2º de bachillerato Matemáticas II
Bloque 1 de 4 - Álgebra

Este cuaderno es una recopilación de las cuestiones del bloque de álgebra en la materia de Matemáticas II planteadas en las pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de España desde el año 2017 al 2025. Se indican las soluciones obtenidas por el autor Juan Antonio Martínez García. La resolución detallada de cada ejercicio está disponible en la web www.ebaumatematicas.com.

Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo ebaumatematicas@gmail.com

Ejercicios de matrices en pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de ESPAÑA

La resolución de cada ejercicio está publicado en www.ebaumatematicas.com

ANDALUCÍA

1. (Andalucía Extraordinaria 2024) BLOQUE C. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices X que cumplen $XA=-AX^t$ **y** $X^2=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) **[1,25 puntos]** Halla todas las matrices Y que cumplen $YA=AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante –1.

Solución: a) $X_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $X_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. *b)* $Y_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e $Y_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. (Andalucía Ordinaria 2024) BLOQUE C. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1/8 & 1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}.

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA+I=O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución: a) $A^{2024}=\begin{pmatrix}1 & 253 & 253\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. *b)* $X=\begin{pmatrix}-1 & 3/8 & 3/8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

3. (Andalucía Extraordinaria 2023) BLOQUE B. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A-mI$ no tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Halla x, distinto de cero, para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$.

Solución: a) La matriz $A-mI$ no tiene inversa cuando m = 0 o m = 3. b) El valor buscado es $x=2$.

4. (Andalucía Ordinaria 2023) BLOQUE B. EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para que valores de *m* tiene inversa de la matriz A?

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

Solución: a) La matriz A tiene inversa cuando m es distinto de 0. b)

$$X = \frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

5. (Andalucía Extraordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *a* para los que la matriz B no tiene inversa. **(0,5 puntos)**

b) Para *a = 1* calcula X tal que $AXB = C$, si es posible. **(2 puntos)**

Solución: a) La matriz B no tiene inversa cuando a = 0 o a = 2. b) $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6. (Andalucía Extraordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)**

b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

Solución: a) 12 b) 12

7. (Andalucía Ordinaria 2022) BLOQUE B. EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para que valores de *m* tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para *m = 4* resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

Solución: a) La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de m distinto de 0 y 1.

b) $X=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

8. (Andalucía Extraordinaria 2021) BLOQUE B. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2=-A^{-1}$. **(1.25 puntos)**

b) Dadas las matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X+B=AC$. **(1.25 puntos)**

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $X=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

9. (Andalucía Extraordinaria 2020) Ejercicio 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. ¿Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

Solución: a) Los valores de λ *son* $\lambda=1$; $\lambda=-1$; $\lambda=2$. *b) No hay ninguna solución con* $z=1$.

10. (Andalucía Ordinaria 2020) Ejercicio 3.- (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**

b) Para $m=2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Solución: a) El rango es 3 para $m\neq 1$ *y* $m\neq -2,5$. *Para* $m=-2,5$ *o* $m=1$ *el rango es 2.*

b) $(2020A)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3636} & -\frac{1}{3636} & \frac{7}{18180} \\ -\frac{1}{3030} & \frac{1}{6060} & \frac{1}{6060} \\ \frac{1}{9090} & \frac{1}{9090} & -\frac{1}{18180} \end{pmatrix}$

11. (Andalucía Junio 2019) Opción A Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *o* $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

12. (Andalucía Septiembre 2018) A.3. Considera las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) Determina, si existen, los parámetros de a, b y c para los que las matrices A y B conmuten.

b) Calcula A^2, A^3, A^{2017}, A^{2018}.

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

Solución: a) a=0 b=0 y c=-1 b) $A^2=Id$, $A^3=A$, $A^{2017}=A$, $A^{2018}=Id$ c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

13. (Andalucía septiembre 2017) B.3. Considera

$$A=\begin{pmatrix}k & 0 & k\\ k+1 & k & 0\\ 0 & k+1 & k+1\end{pmatrix}.$$

a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k.

b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.

Solución: a) rango de A es 3 si k es distinto de 0, -1 y -1/2. El rango de A es 2 en el resto de valores de k.
b) $\left|2\left(A^tA^{-1}\right)^{2017}\right|=8$

14. (Andalucía junio 2017) B.3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para que la matriz $\boldsymbol{A+\lambda I}$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) [1,5 puntos] Resuelve $\boldsymbol{AX = -3X}$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

Solución: a) $\lambda = 3$; $\lambda = 2$; $\lambda = -3$ b) $z = 0$ $y = t$ $x = 2t$

ARAGÓN

1. (Aragón Extraordinaria 2025)

2.2 Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases}A\cdot B=-B\\ A\cdot C=B-C\end{cases}.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A\cdot D=D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot D=D$.

Solución: a) $B=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0\\0\\g\\c\end{pmatrix}$ b) www.ebaumatematicas.com

2. (Aragón Ordinaria 2025) 1. Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, Mc, con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, por la matriz Mc obtenida en el paso anterior.

El resultado del último paso, M_{final}, es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final}=\begin{pmatrix}30\\-21\\-25\\-16\end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas? donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

Solución: a) $M_{final} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$ *b) Como* $M_{final} = M_E M_C$ *entonces* $(M_E)^{-1} \cdot M_{final} = M_C$. *Después miramos la correspondencia de cada número con la letra según la tabla y obtenemos el mensaje descifrado. c) BIEN d) La matriz de encriptado debe tener inversa (matriz de desencriptado), por lo que su determinante debe ser distinto de cero.*

3. (Aragón Extraordinaria 2024) 5. De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B,$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

Solución: Existe la inversa de B y tiene la expresión $B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$

4. (Aragón Extraordinaria 2024) 6. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \; m \in \mathbb{R}.$$

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para el valor *m = 2.*

Solución: a) Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ *el rango de A es 3. Si* $m = 1$ *o m = 2 el rango de A es 2.*

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda; \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

5. (Aragón Ordinaria 2024) 5. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = A^T \cdot B + I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de *A*, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.
(a) (0.8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$.
(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C \cdot X = 5(A^T \cdot B)$.

Solución: a) $C^{2n} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$. *b)* $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. (Aragón Ordinaria 2024) 6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.
(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = 0$ cuando $m = 6$.

Solución: a) Si $m \neq -2$ *el rango de A es 2. Si* $m = -2$ *el rango de A es 1.*

b) $x = \frac{3}{2}\lambda;\ y = \lambda;\ z = 0;$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

7. (Aragón Extraordinaria 2023) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

Solución: a) Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ *y* $m \neq 0$ *el rango de A es 3. Si* $m = \pm\sqrt{2}$ *o m = 0 el rango de A es 2.*

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

8. (Aragón Extraordinaria 2023) 6)

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}$$

Solución: 9

9. (Aragón Ordinaria 2023) 5) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = A \cdot B^T - 2I$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.
a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.
b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX = A^T \cdot B$, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

Solución: a) $D^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ 0 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -8/3 & 2/3\end{pmatrix}$

10. (Aragón Ordinaria 2023) 7) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $\left(A+2I\right)X=B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución: a) $A^n=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{n-1}}{2^n} & \frac{(-3)^{n-1}}{2^{n-1}}\\ \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} & \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-2}}\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 15/2\end{pmatrix}$

11. (Aragón Extraordinaria 2022) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & k+1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k\in\mathbb{R}$ para que se verifique $A^2=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k=0$, la matriz B^n con $B=2A-I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n\in\mathbb{N}$.

Solución: a) $k = -2$ b) $B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2\cdot n & 1\end{pmatrix}$

12. (Aragón Extraordinaria 2022) 6) Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1-m & -1\\ 2 & 2m\\ m-1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudia, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz $P=AB^T+C$, donde B^T es la matriz traspuesta de B.

b) (1 punto) Para el valor $m = 1$, calcula la inversa de la matriz P del apartado anterior.

Solución: a) Si $m\neq 0$ y $m\neq 2$ el rango de P es 3. Si $m=0$ o $m=2$ el rango de P es 2.

b) $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & -3/2\\ -1 & 1/2 & -1/2\\ 1 & -1/2 & 3/2\end{pmatrix}$

13. (Aragón Ordinaria 2022) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX-2I=A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A-mB$, según los valores de $m\in\mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-2&-2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$ *b)* El rango de $A-mB$ es 3 si $m\neq\pm1$ y es 2 si $m=1$ o $m=-1$.

14. (Aragón Ordinaria 2022) 6) Dada la siguiente matriz:
a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\a&b&c\end{vmatrix}=-2$, calcula justificadamente $\begin{vmatrix}-a+2&-c+2&-b+2\\x/2&z/2&y/2\\3&3&3\end{vmatrix}$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&1&-1\\5&3&-1\end{pmatrix}.$$

Solución: a) 3 b) $B^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&-2\\-5&-3&3\\-5&1&3\end{pmatrix}$

15. (Aragón Extraordinaria 2021) 5) Dada la siguiente matriz:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-k&-2k\\1&-k&0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A=I+P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k\in\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Para $k=1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Solución: a) Si $k\neq-1$ y $k\neq-\frac{1}{2}$ el rango de A es 3. Si $k=-1$ o $k=-\frac{1}{2}$ el rango de A es 2.

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/2&0&-1/2\\1/6&-1/3&1/6\end{pmatrix}$

16. (Aragón Extraordinaria 2021) 6) Dadas las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución: a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

17. (Aragón Ordinaria 2021) 5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k = 0$.

Solución: a) Para $k \neq 1$ *y* $k \neq 2$ *el rango es 3; para* $k = 1$ *el rango es 2 y para* $k = 2$ *el rango es 1*

b) $(A-kI)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. (Aragón Ordinaria 2021) 6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$ calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución: a) –10 b) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

19. (Aragón Ordinaria 2021) 7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ -\left(2^n-1\right) & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$

20. (Aragón Extraordinaria 2020) 3) Resuelva la ecuación matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

21. (Aragón Ordinaria 2020) 2).

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

Solución: a) $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ *b)* $C^{16}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

22. (Aragón Septiembre 2019) Opción B 1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & m & 1\\ 0 & -2 & m\end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m=-1$.

Solución: a) Si $m\neq 1$ *y* $m\neq 2$ *el rango de A es 3, si* $m=1$ *o* $m=2$ *el rango de A es 2.*

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/6 & 1/6\\ 1/2 & -1/6 & -1/6\\ -1 & 1/3 & -2/3\end{pmatrix}$

23. (Aragón Junio 2019) Opción A 1.

a) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k. (*2 puntos*)

$$A=\begin{pmatrix}k & 0 & k\\ 0 & k+2 & 0\\ 1 & 1 & k+2\end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k=1$.

Solución: a) Si $k\neq 0$; $k\neq -2$ *y* $k\neq -1$ *el rango es 3. En el resto de casos el rango es 2.*

b) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}9 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 3\end{pmatrix}$

24. (Aragón Junio 2019) Opción B. 1. b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución: –8

25. (Aragón Septiembre 2018) A.1.b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

Solución: 24

26. (Aragón Septiembre 2018) B.1 *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

encuentre la matriz X, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX + B = A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b) El rango de C es 3 si* $k \neq 0$ *y* $k \neq 6$ *y el rango es 2 si* $k = 0$ *o* $k = 6$.

27. (Aragón Junio 2018) A.1.c. Considere las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto CD.

Solución El rango es 1

28. (Aragón Junio 2018) B.1. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro K para los que la matriz A-kI tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
b) Encuentre la matriz X que verifica que: $\left(A-3I\right)X=2I$

Solución: a) para k distinto de 0, 2 y 4 b) $X=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-2/3&0\\2&0&0\end{pmatrix}$

29. (Aragón Septiembre 2017) Opción B. 1. Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&k&3k+2\\1&0&-k\end{pmatrix}$$

a) Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
b) Si k = 2, calcule la inversa de A, si existe.
c) Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

Solución a) Existe la inversa para todo valor de k distinto de -4 y 0 b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0&2/3\\-2/3&1/2&2/3\\1/6&0&-1/6\end{pmatrix}$

c) rango de A es 3 para todo valor de k distinto de -4 y 0. Rango de A es 2 para k=0 y k=-4

30. (Aragón Junio 2017) Opción B. 1. *(3 puntos)*
a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por |A| el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si $|B|=1$, calcule el determinante de A, es decir: |A|.

a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix}x&1&1\\x-1&2&0\\2&x-1&2\end{pmatrix}$$

Determine los valores de *x* para los que se cumple que |B| = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma

$$M=\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}$$

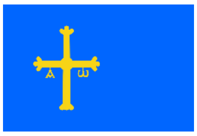
que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

donde M´ representa la matriz traspuesta de M.

Solución a.1) 8. a.2) Para x igual a 3 o a –3. b) $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

ASTURIAS



1. (Asturias Extraordinaria 2025) Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $det(M)=x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

(a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2=(x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x\in\mathbb{R}$.

(b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de *x* para el que pueda ser

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & x\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3 × 3, que $x\neq 0$ y que $M=xM^2$. Calcule los posibles valores de *x* y $det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Solución: a) $x=\frac{1}{2}$ *b) No existe ningún valor x para el que la matriz A cumpla que* $det(M)=x$.

c) Para $x=-1$ *tenemos que* $\det(M^{-1})=-1$. *Para* $x=1$ *tenemos que* $\det(M^{-1})=1$.

2. (Asturias Ordinaria 2025) Pregunta 1. Opción B Sea $x\in\mathbb{R}$ y las matrices $A=\begin{pmatrix}x & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & x\end{pmatrix}$

(a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) **(1 punto)** Para $x=0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1}.

(c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de *x* para los cuales det(AB) = det(A).

Solución: a) La matriz B tiene inversa para cualquier valor de x. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *c) Se cumple la igualdad para cualquier valor de x.*

3. (Asturias Extraordinaria 2024) Pregunta 2.

Sea $x\in\mathbb{R}$ y las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de *x* el rango de A. Para *x = 0*, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución: a) CAB no es posible. BAC si es posible y tendrá dimensión 1x1.

b) Si $x \neq -6$ *el rango de A es 3 y si* $x = -6$ *el rango de A es 2.* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

4. (Asturias Ordinaria 2024) Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de *x*. Para *x = 1*, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma *x = 1*. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Solución: a) Si $x \neq 2$ *el rango de A es 3 y si x = 2 el rango de A es 2.* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\det(AB) = 5$, $\det\left(\frac{1}{5}AB\right) = \frac{1}{25}$

5. (Asturias Extraordinaria 2023) Pregunta 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que PM = M^2.

Solución: a) Si $a \neq 2$ *el rango de P es 3 y si a = 2 el rango de P es 2. b)* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) El determinante de la matriz M vale 0 o –2.

6. (Asturias Ordinaria 2023) Pregunta 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B+I) = 2I$. (*I* es la matriz identidad 2×2)

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ *b)* $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

7. (Asturias Ordinaria 2023) Pregunta 2. Se consideran las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.

(b) **(0.5 puntos)** Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.

(c) **(1.25 puntos)** Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución: a) La matriz M debe ser de dimensiones 2×2 *b) No es posible.*

c) $(B \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

8. (Asturias Extraordinaria 2022) Bloque 1.A.

Dado $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el rango de A según los valores de x.

(c) **(0.75 puntos)** Para x = 1, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B$ y $A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Solución: a) x = 1 b) Si x ≠ 1 el rango de A es 3 y si x = 1 el rango de A es 2. c) A · B es posible pues coinciden el número de columnas de A con el número de filas de B. A · C no es posible pues no coinciden el número de columnas de A con el número de filas de C

9. (Asturias Ordinaria 2022) Bloque 1.A.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que det(P) = det(P^{-1}).

Solución: a) Si a = 2 el determinante de P es 0 y su rango es 2. Si a ≠ 2 el determinante de P es no nulo ($|P| = -a + 2$ *) y su rango es 3. b) Existe y vale* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *c) Para a = 1 o a = 3.*

10. (Asturias Extraordinaria 2021) Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa. (1 punto)
b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
$\left(X+A\right)^2 - X^2 - X\cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ -2 & 0 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

11. (Asturias Ordinaria 2021) Bloque 1.B. Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix},\quad a\in\mathbb{R}\ \ y\ \ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

a) Escribe el sistema de ecuaciones AX = X en la forma BX = 0. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de *a* el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para *a = 0* calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

Solución: a) $\left.\begin{array}{r}(a-1)x \qquad\qquad -z=0\\ -x\ \ -y \qquad\qquad =0\\ y+(a-1)z=0\end{array}\right\}$ *b) Cuando a = 2 o a = 0. c)* $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

12. (Asturias Extraordinaria 2020) Bloque 1.B Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}x+1 & x+1 & x-2\\ x & x & 2-x\\ x & x-1 & x\end{pmatrix}\quad x\in\mathbb{R}$$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)
b) Para $x=1$, calcula su inversa (1 punto)

Solución a) $|A|=-2x^2+3x+2$. Es invertible cuando $x\neq 2\ y\ x\neq -\dfrac{1}{2}$. *b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}$

13. (Asturias Ordinaria 2020) Bloque 1.B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}m & 1 & 3\\ 1 & m & 2\\ 1 & m & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de *A* según los valores de $m\in\mathbb{R}$. (1 punto)
b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$? (0.5 puntos)
c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$. (1 punto)

Solución: a) El rango de la matriz A es 3 si $m\neq\pm 1$ *y vale 2 si* $m=-1$ *o* $m=1$. *b) La matriz X debe ser de dimensión 3 x 2. c)* $X=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 8 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

14. (Asturias Julio 2019) Opción B 1. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \quad x\in\mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3-I=O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para x = 0 y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

Solución: a) x=0 *b)* $A^{12}=I$ *c)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. (Asturias Junio 2019) Opción B 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A\cdot A,\quad A\cdot B,\quad A\cdot B\cdot C,\quad C\cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

Solución: a) A·A si, es 3x3. A·B si, es 3x2. A·B no. C·D si, es 3x3

b) $(A\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, C·D no tiene inversa (determinante nulo), A·B no es cuadrada.*

16. (Asturias Julio 2018) Opción B 1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Su rango. (1.5 puntos)

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

Solución: a) El rango es 3. b) La segunda columna es el triple de la tercera. c) No existe combinación lineal de las filas pues el rango es 3.

17. (Asturias Junio 2018) Opción A. 1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde *m* es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de *m*. (1.5 puntos)

b) Para *m = –1*, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

Solución: a) Si m ≠ –1 y m ≠ 2 el rango es 3. Si m = –1 el rango es 2. Si m = 2 el rango es 1.

b) x = y = z = α siendo $\alpha \in \mathbb{R}$

18. (Asturias Julio 2017) Opción B. 1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

Solución: a) Para los valores de x distintos de 1 y 3. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$ *c)* $b=-\frac{1}{2}$

19. (Asturias Junio 2017) Opción B. 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz B · A tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
b) Estudia, en función de los valores reales de k, si la matriz A · B posee inversa. (1 punto)

Solución: a) Tiene inversa para cualquier valor de k. Si k = 1 → $(B\cdot A)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/6\\ -1/2 & 1/6\end{pmatrix}$

b) No posee inversa para ningún valor de k.

BALEARES

1. (Baleares Ordinaria 2025) Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3 × 3.

(a) **[1 punto]** Sabiendo que $AB+I=A$, calcula la inversa de A en función de I y B.

(b) **[1.5 puntos]** Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB+I=A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Solución: (a) $A^{-1}=I-B$ *(b)* $B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. *La matriz B es invertible.*

2. (Baleares Extraordinaria 2024) P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \text{ y }\ M\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

Solución: (a) $M=\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$ *(b) M es invertible. La solución es* $a=\frac{-1}{2}$ *y* $c=1$ *para el primer sistema y* $b=1$ *y* $d=-1$ *es la solución de la segunda.* *(c)* $X=\begin{pmatrix}-7/2&4\\3/2&-2\end{pmatrix}$.

3. (Baleares Extraordinaria 2024) P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

Solución: (a) $B=\begin{pmatrix}3-k & 0 & 0\\ 6 & -k & 0\\ -6 & 3 & 3-k\end{pmatrix}$ *.(b) Si* $k\neq 0$ y $k\neq 3$ *el rango de B es 3, si* $k=0$ *el rango es 2 y si* $k=3$ *el rango de B es 1.(c) Para cualquier valor de k distinto de 0 y de 3.*

4. (Baleares Ordinaria 2024) P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.
(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.
(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad *I*, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.
(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Solución: (a) $A^{-1}=A-3I$ *. (b)* $X=\frac{5}{3}A-\frac{16}{3}I$ *. (c) 1ª solución: a = 0, b = 3 y* $c=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.
2ª solución: a = 0, b = 3 y $c=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ *, 3ª solución: a = 3, b = 0 y* $c=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ *, 4ª solución:* $a=3$*, b = 0 y* $c=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$,

5. (Baleares Extraordinaria 2023) P2.– Sea A una matriz invertible $n\times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2+A=I$. Entonces,
(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?
Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,
(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A
(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A)-I=A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n\times n$ coeficientes reales.

Solución: (a) La matriz M es invertible. Se cumplen las dos condiciones del enunciado.
(b) ¡$A+I$ es la inversa de A! *(c) Se cumple*

6. (Baleares Ordinaria 2023) P1.– Considera la matriz M y el vector b,

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\ \ y\ \ b=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

Respectivamente.
(a) **[3 puntos]** Indica para que valores de *a* la matriz *M* es invertible.

(b) **[3 puntos]** Calcula, para todos los valores de *a* que sea posible, la inversa de M.
(c) **[4 puntos]** Calcula, para el caso *a = 0*, el vector *x* tal que $Mx = b$

Solución: a) $a = \pm\sqrt{2}$ *b) Para* $a \neq \pm\sqrt{2}$ *la inversa es* $M^{-1} = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & 2-a & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. (Baleares Ordinaria 2023) P2.– Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.
(a) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.
(b) **[3 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y = O$
(c) **[3 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = O$

Solución: (a) $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *(b) Una solución no nula del problema puede ser tomando c = 1 y d = 1* → $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(c) La única matriz solución de la ecuación es la matriz nula.*

8. (Baleares Extraordinaria 2022) 1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule el determinante de la matriz A. (1 punto)
(b) En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A. (3 puntos)
(c) Para el valor de $\lambda = 1$, halle la matriz inversa de A, A^{-1}. (3 puntos)
(d) Para el valor de $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA = B$. (3 puntos)

Solución: (a) $|A| = -\lambda^2 + 2\lambda$ *(b) Si* $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda \neq 2$ *el rango de A es 3 y si* $\lambda = 2$ *o* $\lambda = 0$ *el rango de A es 2.* *(c)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(d)* $X = \begin{pmatrix} -22 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

9. (Baleares Ordinaria 2022) 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y λ un parámetro real cualquiera.
(a) Calcule la matriz $A - \lambda I$. (2 puntos)
(b) Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$. (3 puntos)

(c) Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2 = B$ (5 puntos)

Solución: (a) $A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ *(b)* $(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda^2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & \lambda^2-2\lambda+2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$ *(c)* $\lambda = 2$

10. (Baleares Extraordinaria 2021) 1. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula los determinantes: det(A), det(B). (2 puntos)
(b) Calcula la matriz producto B · A, la matriz traspuesta $(B \cdot A)^t$. (3 puntos)
(c) Para que se cumpla la relación A · X = B · A, ¿cuántas filas y columnas ha de tener la matriz X? (2 puntos)
(d) Calcula la matriz X que satisface la relación (3 puntos)

$$A \cdot X = B \cdot A$$

Solución: (a) $|A| = -2, \quad |B| = -17$ *(b)* $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(c) La matriz X debe ser una matriz cuadrada de orden 2. *(d)* $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7/2 & 1 \end{pmatrix} = X$

11. (Baleares Ordinaria 2021) 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de *a*. (6 puntos)
(b) Determina para que valores de *a* la matriz A es invertible. (1 punto)
(c) Para al valor de *a = –1* calcula la solución, X, de la ecuación matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (3 puntos)

Solución: (a) Si $a \neq 0$ *y* $a \neq \pm 1$ *el rango de A es 3, si* $a = 0$ *el rango de A es 2 y si* $a = \pm 1$ *el rango de A es 1. (b) La matriz tiene inversa cuando* $a \neq 0$ *y* $a \neq \pm 1$ *(c)* $X = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}; \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

12. (Baleares Ordinaria 2021) 2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, donde A^t es la matriz transpuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)
(b) Sea *I* la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$ (3 puntos)

(c) Calcula todas las matrices *B* para las cuales se tiene que

$$A\cdot B = B\cdot A^t$$ (4 puntos)

Solución: (a) $A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ *(b)* $X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ *(c)* $B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & 2a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbb{R}$

13. (Baleares Extraordinaria 2020) Opció A 1. Dada la ecuación matricial

$$M\cdot X+N=P\,,$$

donde X es la matriz incógnita y

$$M=\begin{pmatrix}-1 & a\\ a & a\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

(a) Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M? (1 punto)
(b) Calcula la matriz inversa de M. (3 puntos)
(c) Para a = 2, resuelve la ecuación matricial, si es posible. (3 puntos)
(d) Para los valores de a para los cuales existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial. (3 puntos)

Solución: a) Para $a\neq 0$ *y* $a\neq -1$ *la matriz M tiene inversa.*

b) $M^{-1}=\dfrac{1}{a+a^2}\begin{pmatrix}-a & a\\ a & 1\end{pmatrix}$ *siendo* $a\neq 0$ *y* $a\neq -1$. *c)* $X=\begin{pmatrix}-2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$ *d)* $X=\dfrac{2}{1+a}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

14. (Baleares Extraordinaria 2020) Opció B 1. Dadas las matrices A y B,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & x\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 9 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) calcula A · B y $(A\cdot B)^t$, donde la "t" indica matriz traspuesta. (4 puntos)
(b) ¿es posible calcular B^2? Si lo es, calcúlala. (1 punto)
(c) para los diferentes valores de x, calcula el rango de la matriz A. (5 puntos)

Solución: (a) $(AB)^t=\begin{pmatrix}2+x & 12 & 18\\ 7 & 14 & 21\end{pmatrix}$ *(b) No es posible. (c) Cuando x = 4 el rango de A es 1. Cuando* $x\neq 4$ *el rango de A es 2.*

15. (Baleares Julio 2019) OPCIÓ B 1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, d=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z para que se cumpla:

$$A\cdot b-2c=d$$

(10 puntos)

Solución: $x=y=z=1$

16. (Baleares Junio 2019) OPCIÓ B 1. Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & y\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}y\\ 2y\end{pmatrix}, d=\begin{pmatrix}6-2y\\ -2\end{pmatrix}$$

Calcule x e y para qué se verifique:

$$b-A\cdot c=A\cdot d$$ (10 puntos)

Solución: $x=\frac{1}{9}$ e $y=\frac{3}{2}$; $x=\frac{1}{13}$ e $y=-\frac{1}{2}$

17. (Baleares Julio 2018) B.1.
Determina que relaciones han de existir entre a, b, c y d para qué se verifique $AM=MA$, siendo A y M las matrices siguientes: (10 puntos)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Solución: La relación es: c = –b y d = a – b, siendo a y b dos números cualesquiera.

18. (Baleares Junio 2018) B.1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz X que verifica:

$$A\cdot X\cdot B=Id=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (10 puntos)

Solución: $X=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

19. (Baleares septiembre 2016) B.1. Calculau la matriu X tal que: A · X · A = B, on

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ (10 punts)

Solución: $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

20. (Baleares junio 2016) B.1. Sigui A la matriu seguent:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$, on a es un valor real.

Calculau A^2 , A^3 i A^4 (4 punts) i donau una f´ormula general per a l'expressi´o de A^n. (6 punts)

Solución: $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

CANARIAS

1. (Canarias PAU Extraordinaria 2025) 2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} 4X-5Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-9 & -4 & -6\\ 17 & 3 & 13\end{pmatrix} \\ 6X+4Y=\begin{pmatrix}10 & 4 & -10\\ 12 & 10 & 22\end{pmatrix}\end{array}\right\} \qquad 2.5$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. (Canarias PAU Ordinaria 2025) 2A. Dada la matriz $M\in M_{2x2}$, $M=\begin{pmatrix}1 & a-3\\ -1 & 2-a\end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$.

a) Para cualquier valor del parámetro a: comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1}. 1

b) Para $a=-1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA=B-MX$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad 1.5$$

Solución: a) $|M|=-1\neq 0$. $M^{-1}=\begin{pmatrix}a-2 & a-3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. *b)* $X=\begin{pmatrix}1 & -7 & -16\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}$

3. (Canarias PAU Ordinaria 2025) 2B. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & k & 1\\ -4 & 4 & k\end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$.

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k. 1.25

b) Para $k=-1$, comprobar que $A^2=2A-I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4=4A-I$.

Solución: a) Si $k\neq -1.2$ y $k\neq -2$ el rango de A es 3 y si $k=-1.2$ o $k=-2$ el rango de A es 2.

b) www.ebaumatematicas.com.

4. (Canarias EBAU Extraordinaria 2024) 2B. Dada la siguiente matriz:

$$M_k=\begin{pmatrix}k & 0 & k\\ 0 & k & 0\\ 2k-3 & 0 & k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor *k = 1*, y $B=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X\cdot M_1 + X\cdot M_1^T = B$ 1.25 ptos

Solución: Si $k\neq 0$ y $k\neq 3$ *el rango es 3, si* $k=0$ *el rango es 1 y si* $k=3$ *el rango es 2.*

b) $X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

5. (Canarias EBAU Ordinaria 2024) 2A. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M=2I_3+B^t$ tiene inversa. 0.75 ptos

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente: 1.75 ptos

$$2X+C=A-X\cdot B^t$$

Solución: a) M tiene inversa. *b)* $X=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 10 & -3 & -5\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}$

6. (Canarias EBAU Extraordinaria 2023) 2B.

Resolver la ecuación matricial: $AX+B^t=A^2$, siendo:

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 2.5 ptos

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

7. (Canarias EBAU Ordinaria 2023) 2A. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M=2I_3+B^t$ tiene inversa. 0.75 ptos

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente: 1.75 ptos

$$2X+C=A-X\cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Solución: a) Al ser su determinante no nulo la matriz M tiene inversa. b) $X=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 10 & -3 & -5\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}$

8. (Canarias EBAU Extraordinaria 2022) 2A. Resuelve los siguientes apartados:

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, para $k\in\mathbb{R}$ sea C la matriz dada por: 0.75 ptos

$$C=A^t+kB\cdot A$$

Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2

b) Encuentra la matriz X, de dimensión $3x3$, que verifica $M^t\cdot X=I-M$, donde

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ 1.75 ptos

Solución: a) La matriz C tiene rango 2 si k es distinto de 1 y de –1. b) $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

9. (Canarias EBAU Ordinaria 2022) 2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones $3x3$, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad $3x3$)
- Siendo $A=\begin{pmatrix}9 & 0 & -7\\ 14 & -12 & 0\\ 0 & -7 & -5\end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y 2.5 ptos

Solución: $X=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

10. (Canarias Extraordinaria 2021) 2A. Se consideran las matrices:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M=A+c\cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M)=1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D=A^2+B\cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$$D\cdot X=-30\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$ 1.5 ptos

Solución: a) Para $c=-1$ o $c=6$ el rango de M es 1. b) $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-12 & -2 & -2\\ -24 & -14 & -44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 12 & 7 & 22\end{pmatrix}$

11. (Canarias Ordinaria 2021) 2A. Calcular el valor de la matriz $M=X^2-Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases}4X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -3 & -1\end{pmatrix}\\ 2X+Y=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$$ 2.5 ptos

Solución: $M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

12. (Canarias Extraordinaria 2020) Grupo A. 2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X \cdot A - C^t = X \cdot B$

a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X. 0.5 ptos

b. Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 ptos

Solución: a. X es de dimensión 2×3. Tiene 2 filas y 3 columnas. b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. (Canarias Ordinaria 2020) Grupo A. 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro *k* para los que la matriz *A* tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz *A*, calcule la matriz *X* que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 ptos

Solución: a) Existe la inversa de la matriz A cuando k es distinto de 0, 1 y 5. b) $X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

14. (Canarias Julio 2019) Opción B 2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de *m* para los que existe inversa de la matriz *C* (1,25 ptos)

b) Calcular la matriz inversa de *C* en el caso de $m = 2$ (1,25 ptos)

Solución: a) Cualquier valor de m distinto de 1 y –1 b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

15. (Canarias Junio 2019) Opción B 2. Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

a) Calcular el valor de *x* de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0,5 ptos)

b) Calcular el valor de *x* para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1,5 ptos)

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0,5 ptos)

Solución: a) x = 1 b) x = 0 c) x = –1

16. (Canarias Julio 2018) Opción A 2.- Determinar una matriz X que verifique la ecuación

$$AB - CX = I$$

siendo las matrices,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -5\\ -2 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ (2,5 puntos)

Solución: $X=\begin{pmatrix}-1/2 & 15/2\\ 11/2 & -13/2\end{pmatrix}$

17. (Canarias Junio 2018) Opción B. 2.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m+1 & 2\\ m-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa. (1 ptos)
b) Para m = 1, calcular la matriz inversa A^{-1} (1,5 ptos)

Solución: a) Para cualquier valor de m distinto de –1 y de 2. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1/2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

18. (Canarias Julio 2017) Opción B. 3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA=B$ siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

Solución: $X=\begin{pmatrix}9 & 11\\ -6 & -7\end{pmatrix}$

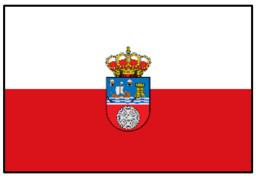
19. (Canarias Junio 2017) Opción A. 3. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $A+B+C^2=3\cdot I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden 2 (1 punto)
b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $AX+C^2=3\cdot I_2$ (1,5 puntos)

Solución: a) x = 2. b) $X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

CANTABRIA



1. (Cantabria Extraordinaria 2025) 1A) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}, \text{ con } a\in\mathbb{R}.$$

a) [0.75 puntos] Estudia el rango de AB, en función de los valores de a.

b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA, en función de los valores de a.

c) [1 punto] Considera $a=1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$.

Solución: a) El rango de AB es 2 para cualquier valor de a. b) Si $a\neq\frac{1}{2}$ y $a\neq -2$ *el rango de BA es 2 y si* $a=-2$ *o* $a=\frac{1}{2}$ *el rango de BA es 1. c)* $X=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

2. (Cantabria Ordinaria 2025) Cuestión 1A. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+3 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}, \text{ con } a\in\mathbb{R}, \text{ y } B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Tarea a. [1 punto]. Halla los valores del parámetro a para los cuales la matriz A tiene inversa.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a=-3$. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A.

Tarea c. [0,5 puntos]. Considera $a=-3$. Halla, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $AX=B$.

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de –4, –1 y 0.

b) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/6 & 1/2 & 1/6\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/6 & 1/2 & -1/6\end{pmatrix}$ *c)* $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

3. (Cantabria Extraordinaria 2024) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Solución: El rango de A es 4 para cualquier valor del parámetro a.

4. (Cantabria Ordinaria 2024) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de *A*.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Solución: 1) –1. 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *3) La matriz X debe tener 3 filas y 2 columnas. 4)* $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$

5. (Cantabria Extraordinaria 2023) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A) [0,5 PUNTOS] Calcule A^t, donde A^t denota la traspuesta de la matriz *A*.
B) [2 PUNTOS] Calcule $(3B-2C)(A^t-I)$, donde *I* es la matriz identidad de dimensión 3×3.

Solución: A) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $(3B-2C)(A^t-I)=\begin{pmatrix} 1 & 11 & 19 \\ -8 & -29 & -8 \end{pmatrix}$

6. (Cantabria Extraordinaria 2023) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.
A) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de *A* para los distintos valores del parámetro $b \in$ R.
B) [0,75 PUNTOS] Determine para que valores de $b \in$ R la matriz *A* tiene inversa.
C) [1 PUNTO] Sea *B* el conjunto formado por los $b \in$ R tales que *A* tiene inversa. Calcule la inversa de *A* para los diferentes valores del parámetro $b \in B$.

Solución: A) Si $b=4$ *el determinante de A es nulo y su rango no es 2, por lo que su rango es 1, pues tiene elementos no nulos. Si* $b\neq 4$ *el determinante de A es no nulo y su rango es 2.*

B) La matriz A tiene inversa cuando $b \neq 4$. *C)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{b-4} & \frac{-2}{b-4} \\ \frac{-2}{b-4} & \frac{1}{b-4} \end{pmatrix}$

7. (Cantabria Ordinaria 2023) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de *A* en función del parámetro *a*.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de *A* en función del parámetro *a*.
3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de *a* la matriz *A* tiene inversa.
4) [0,75 PUNTOS] Sea *B* el conjunto de los $a \in$ R tales que *A* tiene inversa. Calcule la inversa de *A* para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

Solución: 1) 2a – 11. 2) Si $a \neq \frac{11}{2}$ *el rango de A es 3. Si* $a = \frac{11}{2}$ *el rango es 2.*

3) La matriz A tiene inversa para $a \neq \frac{11}{2}$. *4)* $A^{-1} = \frac{1}{2a-11}\begin{pmatrix} -3 & a-1 & -3 \\ 8 & -1-2a & -3+2a \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

8. (Cantabria Extraordinaria 2022) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
A. [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y comprueba que es regular.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2.
C. [1 PUNTO] Despeje *X* en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.
D. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz *X* de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Solución: A. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \to |A^2| = 4 \neq 0$ *B.* $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ *C.* $X = (A^2)^{-1}(C-B)$

D. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

9. (Cantabria Ordinaria 2022) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.
C. [0,75 PUNTOS] Despeje *X* en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.
D. [0,75 PUNTOS] Calcule *X*.

Solución: A. $|A| = -1 \neq 0;\ |B| = 1 \neq 0$ *B.* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

C. $X = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1}$ *D.* $X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

10. (Cantabria Extraordinaria 2021) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a.

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Solución: 1) El rango de A es 2 si ***a*** *es distinto de 4 y el rango es 1 si a = 4. 2) Para* ***a*** *distinto de 4. 3) Si* $a \neq 0$ $X = A(A-2I)^{-1}$. *Si a = 0 no se puede despejar. 4)* $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

11. (Cantabria Ordinaria 2021) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS] **Ejercicio 1** [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta)\cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$.

Solución: 1) www.ebaumatematicas.com *2)* www.ebaumatematicas.com

3) $|R(\theta)|=\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1\neq 0$ *4)* $R^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

12. (Cantabria Extraordinaria 2020) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

Solución: 1) $X=(A-I)^{-1}B$ *2) A–I no es invertible cuando* $a=0$ *3)* $X=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

13. (Cantabria Ordinaria 2020) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^t\right)^{-1}$

4) [1 PUNTO] Calcula *X*.

Solución: 1) $X=A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}$ *2)* $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$ *3) Es cierto. 4)* $X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/2 & 5/2\end{pmatrix}$

14. (Cantabria Junio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1

Sean $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de *M*.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores *v* tales que $M^2\cdot v=M^{-1}\cdot v$.

Solución: 1) El rango de M es 3 2) x = y = z = 0

15. (Cantabria septiembre 2018) B.1. Sean

$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}$ con x, y ∈ R.

1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales AB = BA.

2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?

3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2x2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión N · X · R = S.

Solución: 1) x = 1, y = 1 2) x=9. No tiene inversa 3) $X=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}$

16. (Cantabria junio 2018) A.1. Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$A=\begin{pmatrix}z & 2 & x\\ 1 & -y & -z\\ x+z & -y & z\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$.

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial AB = C y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si x = 0, y = 0, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

Solución: 1) x = 0, y = 1, z = 0 2) z = 0, z = –1

17. (Cantabria septiembre 2017) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1. Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix}x & -x & x\\ 1 & -x & x\\ x & 2x & x\end{pmatrix}$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de *M* en función del valor de *x*.

2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de *M* en el caso de *x* = –1.

Solución: 1) Para $x\neq 0$ *y* $x\neq 1$ *el rango es 3; para* $x=1$ *el rango es 2 y para* $x=0$ *el rango es 1.*

2) $M^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & 0 & -1/3\\ -1/6 & -1/2 & -1/3\end{pmatrix}$

18. (Cantabria junio 2017) A.1. Consideremos la igualdad matricial A · M = B donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2t & 2\\ -1 & t & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

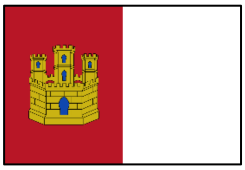
1) [0,25 puntos] ¿Cuantas fila y columnas debe de tener la matriz M?

2) [1’5 puntos] Para qué valores de t es la matriz de A invertible?.

3) [1’5 puntos] En el caso t = –1, despeje la matriz M en función de las matrices A y B y calcule su valor

Solución: 1) M debe ser 3x2 2) Para cualquier valor distinto de 1 3) $M=\begin{pmatrix}1/3 & -5/3\\ -1 & 1/2\\ -2/3 & -1/6\end{pmatrix}$

CASTILLA LA MANCHA



1. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2025) EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Apartado b) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ a & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro a para que $A\cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A\cdot B$ en función de a.

Solución: b.1) La matriz es invertible para cualquier valor de a distinto de –2 y de $\frac{1}{2}$.

b.2) $\left(A\cdot B\right)^{-1}=\dfrac{1}{2a^2+3a-2}\begin{pmatrix}1 & -3-2a\\ a-1 & 1+2a\end{pmatrix}$

2. (Castilla la Mancha Ordinaria 2025) EJERCICIO 3. Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A\cdot X-B=X$, con $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & m\end{pmatrix}$, tal que $m\in\mathbb{R}$, y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de dimensión 2×2.

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m=1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X.

Solución: b.1) Para cualquier valor de m distinto de 2. b.2) $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

3. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2024) 4. b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ con $a\in\mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A\cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n>2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Solución: $|A|=a$, $|A\cdot A|=a^2$, $|A^n|=a^n$.

4. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2024) 7. a) [1,5 puntos] Sea el determinante $\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix}x+a & y+b & z+c\\ 2a & 2b & 2c\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

Solución: 2

5. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2024) 4. b) [1,5 puntos] Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 1\\ a & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ en función de los valores de $a\in\mathbb{R}$..

Solución: El rango de A es 3 para cualquier valor de a

6. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2024) 7. a) [1,5 puntos] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

Solución: a = 0.

7. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023) 5. b) [1,5 puntos] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

Solución: Si $a \neq \pm 1$ el rango de A es 3 y si a = 1 o a = –1 el rango de A es 2

8. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023) 8. a) [1,25 puntos] Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

Solución: 12.

9. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023) 1. Sean las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$

b) **[1 punto]** Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Solución: a) "a" cualquier valor real, *b = 0* y *c = 1 – 2ª. b) a = 1/2, b = c = 0.* $X=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023) 5. b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Solución: Al ser el determinante de A no nulo existe la inversa de la matriz A. Al ser nulo el determinante de $A^{-1} \cdot B$ esta matriz no tiene inversa.

11. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023) 8. a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

Solución: El rango de A es 2

12. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022) 3. b) [1 punto] Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

donde $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

Solución: -4

13. (Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022) 7. a) [1,5 puntos] Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = (I - A)^{-1} B$. $X = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

14. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 1.

a) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *y* $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución: La matriz M tiene rango 2 si $m = 1$ *y rango 3 si* $m \neq 1$

16. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2021) 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

17. (Castilla la Mancha Ordinaria 2021) 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de A^T, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Solución: a) 1. b) $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

18. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2020) 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de *A*.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

19. (Castilla la Mancha Ordinaria 2020) 1. a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de *a* para los que la matriz *A* no tiene inversa

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores *x*, *y*, *z* para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Solución: a) No tiene inversa cuando a = 0; a = –2 o a = 1. b) Se cumple cuando $y=1;\ x=4+z;\ z\in\mathbb{R}$

20. (Castilla la Mancha Julio 2019) 3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro a ∈ R. (1 punto)

b) Para a = 1 calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

Solución: a) $a\neq 0$ *y* $a\neq -2$ *rango es 3. En el resto el rango es 2. b)* $X=\begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \end{pmatrix}$

21. (Castilla la Mancha Junio 2019) 3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. (1,5 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$

22. (Castilla La Mancha Julio 2018) 3B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. (1,25 puntos)
b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. (1,25 puntos)

Solución: a) a = 2 y b = –1 b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

23. (Castilla La Mancha Junio 2018) 3B. a) Encuentra los valores del parámetro a ∈ R para que la siguiente matriz tenga inversa. $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1 punto)

b) Para a = 2 calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. (1 punto)
c) Para a = 0 calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. (0,5 puntos)

Solución: a) No tiene inversa para a=4/3 ni para a=1 b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c) 1/4 y 32*

24. (Castilla La Mancha Septiembre 2017) 3B. Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula razonadamente A^{-1}. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. (1,5 puntos)

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

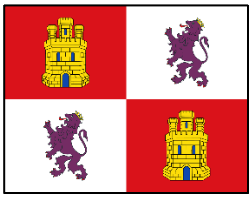
25. (Castilla La Mancha Junio 2017) 3B. Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene inversa la matriz $\mathbf{2I_3+B}$? Razona la respuesta. $\mathbf{I_3}$ es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. (1,5 puntos)

Solución: a) Si b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

CASTILLA – LEÓN



1. (Castilla - León Extraordinaria 2025) Problema 1.

a)…

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1} en función de A y de I. **(1 punto)**

Solución: $A^{-1} = A - 3I$. $\left|A\left(A-3I\right)\right| = |I| \Rightarrow |A||A-3I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

2. (Castilla - León Ordinaria 2025) Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1,5 puntos)**

Solución: a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *b)* $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. (Castilla - León Extraordinaria 2024) E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$ **(2 puntos)**

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. (Castilla - León Ordinaria 2024) E2.- (Álgebra)

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para a = 0, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

Solución: a) $|M| = -a^2 + 3a - 2$. *Si* $a \neq 1$ y $a \neq 2$ *el rango de M es 3 y si* $a = 1$ *o* $a = 2$ *el rango de M es 2. b) El determinante de M vale 1/2.*

5. (Castilla - León Extraordinaria 2023) E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&a\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&-1\\a&0\\3&-1\end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11}=2$, tal que $AC=B$. **(1 punto)**

b) Si $D=B^tA$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

Solución: a) $C=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$ *b)* $a\neq 0$

6. (Castilla - León Ordinaria 2023) E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&0\\y&1\\z&x+y\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, calcular los valores de $x,y,z\in\mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. **(2 puntos)**

Solución: Los valores buscados son x = 0; y = 1; z = 2.

7. (Castilla - León Extraordinaria 2022) E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$ **(1.2 puntos)**

b) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. **(0.8 puntos)**

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ *b) MN y NP no son posibles.* $MP=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

8. (Castilla - León Ordinaria 2022) E2.- (Álgebra)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a&a\\0&1\end{pmatrix}$, calcule el valor de a que hace que:

$A^2=A^{-1}+\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}$ **(2 puntos)**

Solución: debe ser a = 1.

9. (Castilla - León Extraordinaria 2021) E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM=N$

(2 puntos)

Solución: $P=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$

10. (Castilla - León Ordinaria 2021) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}n-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**
b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Solución: a) La matriz A^2 tiene inversa cuando n ≠ 1. b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

11. (Castilla - León Extraordinaria 2020) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:
$A^2 = A^t$ ($A^t \equiv$ *la traspuesta de* A) **(1,2 puntos)**
b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible? **(0,8 puntos)**

Solución: a) Los valores son: $m = n = 0$ *o* $m = 0$ *y* $n = 1$
b) Para $n = 0$ *y cualquier valor de m la matriz no es invertible.*

12. (Castilla - León Ordinaria 2020) E2.- (Álgebra) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} . **(0,5 puntos)**
b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, **e**ncuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$
(1,5 puntos)

Solución: a) Cuando $a \neq 0$ y $a \neq 3$ la matriz A tiene inversa. b) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

13. (Castilla-León Julio 2019) Opción B E1.- Dadas las matrices
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

Solución: x = 3 e y = 4

14. (Castilla-León Junio 2019) Opción B E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**
b) Encontrar la inversa de A para k=2. **(1 punto)**

Solución: a) $k \neq 0$ *y* $k \neq 1$. *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. (Castilla-León julio 2018) Opción B. E1.- Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discutir, según los valores de k, cuándo A tiene inversa y calcularla para k=2. **(1 punto)**
b) Para k=2, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX+B=AB$. **(1 punto)**

Solución: a) Para k $\neq$ 1. Si k = 2 → $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

16. **(Castilla-León junio 2018) Opción B. E1.-** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ $y\ M=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen |MA|=2 y |M+B|=3, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

Solución: a = –2 y b = 0.

17. **(Castilla-León septiembre 2017) Opción A E1.- a)** Sea $M=\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a, cuando M posee inversa. **(0,5 puntos)**

b) Siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&7\end{pmatrix}$, calcular $A^2\ y\ A^{-1}$. **(1,75 puntos)**

Solución: a) Para cualquier valor de a distinto de 6 existe la inversa de la matriz M.
b) $A^2=\begin{pmatrix}7&16\\24&55\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

18. (Castilla-León junio 2017) Opción A E1.- Sean $A=\begin{pmatrix}1&-4\\-1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar X tal que $AX=2B+I$ siendo $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ **(1,25 puntos)**

Solución: a) La matriz A tiene inversa. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-4\\-1&-1\end{pmatrix}$ *La matriz B no tiene inversa. b)* $X=\begin{pmatrix}-1&-6\\-1&-1\end{pmatrix}$

CATALUÑA

1. (Cataluña PAU Extraordinaria 2023) 1.

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comprube que $(A-2I)^2=3I$. [0,5 puntos]

b) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

c) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A\cdot X=B$. [0,75 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $A^{-1}=4I-A$. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=B$ *c)* $X=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

2. (Cataluña PAU Ordinaria 2023) 2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$. [1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C\cdot D=C$ y $D\cdot C=D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes. [1 punto]

Solución: a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=A$; $B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=B$ *b) www.ebaumatematicas.com*

3. (Cataluña PAU Extraordinaria 2022) 5.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso *a* = 3, resuelva la ecuación $A\cdot X=B-3I$ en la que $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

Solución: a) La matriz A es invertible si a es distinto de 0, 1 y 2. b) $X=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 13/3 & -3 & -1 \\ -14/3 & 7/2 & 1 \end{pmatrix}$

4. (Cataluña PAU Ordinaria 2022) 5. Sea la matriz $X=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros *a*, *b y c*.

a*)** Calcule las matrices ***X tales que $X^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

b*)** Determine los valores de *a*, *b* y *c* para que la matriz inversa de ***X sea $X^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

[1 punto]

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ *o* $X=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ *b) Los valores buscados son a = 2; b = 1 y c = –1.*

5. (Cataluña Extraordinaria 2021) 5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a&a&0\\2&a+1&a-1\\2a+1&0&-a-3\end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Encuentre para que valores de *a* la matriz A es invertible. [1 punto]

b) Compruebe que, para el caso *a = 3*, la matriz A es invertible y resuelva la ecuación matricial $AX=B-3I$, donde B es la matriz $B=\begin{pmatrix}6&3&3\\2&5&2\\1&1&4\end{pmatrix}$ [1,5 puntos]

Solución: a) Tiene inversa cuando el valor de a es distinto de 0, 1 y 2. b) $X=\begin{pmatrix}-5&-5&-5\\6&6&6\\-6&-6&-6\end{pmatrix}$

6. (Cataluña Ordinaria 2021) 5. ***a)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X=A-3I$, donde ***I*** es la matriz identidad.

[1,25 puntos]

b*)** Una matriz cuadrada ***M satisface que $M^3-3M^2+3M-I=0$, donde ***I*** es la matriz identidad. Justifique que ***M*** es invertible y exprese la inversa de ***M*** en función de las matrices ***M e I***.

[1,25 puntos]

Solución: a) $X=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-3&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix}$ *b)* $M^{-1}=M^2-3M+3I$

7. (Cataluña Extraordinaria 2020) Sèrie 4. 4. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}a&-3&0\\4&a-7&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, en què *a* és un paràmetre real.

a*)** Estudieu el rang de la matriu ***A per als diferents valors del paràmetre *a*. [1,25 punts]
b*)** Comproveu que per a $a = 4$ la matriu ***A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 punts]

Solución: a) Para $a \neq 3$ y $a \neq 5$ el rango de A es 3, para $a = 3$ o $a = 5$ el rango de A es 2.

b) $A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. (Cataluña Ordinaria 2020) Série 1. 5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu **X** que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què **I** és la matriu identitat d'ordre 2. [1,25 punts]
b) Comproveu que la matriu **X** és invertible i calculeu-ne la matriu inversa. [1,25 punts]

Solución: a) La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ *b)* $X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

9. (Cataluña Septiembre 2019) Serie 5. 3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a*)** Calcula ***A · B y ***B · A***. [1 punto]
***b*)** Justifica que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero. [1 punto]

Solución: a) $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B{\cdot}A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

10. (Cataluña Junio 2019) Serie 1. 5. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y = es la matriz nula, ambas de orden 2.
b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresión general para calcular la matriz inversa de M y, a continuación, calcula la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

Solución: a) $a = \pm\sqrt{2}$ *b)* $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

11. (Cataluña Septiembre 2018) 4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

***a*)** Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal que A no tenga inversa para este valor? [1 punto]
***b*)** Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$. [1 punto]

Solución: a) no existe ningún valor de α para el cual la matriz A no tenga inversa.

b) $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

12. (Cataluña Junio 2018) 1. Sean las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcule $M\cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.
[1 punto]
b) Encuentre los valores de *t* para los cuales la matriz $N\cdot M$ es invertible.
[1 punto]

Solución: a) $M\cdot N=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-t & t^2 & 2t-2\end{pmatrix}$. $|M\cdot N|==0$. *b) La matriz* $N\cdot M$ *es invertible para cualquier valor de t distinto de 1 y de 2.*

13. (Cataluña Septiembre 2017) 2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3. [1 punto]
b) Haciendo uso de la anterior igualdad, encuentre la matriz inversa de *A*: A^{-1}. [1 punto]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 3/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

14. (Cataluña Junio 2017) 5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M=\begin{pmatrix}x & -1\\ y^2+1 & x\end{pmatrix}$, con *x* e *y* números reales.

a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de *x* y de *y*.
[1 punto]
b) Para x = 1 e y = –1, calcule M^{-1}.
[1 punto]

Solución: a) $|M|=x^2+y^2+1\neq 0$ *b)* $M^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

EXTREMADURA

1. (Extremadura Extraordinaria 2025) <u>EJERCICIO 1B.</u> [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Obtener la inversa de la matriz A^T+I donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

Solución: a) $\left(A^T+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. (Extremadura Ordinaria 2025) <u>EJERCICIO 1B.</u> [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m\in\mathbb{R}$

a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2-A=B$.

b) Calcular m para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.

c) Para $m=2$ obtener la inversa de la matriz $A+B-I$.

Solución: a) $m=1$ *b) La matriz* $A+B-I$ *tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.*

c) $\left(A+B-I\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=A+B-I$.

3. (Extremadura EBAU Extraordinaria 2024) 1. Se consideran las matrices

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

Solución: a) $\left(A+A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (Extremadura EBAU Ordinaria 2024) 1. Sea $b\in\mathbb{R}$ y la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & b+1 \\ b+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de b para los que A tiene inversa. (1 punto)

b) Hallar A^{-1} para el caso $b = 0$ (debe justificarse adecuadamente la respuesta). (1 punto)

Solución: a) La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *b* distinto de –1 y 1. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

5. (Extremadura EBAU Ordinaria 2024) 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\\ a-b & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, hallar los valores de a y b para que el producto $A\cdot M$ sea igual a la inversa de la matriz N. (2 puntos)

Solución: a = 3 y *b = 4.*

6. (Extremadura EBAU Extraordinaria 2023) 1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ e *I* es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución: Si $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 2$ *el rango de* $A-\lambda\cdot I$ *es 3. Si* $\lambda=0$, $\lambda=1$ *o* $\lambda=2$ *el rango de* $A-\lambda\cdot I$ *es 2.*

7. (Extremadura EBAU Ordinaria 2023) 1. Encontrar la matriz X que verifica $(A-3I)\cdot X=2I$, donde

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución: $X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & -2/3 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

8. (Extremadura EBAU Ordinaria 2023) 2. Determinar todos los números $x\in\mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero. (2 puntos)

Solución: El determinante es mayor o igual que cero en el intervalo $[1,3]$.

9. (Extremadura EBAU Extraordinaria 2022) 1. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde *I* es la matriz identidad de orden 2 x 2. (1,5 puntos)

b) Para $\lambda=2$ solucionar el sistema $AX=\lambda X$, donde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ el rango de $A-\lambda I$ es 2. Si $\lambda = -1$ o $\lambda = 2$ el rango es 1.

b) $X = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

10. (Extremadura EBAU Ordinaria 2022) 1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$, $B^t \cdot C$, $B \cdot C$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. (0,5 puntos)

b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas *x* e *y*, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de *a*. (1,5 puntos)

Solución: a) $C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $B^t \cdot C = (-3)$; $B \cdot C$ *no es posible.*

b) a = –1. La solución es $x = \frac{7}{5};\ y = -\frac{3}{5}$

11. (Extremadura EBAU Ordinaria 2022) 2. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$ (2 puntos)

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

12. (Extremadura Extraordinaria 2021) 1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde

$M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justificar la respuesta). (0,5 puntos)

b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)

c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

Solución: a) Debe tener 3 filas y 2 columnas. b) El valor de k debe ser distinto de 1 y de –2. c) No es invertible para ningún valor de k

13. (Extremadura Ordinaria 2021) 1. Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = 0$ y determinar los escales λ_1 y λ_2 de $\mathbb{R}$ (donde I y 0 son las matrices 2×2 identidad y cero). (2 puntos)

Solución: La solución es $\lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = 3$.

14. (Extremadura Extraordinaria 2020) 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcule los productos de matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Se cumple que $A\cdot B=B\cdot A$? (1 punto)

b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2=A^2+B^2$. (1 punto)

Solución: a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}$. *No se cumple. b) No se cumple.*

15. (Extremadura Ordinaria 2020) 1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ 2 & -k & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)

b) Calcule la inversa para $k=1$. (1 punto)

Solución: a) Cuando $k\neq 2$ y $k\neq -1$. b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3/2 & 1 & -1/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$

16. (Extremadura Julio 2019) OPCIÓN A 1. Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1}=A^2-3A+3I$

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **(2 puntos)**

Solución: Demuestro que $I=A^3-3A^2+3A$

17. (Extremadura Junio 2019) OPCIÓN B 1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & -\lambda & -1\end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$ para que la matriz A tenga inversa. **(1 punto)**

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda=1$. **(1 punto)**

Solución: a) $\lambda\neq -1$ y $\lambda\neq\frac{3}{2}$ *b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1/2 & 3/2 & 1\\ 1/2 & -3/2 & -2\end{pmatrix}$

18. (Extremadura Julio 2018) A.1. Sea la matriz A que depende del parámetro a ∈ R

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ a & 0 & a\\ -2 & a & 0\end{pmatrix}$.

(a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (1,5 puntos)

(b) Para a = 1 resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. (1 punto)

Solución a) Si a=0 o a=2 el rango es 2. Si a es distinto de 0 y 2 el rango es 3 b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

19. (Extremadura Junio 2018) A.1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$.
b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

Solución a) $C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

20. (Extremadura Julio 2017) A.1.

(a) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (0,5 puntos)

(b) Obtenga el determinante de la matriz $B = 1/3A^4$ sin calcular previamente B. (0,5 puntos)
(c) Calcule la matriz inversa de A. (1,5 puntos)

Solución a) 3 b) 3 c) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21. (Extremadura Junio 2017) B.1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga la matriz A·B y calcule su rango.
b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones A·B·X = 0

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *su rango es 1. b)* $X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ $y \in R$

GALICIA

1. (Galicia Extraordinaria 2025) PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).

2.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&1\\1&1&k\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para $k=0$, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX-A=B^2+A^T$ siendo A^T la traspuesta de A.

Solución: 2.1.1. la matriz A es invertible para cualquier valor de k. $A^{-1}=\begin{pmatrix}4k-1&-2k&2\\1-2k&k&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$

2.1.2. $X=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&2&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$.

2. (Galicia Ordinaria 2025) PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A=\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2+\alpha A+\beta I=0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX?

Solución: 2.1.1. Los valores buscados son $\alpha=-1$ *y* $\beta=-12$.

2.1.2. $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. *No son iguales los productos XA y AX.*

3. (Galicia ABAU Extraordinaria 2024) 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A=\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX=XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x=-1$ e $y=1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M=A^{-1}-AM$.

Solución: a) x = –1, y = 1. *b)* $M=\begin{pmatrix}1/10&-1/5\\1/5&1/10\end{pmatrix}$.

4. (Galicia ABAU Ordinaria 2024) 1. Números y Álgebra. (2 puntos) Sean A y B dos matrices tales que $A+2B=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^T=3I-2X$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

Solución: a) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

5. (Galicia ABAU Extraordinaria 2023) 1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A-3I)=0$, que $y\neq 0$ y que $(3z)A^{-1}+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

Solución: a) $A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *b) Los valores buscados son x = 0, y = 1,* $z=1$.

6. (Galicia ABAU Ordinaria 2023) 1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA=A+XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A-B$ es invertible. Luego, calcule X si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\left(A^2-A-I\right)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución: $X=A\left(A-B\right)^{-1}$ → $X=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. (Galicia ABAU Extraordinaria 2022) 1. Números y Álgebra:

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12}=1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det\left(A^{-1}B+A\right)=-1$.

Solución: a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *b) Los valores buscados son* $b_{12}=0$ *y* $b_{22}=2$.

8. (Galicia ABAU Ordinaria 2022) 1. Números y Álgebra:

Despeje X de la ecuación matricial $AB\left(X-I\right)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Solución: $X=(AB)^{-1}C+I;\ X=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

9. (Galicia Extraordinaria 2021) 1. Números y Álgebra:
Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\-6&6&-5\end{pmatrix}$

10. (Galicia Ordinaria 2021) 1. Números y Álgebra:
Sea $A=(a_{ij})$ la matriz de dimensión 3x3 definida por $a_{i\,j}=\begin{cases}1 & si\quad i=2,\\(-1)^j(i-1) & si\quad i\neq 2.\end{cases}$ Explique si A y $A+I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad)

Solución: La matriz A no es invertible. $(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/4&1/4&1/4\\-3/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}$

11. (Galicia Extraordinaria 2020) 1. Números y Álgebra:
Para la ecuación matricial $A^2X+AB=B$, se pide:
a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.
b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$

Solución: a) La matriz B debe ser 4x3 y la matriz X será 4x3. b) $X=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

12. (Galicia Ordinaria 2020) 1. Números y Álgebra:
Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$. Se pide:
a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+\left(A+B\right)^{T}=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $\left(A+B\right)^{T}$ la traspuesta de $A+B$

Solución: a) $A^2-B^2=\begin{pmatrix}8 & -8\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

13. (Galicia Julio 2019) Opción A 1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA+B=C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA+B=C$ si

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución: a) $X=\left(C-B\right)A^{-1}$ *b)* $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 7 & -3\\ 7 & -3\end{pmatrix}$

14. (Galicia Junio 2019) Opción A 1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A + I es invertible despeja X en la ecuación $A-X=AX$

b) Si $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ calcula X tal que $A-X=AX$.

Solución: a) $X=\left(A+I\right)^{-1}A$ *b)* $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

15. (Galicia septiembre 2018) A.1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Calcula las matrices X que verifican $AX+X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1}=A^t$. *b) Si* $\lambda=-1$ *el rango es 2 y si* $\lambda\neq-1$ *el rango es 3.* $X=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix};\lambda\in\mathbb{R}$

16. (Galicia junio 2018) A. 1. a) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}m & m+4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.

b) Dadas las matrices $A=(-1\ 0\ 1)$, $B=(3\ 0\ 1)$ y $C=(4\ -2\ 0)$, calcula la matriz X que verifica: $B^t\cdot A\cdot X+C^t=X$, siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

Solución: a) m = –1 b) $X=\begin{pmatrix}0\\-2\\-4/3\end{pmatrix}$

17. (Galicia septiembre 2017) A.1. Dadas las matrices

$A=\begin{pmatrix}1&0\\k&1\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-3\\3&1&-1\end{pmatrix},$

a) Determina, según los valores de k, el rango de las matrices AB y BA.

b) Para el valor $k=0$, determina las matrices X que verifican $ABX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Solución: a) Rango de AB es 2 y Rango de BA es 1 para k=-2 y 2 para k≠-2 b) $X=\begin{pmatrix}-a\\4a\\a\end{pmatrix};\ a\in\mathbb{R}$

18. (Galicia junio 2017) A.1. Dada la matriz

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

a) Determina, según los valores de λ, el rango de la matriz $\boldsymbol{AA^t-\lambda I}$, siendo $\boldsymbol{A^t}$ **l**a matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $\boldsymbol{AA^tX=6X}$.

Solución: a) si λ=0 o λ=6 el rango es 1 y si toma un valor distinto de 0 y 6 el rango es 2 b)

$X=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix},a\in\mathbb{R}$

LA RIOJA

1. (La Rioja Extraordinaria 2025) 3.1 a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases}2X-3Y=A,\\ X-Y=B.\end{cases}$$

Solución: La solución del sistema es $X=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}$.

2. (La Rioja Extraordinaria 2025) 3.2 a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1}=B$.

Solución: Las matrices buscadas son $X=\begin{pmatrix}3c/2 & b\\ c & b\end{pmatrix}$ *y* $X^{-1}=\begin{pmatrix}2/c & -2/c\\ -2/b & 3/b\end{pmatrix}$, *siendo* $b\neq 0$ *y* $c\neq 0$.

3. (La Rioja Ordinaria 2025) 3.1 b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A-\frac{1}{3}A^T\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 7\\ 1\end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución: La solución es $x=1,\ y=2,\ z=0$.

4. (La Rioja Ordinaria 2025) 3.2 a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX = b$ siendo $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$?. Nota, b^T denota la matriz traspuesta de *b*.

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{2}$ *el rango de* $A - \lambda I$ *es 3. Si* $\lambda = 1$ *o* $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ *el rango de* $A - \lambda I$ *es 2.* *b)* $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2024) 4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e *I* es la matriz identidad de orden 2.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

6. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2024) 6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla *a* para que $A^2 - A = 12I + B$ con *I* la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA = AX = I$.

Solución: Para cualquier valor a ≠ 0 la matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$

7. (La Rioja EBAU Ordinaria 2024) 4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla *x* e *y* para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T . En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Solución: Para $x = y = \frac{4}{5}$ *queda* $A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para $x = y = \frac{-4}{5}$ *queda* $A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. (La Rioja EBAU Ordinaria 2024) 6.- (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B + C^{-1} = A \\ B - C^{-1} = A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Solución: Las matrices buscadas son $B=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

9. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2023) 4.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real *a* la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\\ a+1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para *a = 2*.

Solución: La matriz A tiene inversa cuando $a\neq 0$ *y* $a\neq -3$. $A^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 8\\ 8 & -2 & -2\\ -2 & 8 & -2\end{pmatrix}$

10. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2023) 5.- (2 puntos)
(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$$

Que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.
(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ AX=Y\end{cases}$$

Sabiendo que

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}15 & 3\\ 7 & 3\end{pmatrix}$$

Solución: (i) $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *o* $M=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ *(ii)* $X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

11. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2023) 6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ $A^{20}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$

12. (La Rioja EBAU Ordinaria 2023) 5.- (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:
(i) Se traspone la matriz.
(ii) Se cambian entre sí la primera y la cuarta columna.
(iii) Se multiplica la tercera columna por –4.
(iv) Se multiplica toda la matriz por 4.

Solución: i) 2 ii) –2 iii) –8 iv) 512

13. (La Rioja EBAU Ordinaria 2023) 6.- (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real *a* la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

Tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para *a = 2*.

Solución: La matriz A tiene inversa cuando "a" es distinto de 0, 1 y –2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 3/8 & -1/8 \\ -1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

14. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 5.- (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

Solución: 0

15. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 6.- (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 5.- (2 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determina para que valores de *a* la matriz *AB* tiene inversa.
(ii) Resuelve para *a = 0* la ecuación matricial $ABX=3I$, siendo *I* la matriz identidad.

Solución: (i) La matriz AB tiene inversa para los valores $a \neq -\frac{2}{3}$ *(ii)* $X=\begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

17. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Hallar las matrices *A – B, A* y *B*, sabiendo que las matrices A y B, satisfacen las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A-B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

18. (La Rioja Extraordinaria 2021) 6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$; $A^{20}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$

19. (La Rioja Ordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}3A-5B=C,\\ -A+3B=D\end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 7 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de C^TD, donde C^T es la matriz traspuesta de C.

Solución: $\left(C^TD\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{27} & \frac{1}{54}\\ \frac{1}{162} & -\frac{13}{162}\end{pmatrix}$

20. (La Rioja Ordinaria 2021) 6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A|=1$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B=\begin{pmatrix}x & y & z\\ x+1 & y+1 & z+1\\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c)\end{pmatrix}$$

Calcular $\left|4B^{-1}A^T\right|^2$.

Solución: $|B|=-2$. $\left|4B^{-1}A^T\right|^2=1024$

21. (La Rioja Extraordinaria 2020) 5.- (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

Solución: $(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

22. (La Rioja Extraordinaria 2020) 6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m\in\mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. (La Rioja Ordinaria 2020) 6.- (2 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m\in\mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. (La Rioja Ordinaria 2020) 4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

a) Hallar ∝ y β de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

Solución: a) ∝ = 4; β = –4. b) $A^5=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$

25. (La Rioja Julio 2019) Propuesta A y B 4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA=Y\\ \frac{1}{3}Y+C=D\end{cases}$$

Solución: (I) Para todo valor de a distinto de 0 y 0,5. (II) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1}\end{pmatrix}$

(III) $X=\begin{pmatrix}9 & -15 & -15\\ -21 & 39 & 42\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}$

26. (La Rioja Junio 2019) Propuesta A y B 4.- (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

(II) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(III) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución: (I) Existe la inversa de A para cualquier valor de a distinto de 1 y –2.

(II) Si $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *el sistema es compatible determinado, si* $a=1$ *es compatible indeterminado y si* $a=-2$ *es incompatible*

(III) Para $a=1$ *la solución es x=1–y–z; y = y ; z = z. Para* $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *la solución es*

$$x=y=z=\frac{1}{a+2}$$

27. (La Rioja Julio 2018) Propuesta A: 1.- (2 puntos) Sean I la matriz identidad de orden 2 y las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

1. Calcule, si existe, la inversa de A.
2. Halle las matrices X e Y que son soluciones del sistema

$$AX+BY=3I,$$
$$AX-BY=I,$$

Solución: 1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 2. $X=\begin{pmatrix}2 & -12\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

28. (La Rioja Julio 2018) Propuesta B 1.- (3 puntos)

(I) Determine el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(II) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, calcule $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ a-4 & b-4 & c-4 \end{vmatrix}$

Solución: (I) El rango es 2 (II) 8.

29. (La Rioja Julio 2017) Propuesta A 2.- (3 puntos)

(I) Halle, según el valor del parámetro *a*, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

(II) Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de orden 4 tales que *det(AB) = 1*. ¿Qué se puede decir del rango de *A?*

Solución: (I) Si $a \neq \frac{-5}{4}$ *el rango es 3. Si* $a = \frac{-5}{4}$ *el rango es 2. (II) El rango es 4.*

30. (La Rioja Julio 2017) Propuesta B 1.- (2 puntos) Sea *m* un número real y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) Halle los valores de *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
(II) Determine el rango de *A* cuando *m* = 2.

Solución: (I) La matriz A tiene inversa cuando $m \neq 2$ *y* $m \neq -2$. *(II) El rango es 2.*

31. (La Rioja Junio 2017) Propuesta B 1.- (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(I) Halle, si existe, A^{-1}.
(II) Determine, si existe, la solución *X* de la ecuación matricial

$$A = AXA^{-1} + B$$

Solución: (I) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *(II)* $X = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}$

MADRID

1. (Madrid Extraordinaria 2025) Pregunta 1.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA=\left(A+A^2\right)B$.

b) (1 punto) Con la matriz $A_1=A$, se consideran las matrices $A_2=A_1^{\,2}+A_1$, $A_3=A_2^{\,2}+A_2$, $A_4=A_3^{\,2}+A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}.

Solución: a) $B=\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & -a\end{pmatrix}$, *siendo a cualquier número real.* *b)* $A_{2025}=A_1=A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

2. (Madrid Ordinaria 2025) Pregunta 1.2. Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda=5$, calcular un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$.

Solución: a) $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$. *Las raíces del polinomio son* $\lambda=2$ y $\lambda=5$. *b)* $\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \frac{5}{3}\alpha\end{pmatrix}$; $\alpha\in\mathbb{R}$. *Si tomamos* $\alpha=3$ *tenemos el vector* $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$.

3. (Madrid Extraordinaria 2024) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$det(A+B)=detA+detB$$

no es cierta en general.

a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B)=detA+detB$, pruebe que entonces

$$\det\left((A+B)^2\right)=\det\left(A^2\right)+\det\left(B^2\right)+2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \alpha & 1 & 0\\ 2 & -1 & \alpha\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $det(C+D)=detC+detD$

c) (0.75 puntos) Para el valor α = −1, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución: a) www.ebaumatematicas.com *b)* $\alpha = 2$

c) Las soluciones son $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda$ *para cualquier valor* $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (Madrid Ordinaria 2024) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de *b* para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para *b = 1*.

Solución: a) Se cumple para cualquier valor de b distinto de cero.

b) El determinante de AA^t *vale 144. c) La solución del sistema es x = –6, y = 2, z = 5.*

5. (Madrid Extraordinaria 2023) A.1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de *b*.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para *b = 2*.

d) (0.75 puntos) Para *b = 1*, calcular B^5.

Solución: a) $\left|A^t A\right| = 0$ *b) Si b ≠ 0 el rango de BA es 2 y si b = 0 el rango de BA es 1.*

c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ *d)* $B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. (Madrid Extraordinaria 2022) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro *k* tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para *k = 1*.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real *k*.

c) (0.5 puntos) En el caso *k = 1*, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

Solución: a) La matriz AB tiene inversa si k es distinto de 0 y de 3. Para k = 1 $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $BA = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$. *El rango es 2 para cualquier valor de k. c)* $\left.\begin{array}{r} 2x = 2 \\ -2y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$

7. (Madrid Extraordinaria 2020) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:
a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución: a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$ *b)* $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$ *c)* $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$ *d)* $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}$

8. (Madrid Extraordinaria 2020) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, se pide:
a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.
b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C=A^2-2I$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ *b)* $C=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\1&-3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ *c)* $|D|=0$

9. (Madrid Julio 2019) Ejercicio 1: **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1-a&1\\1&1+a\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, se pide:
a) (1 punto) Calcular para qué valores a ∈ R se verifica $A^2-I=2A$.
b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.
c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $\left(AA^t\right)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución: a) $a=1$ o $a=-1$ *b) a distinto de 0,* $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1-a}{a^2}&\frac{1}{a^2}\\\frac{1}{a^2}&\frac{-1+a}{a^2}\end{pmatrix}$ *c)* a^8

10. (Madrid Junio 2019) Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$; se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a = 0.

Solución: a) a ≠ 1 y a ≠ –2. Rango de A es 3. a = 1 o . a = –2 el rango de A es 2. b)

$$(AM)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 5/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

11. (Madrid julio 2018) Ejercicio 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\alpha\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 37/2\\ 11\end{pmatrix}$$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.
b) (0.75 puntos) Para α = 0, calcular, si es posible, A^{-1}.
c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema AX = B, en el caso α = 1.

Solución: a) Si α=1 el rango es 2 y si α≠1 el rango es 3 b) $A=\frac{1}{-490}\begin{pmatrix}-20 & 40 & -70\\ 15 & -30 & -70\\ -21 & -56 & 98\end{pmatrix}$

c) El sistema es compatible indeterminado y las soluciones son $x=\frac{1}{7}-\frac{5}{7}z;\ \ y=\frac{37}{14}-\frac{5}{7}z;\ \ z=z$

12. (Madrid junio 2018) B.1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}m & 0 & 2\\ -2 & 4 & m\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) (1 punto) Para m = 0, calcular A · B y A^{-1} · B.
c) (0.5 puntos) Calcular B · B^t y B^t · B, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución: a) Si m≠2 tiene inversa b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$ *y* $A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$ *c)* $B\cdot B^t=(4)$ *y* $B^t\cdot B=(4)$

13. (Madrid septiembre 2017) Opción B Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B=(A-I)(2I+2A)$.
b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A-I,\quad A^2-I$ y A^3-I .
c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución: a) $B=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *b)* $Rango\left(A^3-I\right)=Rango\left(A-I\right)=2$; $Rango\left(A^2-I\right)=1$

c) $\left(A^6\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

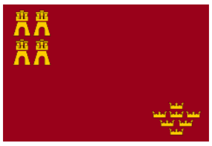
14. (Madrid junio 2017) Opción B Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz *P*.
b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$.

Solución: a) $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-5&-1&4\end{pmatrix}$ *b)* $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\6&4&4\\2&3&2\end{pmatrix}$ *c)* $\left|A^2\right|=4$

MURCIA



1. (Murcia Extraordinaria 2025) CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):
1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).
a) **[0,75]** Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.
c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

Solución: a) *) www.ebaumatematicas.com b) www.ebaumatematicas.com c)* $X = A$.

2. (Murcia Ordinaria 2025) CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):
1B) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.
a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.
b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^t XB = C$, donde A^t es la traspuesta de A..

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (Murcia Extraordinaria 2024) 2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.
a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.
c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Solución: a) *La primera matriz es ortogonal y la segunda no lo es. b) El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.* ***c)*** www.ebaumatematicas.com .

4. (Murcia Ordinaria 2024) 2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.
a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución: *a) La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es. b) El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o –2. c)* $|A| = \pm 2 \neq 0$. $A^{-1} = \frac{1}{2}A^t$.

5. (Murcia Extraordinaria 2023) 2:

Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible)

b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **[1 p.]** Demuestre para qué valores de *a* y *b* la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Solución: a) *La matriz A no es invertible pues su determinante es nulo. b) La matriz A es 2-nilpotente.* ***c)*** *Los valores buscados son a = –9 y b = –6.*

6. (Murcia Ordinaria 2023) 2:

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [0,5 p.] Determine para qué valores del parámetro *a* la matriz *A* es regular (o invertible).

Se sabe que cuando *a* = *–2* la matriz *A* es regular (o invertible). Para ese valor de *a*:

b) **[1 p.]** Calcule la inversa de *A* y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de *C*.

Solución: *a) La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0 y de –1. b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$*.c)* $X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}$

7. (Murcia Extraordinaria 2022) 2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$

a) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **[0,75 p.]** Si *A* es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **[1 p.]** Determine para que valores de *a* y *b* la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Solución: *a)* A^{2022} *= A. b) 1 c) Los valores serían a = 0 o a = 1 y b = 0 o b = 1.*

8. (Murcia Ordinaria 2022) 2: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si *I* denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.
b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de *B*.

Solución: *a)* $A^{2023} = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

9. (Murcia Extraordinaria 2021) 2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para *a* = *–3*, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución: *a) Se comprueba que es cierto.*

b) La matriz A es regular para cualquier valor de a distinto de –4. c) $X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

10. (Murcia Ordinaria 2021) 2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz *A* es regular (o inversible) y calcule su inversa.
b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de *C*.

Solución: *a)* $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

11. (Murcia Extraordinaria 2020) 2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

Solución: *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ *c)* $|A| = 1 \neq 0$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

12. (Murcia Junio 2020) 2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices *A* y *B* son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.

Solución: *a)* $|A| = -1 \neq 0 \to$ La matriz *A* es regular. $|B| = 1 \neq 0 \to$ La matriz *B* es regular.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$

13. (Murcia Septiembre 2019) B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz *A* tiene inversa.

b) **[0,5 p.]** Para $a = 1$, calcule la inversa de *A*.

c) **[1 p.]** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde *I* es la matriz identidad 3x3.

Solución: *a) Cuando a es distinto de* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *y de* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *b)* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. (Murcia Junio 2019) B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 *y* A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

Solución: *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \neq 0$. *La inversa existe y vale* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. (Murcia Septiembre 2018) CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

Solución: *a)* $|A| = 1 \neq 0 \to A$ *es regular* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ *b)* $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

16. (Murcia Junio 2018) CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) **[1,5 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[1 p.]** ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n\in\mathbb{N}$?

Solución: *a)* $A^2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^4=\begin{pmatrix}1&0&8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *b)* $A^n=\begin{pmatrix}1&0&2\cdot n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

17. (Murcia Septiembre 2017) CUESTIÓN A.1: Considere las matrices
$A=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&1\\-2&0\end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB= A+B$.

Solución: *a)* $|A|=|B|=2\neq 0$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-2\\-1/2&1\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1/2\\1&-1\end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix}3/2&-5/2\\1/2&0\end{pmatrix}$

18. (Murcia Junio 2017) CUESTIÓN A.1: Considere las matrices
$A=\begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&2\\-1&2\end{pmatrix}$.

a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

Solución: *a)* $|A|=|B|=-4\neq 0$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&0\\1/4&1/2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&3/4\\1/2&-1/4\end{pmatrix}$ *b)* $X=\begin{pmatrix}-1/2&1/4\\1&-3/4\end{pmatrix}$

NAVARRA

1. (Navarra Extraordinaria 2025) A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{3}$ y $|B| = 3$. Calcula |C| sabiendo que $C = 3\cdot\left(A^t\right)^2 \cdot \left(A\cdot B\right)^{-1}$ (2,5 puntos)

Solución: |C| = 3.

2. (Navarra Ordinaria 2025) A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A| = \frac{1}{4}$ y $|B| = 2$. Calcula |C| sabiendo que $C = 2\cdot\left(A\cdot B^t\right)^2 \cdot \left(B^t\right)^{-1}$ (2,5 puntos)

Solución: $|C| = 1$.

3. (Navarra Extraordinaria 2024) P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q\cdot A\cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A\cdot P\cdot Q\cdot A = Q^{-1}\cdot P^{-1}$ (1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 punto)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (Navarra Ordinaria 2024) P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de *m*, siendo

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$ (2.5 puntos)

Solución: Si $m \neq 1$ *el rango de M es 3 y si* $m = 1$ *el rango de M es 2.*

5. (Navarra Extraordinaria 2023) P2) Calcula los valores de *t* para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: El rango de A · B es máximo cuando el valor de t es distinto de 0 y de –1.

6. (Navarra Ordinaria 2023) P2) Calcula el valor de *a* para que la siguiente matriz no sea regular

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: La matriz A es no regular cuando $a=-2$.

7. (Navarra Extraordinaria 2022) P2) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: Es cierto

8. (Navarra Ordinaria 2022) P2) Calcula los valores de *t* para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: El valor buscado es t = –1.

9. (Navarra Extraordinaria 2021) P2) Calcula los valores de *t* para que se cumpla $|A\cdot B^{-1}|=1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: La igualdad $|A\cdot B^{-1}|=1$ *se cumple cuando t = –1.*

10. (Navarra Ordinaria 2021) P2) Calcula los valores del parámetro *t* para que se cumpla la condición $|A^3|=8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución: Los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3|=8$ *son t = –1 y t = 2.*

11. (Navarra Extraordinaria 2020) P5) Sabiendo que la inversa de una matriz *A* es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A\cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz *B*. (2.5 puntos)

Solución: $B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

12. (Navarra Ordinaria 2020) P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A|=|B|=\frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C=\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)^2 \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución: $|C|=64$

13. (Navarra Julio 2019) Opción B. B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A{\cdot}B|=|A+B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución: $t=-1;\quad t=0 \quad o \quad t=1$

14. (Navarra Junio 2019) Opción B. B1) Resuelve la ecuación matricial $X\cdot A^{35}=A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A$

15. (Navarra Julio 2018) Opción B. B1) Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}|=-1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución: $t=-1$

16. (Navarra Junio 2018) Opción B. B1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tal que $|A|=-1$.

Calcula el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$ siendo $B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

Solución: $|A^2\cdot B^t|=-2$

17. (Navarra Julio 2017) Opción B. B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A-A^7=BB^tX$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

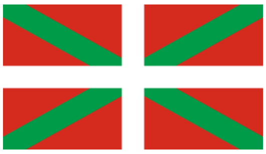
Solución: $X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

18. (Navarra Julio 2017) Opción B. B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Solución: t = 0, t = –1, t = 2

PAÍS VASCO



1. País vasco. Extraordinaria 2025. (2B) Sea α un número real y

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.
(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha=0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

Solución: (a) Cuando $\alpha\neq 1$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{2025}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2025\\ 0 & 1 & 2025\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. País vasco. Ordinaria 2025. (2B) Sean *a* y *b* dos números reales y sea

$$A=\begin{pmatrix}a+b & 2a\\ 2b & a+b\end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros *a* y *b*.
(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a=1$ y $b=2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX-A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solución: (a) Cuando $a\neq b$ el determinante de A es distinto de cero y la matriz A tiene inversa.

(b) $X=\begin{pmatrix}20 & 10\\ 20 & 20\end{pmatrix}$.

3. País vasco. Extraordinaria 2024. Ejercicio B1
(2,5 p) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro *m*:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ m & 2-m & 2 & 1\\ m & -2 & m-2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución: Si $m\neq 1$ o $m\neq 4$ el rango de A es 3 y si $m=1$ o $m=4$ el rango de A es 2.

4. País vasco. Ordinaria 2024. Ejercicio B1
Se sabe que

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}=2$$
.

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$

Solución: (a) –12. (b) –4..

5. País vasco. Extraordinaria 2023. Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$,

$3A-2B=\begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}$.

Solución: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. País vasco. Ordinaria 2023. Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz *A* según los valores del parámetro α, siendo

$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución: Si $\alpha \neq 0$ *el rango de A es 3 y si* $\alpha = 0$ *el rango de A es 2.*

7. País vasco. Extraordinaria 2022. Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$,

sabiendo que

$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$

Solución: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3$

8. País vasco. Ordinaria 2022. Ejercicio B1

Sea la matriz

$A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.
Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

Solución: a) La matriz A no tiene inversa cuando $m=1$ *o* $m=2$. *b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. País vasco. Extraordinaria 2021. Ejercicio B1

Sean

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$A^2\cdot X+B=C$

Solución: $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

10. País vasco. Ordinaria 2021. Ejercicio B1

Sea la matriz

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$

Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.
Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha=2$.

Solución: a) Para $\alpha=1$ *y* $\alpha=3$ *la matriz A no tiene inversa. b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

11. (País vasco Extraordinaria 2020) Ejercicio B1

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}.

Solución: $M^{2020}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$

12. (País vasco Ordinaria 2020) Ejercicio B1

Sea M (∝) la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$

Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.
Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Solución: a) La matriz M (∝) no tiene inversa para $\alpha=-1$ *o* $\alpha=1$. *b)* $(M(0))^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. (País vasco julio 2019) Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3 x 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,
b) se multiplica a la tercera columna por –2,
c) se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Solución: El determinante valdrá 80.

14. (País vasco julio 2018) A.1. Calcula el rango de la siguiente matriz según el valor de a:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: El rango siempre es 3

15. (País vasco junio 2018) A.1. Calcula el rango de la siguiente matriz según el valor de a:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Si a es –6 o 2 el rango es 2 y si a es distinto de esos valores es 3

16. (País vasco julio 2017) Opción B Ejercicio B1 a) Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $x=-3$.

Solución: a) Para cualquier valor de x distinto de $\pm\sqrt{5}$ *b)* $A^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

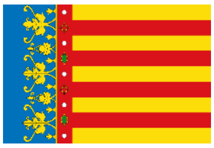
17. (País vasco junio 2017) Opción B Ejercicio B1 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2=4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) Para m ≠ 0 el rango de la matriz es 3 y para m = 0 la matriz tiene rango 1. b) m = 2

VALENCIA



1. (Valencia Extraordinaria 2025) 2.1 Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$.

2.1.1 **(1.25 puntos)** La matriz X solución de la ecuación $\left(A^{-1}X\right)^{-1}=A\left(B^2A\right)^{-1}$.

2.1.2 **(0.5 puntos)** El determinante de la matriz $\left(3A^5B\right)^2$.

2.1.3 **(0.75 puntos)** Los valores de a y b, si existen, tales que $aB^{100}+bB^{99}=A+C$.

Solución: 2.1.1 $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ *2.1.2* $\left|\left(3A^5B\right)^2\right|=81$ *2.1.3 Se cumple para* $a=1$ *y* $b=0$.

2. (Valencia Ordinaria 2025) 2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2=A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A. Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α.

Solución: 2.1.1 $\alpha=0$.

2.1.2 La matriz A tiene inversa para cualquier valor de α distinto de 0 y de 1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha}\end{pmatrix}$

3. (Valencia Extraordinaria 2024) Problema 1. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & k & 3\\ k & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

donde k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)

b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD=DA$. (4 puntos)

Solución: a) La matriz A es invertible para cualquier valor de k distinto de –1 y de 2. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *c)* $D=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$

4. (Valencia Extraordinaria 2024) Problema 2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X=B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Solución: a) Para los valores de a distintos de 1.5. b) Los valores buscados son $\alpha=6a-5,\ \beta=3a+8,\ \gamma=10a-9$.

5. (Valencia Ordinaria 2024) Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B$. (4 puntos)

c) Para $m=0$, calcular A^5. (3 puntos)

Solución: a) Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$ *el rango de A es 3 y si* $m=0$ *o* $m=1$ *el rango de A es 2.*

b) $X=\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ *c)* $A^5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. (Valencia Extraordinaria 2023) Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M=(A-\alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)

b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Solución: a) $M=(A-\alpha I)^2=\begin{pmatrix} \alpha^2-1 & 2\alpha-2 & 4\alpha-4 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2-1 & 4\alpha-4 \\ -2\alpha+2 & -2\alpha+2 & \alpha^2-6\alpha+5 \end{pmatrix}$ *b) M es nula solo cuando* $\alpha=1$.

7. (Valencia Ordinaria 2023) Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}m\\ 0\\ 9\end{pmatrix}:$$

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Solución: a) La ecuación $A^2X=B$ tiene solución para cualquier valor del parámetro real m.

b) $X=\begin{pmatrix}3m-6\\ -m\\ m^2+3\end{pmatrix}$

8. (Valencia Ordinaria 2023) Problema 2. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}:$$

a) Obtener la matriz $\left(AB^T+I\right)^{-1}$ donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Solución: a) $\left(AB^T+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & -3/4\end{pmatrix}$ *b)* $C^{13}=\begin{pmatrix}0 & \alpha^{19}\\ -\alpha^{20} & 0\end{pmatrix}$

9. (Valencia Extraordinaria 2022) Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a+b & 1\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (4 puntos)
b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)
c) Calcular $\det\left(A^{-50}\right)$ cuando $a^2-b^2\neq 0$. (3 puntos)

Solución: a) Los valores buscados son $a=1;\ b=0$ *b)* $A^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *c)* $\left|A^{-50}\right|=\dfrac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}$

10. (Valencia Ordinaria 2022) Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\ y\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}.\ \text{Se pide:}$$

a) Demostrar que $C-AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
b) Calcular la matriz X que verifica $CX=AB^TX+I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
c) Justificar que $\left(AB^T\right)^n=2^nI$ para todo número natural n. (3 puntos)

Solución: a) $\left|C-AB^T\right|=3\neq 0$. $\left(C-AB^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3\\ 0 & -1/3\end{bmatrix}$ *b)* $X=\left(C-AB^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3\\ 0 & -1/3\end{bmatrix}$

c) $\left(AB^T\right)^2=2^2I;\left(AB^T\right)^3=2^3I;....;\left(AB^T\right)^n=2^nI$

11. (Valencia Ordinaria 2022) Problema 2. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. (4 puntos)

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Solución: a) Si $m \neq 0$ *y* $m \neq \frac{2}{3}$ *el rango de A es 3. Si* $m=\frac{2}{3}$ *el rango es 2 y si* $m=0$ *el rango es 1.*

b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ *c) m = 1*

12. (Valencia Extraordinaria 2021) Problema 4. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ y

$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC=16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a=0$. (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -2$ *y* $a \neq 2$ *el rango de A es 3 y si* $a=-2$ *o* $a=2$ *el rango de A es 2. b)*

$C=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *c) La matriz B tiene rango 1. El sistema tiene infinitas soluciones*

13. (Valencia Ordinaria 2021) Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$,

que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de b para que la matriz $A^{T}A$ tenga inversa, siendo A^{T} la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)

c) La inversa de A^{T}, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Solución: a) No existe la inversa de AB, independientemente del valor de b. Para cualquier valor de b distinto $\pm\sqrt{6}$ *existe la inversa de BA. b) La inversa existe para cualquier valor de b.*

c) $\left(A^{T}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

14. (Valencia Extraordinaria 2020) Problema 4. Sea $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)

b) Dos constantes *a*, *b* de modo que $A^{-1}=A^2+aA+bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3-3A^2+3A-I=0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

Solución: a) $|A|=1\neq 0$. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$ *b) a = –3 y b = 3.c) Para* $\lambda=1$. $x=\alpha;\quad y=0;\quad z=\beta$

15. (Valencia Ordinaria 2020) Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&b&-1\end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real *b*.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de *b* para que cada una de las matrices *AB* y *BA* tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de *b* para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de *A*. (3 *puntos*)

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Solución: a) No existe la inversa de AB, independientemente del valor de b. Para cualquier valor de b distinto de $\pm\sqrt{6}$ *existe la inversa de BA. b) La inversa de* A^TA *existe siempre. c)* $\left(A^TA\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{b^2+2}&0\\0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$

16. (Valencia Julio 2019) Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&6\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX=2X$ y, sin calcular la matriz A^{100} obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Solución: a) $\alpha\neq 2\quad y\,\alpha\neq 5$ *b)* $X=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$ *c)* β *es* 2^{100}

17. (Valencia Junio 2019) Problema A.1. Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real ***a***, y una matriz *B* de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz *A* en función del parámetro ***a*** y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. *(2+2 puntos)*

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a=-1$ *(3 puntos)*

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando ***m*** y ***n*** tales que $B^{-1}=mB+nI$ *(3 puntos)*

Solución: a) a≠–1 rango es 3, a=–1 el rango es 2 b) $x=t-1,\ y=\frac{4t-3}{-2},\ z=t$ *c) m=3, n=6*

18. (Valencia Julio 2018) B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas *A* y *B*, matrices cuadradas del mismo orden tales que *A B* = *A* y *B A* = *B*, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$. *(4 puntos)*

b) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ *(2 puntos)*

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ *(4 puntos)*

Solución: b) a = 0 y b = 1. c) 6 y 3

19. (Valencia Junio 2018) B.1. Sea *A* una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde *I* es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de *a* y *b* para los cuales $A^{-1} = aA + bI$. *(3 puntos)*

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$. *(4 puntos)*

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que *B* es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2. *(3 puntos)*

Solución: a) a=1/3 y b=2/3 b) α = – 20 y β = 21 c) $|2B^{-1}| = 1$

20. (Valencia Julio 2017) B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $e\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. *(2+2 puntos)*

b) La justificación de que $A^4 = I$. *(2 puntos)*

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. *(4 puntos)*

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ *c) Por tanto,* $A^7 = A^{-1}$, $A^{30} = A^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ *y* $A^{100} = Id$

21. (Valencia Junio 2017) B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C=\begin{pmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. *(2,5 puntos)*

Y el valor de la matriz C^4. *(2,5 puntos)*

b) El valor del determinante de la matriz $\left(3A^4\right)\left(4A^2\right)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. *(3 puntos)*

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B\cdot B = B$. *(2 puntos)*

Solución: a) $C^4=\begin{pmatrix}17&-16&8\\8&-7&4\\-16&16&-7\end{pmatrix}$ *b) 81/25 6 c) B=I*

Ejercicios de sistemas de ecuaciones en pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de ESPAÑA

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

ANDALUCÍA

1. (Andalucía Extraordinaria 2025) EJERCICIO 1 (2.5 puntos)
Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

Solución: Si puede ser 15 uno de los números, los otros son 1 y 6. Hay más opciones: 2, 13 y 7; 3, 11 y 8; 4, 9 y 9; 5, 7 y 10; 6, 5 y 11; 7, 3 y 12; 8, 1 y 13.

2. (Andalucía Ordinaria 2025) EJERCICIO 1 (2.5 puntos)
Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.
b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Solución: a) Hemos obtenido el precio del jersey: 20 euros, pero del precio de la camisa y del pantalón solo sabemos que sus precios suman 60 €, por lo que no podemos determinar el precio de la camisa, solo que su precio está entre 0 y 60 euros. b) El jersey cuesta 20 €, la camisa cuesta 25 € y el pantalón 35 €.

3. (Andalucía Extraordinaria 2024) Bloque C EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
b) **[1,25 puntos]** Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución: a) Tendremos que pagar 1870 euros por el tercer pedido. b) Una unidad del perfume A cuesta 50 €, una de B cuesta 30 € y una de C cuesta 20 €.

4. (Andalucía Ordinaria 2024) Bloque C EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+ \quad y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$.

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de *k*.

b) **[0,75 puntos]** Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:a) Para $k\neq 1$ y $k\neq 2$ *el sistema es compatible determinado (una única solución), para* $k=1$ *el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para* $k=2$ *es incompatible (sin solución). b) Las soluciones son* $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$. *Existe la solución pedida siendo la solución* $x=-1,\ y=0,\ z=1$.

5. (Andalucía Extraordinaria 2023) Bloque B <u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Solución: Incluyendo impuestos el gasto es de 127.2 € en refrescos, 179.2 € en cerveza y 286 € en vino

6. (Andalucía Ordinaria 2023) Bloque B <u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Solución: Se han vendido 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

7. (Andalucía Ordinaria 2022) Bloque B <u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x-y+mz=-3 \\ -mx+3y-z=1 \\ x-4y+mz=-6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1,75 puntos)**

b) Para *m = 2* resuelve el sistema, si es posible. **(0.75 puntos)**

Solución: a) Si $m\neq 1$ *y* $m\neq -1$ *el sistema es compatible determinado. Si m = 1 es incompatible. Si m = –1 es compatible indeterminado. b) La solución es x = 2; y = 1; z = –2.*

8. (Andalucía Extraordinaria 2021) Bloque B <u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta. **(1.25 puntos)**

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada rula? **(1.25 puntos)**

Solución: a) Se pueden encontrar muchas soluciones, pero no existe una solución única. Habrían 35 viajes en la ruta B y otros 35 entre las rutas A y C.
b) La solución es 20 viajes en la ruta A, 35 en la ruta B y 15 en la ruta C.

9. (Andalucía Ordinaria 2021) Bloque B EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(2 puntos)**
b) Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución: a) Resumiendo: Para $m \neq 0$ *y* $m \neq -\frac{5}{2}$ *el sistema es compatible determinado, para* $m = 0$ *el sistema es compatible indeterminado y para* $m = -\frac{5}{2}$ *el sistema es incompatible.*

b) *Las soluciones son:* $x = \frac{2}{5}$; $y = t$; $z = -1 + 2t$. *No existe ninguna solución con x = 0*

10. (Andalucía Extraordinaria 2020) Ejercicio 3. (2.5 puntos)
Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Solución: a) Para $m \neq -2$ *y* $m \neq 4$ *el sistema es compatible determinado. Para* $m = -2$ *es compatible indeterminado. Para* $m = 4$ *es incompatible. b) NO, pues* $z = -\frac{1}{3}$.

11. (Andalucía Ordinaria 2020) Ejercicio 7.- [2,5 puntos] Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

Solución: a) Si $a = 0$ *El sistema es compatible indeterminado. Si* $a \neq 0$ *El sistema es incompatible. b)* $x = -t;\quad y = 0;\quad z = t$. *La solución particular es* $x = -4$; $y = 0$; $z = 4$.

12. (Andalucía Septiembre 2019) Ejercicio 3A.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x \quad\quad + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de "m".
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Solución: a) Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 0$ es compatible indeterminado y si $m = -4$ el sistema es incompatible. b) $x = 3t;\ y = -5t;\ z = t$ siendo $t \in \mathbb{R}$

13. (Andalucía Septiembre 2019) Ejercicio 3B.- Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución: 40, 60 y 80 grados.

14. (Andalucía Junio 2019) Opción B Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$ considera el sistema de ecuaciones dado

por $X^t A = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de ***m***.

Solución: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ tiene solución única. m = 1 tiene infinitas soluciones. m =–2 no tiene solución.

15. (Andalucía Septiembre 2018) B.3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad\ y - z = m \\ x + my + z = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m
b) Resuélvelo para m=1. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, halla una solución donde z=2.

Solución: a) para m distinto de 0 es compatible determinado y para m=0 el sistema es compatible indeterminado. B) x=0; y= 0; z=1. No es posible una solución con z=2

16. (Andalucía Junio 2018) A.3

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m
b) Resuélvelo para m= –2.

Solución: a) Para $m \neq 3$ es compatible determinado; para m =3 es incompatible.
b) x = –73/5; y = 9; z = –2/5

17. (Andalucía Septiembre 2017) Opción A. Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&3\\1&3&m-2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}m\\2m+1\\m-1\end{pmatrix}$$

a) [1,25 puntos] Discute el sistema según los valores de *m*.
b) [1,25 puntos] Para *m = 2*, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z=17$.

Solución: a) Si $m\neq 2$ el sistema es compatible determinado y si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x=-23;\ y=8;\ z=17$

18. (Andalucía Junio 2017) Opción B. Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Solución: a) No se puede deducir el precio de cada artículo. La información proporcionada no es suficiente. Todos los precios quedan dependientes del precio de uno de los artículos. b) 0,5 euros cada lápiz, 3,5 euros cada rotulador y 5 euros cada carpeta.

ARAGÓN

1. (Aragón Extraordinaria 2025) 2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 8x+my-6z=-8 \\ -x-2y+m^2z=m \end{cases}$$

Con $m\in\mathbb{R}$ un parámetro.

a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m=1$.

Solución: a) Si $m\neq 16$, $m\neq 1$ y $m\neq -1$ el sistema tiene 1 solución, si $m=16$ o $m=-1$ el sistema tiene 0 soluciones y si $m=1$ el sistema ∞ soluciones. b) Las soluciones del sistema tienen la expresión $x=-1+\frac{11}{2}\lambda;\ y=\lambda;\ z=\frac{15}{2}\lambda;$ siendo $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. (Aragón Extraordinaria 2024) 7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1g de M_1	10	10	20
para 1g de M_2	10	20	30
para 1g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Solución: Llamando "x" a los gramos del medicamento M_1, "y" a los gramos del medicamento M_2 y "z" a los gramos de M_3 las soluciones del problema son $\begin{cases} x=5000-\lambda \\ y=2000-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$. *Existen muchas formas posibles de hacerlo, dando valores de λ que hagan que la solución sea positiva (gramos), lo que implica que el valor de λ debe estar entre 0 y 2000.*

3. (Aragón Ordinaria 2024) 7. Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de

1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución: El precio con IVA de un producto A es 3 · 1.04 = 3.12 €, un producto B vale 10 · 1.10 = 11 € y un producto C vale 92 · 1.21 = 111.32 €..

4. (Aragón Extraordinaria 2023) 7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Solución: Hay 16 voluntarios en la sede de Huesca, 10 en la de Zaragoza y 5 en la de Teruel.

5. (Aragón Ordinaria 2023) 6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & & +mz & = & 0 \\ & my & +2z & = & 2+m^2 \\ x & +y & & = & 2m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor *m = 2.*

Solución: a) Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ el sistema es compatible determinado. Si $m = +\sqrt{2}$ o $m = -\sqrt{2}$ el sistema es compatible indeterminado. b) La solución es x = 2, y = 2, z = 1.

6. (Aragón Extraordinaria 2022) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ x+y+a^2z=0 \\ x+y+2az=0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para *a = 0.*

Solución: a) Para cualquier valor de a distinto de 0, de 1 y de 2 el sistema es compatible determinado (una única solución) y si a es 0, 1 o 2 el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)
b) $x=-t;\ y=z=t;\quad t\in\mathbb{R}$

7. (Aragón Ordinaria 2022) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x+3y+z=5 \\ 2x \quad +az=-4 \\ 4x \quad -3z=a+1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
b) (1 punto) Resuelve el sistema para *a = 1.*

Solución: a) Si $a \neq -\frac{3}{2}$ el sistema es compatible determinado. Si $a = -\frac{3}{2}$ el sistema es incompatible.

b) x = –1, y = 2, z = –2.

8. (Aragón Extraordinaria 2021) 7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.
b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado y para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. b) La solución es $x = \frac{7}{13};\ y = \frac{8}{13};\ z = 0$

9. (Aragón Extraordinaria 2020) Ejercicio 1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX = b$ según los valores del parámetro a
b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $a = 0$ es incompatible. Para $a = 0$ es compatible indeterminado. b) Las soluciones son $x = -1 + 2t;\quad y = 0;\quad z = t$

10. (Aragón Extraordinaria 2020) Ejercicio 2) Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Solución: La mascarilla desechable cuesta 0,8 €, la higiénica 1,3 € y la reutilizable 0,6 €.

11. (Aragón Ordinaria 2020) 1). Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Solución: Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado. Para $m = -2$ el sistema es incompatible. Para $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

12. (Aragón Septiembre 2019) Opción A.1.
a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{array}\right\}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando k=1.

Solución: a) Si $k \neq 0$ *y* $k \neq 2$ *es compatible determinado, si* $k = 0$ *ó* $k = 2$ *es incompatible*

b) $x = 1,\ y = -1,\ z = -2$

13. (Aragón Junio 2019) 1. a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

Solución: Hay 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada

14. (Aragón Junio 2018) A.1.
Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &x + y + mz = m \\ &mx + (m-1)y + z = 2 \\ &x + y + z = 1 \end{aligned}$$

a) Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
b) Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m=1*.

Solución: a) $m = 1$ *es compatible indeterminado y para m distinto de 1 es compatible determinado.*
b) $x = 2 - t, \quad y = -1, \quad z = t$

15. (Aragón Septiembre 2017) A.1.
Sea “m” una constante real. Determine para qué valores de “m” el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} &5x + 4y + 2z = 0 \\ &2x + 3y + z = 0 \\ &4x - y + m^2 z = m - 1 \end{aligned}$$

Solución: $m = -1$ *es incompatible,* $m = 1$ *es compatible indeterminado y para m distinto de 1 y -1 es compatible determinado.*

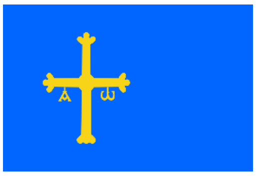
16. (Aragón Junio 2017) A.1. *(3 puntos)*
a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ :

$$\begin{aligned} &x + y = 1 \\ &\lambda x + z = 0 \\ &x + (1+\lambda)\, y + \lambda z = \lambda + 1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$.

Solución: a) Para $\lambda \neq -1$ *y* $\lambda \neq 0$ *el sistema es compatible determinado y para* $\lambda = -1$ *o* $\lambda = 0$ *el sistema es compatible indeterminado. b) x = 0, y = 1, z = 0.*

ASTURIAS



1. (Asturias Extraordinaria 2025) Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.

(b) **(0.75 puntos)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.

(c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Solución: a) Para $a = 0$ el sistema tendrá infinitas soluciones. No existe un valor de a para que el sistema no tenga solución. b) $a = 0$ c) Las soluciones del sistema tienen la expresión $x = 2\lambda;\ y = 2\lambda;\ z = \lambda;$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. (Asturias Ordinaria 2025) Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando ‘x’ días en la zona del oriente, ‘y’ días en la zona centro y ‘z’ días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) (**0.75 puntos**) Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) (**1 punto**) En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) (**0.75 puntos**) Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Solución: (a) $\left.\begin{matrix} 3x+4y+3z=29 \\ 5x+4y+8z=58 \\ x+y+z=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 58 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$.*(b)* Puede estar 2 días en la zona oriental, otros 2 días en la zona centro y 5 días en occidente. *(c)* www.ebaumatematicas.com

3. (Asturias Extraordinaria 2024) Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.
(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Solución: (a) $\left.\begin{array}{l} 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$. *(b) Se fabricaron 2 tazas, 2 platos y 4 teteras . (c) La situación planteada no es posible.*

4. (Asturias Ordinaria 2024) Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.
(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.
(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?
(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución: (a) $\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=410 \\ z=30 \\ x+y+3z=310 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$. *(b) Hay 100 ejemplares de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3. (c) Obtenemos como solución que debería haber 110 perros de la raza 1, –60 de la raza 2 y 90 de la raza 3. Esto es imposible pues el número de perros de la raza 2 sale negativo.*

5. (Asturias Extraordinaria 2023) Pregunta 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+az=-1 \\ 2x+y \quad\quad =1 \\ y+\ 2z=1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso *a = –3* si es posible.
(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique *x = 1*. Calcula la solución en ese caso.

Solución: a) Si a ≠ –3 el sistema es compatible determinado. Si a = –3 el sistema es compatible indeterminado. b) $x=\lambda;\ y=1-2\lambda;\ z=\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *c) a = –3. Solución: x = 1, y = –1, z = 1.*

6. (Asturias Extraordinaria 2022) Bloque 1.B.

Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y+\ z=1 \\ x+2y+\ z=-1 \\ 3x+3y+2z=m \end{array}\right\}$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que z = 3.

Solución: a) Si m = 0 es compatible indeterminado. Si m ≠ 0 es incompatible. b) x = 0, y = –2, z = 3.

7. (Asturias Ordinaria 2022) Bloque 1.B. Dado $a\in\mathbb{R}$ se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y \qquad =-1 \\ -x+2y+2z=1 \\ ax-2y+\ \ z=2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que x = 0.
(c) **(0.75 puntos)** Si a = 0, resuelve el sistema si es posible.

Solución: a) Si $a\neq 1$ es sistema es compatible determinado. Si a = 1 es compatible indeterminado.
b) La solución existe. Es x = 0, $y=\frac{-1}{2}$, z = 1. Para cualquier valor de a. c) x = 0; y = –0.5; z = 1.

8. (Asturias Extraordinaria 2021) Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax \qquad\quad + \ z=a \\ 2x \ -y \ - \ z=-1 \\ x \qquad\quad +az=a \end{array}\right\} a\in\mathbb{R}\,.$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de *a*. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

Solución: a) Para $a\neq -1$ y $a\neq 1$ el sistema es compatible determinado, para $a=-1$ el sistema es incompatible y para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado.
b) $x=1-\lambda;\ y=3-3\lambda;\ z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

9. (Asturias Ordinaria 2021) Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Solución: a) La solución es 300 € cada viaje al Caribe, 400 el viaje a Maldivas y 500 el viaje a Tailandia
b) Se pierden 1800 €. c) 490 €

10. (Asturias Extraordinaria 2020) Bloque 1.A Dado el sistema $\begin{cases} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \qquad a\in\mathbb{R} \\ ax=a \end{cases}$

a) Estudia la compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

Solución: a) Para $a \neq 1$ *es incompatible y para* $a = 1$ *es compatible determinado.*

b) Para $a = 1$ *la solución es* $x = 1; \quad y = 0$

11. (Asturias Ordinaria 2020) Bloque 1.A. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Solución: a) La solución es $x = 38$ € *el precio del libro, pero el precio de la calculadora y del estuche queda uno en función del otro* $y + z = 19$. *La calculadora vale 19 € menos el precio del estuche. No es posible determinar el valor exacto de la calculadora.*
b) Los precios son 38 € el libro, 15 la calculadora y 4 el estuche.

12. (Asturias Julio 2019) Opción A 1. Dado el sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a ∈ IR. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso a = 2. (1 punto)

Solución: a) $a \neq -1; a \neq 2$ *es compatible determinado. a=–1 es incompatible. a=2 es compatible indeterminado. b)* $x = t - 2; y = 3t - 4; z = t$

13. (Asturias Junio 2019) Opción A 1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} mx + y - z = 0 \\ 2x + my = m \\ x + mz = m \end{array}\right\} \quad m \in \mathbb{R}\ .$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = 1. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución x = 0; y = 1; z = 1. (0.5 puntos)

Solución: a) $m \neq 0; m \neq -1$ *y* $m \neq 1$ *es compatible determinado.* $m = 0; m = -1$ *o* $m = 1$ *es compatible indeterminado. b)* $x = 1 - t, y = 2t - 1, z = t$ *c) Cualquier valor de m.*

14. (Asturias Julio 2018) A.1.
Discutir el sistema y resolver en casos compatibles

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución: Para a distinto de 1 es incompatible; para m = 1 es compatible indeterminado con soluciones x= x; y= –2x; z=1

15. (Asturias Julio 2017) A.1.

Determina los valores de *a* para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles. (2.5 puntos)

$$\begin{cases} x + \quad\quad y = 1 \\ 2x + \quad\quad ay = 2 \\ 5x + (3a-1)\,y = 6 - a \end{cases}$$

Solución: Para a $\neq 1$ y a $\neq 2$ el sistema es incompatible. Para a = 1 el sistema es compatible determinado con solución x = 1 e y = 0. Para a = 2 el sistema es incompatible.

16. (Asturias Junio 2017) A.1.

Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad *k* que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

Solución: a) 8 ganados, 4 nulos y 8 perdidos. b) Con k = 7 (7000 euros) el problema no tiene solución.

BALEARES

1. (Baleares Extraordinaria 2025) Problema B1. — Dado el sistema

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

donde k es un número real cualquiera.

(a) **[1.5 puntos]** Discute, según el parámetro k, el número de soluciones que tiene el sistema.

(b) **[1 punto]** Resuelve el sistema cuando sea posible.

Solución: (a) Si $k \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ y $k \neq \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *(una única solución), si* $k = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ *o* $k = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ *el sistema es* ***incompatible*** *(sin solución). (b) La solución del sistema es* $x = \frac{1-k}{-k^2+k+3}$, $y = \frac{3}{-k^2+k+3}$, $z = \frac{-3k}{-k^2+k+3}$.

2. (Baleares Extraordinaria 2025) Problema B2. — Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3.50 €, cada hamburguesa cuesta 4 € y cada refresco cuesta 1.50 €. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

(a) **[1 punto]** ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 € y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

(b) **[1.5 puntos]** Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas. ¿Cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Solución: (a) El número de perritos calientes debe ser un múltiplo de 5 menor o igual a 65..
(b) Se vendieron 40 perritos calientes, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

3. (Baleares Ordinaria 2025) Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x + y - z = 40$ €,

Producto 2: $x - y + 2z = 90$ €,

Producto 3: $x + 2y = 70$ €,

Producto 4: $x - y + z = 50$ €.

(a) **[0.5 puntos]** Describe qué significa la ecuación del producto 1.

(b) **[2 puntos]** Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x, y, z? Justifica tu respuesta.

Solución: (a) Las cantidades para construir el producto 1 cumplen que 2 kg de madera más 1 kg de hierro supera en 40 € el precio de 1 kg de plástico. (b) El precio del kg de madera a 30 €, el kg de hierro a 20 € y el kg de plástico a 40 €.

4. (Baleares Ordinaria 2024) P1.- Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.
(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?
(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Solución: (a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$. *(b) No es necesaria una de las ecuaciones. Se supone que nos han cobrado bien y una de las informaciones es innecesaria. (c) La botella de vino tinto cuesta 14 euros, la de vino blanco cuesta 12.5 euros y la de vino rosado cuesta 7 euros.*

5. (Baleares Extraordinaria 2023) P1.- Sea el sistema

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ 2x+my=1 \\ x+mz=0 \end{cases},$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro *m*.
(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso *m = 1*.

Solución: (a) Si $m\neq 0$ y $m\neq \pm 1$ *el sistema tiene una única solución, si* $m=0$ *o* $m=-1$ *tiene cero soluciones y si* $m=1$ *el sistema tiene infinitas soluciones. (b)* $x=-\lambda;\ y=1+2\lambda;\ z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

6. (Baleares Extraordinaria 2022) 2. Durante un año, cierta empresa vende 21000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10000, 15000 y 20000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.
(a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo. (3 puntos)
(b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda=3$. (3 puntos)
(c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda dar. (4 puntos)

Solución: (a) $\left.\begin{array}{l} a+b+c=21000 \\ 2a+3b+4c=66400 \\ \lambda a+b=21000 \end{array}\right\}$ *(b) Se han vendido 3400 coches del modelo A, 10800 del modelo B y 6800 del modelo C. (c) Para* $\lambda=2$ *la situación planteada no es posible.*

7. (Baleares Ordinaria 2022) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro *a*,

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ ay \qquad =-3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\}$$

(a) Discuta el sistema según el parámetro a. (4 puntos)
(b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvalo. (6 puntos)

Solución: (a) Si $a\neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $a=0$ el sistema es incompatible.

(b) Para $a\neq 0$ la solución es $x=\frac{4}{3}-\frac{2}{a}$; $y=\frac{-3}{a}$; $z=\frac{-4}{9}a+\frac{2}{3}$.

8. (Baleares Extraordinaria 2021) 2. Una empresa fabrica tres tipos de bombilla: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la tipo B tiene 20 puntos LED y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas a diario es veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar a diario.
(a) Si = 2, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:
(i) plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema. (3 puntos)
(ii) clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar. (4 puntos)
(b) Si = 3, y la empresa fabrica a diario 1000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. (2 puntos)
En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar? (1 punto)

Solución: (a) (i) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1300 \\ x+2y+5z=3000 \\ x=2z \end{array}\right\}$ *(a) (ii) Es compatible determinado. Se fabrican 800 bombillas tipo A, 100 de tipo B y 400 de tipo C. (b) Si Si $n\neq 20000$ el sistema es incompatible. Si n = 20000 el sistema tiene solución. La solución es $x=3z$; $y=1000-4z$; $z=z$.*

9. (Baleares Ordinaria 2020) OPCIÓ A.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el parámetro a, y resuelva siempre que se pueda, de manera que el sistema:
(a) tenga solución única, (4 puntos)
(b) tenga infinitas soluciones, (4 puntos)
(c) no tenga solución. (2 puntos)

Solución: (a) Para $a\neq 0$ y $a\neq -1$ el sistema tiene solución única. La solución es $x=0; y=1; z=0$

(b) Para $a=0$ y $a=-1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las soluciones para $a=0$ son $x=1-t;\quad y=t;\quad z=0\quad t\in\mathbb{R}$. Para $a=-1$ las soluciones son $x=t;\quad y=1-t;\quad z=t\quad t\in\mathbb{R}$.

(c)Para ningún valor de a el sistema es sin solución.

10. (Baleares Ordinaria 2020) OPCIÓ B.1. Una empresa tiene tres minea: A, B y C, i en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) e hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:
- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?
(a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
(b) Clasifica el sistema. (2 puntos)
(c) Resuelve el sistema. (4 puntos)

Solución: (a) $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=700 \\ 2x+5y+3z=1800 \\ 3x+7y+z=1600 \end{array}\right\}$ *(b) El sistema tiene una única solución. (c) Debe extraer 200 toneladas de mineral de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.*

11. (Baleares Julio 2019) OPCIÓ A 1. a) Discute para que valores de *m* el sistema siguiente es compatible:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y\quad -z=m \\ 6x+6y+m^2z=-9 \end{array}\right\} ; \qquad \text{(7 puntos)}$$

b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución: a) Para $m\neq 3$ *y* $m\neq -3$ *es compatible determinado, para* $m=3$ *compatible indeterminado y para* $m=-3$ *es incompatible. b)* $x=\frac{9+5t}{2}$; $y=-6-4t$; $z=t$

12. (Baleares Junio 2019) OPCIÓ A 1. a) Discute para que valores de *a* el sistema siguiente es compatible:

$$\left.\begin{array}{l} (a+2)x+(a-1)y-z=1 \\ ax-\quad y\quad +\quad z=-1 \\ 11x+\quad ay-\quad z=a \end{array}\right\} ; \qquad \text{(7 puntos)}$$

b) Resuélvelo en el caso en que a = 0. (3 puntos)

Solución: a) Para $a\neq 4$ *y* $a\neq 5$ *es compatible determinado. Para* $a=4$ *0* $a=5$ *es incompatible.*
b) x = –1/10; y = –1/10; z = –11/10.

***13.* (Baleares Julio 2018) A.1**
a) Discute para que valores de *m* el sistema siguiente es compatible:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+my+z=m+2; \\ mx+y-z=0; \\ x+3y+z=0 \end{array}\right. ; \text{(7 puntos)}$$

b) Resuélvelo en el caso en que m = –2. (3 puntos)

Solución: a) para m distinto de –3 y 5 es compatible determinado; para m = –3 es incompatible y para m=5 es incompatible b) x = y = z = 0

14. (Baleares Septiembre 2017) A.1 Las edades de Joan, Miquel y Gabriel suman 70 años. La edad de Joan, el doble de la edad de Miquel y el triple de la edad de Gabriel suman 160 años y la edad de Gabriel es igual a la suma de las edades de Joan y Miquel. Calcula las edades de Joan, Miguel y Gabriel (7 puntos) y qué año nació cada uno. (3 puntos)

Solución: La edad de Joan es 15 años, la de Miquel 20 años y la de Gabriel 35 años.
Joan nació en el año 2017 – 15 = 2002, Miquel nació el año 2017 – 20 = 1997 y Gabriel nació el año 2017 – 35 =1982.

***15.* (Baleares Septiembre 2017) B.1**

a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible.

$$\left.\begin{aligned} ax+y-2z&=-1,\\ -x+ay+z&=2,\\ 3x+y-z&=0,\\ y+z&=3. \end{aligned}\right\}$$ (6 puntos)

b) Resuélvelo en el caso que sea compatible. (4 puntos)

Solución: a) $a=\frac{1}{3}$ y $a=5$. b) Para $a=\frac{1}{3}$ la solución del sistema es $x=\frac{-3}{25};\ y=\frac{42}{25};\ z=\frac{33}{25}$.

Para $a=5$ la solución del sistema es $x=1;\ y=0;\ z=3$.

***16.* (Baleares Junio 2017) A.1**

a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible.

$$\left.\begin{aligned} mx+3z&=m,\\ x+2y-z&=1,\\ 2x+y-z&=2. \end{aligned}\right\}$$ (7 puntos)

b) Resuélvelo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución: a) El sistema es compatible para cualquier valor de m.

b) Para $m=-9$ *las soluciones del sistema son* $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=-3+3\alpha \end{cases};\ \alpha\in\mathbb{R}$.

***17.* (Baleares Junio 2017) B.1**

Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua y suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si utilizamos el grifo 1, tardamos 10 horas para llenar el depósito, si utilizamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas, y si los utilizamos los tres, tardamos una hora.

Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es 10 litros por minuto, calcule el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

Solución: El caudal del grifo 1 es de 60 litros por hora, el grifo 2 tiene un caudal de 90 litros por hora y el grifo 3 un caudal de 450 litros por hora. El depósito tiene una capacidad de 600 litros.

CANARIAS

1. (Canarias PAU Extraordinaria 2025) 2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.
Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas? 2.5

Solución: Se necesitan 500 kg de producto vegetal, 200 kg de harina y 300 de productos cárnicos.

2. Canarias EBAU Extraordinaria 2024) 2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

Solución: Aythami tiene 8 €, Besay tiene 3 € y Chamaida tiene 2 €.

3. (Canarias EBAU Ordinaria 2024) 2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} kx+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \\ kx+y-kz=1 \end{array}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k. 1.25 ptos
b) Resolver el sistema cuando k = 4 1.25 ptos

*Solución: a) Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $k=-1$ o $k=3$ el sistema es **incompatible** (sin solución). b) La solución del sistema es x = 5, y = –3 y z = 4.*

4. (Canarias EBAU Extraordinaria 2023) 2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{array}\right. ,$$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos
b) Resolver el sistema para k = 2. 1 pto

*Solución: a) Si $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y si $k=-1$ el sistema es **compatible indeterminado**. b) La solución del sistema es $x=y=z=\frac{2}{3}$.*

5. (Canarias EBAU Ordinaria 2023) 2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven

30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 ptos

Solución: El precio del plato de escaldón es de 2.5 €, el de tollos de 5.5 € y el de carajacas de 7 €.

6. (Canarias EBAU Extraordinaria 2022) 2B.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x+6y+kz=0 \\ kx+4y+2z=2 \\ kx+6y+2z=k-2 \end{array}\right\}$

a) Discute la resolución del sistema según los valores que puede tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$. 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $\boldsymbol{k = 0}$ 1 pto

Solución: a) Si $k \neq \pm 2$ *el sistema es compatible determinado. Si* $k=-2$ *es incompatible y si* $k=2$ *es compatible indeterminado. b) La solución es* $x=6;\ y=-2;\ z=5$

7. (Canarias EBAU Ordinaria 2022) 2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro $\boldsymbol{k}$: $\left.\begin{array}{l} kx-y-z=1 \\ x+ky+2kz=k \\ x+y+z=-1 \end{array}\right\}$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$ 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema para $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ 1 pto

Solución: a) Si $k \neq 0$ *y* $k \neq -1$ *el sistema es compatible determinado. Si k = 0 o k = –1 es incompatible. b) La solución es x = 1, y = 0, z = 0*

8. (Canarias Extraordinaria 2021) 2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 ptos

Solución: Lovelace ha anotado 10000 puntos, Noerther 5000 y Germain 2500.

9. (Canarias Ordinaria 2021) 2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Solución: Ha comprado 10 sacos de la marca A, 12 de B y 44 de C.

10. (Canarias Extraordinaria 2020) Grupo B 2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro *k*. 1.75 ptos

b. Resuelva el sistema para *k = 0* 0.75 ptos

Solución: a. Para $k \neq 2$ *y* $k \neq -2$ *el sistema es compatible determinado. Para* $k=2$ *es compatible indeterminado. Para* $k=-2$ *es incompatible. b. La solución es* $x=5;\quad y=6;\quad z=-2$

11. (Canarias Ordinaria 2020) Grupo B 2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.
Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 ptos

Solución: Deben fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 de chocolate en polvo.

12. (Canarias Julio 2019) Opción A 2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+k^2z=3k \end{array}\right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 ptos)
b) Resolverlo para $k = 2$ (1 pto)

Solución: a) $k \neq 1; k \neq -1$ *es compatible determinado. k=1 es incompatible. k=–1 es compatible indeterminado b) x = 1; y = –9; z = 3*

13. (Canarias Julio 2018) Opción B 2.- Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k-1 \end{array}\right\}$$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k (1,5 puntos)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1 punto)

Solución: a) Para k ≠ 1 y k ≠2 el sistema es compatible determinado. Para k = 1 es compatible indeterminado y para k = 2 es incompatible. b) x = 2; y = –2 – t; z = t

14. (Canarias Junio 2018) Opción A 2.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+ky+kz=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k (1,25 ptos)
b) Resolver el sistema para $k = 1$ (1,25 ptos)

Solución: a) Si k ≠ 1 el sistema es compatible determinado. Si k = 1 el sistema es compatible indeterminado. b) $x=2\lambda;\ y=1-3\lambda;\ z=\lambda$

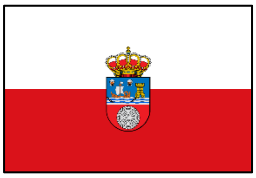
15. (Canarias Junio 2017) Opción B 3.- Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k-1 \end{array}\right\}$$

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 puntos)
b) Resolverlo para $k = 2$ (1 punto)

Solución: a) Si k ≠ 2 y k ≠–5 el sistema es compatible determinado. Si k = 2 el sistema es compatible indeterminado. Si k = –5 el sistema es incompatible. b) $x=-\frac{5t}{2}+2;\ y=3t-3;\ z=t$

CANTABRIA



1. (Cantabria Extraordinaria 2025) 1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y+z=4 \\ (a-1)x-3z=2 \\ y+\left(a^2+a+1\right)z=0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina los valores de *a* para los cuales el sistema es compatible.

b) [0,5 puntos] Considera $a=-1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución: a) El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de –2 y 0. b) Si $a=-1$ *el sistema es compatible determinado, siendo su solución* $x=-4, y=-2, z=2$. *c) El sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones tienen la expresión* $x=2+3\lambda;\ y=-7\lambda;\ z=\lambda$, *siendo* $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. (Cantabria Ordinaria 2025) Cuestión 1B. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y-z=1 \\ \left(a^2-2\right)y+2z=-2 \\ -x+z=0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

Tarea a. [1,5 puntos]. Halla los valores de *a* para los cuales el sistema es compatible.

Tarea b. [1 punto]. Considera $a=0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución: a) El sistema es compatible para cualquier valor de a distinto de –1 y 2. b) El sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones tienen la expresión $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

3. (Cantabria Extraordinaria 2024) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda\in$R.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para λ = 1. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Solución: 1) El sistema es incompatible para $\lambda = \frac{2}{3}$. *2) El sistema es compatible determinado para* $\lambda \neq \frac{2}{3}$. *3) El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor de* λ. *4)* $x=1,\ y=0,\ z=-1$.

4. (Cantabria Ordinaria 2024) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Solución: La nota de Antonio es 8, la de María es 9 y la de Paula es 10..

5. (Cantabria Ordinaria 2023) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de *a* el sistema es incompatible.
2) [1,25 PUNTOS] Dado *a = 4*, resuelva el sistema anterior si es posible.

Solución: 1) No existe ningún valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ *para el que el sistema es incompatible.*
2) La solución es x = 3; y = –2; z = –1.

6. (Cantabria Extraordinaria 2022) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *t*.

$$\begin{cases} tx+y+z=4 \\ x-ty+z=1 \\ x+y+z=t+2 \end{cases}$$

A. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene solución única.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema no tiene solución.

Solución: A. Para $t \neq -1$ *y* $t \neq 1$. ***B.*** *Para* $t=-1$. *La solución es* $x=\frac{-3}{2},\ y=\lambda,\ z=\frac{5}{2}-\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

C. Para $t=1$.

7. (Cantabria Ordinaria 2022) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\begin{cases} tx+y-2z=0 \\ x+y-tz=-1 \\ x+y+z=t \end{cases}$$

A. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t=0$ si es posible.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución: A. Cuando $t \neq -1$ y $t \neq 1$. La solución es x = –3, y = 2, z = 1. B. Para t = –1. La solución es: $x=-2-3t;\ y=t;\ z=1+2t$ *C. Para t = 1.*

8. (Cantabria Extraordinaria 2021) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x+3y=3\lambda \\ 3x+y=3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Para $\lambda=3$ *las soluciones son* $x=t;\ y=3-3t,\ t\in\mathbb{R}$ *2) Para cualquier valor de* λ *distinto de 3 y de –3.* $\text{Solución}: x=\dfrac{3}{\lambda+3};\quad y=\dfrac{3\lambda}{\lambda+3}$ *3) Para* $\lambda=-3$.

9. (Cantabria Ordinaria 2021) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x-y=1 \\ 4x-\lambda y=2\lambda-2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Para $\lambda=2$ *el sistema tiene infinitas soluciones. Las soluciones son* $x=t;\ \ y=2t-1$ *siendo* $t\in\mathbb{R}$. *2) Para* $\lambda\neq 2$ *y* $\lambda\neq -2$ *el sistema tiene solución única. Las soluciones son* $x=\dfrac{-1}{\lambda+2}$ *e* $y=\dfrac{-2\lambda-2}{\lambda+2}$ *3) Para* $\lambda=-2$ *el sistema no tiene solución.*

10. (Cantabria Extraordinaria 2020) Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(1-t)\,y=t \\ (1+t)\,x-3y=-t \end{cases}$ dependiente del parámetro *t*.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de *t* el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro *t* si es necesario.
2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de *t* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de *t* el sistema no tiene solución.

Solución: 1) Cuando $t\neq 2$ *y* $t\neq -2$ *las soluciones son* $x=y=\dfrac{t}{2-t}$ *2) Para t = –2 el sistema tiene infinitas soluciones y tienen la expresión* $x=-2-3t;\quad y=t$ *3) El sistema no tiene solución para t = 2.*

11. (Cantabria Ordinaria 2020) Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.
1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Solución: 1) $\left.\begin{array}{l} x+3y+5z=41 \\ y=2x \\ y+z=10 \end{array}\right\}$ *2) Este sistema es **compatible determinado**. Tiene solución única.*

3) Tiene 3 tanques, 6 submarinos y 4 aviones.

12. (Cantabria Julio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x+ay+z=-1 \\ ax+ay+a^2z=0 \end{cases}$ dependiente del parámetro *a*.

1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro *a*, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).
2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso *a = 2*.

Solución: 1) Para $a \neq 0$ *y* $a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, para* $a=0$ *es compatible indeterminado y para* $a=1$ *es incompatible. 2)* $x=\frac{-1+3t}{2}$; $y=\frac{1-7t}{2}$; $z=t$

13. (Cantabria Julio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\begin{cases} tx+y-z=0 \\ 2ty+z=1 \\ -x+ty+2z=1 \end{cases}$$

1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro *t*.
2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso *t = 1*.

Solución: 1) Para $t \neq 1$ *y* $t \neq -\frac{1}{3}$ *el sistema es compatible determinado, para* $t=1$ *es compatible indeterminado y para* $t=-\frac{1}{3}$ *es incompatible. 2)* $x=1-3t$; $y=t$; $z=1-2t$

14. (Cantabria Junio 2019) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro *t*.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de *t*, el tipo de sistema.
2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso *t* = 1.

Solución: 1) Para $t \neq 0$ *y* $t \neq 1$ *el sistema es compatible determinado. Para* $t=0$ *o* $t=1$ *el sistema es compatible indeterminado.*

15. (Cantabria Septiembre 2018) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1 Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro *m*:

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro *m*.
2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

Solución: 1) Si $m \neq 0$ *el sistema es compatible determinado y si* $m = 0$ *el sistema es incompatible. 2) Para* $m \neq 0$ *la solución del sistema es* $x = 1;\ y = \frac{-1}{m};\ z = \frac{1-m^2}{m^2}$

16. (Cantabria Junio 2018) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1
Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro *b*.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$

Solución: 1) Si $b \neq 2$ *y* $b \neq -2$ *el sistema es incompatible. Si b = –2 o b = 2 el sistema es compatible determinado. 2) La solución es* $x = -1;\quad y = -1;\quad z = 0$

17. (Cantabria Septiembre 2017) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1
Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro *t*:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}.$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial de la forma $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro *t*, calculando todas las soluciones en los casos en los que sea compatible.

Solución: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *2) Si t ≠ 0 el sistema es compatible determinado. La solución es* $x = 3t + 2;\ y = 3t + 2;\ z = -6t - 1$. *Si t = 0 el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son x = 2; y = 1 – t; z = t.*

18. (Cantabria Junio 2017) OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2 Ejercicio 1
Considere el sistema matricial

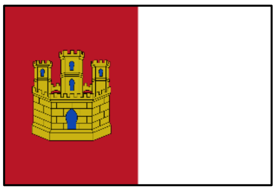
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Determine los valores de *a* para que el sistema sea compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso *a=3*.

Solución: 1) Para a ≠ 0. 2) El sistema es compatible indeterminado para a = 1. Las soluciones son: $x = -3;\ y = 5 - t;\ z = t$ *. La solución para a = 3 es x = –11/3; y = 17/3; z = 0.*

CASTILLA LA MANCHA



1. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2025) EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 4x+2y=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$.

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a\in\mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a=0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Solución: a.1) Si $a\neq 3$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si $a=3$ el sistema es compatible indeterminado (∞ soluciones). a.2) $x=-1,\ y=2,\ z=-1$

2. (Castilla la Mancha Ordinaria 2025) EJERCICIO 3. Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} x+y+a\cdot z=1 \\ x \qquad -2z=a \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$.

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a=0$.

Solución: a.1) Si $a\neq 3$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si $a=3$ el sistema es incompatible (0 soluciones). a.2) $x=\frac{4}{3},\ y=\frac{-1}{3},\ z=\frac{2}{3}$

3. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2024) 1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Solución: a) $\left.\begin{matrix} x+y+z=157 \\ x+2y+3z=278 \\ x \qquad -kz=0 \end{matrix}\right\}$. *b) El sistema tiene solución única para cualquier valor de k distinto de 1 y mayor que 0. Con lo planteado surge un sistema que no tiene solución.*

4. (Castilla la Mancha Ordinaria 2024) 1.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{r} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{array}\right\}$

a) [**1'5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.
b) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para a = 1.

Solución: a) Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ *el sistema es compatible determinado, si* $a = 2$ *el sistema es incompatible y si* $a = 5$ *el sistema es compatible indeterminado. b) La solución del sistema es* $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

5. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2023) 1.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x+y-z=-1 \\ -x+ay+z=2 \\ 2x+y+az=3 \end{cases}$, con $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* = 2, si es posible.

Solución: a) Si $a \neq -1$ y $a \neq 2.5$ *el sistema es compatible determinado, si* $a = 2.5$ *o* $a = -1$ *el sistema es incompatible. b) La solución del sistema es x = 0,* $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.

6. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2022) 1. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax \qquad + \; z=0 \\ x+\; y+2z=1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* = 1, si es posible.

Solución: a) Si $a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado y si* $a = 1$ *el sistema es compatible indeterminado. b) Las soluciones son* $x = -t;\ y = 1-t;\ z = t;\ t \in \mathbb{R}$

7. (Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022) 2. a) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

Solución: La única solución es: Un lápiz cuesta 50 cts, un cuaderno 150 cts y una agenda 200 cts

8. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2021) 2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ x \qquad +z=a \\ ax+2y+z=3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 0$ *y* $a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, para a = 0 es incompatible y para a = 1 es compatible indeterminado. b) La solución es x = 1, y = 0, z = 1.*

9. (Castilla la Mancha Ordinaria 2021) 2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ a\cdot x \quad +z=a-1 \\ x \quad -y+z=3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente es sistema anterior para $a=0$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, para a = 1 es incompatible. b) La solución es x = 3, y = –1, z = –1.

10. (Castilla la Mancha Extraordinaria 2020) 2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y+az=a \\ x+ay+2z=a \\ -x+y+z=1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

Solución: a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -4$ el sistema es compatible determinado. Si $a=2$ el sistema es compatible indeterminado. Si $a=-4$ el sistema es incompatible. b) $x=0;\quad y=1-t;\quad z=t$

11. (Castilla la Mancha Ordinaria 2020) 2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax-ay-z=a \\ ax-ay \quad =a \\ ax+2y-z=1 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente es sistema anterior para $a=2$, si es posible.

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -2$ ***el sistema es compatible determinado.*** *Para $a=0$* ***el sistema es compatible indeterminado****. Para $a=-2$* ***es incompatible.*** *b) La solución es $x=\frac{3}{4};\quad y=\frac{-1}{4};\quad z=0$*

12. (Castilla la Mancha Julio 2019) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} x-(a-2)y-z=1 \\ x-\quad 2y+z=-4 \\ x-\quad 3y+az=-a^2 \end{array}\right\} ;\ (1{,}5\ \text{puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 3. (1 punto)

Solución: a) $a \neq 3$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado. a=2 el sistema es incompatible. A=3 el sistema es compatible indeterminado. b) $x=6+3t$; $y=5+2t$; $z=t$

13. (Castilla la Mancha Junio 2019) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} ax+2y \quad =a^2 \\ -x+\ y+z=5 \\ x-ay-z=-(4+a) \end{array}\right\} ;\ (1{,}5\ \text{puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 1. (1 punto)

Solución: a) Para ***a*** *distinto de 0 y 1 el sistema es compatible determinado. a = 0 es incompatible. a = 1 es compatible indeterminado. b) $x=1-2t,\ y=t,\ z=6-3t$*

14. (Castilla la Mancha Julio 2018) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = –3*. **(1 punto)**

Solución: a) Para $a \neq -3$ *y* $a \neq 3$ *el sistema es incompatible. Para a = –3 o a = 3 el sistema es compatible indeterminado. b) Las soluciones son* $x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t; \quad y = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t; \quad z = t$

15. (Castilla la Mancha Junio 2018) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = 2*. **(1 punto)**

Solución: a) Para $a \neq 2$ *y* $a \neq 7$ *el sistema es compatible determinado. Para a = 2 el sistema es compatible indeterminado y para a = 7 el sistema es incompatible.*
b) Las soluciones son $x = -7t - 2;\ y = 3t + 2;\ z = t$ *con* $t \in \mathbb{R}$

16. (Castilla la Mancha Septiembre 2017) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = 0*. **(1 punto)**

Solución: a) Para $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$ *el sistema es compatible determinado y para a = 1 o a = –2 es incompatible. b) La solución del sistema es* $x = -\frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{1}{2}$

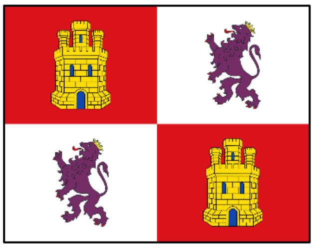
17. (Castilla la Mancha Junio 2017) 3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{array}\right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = –1*. **(1 punto)**

Solución: a) Para $a \neq 0$ *y* $a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado. Para a = 0 o para a = 1 el sistema es incompatible. b)* La solución es $x = 8; \quad y = -\frac{21}{2}; \quad z = -\frac{15}{2}$

CASTILLA – LEÓN



1. (Castilla - León Extraordinaria 2025) Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$. **(1,5 puntos)**

b) …**(1 punto)**

Solución: El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$. *Para* $k = -1$ *las soluciones del sistema son* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. (Castilla - León Ordinaria 2025)
Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m, indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Solución: a) Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *(una única solución), si* $m = 5$ *el sistema es* ***compatible indeterminado*** *(infinitas soluciones) y si* $m = 2$ *el sistema es* ***incompatible*** *(sin solución). b) Para* $m = 3$ *la solución del sistema es* $x = 0,\ y = 2,\ z = -3$..

3. (Castilla - León Extraordinaria 2024) E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema: $\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$ **(1.2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0.8 puntos)**

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *(una única solución), si* $\lambda = 1$ *el sistema es* ***compatible indeterminado*** *(infinitas soluciones) y si* $\lambda = 2$ *el sistema es* ***incompatible*** *(sin solución). b)* $x = 2 - 3\alpha;\ y = \alpha;\ z = 1 - 2\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}$.

4. (Castilla - León Ordinaria 2024) E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}+z=0 \\ 2ax+y=0 \\ 2x+y+az=0 \end{cases}$$ **(1.2 puntos)**

b) Resolverlo para $a=1$. **(0.8 puntos)**

Solución: a) Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *(una única solución) y si* $a=1$ *o* $a=2$ *el sistema es* ***compatible indeterminado*** *(infinitas soluciones). b)* $x=\lambda,\ y=-2\lambda,\ z=0;\ \lambda\in\mathbb{R}$.

5. (Castilla - León Extraordinaria 2023) E1.- (Álgebra)

Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

Determinar todos los a, $b \in \mathbb{R}$ para que $x = 5$, $y = -2$, $z = -2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

Solución: a) $\begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$ *b) Los valores buscados son* $a=3b, b\in\mathbb{R}$. *Para que sea su única solución debe ser* $a=3b, b\in\mathbb{R}$ *y* $b\neq 0$.

6. (Castilla - León Ordinaria 2023) E1.- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

Solución: Con $\lambda=1$ *y* $\mu=0$ *el rango de A es 2 y el de A/B también siendo menor que el número de incógnitas. El sistema tiene infinitas soluciones.*

7. (Castilla - León Extraordinaria 2022) E1.- (Álgebra)

a) Discuta según los valores del parámetro *m* el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+mz=4 \\ 2x-y+2z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$ **(1.2 puntos)**

b) Resuélvalo para *m = 2*. **(0.8 puntos)**

Solución: a) Si $m\neq 1$ *el sistema es compatible determinado (una única solución). Si* $m=1$ *el sistema es incompatible (sin solución). b) La solución es x = 1, y = 1, z = 1.*

8. (Castilla - León Ordinaria 2022) E1.- (Álgebra)

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x+2my-z=0 \\ x+2y+mz=0 \\ x-my+mz=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los distintos valores de *m*. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema si $m=-2$. **(1 punto)**

Solución: a) Si $m\neq -\frac{1}{2}$ *y* $m\neq -2$ *el sistema es compatible determinado, si* $m=-\frac{1}{2}$ *o* $m=-2$ *es compatible indeterminado. b)* $x=\frac{5}{4}t;\ y=\frac{3}{8}t;\ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

9. (Castilla - León Extraordinaria 2021) E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Si $\lambda\neq 0$ *y* $\lambda\neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si* $\lambda=0$ *es incompatible y si* $\lambda=1$ *es compatible indeterminado. b)* $x=t;\ y=t-1;\ z=1-2t,\ t\in\mathbb{R}$

10. (Castilla - León Ordinaria 2021) E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=-1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Si $\lambda\neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si* $\lambda=1$ *es compatible indeterminado. b) La solución es x = 0, y = t, z = t, siendo* $t\in\mathbb{R}$

11. (Castilla - León Extraordinaria 2020) E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ x+\lambda y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Para $\lambda\neq 0$ *y* $\lambda\neq 1$ *el sistema es compatible determinado. Para* $\lambda=0$ *es incompatible. Para* $\lambda=1$ *es compatible indeterminado. b)* $x=1-t;\ y=t;\ z=1$ *con* $t\in\mathbb{R}$

12. (Castilla - León Ordinaria 2020) E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-y+az=0 \\ x-z=0 \\ 2x+ay-2z=0 \end{cases}$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a. **(1,2 puntos)**

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a=-1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ ***el sistema tiene solución y esta solución es única.*** *Para $a=0$* ***tiene infinitas soluciones.*** *Para $a=-1$* ***tiene infinitas soluciones. b)*** *La solución es $x=t;\ y=0;\ z=t$*

13. (Castilla- León Julio 2019) Opción A E1.- a) Discutir según los valores del parámetro el sistema de ecuaciones lineales m

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{array}\right\}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

Solución: a) El sistema es compatible indeterminado siempre. No depende del valor de m.
b) La solución es $x=3-2t,\ y=-2+3t,\ z=t$.

14. (Castilla-León Junio 2019) Opción A: E1.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m=2$. **(1 punto)**

Solución: a) Para m≠1 el sistema es compatible determinado. Para m=1 el sistema es incompatible.
b) x=1, y=1, z=1

15. (Castilla- León Julio 2018) OPCIÓN A E1.- Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

• El primero de ellos, x, es la suma de los otros dos.

• El segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

Solución: a) $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$; $x=8\lambda;\ y=7\lambda;\ z=\lambda$ *b) x = y = z = 0*

16. (Castilla- León Junio 2018) OPCIÓN A E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0,8 puntos)**

Solución: a) Para $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Para $\lambda=-2$ es incompatible. Para $\lambda=1$ es compatible indeterminado. b) $x=1-t;\ y=0;\ z=t$ con $t \in \mathbb{R}$

17. (Castilla-León septiembre 2017) Opción B E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

Solución: a) Es compatible indeterminado para cualquier valor de m. b) $x=t, \quad y=1-t, \quad z=0$

18. (Castilla-León Junio 2017) Opción B E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(1 punto)**

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$, SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. Si $\lambda = 1$, SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO. b) $x=2t; \quad y=1-3t; \quad z=t$

CATALUÑA

1. (Cataluña PAU Extraordinaria 2025) Ejercicio 2
Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=5\\ mx+2z&=0\\ my-z&=m \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *m*. [1,25 puntos]
b) Resuelva el sistema para $m=1$. [0,5 puntos]
c) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones. [0,75 puntos]

*Solución: a) Para $m\neq 0$ y $m\neq -1$ el sistema es **compatible determinado**, para $m=0$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $m=-1$ el sistema es **incompatible.** b) La solución del sistema es* $x=-2;\ y=2;\ z=1$. *c) Para $m=0$ las soluciones del sistema son* $\begin{cases} x=5-3\lambda\\ y=\lambda\\ z=0 \end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$.

2. (Cataluña PAU Ordinaria 2025) Ejercicio 2
Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} y-z&=p+3\\ p^2x-z&=5\\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *p*. [1.25 puntos]
b) Resuelva el sistema para el caso $p=-1$. [0,5 puntos]
c) Para el caso $p=-1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy=10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

*Solución: a) Para $p\neq -1$ **y** $p\neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $p=-1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $p=1$ el sistema es **incompatible.** b)* $\begin{cases} x=5+\lambda\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda \end{cases}$.

c) Hay dos soluciones. Una es $x=5,\ y=2,\ z=0$ y otra es $x=-2,\ y=-5,\ z=-7$.

3. (Cataluña PAU Extrardinaria 2024) 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde *m* es un parámetro real.

$$\left.\begin{aligned} x-3y+mz&=-2\\ x+my+2z&=3\\ x+y+2z&=m \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema según el valor del parámetro *m*. [1.25 puntos]
b) Encuentre la solución del sistema para $m=0$. [0.5 puntos]

c) Para *m = 2*, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$. [0,75 puntos]

*Solución: a) Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado**, para $m = 1$ el sistema es **incompatible** y para $m = 2$ el sistema es **compatible indeterminado**. b) La solución del sistema es $x = -11$, y = –3, z = 7. c) Existe una solución que cumple lo pedido: x = 5, y =1, z = –2.*

4. (Cataluña PAU Ordinaria 2024) 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ x-y+kz=3 \\ 3x+3y=1 \end{array}\right\}$$

donde *k* es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *k*, y resuélvalo para *k* = 0. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para *k* = –1. [0,75 puntos]

c) Para *k* = –1, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos

*Solución: a) Para $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**. b)* $x = \frac{1}{3} - \lambda;\ y = \lambda;\ z = \frac{-8}{3} - 2\lambda;$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ *.c)* $\left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=4 \\ x-y-z=3 \\ 3x+3y=2 \end{array}\right\}$.

5. (Cataluña PAU Extraordinaria 2023) 3. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, donde *m* es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*. [1,25 puntos]

b) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso *m = 1*. [1,25 puntos]

Solución: a) Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es incompatible (sin solución). b) La solución del sistema para m = 1 es $x = 2;\ y = \frac{-3}{2};\ z = \frac{3}{2}$.

6. (Cataluña PAU Ordinaria 2023) 4.

Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ. [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda = -1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]

Solución: a) Si $\lambda \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = -1$ el sistema es compatible indeterminado. b) $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$. *Las soluciones del sistema son los infinitos puntos de la recta donde coinciden los tres planos del sistema (cada una de las ecuaciones).*

7. (Cataluña PAU Extraordinaria 2022) 3.

Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro a.

***a*)** Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a. [1,25 puntos]

***b*)** Si $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ *el rango de A es 3 y si* $a=-2$ *o* $a=2$ *el rango de A es 2.*

b) $X=\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$

8. (Cataluña PAU Ordinaria 2022) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a. [1,5 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso a = 2. [1 punto]

Solución: a) Si $a \neq -1$ *y* $a \neq 2$ *el sistema es compatible determinado. Si a = –1 o a = 2el sistema es compatible indeterminado.*

b) Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x=t;\ y=1-t;\ z=0;\quad t\in\mathbb{R}$

9. (Cataluña Extraordinaria 2021) 1. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k. [1,25 puntos]

b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 1$, y haga una interpretación geométrica. [1,25 puntos]

Solución: a) El sistema es compatible determinado para k ≠ 1 y k ≠ 3. Es compatible indeterminado para k = 1. Es incompatible para k = 3. b) $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=t,$ siendo $t\in\mathbb{R}$

10. (Cataluña Ordinaria 2021) 2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real p:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro p. [1,25 puntos]

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso p = 2. [1,25 puntos]

Solución: a) Para $p \neq 0,\ p \neq 1$ *y* $p \neq 2$ *el sistema es compatible determinado. Si p = 0 o p = 1 el sistema es incompatible. Si p = 2 el sistema es compatible indeterminado. b)* $x = \frac{3}{2} + t;\ y = -1 - 3t;\ z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

11. (Cataluña Ordinaria 2020) Série 1. 2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *k*:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *k*. [1,25 punts]
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas *k* = 0. [1,25 punts]

Solución: a) Para $k \neq 10$ *y* $k \neq -4$ ***el sistema es compatible determinado***. *Para* $k = 10$ ***el sistema es incompatible***. *Para* $k = -4$ ***el sistema es compatible indeterminado.*** *b)* $x = 1;\quad y = 18;\quad z = -1$

12. (Cataluña Septiembre 2019) Serie 5. 2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde *a* es un parámetro real.

***a*)** Encuentra los valores del parámetro *a* para el que la matriz es invertible. **(1 punto)**
***b*)** Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro *a*. **(1 punto)**

Solución: a) A es invertible si el parámetro a es distinto de 0 y de –1. b) Si $a \neq 0$ *y* $a \neq -1$ *los planos se cortan en un punto. Si* $a = 0$ *son planos que se cortan dos a dos. Si* $a = -1$ *los planos se cortan en una recta.*

13. (Cataluña Junio 2019) Serie 1. 2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro k:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1 \\ x + k^2 y + 3z &= 2k \\ 3x + 7y + 7z &= k - 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.
b) Resuelve el sistema para el caso de k = –1.

Solución: a) Para $k \neq -1$ *y* $k \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, para k = –1 es compatible indeterminado, para k = 1 es incompatible. b)* $x = 1 - 7t;\ y = t;\ z = -1 + 2t$

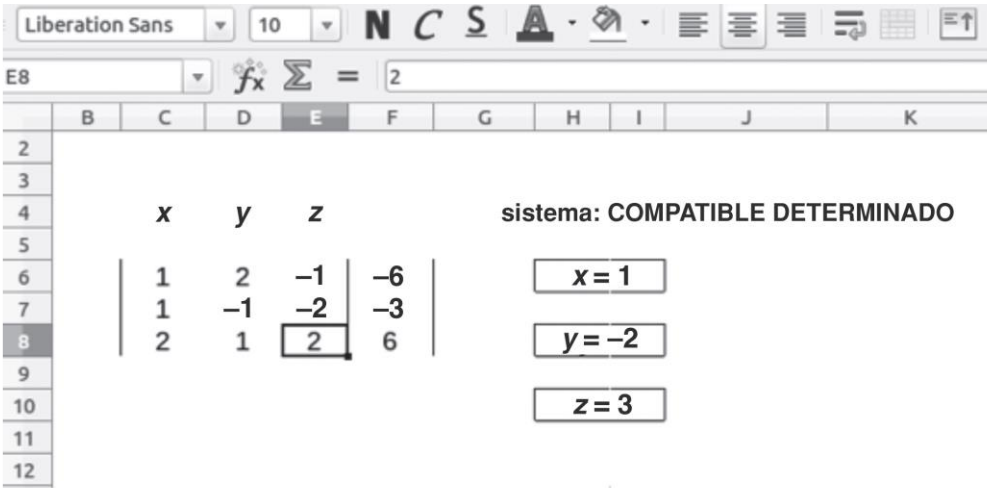
14. (Cataluña Septiembre 2018) 2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real *a*.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

***a*)** Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro *a*. [1 punto]
***b*)** Resuelva el sistema para el caso *a = 1*. [1 punto]

Solución: a) Para $a \neq 2$ *el sistema es compatible determinado y para* $a = 2$ *el sistema es compatible indeterminado. b) La solución del sistema para a = 1 es x = 0, y = 2, z = 1.*

15.(Cataluña Junio 2018) 6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:



a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.
[1 punto]

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?
[1 punto]

Solución: a) $\left.\begin{matrix} x+2y-z=-6 \\ x-y-2z=-3 \\ 2x+y+2z=6 \end{matrix}\right\}$ *. La solución es correcta.*

b) Se debería cambiar el 2 por –3 para conseguir un sistema incompatible.

16. (Cataluña Septiembre 2017) 3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro real a. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a=2$. [1 punto]

Solución: a) Para $a\neq 2$ *el sistema es compatible determinado y para* $a=2$ *el sistema es compatible indeterminado. b)* $x=\lambda;\ y=2-\lambda;\ z=1$, *siendo* $\lambda\in\mathbb{R}$.

17. (Cataluña Junio 2017) 1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x+y-z=0 \\ y+z=10 \\ 2\lambda x-y+5\lambda z=30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso λ = 1. [1 punto]

Solución: a) Si $\lambda\neq 0$ *y* $\lambda\neq -1$ *el sistema es compatible determinado (una única solución), si* $\lambda=0$ *o* $\lambda=-1$ *el sistema es incompatible (sin solución) b)* $x=2;\ y=4;\ z=6$

18. (Cataluña Junio 2017) 4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ x+az=1 \\ y+z=a \end{cases}.$$

a) Compruebe que $a \neq 0$. [1 punto]

b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro *a*. [1 punto]

Solución: a) ***www.ebaumatematicas.com*** ***b)*** $x=\dfrac{2-a^2}{2};\ y=\dfrac{a}{2};\ z=\dfrac{a}{2}$

EXTREMADURA

1. (Extremadura Extraordinaria 2025) <u>EJERCICIO 1A.</u> [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con *m* ∈ R: $\begin{cases} mx+7y+5z=0 \\ x+my+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro *m*.
b) Resolver para el caso $m=1$.

Solución: a) Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=-1$ el sistema es incompatible (sin solución). b) $x=5, y=\frac{5}{2}, z=\frac{-9}{2}$.

2. (Extremadura Ordinaria 2025) <u>EJERCICIO 1A.</u> [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde *k* ∈ R: $\begin{cases} x+ky+z=2+k \\ 2x-y-kz=1-k \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro *k*.
b) Resolver para el caso $k=1$.

Solución: a) Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ o $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
b) Para $k=1$ las soluciones del sistema son $x=1;\ y=\alpha;\ z=2-\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (Extremadura Extraordinaria 2023) 2.
Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso *a = 1*. (0.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $a=1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a=2$ el sistema es incompatible. Para a = 1 las soluciones son $x=0;\ y=1-\lambda;\ z=\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (Extremadura Ordinaria 2023) 3. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro *b* (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ x+by+(1+b)z=1 \end{array}\right\}$$

Solución: Si $b \neq 0$ y $b \neq 1$ los tres planos se cortan en un punto, si $b = 0$ los planos se cortan dos a dos, pero los tres no coinciden en ningún punto y si $b = 1$ dos planos son coincidentes y se cortan con el tercero en una recta.

5. (Extremadura Extraordinaria 2022) 2. Discutir en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} 4x + y - 2az = a \\ ax - y \quad + z = 0 \\ y - az = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: Si $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y si $a = 2$ el sistema es incompatible (sin solución).

6. (Extremadura Extraordinaria 2021) 2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ y = 1 \\ x + ay = a \\ ax + 2y = 1 \end{array}\right\}$$

(2 puntos)

Solución: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es incompatible. Si a = 1 el sistema es compatible determinado. La solución es x = 1; y = 0. Si a = –1 el sistema es compatible determinado. La solución es x = –1; y = 0.

7. (Extremadura Ordinaria 2021) 2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x - \ y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{array}\right\}$$

(2 puntos).

Solución: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 0$ el sistema es compatible determinado. La solución es x = y = 0. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son: $x = 1 + t;\ y = t,\ t \in \mathbb{R}$,

8. (Extremadura Extraordinaria 2020) 2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (1,25 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad + \lambda z = 1 \\ x + \ y + \lambda z = 1 \\ \lambda x - y + \ z = 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

Solución: a) Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = -1$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado. b) $x = 1 - t;\ y = 0;\ z = t$.

9. (Extremadura Ordinaria 2020) 2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones. (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad \lambda y - \ z = 1 \\ -\lambda x + \quad y \quad = \lambda \\ (\lambda + 3) y - 2z = 4 \end{array}\right\}$$

Solución: El sistema es compatible determinado si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$. El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 1$ o $\lambda = 2$.

10. (Extremadura Julio 2019) OPCIÓN B 1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - az = 2 \\ x + y \qquad = a+1 \\ (a+1)x + y - z = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: Para $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado, para $a = 1$ es compatible indeterminado y para $a = -1$ es incompatible.

11. (Extremadura Junio 2019) OPCIÓN A 1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ ax + y - z = 2 \\ 5x + 3y + z = 2a \end{array}\right\}$$

Solución: Si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{1}{3}$ el sistema es compatible determinado. En el resto de casos es incompatible.

12. (Extremadura Junio 2018) OPCIÓN A 1. (a) Discuta, en función del parámetro λ el sistema lineal de ecuaciones **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{array}\right\}$$

(b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$. **(0,5 puntos)**

Solución: (a) Si $\lambda \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado. Si $\lambda = -1$ es incompatible. Si $\lambda = 1$ es compatible indeterminado. (b) La solución es $x = 2 - 3t; \quad y = -1 + 2t; \quad z = t$

13. (Extremadura Julio 2017) OPCIÓN B 1.- Considere el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x \;\; + y \qquad = 0 \\ x \qquad - z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \end{array}\right\}$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

(a) Para que el sistema sea compatible determinado. **(0,75 puntos)**

(b) Para que el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

(c) Para que el sistema sea incompatible. **(0,75 puntos)**

Solución: (a) Si $b \neq a + c$. (b) Para $b = a - 1$ y $c = -1$ (c) $b = a + c$ y $c \neq -1$

14. (Extremadura Junio 2017) OPCIÓN A 1.- (a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{llll} 3x & & -5z & = 3 \\ 3x & -3y & +2z & = 0 \\ 2x & -y & -z & = 1 \end{array}\right\}.$$

(1,5 puntos)

(b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones. **(1 punto)**

Solución: (a) Es compatible indeterminado (b) Las soluciones son: $x = 1 + \frac{5}{3}t; \quad y = 1 + \frac{7}{3}t; \quad z = t$.

GALICIA

1. (Galicia Extraordinaria 2025) PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).

2.2 Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} x + my + z = m \\ x + (3-m)z = 2m \\ my + 2z = 3m \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 0$ *y* $m \neq 4$ *el sistema es compatible determinado, si* $m = 0$ *el sistema es compatible indeterminado y si* $m = 4$ *el sistema es incompatible.*

2. (Galicia Ordinaria 2025) PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos).

2.2. Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 1$ *y* $m \neq -2$ *el sistema es compatible determinado, si* $m = 1$ *el sistema es compatible indeterminado y si* $m = -2$ *el sistema es incompatible.*

3. (Galicia ABAU Extraordinaria 2024) PREGUNTA 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx + 3z = m \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 3$ *el sistema es compatible determinado y si* $m = 3$ *el sistema es incompatible.*

4. (Galicia ABAU Ordinaria 2024) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de *m*, el sistema $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 0$ *y* $m \neq 4$ *el sistema es compatible determinado y si* $m = 0$ *o* $m = 4$ *el sistema es incompatible.*

5. (Galicia ABAU Extraordinaria 2023) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq -1$ *y* $m \neq 2$ *el sistema es compatible determinado, si* $m = -1$ *el sistema es compatible indeterminado y si* $m = 2$ *el sistema es incompatible.*

6. (Galicia ABAU Ordinaria 2023) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de *m*, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 4$ el sistema es incompatible.

7. (Galicia ABAU Extraordinaria 2022) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $m = 2$ es incompatible. Si $m = -1$ es compatible indeterminado.

8. (Galicia ABAU Ordinaria 2022) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1 \\ x + m^2z = 0 \end{cases}$

Solución: Si $m \neq 0, m \neq 3$ y $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $m = 0$ o $m = 1$ es compatible indeterminado y si $m = 3$ es incompatible.

9. (Galicia Extraordinaria 2021) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$

Solución: Para $m \neq 0$ el sistema es compatible determinado y para $m = 0$ el sistema es incompatible.

10. (Galicia Ordinaria 2021) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

Solución: Para $m \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado y para m = –1 o m = 1 el sistema es incompatible.

11. (Galicia Extraordinaria 2020) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$

Solución: El sistema es compatible determinado para $m \neq 0; m \neq -3$ y $m \neq -1$. Es incompatible para $m = 0$ o $m = -1$. El sistema es compatible indeterminado para $m = -3$.

12. (Galicia Ordinaria 2020) 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+z=0 \\ x+my=0 \end{cases}$

Solución: Para $m \neq \pm 1$ *el sistema es compatible determinado. Para* $m=1$ *el sistema es incompatible. Para* $m=-1$ *el sistema es incompatible.*

13. (Galicia Julio 2019) Opción B 1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x-y+3z=m \\ my-2z=-2 \\ x+(m-1)y+(m+3)z=m \end{cases}$$

b. Resuélvelo si es posible en los casos $m=0$ y $m=2$

Solución: a. Si $m \neq 0$ *y* $m \neq -2$ *el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.* $m=0$ *es COMPATIBLE INDETERMINADO.* $m=-2$ *es INCOMPATIBLE.*
b) Para m=0 la solución es $x=t-3;\ y=t;\ z=1$*. Para m=2 la solución es x = 0; y = –1/2, z = 1/2.*

14. (Galicia Junio 2019) Opción B 1. Da respuesta a los siguientes apartados:

a. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$

b. Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

Solución: a) $m \neq 0;\quad m \neq 3$ *es compatible determinado. m=0 es compatible indeterminado. m=3 es incompatible b) m=0 →* $x=t; y=2t-6; z=-2$*. m = 4 → x = –9;y = 0;z = 6*

15. (Galicia Septiembre 2018) Opción B 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x\qquad -z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$

Solución: a) Si m = 1 el sistema es compatible indeterminado y si m ≠ 1 el sistema es incompatible. b) $x=1+\lambda;\ y=0;\ z=\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$

16. (Galicia Junio 2018) Opción B 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x-6y+mz=0 \\ x-2y\ +z=0 \\ x+y\qquad =m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$

Solución: a) Si m = 3 el sistema es compatible indeterminado y si m ≠ 3 el sistema es compatible determinado. b) $x=2-\dfrac{\lambda}{3};\ y=1+\dfrac{\lambda}{3};\ z=\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$

17. (Galicia Septiembre 2017) Opción B. 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 3x - 2y \quad &= 0 \\ x - y + \quad z &= m \\ x + my - 2z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

Solución: a) *Si m = 0 el sistema es compatible indeterminado y si m ≠ 0 el sistema es compatible determinado. b)* $x = 2\lambda;\ y = 3\lambda;\ z = \lambda,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

18. (Galicia Junio 2017) Opción B. 1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x \qquad - z &= m \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

Solución: a) *Si m = 1 el sistema es compatible indeterminado y si m ≠ 1 el sistema es incompatible. b)* $x = 1 + \lambda;\ y = 0;\ z = \lambda,\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

LA RIOJA

1. (La Rioja Extraordinaria 2025) 3.1 b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

Solución: Se producen 5000 unidades de queso y 10000 unidades de mantequilla.

2. (La Rioja Extraordinaria 2025) 3.2 b) (1.25 puntos) Determina la relación entre *a* y *b*, con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ -2x - y + 3z = b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

Solución: El sistema es compatible cuando $b = -a$. *El sistema nunca puede ser compatible determinado.*

3. (La Rioja Ordinaria 2025) 3.1 a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - mz = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de *m* el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de *m* que lo haga compatible indeterminado.

Solución: La solución es la trivial para cualquier valor de m distinto de $\frac{1}{2}$. *El sistema es compatible indeterminado para* $m = \frac{1}{2}$. *Las soluciones del sistema tienen la expresión* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

4. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2024) 5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y *b* la de términos independientes.

Solución: La solución del sistema es x = y = z = 1. La matriz $A^{-1}b$ *es la matriz* $A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (La Rioja EBAU Ordinaria 2024) 5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

(i) incompatible.

(ii) compatible determinado.

(iii) Compatible indeterminado.

Solución: (i) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ *.(ii)* $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$ *(iii)* $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

6. (La Rioja EBAU Ordinaria 2023) 4.- (2 puntos)

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + (a+1)y + z = a \\ x + y + (a+1)z = a \\ (a+1)x + y + z = a \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq 0;\ a \neq -3$ *el sistema es compatible determinado y la solución es* $x = y = z = \dfrac{a}{a+3}$*, si* $a = 0$ *el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son* $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *y si* $a = -3$ *el sistema es incompatible.*

7. (La Rioja EBAU Extraordinaria 2022) 4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Solución: El sistema tiene solución única cuando a = –3. La solución es x = 1, y = 2, z = –1.
Si a ≠ –3 no tiene solución.

8. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 4.- (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq 1;\ a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado. La solución es* $x = -1;\ y = 1;\ z = 1$.
Si $a = 1$ *es compatible indeterminado y las soluciones son:* $x = 1 - \alpha - \beta;\ y = \alpha;\ z = \beta$ con $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
Si $a = -1$ *es compatible indeterminado y las soluciones son:* $x = -1;\ y = \alpha;\ z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

9. (La Rioja EBAU Ordinaria 2022) 6.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para los que $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax+by+z=3c \\ 3x-2by-2cz=a \\ 5ax-2y+cz=-4b \end{cases}$$

Solución: Los valores buscados son $a=1;\ b=-1;\ c=1$.

10. (La Rioja Extraordinaria 2021) 4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real *a*.

Solución: Si $a\neq 0, a\neq 1$ *y* $a\neq 2$ *el sistema es compatible determinado (x = 0,* $y=\frac{-2a^2+1}{-a(a-1)}$, $z=\frac{2a-1}{a(1-a)}$ *), si a = 0 o a = 1 el sistema es incompatible y si a = 2 el sistema es compatible indeterminado (* $x=\frac{3+2t}{2}$, $y=-1-3t$, $z=t$, *con* $t\in\mathbb{R}$ *).*

11. (La Rioja Ordinaria 2021) 5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay+(a+1)z=a, \\ ax+z=a, \\ x+az=-a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real *a*.
b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

Solución: a) Si $a\neq 0; a\neq -1$ *y* $a\neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si a = 0 o a = –1 el sistema es compatible indeterminado y si a = 1 el sistema es incompatible. b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & .1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

12. (La Rioja Extraordinaria 2020) 4.- (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real *a*, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x+y+3az=1, \\ ax+ay-z=a, \\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1. \end{cases}$$

Solución: Si $a\neq 0; a\neq -0.5$ *y* $a\neq 2$ *el sistema es compatible determinado. La solución es* $x=\frac{6a^2+2}{-2a^2+3a+2};\quad y=\frac{-8a^2+a+4}{-2a^2+3a+2}; z=\frac{-2a^2+4a}{-2a^2+3a+2}$. *Si* $a=0$ *el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son* $x=t;\ y=1+t;\ z=0$. *Si* $a=-0.5$ *o* $a=2$ *el sistema es incompatible.*

13. (La Rioja Ordinaria 2020) 5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay+(a+1)z=a, \\ ax+z=a, \\ x+az=-a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.
b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

Solución: a) Para $a\neq 0; a\neq -1$ *y* $a\neq 1$ ***el sistema es compatible determinado.*** *La solución es* $x=\dfrac{-a}{1-a};\quad y=\dfrac{-2a}{1-a}; z=\dfrac{a}{1-a}$. *Para* $a=0$ ***el sistema es compatible indeterminado****. Sus soluciones son* $x=0; y=t; z=0$. *Para* $a=-1$ ***el sistema es compatible indeterminado.*** *Las soluciones son* $x=1+t;\quad y=1;\quad z=t$. *Para* $a=1$ ***el sistema es incompatible.*** *b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & .1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

14. (La Rioja Junio 2019) Propuesta A.4. (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones
Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) …..
Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.
(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución: (I) Si $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *el sistema es compatible determinado, si* $a=1$ *el sistema es compatible indeterminado y si* $a=-2$ *el sistema es incompatible. (II) Para* $a=1$ *las soluciones son* $\begin{cases} x=1-y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$ *y para* $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *la solución es* $x=y=z=\dfrac{1}{a+2}$.

15. (La Rioja Junio 2018) Propuesta B.4. (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} cx+y-2z&=6, \\ cx-2y+z&=0, \\ -2x+y+cz&=-6. \end{aligned}$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.
(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

Solución: (I) Para $c\neq 1$ *y* $c\neq -2$ *el sistema es compatible determinado. Para* $c=1$ *es compatible indeterminado y para* $c=-2$ *es incompatible. (II)* $x=4+t; y=2+t; z=t$

16. (La Rioja Junio 2017) Propuesta A. 2.- (3 puntos) Sea el sistema de ecuaciones:

$$cx + 3y - z = -3,$$
$$x + cy + z = c,$$
$$cx + y + z = 1.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.
(II) Halle la solución o soluciones cuando el sistema sea compatible.

*Solución: (I) Si $c \neq 1$ y $c \neq -2$ el sistema es **compatible determinado**, si $c = -2$ el sistema es **incompatible** y si $c = 1$ es **compatible indeterminado**. (II) Para c = 1 las soluciones son $x = 3 - 2t;\ y = -2 + t;\ z = t$. Para $c \neq 1$ y $c \neq -2$ la solución es* $x = \frac{-3}{c+2};\quad y = \frac{c-1}{c+2};\quad z = \frac{3(c+1)}{c+2}$

MADRID

1. (Madrid Extraordinaria 2025) Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *k*:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de *k*.
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k=0$.

Solución: a) Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $k=-1$ el sistema es incompatible (sin solución). b) $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2. (Madrid Ordinaria 2025) Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución: En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

3. (Madrid Extraordinaria 2024) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.
b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso λ = 1 y encontrar, si es posible, una solución con $x=5$.

*Solución: a) Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $\lambda=1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $\lambda=2$ el sistema es **incompatible**. b) Las soluciones del sistema son* $x=-\lambda;\ y=1-\lambda;\ z=\lambda,$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$. *La solución del sistema es x = 5; y = 6; z = –5.*

4. (Madrid Ordinaria 2024) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince

cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución: El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm.

5. (Madrid Extraordinaria 2023) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz=1 \\ kx-y-z=0 \\ -y+(k-1)z=3 \end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro *k*.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para *k = 3*.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para *k = 3/2* y especificar, si es posible, una solución particular con $x=2$

Solución: a) Para $k\neq 0$ ***y*** $k\neq\frac{3}{2}$ *el sistema es* ***compatible determinado****, para* $k=0$ *el sistema es* ***incompatible*** *y para* $k=\frac{3}{2}$ *es* ***compatible indeterminado****. b) La solución del sistema es* $x=\frac{-1}{3};\ y=\frac{-5}{3};\ z=\frac{2}{3}$. *c)* $\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-3+0.5\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$*, La solución pedida es x = 2; y = –1; z = 4*

6. (Madrid Ordinaria 2023) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución: Se han usado 7 camiones del tipo A, 5 del B y 3 del C. Los camiones del tipo A han transportado $7\cdot 14=98$ *toneladas de tierra, los del tipo B han transportado* $5\cdot 24=120$ *toneladas y los del tipo C han transportado* $3\cdot 28=84$ *toneladas de tierra.*

7. (Madrid Ordinaria 2023) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x+4y=0 \\ (a-1)y+z=3 \\ 4x+2ay+z=3 \end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro *a*.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para *a = 3*.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para *a = 5*.

Solución: a) Para $a\neq -5$ *y* $a\neq 3$ *el sistema es* ***compatible determinado*** *y para* $a=3$ *y* $a=-5$ *el sistema es* ***compatible indeterminado****. b) Las soluciones del sistema son* $x=-\lambda;\ y=\lambda;\ z=3-2\lambda,$ siendo $\lambda\in\mathbb{R}$. *c) La solución del sistema es x = 0; y = 0; z = 3.*

8. (Madrid Extraordinaria 2022) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución: En la estantería hay 24 libros de ensayo, 55 novelas y 49 biografías.

9. (Madrid Ordinaria 2022) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{array}{l} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z \quad =1 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de *m*.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=\dfrac{1}{2}$

Solución: a) Si $m \neq \frac{1}{2}$ *y* $m \neq -1$ *el sistema es compatible determinado. Si m = 1/2 o m = –1 es compatible indeterminado. b) Las soluciones del sistema son* $x=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}t;\ y=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t;\ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

10. (Madrid Ordinaria 2022) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución: Pablo tiene 16 años, Alejandro 15 y Alicia 14. Pablo recibe 3360 €, Alejandro 3150 € y Alicia 2940 €.

11. (Madrid Extraordinaria 2021) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución: Sara tiene 2000 seguidores, Cristina tiene 5000 y Jimena tiene 8000.

12. (Madrid Extraordinaria 2021) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x* e *y*, que tenga como soluciones {*x = 1*, *y = 2*} y {*x = 0*, *y = 0*}.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x*, *y* y *z* cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \\ z=\lambda-1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a *x = 1* e *y = 2*.

Solución: a) $\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ 10y = 20x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 20x - 10y = 0 \end{array}\right\}$ *b)* $\left\{\begin{array}{l} y = x-2 \\ z = x-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{array}\right.$ *c)* $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x - y = -1 \\ 3x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

13. (Madrid Ordinaria 2021) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución: A cada hermano le tocan 120 acciones de la empresa A, 40 de la empresa B y 20 de la C.

14. (Madrid Ordinaria 2021) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución: a) Si $a \neq \frac{26}{3}$ *y* $a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si a = 1 es compatible indeterminado y si* $a = \frac{26}{3}$ *es incompatible. b)* $x = 4 + 2t,\ y = t,\ z = \frac{10+t}{-6},\quad t \in \mathbb{R}$

15. (Madrid Ordinaria 2020) A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a+1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right\}$$

Se pide:
a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para a = 0.

Solución: a) Para $a \neq 0$ *y* $a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado. Para* $a = 0$ *es compatible indeterminado. Para* $a = -1$ *es incompatible. b) La solución es* $x = 1 - t;\quad y = t;\quad z = t \text{ con } t \in \mathbb{R}$

16. (Madrid Ordinaria 2020) B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución: Los precios aproximados son: lubina a 5.67 €/kg, dorada a 5.78 €/kg y rodaballo a 8.59 €/kg.

17. (Madrid Julio 2019) Ejercicio 1: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para k = –1.

Solución: a) $k \neq 1; k \neq -1$ *es compatible determinado* $k = 1$ *es incompatible* $k = -1$ *es compatible indeterminado b) x = t; y = –2t; z = t*

18. (Madrid Junio 2019) Ejercicio 1: **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución: Un bocadillo ha costado 3 €, un refresco 2 € y una bolsa de patatas 1 €

19. (Madrid Julio 2018) B.1.
Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.
En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno.
Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución: 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

20. (Madrid Junio 2018) A.1.
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$, se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso m = 0.

Solución: a) para m distinto de 1 y -1 es compatible determinado; para m = 1 es compatible indeterminado, para m=-1 es incompatible b) x = 1; y = -1; z = 0.

21. (Madrid Septiembre 2017) Opción A Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2 puntos.
Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando *x* gramos de A, *y* gramos de B y *z* gramos de C. Determínese las cantidades *x*, *y*, *z*.

Solución: Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

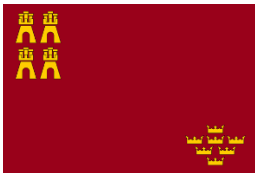
22. (Madrid Junio 2017) Opción A <u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{cases}$, se pide:

a) (2 puntos) Discute en función de los valores del parámetro real a.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=1$.
c) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=2$.

Solución: a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si a = –2 es incompatible y si a = 2 es compatible indeterminado. b) Para a = 1 la solución es $x=-\frac{1}{3}; \quad y=\frac{1}{3}; \quad z=\frac{4}{3}$. c) Para a = 2 las soluciones son $x=1-2t; \quad y=t; \quad z=2t, t\in\mathbb{R}$

MURCIA



1. (Murcia Extraordinaria 2025) CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):
1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) **[1]** Discute el sistema en función del parámetro k.
b) **[0,5]** Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
c) **[1]** Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

Solución: *a) Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). b) Para $k=2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$ c) La solución del sistema es $x=\dfrac{k}{k-1}$, $y=\dfrac{1}{1-k}$, $z=0$, para cualquier valor de k distinto de 1 y 2.*

2. (Murcia Ordinaria 2025) CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):
1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.
a) **[0,75]** Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).
c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m=2$.

Solución: *a)* $\left.\begin{array}{l} x-my \quad\;\; =0 \\ \quad\;\; y-2z=0 \\ x+y+mz=600 \end{array}\right\}$ *b) El rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m>0$. c) El sueldo de Darío es 300 euros, el de Hugo es 150 euros y el de José es 75 euros*

3. (Murcia Extraordinaria 2024) 1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares

por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución: *Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.*

4. (Murcia Ordinaria 2024) 1: [2,5] En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución: *Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.*

5. (Murcia Extraordinaria 2023) 1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:
i) La suma de sus tres cifras es 9.
ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.
iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.
a) **[1,5 p.]** Denotando por *x* la cifra de las centenas, por *y* la de las decenas y por *z* la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).
b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

Solución: *a)* $\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z-x=-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\}$ *b) El número es el 504.*

6. (Murcia Ordinaria 2023) 1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.
a) [0,75 p.] Denotando por *x* el precio de cada bolígrafo, por *y* el de cada rotulador y por *z* el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.
b) [0,25 p.] Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.
c) [1 p.] Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.
d) [0,5 p.] Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución: *a)* $\left.\begin{array}{l} z=2x+2y \\ 6x=z \\ y=2x \end{array}\right\}$ *b) El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. No se puede determinar de forma única el valor de cada artículo con la información proporcionada.*

c) $x=\dfrac{\lambda}{2};\ y=\lambda;\ z=3\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ *d) El bolígrafo cuesta 3 €, el rotulador 6 € y la libreta 18 €.*

7. (Murcia Extraordinaria 2022) 1: [2,5 p.] Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución: *En las Islas Caimán tiene 80 millones de euros, en Panamá 20 y en Fiji tiene 50 millones.*

8. (Murcia Ordinaria 2022) 1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución: *La edad de Carmela es 26, la de Esperanza es 23 y la de Aurora es 19.*

9. (Murcia Extraordinaria 2021) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+ay-z=0 \\ 2x+y+az=0 \\ x+5y-az=a+1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: *a) El sistema tiene solución única para* $a\neq -1$ *y* $a\neq 3$

b) Para $a=-1$**.** *Las soluciones son x = –2t; y = t, z = –3t.* *c) Para* $a=3$

10. (Murcia Ordinaria 2021) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: *a) Cuando* $a\neq 1$ *y* $a\neq -1$. *b) Cuando* $a=-1$. $x=-\dfrac{3}{2};\quad y=t;\quad z=\dfrac{5}{2}-t$ *c) Para* $a=1$

11. (Murcia Extraordinaria 2020) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.

c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de *a = 2*.

Solución: *a)* $|A|=0$*, independientemente del valor de a y el rango de la matriz A nunca va a ser 3. b) El sistema tiene infinitas soluciones para **a = 2**.*

c) Para a = 2 las soluciones son $x=1-2t;\quad y=1+t;\quad z=t$

12. (Murcia Junio 2020) 1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y-\ z=4 \\ x+a^2y-\ z=3-a \\ x-\ y+\ az=1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) *Para* $a\neq 1$ *y* $a\neq -1$*. Para **a = 0** **l**a solución es* $x=2;\ y=1;\ z=-1$.

b) *Para* $a=-1$*. Las soluciones son* $x=\frac{5}{2}+t;\quad y=\frac{3}{2};\quad z=t$ *.* ***c)*** *El sistema no tiene solución para* $a=1$.

13. (Murcia Septiembre 2019) A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax+\ y-2z=0 \\ x+\ y-az=-1 \\ x+\ y+\ z=a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) *Para* $a\neq -1$ *y* $a\neq 1$*. Para a = 2 la solución es* $x=1;\ y=0;\ z=1$

b) Para $a=-1$*. La solución es* $x=\frac{1+3t}{-2};\ y=\frac{-1+t}{2};\ z=t$ *c) Para* $a=1$

14. (Murcia Junio 2019) A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ \ y+az=1 \\ x+ay+\ \ z=a \\ ax+\ \ y+\ \ z=a+3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 0.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) $a \neq 1; a \neq -2$ *el sistema es compatible determinado. a=0 la solución es x = –1, y = 2,* $z=1$. ***b)*** $a=-2$ → *El sistema es compatible indeterminado. La solución es x = t, y = 1+t, z = t.*
c) *para a =1 el sistema es incompatible.*

15. (Murcia Septiembre 2018) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax\ \ +y\ \ \ \ \ \ \ \ +\ az=0 \\ x\ \ +y\ \ \ \ \ \ \ \ +\ az=0 \\ 2x\ \ +(a-1)y+az=0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).
b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a=2$.

Solución: a) *El sistema tiene una única solución (0, 0, 0) cuando a es distinto de 0, 1 y 2.*
b) La solución es $x=0;\ y=-2z;\ z=z$.

16. (Murcia Junio 2018) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x-y+\ \ z=4a \\ \ \ \ \ \ \ y+\ \ z=-4 \\ x\ \ \ \ \ \ +2z=a^2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.
b) **[1,5 p.]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

Solución: a) *El sistema no puede ser compatible determinado pues el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas.* *b) a = 2; La solución es*
$x=4-2z;\ y=-z-4;\ z=z$

17. (Murcia Septiembre 2017) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} ax\ +\ 2y+\ \ z=1 \\ x\ \ +2ay+\ \ z=2 \\ x\ \ +2y\ +\ \ az=-3 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) *Para* $a \neq 1, a \neq -2$ *el sistema tiene una única solución*

b) Para a = – 2 el sistema tiene infinitas soluciones. La solución es $x = \frac{1+6y}{3}$; $y = y$; z = $\frac{5+6y}{3}$

c) Para a = 1 el sistema no tiene solución.

18. (Murcia Junio 2017) CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ \ \ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.
b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

Solución: a) $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$ ***b)*** *Para a = 1. La solución es* $x = -z;\ y = 0;\ z = z$ *c) a = –1*

NAVARRA

1. (Navarra Extraordinaria 2025) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *m* y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}\left(m^2-m\right)x+\left(m+2\right)y-z=1-m^2\\ \left(m^2-m\right)x+\left(2m+1\right)y=2\\ \left(m-m^2\right)x-\left(2m+1\right)y+\left(m+2\right)z=2m+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución: Si $m\neq -2,\ m\neq 0\ \text{y}\ m\neq 1$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución*

$$x=\frac{-3m^2-3m+1}{m^2-m},\ y=m+1,\ z=2\ .$$

Si $m=1$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones* $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\dfrac{2}{3};\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2\end{cases}$,

Si $m=0$ *el sistema es incompatible.*

Si $m=-2$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones* $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\dfrac{2}{3}+2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+6\lambda\end{cases}$.

2. (Navarra Ordinaria 2025) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *m* y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}\left(m^2-3m\right)x-my+2mz=3\\ \left(m^2-3m\right)x+3y+3mz=m+9\\ \left(3m-m^2\right)x+my-mz=0\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución: Si $m\neq -3,\ m\neq 0\ \text{y}\ m\neq 3$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución*

$x=\dfrac{1}{m},\ y=1,\ z=\dfrac{3}{m}$ *, si* $m=-3$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones*

$\begin{cases}x=\lambda\\ y=-1-6\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-1\end{cases}$, *si* $m=0$ *el sistema es incompatible y si* $m=3$ *el sistema es compatible*

indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$.

3. (Navarra Extraordinaria 2024) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2+a\right)z=0 \\ x+\left(2a-1\right)y+\left(a+1\right)z=a \\ \left(2a-1\right)y+\left(a+1\right)z=0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq -1,\ a\neq 0$ *y* $a\neq \frac{1}{2}$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución* $x=a,\ y=\frac{1}{2a-1},\ z=\frac{-1}{a+1}$ *, si* $a=-1$ *o* $a=\frac{1}{2}$ *el sistema es incompatible y si* $a=0$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones* $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda;\ \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

4. (Navarra Ordinaria 2024) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} \left(2-a\right)x-ay+2z=-4 \\ \left(a-2\right)x+\left(a+1\right)y=5 \\ y+\left(a^2-a\right)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq -1$ *y* $a\neq 2$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución* $x=-1,\ y=\frac{a+3}{a+1},\ z=\frac{-1}{a+1}$ *, si* $a=-1$ *el sistema es incompatible y si* $a=2$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones* $x=\lambda;\ y=\frac{5}{3};\ z=\frac{-1}{3};$ para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. (Navarra Extraordinaria 2023) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax+y-2z=0 \\ 3ax+a^2y-2a^2z=3 \\ -ax-y+\left(a^2-1\right)z=a+\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq 0,\quad a\neq -\sqrt{3}\quad$ *y* $\quad a\neq +\sqrt{3}$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución* $x=\frac{1}{a},\quad y=\frac{2}{a-\sqrt{3}},\quad z=\frac{1}{a-\sqrt{3}}$ *. Si* $a=\sqrt{3}$ *o* $a=0$ *el sistema es incompatible. Si* $a=-\sqrt{3}$ *el sistema es compatible indeterminado con soluciones* $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\sqrt{3}\alpha+2\beta+1,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \\ z=\beta \end{cases}$.

6. (Navarra Ordinaria 2023) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq 0,\quad a\neq\frac{-1}{2}\quad y\quad a\neq\frac{1}{2}$ *el sistema es compatible determinado siendo su solución* $x=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a},\quad y=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a},\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}$ *. Si* $a=\frac{1}{2}$ *o* $a=0$ *el sistema es incompatible. Si* $a=\frac{-1}{2}$ *el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones* $\begin{cases} x=\sqrt{2}+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\sqrt{2}\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$.

7. (Navarra Extraordinaria 2022) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} \left(a^2-1\right)x+ay+a^2z=1 \\ \left(a^2-1\right)x+(a+1)y+\left(a^2+a\right)z=2 \\ y+\left(a^2+2a\right)z=a+2 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq 0; a\neq 1$ *y* $a\neq -1$ *es sistema es compatible determinado. Su solución es* $x=\frac{-1}{a+1};\ y=0;\ z=\frac{1}{a}$. *Si* $a=0$ *o* $a=-1$ *el sistema es incompatible. Si* $a=1$ *el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:* $x=t;\ y=0;\ z=1;\ t\in\mathbb{R}$

8. (Navarra Ordinaria 2022) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2-2a\right)y-z=-a^2 \\ x+\left(a^2-4\right)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+\left(a^2-4a+4\right)y+\left(a^2-2a\right)z=-a^2+a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a\neq 1,\quad a\neq 2\quad y\quad a\neq -1$ *el sistema es compatible determinado. La solución es* $x=\frac{-a^2+a-1}{a-1},\quad y=\frac{-a+1}{a-2},\quad z=\frac{-1}{a-1}$. *Si* $a=1$ *o* $a=2$ *el sistema es incompatible. Si* $a=-1$ *el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son:* $x=3t;\ y=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t;\ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

9. (Navarra Extraordinaria 2021) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 0,\ a \neq 2\ y\ a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado y la solución es* $x=\frac{5-a}{1-a}$, $y=\frac{2a+2}{(a-2)(a-1)}$, $z=-a$. *Si a = 0 es compatible indeterminado y las soluciones son x = t, y = 1, z = 0, con* $t \in \mathbb{R}$. *Si a = 1 o a = 2 el sistema es incompatible.*

10. (Navarra Ordinaria 2021) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x-y=3 \\ (a-1)x+(a+1)y-(2-a)z=-2a \\ (-2a+2)x-ay+(a^2-a-2)z=3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Si $a \neq 1,\ a \neq 2\ y\ a \neq -2$ *el sistema es compatible determinado y la solución es* $x=\frac{1}{a-1},\quad y=-2,\quad z=\frac{1}{a-2}$. *Si a = –2 el sistema es compatible indeterminado y las soluciones son* $x=t,\ y=-3-3t,\ z=-\frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$. *Si a = 1 o a = 2 el sistema es incompatible.*

11. (Navarra Extraordinaria 2020) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Para $a \neq \sqrt{2};\ a \neq -\sqrt{2}\ y\ a \neq 1$ *el sistema es compatible determinado. La solución es* $x=\frac{1}{a+\sqrt{2}};\quad y=\frac{4-a(2+\sqrt{2})}{2(1-a)};\quad z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}$ *Para* $a=\sqrt{2}$ *El sistema es* ***compatible indeterminado****. Sus soluciones son* $x=t;\quad y=1;\quad z=\sqrt{2}$. *Para* $a=-\sqrt{2}$ *es incompatible. Para* $a=1$ *es incompatible.*

12. (Navarra Ordinaria 2020) P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución: Para $a \neq -1$, $a \neq 1$ *y* $a \neq 0$ *es compatible determinado. La solución del sistema es* $x = \frac{-2a}{a+1}$; $y = \frac{2}{a}$; $z = \frac{-1}{a+1}$. *Para* $a = -1$ *el sistema es incompatible. Para* $a = 0$ *el sistema es incompatible. Para* $a = 1$ *el sistema es* ***compatible indeterminado*** *con solución* $x = -1$; $y = 2$; $z = \lambda$

13. (Navarra Julio 2019) OPCIÓN A A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución: Para $a \neq 0, a \neq 1$ *y* $a \neq -1$ *el sistema es compatible determinado, la solución es* $x = \frac{a+1}{a}$, $y = \frac{2a+1}{a}$, $z = \frac{1}{1-a}$. *Para* $a=0$ *y* $a=1$ *es incompatible. Para* $a = 0$ *es compatible indeterminado y la solución es* $x = t, \quad y = 1, \quad z = 0{,}5$

14. (Navarra Junio 2019) OPCIÓN A A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución: Para $a \neq 2$ *y* $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$ *es compatible determinado, para* $a = -2$ *o* $a = 2$ *es incompatible y para* $a = 1$ *es compatible indeterminado. La solución para* $a = 1$ *es* $x = t;\ y = 1 + \frac{3t}{2};\ z = \frac{3t}{2}$ *y para* $a \neq 2$ *y* $a \neq 1$ *y* $a \neq -2$ *es* $x = \frac{2}{a^2-4}$; $y = a-1$; $z = \frac{1}{a-2}$

15. (Navarra Julio 2018) A.1. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real ***a*** y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-3)x + (a-2)y + 2z = -1 \\ (2a-6)x + (3a-6)y + 5z = -1 \\ (3-a)x + (a-2)z = a^2 - 4a + 5 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Solución: a) para a distinto de 1, 2 y 3 es compatible determinado con solución x=(1-a)/(a-3); y=(4-a)/(a-2); z=a-3; para a = 1 es compatible indeterminado con solución x=x; y=-3+2x; z=-2+2x, para a=2 es incompatible y para a=3 es incompatible.

16. (Navarra Junio 2018) A.1. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real ***a*** y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + (a+4)y + (a+1)z = 0 \\ -(a+2)y + (a^2+3a+2)z = a+4 \end{cases}$$

Solución: a) para a distinto de -1, -2 y -3 es compatible determinado con solución x=(a+6)/(a+2); y=-2)/(a+2); z=1/(a+1); para a = -1 es incompatible, para a=-2 es incompatible y para a=-3 es compatible indeterminado con soluciones x = -1+4z; y = 1-2z; z = z.

17. (Navarra Julio 2017) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+\left(a^2+2\right)y+3z=3 \\ -2x-\left(a^2+2\right)y+\left(a-3\right)z=\sqrt{2}-3 \end{cases} \qquad \text{(3 puntos)}$$

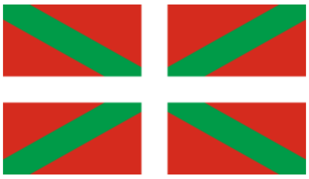
Solución: Para a distinto de 0 y de $\pm\sqrt{2}$ *el sistema es compatible determinado y su solución es* $x=-\dfrac{4}{a\left(a+\sqrt{2}\right)};\ y=\dfrac{2}{a\left(a+\sqrt{2}\right)};\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{a}$*, si a =* $-\sqrt{2}$ *o a = 0 el sistema es incompatible y si a =* $\sqrt{2}$ *es compatible indeterminado y sus soluciones son* $x=-2\lambda,\ y=\lambda,\ z=1,\ \lambda\in\mathbb{R}$

18. (Navarra Junio 2017) A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a-1\right)y+z=-1 \\ \left(a-1\right)y+2z=-2 \\ x+\left(a^2-5a+5\right)z=-a+4 \end{cases} \qquad \text{(3 puntos)}$$

Solución: Para a distinto de 1, 2 y 3 el sistema es compatible determinado y su solución es $x=\dfrac{a-3}{a-2};\ y=\dfrac{-2a+6}{\left(a-1\right)\left(a-2\right)};\ z=\dfrac{-1}{a-2}$*, si a = 1 o a = 2 el sistema es incompatible y si a = 3 es compatible indeterminado y sus soluciones son* $x=1+\lambda,\ y=-1-\lambda,\ z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

PAÍS VASCO



1. País vasco. Extraordinaria 2025. (2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.
(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha=0$.

Solución: (a) Si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 2$ *el sistema es compatible determinado, si* $\alpha=0$ *el sistema es compatible indeterminado y si* $\alpha=2$ *el sistema es incompatible.*

(b) Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x=3-3\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ *, para cualquier valor* $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. País vasco. Ordinaria 2025. (2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x-2y+z=\alpha \\ x-2y+\alpha z=\alpha \\ -2x+y+\alpha z=-2 \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.
(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.
(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Solución: (a) Si $\alpha\neq 1$ *el sistema es compatible determinado y si* $\alpha=1$ *el sistema es compatible indeterminado.*
(b) El sistema siempre tiene solución (compatible determinado o compatible indeterminado).
(c) Para $\alpha=1$ *el sistema es compatible indeterminado.* $x=1;\ y=z=0$; $x=2;\ y=z=1$.

3. País vasco. Extraordinaria 2024. Ejercicio A1
(1 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x+4y+z=3 \\ \alpha x-5y+2z=-2 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible,
(a) (0,75 p) cuando $\alpha=0$.
(b) (0,75 p) cuando $\alpha=1$.

Solución:. Si $\alpha \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si* $\alpha = 1$ *el sistema es compatible indeterminado. (a) Para* $\alpha = 0$ *la solución es* $x=0;\ y=\frac{8}{13};\ z=\frac{7}{13}$.

(b) Para $\alpha = 1$ *las soluciones son* $x = 8 - 13\lambda,\ y = \lambda,\ z = 9\lambda - 5;$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. País vasco. Ordinaria 2024. Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1 \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1 \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

Solución: Si $\alpha \neq 3$ *y* $\alpha \neq -1$ *el sistema es compatible determinado, si* $\alpha = -1$ *el sistema es incompatible y si* $\alpha = 3$ *el sistema es compatible indeterminado.. Para* $\alpha = 1$ *la solución es* $x=2;\ y=\frac{-3}{2};\ z=\frac{3}{2}$.

5. País vasco. Extraordinaria 2023. Ejercicio A1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x + y + \alpha z = 0 \\ 2x + \alpha y + z = 1 \\ 3x + \alpha y + z = \alpha - 1 \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.

Resuelve el sistema para $\alpha = 0$, si es posible.

Solución: Si $\alpha \neq -1$ *y* $\alpha \neq 1$ *el sistema es compatible determinado, si* $\alpha = -1$ *el sistema es incompatible y si* $\alpha = 1$ *el sistema es compatible indeterminado. Para* $\alpha = 0$ *la solución del sistema es* $x=-2;\ y=6;\ z=5$

6. País vasco. Ordinaria 2023. Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

Solución: Si $\alpha \neq 1$ *el sistema es compatible determinado y si* $\alpha = 1$ *el sistema es compatible indeterminado. Para* $\alpha = 1$ *las soluciones son* $x = 1 + \lambda;\ y = -2\lambda;\ z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$ *. Para* $\alpha = 2$ *la solución es x = 1; y = 0; z = 0.*

7. País vasco. Extraordinaria 2022. Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = \alpha \\ \alpha x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Solución: Si $\alpha \neq 2$ *el sistema es compatible determinado y si* $\alpha = 2$ *el sistema es compatible indeterminado. Para* $\alpha = 1$ *la solución del sistema es* $x=-1;\ y=\frac{1}{2};\ z=-1$.

8. País vasco. Ordinaria 2022. Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.

Solución: Si $\alpha \neq 1$ *el sistema es compatible determinado y si* $\alpha = 1$ *el sistema es compatible indeterminado. Para* $\alpha = 1$ *las soluciones son* $x=0;\ y=1-t;\ z=t;\ t\in\mathbb{R}$. *Para* $\alpha=-1$ *la solución es x = 0; y = –1; z = 0.*

9. País vasco. Extraordinaria 2021. Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x+2y-z=\alpha \\ 2x+\alpha y+z=2+\alpha \\ x-\alpha y+2z=2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=1$, si es posible.

Solución: Para $\alpha\neq 1$ *y* $\alpha\neq -2$ *el sistema es compatible determinado, para α = 1 el sistema es compatible indeterminado y para α = –2 el sistema es incompatible.*

Para α = 1 las soluciones son $x=\frac{5-3t}{3},\ y=\frac{-1+3t}{3},\ z=t$ *siendo* $t\in\mathbb{R}$

10. País vasco. Ordinaria 2021. Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x-y+z=1 \\ 3x-y+\alpha z=\alpha \\ x+(\alpha-1)z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=3$, si es posible.

Solución: Para $\alpha\neq 1$ *y* $\alpha\neq 2$ *el sistema es compatible determinado, para* $\alpha=1$ *es incompatible y para* $\alpha=2$ *es compatible indeterminado. Para* $\alpha=3$ *la solución es* $x=-1;\ y=-3;\ z=1$

11. (País vasco Ordinaria 2020) Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z=2 \\ x-2y-z=1 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Solución: Para $a \neq 3$ *y* $a \neq -\frac{3}{2}$ *el sistema es compatible determinado. Las soluciones son* $x = \frac{23-3a}{-2a^2+3a+9}$ *;* $y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$; $z = \frac{-8a+10}{-2a^2+3a+9}$ *. Para* $a=3$ *el sistema es incompatible. Para* $a = -\frac{3}{2}$ *el sistema es incompatible.*

12. (País vasco Extraordinaria 2020) Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

Solución: Para $A \neq 4$ *el sistema es compatible determinado. La solución es* $x = \frac{6A^2-30A+8}{A-4}$; $y = \frac{-4A^2+26A-8}{A-4}$; $z = \frac{-4A}{A-4}$ *. Para* $A=4$ *es incompatible.*

13. (País vasco Julio 2019) Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

Solución: A distinto de –18 es compatible determinado. A = 18 es compatible indeterminado.

14. (País vasco Junio 2019) Ejercicio A1

Discutir, en función de *m*, el sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} (m+3)x+my+mz=m-1 \\ 3x \qquad\qquad +mz=m-2 \\ \qquad\quad -y \quad +z=m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución: Si $m \neq 0; m \neq 3$ *es compatible determinado. m=0 es incompatible. m =3 es compatible indeterminado. La solución es* $x = \frac{1}{3} - t;\ y = t;\ z = t$

15. (País vasco Julio 2018) B.1.

a) Discutir el siguiente sistema S(a) en función de a:

$$\text{S(a)} = \begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{cases}$$

b) ¿Hay solución para a = 1? En caso afirmativo calcula dicha solución. En caso negativo razona la respuesta.

Solución: a) para a distinto de 0 y 1/2 es compatible determinado; para a=0 es incompatible y para a=1/2 es incompatible. b) x=–6; y = 10; z = 2

16. (País vasco Junio 2018) B.1.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones S(a)

$$S(a) = \begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a - 1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los distintos valores de a
b) ¿Hay solución para a=2? En caso afirmativo calcula dicha solución. En caso negativo razona la respuesta.

Solución: a) para a distinto de 0 y 1 es compatible determinado; para a=0 es incompatible y para a=1 es compatible indeterminado. b) x=–7/4; y = 7/4; z =-1/4

17. (País vasco Julio 2017) Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *a*

$$ax + 2y + 6z = 0$$
$$2x + ay + 4z = 2$$
$$2x + ay + 6z = a - 2$$

En caso de existir, encontrar la solución para el caso *a* = 0.

Solución: a) para a distinto de 2 y –2 es compatible determinado; para a = –2 es incompatible y para a = 2 es compatible indeterminado. Para a = 0 la solución es x = 5; y = 6; z = –2.

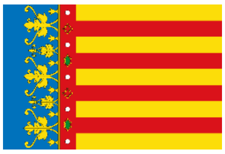
18. (País vasco Junio 2017) Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *m*. (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$
$$x + my + z = 2$$
$$3x + y - mz = 3$$

Solución: a) para "m" distinto de 0 y 2 es compatible determinado; si m = 2 es incompatible y si m = 0 es compatible indeterminado.

VALENCIA



1. (Valencia Extraordinaria 2025) 2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a::

$$\begin{cases} x-ay-z=-a \\ ax-y+z=a \\ ax+y=a \end{cases}$$

Se pide:
2.2.1 **(1.25 puntos)** Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a.
2.2.2 **(1.25 puntos)** Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Solución: 2.2.1 Si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Si $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado. 2.2.2 Para $a \neq -1$ la solución del sistema es $x=y=\dfrac{a}{a+1}$, $z=\dfrac{2a}{a+1}$.

2. (Valencia Ordinaria 2025) 2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x-2y-3z=0 \\ 2x+ay-5z=-3 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:
2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.
2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.
2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Solución: 2.2.1 Si $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado. Si $a=-3$ el sistema es compatible indeterminado. 2.2.2 Las soluciones son $\begin{cases} x=\dfrac{6}{5}-\alpha \\ y=\dfrac{9}{5}-9\alpha \,;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z=5\alpha \end{cases}$*. 2.2.3* $x=1,\ y=0,\ z=1$.

3. (Valencia Ordinaria 2024) Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{array}{l} -x+y+z=m \\ 2x+my-z=3m \qquad : \\ (m-1)x+3y-z=6+m. \end{array}$$

Se pide:
a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)
b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Solución: a) Si $m \neq -2$ y $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado, si $m = -2$ el sistema es incompatible y si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $m = 3$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \qquad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases}$

4. (Valencia Extraordinaria 2023) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Solución: a) Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$ el sistema es compatible determinado, si $a = -3$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 1 las soluciones son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

5. (Valencia Extraordinaria 2022) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Solución: a) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = -2$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ la solución es $x = \dfrac{1}{a+2}$; $y = \dfrac{2}{a+2}$; $z = \dfrac{a+1}{a+2}$. Para $a = 1$ las soluciones del sistema son: $x = 1 - t$; $y = t$; $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

6. (Valencia Extraordinaria 2021) Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando m = 1. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución: a) Si m ≠ 0 el sistema es compatible determinado y si m = 0 es compatible indeterminado.
b) La solución es x = y = 3, z = –2. c) Para m = 0 las soluciones son

$x = -\dfrac{4}{3}t; \quad y = -\dfrac{5}{3}t; \ z = t, \ t \in \mathbb{R}$

7. (Valencia Ordinaria 2021) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Solución: a) Si a ≠ –2 y a ≠ 2 el sistema es compatible determinado, si a = –2 es incompatible y si a = 2 es compatible indeterminado. b) Para a ≠ –2 y a ≠ 2 la solución es $x=\dfrac{2a+3}{-a-2},\ y=\dfrac{3}{a+2},\ z=\dfrac{4}{a+2}$. *Para a = 2 las soluciones son x = –t – 1; y = t; z = 1 siendo t un número real.*

8. (Valencia Extraordinaria 2020) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a=0$. (3 *puntos*)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

Solución: a) Para $a\neq 1$. *b) La solución es* $x=-11;\quad y=-3;\quad z=7$. *c)* $x=1-2t;\quad y=1;\quad z=t$

9. (Valencia Ordinaria 2020) Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$,

siendo a un parámetro real, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**
a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)
b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 *puntos*)
c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 *puntos*)

Solución: a) Para $a\neq 1$ *y* $a\neq -2$ *el sistema es compatible determinado. Para* $a=1$ *es incompatible. Para* $a=-2$ *es compatible indeterminado. b) La solución es* $x=1+t;\quad y=t;\quad z=t$. *c) La solución es* $x=2;\quad y=-1;\quad z=-1$

10. (Valencia Julio 2019) Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x \qquad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \end{cases}$,

donde α es un parámetro real.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$. (3 *puntos*)
c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$. (3 *puntos*)

Solución: a) Es siempre compatible determinado. b) x = 7, y = –4, z = –5. c) ∝ = 1

11. (Valencia Junio 2019) Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=a \end{cases}$, donde ***a*** es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los que el sistema es compatible y los valores de a para los que el sistema es incompatible. *(4 puntos)*

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. *(4 puntos)*

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente11 por cualquier otro número diferente. *(2 puntos)*

Solución: a) a≠14 es incompatible, a=14 es compatible determinado b) $x=t+11, y=-2t-7, z=t$ *c) es compatible determinado.*

12. (Valencia Julio 2018) A.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (a-1)\,\mathrm{y}+z=0 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$$ donde *a* es un parámetro real.

Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro *a* para los cuales el sistema es compatible. *(5 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando *a* = 1. *(3 puntos)*

c) Las soluciones del sistema cuando *a = 0.* *(2 puntos)*

Solución: a) para a distinto de 2 es compatible. b) y = 1-x; z = 0 c) x = y = z = ½

13. (Valencia Junio 2018) A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y-z=1-a \\ -x+z=5 \\ -ax+y-z=1 \end{cases}$$ donde *a* es un parámetro real.

Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro *a* para los cuales el sistema es compatible determinado. *(2 puntos)*

b) Las soluciones del sistema cuando *a* = 3. *(4 puntos)*

c) Las soluciones del sistema para los valores de *a* que lo hacen compatible indeterminado. *(4 puntos)*

Solución: a) para a distinto de 0 es compatible determinado. b) x=-1; y=2; z=4 c) x=-5+z; y=1+z ; z=z

14. (Valencia Junio 2017) Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+ay+2z=a \\ 2x+ay-z=2 \\ ax-y+2z=a \end{cases}$, dependiente del parámetro real *a*.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando *a* = 2. (3 *puntos*)

b) Los valores del parámetro *a* para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*)

c) El valor del parámetro *a* para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de *a*. (2+2 *puntos*)

*Solución**:** a) (x, y, z) = (2 / 3, 2 / 3, 2 / 3). b) a ≠ –1. c) a = –1; {(t, t –1, t –1) : t ∈R}.*