01)^t} = \frac{1}{1.01^t}$, $t \in [0, +\infty)$.

Obtenemos el valor de la función para $t = 50$.

$$V(50) = \frac{1}{1.01^{50}} = 0.608039$$

- b) Hacemos $V(50) = 0.75$ y despejamos el valor de r .

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = \frac{1}{(1+r)^t} \\ V(50) = 0.75 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.75 = \frac{1}{(1+r)^{50}} \Rightarrow (1+r)^{50} = \frac{1}{0.75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} - 1 \approx 0.00577}$$

El valor buscado es $r = \sqrt[50]{\frac{1}{0.75}} - 1 \approx 0.00577$.

- c) Si $r = 0.03$ la función queda $V(t) = \frac{1}{(1+0.03)^t} = \frac{1}{1.03^t}$, $t \in [0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuanto t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1.03^t} = \frac{1}{1.03^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La valoración de la recompensa en un futuro muy lejano va a ser 0.