



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Una tienda online tenía a la venta tres tipos de productos, que llamaremos A, B y C. Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €. En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta. Dos semanas después, empezaron las segundas rebajas y la tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información del problema.

[0,75 puntos]

b) Calcule el precio de cada artículo antes de las vacaciones de Navidad.

[1,75 puntos]

Ejercicio 2

Una empresa fabrica bicicletas convencionales y eléctricas. El responsable de calidad de la empresa ha mirado el historial de ventas y ha calculado que el 5% de las bicicletas convencionales habían tenido algún tipo de problema que había requerido una revisión posventa. En el caso de las bicicletas eléctricas, este porcentaje era del 15%. Actualmente, el 25% de la producción es de bicicletas convencionales y el 75%, de bicicletas eléctricas.

a) Si escogemos una bicicleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún tipo de problema que requiera una revisión posventa? Si la bicicleta escogida al azar presenta algún tipo de problema que requiera una revisión posventa, ¿cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?

[1,25 puntos]

- b) El responsable de calidad cree que el dato según el cual un 15% de bicicletas eléctricas tienen algún problema que requiere el servicio posventa ha quedado desfasada. Considera que actualmente tanto la tecnología como los controles de calidad previos han mejorado mucho y esta proporción ha disminuido. Para comprobarlo, toma una muestra de 100 bicicletas eléctricas que ha vendido en los últimos meses y observa que sólo 8 han requerido una revisión postventa. A partir de estos datos, encuentra un intervalo de confianza del 95% para la proporción de bicicletas eléctricas que tienen algún problema y requieren una revisión postventa. A partir del resultado obtenido, ¿podemos afirmar que esta proporción ha disminuido?

[1,25 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
 - para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
 - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 - para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Ejercicio 3

Un estudio establece que el número de microorganismos vivos en una muestra de laboratorio, medido en decenas, viene dado por la función

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k,$$

donde x representa las horas transcurridas desde el inicio del estudio.

- a) Determine el valor de k si sabemos que al inicio del estudio había 50 microorganismos. ¿Cuál es el valor máximo de microorganismos a los que se llegará? ¿En qué instante se alcanzará el máximo?

[1,75 puntos]

- b) ¿En qué valor se estabilizará el número de microorganismos a largo término?

[0.75 puntos]

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.
2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.

3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

- a) La empresa necesita 300 litros de aceite, 700 kg de harina y 25 kg de sal. Escriba esta información junto con los precios por producto de cada proveedor en forma matricial (dejando bien claro lo que representan las filas y las columnas) y calcule mediante un producto de matrices el coste total del pedido por cada proveedor. ¿Cuál de los tres proveedores es el más económico?

[1.25 puntos]

- b) Cada paquete de pasta tiene un coste total de producción de 0,5€. Si la empresa lo vende por 1,1€, se venden 1.000 paquetes diarios de pasta. También han comprobado que la relación entre el precio de venta y el número de paquetes vendidos es lineal, por lo que por cada 0,01 € que sube el precio de venta del paquete disminuye en 10 el número de paquetes vendidos. Llamaremos x al número de veces que subimos 0,01 € al precio de venta del paquete. Encuentre la función que describe el beneficio diario en función de x y calcule el valor de venta del paquete que hace que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

[1.25 puntos]

OPCIÓN B

- a) La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€. Ha comprado el triple de harina que de sal. Además, la cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite. ¿Qué cantidad de cada producto ha comprado?

[1.25 puntos]

- b) En el control de calidad, se ha tomado una muestra al azar del peso en gramos de 9 paquetes de pasta y se han obtenido los siguientes valores:

501, 506, 497, 495, 503, 491, 512, 505, 499.

Construya un intervalo de confianza del 95% para la media del peso del paquete de pasta, suponiendo que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 g. A partir de estos datos, razone brevemente si podemos afirmar que la etiqueta que dice que los paquetes son de 500 g es incorrecta.

[1.25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Una tienda online tenía a la venta tres tipos de productos, que llamaremos A, B y C. Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €. En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta. Dos semanas después, empezaron las segundas rebajas y la tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información del problema.

[0,75 puntos]

b) Calcule el precio de cada artículo antes de las vacaciones de Navidad.

[1,75 puntos]

a) Llamamos “x” al precio de un producto A antes de Navidad, “y” al precio de un producto B y “z” al precio de un producto C.

“Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €” → $x + y + z = 135$.

“En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta” → $1 \cdot 0.04x + 2 \cdot 0.06y + 3 \cdot 0.05z = 16$.

“La tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad” → $3 \cdot 0.08x + 1 \cdot 0.10y + 5 \cdot 0.06z = 29$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 0.04x + 2 \cdot 0.06y + 3 \cdot 0.05z = 16 \\ 3 \cdot 0.08x + 0.10y + 5 \cdot 0.06z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 0.04x + 0.12y + 0.15z = 16 \\ 0.24x + 0.10y + 0.30z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ \Rightarrow 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 24x + 10y + 30z = 2900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ \Rightarrow 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 4 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 4x + 12y + 15z = 1600 \\ -4x - 4y - 4z = -540 \\ \hline 8y + 11z = 1060 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 12 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \\ -12x - 12y - 12z = -1620 \\ \hline -7y + 3z = -170 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ -7y + 3z = -170 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot \text{Ecuación } 3^a + 7 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ -56y + 24z = -1360 \\ 56y + 77z = 7420 \\ \hline 101z = 6060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ 101z = 6060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ \boxed{z = \frac{6060}{101} = 60} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 60 = 135 \\ 8y + 11 \cdot 60 = 1060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 75 \\ 8y = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 75 \\ \boxed{y = \frac{400}{8} = 50} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 50 = 75 \Rightarrow \boxed{x = 25}
 \end{aligned}$$

Antes de las vacaciones de Navidad un producto A costaba 25 €, uno del tipo B costaba 50 € y uno del tipo C costaba 60 €.

Ejercicio 2

Una empresa fabrica bicicletas convencionales y eléctricas. El responsable de calidad de la empresa ha mirado el historial de ventas y ha calculado que el 5% de las bicicletas convencionales habían tenido algún tipo de problema que había requerido una revisión postventa. En el caso de las bicicletas eléctricas, este porcentaje era del 15%. Actualmente, el 25% de la producción es de bicicletas convencionales y el 75%, de bicicletas eléctricas.

a) Si escogemos una bicicleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún tipo de problema que requiera una revisión postventa? Si la bicicleta escogida al azar presenta algún tipo de problema que requiera una revisión postventa, ¿cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?

[1,25 puntos]

b) El responsable de calidad cree que el dato según el cual un 15% de bicicletas eléctricas tienen algún problema que requiere el servicio posventa ha quedado desfasado. Considera que actualmente tanto la tecnología como los controles de calidad previos han mejorado mucho y esta proporción ha disminuido. Para comprobarlo, toma una muestra de 100 bicicletas eléctricas que ha vendido en los últimos meses y observa que sólo 8 han requerido una revisión postventa. A partir de estos datos, encuentra un intervalo de confianza del 95% para la proporción de bicicletas eléctricas que tienen algún problema y requieren una revisión postventa. A partir del resultado obtenido, ¿podemos afirmar que esta proporción ha disminuido?

[1,25 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

• $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

• Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

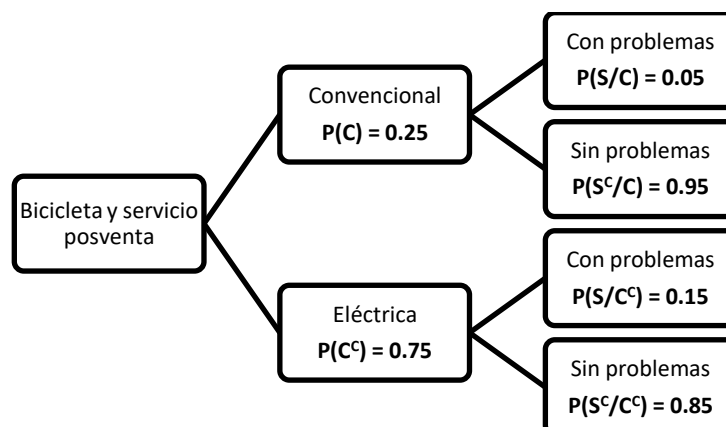
- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

a) Llamamos S al suceso “la bicicleta tiene algún tipo de problema que requiere del servicio postventa” y C a “la bicicleta es convencional”. Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden que calculemos $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(C)P(S/C) + P(C^c)P(S/C^c) = 0.25 \cdot 0.05 + 0.75 \cdot 0.15 = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

La probabilidad de que una bicicleta elegida al azar presente problemas vale 0.125 (una de cada 8 bicicletas).

También nos piden calcular $P(C^c/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C^c/S) = \frac{P(C^c \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C^c)P(S/C^c)}{P(S)} = \frac{0.75 \cdot 0.15}{0.125} = \boxed{\frac{9}{10} = 0.9}$$

La probabilidad de que una bicicleta que presenta problemas sea eléctrica es de 0.9 (9 de cada 10 veces).

- b) El tamaño de la muestra es $n=100$. La proporción de bicicletas que han requerido revisión del servicio postventa es de $\frac{8}{100} = 0.08$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$, por lo que $z_\gamma = 1.96$.

Para obtener el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$.

$$z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.08 \cdot 0.92}{100}} \approx 0.0532$$

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = [0.08 - 0.0532, 0.08 + 0.0532] = [0.0268, 0.1332]$$

El intervalo de confianza solicitado es $[0.0268, 0.1332]$. Por tanto, con una confianza del 95% sí podemos afirmar que el porcentaje ha mejorado respecto al histórico del 15%. Sabemos que actualmente el porcentaje de bicicletas eléctricas que requieren del servicio postventa está entre el 2.68% y el 13.32% con una confianza del 95%.

Ejercicio 3

Un estudio establece que el número de microorganismos vivos en una muestra de laboratorio, medido en decenas, viene dado por la función

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k,$$

donde x representa las horas transcurridas desde el inicio del estudio.

a) Determine el valor de k si sabemos que al inicio del estudio había 50 microorganismos. ¿Cuál es el valor máximo de microorganismos a los que se llegará? ¿En qué instante se alcanzará el máximo? [1,75 puntos]

b) ¿En qué valor se estabilizará el número de microorganismos a largo término? [0.75 puntos]

a) Sabemos que $f(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = \frac{15 \cdot 0}{9+0^2} + k \Rightarrow \boxed{k=5}$$

El valor necesario para que se cumpla lo pedido es $k = 5$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{15(9+x^2) - 2x \cdot 15x}{(9+x^2)^2} = \frac{135+15x^2-30x^2}{(9+x^2)^2} = \frac{135-15x^2}{(9+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{135-15x^2}{(9+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 135-15x^2 = 0 \Rightarrow 9-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = 3}$$

Solo consideramos el valor positivo $x = 3$ como punto crítico ya que el dominio de la función es $[0, +\infty)$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{135-15 \cdot 1^2}{(9+1^2)^2} = \frac{120}{100} > 0$.

La función crece antes de las 3 horas.

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = \frac{135-15 \cdot 4^2}{(9+4^2)^2} = \frac{-21}{125} < 0. \text{ La función decrece a partir de las 3 horas.}$$

Como la función crece antes y decrece después de las 3 horas podemos afirmar que el máximo número de microorganismos se produce a las 3 horas.

Como $f(3) = \frac{15 \cdot 3}{9+3^2} + 5 = 7.5$, el número máximo de microorganismos es de 75.

b) Para responder a la pregunta planteada calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x}{9+x^2} + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{x}}{\frac{9}{x^2} + 1} + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{x}}{\frac{9}{x^2} + 1} + 5 = \frac{0}{0+1} + 5 = \boxed{5}$$

La población tiende a estabilizarse en 50 microorganismos.

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.
2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.
3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

OPCIÓN A

- a) La empresa necesita 300 litros de aceite, 700 kg de harina y 25 kg de sal. Escriba esta información junto con los precios por producto de cada proveedor en forma matricial (dejando bien claro lo que representan las filas y las columnas) y calcula mediante un producto de matrices el coste total del pedido por cada proveedor. ¿Cuál de los tres proveedores es el más económico?

[1.25 puntos]

- b) Cada paquete de pasta tiene un coste total de producción de 0,5€. Si la empresa lo vende por 1,1€, se venden 1.000 paquetes diarios de pasta. También han comprobado que la relación entre el precio de venta y el número de paquetes vendidos es lineal, por lo que por cada 0,01 € que sube el precio de venta del paquete disminuye en 10 el número de paquetes vendidos. Llamaremos x al número de veces que subimos 0,01 € al precio de venta del paquete. Encuentre la función que describe el beneficio diario en función de x y calcula el valor de venta del paquete que hace que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

[1.25 puntos]

- a) Colocamos en una matriz 3×3 los precios de cada producto en cada proveedor.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Aceite} & \text{Harina} & \text{Sal} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 A = \begin{pmatrix} 3 & 0.6 & 1 \\ 3.5 & 1 & 0.7 \\ 2.5 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{Proveedor 1} \\ \rightarrow \text{Proveedor 2} \\ \rightarrow \text{Proveedor 3} \end{array}
 \end{array}$$

Colocamos en una matriz 3×1 las cantidades a comprar de cada producto.

$$B = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Litros de aceite} \\ \rightarrow \text{Kgs de harina} \\ \rightarrow \text{Kgs de sal} \end{array}$$

Obtenemos el coste de la compra en cada proveedor realizando el producto matricial $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0.6 & 1 \\ 3.5 & 1 & 0.7 \\ 2.5 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 + 420 + 25 \\ 1050 + 700 + 17.5 \\ 750 + 560 + 22.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1345 \\ 1767.5 \\ 1332.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Proveedor 1} \\ \text{Proveedor 2} \\ \text{Proveedor 3} \end{matrix}$$

Con el proveedor 1 el pedido nos cuesta 1345 €, con el proveedor 2 nos cuesta 1767.5 € y con el proveedor 3 solo 1332.5.

Con el tercer proveedor el pedido es más económico.

b) Con un precio de 1.1 € por paquete se venden 1000 paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 = 1.11$ € por paquete se venden $1000 - 10$ paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 \cdot 2 = 1.12$ € por paquete se venden $1000 - 10 \cdot 2$ paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 \cdot x$ € por paquete se venden $1000 - 10x$ paquetes.

Los ingresos con x subidas de 0.1 € son $I(x) = (1.1 + 0.01x)(1000 - 10x)$.

Con x subidas de 0.01 € vendemos $1000 - 10x$ paquetes de pasta. Como el coste de cada paquete es de 0.5 € entonces los costes son $C(x) = 0.5(1000 - 10x)$.

El beneficio es la diferencia entre ingresos y costes.

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) = (1.1 + 0.01x)(1000 - 10x) - 0.5(1000 - 10x) = \\ &= 1100 - 11x + 10x - 0.1x^2 - 500 + 5x = -0.1x^2 + 4x + 600 \end{aligned}$$

Averiguamos cuando la función beneficio $B(x) = -0.1x^2 + 4x + 600$ alcanza un máximo.

$$B(x) = -0.1x^2 + 4x + 600 \Rightarrow B'(x) = -0.2x + 4$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0.2x + 4 = 0 \Rightarrow -0.2x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{0.2} = 20$$

Obtenemos el signo de la segunda derivada para el punto crítico obtenido $x = 20$.

$$B'(x) = -0.2x + 4 \Rightarrow B''(x) = -0.2 \Rightarrow B''(20) = -0.2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficio tiene un máximo para $x = 20$.

Para estas 20 subidas de precio nos queda el precio del paquete a $1.1 + 20 \cdot 0.01 = 1.3$ €.

Y venderemos $1000 - 10 \cdot 20 = 800$ paquetes de pasta.

El beneficio máximo que se consigue es de $B(20) = -0.1 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 + 600 = 640$ euros.

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.
2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.
3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

OPCIÓN B

- a) La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€. Ha comprado el triple de harina que de sal. Además, la cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite. ¿Qué cantidad de cada producto ha comprado?

[1.25 puntos]

- b) En el control de calidad, se ha tomado una muestra al azar del peso en gramos de 9 paquetes de pasta y se han obtenido los siguientes valores:

501, 506, 497, 495, 503, 491, 512, 505, 499.

Construya un intervalo de confianza del 95% para la media del peso del paquete de pasta, suponiendo que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 g. A partir de estos datos, razone brevemente si podemos afirmar que la etiqueta que dice que los paquetes son de 500 g es incorrecta.

[1.25 puntos]

- a) Llamamos “x” a los litros de aceite comprados, “y” a los kilos de harina y “z” a los kilos de sal.

“La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€” → $3x + 0.6y + z = 1320$.

“Ha comprado el triple de harina que de sal” → $y = 3z$.

“La cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite” → $0.6y = 0.30 \cdot 3x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 0.6y + z = 1320 \\ y = 3z \\ 0.6y = 0.30 \cdot 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 0.6 \cdot 3z + z = 1320 \\ 0.6 \cdot 3z = 0.9x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 1.8z + z = 1320 \\ 1.8z = 0.9x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2.8z = 1320 \\ \Rightarrow \frac{1.8}{0.9} z = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2.8z = 1320 \\ 2z = x \end{array} \right\} \Rightarrow 6z + 2.8z = 1320 \Rightarrow 8.8z = 1320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1320}{8.8} = 150} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \cdot 150 = 300 \\ y = 3 \cdot 150 = 450 \end{array}}$$

Han comprado 300 litros de aceite, 450 kilos de harina y 150 kilos de sal.

b) El tamaño muestral es $n = 9$.

La media muestral es $\frac{501+506+497+495+503+491+512+505+499}{9} = 501$ gramos.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$, por lo que $z_\gamma = 1.96$.

Para obtener el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

$$z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{9}} \approx 2.613$$

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [501 - 2.613, 501 + 2.613] = [498.387, 503.613]$$

El intervalo de confianza solicitado es $[498.387, 503.613]$. Por tanto, con una confianza del 95% no podemos afirmar que los paquetes de pasta estén mal etiquetados pues el valor de 500 gramos pertenece al intervalo de confianza obtenido.