

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	F
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas. CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos. DURACIÓN: 90 minutos.		

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

- 1.a)** (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?
- 1.b)** (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x - a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$.

2.1.b) (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$? Para $a = 1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2.1.c) (0,5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$.

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.

2.2.b) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x = 0$? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Pregunta 3.1

3.1.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97 %.

3.1.b) (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95 % no sea mayor de 1 centímetro?

Pregunta 3.2

3.2.a) (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ , este resulta (168,825 ; 171,175) a un nivel de confianza del 90 %. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

3.2.b) (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

Pregunta 4.1

De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

4.1.a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?

4.1.b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.

4.1.c) (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

Pregunta 4.2

Los clientes potenciales de un comercio local, *Mitienda*, vienen de alguno de los municipios $M1$, $M2$ o $M3$. En $M1$ el 20 % de la población compra en *Mitienda*, siendo estos porcentajes del 10 % en $M2$ y del 8 % en $M3$. Además se sabe que el 50 % de la población vive en $M1$, el 30 % en $M2$ y el 20 % en $M3$.

4.2.a) (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en *Mitienda*.

4.2.b) (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en *Mitienda*. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios $M2$ o $M3$.

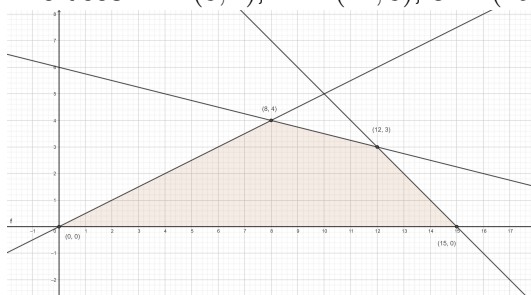
SOLUCIONES

EJERCICIO 1

1.a) Sea x el número de sillas fabricadas e y el número de mesas fabricadas. Entonces:

$$S = \{x + 4y \leq 24, x - 2y \geq 0, x + y \leq 15, x \geq 0, y \geq 0\},$$

con vértices $A = (8, 4)$, $B = (12, 3)$, $C = (15, 0)$ y $D = (0, 0)$.



La función beneficio es $B(x, y) = 40x + 100y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $B(8, 4) = 720$
- $B(12, 3) = 780 \rightarrow \text{Máximo}$
- $B(15, 0) = 600$
- $B(0, 0) = 0$

El máximo beneficio se obtiene fabricando 12 sillas y 3 mesas, y se obtiene un beneficio semanal de 780 euros.

1.b) Sea x el número de sillas fabricadas, y el núm. de mesas fabricadas y z el núm. de estanterías fabricadas.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - 4y + 0z = 0 \\ 0x + 5y + z = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; (A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 90 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0, \text{rg}(A) = 2$; como $\text{rg}(A^*) = 3$ el sistema es INCOMPATIBLE.

No es posible fabricar los muebles según los requerimientos exigidos.

EJERCICIO 2

Pregunta 2.1

2.1.a)

$$\int_2^3 \frac{x^2 - x - a}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax \right]_2^3 = \frac{23 - 6a}{12}.$$

$$\frac{23 - 6a}{12} = \frac{5}{12} \Rightarrow a = 3.$$

2.1.b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ para cualquier valor de a , puesto que es una función polinómica. Hacemos $a = 1$. Para encontrar la recta tangente a la curva en $x = 2$, hallamos $f(2) = 1/2$. La recta pasa por el punto $(2, 1/2)$. Además,

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2}; \quad f'(2) = 3/2.$$

La ecuación de la recta tangente es $y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x - 2)$.

$$2.1.c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - a}{10x^3} = 0.$$

Pregunta 2.2

2.2.a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

■ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \text{no tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \text{no tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \infty.$$

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty. \text{ En } x = 1 \text{ tiene una asíntota vertical.}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2.$$

Por lo tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x + 2$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

2.2.b)

Calculamos la derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3.$$

Estudiamos los signos:

- En $(-\infty, 0)$ el numerador y el denominador son negativos. La derivada es positiva y por tanto la función es creciente en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 1)$ el numerador y el denominador son negativos. La derivada es positiva y por tanto la función es creciente en $(0, 1)$.
- En $(1, 3)$ el numerador es negativo y el denominador positivo. La derivada es negativa y por tanto la función es decreciente en $(1, 3)$.
- En $(3, \infty)$ el numerador y el denominador son positivos. La derivada es positiva y por tanto la función es creciente en $(3, \infty)$.

En $x = 0$ la función no alcanza un máximo porque la función crece antes y después del 0.

EJERCICIO 3

Pregunta 3.1

$$3.1.a) z_{\alpha/2} = 2,17. \text{ Error} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \frac{10}{\sqrt{100}} = 2,17.$$

Por lo tanto, el intervalo pedido es $(165 - 2,17; 165 + 2,17) = (162,83; 167,17)$.

$$3.1.b) z_{\alpha/2} = 1,96. \text{ Error} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 1.$$

$\sqrt{n} \geq \frac{1,96 \cdot 10}{1}$. Por tanto $n \geq 19,6^2 = 384,16$. El tamaño de la muestra debe ser de al menos 385 chicas.

Pregunta 3.2

$$3.2.a) z_{\alpha/2} = 1,645. \bar{x} = 170. \text{ Sabemos que } 170 + 1,645 \frac{10}{\sqrt{n}} = 171,175. \text{ Entonces } n = 14^2 = 196.$$

3.2.b) La altura X se distribuye como una $N(168, 10)$. La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(165 \leq X \leq 170) &= P\left(\frac{165 - 168}{10} \leq Z \leq \frac{170 - 168}{10}\right) = P(-3/10 \leq Z \leq 2/10) = \\ &= P(Z \leq 0,2) - [1 - P(Z \leq 0,3)] = 0,5793 - [1 - 0,6179] = 0,1972. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

Pregunta 4.1

Definimos los sucesos A = "le gusta jugar al fútbol". B = "le gusta jugar al voleibol". $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$.

$$4.1.a) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (3/8 + 1/2 - 1/4) = 3/8.$$

$$4.1.b) P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) = 1/8 + 1/4 = 3/8.$$

$$4.1.c) P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1/4}{5/8} = \frac{2}{5}.$$

Pregunta 4.2

Definimos los sucesos M_i = "la persona pertenece al municipio i " y MT = "la persona compra en Mitienda".

4.2.a) La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(MT) &= P(MT | M1) \cdot P(M1) + P(MT | M2) \cdot P(M2) + P(MT | M3) \cdot P(M3) \\ &= 0,20 \cdot 0,5 + 0,10 \cdot 0,3 + 0,08 \cdot 0,2 = 0,1 + 0,03 + 0,016 = 0,146. \end{aligned}$$

4.2.b) Puesto que $M2$ y $M3$ son disjuntos, la probabilidad pedida es:

$$P(M2 | MT) + P(M3 | MT) = \frac{P(MT | M2) \cdot P(M2)}{P(MT)} + \frac{P(MT | M3) \cdot P(M3)}{P(MT)} = \frac{0,10 \cdot 0,3}{0,146} + \frac{0,08 \cdot 0,2}{0,146} = 0,3151.$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (1.a): 1,5 puntos.

- Definición de las variables y expresión correcta de la función objetivo 0,25 puntos.
- Determinación correcta de las restricciones 0,50 puntos.
- Representación correcta de la región factible y cálculo de los vértices.. 0,50 puntos.
- Obtención correcta de la solución contextualizada 0,25 puntos.

Apartado (1.b): 1 punto.

- Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones 0,50 puntos.
- Justificación de la imposibilidad de cumplir las condiciones..... 0,50 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 2.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.1.a): 1 punto.

- Cálculo correcto de la integral 0,50 puntos.
- Cálculo correcto del valor del parámetro a 0,50 puntos.

Apartado (2.1.b): 1 puntos.

- Justificación correcta de la continuidad de la función 0,25 puntos.
- Determinación de la pendiente de la recta tangente 0,25 puntos.
- Expresión de la recta tangente en cualquiera de sus formas 0,50 puntos.

Apartado (2.1.c): 0,5 puntos.

- Cálculo correcto del límite 0,50 puntos.

Pregunta 2.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (2.2.a): 1,25 puntos.

- Cálculo correcto del dominio 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la asíntota vertical 0,25 puntos.
- Justificación correcta de la no existencia de asíntota horizontal 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la asíntota oblicua..... 0,50 puntos.

Apartado (2.2.b): 1,25 puntos.

- Cálculo correcto de la derivada..... 0,50 puntos.
- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento 0,50 puntos.
- Justificación correcta de la no existencia de un máximo en $x = 0$.. 0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 3.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (3.1.a): 1,25 puntos.

- Determinación del valor $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
- Aplicación de la fórmula del error y obtención del mismo 0,75 puntos.
- Determinación correcta del intervalo de confianza 0,25 puntos.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Apartado (3.1.b): 1,25 puntos.

Determinación del valor crítico $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.

Planteamiento con la aplicación de la fórmula del error 0,50 puntos.

Cálculo correcto del tamaño mínimo de la muestra 0,50 puntos.

Pregunta 3.2 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (3.2.a): 1,25 puntos.

Determinación del valor crítico $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.

Determinación correcta del error 0,50 puntos.

Cálculo correcto del tamaño de la muestra 0,50 puntos.

Apartado (3.2.b): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Pregunta 4.1 Puntuación máxima: 2,5 puntos

Apartado (4.1.a): 0,75 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,25 puntos.

Apartado (4.1.b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Apartado (4.1.c): 0,75 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,25 puntos.

Pregunta 4.2 (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Apartado (4.2.a): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

Apartado (4.2.b): 1,25 puntos.

Planteamiento correcto de la probabilidad 0,75 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad 0,50 puntos.

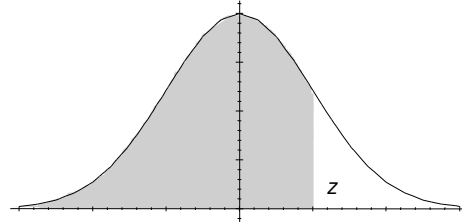
La NO definición de los sucesos se penalizará con 0,25 puntos en la puntuación total de la pregunta.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990