

Anexo 1. Modelo de Examen de Prueba de Acceso a la Universidad

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones: las dos primeras preguntas son obligatorias. En las preguntas tres y cuatro, debe seleccionar una opción (A o B) y contestar a todos los apartados. Se permitirá una calculadora no gráfica ni programable.

PREGUNTA 1: (3 puntos)

En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40% de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30% son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30% son solistas. Además, se ha observado que el 20% de los dúos, el 15% de los grupos musicales y el 25% de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, se pide:

- Represente el árbol de probabilidades (0,5 puntos).
- Calcule la probabilidad de que haya ganado el Grammy Latino en la categoría de Mejor Álbum del Año. (1,25 puntos).
- Calcule la probabilidad de que sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en la categoría de Mejor Álbum del Año. (1,25 puntos).

PREGUNTA 2: (2 puntos)

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000€ y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000€.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

- Plantee el problema (0,75 puntos)
- Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema (1,25 puntos)

PREGUNTA 3: (3 puntos)

OPCIÓN A:

El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2), & 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1, & 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde a es un número real y t es el tiempo transcurrido en meses.

- Estudie la continuidad de $N(t)$. (0,25 puntos)
- Represente la gráfica de la función $N(t)$. (0,75 puntos).

- c) Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden (1 punto).
- d) Calcule el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x=1$, la recta de ecuación $x=3$ y el eje OX. (1 punto)

OPCIÓN B:

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) Determine el valor de a para que esta función sea continua. (0,5 puntos)
- b) Supongamos que $a=9$. Determine los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $(-9/2, -3/2)$. (1,25 puntos)
- c) Supongamos que $a=0$. Calcule el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x=2$, la recta de ecuación $x=3$ y el eje OX. (1,25 puntos)

PREGUNTA 4: (2 puntos)

OPCIÓN A:

Para dos matrices A y B se verifica que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule las matrices A y B. (1 punto)
- b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor. (1 punto)

OPCIÓN B:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a + 2)y = 2 \\ 2x - (a + 3)y + (a + 2)z = -5 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a . (1,5 puntos)
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$. (0,5 puntos)

SOLUCIONES del modelo 2026

Álgebra 40%	Análisis 30%	Estadística y probabilidad 30%
--------------------	---------------------	---------------------------------------

Pregunta 1. Probabilidad y estadística (3 puntos).

Pregunta 2. Álgebra (2 puntos).

Pregunta 3. Análisis (3 puntos).

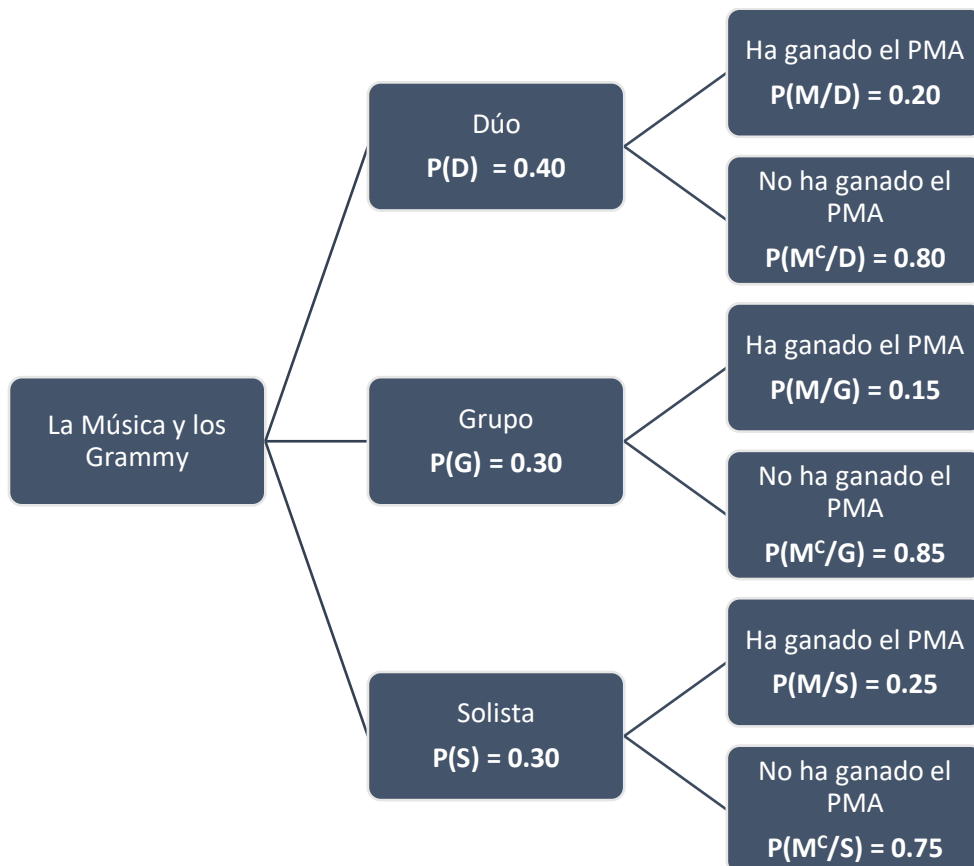
Pregunta 4. Álgebra (2 puntos).

PREGUNTA 1: (3 puntos)

En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40% de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30% son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30% son solistas. Además, se ha observado que el 20% de los dúos, el 15% de los grupos musicales y el 25% de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, se pide:

- Represente el árbol de probabilidades (0,5 puntos).
- Calcule la probabilidad de que haya ganado el Grammy Latino en la categoría de Mejor Álbum del Año. (1,25 puntos).
- Calcule la probabilidad de que sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en la categoría de Mejor Álbum del Año. (1,25 puntos).

- a) Llamamos D a “el artista nominado es un dúo”, G a “el artista nominado es un grupo”, S a “el artista nominado es solista” y M al suceso “el artista ha ganado el premio de Mejor Álbum del Año”.



b) Piden que calculemos $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(D)P(M/D) + P(G)P(M/G) + P(S)P(M/S) = \\ &= 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.25 = \boxed{0.2} \end{aligned}$$

c) Piden que calculemos $P(S/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{P(S)P(M/S)}{P(M)} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.2} = \boxed{0.375}$$

PREGUNTA 2: (2 puntos)

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000€ y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000€.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

a) Plantee el problema (0,75 puntos)

b) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema (1,25 puntos)

a) Llamamos x = número de hectáreas dedicadas a uva negra e y = número de hectáreas dedicadas a uva blanca.

La función que deseamos maximizar es el beneficio $B(x, y) = 10x + 7y$ expresado en miles de euros, sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas $\rightarrow 10 \leq x \leq 25; 7 \leq y \leq 15$.

Se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca $\rightarrow x \leq 2y$

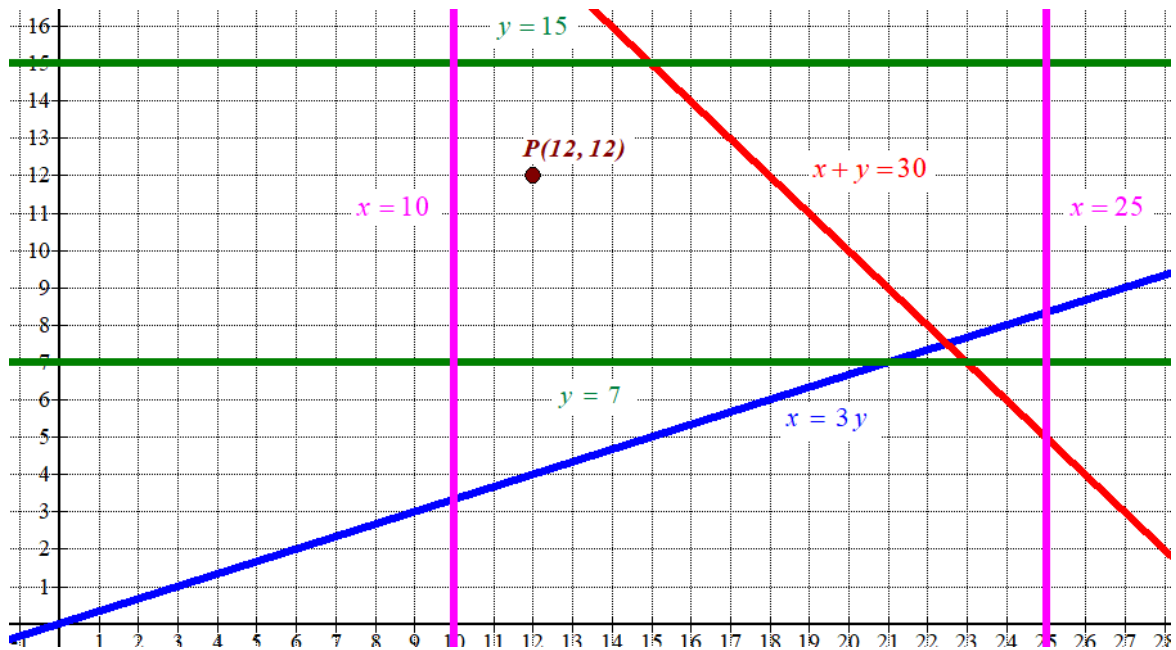
No puede cultivar más de 30 hectáreas en total $\rightarrow x + y \leq 30$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x + y = 30$	$x = 3y$	$x \geq 0; y \geq 0$	$x = 10$	$x = 25$																																
<table><tr><th>x</th><th>$y = 30 - x$</th></tr><tr><td>0</td><td>30</td></tr><tr><td>10</td><td>20</td></tr><tr><td>25</td><td>5</td></tr></table>	x	$y = 30 - x$	0	30	10	20	25	5	<table><tr><th>x</th><th>$y = \frac{x}{3}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>15</td><td>5</td></tr><tr><td>30</td><td>10</td></tr></table>	x	$y = \frac{x}{3}$	0	0	15	5	30	10	Primer cuadrante	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>10</td><td>0</td></tr><tr><td>10</td><td>7</td></tr><tr><td>10</td><td>15</td></tr></table>	x	y	10	0	10	7	10	15	<table><tr><th>$x = 25$</th><th>y</th></tr><tr><td>25</td><td>0</td></tr><tr><td>25</td><td>7</td></tr><tr><td>25</td><td>15</td></tr></table>	$x = 25$	y	25	0	25	7	25	15
x	$y = 30 - x$																																			
0	30																																			
10	20																																			
25	5																																			
x	$y = \frac{x}{3}$																																			
0	0																																			
15	5																																			
30	10																																			
x	y																																			
10	0																																			
10	7																																			
10	15																																			
$x = 25$	y																																			
25	0																																			
25	7																																			
25	15																																			
$y = 7$	$y = 15$																																			
<table><tr><th>x</th><th>$y = 7$</th></tr><tr><td>0</td><td>7</td></tr><tr><td>15</td><td>7</td></tr><tr><td>30</td><td>7</td></tr></table>	x	$y = 7$	0	7	15	7	30	7	<table><tr><th>x</th><th>$y = 15$</th></tr><tr><td>0</td><td>15</td></tr><tr><td>15</td><td>15</td></tr><tr><td>30</td><td>15</td></tr></table>	x	$y = 15$	0	15	15	15	30	15																			
x	$y = 7$																																			
0	7																																			
15	7																																			
30	7																																			
x	$y = 15$																																			
0	15																																			
15	15																																			
30	15																																			



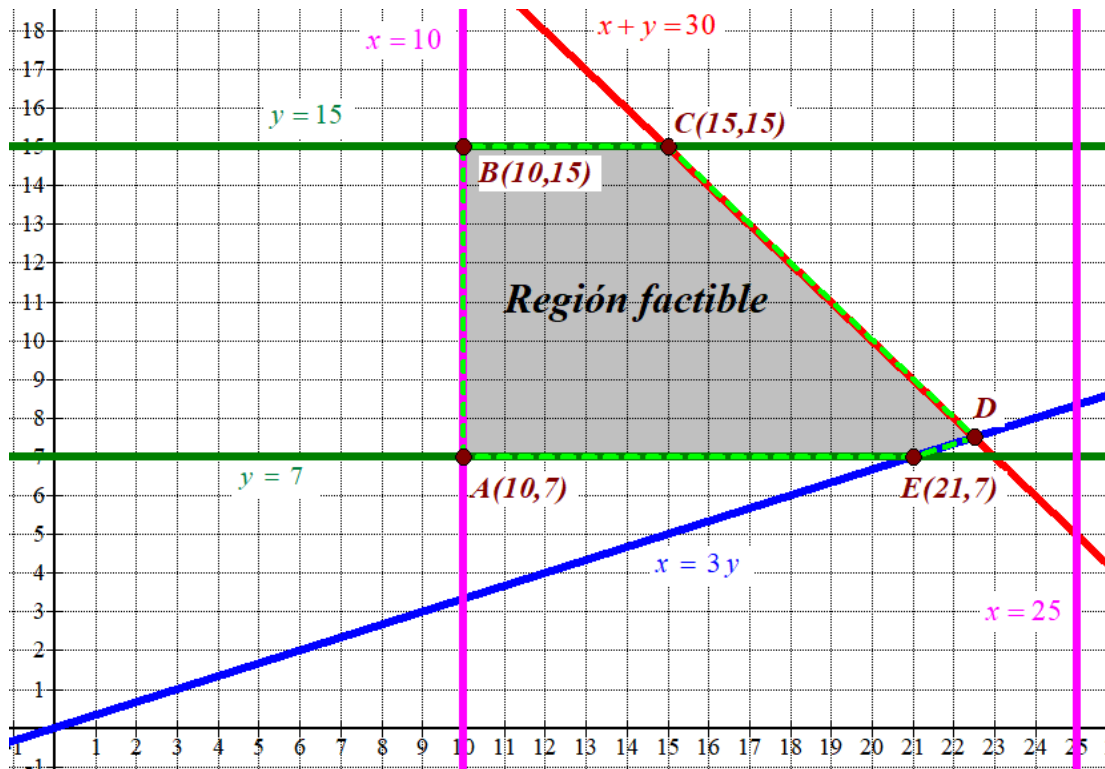
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 10 \leq x \leq 25 \\ 7 \leq y \leq 15 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada entre las rectas horizontales verdes, entre las rectas verticales rosas, por debajo de la recta roja y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto $P(12, 12)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 12 \leq 25 \\ 7 \leq 12 \leq 15 \\ 12 \leq 2 \cdot 12 \\ 12 + 12 \leq 30 \\ 12 \geq 0; 12 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las restricciones. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice D las obtenemos resolviendo el sistema siguiente.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow 3y + y = 30 \Rightarrow 4y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{4} = 7.5 \Rightarrow x = 3 \cdot 7.5 = 21.5 \Rightarrow D(21.5, 7.5)$$

Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 10x + 7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(10, 7) \rightarrow B(10, 7) = 10 \cdot 10 + 7 \cdot 7 = 149$$

$$B(10, 15) \rightarrow B(10, 15) = 10 \cdot 10 + 7 \cdot 15 = 205$$

$$C(15, 15) \rightarrow B(15, 15) = 10 \cdot 15 + 7 \cdot 15 = 255$$

$$D(21.5, 7.5) \rightarrow B(21.5, 7.5) = 10 \cdot 21.5 + 7 \cdot 7.5 = 267.5 \text{ Máximo}$$

$$E(21, 7) \rightarrow B(21, 7) = 10 \cdot 21 + 7 \cdot 7 = 259$$

El máximo beneficio se consigue en el vértice $D(21.5, 7.5)$.

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 267500 euros plantando 21.5 hectáreas de uva negra y 7.5 hectáreas de uva blanca..

PREGUNTA 3: (3 puntos)**OPCIÓN A:**

El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2), & 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1, & 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde a es un número real y t es el tiempo transcurrido en meses.

- Estudie la continuidad de $N(t)$. (0,25 puntos)
- Represente la gráfica de la función $N(t)$. (0,75 puntos).
- Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden (1 punto).
- Calcule el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x=1$, la recta de ecuación $x=3$ y el eje OX. (1 punto)

- a) En el intervalo $[0,3)$ la función está definida como $N(t) = 8 - t(t-2)$ que es una función polinómica y por tanto continua. En el intervalo $(3,5]$ está definida como $N(t) = 2t - 1$ que es una función polinómica y por tanto continua. Estudiamos la continuidad en el cambio de definición $t=3$.

$$\left. \begin{aligned} N(3) &= 8 - 3(3-2) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} 2t - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} N(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 8 - t(t-2) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N(3) = \lim_{t \rightarrow 3^+} N(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} N(t) = 5$$

Al coincidir el valor de la función con los límites laterales podemos afirmar que la función es continua en $t=3$. La función es continua en su intervalo de definición $[0,5]$.

- b) La función es definida a trozos por lo que su gráfica será un trozo de parábola y un trozo de recta. La función es continua en todo su dominio. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función.

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) = 8 - t^2 + 2t = -t^2 + 2t + 8, & 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1, & 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

$$N'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & 3 < t \leq 5 \\ N'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 \rightarrow \boxed{t=1} \in [0,3) \\ 2 = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=1$ y $x=3$.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t=0.5$ y la derivada vale $N'(0.5) = -2 \cdot 0.5 + 2 = 1 > 0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $t=2$ y la derivada vale $N'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1,3)$.

- En el intervalo $(3,5]$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale $N'(4) = 2 > 0$. La función crece en $(3,5]$.

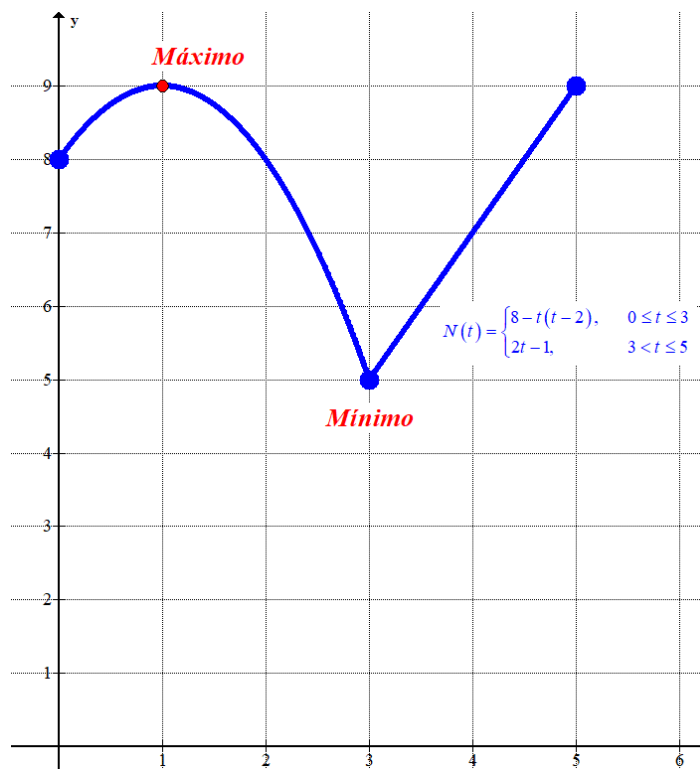
La función crece en $[0,1) \cup (3,5]$ y decrece en $(1,3)$.

La función tiene un máximo relativo en $t = 1$ y un mínimo relativo en $t = 3$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = 8 - x(x - 2)$
0	8
1	9
2	8
3	5

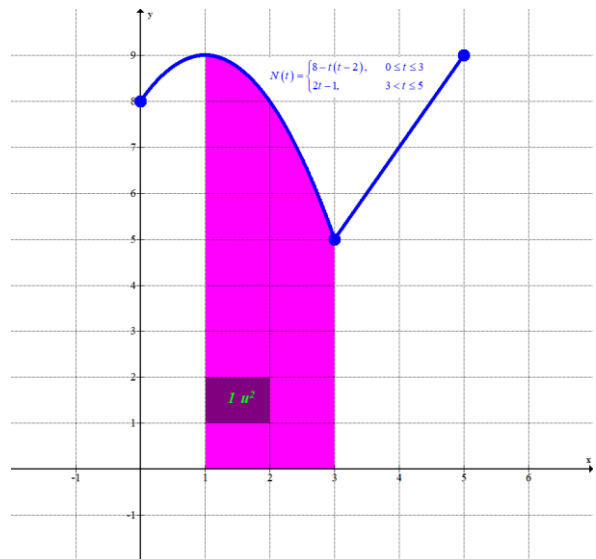
x	$y = 2x - 1$
4	7
5	9



- c) Observando la gráfica y la tabla de valores obtenida podemos decir que el máximo de ventas se produce en el primer mes y en el quinto mes con unas ventas de 9000 revistas.
El mínimo de ventas se produce en el tercer mes con unas ventas de 5000 revistas.
- d) El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 1$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX la obtenemos como la integral definida entre 1 y 3 de la función.
En el intervalo $(1,3)$ la función tiene la expresión $N(t) = -t^2 + 2t + 8$.

$$\text{Área} = \int_1^3 -t^2 + 2t + 8 dt = \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 + 8t \right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 8 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 1^2 + 8 \cdot 1 \right] =$$

$$= -9 + 9 + 24 - \frac{1}{3} - 1 - 8 = \boxed{\frac{44}{3} \approx 14.66 u^2}$$



PREGUNTA 3: (3 puntos)**OPCIÓN B:**

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) Determine el valor de a para que esta función sea continua. (0,5 puntos)
 b) Supongamos que $a = 9$. Determine los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $(-9/2, -3/2)$. (1,25 puntos)
 c) Supongamos que $a = 0$. Calcule el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. (1,25 puntos)

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1)^2 + 3 = (-1-1)^2 + 3 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x^3 + ax^2 + 24x = a - 25 \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 25 = 7 \Rightarrow \boxed{a = 32}$$

Para que la función sea continua debe ser $a = 32$.

b) Si $a = 9$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-9/2, -3/2)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

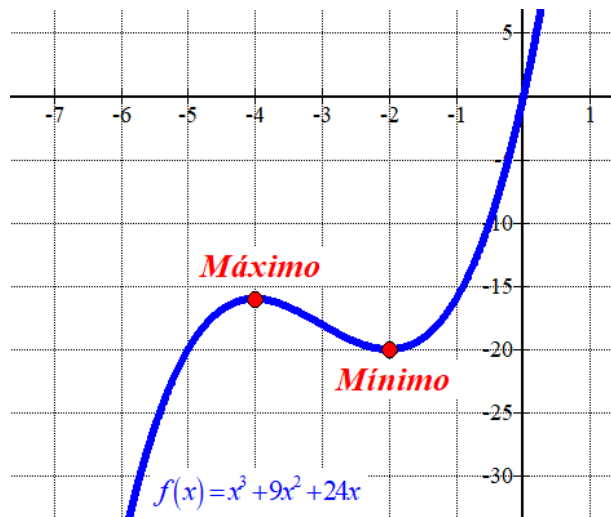
$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 18x + 24 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-6+2}{2} = -2 \in (-9/2, -3/2) \\ \frac{-6-2}{2} = -4 \in (-9/2, -3/2) \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos en el intervalo. Sustituimos estos valores en la segunda derivada y averiguamos si son máximos o mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24 \Rightarrow f''(x) = 6x + 18 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2) = 6(-2) + 18 = 6 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(-4) = 6(-4) + 18 = -6 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

La función en el intervalo $(-9/2, -3/2)$ presenta un mínimo local para $x = -2$ y un máximo local para $x = -4$.



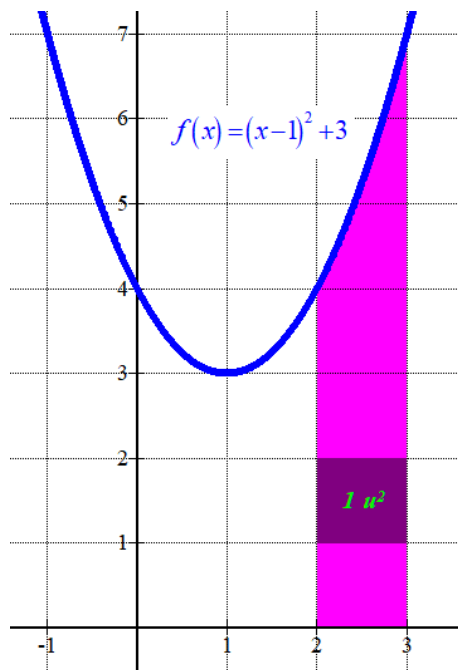
c) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

La función en el intervalo $(2,3)$ tiene la expresión $f(x) = (x-1)^2 + 3$. Esta función es positiva en el intervalo.

El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX es el valor de la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$\text{Área} = \int_2^3 (x-1)^2 + 3 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x \right]_2^3 =$$

$$= \left[\frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2 \right] = \frac{8}{3} + 9 - \frac{1}{3} - 6 = \frac{16}{3} \approx 5.33 u^2$$



PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN A:**

Para dos matrices A y B se verifica que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices A y B. (1 punto)

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor. (1 punto)

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones matricial

$$\left. \begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

$$\left. \begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} &= B \\ 2A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2A + A - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Las matrices buscadas son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$.

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow A \cdot X - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} B$$

Hallamos la inversa de la matriz $A - I$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$X = (A - I)^{-1} B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 - 4 & 0 - 1 \\ 1 + 4 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

PREGUNTA 4: (2 puntos)**OPCIÓN B:**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a + 2)y = 2 \\ 2x - (a + 3)y + (a + 2)z = -5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a . (1,5 puntos)

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$. (0,5 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a + 2 & 0 \\ 2 & -a - 3 & a + 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$\text{es } A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a + 2 & 0 & 2 \\ 2 & -a - 3 & a + 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a + 2 & 0 \\ 2 & -a - 3 & a + 2 \end{vmatrix} = \{ \text{Columna } 2^a = \text{Columna } 2^a + \text{Columna } 1^a \} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & -a - 1 & a + 2 \end{vmatrix} = 2(a + 2) + a(-a - 1) - 4 = 2a + 4 - a^2 - a - 4 = -a^2 + a$$

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + a = 0 \Rightarrow -a(a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente más sencilla.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -3 \quad 2 \quad -5 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -6 \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1}^{A/B} \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -4}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente más sencilla.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \\ 0 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1}^{A/B} \\ 0 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $a = 0$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Lo resolvemos para $a = 1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 3). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z = -3 + 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y - 3 + 2y = -1 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = 1$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.