

2º de bachillerato Matemáticas II

Bloque 2 de 4 - Geometría en el espacio

Este cuaderno es una recopilación de las cuestiones del bloque de álgebra en la materia de Matemáticas II planteadas en las pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de España desde el año 2017 al 2025. Se indican las soluciones obtenidas por el autor Juan Antonio Martínez García. La resolución detallada de cada ejercicio está disponible en la web www.ebaumatematicas.com.

www.ebaumatematicas.com

Ejercicios de Geometría en el espacio en pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de ESPAÑA.....	2
Andalucía	2
Aragón	9
Asturias	15
Baleares.....	23
Canarias	32
Cantabria.....	40
Castilla la Mancha	48
Castilla y León	57
Cataluña	63
Extremadura	69
Galicia.....	75
La Rioja	82
Madrid.....	89
Murcia.....	98
Navarra	106
País Vasco.....	112
Valencia	118

*Cualquier error o ausencia en este documento, por favor, comunicarlo al correo
ebamatematicas@gmail.com*

Ejercicios de Geometría en el espacio en pruebas de acceso a la universidad de todas las comunidades autónomas de ESPAÑA

Resueltos con todo detalle en www.ebaumatematicas.com

Andalucía



1. Andalucía Extraordinaria 2025. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

- a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

Solución: a) $m = -8$ b) $\frac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades..

2. Andalucía Extraordinaria 2025. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$.

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi : 30x - 23y + 51z - 118 = 0$

3. Andalucía Ordinaria 2025. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sean los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, m)$ y $C(2, 3, 2)$.

- a) [1,25 puntos] Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.
b) [1,25 puntos] Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C .

Solución: a) $m = -4$ y $m = 5$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ unidades.

4. Andalucía Ordinaria 2025. EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$

- a) [1 punto] Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .
b) [1,5 puntos] Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

Solución: a) $\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0$ b) $s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

5. Andalucía Extraordinaria 2024. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

- a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de π y r .
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

Solución: a) La recta está contenida en el plano b) $s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

6. Andalucía Extraordinaria 2024. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Solución: Los puntos buscados son $C_1\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$ y $C_2\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right)$.

7. Andalucía Ordinaria 2024. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

- a) **[1,25 punto]** Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.
 b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

Solución: a) $P'(6, 0, -1)$ b) $Q'(-1, 3, -5)$

8. Andalucía Ordinaria 2024. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- a) **[1 puntos]** Estudia la posición relativa de r y s .
 b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan en el espacio.
 b) El plano buscado tiene ecuación $\pi: -2x - 2y + z - 7 = 0$.

9. Andalucía Extraordinaria 2023. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.
 b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

Solución: a) $d(P, r) = \sqrt{30} \approx 5.47u$ b) Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

10. Andalucía Extraordinaria 2023. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Solución: El volumen del tetraedro es de $18 u^3$.

11. Andalucía Ordinaria 2023. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución: $32\sqrt{3} \approx 55.426$ unidades cuadradas

12. Andalucía Ordinaria 2023. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r .

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución: a) 3.54 unidades b) 5 unidades cuadradas

13. Andalucía Extraordinaria 2022. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte. **(1,5 puntos)**

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s . **(1 punto)**

Solución: a) $a = 7$. $A(-11, -3, 10)$ b) $\pi \equiv 4x + 3y + 8z - 27 = 0$

14. Andalucía Extraordinaria 2022. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r . **(0,75 puntos)**

b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π . **(1,75 puntos)**

Solución: a) $A(1, 3, 2)$ b) $Q'(0, 4, 5)$

15. Andalucía Ordinaria 2022. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\vec{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

Solución: a) $a = -5/2$; $b = 2$ b) $O(0, 0, 0)$; $A(-4, 4, 7)$; $B(-2, 4, 6)$ y $C(-2, 0, 1)$.

16. Andalucía Ordinaria 2022. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1+a, -a, 3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

Solución: a) $a = 6$ b) $a = -1/8$

17. Andalucía Extraordinaria 2021. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto

$$B = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Calcula la ecuación del plano π . **(1.5 puntos)**

b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π . **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv -y + z = 0$ b) $d(A, A') = \sqrt{2} u$

18. Andalucía Extraordinaria 2021. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1.25 puntos)**

b) Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s . **(1.25 puntos)**

Solución: a) Las rectas r y s se cortan en un punto b) $t \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

19. Andalucía Ordinaria 2021. EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$. **(1.5 puntos)**

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0$ b) $\text{sen}(r, \pi) = \frac{1}{3\sqrt{138}}$

20. Andalucía Ordinaria 2021. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $A(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución: $a = 2$. El punto de corte de las rectas es $P(-1, -2, 6)$

21. Andalucía Extraordinaria 2020. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r . **(1.5 puntos)**

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

Solución: a) $a = 3$ b) $\pi': 5x + 8y + z - 24 = 0$

22. Andalucía Extraordinaria 2020. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- a) Calcula la distancia entre r y π . **(1 punto)**
 b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r . **(1.5 puntos)**

Solución: $d(r, \pi) = \sqrt{3} = 1.732$ u b) $\pi': y + z + 3 = 0$

23. Andalucía Ordinaria 2020. EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{a} \quad y \quad s \equiv \frac{x - 3}{-a} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$$

- a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a . **(1.25 puntos)**
 b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución: a) Si $a = \pm 2$ las rectas se cortan en un punto. Si $a \neq \pm 2$ las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y están en planos paralelos, no son coplanarias. b) $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda, \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

24. Andalucía Ordinaria 2020. EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

- a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r . **(1.25 puntos)**
 b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r . **(1.25 puntos)**

Solución: a) $\pi \equiv -3x + 3y + z + 9 = 0$. b) $\pi' \equiv -y + 3z - 2 = 0$

25. Andalucía Septiembre 2019. Opción A. Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\vec{v} = (1, -2, -1)$ $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

- a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.
 c) **[1 punto]** Para $\alpha = 8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: a) $\alpha = 2$ y $\beta = -2$ b) $\alpha = -4$ y $\beta = -2$ c) $\beta = 10$

26. Andalucía Septiembre 2019. Opción B. Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2} \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

- (a) **[1'25 puntos]** Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.
 (b) **[1'25 puntos]** Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

Solución: a) $k = -2$ b) $\pi \equiv y - z - 1 = 0$

27. Andalucía Junio 2019. Opción A. Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$

y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 .
 b) **[1,25 puntos]** Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2 .

Solución: a) $P_r(2, 2, 1)$ o bien $P_r(4, -4, -1)$ b) Las rectas se cruzan

28. Andalucía Junio 2019. Opción B. Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución: a) $\text{Área} = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$ b) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0,2581$.

29. Andalucía Septiembre 2018. A.4. Considera las rectas

$$r: \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+1}{3} \quad y \quad s: \begin{cases} 2x-3y = -5 \\ y-2z = -1 \end{cases}$$

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

Solución: a) Se cruzan b) Distancia = $\frac{3\sqrt{3}}{5} u$

30. Andalucía Septiembre 2018. B.4. Considera las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \quad y \quad s: \begin{cases} x+nz = -2 \\ y-z = -3 \end{cases}$$

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s .

Solución: a) $m=4$ y $n=2,5$ b) $-2x+3y-5z+5=0$

31. Andalucía Junio 2018. A.4. Considera los puntos $P(1, 0, -1)$, $Q(2, 1, 1)$ y la recta r dada por:

$$x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$$

a) Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

Solución: a) $P'(7, -2, 1)$ b) $P''(9/2, -1/2, -1)$

32. Andalucía Junio 2018. A.4. Considera el punto $P(2, -1, 3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) Calcula la distancia de P a π .

Solución: a) $P'(\frac{8}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{19}{7})$ b) Distancia = $\frac{\sqrt{14}}{7} u$

33. Andalucía Septiembre 2017. A.4. Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

c) [0,5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D .

Solución: a) Área de $ABCD = \sqrt{8} = 2,8284 u^2$ b) $\pi \equiv y - z = 0$ c) $D = (0, 2, 2)$

34. Andalucía Septiembre 2017. B.4. Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

Solución: a) $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ b) $P' \left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3 \right)$

35. Andalucía Junio 2017. A.4. Considera el punto $P(1, -1, 0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .

Solución: a) $\pi \equiv x - 3z - 1 = 0$ b) $P'(1, -3, 0)$

36. Andalucía Junio 2017. B.4. Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$.

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

Solución: a) $n = \frac{1}{4}$; $m = -\frac{1}{4}$ b) $m = -\frac{59}{2}$ ó $m = \frac{61}{2}$

Aragón



1. Aragón Extraordinaria 2025. 1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1/2)$ y $C(3/2, 3, 1)$ y el vértice superior, D , se encuentra en una viga recta entre los puntos $E(0, 1, 3)$ y $F(3, 2, 3)$ (es decir, $D = E + \lambda \overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).

a) (1,5 puntos) Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

Solución: a) El volumen máximo es de $\frac{16.75}{6} \approx 2.79167 \text{ m}^3$. b) $\frac{44\sqrt{13}}{91} \approx 1.7433$ metros.

2. Aragón Ordinaria 2025. 2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

Solución: a y b son vectores. c es un escalar. El vector $a = (u \times v) + w$ es paralelo a w y perpendicular a u y v . El vector $b = v \times (v \times w)$ es perpendicular a u y v , paralelo a w .

3. Aragón Ordinaria 2025. 2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1, 2, 3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Solución: a) $s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $\pi : 8x - 7y + 3z - 3 = 0$

4. Aragón Extraordinaria 2024. 8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

Solución: $\pi : y + z - 3 = 0$

5. Aragón Extraordinaria 2024. 9. Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y $\vec{v}_1$ el vector que va de A a B ; $\vec{v}_2$ el vector que va de B a C y $\vec{v}_3$ el vector que va de C a A .

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B , C .

Solución: a) Los vectores son linealmente dependientes. b) $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

6. Aragón Ordinaria 2024. 8. Dados los puntos $P_1(-2,1,1)$, $P_2(0,a,-2)$, $P_3(-1,1,-1)$ y $P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Solución: (a) Los valores buscados son $a = 1$ y $a = 3$ (b) El valor buscado es $a = 2$.

7. Aragón Extraordinaria 2023. 8)

Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

Solución: a) Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes. b) $\vec{0}$

8. Aragón Ordinaria 2023. 8) El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C . Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2 .

Solución: Los valores de b buscados son -1 y $+1$.

9. Aragón Ordinaria 2023. 9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \vec{s} + \vec{w} \cdot \vec{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

Solución: a) Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente independientes. b) 4

10. Aragón Extraordinaria 2022. 8)

El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y . Escribe todas las soluciones posibles.

Solución: Hay dos soluciones del problema: $D\left(0, \frac{67}{7}, 0\right)$ y $D\left(0, -\frac{53}{7}, 0\right)$

11. Aragón Ordinaria 2022. 8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2 , y además pasa por el punto $(-1, 2, 1)$, siendo

$$r_1 = \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Solución: a) $\pi \equiv x + y - 4z + 3 = 0$ b) $k = 2/7$

12. Aragón Ordinaria 2022. 9)

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, siendo $\vec{v}_1 = (1, 0, -2)$ y $\vec{v}_2 = (3, 1, 0)$

Solución: a) $a = 1$ b) 0

13. Aragón Extraordinaria 2021. 8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, 0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$ y $(2, -1, 1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$

14. Aragón Ordinaria 2021. 8) Aragón Ordinaria 2021. 8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0, 1, 1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3 , y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$B_1 = (-1, 0, 2)$, $B_2 = (1, 3, 1)$, $B_3 = (2, -1, 0)$.

Solución: $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ -y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

15. Aragón Ordinaria 2021. 9) Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u}_1 = (-1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 3, 1), \quad \vec{u}_3 = (1, -2, 0), \quad \vec{u}_4 = (-2, 0, 1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o

independientes, siendo $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_3 = \vec{u}_4$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$(\vec{2u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (\vec{2u}_1 - \vec{u}_2), \quad (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

Solución: a) Son linealmente independientes b) $(\vec{2u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (\vec{2u}_1 - \vec{u}_2) = 6$, $(\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) = (0, 0, 0)$

16. Aragón Extraordinaria 2020. 4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta

$r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$

Solución: $\pi': 2x + y - z + 2 = 0$

17. Aragón Ordinaria 2020. 4) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) (1,25 puntos) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

b) (0,75 puntos) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución: a) $\pi \equiv x + z - 1 = 0$ b) Volumen = $3u^3$

18. Aragón Septiembre 2019. Opción A. 2. a) (0,75 puntos) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

b) (0,75 puntos) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1, 3, 2)$ y es perpendicular a la recta.

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución: a) Volumen = $6u^3$ b) $\pi: 2x + 3y - 2z - 7 = 0$

19. Aragón Septiembre 2019. Opción B. 2. (1,5 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A:(1, 3, -1)$.

Solución: a) $\pi: 4x - 8y - 7z + 13 = 0$ o en paramétricas $\left. \begin{aligned} x &= 1 + \alpha - \lambda \\ y &= 3 - 3\alpha - 4\lambda \\ z &= -1 + 4\alpha + 4\lambda \end{aligned} \right\} \pi$

20. Aragón Junio 2019. Opción A. 2. a) (1 punto) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados $A:(1, 1, 2)$, $B:(2, 2, 2)$ y $C:(-1, a, b)$ y determine la recta que los contiene.

b) (0,5 puntos) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$$

Donde el símbolo " $\times$ " representa el producto vectorial.

Solución: a) Para $a = -1$ y $b = 2$ están alineados y la recta que definen es $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$ b) 0.

21. Aragón Junio 2019. Opción B. 2. a) (1 punto) Determine la ecuación del plano determinado por el punto $P:(2, 1, 2)$ y la recta $r: (1, 0, 0) + t(-1, 1, 1)$.

b) (0,5 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 1, -3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Solución: a) $\pi \equiv x + 3y - 2z - 1 = 0$ b) Área = $3,74u^2$

22. Aragón Septiembre 2018. Opción A. 2. (1,5 puntos) a) (0,5 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1} \quad s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Solución: a) El volumen del paralelepípedo es de 1 u^3 . b) Las rectas r y s se cruzan

23. Aragón Septiembre 2018. Opción B. 2. (1,5 puntos) Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano: $\pi: mx + y + nz = 4$

Solución: $m = \frac{5}{3}$, $n = \frac{7}{3}$

24. Aragón Junio 2018. A. 2. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $(0,0,0)$ y contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Solución: $4x + y - 2z = 0$

25. Aragón Junio 2018. B. 2. Considere el plano $\pi: 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a .

b) Para $a = 2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

Solución: a) Si $a \neq 1$ son secantes. Si $a = 1$ son paralelos. b) $\frac{x}{4} = y - 1 = \frac{z}{2}$

26. Aragón Septiembre 2017. Opción A. 2. (2 puntos) a) (1,5 puntos) Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: x - 2y + z = 1 \quad \pi': \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + k\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real k .

b) (0,5 puntos) Determine el ángulo que forman esos planos cuando $k = 3$.

Solución: a) Para $k = 0$ los planos son coincidentes. Para $k \neq 0$ los planos son secantes. b) $\alpha = 90^\circ$

27. Aragón Septiembre 2017. Opción B. 2. (2 puntos) a) (1,5 puntos) Determine, como intersección de dos planos, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

y pasa por el punto $P:(2,1,-1)$.

b) (0,5 puntos) Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x - 3y + z = 4$$

$$\pi' : y + z = 0$$

Solución: a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ b) $\alpha = 112^\circ$

28. Aragón Junio 2017. A. 2. (2 puntos) a) (1 punto) Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine la distancia del punto $P(0, 0, 0)$ a cada una de las dos rectas anteriores.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $d(P, r) = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $d(P, s) = 0$

29. Aragón Junio 2017. B. 2. (2 puntos) a) (1 punto) Sea " m " una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de " m ":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \quad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Solución: a) Si $m = -2$ son paralelos y si $m \neq -2$ son secantes. b) $\alpha = 36^\circ$

Asturias



- 1. Asturias Extraordinaria 2025. Pregunta 4. Opción A** Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:
- (a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
- (b) **(1 punto)** Calcule las distancias de A y B al plano π .
- (c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Solución: a) $\pi: x - z + 2 = 0$. b) $d(A, \pi) = d(B, \pi) = \sqrt{2}$ c) www.ebaumatematicas.com.

- 2. Asturias Extraordinaria 2025. Pregunta 4. Opción B** Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:
- (a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
- (c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Solución: a) $\beta = \frac{5}{3}$. b) $\beta = -3$ c) $Q'(3, 2, 1)$.

- 3. Asturias Ordinaria 2025. Pregunta 4. Opción A** Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \quad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s)$$

Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan
- (b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Solución: a) Las rectas (puentes) se cruzan. b) Los puntos de inicio y final del pasadizo son $E(1, 1, 1)$ y $F(3, 3, 2)$. La longitud del pasadizo es de 3 unidades..

- 4. Asturias Ordinaria 2025. Pregunta 4. Opción B** Se consideran los puntos siguientes: $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 4)$, $C(3, 0, 5)$ y $D(0, -1, 2)$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución: a) Los puntos A , B , C y D no pertenecen al mismo plano.. b) $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas. c) El volumen del tetraedro formado por los 4 puntos tiene un valor de $16/3$ unidades cúbicas.

- 5. Asturias Extraordinaria 2024. Pregunta 5.** Se consideran los puntos

$$A = (0, -1, 1) \text{ y } B = (2, 1, 3) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

- (b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Solución: a) $\pi : x + y + z - 3 = 0$. b) $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

6. Asturias Extraordinaria 2024. Pregunta 6. Se consideran los puntos

$A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C .
 (c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución: a) No existe un plano que contenga los cuatro puntos. b) $r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ c) $P(0, 1, 2)$

7. Asturias Ordinaria 2024. Pregunta 5. Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano

$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$,

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π .
 (b) **(1 punto)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A , $C = (-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Solución: a) $B(-2, -3, -1)$. b) $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

8. Asturias Ordinaria 2024. Pregunta 6. Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

- a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A , B y C .
 (c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$ del apartado anterior.

Solución: a) No existe un plano que contenga los cuatro puntos. b) $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$. c) $P(2, -3, 4)$

9. Asturias Extraordinaria 2023. Problema 5.

Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y - 2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

- (a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s .
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

Solución: a) las rectas se cruzan (rectas no paralelas sin punto en común). b) $\pi \equiv x - z - 2 = 0$.
 c) $\sqrt{2}$ unidades.

10. Asturias Extraordinaria 2023. Problema 6. Dados los planos

$\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
 (b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

Solución: a) Un vector director de la recta r es $\vec{u}_r = (1, -1, 0)$ y un punto es $P_r(0, 3, 0)$. b) $P(0, -1, 4)$
c) $A'(-2, -3, 2)$

11. Asturias Ordinaria 2023. Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a-3)z = 4$,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π .

(b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución: a) Recta y plano son paralelos para $a = 2$. b) $\pi' \equiv -2x - 2y - 3z + 5 = 0$

12. Asturias Ordinaria 2023. Problema 6.

Dados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (-1, 4, -4)$,

(a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π

(c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Solución: a) $\pi: x - 2y + 2z + 8 = 0$. b) 3 unidades. c) $s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-4}$

13. Asturias Extraordinaria 2022. Bloque 3.A.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula $\vec{v}_r$ un vector director de r .

(b) (1 punto) Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v}_r$ es proporcional a $\vec{v}$.

(c) (1 punto) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s' , siendo

$$s' \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-2} = z$$

Solución: a) $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ b) $\vec{u}_s = (-1, 2, -1)$ c) $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$

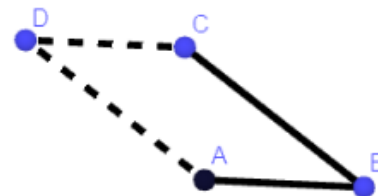
14. Asturias Extraordinaria 2022. Bloque 3.B.

Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$.

(a) (0.5 puntos) Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C .

(b) (1 punto) Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo y el área de $ABCD$.

(c) (1 punto) Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E .



Solución: a) $\pi \equiv 4x + 3z - 7 = 0$ b) $D(-2, -7, 5)$. Área = $30 u^2$. c) $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

15. Asturias Ordinaria 2022. Bloque 3.A.

Sea la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$ y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$

(a) (0.75 puntos) Indica la posición relativa de r y s .

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s .

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

Solución: a) Se cruzan. b) $\pi \equiv x - z - 2 = 0$ c) $\sqrt{2} u$

16. Asturias Ordinaria 2022. Bloque 3.B.

Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

Solución: a) $P_r(3, 0, 0)$; $\vec{v}_r(-1, 1, 0)$ b) $P(0, -1, 4)$ c) $A'(-2, -3, 2)$

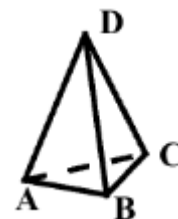
17. Asturias Extraordinaria 2021. Bloque 3.A. Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A , B y C . (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C . (0.75 puntos)

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π . (0.5 puntos)



Solución: a) Área $ABC = 3\sqrt{14} \approx 11.225 u^2$ b) $\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0$ c) $\alpha = 5$ d) $D'(1, -3, -1)$

18. Asturias Extraordinaria 2021. Bloque 3.B. Sean el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{Calcula:}$$

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r . (0.75 puntos)

b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r . (0.75 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $d(r, P) = \sqrt{2} u$ $Q(0, 0, 0)$ c) $\pi \equiv x + z = 0$

19. Asturias Ordinaria 2021. Bloque 3.A. Dadas las rectas

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \quad y \quad s: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r . Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\pi \equiv x + 2y + z = 0$ $d(P, \pi) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408 u$ c)

$$d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{6}} u$$

20. Asturias Ordinaria 2021. Bloque 3.B. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \text{ Halla:}$$

a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B . (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r . (1.25 puntos)

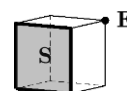
Solución: a) $C = (1, 5, 5)$ b) $\pi \equiv -3x + y - z + 2 = 0$

21. Asturias Extraordinaria 2020. Bloque 3.A. Sean $A(2, 1, 0)$, $B(5, 5, 0)$ y $C(2, 1, 5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2, 4, 0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S . (1 punto)

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S . (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E ? (0.5 puntos)



Solución: a) $D(5, 5, 5)$ b) $\pi \equiv 4x - 3y + 20 = 0$ c) El vértice adyacente a E es el A .

22. Asturias Extraordinaria 2020. Bloque 3.B. Dados dos planos $\begin{cases} \pi: x + y - 2z = 3 \\ \pi': x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un

punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5, 1, 0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A . (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P . (1 punto)

Solución: a) $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases}$ b) $P(4, 1, 1)$

23. Asturias Ordinaria 2020. Bloque 3.A. Dados el punto $A(2, 1, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta r . (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r . (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r . (1 punto)

Solución: a) $\vec{v}_r = (-1, 1, -1)$. b) $\pi: 2x + y - z - 4 = 0$ c) $s: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

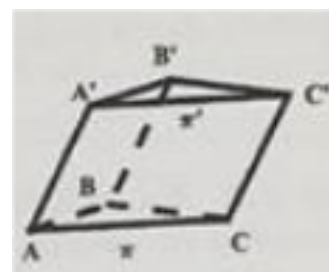
24. Asturias Ordinaria 2020. Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con

$A(1, 0, 0)$; $B'(-1, 2, 2)$; $C(0, 3, 0)$; $C'(0, 4, 2)$. Y los planos π , al que pertenecen los puntos A, B, C y π' , al que pertenecen los puntos A', B', C' . Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B . (0.75 puntos)

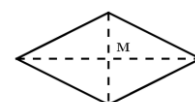
b) La distancia entre los planos π y π' . (0.75 puntos)

c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)



Solución: a) $A'(1, 1, 2)$; $B(-1, 1, 0)$ b) $d(\pi, \pi') = 2u$ c) Volumen $= 5u^3$

25. Asturias Julio 2019. A. 3. Sean $A(3, 1, 0)$ y $B(1, 3, 0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z = 0$.



- a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
- b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)
- Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.*

Solución: a) $\vec{v}_r = (1,1,0)$ y la recta es $r: \begin{cases} x=2+t \\ y=2+t \\ z=0 \end{cases}$ b) C(3,3,0) y D(1,1,0)

26. Asturias Julio 2019. B. 3. Dados el plano $\pi: x+y=1$ y la recta r que pasa por el punto A(1,1,1) con vector director $\vec{v}_r = (0,1,1)$. Calcula:

- a) El punto P intersección del plano π y de la recta r . (1.25 puntos)
- b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π . (1.25 puntos)

Solución: a) P(1,0,0). b) A' (0,0,1)

27. Asturias Junio 2019. A. 3. Sean los planos $\pi_1: x+y+z=0$ y π_2 : Su intersección es la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

- a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
- b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r . (1.25 puntos)

Solución: a) $\pi_2 \equiv -x+2y-z=0$ b) El plano puede ser $\pi'_1: x+y+z+3=0$ o $\pi'_1: x+y+z-3=0$

28. Asturias Junio 2019. B. 3. Sean los puntos A(1,1,1), B(1;-1;-1): Calcula:

- a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
- b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

Solución: a) $\pi \equiv y+z=0$ b) $C\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $D\left(1, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

29. Asturias Julio 2018. A.3. Los puntos A(0,1,0) y B(-1,1,1) son dos vértices de un triángulo.

El tercero C pertenece a la recta $s: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r .

- a) Determina el punto C.
- b) Calcula el área del triángulo.

Solución: a) C(4,1,1) b) Área=2,5 u^2

30. Asturias Julio 2018. B.3. Dados los puntos A(2,1,0) y B(1,0,-1) y r la recta que

determinan. Y sea s la recta definida por $s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$.

- a) Estudia la posición relativa de las rectas.
- b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución: a) Se cortan en un punto. b) C(1,1,-1)

31. Asturias Junio 2018. A. 3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2$

Calcula:

- a) Un vector director $\vec{v}$ de r . (0.75 puntos)
- b) Un vector director $\vec{u}$ de s sabiendo que $\vec{v} \times \vec{u}$ es proporcional al vector $(1; 0; 2)$. (1 punto)
- c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

Solución: a) $\vec{v} = (2, 1, -1)$ b) $\vec{u} = (2, -5, -1)$ c) $\pi: x + 2z = 5$

32. Asturias Junio 2018. B. 3. Dado la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto $Q(1; 1; 1)$ y un plano π .

- a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P; Q) = 1$ u. (1.25 puntos)
- b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P; Q) = d(P; \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

Solución: a) $P(1, 1, 0)$ b) $z = 1$

33. Asturias Julio 2017. A. 3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π . Calcula:

- a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A . (1 punto)
 - b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
 - c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A . (0.5 puntos)
- (Observación: $A \in \pi'$)

Solución: a) $\pi: x + 2y + 2z = 5$ b) $\pi': x + 2y + 2z - 14 = 0$ ó $\pi': x + 2y + 2z + 4 = 0$ c) $B(-1, -2, 5)$ ó $B(3, 6, -5)$

34. Asturias Julio 2017. B. 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + z + 1 = 0$

- a) Halla el valor de a para que sean paralelos. (1.5 puntos)
- b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

Solución: a) $a = 2$ b) $\pi': 4x + y - 7z - 4 = 0$

35. Asturias Junio 2017. A. 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ y $s: x + 1 = \frac{y-1}{2} = z$.

Calcula:

- a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
- b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
- c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$. (1 punto)

Solución: a) $\vec{v}_r = (-2, 1, 0)$ $\vec{v}_s = (1, 2, 1)$ b) $\alpha = 90^\circ$ c) $\pi: x + 2y - 5z = 0$

36. Asturias Junio 2017. B. 3. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 1, 1)$; $C(0, 0, 1)$; $D(4, 1, 3)$:

Determina:

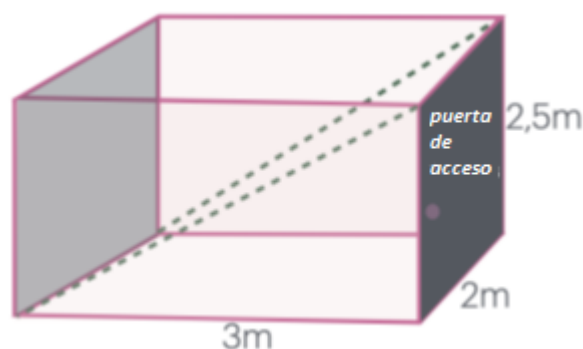
- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
- b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C . (1 punto)
- c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

Solución: a) No son coplanarios b) $x - 4 = y - 1 = \frac{z - 3}{3}$ c) $C(3,0,0)$.

Baleares



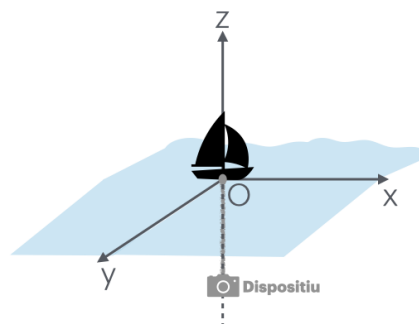
1. Baleares Extraordinaria 2025. Problema A1. — Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2.5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión 3×2.5 metros, tal y como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



- (a) **[1 punto]** Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.
- (b) **[1 punto]** Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifica el proceso.
- (c) **[0.5 puntos]** Una de las dos caras de dimensión 2×2.5 metros constituye la puerta del contenedor tal y como se muestra en la figura. Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones 2.75×2.75 metros?

Solución: (a) $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $A'(0, 0, 2.5)$, $B'(2, 0, 2.5)$, $C'(2, 3, 2.5)$ y $D'(0, 3, 2.5)$. b) Cada una de las vigas tiene una longitud de $\frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3.9$ metros. El plano que contiene las vigas tiene ecuación $\pi : 5y - 6z = 0$. (c) La lámina puede entrar en el contenedor y debe ser colocada de forma diagonal pues uno de los lados de la base tiene de longitud 2 metros, menor de 2.75 metros.

2. Baleares Ordinaria 2025. Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos en una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) **[1 punto]** Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) **[0.5 puntos]** Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) **[1 punto]** Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Solución: (a) El punto donde se situó el dispositivo es $B = (0, 12, -350)$. (b) $\pi: z + 350 = 0$.

(c) Si podrían colisionar, siendo el punto de posible colisión $P(17, 13, -350)$.

3. Baleares Extraordinaria 2024. 5. P3.– Sean $P = (-1, 1, 1)$, $Q = (7, 1, 7)$ y $R = (-4, 1, 5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

- (a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.
- (b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.
- (c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S = (a, 1, 0)$ es coplanario con P, Q y R.

Solución: (a) El ángulo es recto en el vértice P. (b) No es posible construir el cuadrado pedido.

(c) El punto S pertenece al plano π definido por los puntos P, Q y R

4. Baleares Extraordinaria 2024. P4.– Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x + 1 = \frac{y - 1}{2} = z$$

Calcula:

- (a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.
- (b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s , y pasa por el punto $A = (2, 2, 1)$.

Solución: (a) Las rectas se cruzan perpendicularmente.

(b) $\pi: x + 2y - 5z - 1 = 0$.

5. Baleares Ordinaria 2024. P3.– Consideremos los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(2, -1, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$

- (a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

- (b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.
- (c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Solución: (a) El punto D tiene coordenadas $(1, 1, 4)$ (b) El punto E tiene coordenadas $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}}, \frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$

o $\left(\frac{7}{\sqrt{83}}, \frac{5}{\sqrt{83}}, \frac{-3}{\sqrt{83}}\right)$ (c) $\pi': -7x - 5y + 3z + \sqrt{83} = 0$ o $\pi': -7x - 5y + 3z - \sqrt{83} = 0$

6. Baleares Ordinaria 2024. P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1: 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2: 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π , siendo

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \text{ y } s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Solución: (a) Si $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$ los planos son coincidentes, si $a = \frac{1}{2}$ y $b \neq 2$ los planos son paralelos y

si $a \neq \frac{1}{2}$ los planos son secantes, en particular para $a = -20$ son perpendiculares.

$$(b) t: \frac{x - \frac{13}{10}}{3} = \frac{y - \frac{3}{10}}{1} = \frac{z - \frac{17}{20}}{-12}.$$

7. Baleares Extraordinaria 2023. 5. P3.– Sean los puntos

$$A = (1, 2, 0), B = (-1, 0, 1), C = (0, 0, 1) \text{ y } D = (3, 1, 2).$$

(a) **[4 puntos]** Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios.

(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Solución: (a) $\pi: y + 2z - 2 = 0$. $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

(c) El punto de corte de recta y plano es $P\left(3, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ diferente al punto $D = (3, 1, 2)$.

8. Baleares Extraordinaria 2023. P4.– Sea el plano $\pi: 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

(a) **[2 puntos]** ¿Son P y Q puntos del plano π ? Justifica la respuesta.

(b) **[4 puntos]** Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a $\frac{3}{4}$ partes de P y a $\frac{1}{4}$ parte de Q

(c) **[4 puntos]** Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π .

Solución: (a) Los puntos P y Q pertenecen al plano π . (b) $s\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, -2\right)$; $s'(3, -2, -5)$

$$(c) s: \begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

9. Baleares Ordinaria 2023. P3.– Considera el plano $\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) **[3 puntos]** Determina los vértices del triángulo determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.

(b) **[3 puntos]** Calcula el área del triángulo anterior.

(c) **[4 puntos]** Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

Solución: (a) $A(3, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 6)$ (b) $3\sqrt{14} \approx 11.22$ unidades cuadradas

$$(c) r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

10. Baleares Ordinaria 2023. P4.– Sean a y b dos constantes reales no nulas.

Consideremos el plano $\pi: x + ay - 2z = 3$ y la recta

$$r: \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π ? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π , y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.

(b) **[3 puntos]** ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π ?

(c) **[3 puntos]** ¿Existen algunos valores de a y b para los cuales la recta r está contenida en el plano π ?

Solución: (a) Con los valores $a = 0$; $b = \frac{1}{2}$ recta y plano son perpendiculares. El punto de corte es

$P\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-4}{5}\right)$. No tiene sentido hablar de distancia entre recta y plano pues la recta corta al plano en el

punto P. (b) La recta y el plano son paralelos cuando $b = -2$. El valor de a puede ser cualquier valor real. (c) No existen valores que hagan que la recta esté contenida en el plano.

11. Baleares Extraordinaria 2022. 5. Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

- | | |
|--|------------|
| (a) el punto P pertenece a la recta r. | (1 punto) |
| (b) la recta r y el plano π se cortan en un único punto. | (3 puntos) |
| (c) la recta r está contenida en el plano π . | (3 puntos) |
| (d) la recta r es perpendicular al plano π . | (3 puntos) |

Solución: (a) El punto P pertenece al plano para cualquier valor de "a". (b) $a \neq 1$. (c) La recta no está contenida en el plano para ningún valor de "a". (d) No es posible para ningún valor de "a"

12. Baleares Extraordinaria 2022. 6. Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ y $E(0, 0, 0)$.

- (a) Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π . (2 puntos)
 (b) Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en el vértice A. (3 puntos)
 (c) Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y D con el plano π . (3 puntos)
 (d) Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$. (2 puntos)

Solución: (a) Los puntos no están alineados y los puntos A, B y C definen un único plano. (b) No es rectángulo en A. (c) 0° . (d) $0 u^3$

13. Baleares Ordinaria 2022. 5. Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) ABCD, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$.

- (a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (2 puntos)
 (b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC. (2 puntos)
 (c) Encuentre las coordenadas del vértice D. (4 puntos)
 (d) Calcule el área del paralelogramo ABCD. (2 puntos)

Solución: (a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{\sqrt{57}}$ (b) $M = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (c) $D(3, 2, -3)$ (d) $\sqrt{32} \approx 5.66 u^2$

14. Baleares Ordinaria 2022. 6. Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r , (2 puntos)
 (b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s . (3 puntos)
 (c) Encuentre la ecuación general del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ (2 puntos)
 (d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s . (3 puntos)

Solución: (a) $r \equiv (x, y, z) = (0, 3, -1) + t(1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ (b) Se cruzan. (c) $\pi: x - y + 2z = 0$
 (d) $\pi': x + y - 1 = 0$

15. Baleares Extraordinaria 2021. 5. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} y = x + 3, \\ z = 2x + 2, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, \\ x = 2z + 3, \end{cases}$$

- (a) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas (I) y (II). (1 punto)
 (b) Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta (II) que contiene a la recta (I). (3 puntos)
 (c) Calcula el plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto $(-1, 0, 2)$. (3 puntos)
 (d) Calcula la recta de dirección perpendicular a las de las rectas (I) y (II) que pasa por el origen. (3 puntos)

Solución: (a) $(I) \equiv (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2)$; $\lambda \in \mathbb{R}$ $(II) \equiv (x, y, z) = \left(3, -\frac{1}{2}, 0\right) + \beta(2, 0, 1)$; $\beta \in \mathbb{R}$

(b) $\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0$ (c) $\pi' \equiv 2x + z = 0$ (d) $(III) \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -3\alpha, \text{ siendo } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$

16. Baleares Extraordinaria 2021. 6. Dados los puntos

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0), \quad R = (0, 1, 1)$$

- (a) Comprueba que P, Q y R no están alineados. (2 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial del plano que determinan P, Q y R. (3 puntos)
 (c) Calcula el área del triángulo que tiene por vértices P, Q y R. (3 puntos)
 (d) Calcula, de forma razonada, la condición que han de cumplir a, b y c para que los puntos P, Q, R y S = (a, b, c) pertenezcan a un mismo plano. (2 puntos)

Solución: (a) No están alineados (b) $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$ (c) Área PQR = $\frac{\sqrt{3}}{2} u^2$ (d) $a + b + c - 2 = 0$

17. Baleares Ordinaria 2021. 5. Considera los puntos,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4)$$

- (a) Determina el valor del parámetro a para el cual los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en el punto B. (3 puntos)
 (b) Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
 (c) Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)

Solución: (a) $a = -2$ (b) Área = $\frac{3\sqrt{30}}{2} \approx 8.21 u^2$ (c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 95^\circ$

18. Baleares Ordinaria 2021. 6. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

- (a) Calcula el valor de m per tal que se cortan en un punto, (7 puntos)
 (b) Calcula el punto de corte. (3 puntos)

Solución: (a) $m = 7$ (b) El punto de corte de las rectas r y s es A(1, 14, 3)

19. Baleares Extraordinaria 2020. Opción A. 3. Dadas las rectas

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- (a) Calcula un vector de posición y un vector director de cada una. (4 puntos)
 (b) Calcula la ecuación vectorial de cada una. (2 puntos)
 (c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores posición obtenidos. (2 puntos)
 (d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas. (2 puntos)

Solución: (a) Los vectores y los puntos de cada recta son $\overrightarrow{u}_I = (2, 1, 3)$; $\overrightarrow{u}_{II} = (1, -1, 2)$; $P_I(3, -4, 1)$;

$P_{II}(0, -1, -5)$ (b) (I) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -5 + 2\alpha \end{cases}$ (c) El rango es 2. (d) Las rectas son secantes.

20. Baleares Extraordinaria 2020. Opción B. 3. Dados los planos

$$(I) 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II) 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III) x + 3y - (a-1)z = 0;$$

- (a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, no hay dos que sean paralelos. (4 puntos)

(b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a . (6 puntos)

Solución: (a) Los planos nunca pueden ser paralelos entre sí, pues plano (I) no es paralelo a (II), el plano (II) nunca es paralelo a (III) y tampoco es paralelo el (I) con el (III).

(b) Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ los 3 planos coinciden en un punto. Si $a = 2$ coinciden en una recta. Si $a = 5$ definen rectas paralelas dos a dos.

21. Baleares Ordinaria 2020. Opción A. 3. Considera el punto $P = (2, -1, 1)$ y la recta r dada por

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y + 4z - 1 &= 0 \\ x + 2y - 3z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} (r)$$

(a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r . (2 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano, π , perpendicular a la recta r que pasa por el punto P . (2 puntos)

(c) Calcula el punto, Q , de intersección del plano π con la recta r . (3 puntos)

(d) De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r . (3 puntos)

Solución: (a) $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{10} = \frac{z+1}{7}$ (b) $\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$ (c) $Q\left(\frac{11}{10}, 0, \frac{-3}{10}\right)$ (d) $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 9\lambda \\ y = -1 + 10\lambda \\ z = 1 - 13\lambda \end{cases}$

22. Baleares Ordinaria 2020. Opción B. 3. Dada la recta r y el plano π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

Busca si existe algún valor del parámetro m para el cual

(a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)

(b) o bien, el plano contiene la recta. (3 puntos)

(c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)

En cada caso, si existe, calcúlalo.

Solución: (a) $m = \frac{5}{3}$ (b) La recta nunca está contenida en el plano.

(c) $m \neq \frac{5}{3} \cdot P\left(\frac{5-5m}{5-3m}, \frac{-5}{5-3m}, \frac{-10+7m}{5-3m}\right)$

23. Baleares Julio 2019. A. 3. Determina un plano que, pase por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$: (10 puntos)

Solución: $\pi : x + 2y + z = 0$

24. Baleares Julio 2019. B. 3. Considere los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ y $C(0, 1, 1)$: Calcula el área del triángulo que forman los puntos A , B y C (5 puntos) y determina el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (5 puntos)

Solución: Área = $\frac{\sqrt{3}}{2} u^2$ y el ángulo es 60° .

- 25. Baleares Junio 2019. A. 3.** Determina la posición relativa del plano $x + y + z = 1$ y la recta de ecuaciones $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2}$ (4 puntos)
 Calcula la proyección ortogonal de la recta sobre el plano. (6 puntos)

Solución: Recta y plano son paralelos. La proyección es la recta $x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}$

- 26. Baleares Junio 2019. B. 3.** Considere la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ y el plano $x - y = 0$.
 Calcule el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal de este punto sobre el plano. (10 puntos)

Solución: Área = $\sqrt{11} u^2$

- 27. Baleares Julio 2018. A. 3.** Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta las rectas: (10 puntos)
 $r: x = 2y = z - 1$ $s: 3x = 2y - 2 = 6z$

Solución: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

- 28. Baleares Julio 2018. B. 3.** Calcula la distancia entre las rectas siguientes: (10 puntos)

$$r: \begin{cases} x + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución: $d(r, s) = 1 u$

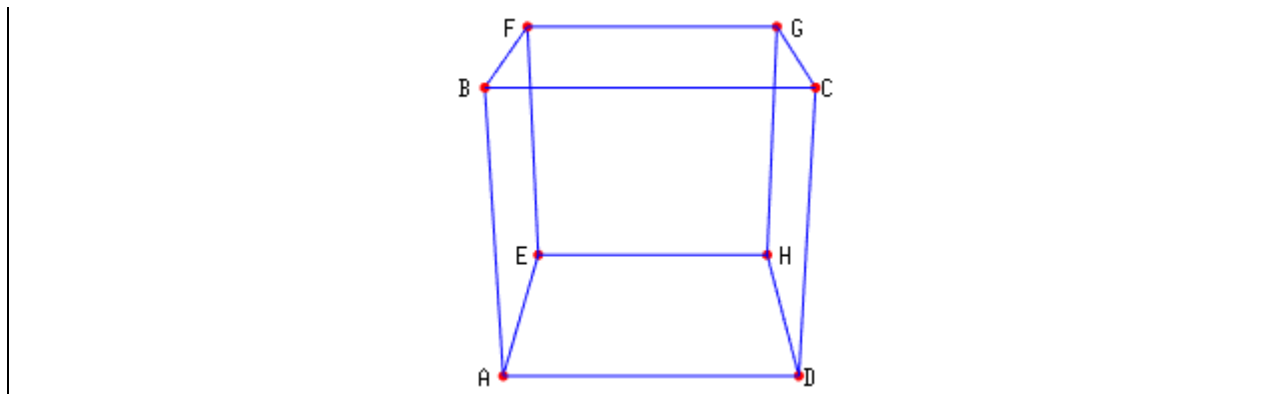
- 29. Baleares Junio 2018. A. 3.** Determina los puntos A, B y C de la recta $x - 12 = \frac{y + 6}{2} = \frac{z - 6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cual de estos tres puntos, A, B, C, está situado entre los otros dos. (4 puntos)

Solución: $A(0, -30, -30)$, $B(15, 0, 15)$ y $C(10, -10, 0)$. C está entre A y B.

- 30. Baleares Junio 2018. B. 3.** El plano perpendicular al punto medio del segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ corta los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Encuentra el área del triángulo ABC. (10 puntos).

Solución: Área = $32\sqrt{3} \approx 55.4256 u^2$

- 31. Baleares Septiembre 2017. A. 3.** Consideramos el cubo que aparece en la figura adjunta. Supongamos que el punto C tiene coordenadas $(1, 1, 1)$, las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados (o sea, la arista AE es paralela al eje X, la arista AD, al eje Y y la arista AB, al eje Z) y los lados del cubo tienen longitud 2. Calcula el plano que pasa por los puntos A, E, C y G (7 puntos) y la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto D. (3 puntos)



Solución: El plano tiene ecuación $y - z = 0$. La recta tiene ecuación $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$

32. Baleares Septiembre 2017. B. 3. Dados los puntos A(1,0,3) y B(1,3,4), determina los puntos situados en el plano $z = 1$ que forman con los puntos A y B un triángulo equilátero. (6 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

Solución: Hay dos soluciones: $Volumen = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{3} + 3\sqrt{5} \right)$ ó $Volumen = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{3} - 3\sqrt{5} \right)$

33. Baleares Junio 2017. A. 3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$

a) demuestra que se cruzan. (4 puntos)

b) calcula la distancia entre las rectas. (6 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $d(r, s) = 5\sqrt{\frac{2}{13}} \approx 1.96116 u$

34. Baleares Junio 2017. B. 3. Considere las rectas siguientes dependientes de un parámetro λ :

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda t \\ r: y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{array} \right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

a) Calcula el valor de λ para el que r y s se cortan. (7 puntos)

b) Calcula el punto de intersección para el valor de λ calculado. (3 puntos)

Solución: a) $\lambda = \frac{1}{3}$ b) El punto tiene coordenadas (0, -4, 9)

Canarias



1. Canarias EBAU Extraordinaria 2025. 3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}; \quad \pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r . 1.5

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π . 1

Solución: a) $s: \begin{cases} x = 4 + \alpha \\ y = -3 + 7\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases}$ b) 33° .

2. Canarias EBAU Extraordinaria 2025. 3B. En el espacio tridimensional se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

a) Comprobar que r y s son coplanarias. 1.5

b) Hallar la ecuación del plano que las contiene. 1

Solución: a) $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \vec{P_r Q_s}] = 0$. b) $\pi: x + y - 2z - 3 = 0$.

3. Canarias EBAU Ordinaria 2025. 3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$. 0.25

b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1

c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1.25

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\sqrt{17} \approx 4.12$ unidades. c) 25°

4. Canarias EBAU Ordinaria 2025. 3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1, 0, 2); \quad \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r . 1

b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π . 1.5

Solución: a) La recta corta al plano en un único punto. b) $A' \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3} \right)$.

5. Canarias EBAU Extraordinaria 2024. 3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto
- b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1 . 1.5 pts

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) El punto de corte de las rectas es $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

6. Canarias EBAU Extraordinaria 2024. 3B. Responder a las siguientes cuestiones:

- a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 pts

- b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r: \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 pts

Solución: a) No es posible b) El punto de corte de recta y plano es el punto $P(1, 0, -2)$. El ángulo entre recta y plano es de 17.98° .

7. Canarias EBAU Ordinaria 2024. 3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4), \quad r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0$$

- a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P . 1.5 pts
- b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π . 1 pto

Solución: a) $A(-3, -1, 0)$ b) El ángulo formado entre recta y plano tiene un valor de 24.94° .

8. Canarias EBAU Ordinaria 2024. 3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . 1.5 pts
- b) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s . 1 pto

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. b) $\pi: x - 4y + 3z - 6 = 0$

9. Canarias EBAU Extraordinaria 2023. 3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1, -2, 0) ; \quad r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P . 1.75 pts

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r .

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s : x - 5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 pts

Solución: a) $\pi : x - 2y - 5 = 0$. El ángulo que forma el plano con la recta es de 15° .

b) El punto de corte de las rectas r y s es $A(3, 3, 3)$.

10. Canarias EBAU Extraordinaria 2023. 3B.

En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} ; \quad s : x = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 pts

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . 1.25 pts

Solución: a) Las rectas se cortan y son coplanarias. $\pi : 2x - z + 2 = 0$ b) $t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

11. Canarias EBAU Ordinaria 2023. 3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi : 2x + 3y - z = 4 ; \quad r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases} ; \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de $P(-2, 1, 2)$ respecto de π . 1.25 pts

b) Calcular el ángulo que forman r y s . 1.25 pts

Solución: a) $P' = (0, 4, 1)$ b) Las rectas forman un ángulo de 30° .

12. Canarias EBAU Ordinaria 2023. 3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r : \begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} 2x - 7y - 3z = 22 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s . 1.25 pts

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . 1.25 pts

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. Tienen distinta dirección y no son coplanarias. b)

$$\pi : 3x - 5y + z + 11 = 0$$

13. Canarias EBAU Extraordinaria 2022. 3A.

Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa entre

r y s

1.5 pts

- b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z - 5 = 0$ 1 pto

Solución: a) Se cortan (son coplanarias) b) $\pi': 2x + 5y + z + 6 = 0$

14. Canarias EBAU Extraordinaria 2022. 3B.

En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$$

- a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A , dar la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A 1.5 pts
b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π 1 pto

Solución: a) $s: \begin{cases} x = -5 + 5\alpha \\ y = -5 - 6\alpha \\ z = -9 + 7\alpha \end{cases}$ b) 21° .

15. Canarias EBAU Ordinaria 2022. 3A. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s 1.25 pts
b) Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r . Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta: $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z-2$ 1.25 pts

Solución: a) Las rectas se cruzan b) $\pi \equiv -11x - 2y + 7z - 6 = 0$

16. Canarias EBAU Ordinaria 2022. 3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases}; \quad r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \quad r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

- a) Calcula la ecuación de la recta s , perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 pts
b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45° ? Justifícalo 1.25 pts

Solución: a) $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ b) No es cierto. El ángulo es de casi 77°

17. Canarias Extraordinaria 2021. 3A. Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

- a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto. 1.5 pts
b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r , y perpendicular al plano π 1 pto

Solución: a) Recta y plano se cortan en el punto $P(3,5,3)$ b) $\pi' \equiv -12x - 11y + z + 44 = 0$

18. Canarias Extraordinaria 2021. 3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

Y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s . 1.5 pts

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s . 1 pto

Solución: a) $A(5, -2, 1)$. $t: \begin{cases} x = 5 - \beta \\ y = -2 + 3\beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$ b) $\text{ángulo}(r, s) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{246}}{82}\right) \approx 54^\circ$

19. Canarias Ordinaria 2021. 3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$A(0, -2, 3)$, $B(1, -1, 4)$, $C(2, 3, 3)$ y $D(4, 5, 5)$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.

A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 pts

b) Calcular la ecuación de la recta r , perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ 1 pto

que pasa por el punto A.

Solución: a) $\pi: -5x + 2y + 3z - 5 = 0$ b) $r: \begin{cases} x = -3t \\ y = -2 - 3t, \text{ siendo } t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

20. Canarias Ordinaria 2021. 3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$ 1.25 pts

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 pts

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2 - \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 23\lambda \end{cases}$ b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es de 92.16°

21. Canarias Extraordinaria 2020. Grupo A. 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, y dado el plano

$$\pi \equiv x - 3y + 5z = 2$$

a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π . 1.25 pts

b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . 1.25 pts

Solución: a. Recta y plano son paralelos. b. $\pi' \equiv -8x - 11y - 5z + 32 = 0$.

22. Canarias Extraordinaria 2020. Grupo B. 3. Consideremos el punto $A(1, 2, 1)$, y la recta

$$r: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + z = 14 \end{cases}$$

- a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r . 1.5 pts
- b. Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r . Y sea s la recta determinada por los puntos A y P . Calcule el ángulo que forman las rectas r y s . 1 pto

Solución: a. $\pi \equiv x - y + 3z - 2 = 0$ b. 82 grados, aproximadamente.

23. Canarias Ordinaria 2020. Grupo A. 3. Dadas las rectas siguientes

$$r: \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$$

- a. Estudie la posición relativa de r y s . 1,5 pts
- b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r , y que contiene el punto $A(11, -2, 5)$ 1 pto

Solución: a. Las rectas se cruzan. b. $-2x + y - z + 29 = 0$

24. Canarias Ordinaria 2020. Grupo B. 3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$$

- a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1 . 1.25 pts
- b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 pts

Solución: a. $\pi_2 \equiv 9x - 3y - 4z - 14 = 0$ b. El punto intersección de recta y plano es $(5, 5, 4)$

25. Canarias Julio 2019. A.3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto $(2, -1, 5)$ (2,5 pts)

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$

26. Canarias Julio 2019. B.3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \quad (2,5 \text{ pts})$$

Solución: $33,5^\circ$

27. Canarias Junio 2019. A.3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

- a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2, 2, 3)$ (1,5 pts)
- b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

Solución: a) $s \equiv x - 2 = y - 2 = \frac{z - 3}{3}$ b) $16,8^\circ$.

28. Canarias Junio 2019. B.3. Se consideran los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(-2, 3, 1)$ que determinan la recta r

- a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4, 17, 0)$ (1,25 pts)
 b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1,25 pts)

Solución: a)
$$\begin{cases} x = -4 - 6t \\ s = y = 17 - 6t \\ z = t \end{cases} \quad b) \pi : -x + y - 1 = 0$$

29. Canarias Julio 2018. A. 3. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\alpha : 2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

$$\beta : 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad (2,5 \text{ puntos})$$

$$\gamma : 7x + 8y - 7z + 13 = 0$$

Solución: Los tres planos se cortan en una recta.

30. Canarias Julio 2018. B. 3. Dadas las rectas

$$r_1 \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 2}{2} \text{ y } r_2 \equiv \frac{x + 5}{4} = \frac{y - 3}{-2} = \frac{z + 4}{3}, \text{ se pide}$$

- a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)
 b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\pi : x + 5y + 2z - 2 = 0$

31. Canarias Junio 2018. A. 3. a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos

$$A(-1, 5, 0) \text{ y } B(0, 1, 1) \text{ y es paralelo a la recta } r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pts})$$

- b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (1 pto)

Solución: a) $\pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0$ b) $r \equiv \frac{x + \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y - 3}{3} = \frac{z - \frac{1}{2}}{2}$

32. Canarias Junio 2018. B. 3. Dados los planos: $\pi_1 \equiv x + y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$

- a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 pts)
 b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 (0,75 pts)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com
$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad b) \pi_3 \equiv x - y = 0$$

33. Canarias Julio 2017. A. 4. Dado el plano $\pi : 2x + y - z = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ se pide

- a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,1)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π . (1,25 puntos)

Solución: a) $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{-3}$ b) $\pi \equiv x - y + z = 0$

34. Canarias Julio 2017. B. 4. Dados la recta $r: x = y + 1 = \frac{z - \frac{11}{m}}{-3}$ y el plano $\pi: 2x + y + z = 9$

se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)

b) Para $m = 2$, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

Solución: a) $m = 1$ b) El punto es $A(3, 2, 1)$

35. Canarias Junio 2017. A. 4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta

$r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r (1,25 puntos)

Solución: a) $a = 1$ b) $\alpha = 7^\circ$

36. Canarias Junio 2017. B. 4. Dados los planos: $\pi_1: x - y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x + y - z = 0$, determinar

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2, 2, 1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1, 1, -1)$ (1,5 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ b) $\pi_3: x + y + 3z + 1 = 0$

Cantabria



1. Cantabria Extraordinaria 2025. 3) Considera la recta $r: \begin{cases} x-2z-2=0 \\ y+z=3 \end{cases}$ y el punto $P = (-3, 2, 2)$.

a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P .

c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P .

Solución: a) $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}$. b) $\pi: 2x - y + z + 6 = 0$ c) $\frac{\sqrt{786}}{6} \approx 4.67$ unidades.

2. Cantabria Ordinaria 2025. APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

Tarea a. [1 punto]. Determina los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{14}$ unidades de P .

Tarea b. [0,75 puntos]. Obtén la ecuación del plano que contiene a r y P .

Tarea c. [0,75 puntos]. Calcula la distancia entre r y P .

Solución: a) $Q_1(2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $Q_2(2 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ b) $\pi: x - y + z - 1 = 0$.

b) $\sqrt{2}$ unidades.

3. Cantabria Extraordinaria 2024. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS] Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2 .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Solución: 1) $a = 3$. 2) $B y C \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$, $A y D \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 4\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

$A y B \Rightarrow f: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0; \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$, $C y D \Rightarrow g: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4; \varepsilon \in \mathbb{R} \\ z = \varepsilon \end{cases}$

4. Cantabria Extraordinaria 2024. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 3, 2)$, $B = (4, 1, 3)$, $C = (2, 3, 4)$ y $D = (0, 1, 2)$ los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A , B y C .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Solución: 1) $\pi: \begin{cases} x = 2\alpha + 4\beta \\ y = 3 - 2\beta \\ z = 2 + 2\alpha + \beta \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 2) El volumen del tetraedro ABCD es de 2 unidades cúbicas

5. Cantabria Ordinaria 2024. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r: \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y - az = 3$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

- 1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a .
- 3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Solución: 1) No existe ningún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano. 2) Para $a = -4$ la recta es paralela al plano. 3) Para cualquier valor de a distinto de -4 . Para $a = 2$ se cortan en el punto $P(-1, -1, -3)$.

6. Cantabria Ordinaria 2024. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (6, 2, -1)$, $B = (3, 0, 5)$ y $C = (-2, 1, 2)$ los vértices de un triángulo.

- 1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
- 2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Solución: 1) $A = 43.05^\circ$, $B = 83.06^\circ$ y $C = 53.89^\circ$. 2) El área del triángulo ABC tiene un valor de $\frac{13\sqrt{10}}{2} \approx 20.55$ unidades cuadradas.

7. Cantabria Extraordinaria 2023. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

- A) [1,5 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto $(2, -1, 0)$. Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3) , donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.
- B) [1 PUNTO] De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director $(-1, 4, 1)$.

Solución: A. $r: \begin{cases} x = 2 + v_1\beta \\ y = -1 + v_2\beta \\ z = v_3\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$ B. $r: \begin{cases} x = 2 - \beta \\ y = -1 + 4\beta \\ z = \beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$

8. Cantabria Extraordinaria 2023. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r: \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

- A) [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.
- B) [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- C) [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta r .

Solución: A. Las rectas r y s son paralelas. B. $z = 0$. C. Existen infinitos planos. Uno de ellos es $\pi: x + 3y - 15 = 0$

9. Cantabria Ordinaria 2023. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (4, 1, 2)$ y $C = (3, 4, 3)$.

Solución: Recta que pasa por A y B $\rightarrow r: \begin{cases} x=4+4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$. Recta que pasa por A y C $\rightarrow$

$s: \begin{cases} x=3\alpha \\ y=4\alpha \\ z=1+2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$. Recta que pasa por B y C $\rightarrow t: \begin{cases} x=4-\beta \\ y=1+3\beta \\ z=2+\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$

10. Cantabria Ordinaria 2023. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi_2: bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2 :

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b .

2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b .

3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b .

Solución: 1) $a = -4; b = -2$ 2) $a \neq -4; b = -2$ 3) $b \neq -2$ y " a " cualquier valor.

11. Cantabria Extraordinaria 2022. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z = 1$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta r .

B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución: A. $r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$ B. Tiene dos soluciones: $C(13, -5, 7)$ y $C'(-11, 7, -5)$

12. Cantabria Extraordinaria 2022. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$.

A. [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.

B. [1,5 PUNTOS] Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución: A. La recta y el plano se cortan en un punto. B. Punto de corte $P(-2, -1, 1)$. Ángulo = 90°

13. Cantabria Ordinaria 2022. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -4, 1)$, $C = (1, -4, 5)$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución: A. $m_A: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3 \end{cases}; m_B: \begin{cases} x=3-\alpha \\ y=-4+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}; m_C: \begin{cases} x=1 \\ y=-4+\beta \\ z=5-\beta \end{cases}$ B. $P(1, -2, 3)$

14. Cantabria Ordinaria 2022. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r = \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C , sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C .

B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC .

Solución: A. $C(6, 0, 3)$ B. 90° C. $32.5 u^2$.

15. Cantabria Extraordinaria 2021. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O .

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π , que contiene a los puntos A , B y C .

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O , está contenido en el plano Π .

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Solución: 1) $\Pi \equiv x - y + z = 0$ 2) Si. 3) Son iguales los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OC}$. Son iguales los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BC}$. 4) Área $ABCO = \sqrt{3} u^2$

16. Cantabria Extraordinaria 2021. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r' , que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r' .

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A , B y el origen de coordenadas.

Solución: 1) $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 5 - 4\alpha \end{cases}$ 2) Las rectas r y r' se cortan en el punto B . 3) Área $ABO = \frac{\sqrt{555}}{2} \approx 11.77 u^2$

17. Cantabria Ordinaria 2021. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B .

4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución: 1) $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -8t \end{cases}$ 2) El misil cruza el plano en el punto $P(2, 3, 4)$. 3) $d(A, B) = \sqrt{72} = 8.485 u$

4) Un vector perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$ es $\vec{u} = (-32, 24, -2)$

18. Cantabria Ordinaria 2021. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.
- 2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π .
- 3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π , y la recta que pasa por los puntos A y B.
- 4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

Solución: 1) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 2) $\vec{n} = (2, 3, -4)$ 3) La recta r y el plano Π son secantes, coinciden en un punto. 4) $\Pi' \equiv 2x + 3y - 4z = 4$

19. Cantabria Extraordinaria 2020. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

- 1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.
- 2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.
- 3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Solución: 1) $s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 5 - 4\lambda \end{cases}$ 2) $t \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = 1 \end{cases}$ 3) $\pi \equiv 3x - y - 5 = 0$

20. Cantabria Extraordinaria 2020. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (3, 5, 2)$, $D = (1, 1, 3)$.

- 1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B, C.
- 2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano π .
- 3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: 1) $\pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0$ 2) El punto D no pertenece al plano π . 3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 94^\circ$

21. Cantabria Ordinaria 2020. Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.
- 2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.
- 3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución: 1) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{cases}$ 2) Se cortan en un punto. 3) $\pi' \equiv x + 2y - 3z = 0$

22. Cantabria Ordinaria 2020. Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -4)$, $C(4, 3, 2)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B .
- 2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
- 3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

$$\text{Solución: } \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2) \pi \equiv 3x - 8y - z + 14 = 0 \\ 3) \text{Área} = \sqrt{74} = 8,6 u^2 \end{array}$$

23. Cantabria Julio 2019. Opción 1. Ejercicio 3. Sea el plano

$\Pi \equiv (2, 1, 0) + t(2, 1, 0) + s(0, 1, -1)$ y el punto $A = (2, 1, 3)$.

- 1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π .
- 2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A .

$$\text{Solución: } 1) d(A, \pi) = \frac{1}{\sqrt{6}} u \quad 2) \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

24. Cantabria Julio 2019. Opción 2. Ejercicio 3. Sean los puntos $P=(0, 1, 0)$, $Q=(-1, 1, 2)$,

$$R=(2, 0, -1) \text{ y el plano } \Pi \equiv \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -5t + s \\ z = -1 + 4s \end{cases}$$

- 1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P , Q y R y el plano Π .
- 2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q .

$$\text{Solución: } 1) 45,74^\circ \quad 2) d(P, Q) = 2,24 u$$

25. Cantabria Junio 2019. Opción 1. Ejercicio 3. Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0, 0, 0) + t(2, 1, 1)$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.
- 2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

$$\text{Solución: } 1) a = 1 \quad b) a = -5. \quad d(r, \Pi) = \frac{2}{\sqrt{30}} u$$

26. Cantabria Junio 2019. Opción 2. Ejercicio 3.

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

$$\text{Solución: } x + 3y + 2z - 6 = 0$$

27. Cantabria Septiembre 2018. Opción 1. Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A: (0, 1, 0) + t(1, -1, 2) + s(0, 0, 1) \quad t, s \in \mathbb{R} \\ B: x + 2y + 2z = 1$$

- 1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A .
- 2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B .

3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B.

Solución: 1) $A: x + y - 1 = 0$ 2) $P_r(1, 0, 0); \vec{v}_r = (2, -2, 1)$ 3) $\text{ángulo}(A, B) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$

28. Cantabria Septiembre 2018. Opción 2. Ejercicio 3 Sean el punto A = (4, 0, 1) y la recta

$$r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A.

Solución: 1) Plano: $y + z - 1 = 0$ 2) $\pi \equiv 3x + 2y - 2z - 10 = 0$

29. Cantabria Junio 2018. Opción 1. Ejercicio 3 Tomemos la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x - y = 2$.

1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.

2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .

3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π .

4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

Solución: 1) www.ebaumatematicas.com 2) $s: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$ 3) $\text{distancia}(r, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,31u$ 4) $\vec{v}_s = (3, 2, 2)$

30. Cantabria Junio 2018. Opción 2. Ejercicio 3 Sean r y s las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de r y s.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre r y s.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a s que pasa por (0, 1, 0).

Solución: 1) Las rectas se cruzan 2) $\text{Distancia}(r, s) = \frac{6}{\sqrt{166}} = 0,465u$ 3) $\pi: 3x + y - 2z - 1 = 0$

31. Cantabria Septiembre 2017. Opción 1. Ejercicio 3

Sean $P: x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P.

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q.

4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto (0, 0, 0).

Solución: 1) $\vec{n} = (1, 3, 2)$ 2) $P: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda - 2\alpha \\ y = \lambda \\ z = \alpha \end{cases}$ 3) Los planos son paralelos 4) $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$

32. Cantabria Septiembre 2017. Opción 2. Ejercicio 3

Sea Q el plano de ecuación $Q: (0, 0, 1) + s(2, -1, 0) + t(2, -1, 1)$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por (-1, 2, 4) que sea perpendicular al plano Q.

3) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1,2,4)$ al plano Q .

Solución: 1) $Q: x+2y=0$ 2) $r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases}$ 3) $d((-1,2,4), Q) = \frac{3\sqrt{5}}{5} u$

33. Cantabria Junio 2017. Opción 1. Ejercicio 3

Sea P el punto $(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r .

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r .

3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P .

Solución: 1) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ 2) $d(P, r) = \sqrt{17} = 4,12 u$ 3) $\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$

34. Cantabria Junio 2017. Opción 2. Ejercicio 3

Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A , B y C .

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC .

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3, 0, 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4, -1, 2)}$ son ortogonales.

Solución: 1) $\pi: x - 2y - 3z + 4 = 0$ 2) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 3) $\text{Área } ABC = \frac{\sqrt{14}}{2} = 1,871 u^2$

4) No son ortogonales.

Castilla la Mancha



1. Castilla la Mancha Extraordinaria 2025. EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Solución: a.1) $m = 6$. a.2) $\pi: 5x - 3y - z + 1 = 0$. a.3) No está correctamente ubicado.

2. Castilla la Mancha Extraordinaria 2025. EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.

b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

Solución: b.1) $\pi': 4x + 2y + z - 4 = 0$. b.2) $m = 17$ o $m = 1$.

3. Castilla la Mancha Ordinaria 2025. EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

Solución: a.1) $r_3: \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$. a.2) $\frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.91$ unidades.

4. Castilla la Mancha Ordinaria 2025. EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

Solución: b.1) $\pi': x + y = 0$. b.2) 80° .

5. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2024. 3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}.$$

a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Solución: a) $\pi: x + 3y + z - 6 = 0$. b) La distancia del foco al toldo tiene un valor aproximado de 2.7 unidades.

6. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2024. 5. b) [1,5 puntos] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1; \pi_2 \equiv x + y + z = 2; \pi_3 \equiv z = 0.$$

Solución: Los tres planos coinciden dos a dos en rectas paralelas

7. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2024. 7. b) [1,25 puntos] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0, 1, 0)$.

Solución: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$

8. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2024. 3. Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2, -1, 3)$ y $B(-2, 4, 5)$.

a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0, 0, 1)$. Determina el área de la placa triangular.

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$ b) La longitud de la viga es de $\sqrt{45} \approx 6.7$ unidades. c) El área de

la placa triangular tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

9. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2024. 5. b) [1,5 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ con $a \in \mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60° .

Solución: $a = \frac{8 + \sqrt{70}}{6} \approx 2.72$

10. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2024. 7. b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Solución: $r: \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

11. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina el valor de a, b para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π .

b) [1 punto] Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π .

Solución: a) Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 2$. b) $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

12. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 6. b) [1,5 puntos] Sean el punto $A(1, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π .

Solución: $d(A, \pi) = \sqrt{2}$ unidades

13. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2023. 8. b) [1,25 puntos] Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2, 3)$.

Solución: El valor aproximado del ángulo formado por los dos vectores es de 10° .

14. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 3. Sea el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A .

Solución: a) Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -2$. b) $r \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

15. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 6. b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

16. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2023. 8. b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi_2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi_3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π_3 . El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Solución: La recta r está contenida en el plano π_3 .

17. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A . ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A , es decir, el punto simétrico de A con respecto a π .

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$. El punto de corte es $P(3, 2, 3)$ b) $A' = (5, 4, 5)$

18. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 5. a) **[1 punto]** Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A = (0, 0, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B .

Solución: $\pi' \equiv -7x - y + 4z + 4 = 0$

19. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2022. 6. a) **[1,5 puntos]** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A = (a, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (0, 1, 0)$ y $D = (1, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

Solución: a) Los valores buscados son $a = \frac{-5}{2}$ y $a = \frac{7}{2}$.

20. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 4. Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a .

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r .

Solución: a) Si $a = \frac{-5}{2}$ las rectas se cortan y si $a \neq \frac{-5}{2}$ las rectas se cruzan. b) $\pi: 5x + 10y + 2z + 5 = 0$

21. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

Solución: $r: \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

22. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 6. b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m . Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución: Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ los planos coinciden en un punto. Si $m = 0$ los planos no coinciden. Si $m = 1$ los planos 1º y 2º son coincidentes y se cortan con el 3º en una recta.

23. Castilla la Mancha EvAU Ordinaria 2022. 7. a) [1,25 puntos] Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: $\pi: x - z + 1 = 0$

24. Castilla la Mancha EvAU Extraordinaria 2021. 4. Sean los planos

$$\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3 \text{ y } \pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$$

a) [1 punto] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) [1,5 puntos] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1 .

Solución: a) $a = \frac{1}{4}$ b) $d(P, \pi_1) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.408 u$

25. Castilla la Mancha Ordinaria 2021. 4. a) [1,25 puntos] Sea el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}. \text{ Calcula razonadamente la distancia del punto } P \text{ a la recta } r.$$

b) [1,25 puntos] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2a \cdot \lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula

razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución: a) $d(P, r) = \frac{\sqrt{24}}{3} \approx 1.63 u$ b) $a = 1$

26. Castilla la Mancha Ordinaria 2021. 5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- [1,25 puntos] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- [1,25 puntos] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Solución: Volumen $ABCD = \frac{1}{6} u^3$ $\pi \equiv x - y + z - 1 = 0$ $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

27. Castilla la Mancha Extraordinaria 2020. 6. Sea el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

a) [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Solución: a) $d(P, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0,816 u$ b) Área $= \frac{\sqrt{83}}{2} = 4,55 u^2$

28. Castilla la Mancha Extraordinaria 2020. 7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$,
 $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

- a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .
 b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi \equiv x - y - 5z + 11 = 0$

29. Castilla la Mancha Ordinaria 2020. 6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.
 b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución: a) 30° b) $\text{Volumen} = 1u^3$

30. Castilla la Mancha Ordinaria 2020. 7. Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases}$ y la recta

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π .
 b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s .

Solución: a) $a = b = 0$ b) $\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ r \equiv y = -1 - 2\lambda \\ z = -8 - 5\lambda \end{array} \right\}$

31. Castilla la Mancha Julio 2019. 4A.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π . (1,25 puntos)
 b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r . (1,25 puntos)

Solución: a) Recta y plano son secantes, coincidiendo en un punto. b) $\pi' \equiv 3x - y + 2z - 3 = 0$

32. Castilla la Mancha Julio 2019. 4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a , b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. (1 punto)

Solución: a) $a = -2$; $b = 1$ y $c = -1$ b) $r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ o bien $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$. Q si pertenece, pero R no pertenece a la recta.

33. Castilla la Mancha Junio 2019. 4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 2)$, $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:

- a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. (1,25 puntos)
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. (1,25 puntos)

Solución: a) $x - y - z - 1 = 0$ b) Volumen del tetraedro ABCD = $\frac{2}{3} u^3$

34. Castilla la Mancha Junio 2019. 4B.

Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$.

- a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. (1,25 puntos)

Solución: a) Distancia $(P, r) = \sqrt{\frac{3}{2}} u$ b) $s \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

35. Castilla la Mancha Julio 2018. A.4. Dados los puntos $A(-1; 3; 0)$; $B(2; 0; -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha: x - 2y - 6 = 0$ y $\beta: 2y + z = 0$

- a) Calcula la distancia del punto A a la recta r. (0,75 puntos)
b) Encuentra razonadamente el punto de la recta r cuya distancia al punto A sea mínima. (0,75 puntos)
c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por A y B sea paralelo a la recta r. (1 punto)

Solución: a) $d(A, r) = 6,67 u$ b) $P\left(\frac{32}{9}, \frac{-11}{9}, \frac{22}{9}\right)$ c) $7x + 4y + 9z = 5$

36. Castilla la Mancha Julio 2018. B.4. Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$; $B(1, 0, -4)$ y la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A. (1 punto)

Solución: a) $C(3, -2, 1)$ b) $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

37. Castilla la Mancha Junio 2018. 4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$

a) Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)**

Solución: a) $d(A, \alpha) = 1.5u$ b) El lugar geométrico son dos planos paralelos a α situados a 1.5 unidades del plano α . Uno por encima y otro por debajo del plano α .

$$\pi: 2x + y + 2z - 3 = 0; \quad \beta: 2x + y + 2z - 12 = 0$$

38. Castilla la Mancha Junio 2018. 4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (2, 0, 3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda \vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

Solución: a) $\lambda = -3$ b) Son linealmente independientes c) $r \equiv \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$

39. Castilla la Mancha Septiembre 2017. 4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

Solución: a) Volumen $= \frac{2}{3} = 0.66 u^3$ b) $r \equiv \begin{cases} x - 4y - 4 = 0 \\ -2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

40. Castilla la Mancha Septiembre 2017. 4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

Solución: a) $a = 4$ b) Distancia $(P, r) = \sqrt{14} u$

41. Castilla la Mancha Junio 2017. 4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1,5 puntos)**

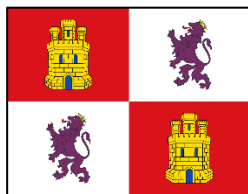
Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. b) $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$

- 42. Castilla la Mancha Junio 2017. 4B.** a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**
b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ b) $s\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$

Castilla y León



1. Castilla y León Extraordinaria 2025. Problema 3A.

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m . (1,5 puntos)
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

Solución: a) Para $m = -3$ la recta está contenida en el plano. Para $m \neq -3$ la recta corta el plano en un único punto. . b) $\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0$

2. Castilla y León Extraordinaria 2025. Problema 3B.

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta. (1,5 puntos)
 b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(0, 1, 0)$. (1 punto)

Solución: a) Existen dos planos que cumplen lo pedido: $\pi_1' \equiv x + y - z + 7 = 0$ y $\pi_2' \equiv x + y - z - 5 = 0$. b) $\pi'': y + z - 1 = 0$

3. Castilla y León Ordinaria 2025. Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

- a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m . (1,5 puntos)
 b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s . (1 punto)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $A(0, 1, 0)$

4. Castilla y León Ordinaria 2025. Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

- a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. (0,75 puntos)
 b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. (0,75 puntos)
 c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (1 punto)

Solución: a) $a = 3$. b) $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = (30, -10, -20)$ o bien $\vec{w}_2 = \frac{1}{10} \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1, -2)$. c) $140 u^3$.

5. Castilla y León Extraordinaria 2024. E3.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1, 1, 1)$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . (1 punto)
 b) Hallar la recta perpendicular a r y contenida en π que pasa por P . (1 punto)

Solución: a) La recta está contenida en el plano. b)

6. Castilla y León Extraordinaria 2024. E4.- (Geometría)

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1, 1, 2)$ y $Q = (3, -1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Solución: $\pi: -x - 3y + 4z - 4 = 0$

7. Castilla y León Ordinaria 2024. E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P = (1, 0, -1)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

Solución: $P' \left(\frac{5}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{9} \right)$

8. Castilla y León Ordinaria 2024. E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

son paralelas.

(1 punto)

b) Para $k = 2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2 ? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

Solución: a) Para que las rectas sean paralelas debe ser $k = 2$ b) $\pi \equiv 5x + 4y + 4z - 13 = 0$

9. Castilla y León Extraordinaria 2023. E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1 . **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1, 0, 0)$. **(1 punto)**

Solución: a) Los vectores directores de las rectas no son perpendiculares y no existe el plano

pedido. b) $t: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -4\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

10. Castilla y León Extraordinaria 2023. E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, 1)$.

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0, 0, 1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0, 0, 1)$. **(1 punto)**

Solución: a) $\pi: 2x + z - 1 = 0$ b) $d(P, r) = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.913$ unidades

11. Castilla y León Ordinaria 2023. E3.- (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$. **(2 puntos)**

Solución: $\pi \equiv -x - y + z = 0$

12. Castilla y León Ordinaria 2023. E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π . (1 punto)

b) Hallar el plano σ , distinto de π y paralelo a π , cuya distancia a r coincide con la de π . (1 punto)

Solución: a) b) $\sigma \equiv x + 2y - 2z - 12 = 0$

13. Castilla y León Extraordinaria 2022. E3.- (Geometría)

a) Calcule el plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$. (1.5 puntos)

b) Calcule el plano paralelo a $3x + 2y + 2z + 1 = 0$ que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. (0.5 puntos)

Solución: a) $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ b) $\pi' \equiv 3x + 2y + 2z - 13 = 0$

14. Castilla y León Extraordinaria 2022. E4.- (Geometría)

a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto $P = (1, 1, 3)$. (1 punto)

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos $A = (0, 3, 1)$ y $B = (-2, 1, -1)$. (1 punto)

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ b) $\pi \equiv x - y + 3 = 0$

15. Castilla y León Ordinaria 2022. E3.- (Geometría)

a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares. (1 punto)

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto $(1, 2, 3)$. (1 punto)

Solución: a) $m = 4$. b) $\pi_2 : x - z + 2 = 0$

16. Castilla y León Ordinaria 2022. E4.- (Geometría)

Considere el punto $P = (2, 2, 1)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 3z + 6 = 0$.

a) Halle la recta que pasa por P y es perpendicular a π . (1 punto)

b) Calcule la distancia del punto $Q = (2, 2, -2)$ al plano π . (1 punto)

Solución: a) $r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ b) $d(Q, \pi) = \sqrt{22} \approx 4.69u$

17. Castilla y León Extraordinaria 2021. E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s . (1 punto)

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s . (1 punto)

Solución: a) Son paralelas b) $\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0$

18. Castilla y León Extraordinaria 2021. E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r . **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1,1,-1)$ y contiene a la recta r . **(1,5 puntos)**

Solución: a) $\pi_1 \equiv x-y+2z-5=0$ b) $\pi_2 \equiv -4x+2y+3z-3=0$

19. Castilla y León Ordinaria 2021. E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$.

(0,8 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $\pi \equiv y-z-2=0$

20. Castilla y León Ordinaria 2021. E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P , **(2 puntos)**

Solución: $\pi \equiv -4x-2y+z=0$

21. Castilla y León Extraordinaria 2020. E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2,1,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P **(0,8 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . **(1,2 puntos)**

Solución: a) $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$ b) $\pi \equiv -3x+3y-2z+5=0$

22. Castilla y León Extraordinaria 2020. E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta

$r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del $(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$. **(1 punto)**

Solución: a) $s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$ b) $P'(-5,-2,1)$

23. Castilla y León Ordinaria 2020. E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ y el punto $A = (1,3,-1)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π . **(2 puntos)**

Solución: $\pi' \equiv 2x-2y-3z+1=0$

24. Castilla y León Ordinaria 2020. E4.- (Geometría)

Dado el punto $A = (1,2,4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$,

- a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv x + 2z = 0$ (1,5 puntos)
- b) Hallar un vector (a, b, c) perpendicular a $(1, 0, -1)$ y $(2, 1, 0)$. (0,5 puntos)

Solución: a) $B(3, 2, 3)$ b) $\vec{v} = (1, -2, 1)$

25. Castilla y León Julio 2019. Opción A. E2.-

- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1, 1, a)$ y $\vec{v} = (1, -1, a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. (0,5 puntos)
- b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1, 2, 3)$ y $\vec{q} = (1, -2, -3)$ (1,5 puntos)

Solución: a) $a = 0$ b) $\vec{r} = \left(0, \frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

26. Castilla y León Julio 2019. Opción B. E2.-

Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. (2 puntos)

Solución: $a = 2$ y $b = -2$

27. Castilla y León Junio 2019. Opción A. E2.-

- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, 2, 1)$. (1 punto)
- b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B = (2, 1, 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. (1 punto)

Solución: a) $\pi \equiv 2x - 2z = 0$ b) $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-2}{8}$

28. Castilla y León Junio 2019. Opción B. E2.-

Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$. Encontrar m y k para que:

- a) La recta r sea perpendicular al plano π . (1 punto)
- b) La recta r esté contenida en el plano π . (1 punto)

Solución: a) $m = k = 2$ b) $m = 6$; $k = -2$

29. Castilla y León Julio 2018. Opción A. E2.-

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

- a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r . (1 punto)
- b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r . (1 punto)

Solución: a) $P(3, -1, -2)$ b) $s \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{1}$

30. Castilla y León Julio 2018. Opción B. E2.-

Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

- a) Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. (1 punto)
 b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. (1 punto)

Solución: a) $a = 2$ y $b = -1$ b) $a = -1$ y b puede ser cualquier valor.

31. Castilla y León Junio 2018. Opción A. E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$. (2 puntos)

Solución: $s \equiv x = y = z$

32. Castilla y León Junio 2018. Opción B. E2.- Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$ y el plano

$\pi \equiv x - y + z = 0$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . (0,8 puntos)
 b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . (1,2 puntos)

Solución: a) r y π son paralelos b) $\pi' \equiv x - y + z - 6 = 0$

33. Castilla y León Septiembre 2017. Opción A. E2.-

- a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R. (1,25 puntos)
 b) Calcular a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$. (1 punto)

Solución: a) $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$ b) $a = -4$.

34. Castilla y León Septiembre 2017. Opción B. E2.-

- a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 3, 4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$. (1,25 puntos)
 b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}$, $s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$ sean perpendiculares. (1 punto)

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ b) $a = -8$.

35. Castilla y León Junio 2017. Opción A. E2.-

Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$. (2,25 puntos)

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$

36. Castilla y León Junio 2017. Opción B. E2.-

Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0, 1, 1)$, $Q(2, -1, -3)$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. (2,25 puntos)

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

Cataluña



1. Cataluña PAU Extraordinaria 2025. Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere el plano $\pi: 2x - y + z = 5$ y el punto $P = (0, 1, 3)$.

a) Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

[0.5 puntos]

b) Encuentre la ecuación general de un plano π_1 paralelo a π y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre π_1 y π ?

[0.75 puntos]

c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2 , diferente de π_1 , que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π .

[1,25 puntos]

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\pi_1: 2x - y + z - 2 = 0$. La distancia vale $\frac{\sqrt{6}}{2}$ unidades

c) $\pi_2: 2x - y + z - 8 = 0$

2. Cataluña PAU Ordinaria 2025. Ejercicio 4 OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x + y = 0$.

a) Calcule la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y contiene los puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$. [1 punto]

b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π' y que contiene los puntos de π' que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

Solución: a) $\pi': x - y - z = 0$. b) $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$

3. Cataluña PAU Extraordinaria 2024. 6. Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P . Calcule el punto de intersección de π con r . [1 punto]

b) Calcule la distancia d del punto P al plano π . [0,5 puntos]

c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P. [1 punto]

Solución: a) El punto de corte de plano y recta es $P\left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$. b) La distancia del punto P al plano π

tiene un valor $d = \frac{14}{3}$ unidades. c) $\pi': x + 2y - 2z - 21 = 0$

4. Cataluña PAU Ordinaria 2024. 6. Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

- a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]
- b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]
- c) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

Solución: a) $\pi : x + y + 1 = 0$ b) $d(A, \pi) = d(B, \pi) = 2\sqrt{2}$. c) Los lados AC y BC son iguales, el lado AB es desigual. El triángulo ABC tiene un área de 24 unidades cuadradas

5. Cataluña PAU Extraordinaria 2023. 5. Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1 : x - 1 = y = -z$ y por $r_2 : x = y = z$, respectivamente.

- a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas r_1 y r_2 . [1,75 puntos]
- b) Calcule la distancia entre r_1 y r_2 . [0,75 puntos]

Solución: a) $s : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ unidades

6. Cataluña PAU Ordinaria 2023. 6. Sean los planos π_1 y π_2 , determinados por las ecuaciones $\pi_1 : x + y = 3$ y $\pi_2 : x - z = -2$.

- a) Encuentre la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$. [0,75 puntos]
- b) Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calcule la ecuación vectorial de la recta r . [0,75 puntos]
- c) Calcule el punto Q de la recta r que está más cerca del punto P . [1 punto]

Solución: a) $\pi_3 : -x + y - z + 5 = 0$ b) $r : (x, y, z) = (-2, 5, 0) + \lambda(1, -1, 1) \lambda \in \mathbb{R}$. c) $Q(2, 1, 4)$

7. Cataluña PAU Extraordinaria 2022. 1.

El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi : x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

- a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]
- b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil. [1,5 puntos]

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $Q(18, 1, 12)$. La longitud del mástil es $12\sqrt{2} \approx 16.97$ unidades

8. Cataluña PAU Ordinaria 2022. 3. Sea la recta r definida por la expresión siguiente:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- a) Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π , y si es secante, calcule el punto de corte. [1,25 puntos]
 b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta la recta r en un punto P , la primera coordenada del cual es 5 veces más grande que la segunda. [1,25 puntos]

Solución: a) Recta y plano son secantes y coinciden en el punto $P(14, 35, 15)$.

$$b) P(2.5, 0.5, 3.5). s \equiv \begin{cases} x = 2.5 + \lambda \\ y = 0.5 - 2\lambda \\ z = 3.5 + 4\lambda \end{cases}$$

9. Cataluña Extraordinaria 2021. 3. En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ y $D = (1, 1, t)$, donde t es un valor real.

- a) ¿Para qué valor de t los cuatro puntos son coplanarios? [1 punto]
 b) Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5u^3$. [1,5 puntos]

Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores v_1 , v_2 y v_3 es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores,, $V = \frac{1}{6} |\det(v_1, v_2, v_3)|$

Solución: a) $t = -1$ b) $t = 29$ o $t = -31$

10. Cataluña Ordinaria 2021. 3. Considere el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano $\pi: x = y$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

- a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π . [1,25 puntos]
 b) De todos los planos que contienen la recta r , encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π . [1,25 puntos]

Solución: a) $P'(3, -1, 1)$ b) $\pi': x + y - 5z + 9 = 0$

11. Cataluña Extraordinaria 2020. Serie 4. 2. Un avión es desliza desde un punto $A = (0, 3, 1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi: x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $v = (1, -1, 0)$.

- a) Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida. [1,25 puntos]
 b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A . [1,25 puntos]

Solución: a) Distancia $(A, B) = \sqrt{8} = 2,83u$ b) $\pi': x + y + z - 4 = 0$

12. Cataluña Extraordinaria 2020. Serie 4. 6. Sean las rectas r y s , expresadas por $\frac{x-3}{2} = y = z-1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

- a) Determine la posición relativa de las rectas. [1,25 puntos]
 b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s . [1,25 puntos]

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) La distancia entre las rectas es de $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ unidades.

13. Cataluña Ordinaria 2020. Serie 1. 3. a) Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto $(8, 8, 8)$ y tiene como vectores directores $u = (1, 2, -3)$ i $v = (-1, 0, 3)$. [1,25 puntos]

- b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al plano π . [1,25 puntos]

Solución: a) $\pi \equiv 3x + z - 32 = 0$ b) $a = 29$.
$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$$

14. Cataluña Septiembre 2019. Serie 5. 2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es

un parámetro real.

- a) Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible. [1 punto]
b) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a . [1 punto]

Solución: a) Para a distinto de 0 y de -1 . b) Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ los planos se cortan en un punto. Si $a = -1$ los planos se cortan en una recta. Si $a = 0$ los planos se cortan dos a dos.

15. Cataluña Septiembre 2019. Serie 5. 5. Dados P , Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX , OY y OZ , respectivamente.

- a) Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R . [1 punto]
b) Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R . [1 punto]

Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ puede utilizar la expresión $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, donde $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Solución: a) $P(4,0,0)$; $Q(0,1,0)$; $R(0,0,2)$. El perímetro es $10,83 u$ b) $\sqrt{21} u^2$

16. Cataluña Junio 2019. Serie 1. 3. Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?
b) Encuentra las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$; Distancia $(P, \pi) = 5 u$ b) $P'(-1, -3, -3)$

17. Cataluña Septiembre 2018. Serie 3. 3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (-1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

- a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A . [1 punto]
b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano. [1 punto]

Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Solución: a) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{-7}$ b) $d(P, \text{plano}) = \frac{41\sqrt{69}}{69} = 4.94 u$

18. Cataluña Septiembre 2018. Serie 3. 5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A , B y C . [1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P , A , B y C tiene un volumen de 2 u^3 . [1 punto]

Nota: El volumen de un tetraedro de vértices P , Q , R y S puede calcularse con la expresión

$$\frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})|$$

Solución: a) $(0, 1, 0)$ b) Hay dos soluciones: $P_1 = (3, 4, 6)$ y $P_2 = (-3, -2, -6)$

19. Cataluña Junio 2018. Serie 1. 2. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r . [1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - z = 1$. [1 punto]

Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Solución: a) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ b) Hay dos soluciones: $P_1 = \left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)$ y $P_2 = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)$

20. Cataluña Junio 2018. Serie 1. 4. Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r . [1 punto]

b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P , Q y R , encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes. [1 punto]

Solución: a) $5x + y - 6z = 7$ b) $m = -3$

21. Cataluña Septiembre 2017. Serie 2. 1. Considere el plano $\pi : x + y + z = 1$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (0, 0, 6)$ y $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π . [1 punto]

b) Calcule la distancia entre la recta r y el plano π . [1 punto]

Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Solución: a) Son paralelos b) $d(r, \pi) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.887 \text{ u}$

22. Cataluña Septiembre 2017. Serie 2. 5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r : \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 1, -1)$.

- a)** Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P . [1 punto]
b) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$. [1 punto]

Solución: a) $\pi : 2x - y + 2z = -3$ b) $P'(-2, -1, -3)$

23. Cataluña Junio 2017. Serie 1. 2. Considere los planos $\pi_1 : 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 : 2x + 3y + z = 5$.

- a)** Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 . [1 punto]
b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 . [1 punto]

Solución: a) $20x - 19y + 17z = 0$ b) $\alpha = 90^\circ$

24. Cataluña Junio 2017. Serie 5. 1. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x + 1 = \frac{y - 2}{2} \\ z = 1 \end{cases}$.

- a)** Compruebe que son paralelas. [1 punto]
b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene. [1 punto]

Solución: a) Son paralelas, pues sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

b) $\pi : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(1, 2, 1) + \mu\left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right)$

Extremadura



1. Extremadura Extraordinaria 2025. EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 4)$, $C = (3, 4, 3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

Solución: a) No están alineados. b) $\vec{w} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ c) $A' = (3, 4, 5)$

2. Extremadura Extraordinaria 2025. EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1, -1, 0)$

a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P.

b) Calcular la distancia del punto P a la recta s.

c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano π .

Solución: a) $\pi': -4x + 3y + 7 = 0$. b) $\sqrt{2} \approx 1.41u$ c) 33° .

3. Extremadura Ordinaria 2025. EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

a) Comprobar que el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.

c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto (0,1,-1).

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ unidades c) $\pi': 3x - y + 2z + 3 = 0$

4. Extremadura Ordinaria 2025. EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.

b) Obtener la ecuación general del plano ACD.

c) Para $m = 2$, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

Solución: a) $m = 0$ b) $\pi: x - y - 1 = 0$ c) $\vec{v} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \sqrt{5}$ unidades cuadradas.

5. Extremadura Extraordinaria 2024. 3. a) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ y $\vec{w} = (a, b, 1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1, 2, 1)$. (1 punto)

Solución: a) Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$. b) El volumen vale 8 unidades cúbicas

6. Extremadura Extraordinaria 2024. 4. Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases}$ y

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{a} = \frac{z}{3}$$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x + 4y - 4 = 0$. (1 punto)

Solución: a) $a = -1$ b) El ángulo que forman la recta y el plano es de 24.98° .

7. Extremadura Ordinaria 2024. 3.

Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y es paralelo a la recta

de ecuación $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$. (2 puntos)

Solución: $\pi: 5x + 4y - 2z + 5 = 0$.

8. Extremadura Ordinaria 2024. 4.

Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, 3, 1)$ y $C(1, 0, -1)$. Determinar:

a) Un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)

b) El ángulo determinado por dichos vectores. (0.5 puntos)

c) El área del triángulo que forman A , B y C . (0.5 puntos)

Solución: a) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) 120° c) El área del triángulo tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas

9. Extremadura Extraordinaria 2023. 3. Sean los vectores

$$\vec{u} = (0, 0, 2), \vec{v} = (1, 1, 0), \vec{w} = (2, -1, 1)$$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Solución: a) Son linealmente independientes. b) Área = $\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

$$c) \vec{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}\right) \text{ y } \vec{t} = \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

10. Extremadura Extraordinaria 2023. 4. Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la

$$\text{recta } r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}.$$

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r . (0.75 puntos)

Solución: a) $\pi: 3x - y + z - 3 = 0$ b) $D(A, r) = \sqrt{3}$ unidades

11. Extremadura Ordinaria 2023. 4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. (2 puntos)

Solución: $\vec{w} = \left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}\right)$ y $\vec{w}' = \left(\frac{-10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-10}{3}\right)$

12. Extremadura Extraordinaria 2022. 3. Dados los puntos $A = (0, 0, 2)$ y $B = (1, 1, 0)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. (2 puntos)

Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A .

Solución: $P(1, 5, 5)$

13. Extremadura Extraordinaria 2022. 4. Sean las rectas: $r: \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y

$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

- a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $d(r, s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7u$

14. Extremadura Ordinaria 2022. 3. Dados el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y r la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$,

- a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r . (1 punto)
b) Calcular la distancia del origen a la recta r . (1 punto)

Solución: a) $P\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ b) $d(O, r) = \sqrt{\frac{1}{3}}u$

15. Extremadura Ordinaria 2022. 4. Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1},$$

- a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r . (1 punto)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r . (1 punto)

Solución: a) $\pi: -7x + 3y + 5z = 0$ b) $\pi': 2x + 3y + z = 0$

16. Extremadura Extraordinaria 2021. 3. Sean las rectas r y s dadas por $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

- a) Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s . (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

Solución: a) $\pi: 3x + y + z - 6 = 0$ b) $d(r, s) = \frac{2}{\sqrt{11}} \approx 0.60u$

17. Extremadura Extraordinaria 2021. 4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$. (2 puntos)

Solución: $\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ o $\vec{w} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

18. Extremadura Ordinaria 2021. 3. Dados el plano $\Pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}.$$

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano Π contenga a r . (1 punto)

b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman Π y r . (1 punto)

Solución: a) $k = -1$ b) 36°

19. Extremadura Ordinaria 2021. 4. Sea el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

Solución: Los planos que cumplen son $\Pi' \equiv x + y + z + 2 = 0$ y $\Pi'' \equiv x + y + z - 2 = 0$

20. Extremadura Extraordinaria 2020. 3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$)

(a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)

(b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

Solución: a) Para cualquier valor de α distinto de 0 y 1 b) Se cumple que $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$.

21. Extremadura Extraordinaria 2020. 4. Dados el plano π_1 determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

Solución: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$

22. Extremadura Ordinaria 2020. 3. Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y

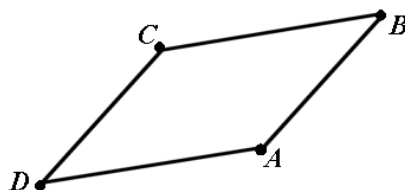
la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$

(a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

(b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

Solución: (a) Son paralelos (b) $d(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408u$

23. Extremadura Ordinaria 2020. 4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 3, -2)$, $B(4, 3, 1)$ y $C(1, 0, 1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

Solución: a) $D(-2,0,-2)$ b) Área de ABCD = $\sqrt{243} = 15,59 u^2$

- 24. Extremadura Julio 2019. Opción A. 2.** Sean las rectas $r: \begin{cases} x=1+y \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$
- (a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**
 (b) Halle dos vectores directores de r y s . Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan. b) $\vec{v}_r = (1,1,0)$ y $\vec{v}_s = (1,0,1)$. Área = $\frac{\sqrt{3}}{2} u^2$

- 25. Extremadura Julio 2019. Opción B. 2.** Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$ y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.
- (a) Calcule el plano π que contiene a s y es paralelo a r . **(1 punto)**
 (b) Calcule la distancia entre r y s . **(1 punto)**

Solución: a) $\pi: x + 2z + 1 = 0$ b) $d(r,s) = \sqrt{5} u$

- 26. Extremadura Junio 2019. Opción A. 2.** Sean los puntos $A = (0,0,2)$, $B = (2,0,1)$, $C = (0,2,1)$ y $D = (-2,2,-1)$.
- a) Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C . **(2 puntos)**
 b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**
 c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B , C y D . **(0,75 puntos)**

Solución: a) $\pi: x + y + 2z - 4 = 0$ b) A , B , C y D no son coplanarios. c) Área = $2\sqrt{3} u^2$

- 27. Extremadura Junio 2019. Opción B. 2.** Dados los puntos $A = (1,0,2)$ y $B = (3,-2,-2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

Solución: $\pi: x - y - 2z - 3 = 0$

- 28. Extremadura Julio 2018. Opción A. 2.-** Sean los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (2, 0, 3)$ y la recta r dada por el punto $C = (1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 0)$. Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo ABP es 2. **(2,5 puntos)**

Solución: Existen dos puntos de la recta r que cumplen lo pedido: $P'(0, 0, 2)$ y $P(4, 0, 2)$

- 29. Extremadura Julio 2018. Opción B. 2.-** Sean las rectas $r = \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{4}$ y $s = \begin{cases} x-y-z=2 \\ 2x+2y-z=4 \end{cases}$.
- (a) Estudie la posición relativa de dichas rectas. **(1 punto)**
 (b) Halle la distancia entre ambas rectas. **(1'5 puntos)**

Solución: (a) Son paralelas (b) $d(r,s) = \frac{\sqrt{4836}}{13} = 5,34 u$

- 30. Extremadura Junio 2018. Opción A. 2.** Sean el plano $\Pi: y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.
- (a) Calcule la intersección del plano y la recta. **(1 punto)**

(b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1,0,0)$, es paralela al plano Π y es perpendicular a la recta r . **(1,5 puntos)**

Solución: (a) $A(1, -3, 3)$. (b) $s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

31. Extremadura Junio 2018. Opción B. 2. Sea el punto $A = (1,0,1)$ y la recta r dada por el punto $B = (-1,0,2)$ y el vector $\vec{v} = (-1,1,0)$. (a) Calcule la distancia del punto A a la recta r .

(1,5 puntos)

(b) Calcule el área del triángulo de vértices A , B y O siendo $O = (0,0,0)$. **(1 punto)**

Solución: (a) $d(A, r) = \sqrt{3} u$ (b) $\text{Área} = \frac{3}{2} u^2$

32. Extremadura Julio 2017. Opción A. 2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$,

$$s: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

(a) Obtenga un vector director de la recta s . **(0,5 puntos)**

(b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a r y es paralelo a s . **(1 punto)**

(c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a r y es perpendicular a s . **(1 punto)**

Solución: (a) $\vec{v}_s = (-1,1,0)$ (b) $\Pi_1 \equiv x + y = 0$ (c) $\Pi_2 \equiv -x + y = 0$

33. Extremadura Julio 2017. Opción B. 2.- Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $C(0, 1, -1)$ y $D(0, 3, -1)$, y sea r la recta que pasa por A y B .

(a) Calcule ecuaciones paramétricas de r . **(1 punto)**

(b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P . **(1,5 puntos)**

Solución: (a) $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ (b) $A(1, 2, 1)$

34. Extremadura Junio 2017. Opción A. 2.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (0,1,0)$,

$\vec{u} = (3, -2, 2)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$.

(a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$. **(0,75 puntos)**

(b) Calcule el ángulo φ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

(c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente. **(1 punto)**

Solución: (a) $\vec{e} \times \vec{u} = (2, 0, -3)$ (b) El ángulo es de 90° (c) $[\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}] = -3 \neq 0$

35. Extremadura Junio 2017. Opción B. 2.- En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{cases}, \quad s: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} \text{ y.}$$

(a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas. **(1 punto)**

(b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s . **(1'5 puntos)**

Solución: (a) $a = 3$ (b) $d(r, s) = \sqrt{5} = 2,23 u$

Galicia



1. Galicia Extraordinaria 2025. 4.1. Considérense los planos $\pi : 2x + 3y + z + 1 = 0$ y $\pi' : x + z - 1 = 0$ y los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(-1, -2, 3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B .

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .

Solución: a) $\frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3.207u$. b) $r : \begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

2. Galicia Extraordinaria 2025. 4.2. Dadas las rectas $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y

$s : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}.$

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s .

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

Solución: a) Las rectas son paralelas. b) $\pi : x + y - z - 2 = 0.$

3. Galicia Ordinaria 2025. 4.1. Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1 : kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 3x + 4y + z + 3 = 0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

Solución: Para que sean paralelos debe ser $k = \frac{3}{4}$ y para que sean perpendiculares debe ser

$$k = \frac{-17}{12}.$$

4. Galicia Ordinaria 2025. 4.2. Considérense el punto $P(0, 1, 0)$ y la recta

$$r : (x, y, z) = (2, 0, 3) + \lambda(1, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P .

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r .

Solución: a) $s : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}.$ b) $\pi : x + 2y + 3z - 2 = 0.$

5. Galicia ABAU Extraordinaria 2024. 5. Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi : x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 1, 1)$.

Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π .

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución: a) La recta r está contenida en el plano π . b) $\pi' : -2x + 5y + 4z - 9 = 0.$

6. Galicia ABAU Extraordinaria 2024. 6. Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r . Se piden las ecuaciones paramétricas de r , la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π .

Solución: $\pi: 2x - y - 10 = 0$. El punto de corte de r con π tiene coordenadas $D(5,0,-5)$

7. Galicia ABAU Ordinaria 2024. 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considere el plano $\pi: 4x + 2y + bz = 2$ y la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$ donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π .

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano $\pi': 4x + 2y - 4z = 2$.

Solución: a) Los valores buscados son $b = -4$ y $c = 3$. b) $d(P, \pi') = \frac{2}{3} \approx 0.66 u$.

8. Galicia ABAU Ordinaria 2024. 6. Geometría. (2 puntos)

a) Considere los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q , R y S .

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$.

Solución: a) $\pi': 4x + 23y + 6z - 35 = 0$ b) $r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$ y $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$.

9. Galicia ABAU Extraordinaria 2023. 5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π .

Solución: a) Para $a = -3$ la recta r y el plano π son paralelos. Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan. Para $a = \frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares. La recta r no puede estar contenida en el plano. b) El valor buscado es $b = 5$.

10. Galicia ABAU Extraordinaria 2023. 6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$$r_2: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases}, (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π .

Solución: a) $d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408$ unidades. b) El punto simétrico es $P'(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$

11. Galicia ABAU Ordinaria 2023. 5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2, -1, 0)$ y $Q(3, 0, 0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0, 4, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1, 0, -1)$ y $\vec{v}(2, 1, -2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x+z+2=0$.

Solución: a) $r: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \cdot \pi: x+z+2=0$ b) El ángulo formado entre recta y plano es 30° .

12. Galicia ABAU Ordinaria 2023. 6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2, -1, 0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: a) El punto simétrico es $P'(-2, -1, -4)$ b) Las rectas son secantes y se cortan en $A(0, -3, 0)$

13. Galicia ABAU Extraordinaria 2022. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1} \text{ y pasa por el punto } P(0, 1, 0).$$

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano $\pi: 3x-8y+7z+8=0$.

Solución: a) $\pi: 3x-8y+7z+8=0$ b) $P'(-1, 18, -15)$

14. Galicia ABAU Extraordinaria 2022. 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax+4y+3az+2=0$ en función de los parámetros k y a . Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π .

Solución: Si $5a+2k \neq 0$ recta y plano son secantes. Si $5a+2k=0$ y $a \neq 6$ recta y plano son paralelos.

Si $5a+2k=0$ y $a=6$ ($k=-15$ y $a=6$) la recta está contenida en el plano.

Para que la recta r sea perpendicular a π la condición es que $a \cdot k = 4$

15. Galicia ABAU Ordinaria 2022. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1, -1, 0)$ y es

perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$, cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

Solución: a) $\pi: x-1=0$ b) $P(3, 3, 3)$ o $P(-1, -1, -1)$

16. Galicia ABAU Ordinaria 2022. 6. Geometría:

- a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m)$, $B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.
- b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: a) Los valores buscados son $k = 2$ y $m = -1$. b) Las rectas se cortan en el punto $C(1, -1, 2)$.

17. Galicia Extraordinaria 2021. 5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

Solución: a) $\pi: x - 2y + z + 2 = 0$ b) $m = -4$. $\pi: x + y - 3z + 4 = 0$.

18. Galicia Extraordinaria 2021. 6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

Solución: $P'(-3, 3, 0)$

19. Galicia Ordinaria 2021. 5. Geometría:

- a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.
- b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, -2, 2)$

Solución: a) $\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ b) $\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

20. Galicia Ordinaria 2021. 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte

Solución: Las rectas se cortan. El punto de corte de las rectas es $P(1, 1, 1)$.

21. Galicia Extraordinaria 2020. 5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π . En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución: Recta y plano se cortan en un punto de coordenadas $A(3, 0, 6)$.

22. Galicia Extraordinaria 2020. 6. Geometría:

- a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a

$$r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}.$$

Solución: a) $k = 1$ b) $\pi: 4x + y - 4 = 0$

23. Galicia Ordinaria 2020. 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

Solución: a) $\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ b) $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

24. Galicia Ordinaria 2020. 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y

$s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución: Las rectas se cortan en el punto $P(1, 1, 1)$.

25. Galicia Julio 2019. Opción A. 3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$, $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m .

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

Solución: a) Para $m = 1$ los planos son paralelos. Si $m \neq 1$ los planos son secantes.

b) $m = 1; k = \frac{17}{9}$ c) $r \equiv \begin{cases} x = 8 + 9t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}; \pi \equiv 9x - y - 8 = 0$

26. Galicia Julio 2019. Opción B. 3. Se pide:

a. Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r

con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r .

b. Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0,90]$ que forman.

Solución: a. $P(3,-3,3)$ $\pi' \equiv 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ b. Son secantes y definen una recta. $(\pi_1, \pi_2) = 72,65^\circ$

27. Galicia Junio 2019. Opción A. 3. Se pide:

a. Calcular el ángulo del intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y

$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- b. Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$
- c. Calcula la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π .

Solución: a. 60° b. $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ c. $d(Q, \pi) = \frac{5}{\sqrt{3}} u$; $Q' = \left(\frac{13}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{-7}{3}\right)$

28. Galicia Junio 2019. Opción B. 3. Da respuesta a los apartados siguientes:

- a. Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m .
- b. Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 0)$.
- c. Calcula el punto simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ con respecto al plano $\pi: -x + z = 0$

Solución: a. Si $m \neq \frac{-2}{3}$ se cortan. Si $m = \frac{-2}{3}$ los planos son paralelos. b. $\pi: x - z = 0$ c) $P'(3, 2, 1)$

29. Galicia Septiembre 2018. Opción A. 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ y es perpendicular a r .
- b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1, 0, 6)$ y $Q(3, -2, 4)$ y es paralelo a la recta r .
- c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$.

Solución: a) $\pi_1: x - z = 0$ b) $\pi_2: x + y + z - 5 = 0$ c) $d(r, \pi_2) = \sqrt{3} u$

30. Galicia Septiembre 2018. Opción B. 3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9, 4, 1)$ y $Q(1, 1, 1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r e s . Calcula, si se cortan, el punto de corte.
- b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s .
- c) Calcula la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ a la recta s .

Solución: a) Las se cortan en el punto $(9, 4, 1)$ b) $\pi: 3x - 8y - 2z + 7 = 0$ c) $d(O, s) = \frac{7\sqrt{2}}{2} u$

31. Galicia Junio 2018. Opción A. 3. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.

b) Determina la posición relativa del plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4, 4, 2)$ y $Q(4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

Solución: a) $\lambda = 0$ b) Se cortan. El punto de corte es $M(0, 6, -1)$ c) $P'(4, 8, -4)$

32. Galicia Junio 2018. Opción B. 3. a) Dado el plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .

b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .

c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .

Solución: a) $a = 1$ b) $d(r, \pi) = \frac{4}{3}u$ c) $\alpha: 5x + 2y + 4z - 11 = 0$

33. Galicia Septiembre 2017. Opción A. 3. Sea r la recta que pasa por los puntos $(0,1,3)$ y $(1,1,1)$ y s la recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

- a) Estudia su posición relativa.
b) ¿Es paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?
c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$.

Solución: a) Se cruzan b) s es paralela al plano YZ . s no está contenida en el plano YZ c)

$$d(r, \pi) = \frac{3\sqrt{5}}{5}u$$

34. Galicia Septiembre 2017. Opción B. 3. Dados los planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$;

$$\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}; \text{ y la recta } r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de los planos α y β . Calcula la distancia entre ellos.
b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r .
c) Sean P y Q los puntos de corte de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q .

Solución: a) Son paralelos $d(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{6}}{12}u$ b) $\pi: x + 5y + 2z - 28 = 0$ c) $d(P, Q) = \frac{3\sqrt{5}}{2}u$

35. Galicia Junio 2017. Opción A. 3. Dados los planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$;

$$\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.
b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula el punto de corte de r y π_1 .
c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ respecto del plano π_1

Solución: a) Se cortan en una recta. $\alpha = 90^\circ$ b) $M(0, 0, 2)$ c) $P'(-1, -1, 3)$

36. Galicia Junio 2017. Opción B. 3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$

- a) Calcula la distancia del punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r .
b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5, -1, 6)$.
c) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ y el punto de corte de la recta r con el plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

Solución: a) $d(A, r) = 2\sqrt{3}u$ b) $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ c) Área $AMP = 3\sqrt{2}u^2$

La Rioja



1. La Rioja Extraordinaria 2025. 4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ mx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$ al plano

$$\pi: -x - 3y + z + 4 = 0.$$

Solución: a) El sistema tiene solución cuando $m = 2$ y la solución es el punto $P\left(3, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) $\frac{4\sqrt{11}}{11} \simeq 1.21$ unidades.

2. La Rioja Extraordinaria 2025. 4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0, 2, 1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi: 2x - 5y + z + 3 = 0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1, 0, -3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = -1 + 4\mu \end{cases}$$

Solución: a) $\pi': 2x - 5y + z + 9 = 0$ b) $\pi: x - y + 4z + D = 0$ c) 3 unidades.

3. La Rioja Ordinaria 2025. 4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Obtén el valor del m para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de r y s para el valor de m calculado.

b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0, 2, -1)$ y $Q = (2, -2, 1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

Solución: a) Para $m=3$ las rectas r y s se cortan en $A(-3, -3, 0)$. b) $\pi: x-2y+z-1=0$.

4. La Rioja Ordinaria 2025. 4.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la recta r , $r \equiv x-2=y+1=-z$, calcula la ecuación de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por $Q=(2, -2, 1)$.

b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$ halla los valores de m para que sean:
i) paralelos.
ii) perpendiculares.

Solución: a) $s: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-2-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$ b) Para $m=-1$ los planos son paralelos. Para $m=13$ los planos son perpendiculares.

5. La Rioja Extraordinaria 2024. 7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Solución: Para $a=2$ los cuatro planos se cortarían en el punto $(1, 1, 1)$. Para $a=-3$ el plano 1 y el plano 3 son paralelos y los otros dos planos los cortan. Para $a \neq 2$ y $a \neq -3$ los planos son secantes entre sí en rectas paralelas

6. La Rioja Extraordinaria 2024. 8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2, -1, 3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P .

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$

Solución: (i) $\pi': 4x+3y-2z+1=0$. (ii) $\pi'': 3x+2y-4z+8=0$

7. La Rioja Ordinaria 2024. 7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1: x+y+z=a-1 \\ \pi_2: 2x+y+az=a \\ \pi_3: x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.

(ii) se corten en una recta.

(iii) no se corten.

Solución: (i) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ los tres planos se cortan en un único punto. (ii) Para $a=2$ los tres

planos se cortan en una recta de ecuación $r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$. (iii) Para $a=1$ los tres planos no se cortan..

8. La Rioja Ordinaria 2024. 8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x + y - 2z + 1 = 0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 4x - y + z = 3 \end{cases}.$$

Solución: $s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z$.

9. La Rioja Extraordinaria 2023. 7.- (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1, 0, -1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3, 2, 5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π .

Solución: $\pi: -2x + y + 3z - 23 = 0$. El punto simétrico de P respecto a π es el punto $P' = (-7, 4, 11)$

10. La Rioja Extraordinaria 2023. 7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Solución: Si $m \neq 1$; $m \neq -2$ los tres planos coinciden en un punto. Si $m = 1$ los tres planos son coincidentes. Si $m = -2$ los planos se cortan dos a dos en rectas que son paralelas entre sí.

11. La Rioja Ordinaria 2023. 7.- (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

Solución: Plano y recta son secantes (coinciden en un punto).

12. La Rioja Ordinaria 2023. 8.- (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

Solución: El punto simétrico es $A' \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-1}{3} \right)$

13. La Rioja Extraordinaria 2022. 7.- (2 puntos) Determina según los valores del parámetro real a la posición relativa de la recta

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $6x + 5y - 3z = 2$

Solución: Si $a = 2$ recta y plano son paralelos y si $a \neq 2$ recta y plano son secantes (coinciden en un punto)

14. La Rioja Extraordinaria 2022. 8.- (2 puntos) Estudia según los valores del parámetro real a la posición relativa de las rectas siguientes:

$$\begin{cases} ax + 3y - 2z = 12, \\ 2x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 6 + 4\lambda \end{cases}$$

Solución: Si $a = 4$ las rectas se cortan y si $a \neq 4$ las rectas se cruzan.

15. La Rioja Ordinaria 2022. 7.- (2 puntos) Halla la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y que contenga al punto $P(1, 0, 1)$. ¿Es única dicha recta? Razona la respuesta.

Solución: Una recta que pase por el punto P y sea paralela a un plano no es única. $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

16. La Rioja Ordinaria 2022. 8.- (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a , y b para que el plano π contenga a la recta r , donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \quad r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: Los valores buscados son $a = b = 1$

17. La Rioja Extraordinaria 2021. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1, 1, 1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases}$

Solución: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

18. La Rioja Extraordinaria 2021. 8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z = a, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2z = 2a \end{cases}$$

Solución: Para $a = -2$ las rectas se cortan en el punto $P(0, 2, -2)$

19. La Rioja Ordinaria 2021. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(0, 1, 1)$,

b) está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3, \\ y = -z + 4 \end{cases}$

Solución: $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$

20. La Rioja Ordinaria 2021. 8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

Solución: $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$

21. La Rioja Extraordinaria 2020. 7.- (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

Solución: $\pi' \equiv y-3z+10=0$

22. La Rioja Extraordinaria 2020. 8.- (2 puntos) Dados las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s .

b) el plano π y la recta s .

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) La recta "s" está contenida en el plano.

23. La Rioja Ordinaria 2020. 7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a , la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x + y - z = a, \\ (a+1)x + (2a+1)y + z = -a, \\ ax + ay + z = -a. \end{cases}$$

Solución: Si $a \neq \pm 1$ los tres planos se cortan en un punto P . Si $a=1$ o $a=-1$ los tres planos coinciden en una recta.

24. La Rioja Ordinaria 2020. 8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: a) $\vec{w} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ b) Área = $\sqrt{3} u^2$

25. La Rioja Julio 2019. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45° . Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$.

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v .

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v .

Solución: (I) $|\vec{u}| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$; $|\vec{v}| = \sqrt{3-\sqrt{2}}$ (II) $\cos(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}}$

26. La Rioja Julio 2019. Propuesta B. 2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5, 4, 3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r .

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución: (I) $r: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ (II) $\pi: y - z - 1 = 0$

27. La Rioja Junio 2019. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad \pi: ax + y + z - b = 0$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r .

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π .

Solución: (I) $a = b = 1$ (II) $a = 1$ y $b \neq 1$.

28. La Rioja Junio 2019. Propuesta B. 1.- (2 puntos) Sean el plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ y la

recta $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π .

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π .

Solución: (I) $s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 7t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ (II) Distancia(s, π) = $\frac{2}{\sqrt{6}}$ u

29. La Rioja Julio 2018. Propuesta A. 4.- (3 puntos)

Considere las rectas $r: \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

(I) Determine la posición relativa de las rectas r y s .

(II) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r .

Solución: (I) Se cruzan (II) $\vec{u} = (a, -a, c)$

30. La Rioja Junio 2018. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean los vectores $\vec{u} = (-1, 4, 8)$ y $\vec{v} = (1, 2, -2)$.

(I) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90° .

(II) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

Solución: (I) El coseno del ángulo es negativo $\rightarrow$ es mayor de 90° (II) $\vec{w} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$

31. La Rioja Junio 2018. Propuesta B. 2.- (3 puntos) Sean el punto $P = (1, 2, -2)$ y la recta

$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- (I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r .
 (II) Determine el punto de r más próximo a P.
 (III) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

Solución: (I) $\pi \equiv -x + y + 2z + 3 = 0$ (II) $P \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$ (III) $r': \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \lambda \\ y = \frac{10}{3} + \lambda \\ z = -\frac{10}{3} + 2\lambda \end{cases}$

32. La Rioja Julio 2017. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean m un número real y los vectores

$$\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (2, -1, m).$$

- (I) Halle todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
 (II) Determine, si existe, un valor de m tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{u}$.

Solución: (I) $\left(\frac{3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{6 - 3m}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{-3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} \right)$ y también $\left(\frac{-3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{-6 + 3m}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}}, \frac{3}{\sqrt{m^2 - 4m + 6}} \right)$ (II) $m = \frac{1}{4}$

33. La Rioja Julio 2017. Propuesta B. 2.- (3 puntos)

- (I) Pruebe que cualquiera sea el valor de a , los planos $\pi_1: ax + ay - z = 0$, $\pi_2: x - y + az = 0$ se cortan en una recta r .
 (II) Estudie, en función de a , la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos A(1, 1, 1), B(1, 0, 2) y C(0, 1, 2a).

Solución: (I) Los vectores normales a los planos no tienen coordenadas proporcionales en ningún caso.
 (II) Para $a \neq -1$ plano y recta se cortan. Para $a = -1$ recta y plano son paralelos.

34. La Rioja Junio 2017. Propuesta A. 1.- (2 puntos) Sean los puntos A(1, -1, 0), B(2, 2, 1), C(1, -2, -1), D(0, -1, 2).

- (I) Halle una ecuación de la recta que pasa por A y por B.
 (II) ¿Son coplanarios los puntos A(1, -1, 0), B(2, 2, 1), C(1, -2, -1), D(0, -1, 2)?

Solución: (I) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ (II) Los tres puntos A, B, C y D son coplanarios

35. La Rioja Junio 2017. Propuesta B. 2.- (3 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$, $\vec{w} = (2k, -1, k)$.

- (I) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente dependientes.
 (II) Compruebe que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.
 (III) Halla las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

Solución: (I) $k = -9$ (II) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -11 \neq 0$ (III) Las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son $\vec{a} = (2, -1, 3)$

Madrid



1. Madrid Extraordinaria 2025. Pregunta 3.1. Sean los puntos

$$A(1,1,2), B(2,-1,0), C(-2,0,3) \text{ y } D(2,-3,-1) \text{ y la recta } r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.
- (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Solución: a) 0.5 unidades cúbicas. b) El área tiene un valor de $\frac{3\sqrt{10}}{2} \approx 4.74 u^2$. La altura vale

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.3162 u. \text{ c) } \frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557 \text{ unidades.}$$

2. Madrid Extraordinaria 2025. Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

- (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.
- (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Solución: a) $\pi: y=0$. b) $s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

3. Madrid Ordinaria 2025. Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano

$$\pi: x+2y-3z=1, \text{ se pide:}$$

- (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Solución: a) $\pi': -2x+7y+4z-6=0$. b) $s: \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}$ c) $Q_1(-39,0,-18)$ y

$$Q_2(17,0,10)$$

4. Madrid Ordinaria 2025. Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x+y=2$. Se pide:

- (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.. b) $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ c) $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

5. Madrid Extraordinaria 2024. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

- a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
 b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución: a) $\pi: 2x + 4y - 8z + 5 = 0$. b) $R\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

6. Madrid Extraordinaria 2024. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
 b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución: a) Las rectas se cruzan. La distancia es 0.7 unidades. b) $s \equiv \begin{cases} x=5 \\ y=-1-\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2-\lambda \end{cases}$

7. Madrid Ordinaria 2024. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
 b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución: a) $\pi: x - y = 0$. b) $r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$ y $r_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$.

8. Madrid Ordinaria 2024. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

- a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .
 b) (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución: a) El único valor que cumple lo pedido es $a = 3$. b) Los cuatro vértices restantes del paralelepípedo son $A(4,3,2)$, $B(4,5,3)$, $C(3,5,4)$ y $D(2,3,1)$.

9. Madrid Extraordinaria 2023. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi: z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q .

- a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π .
 b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.
 c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r , con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución: a) P y Q tienen su 3ª coordenada = 1. b) $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ c) $t: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \sqrt{2}\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

10. Madrid Extraordinaria 2023. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi: x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
 b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π .
 c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π , y que corte al eje OZ .

Solución: a) $P(-1, -3, -2)$ b) $t: \begin{cases} x = -1 - \alpha \\ y = -3 - 3\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 5\alpha \end{cases}$ c) $t': \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

11. Madrid Ordinaria 2023. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
 b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
 c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T .

Solución: a) Los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ no indican la misma dirección. $\pi: y + z - 1 = 0$.

b) $P\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ c) Perímetro $= \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \approx 12.55$ unidades.

12. Madrid Ordinaria 2023. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x - z = 2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
 b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .
 c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

Solución: a) Plano y recta son secantes y se cortan en el punto $P(1, 0, -1)$. b) $A'(2, 1, 0)$

c) $A' = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

13. Madrid Extraordinaria 2022. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π .

- a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D .

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π , determine los otros dos vértices del mismo.

Solución: a) Hay dos soluciones posibles: $C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ y $D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$ o

$$C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \text{ y } D(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}) \quad b) \quad C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

14. Madrid Extraordinaria 2022. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.

- a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
 b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .
 c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución: a) Son paralelas. $d(r, s) = \sqrt{41} \approx 6.4u$. b) $\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0$ c) $t \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 5 + 6\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

15. Madrid Ordinaria 2022. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto P (1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

- a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.
 b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
 c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

Solución: a) $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$; Q(-90, -190, 0) b) P'(-11, -32, 79) c) 60°

16. Madrid Ordinaria 2022. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto P(0, 1, 0).

- a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
 b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1 .
 c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 .

Solución: a) Cierto b) $s: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ c) $r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$. El área del cuadrado es $\frac{3}{2}u^2$

17. Madrid Extraordinaria 2021. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto A(1, 0, -1), la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .
 b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .
 c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

Solución: a) $(\pi, \pi') = 90^\circ$ b) $d(r, \pi) = \frac{8}{\sqrt{3}} u$ c) $s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{0}$

18. Madrid Extraordinaria 2021. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s .
 b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s .

Solución: a) $t \equiv \begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ b) $d(r, s) = \frac{16}{\sqrt{6}} u$

19. Madrid Ordinaria 2021. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .
 b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.
 c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

Solución: a) El ángulo que forman recta y plano es de 19.5° b) $P' = (-3, -2, 1)$ c) $r' \equiv \begin{cases} y+z+1=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$

20. Madrid Ordinaria 2021. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

- a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.
 b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .
 c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

Solución: a) $\pi_3 \equiv x+y=2\sqrt{2}$ y $\pi_4 \equiv x+y=-2\sqrt{2}$ b) $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$ c) $d(A, B) = \sqrt{2} u$

21. Madrid Extraordinaria 2020. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
 b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
 c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

Solución: a) $\pi \equiv x+y-4z-6=0$ b) $P'(-1, -1, -2)$ c) $A(1, 1, -1)$ y $B(2, 0, -1)$; $A(1, 1, -1)$ y $B(0, 2, -1)$

22. Madrid Extraordinaria 2020. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \lambda \\ y = \frac{3}{2} + \lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$ b) $D = (3, 2, -3)$; Área = $\sqrt{32} = 5,66 u^2$ c) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}} = 0,66$

23. Madrid Ordinaria 2020. A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

se pide:

- (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s .
- (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.
- (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

Solución: a) Se cruzan b) $\pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0$ c) $\pi' \equiv -4x - 5y + 3z - 24 = 0$

24. Madrid Ordinaria 2020. B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

- (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
- (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .
- (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

Solución: a) $Q\left(\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{7}\right)$ b) $x + 2y - 3z = -7$ c) $\pi' \equiv x + y + z = 0$

25. Madrid Julio 2019. Opción A. Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

- (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.
- (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A , B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.
- (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX , de modo que el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P sea igual a 1.

Solución: a) $-x + 2y + z - 2 = 0$ b) Cualquier punto del plano anterior. c) $P\left(-\frac{11}{4}, 0, 0\right)$ y $P'\left(-\frac{5}{4}, 0, 0\right)$

26. Madrid Julio 2019. Opción B. Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y

$s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

- (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .

- b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s .
- c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .

Solución: a) $P' = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$ b) $t \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ c) 60°

27. Madrid Junio 2019. Opción A. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2; -5; 1)$ y tiene dirección $(-1; 0; -1)$, se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s .
- c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución: a) Las rectas se cruzan b) $\pi \equiv 2x + y - 2z - 5 = 0$ c) $\pi \equiv 2x - 2y + z = 0$

28. Madrid Junio 2019. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2; 1; 0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π .
- b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A .
- c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

Solución: a) $d(A; \pi) = \sqrt{29} u$ b) $B(4, 4, 4)$ c) $A' = (6, 7, 8)$

29. Madrid Julio 2018. A.3. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$; $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

- a) (1 pto) Determinar un vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
- b) (0.75 pto) Hallar un vector no nulo $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
- c) (0.75 pto) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

Solución: a) $\vec{w}_1 = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}\right)$ b) $\vec{w}_2 = (1, 2, 2)$ c) $C(2, 4, 6)$ y $D(-2, 0, 1)$

30. Madrid Julio 2018. B.3. Dados el punto $P(0; -1; 1)$ y la recta r , que pasa por el punto $Q(1; 0; 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
- b) (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r .
- c) (1.5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos $T_1; T_2$, contenidos en la recta r , que están a distancia $\sqrt{5}$ de P .

Solución: a) $2x - 2y + z - 3 = 0$ b) $S\left(1, \frac{-1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ c) $\text{Área} = 1,51 u^2$

31. Madrid Junio 2018. Opción A. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

- a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
 b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solución: a) Volumen del cubo es $\frac{729}{2744} u^3$ b) C(2,3,3) y D(3,2,3)

32. Madrid Junio 2018. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto P(1, 1, 1) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
 b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
 c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución: a) $d(P, r) = \sqrt{\frac{13}{15}} = 0,93 u$ b) Las rectas se cruzan c) $\pi \equiv -3x + 3y + z - 1 = 0$

33. Madrid Septiembre 2017. Opción A. Ejercicio 2: Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .
 b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
 c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto P(1, 2, 3).

Solución: a) Se cruzan. b) Distancia(r_1, r_2) = $\frac{\sqrt{6}}{6} u$ c) $\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0$

34. Madrid Septiembre 2017. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(3, 5, -3) a la recta r.
 b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Solución: a) Distancia(Q, r) = $\sqrt{12} u$ b) Q'(1, 3, -1)

35. Madrid Septiembre 2017. Opción B. Ejercicio 4: Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 3, -1), B(3, 1, 0) y C(2, 5, 1) y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
 b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución: a) Tiene dos lados iguales $b = c$ y el tercero desigual, por lo que es un triángulo isósceles
 b) Los ángulos son de 90° , 45° y 45°

36. Madrid Junio 2017. Opción A. Ejercicio 2: Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos P(1, -2, 1), Q(-4, 0, 1), R(-3, 1, 2), S(0, -3, 0), se pide:

- a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
 b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.
 c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución: a) $\pi \equiv 2x + 5y - 7z + 15 = 0$ b) Las rectas se cortan c) Área triángulo PQR = $\frac{\sqrt{78}}{2} = 4,41 u^2$

37. Madrid Junio 2017. Opción B. Ejercicio 3: Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s , que pasa por el origen.

Solución: a) $d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 u$ b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Murcia



1. Murcia Extraordinaria 2025. 3A) a) [1,25] Determine el valor de a y b para que el plano $\pi: 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) [1,25] ¿Para qué valores de a y b corta a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

Solución: a) $a = 4$ y $b = 3$ b) Para $a = 0$ y $b = 7$ la recta corta al plano en el punto $P(5, -3, -1)$.

2. Murcia Extraordinaria 2025. 3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x + y + 3z = 0$.

a) [1] Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π .

b) [0,75] Halle dicho punto.

c) [0,75] Calcule la distancia que debe recorrer.

Solución: a) $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$ b) $P\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-7}{11}\right)$ c) $\frac{6\sqrt{11}}{11} \approx 1.8 \text{ unidades}$.

3. Murcia Ordinaria 2025. 3A) Considere las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

a) [0,5] Compruebe que se cruzan.

b) [1,5] Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

c) [0,5] Calcule la distancia entre r y s .

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) $t: \begin{cases} 6x + y - z - 11 = 0 \\ 3x - 9y - 10z + 4 = 0 \end{cases}$ c) $3\sqrt{19}$ unidades

4. Murcia Ordinaria 2025. 3B) Considere los planos $\pi_1: x - y + z = 0$ y $\pi_2: x + y - z = 2$

a) [1] Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 .

b) [0,75] Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 .

c) [0,75] Calcule la proyección ortogonal de P en π_1

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$ c) $P\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$

5. Murcia Extraordinaria 2024. 5: Considere los planos $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$ y los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(1, 1, 3)$.

a) [0,75] Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

- b) [1] Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.
 c) [0,75] Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Solución: a) $r: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ b) $s: \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=3+\lambda \end{cases}$ c) $R\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6. Murcia Extraordinaria 2024. 6: Considere los planos $x + y + z = -3$ y $x + y - z = 3$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$

- a) [0,75] Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.
 b) [0,75] Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x + y - z = 3$.
 c) [1] Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Solución: a) El ángulo que forman los dos planos es de aproximadamente 70.53° . b) Recta y plano son paralelos. c) $P_r(1, -1, 0)$ y $A_r(-1, -2, -3)$.

7. Murcia Ordinaria 2024. 5: Considere el plano π de ecuación $x + y + z = -1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$.

- a) [1] Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
 b) [0,5] Calcule la distancia de la recta r al plano π .
 c) [1] Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

Solución: a) www.ebaumatematicas.com. b) La distancia es de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades c) $\pi': x + y - 2z = 1$.

8. Murcia Ordinaria 2024. 6: Considere las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2y = 13 \\ z = 2 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

- a) [1] Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.
 b) [0,5] Compruebe que el punto $P(0, 3, 0)$ no está en ninguna de las dos rectas.
 c) [1] Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas

Solución: a) www.ebaumatematicas.com. b) www.ebaumatematicas.com c) $\pi: x + 2y + 6z - 6 = 0$.

9. Murcia Extraordinaria 2023. 5: Los puntos $A = (6, -4, 4)$ y $B = (12, -1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

- a) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice C.
 b) [0,5 p.] Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.
 c) [0,5 p.] Calcule el área del triángulo ABC .

Solución: a) $C(3, -1, 1)$ b) Se cumple. c) $\text{Área } ABC = \frac{27\sqrt{2}}{2} \approx 19.09 \text{ u}^2$

10. Murcia Extraordinaria 2023. 6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 2x + ay - 2z = -4$ y la recta r dada por

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a .

Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π . Para ese valor de a :

b) [0,75 p.] Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π .

c) [0,5 p.] Calcule el ángulo que forman.

Solución: a) Si $a = -8$ la recta está contenida en el plano y si $a \neq -8$ recta y plano son secantes, coinciden en un punto b) El punto de corte de recta y plano es el punto $A(1, 0, 3)$.

c) Recta y plano forman un ángulo de 90°

11. Murcia Ordinaria 2023. 5: Considere las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) [1 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) [1 p.] Compruebe que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s .

c) [0,5 p.] Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución: a) Las rectas son paralelas. b) El punto P pertenece a la recta r . $P'(10, -2, 2)$

c) $d(r, s) = d(P, P') = 3\sqrt{3} \approx 5.196u$

12. Murcia Ordinaria 2023. 6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r: \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a .

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π . Para ese valor de a :

b) [0,75 p.] Calcule la distancia de la recta r al plano π .

c) [0,5 p.] Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π .

Solución: a) Si $a = 2$ la recta está contenida en el plano. Si $a \neq 2$ la recta es paralela al plano.

b) $d(r, \pi) = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.138u$ c) $\pi': 3x - y - 2z + 3 = 0$.

13. Murcia Extraordinaria 2022. 5: Considere el plano π de ecuación $\pi: x + y + z = 1$ y la recta r dada por

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ ax - z = a - 1 \end{cases}$$

a) [1,5 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a .

- b) [1 p.] Si $a = -1$ la recta r corta al plano π . Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π .

Solución: a) Si $a = -2$ recta y plano son paralelos. Si $a \neq -2$ recta y plano son secantes.

b) $A(-1, -1, 3)$ El ángulo entre recta y plano es 19.48°

14. Murcia Extraordinaria 2022. 6: Considere las rectas r y s dadas por

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad s: \begin{cases} x+2z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

- a) [1,5 p.] Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.
b) [1 p.] Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi: x - y + 2z = 3$.

Solución: a) $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0$ $\pi: x - y + 2z = 1$ b) $d(r, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} u$

15. Murcia Ordinaria 2022. 5: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad y \quad s: \begin{cases} x-z=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

- a) [1,5 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.
b) [1 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) Las rectas se cortan (están en un mismo plano) b) $\pi: x + y - z - 1 = 0$. Las rectas forman un ángulo de 60°

16. Murcia Ordinaria 2022. 6: Considere los puntos $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 5, 2)$.

- a) [1,5 p.] Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.
b) [1 p.] Calcule la distancia del punto A al plano π .

Solución: a) $\pi: x + 3y - 8 = 0$ b) $d(A, \pi) = \sqrt{10} u$

17. Murcia Extraordinaria 2021. 5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad y \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

- a) [0,75 p.] Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.
b) [1 p.] Determine el ángulo que forman las dos rectas.
c) [0,75 p.] Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

Solución: a) El punto de corte de las rectas es $C(3, 2, -1)$ b) 19° . c) $\pi \equiv y + z - 1 = 0$

18. Murcia Extraordinaria 2021. 6: Los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta r dada por

$$r: \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C .
b) [1 p.] Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución: a) El punto C tiene coordenadas $C(6,0,3)$ b) $\text{Área} = 32.5 u^2$

19. Murcia Ordinaria 2021. 5: Considere los planos de ecuaciones

$$\pi_1: x - y + z = 0 \quad y \quad \pi_2: x + y - z = 2.$$

- a) [1 p.] Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.
 b) [1,5 p.] Compruebe que el punto $A = (3, 2, 1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A .

Solución: a) $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ b) $\pi_3: y - z - 1 = 0$

20. Murcia Ordinaria 2021. 6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A = (a, 4, 3)$, $B = (0, 0, 5)$ y $C = (0, 3, -1)$.

- a) [1 p.] Calcule los valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A .
 b) [1,5 p.] Tomando el valor de $a = 3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

Solución: a) $a = \pm 2$ b) $\pi: -16x + 7y - 10z + 50 = 0$

21. Murcia Extraordinaria 2020. 5: Considere los puntos $P = (5, 6, 1)$ y $Q = (-3, -2, 5)$, y la recta

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}.$$

- a) [1,5 p.] Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

- b) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r .

Solución: a) $R_1(0, 1, -1)$ y $R_2(2, 3, 7)$ b) $s: \begin{cases} x=5+2t \\ y=6+2t \\ z=1-t \end{cases}$ Las dos rectas se cortan en el punto $A(1, 2, 3)$ y el

producto escalar de sus vectores directores es cero: $\vec{v}_s \cdot \vec{v}_r = 0$

22. Murcia Extraordinaria 2020. 6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$$

- a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.
 b) [1,25 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $\pi: -x - y + 2z + 5 = 0$

23. Murcia Ordinaria 2020. 5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. .

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices

$$A(-1, 2, 3), B(3, -4, 1) \text{ y } C(1, -4, 5).$$

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

$$\text{Solución: a) Por A } \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ r: y = 2 - 2\alpha \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Por B } \rightarrow \begin{cases} x = 3 - \beta \\ s: y = -4 + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad \text{Por C } \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ s': y = -4 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

b) Las tres medianas se cortan en el punto $M(1, -2, 3)$.

24. Murcia Ordinaria 2020. 6: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \quad \pi: x - 2y - z = 4$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

Solución: a) Recta y el plano son paralelos b) $d(r, \pi) = 4.08 u$ c) $\pi' \equiv -x + 2y - 5z = 0$

25. Murcia Septiembre 2019. A.3: Considere la recta $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano

$$\pi: x - 2y - z = -1.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .

b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución: a) Recta y plano se cortan perpendicularmente. b) El punto de corte es $P(-2, -1, 1)$. El ángulo que forman recta y plano es de 90° .

26. Murcia Septiembre 2019. B.3: Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + z = 1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π .

b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

$$\text{Solución: a) } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ r: y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{b) El punto } C \text{ puede tener las coordenadas } C(13, -5, 7) \text{ o bien } C(-11, 7, -5).$$

27. Murcia junio 2019. A.3: Los puntos $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C .

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C .

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π .

c) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución: a) $\pi: x+y+z-3=0$ b) $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ c) $D(5,5,5)$ o $D(-3,-3,-3)$

28. Murcia junio 2019. B.3: Considere las siguientes rectas:

$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}$ $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

a) [1 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) [1,5 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) Las rectas se cruzan. b) $t: \begin{cases} -x-y+2z+13=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases}$ o en paramétricas $t: \begin{cases} x=3,5-t \\ y=2,5+t \\ z=-3,5 \end{cases}$

29. Murcia Septiembre 2018. CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$r: \begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+3y+5z=1 \end{cases}$ y $s: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

a) [1,25 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) [1,25 p.] Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

Solución: a) El vector director de las rectas son proporcionales y el punto $P_s(5,0,0)$ que pertenece a la

recta s no pertenece a la recta r . b) $\begin{cases} x=5+2\lambda-\frac{25}{7}\alpha \\ y=0+\lambda-\frac{1}{7}\alpha \\ z=0-\lambda \end{cases}$

30. Murcia Septiembre 2018. CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P=(1, 1, 3)$ y $Q=(1, 5, 0)$ y la recta r dada por la ecuación:

$r: \begin{cases} 2x-y-2z=-3 \\ -x+y=4 \end{cases}$

a) [0,5 p.] Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.

b) [1,25 p.] Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).

c) [0,75 p.] Calcule el área de dicho triángulo PQR .

Solución: a) Muy sencillo b) $R=(-9,-5,-5)$ c) $\text{Área} = 25\sqrt{2} u^2$

31. Murcia junio 2018. CUESTIÓN A.4:

Considere el plano π dado por la ecuación $3x-2y+z=3$.

a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r dada por

$r: \begin{cases} x+3y+3z=0 \\ y+2z=1 \end{cases}$

- b) [1,25 p.] En caso de que la recta r sea paralela al plano, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta r corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

Solución: a) La recta es perpendicular al plano. b) Forman 90° ya que son iguales el vector normal del plano y el director de la recta. El punto de corte es $A(0, -1, 1)$

32. Murcia junio 2018. CUESTIÓN B.4:

Considere el punto $P = (0, 1, 2)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

- a) [1,25 p.] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P .
b) [1,25 p.] Calcule la distancia del punto P al plano $x + y + z = 5$.

Solución: a) $y + z - 3 = 0$ b) Distancia(P , Plano) = $1,15 u^2$

33. Murcia Septiembre 2017. CUESTIÓN A.2: Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (3, 3, 4)$ y la recta s cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 3, 1)$ y pasa por el punto $C = (4, 0, 3)$.

- a) [1 punto] Determine las ecuaciones continuas de las rectas r y s .
b) [1,5 puntos] Estudie la posición relativa de r y s .

Solución: a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ y $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-3}{1}$ b) Las rectas se cortan.

34. Murcia Septiembre 2017. CUESTIÓN B.2: Considere los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$ y $C = (0, -2, 1)$.

- a) [1,25 puntos] Calcule el área del triángulo ABC .
b) [1,25 puntos] Calcule la ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas) contenida en el plano que forman A , B y C que, pasando por A , es perpendicular al lado BC .

Solución: a) Área = $\frac{\sqrt{14}}{2} u^2$ b) $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{4}$

35. Murcia junio 2017. CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 2)$. Considere la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0, 4)$ y $B(3, 2, 2)$.

- a) [0,75 puntos] Determine la ecuación de π .
b) [0,75 puntos] Determine la ecuación de r .
c) [1 punto] Estudie la posición relativa de π y r .

Solución: a) $\pi: -2x - 2y + z + 3 = 0$ b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{-1}$ c) Son secantes.

36. Murcia junio 2017. CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son $A = (-a, 1, 1)$, $B = (2, -1, 2)$ y $C = (1, -2a, 3)$.

- a) [1,5 puntos] ¿Cuánto ha de valer a para el triángulo sea rectángulo en B ?
b) [1 punto] Calcule el área del triángulo ABC para el caso $a = -1$.

Solución: a) $a = 1$ b) Área triángulo $ABC = \frac{\sqrt{30}}{2} u^2$

Navarra



1. Navarra Extraordinaria 2025. B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s , siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 10 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

Solución: $t: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

2. Navarra Extraordinaria 2025. B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)

Solución: Los planos que equidistan 6 unidades del plano π son $\pi_1: x+2y+2z+8=0$ y $\pi_2: x+2y+2z-28=0$.

3. Navarra Ordinaria 2025. B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Solución: $t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

4. Navarra Ordinaria 2025. B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$ y $B(1, 4, 2)$ y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto $P(6, -4, -4)$. (0,5 puntos)

(a) Calcula la ecuación de dicha recta.

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A . (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$ b) $\pi: 4y + 3z + 3 = 0$ c) $D(6, 0, -1)$ y $C(6, 4, 2)$.

5. Navarra Extraordinaria 2024. P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta

$r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos $A(3, 2, -1)$ y $B(1, 1, -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A , B y C no están alineados. (1.25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Solución: a) www.ebaumatematicas.com b) El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

6. Navarra Extraordinaria 2024. P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$.
Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado. (2,5 puntos)

Solución: $A(1,-1,0)$ y $B(-1,3,-4)$.

7. Navarra Ordinaria 2024. P3) Los puntos $A(4,-2,-3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(0,-3,-1)$ son vértices de un rombo.
a) Encuentra el cuarto vértice del rombo. (1,75 puntos)
b) Calcula el área del rombo. (0,75 puntos)

Solución: a) $D(-2,-2,3)$ b) El área del rombo es $6\sqrt{6} \approx 14,7$ unidades cuadradas.

8. Navarra Ordinaria 2024. P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi: 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.
a) A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)
b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado. (1 punto)

Solución: a) Está a una distancia de 6 unidades del plano π que contiene la base b) $D(0,0,3)$ y $D'(0,6,0)$.

9. Navarra Extraordinaria 2023. P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s , siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$

10. Navarra Extraordinaria 2023. P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Solución: $\pi: -x + 2y - 2z - 1 = 0$

11. Navarra Ordinaria 2023. P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \quad (2,5 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$

12. Navarra Ordinaria 2023. P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)
b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

Solución: a) $Q(3,3,-2)$ b) Los puntos buscados son $Q_1(1,2,-4)$ y $Q_2(5,4,0)$

13. Navarra Extraordinaria 2022. P3) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $\pi \equiv y - z - 1 = 0$

14. Navarra Extraordinaria 2022. P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$. (2.5 puntos)

Solución: Los dos puntos buscados son $A(3, 7, 4)$ y $B(1, -1, 2)$

15. Navarra Ordinaria 2022. P3) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T \equiv (1, -5, 3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 10 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$

16. Navarra Ordinaria 2022. P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1, 2, -1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}$

17. Navarra Extraordinaria 2021. P3) Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$

18. Navarra Extraordinaria 2021. P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r . (2.5 puntos)

Solución: Hay dos planos como solución de esta situación: $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$ y

$\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0$. $T_1(-2, -1, 2)$ y $T_2(2, 1, -2)$ y las rectas $s_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{0}$ y

$s_2 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{0}$

19. Navarra Ordinaria 2021. P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

Solución: $\pi \equiv x-2y+3z+6=0$

20. Navarra Ordinaria 2021. P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Otro lado lo determinan los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$.

Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u.

(2.5 puntos)

Solución: Hay dos soluciones al problema: $C=(4, -1, -3)$; $D(1, -1, 1)$ y $C=(0, -3, 1)$; $D(-3, -3, 5)$

21. Navarra Extraordinaria 2020. P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2, 0, 5)$, $P_2(1, -2, 2)$ y $P_3(3, -1, 2)$. Una esfera con centro en $C(0, 1, -3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

Solución: Radio $= 2\sqrt{6}$ y el punto tiene coordenadas $P(2, -3, -1)$

22. Navarra Extraordinaria 2020. P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-5}$

23. Navarra Ordinaria 2020. P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta

$$s \equiv \begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}, \text{ es paralela al plano de ecuación } \pi \equiv 2x-y+3z-6=0 \text{ y pasa por el}$$

punto $P \equiv (-1, 3, 1)$.

(2.5 puntos)

Solución: $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$

24. Navarra Ordinaria 2020. P6) Los puntos $A \equiv (-1, 2, 1)$ y $B \equiv (2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4} \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución: $C(1, 3, 3)$ y $D(0, 4, -1)$

25. Navarra Julio 2019. A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}.$$

Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2

Solución: $C \equiv (5, 3, 2)$

26. Navarra Julio 2019. B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P \equiv (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+1}{-8}$ o $t \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-17} = \frac{z+1}{-26}$

27. Navarra Junio 2019. A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades. (2 puntos)

Solución: $\pi \equiv 2x + y - 2z + 14 = 0$ o bien $\pi \equiv 2x + y - 2z - 4 = 0$

28. Navarra Junio 2019. B2) $P \equiv (1, -1, 1)$, $Q \equiv (5, -3, 5)$, $R \equiv (7, -7, 1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo. (3 puntos)

Solución: Depende de hacia qué lado construyas el cubo el centro es uno de estos puntos:
 $O(6, -2, 0)$ u $O'(2, -6, 2)$

29. Navarra Julio 2018. A2) Halla el simétrico del punto $P \equiv (2, 5, 2)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $P'(0, -3, 0)$

30. Navarra Julio 2018. B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$

31. Navarra Junio 2018. A2) Sean los puntos $P(7, 4, 2)$, $Q(1, 2, -2)$ y $R(2, 1, -3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los otros dos vértices restantes. (2 puntos)

Solución: $S(0, 3, -1)$ y $T(-5, 0, -6)$

32. Navarra Junio 2018. B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-4, 0, 5)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-3}$

33. Navarra Julio 2017. A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

(2 puntos)

Solución: Se cortan perpendicularmente pues se cortan en $P(2, 1, -1)$ y el producto escalar de sus vectores directores es 0. $R(3, 3, -3)$ y $S(4, 2, 1)$

34. Navarra Julio 2017. B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$.

Encuentra un punto, D, de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3 . (3 puntos)

Solución: Hay dos soluciones: $D(-3, 3, 7)$ o $D(-1, 3, 5)$

35. Navarra Junio 2017. A2) Dados el punto P (1, -1, 0) y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

Solución: Hay dos soluciones posibles: $\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0$ o $\pi \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0$

36. Navarra Junio 2017. B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(-4, 2, 0) y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

Solución: $t \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$

País Vasco



1. País vasco Extraordinaria 2025. (3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4, -3, 0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2, 0, 1)$ y $B(-2, -1, 0)$.

Solución: $P'(-8, -1, -2)$

2. País vasco Extraordinaria 2025. (3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2, 3, 4)$, $B(3, -1, -2)$, $C(5, -1, 2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6, -5, -4)$, $E(7, 1, 4)$.
 (a) **(1,5 puntos)** Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r , expresando el resultado en grados, minutos y segundos.
 (b) **(1 punto)** En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π .

Solución: (a) $11^\circ 28' 44''$. (b) El punto Q donde la recta corta al plano tiene coordenadas $Q(6, -5, -4)$.

3. País vasco Ordinaria 2025. (3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 7 = 0$ y la recta r_2 .

Solución: $\pi': 4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

4. País vasco Ordinaria 2025. (3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4, 4, 1)$ y $B(1, 0, -1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2, 7, -1)$ y $D(2, 3, -1)$.
 (a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s .
 (b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Solución: (a) Las rectas se cruzan (b) La distancia entre las rectas es de $\frac{8}{3} \approx 2.6667$ unidades.

5. País vasco Extraordinaria 2024. Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = -1 + \lambda. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Determina su posición relativa.

(b) **(1,5 p)** Si dichas rectas se cortan, calcula el ángulo mínimo formado entre ambas. En caso de que no se corten, calcula la distancia entre ambas rectas.

Solución: (a) Las rectas se cruzan. (b) La distancia entre las rectas r y s tiene un valor de $\frac{2\sqrt{30}}{15} \approx 0.73$ unidades.

6. País vasco Extraordinaria 2024. Ejercicio B2

Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

(a) **(0,75 p)** Calcula el valor del parámetro A para que la recta r y el plano π sean paralelos.

(b) **(0,75 p)** Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta r .

(c) **(0,75 p)** Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

Solución: (a) $A = \frac{37}{3}$ (b) $A(2, 5, 1)$. (c) $O' \left(\frac{20}{7}, \frac{-30}{7}, \frac{10}{7} \right)$

7. País vasco Ordinaria 2024. Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases},$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas r y s .

(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(c) **(0,75 p)** Dado el punto $P(-8, -8, 0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r .

Solución: a) Las rectas se cortan. b) $\pi : 2x - y - 1 = 0$. c) $Q(-4, -9, 4)$.

8. País vasco Ordinaria 2024. Ejercicio B2

Dados los puntos $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(1, 2, -1)$, $P_3(0, -2, 3)$ y $P_4(-2, 0, 1)$, calcula:

(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2 , P_3 y P_4 .

(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π .

Solución: a) $\pi : y + z - 1 = 0$. b) $P_1'(1, -4, -3)$

9. País vasco Extraordinaria 2023. Ejercicio A2

Sea la recta r y el plano π , que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1, -1, 2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1, 2, 3)$ y contiene al vector $(0, 0, 2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π .

Solución: $\pi \equiv x - 1 = 0$ y $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

10. País vasco Extraordinaria 2023. Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta?

En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.

En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

Solución: No existen valores de a y b para los que los planos se corten en una recta

11. País vasco Ordinaria 2023. Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases},$$

- a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r .
 b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto $P(2, 1, 0)$, que es exterior a r .

Solución: a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

12. País vasco Ordinaria 2023. Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 1$. P_1 el punto de corte de la recta r con el plano π_1 y P_2 el punto de corte de la recta r con el plano π_2 . Calcula:

- a) las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 ;
 b) la distancia entre los puntos P_1 y P_2 ;
 c) la distancia del punto P_1 al plano π_2 .

Solución: a) $P_1(0, 2, -1)$ y $P_2(1, 1, 1)$ b) $d(P_1, P_2) = \sqrt{6}$ unidades c) $d(P_1, \pi_2) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ unidades

13. País vasco Extraordinaria 2022. Ejercicio A2

Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Solución: No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano

14. País vasco Extraordinaria 2022. Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Solución: $r \equiv x = -\frac{3}{4}t; y = \frac{5}{4}t; z = t; t \in \mathbb{R}$ No existe ningún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta

15. País vasco Ordinaria 2022. Ejercicio A2

Se consideran la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases},$$

y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Solución: Los puntos que cumplen lo planteado son dos: $P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$ y

$$P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0\right)$$

16. País vasco Ordinaria 2022. Ejercicio B2

Sean el punto $P = (1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π .

Solución: El punto P' buscado es $P' = \left(1 - \frac{2a}{3}, 2 - \frac{2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$

17. País vasco Extraordinaria 2021. Ejercicio A2

Sea r la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t, y = 2 + 2t, z = 1 + 3t\}$$

y sean $A = (1, 2, 3)$ y $B = (3, 2, 1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r y que pasa por los puntos A y B . Calcular la distancia de la recta r a ese plano.

Solución: $\pi: x - 2y + z = 0$ $D(r, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22 u$

18. País vasco Extraordinaria 2021. Ejercicio B2

Sean los puntos $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ y $D = (1, 1, 1)$.

- Calcular el valor de b para que A, B, C y D estén en el mismo plano.
- El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1, 2, -3)$, calcular las coordenadas de Q .

Solución: a) $b = 4$ b) $Q(3, 4, 3)$.

19. País vasco Ordinaria 2021. Ejercicio A2

Sea r la recta que pasa por los puntos

$$A = (1, a, -1) \text{ y } B = (b, 1, 1) \text{ y } \pi \text{ el plano de ecuación } x + y - 2z = 2b.$$

- Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π .
- Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π .

Solución: a) $a = 2$ y $b = 0$ b) $a = -5$ y $b = -1$

20. País vasco Ordinaria 2021. Ejercicio B2 Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución: Distancia $(P, C) = \sqrt{3} u$

21. País vasco Extraordinaria 2020. Ejercicio A2.

Dada la recta $r = \begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$, y el plano $\pi = 3x + (\alpha + 1)(y + 1) + \alpha z = 1$,

- hallar α para que la recta y el plano sean paralelos,
- determinar si el punto $P = (1, 1, 2)$ pertenece al plano hallado en a).

Solución: a) $\alpha = \frac{1}{13}$ b) No pertenece al plano

22. País vasco Extraordinaria 2020. Ejercicio B2. Hallar el punto Q, simétrico de $P = (1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación $x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución: $Q(-3, -2, -1)$

23. País vasco Ordinaria 2020. Ejercicio A2.

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (-1, -2, -3)$ y $\vec{w} = (1, 3, 5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Solución: a) $\pi \equiv -x + 2y - z - 2 = 0$ b) $A = -7$

24. País vasco Ordinaria 2020. Ejercicio B2.

Sea π el plano $2x - y + Az = 0$. Sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución: $A = -2$. $\pi' \equiv 5x + 8y + z = 0$

25. País vasco Julio 2019. Ejercicio A2. Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1, 0, 0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Solución: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$

26. País vasco Julio 2019. Ejercicio B2. Se considera la recta r

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Y el punto $P(1, 2, 5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P .

Solución: $2x - y = 0$

27. País vasco Junio 2019. Ejercicio A2. Sean la recta

$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $x - y + Az = 0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r ?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución: a) $A = 3$ b) $5x + 8y + z = 0$

28. País vasco Junio 2019. Ejercicio B2. Se consideran los tres puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(-1, -1, 2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Solución: No están alineados. El plano es $x - y = 0$

29. País vasco Julio 2018. Ejercicio A2 Sea π el plano de ecuación $x + y + z = 1$, sea r la recta de ecuaciones paramétricas $\{x = 1, y = t, z = t\}$ y sea P el punto $(1, 1, 0)$.
 a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r y que contenga a P .
 b) Hallar el punto simétrico de P respecto al plano π .

Solución: a) $y + z = 1$ b) $P' \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$

30. País vasco Julio 2018. Ejercicio B2 Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = -1 + t, y = 3 + 2t, z = -1 + 2t\}$.

Solución: $A'(-3, -3, -3)$

31. País vasco Junio 2018. Ejercicio A2 Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C .

Solución: a) Si están en el mismo plano. $\pi \equiv 3x - 2y + 3z = 12$ b) $a = -12$

32. País vasco Junio 2018. Ejercicio B2 Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$

Solución: $3x + 4y + 10z - 22 = 0$

33. País vasco Julio 2017. Ejercicio A2 Dada la recta que pasa por los puntos $A(0, 2, 3)$ y $B(-1, 1, 1)$ encontrar un punto P de dicha recta tal que la distancia de P al punto $M(1, 0, 1)$ sea la misma que la distancia de P al punto $N(0, 4, 2)$.

Solución: $P \left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5} \right)$

34. País vasco Julio 2017. Ejercicio B2 a) Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0,$$

y que pasa por el punto $P(2, 6, 5)$.

b) Encontrar la distancia del primer plano a la recta obtenida.

Solución: a) $\frac{x-2}{-8} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-5}{5}$ b) Distancia = $\sqrt{11} u$

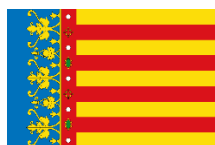
35. País vasco Junio 2017. Ejercicio A2 Dado el punto $M(1, -3, 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$.

Solución: $M' \left(\frac{29}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{65}{11} \right)$

36. País vasco Junio 2017. Ejercicio B2 Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3}$ y que pasa por el punto $A(14, 3, 3)$.

Solución: $s \equiv \frac{x-14}{-10} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{4}$

Valencia



1. Valencia Extraordinaria 2025. 3.1 Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

Solución: 3.1.1) $m = -1$. 3.1.2) $m = 2$. 3.1.3) $r : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \frac{-7}{2} + \frac{1-m}{2}\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

2. Valencia Extraordinaria 2025. 3.2 Dado el plano $\pi : 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

Solución: 3.2.1) $a = 0$. 3.2.2) $Q' \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11} \right)$.

3. Valencia Ordinaria 2025. 3.1 Dada la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s : \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$,

calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

Solución: 3.1.1) $A(-1, -1, 3)$. 3.1.2) $\pi : x - 4y - 2z + 3 = 0$ 3.1.3) La distancia del punto P al plano es 0. El punto P pertenece al plano.

4. Valencia Ordinaria 2025. 3.2 Se consideran el plano $\pi : 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

Solución: 3.2.1) $\pi' : x - y - 2z + 3 = 0$. 3.2.2) $\frac{5\sqrt{14}}{14} \approx 1.3363$ unidades. 3.2.3) $P' \left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7} \right)$.

5. Valencia Extraordinaria 2024. Problema 3.

Se dan las rectas $r : x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s : \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

Solución: a) Las rectas r y s se cortan en $P(1,2,1)$. b) $t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$

6. Valencia Extraordinaria 2024. Problema 4. Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Solución: a) Para $d = +\sqrt{61}$ y $d = -\sqrt{61}$ la distancia del plano al origen vale 1.

b) Los puntos de corte del plano con los ejes son $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$ y $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$. c) 75.6° .

7. Valencia Ordinaria 2024. Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r . (4 puntos)
- Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r . (3 puntos)
- Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P=(1, -1, -2)$. (3 puntos)

Solución: a) Para $m = \frac{5}{3}$ la recta r y el plano π son paralelos. No existe ningún valor de m que haga que

la recta esté contenida en el plano. b) $\pi': 9x - 5y + 3z = 8$ c) $d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{10+m^2}}$

8. Valencia Ordinaria 2024. Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.

- Calcular la ecuación de la recta r . (2 puntos)
- Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)
- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x=4-\lambda \\ y=7+2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=6-2\lambda \end{cases}$ b) $\pi: -18x + y + 10z + 5 = 0$. c) $S\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ y $T\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$

9. Valencia Extraordinaria 2023. Problema 3. Dados los puntos $A=(2, -1, 0)$, $B=(1, 2, 3)$ y $C=(-1, 0, 0)$:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B . (3 puntos)
- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A al plano π . (3 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ b) $\pi: -x+3y+3z-1=0$ c) $d(A, \pi) = \frac{6}{\sqrt{19}} \approx 1.3765$ unidades

10. Valencia Extraordinaria 2023. Problema 4. Dada la recta $r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:

- a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m . (6 puntos)
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (4 puntos)

Solución: a) Si $m \neq -3$ recta y plano coinciden en un punto. Si $m = -3$ la recta está contenida en el plano. b) $\pi': 3x - 11y - 4z + 8 = 0$

11. Valencia Ordinaria 2023. Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos

$P = (0, 0, 3)$ y $Q = (2, 2, \alpha)$, obtener:

- a) Los valores del parámetro real α , si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)
 b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P . (4 puntos)

Solución: a) $\alpha = -3$ b) $\pi: x + y - 3z + 9 = 0$

12. Valencia Ordinaria 2023. Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto

$P = (0, 5, 2)$ se pide:

- a) Comprobar que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)
 b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s . (3 puntos)
 c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r . (5 puntos)

Solución: a) $s: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) El ángulo formado por las rectas r y s es de

aproximadamente 35° . c) La proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto $P'(1, 4, 1)$.

13. Valencia Extraordinaria 2022. Problema 3. Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$,

y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
 b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
 c) Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ b) $\pi: x + 2y - 8z - 3 = 0$ c) $\frac{3\sqrt{42}}{14} \approx 1.389$

14. Valencia Extraordinaria 2022. Problema 4. Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
 b) El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C . (5 puntos)

Solución: a) $C\left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{17}{9}\right)$ b) Área $ABC = 5\sqrt{2} \approx 7.07u^2$

- 15. Valencia Ordinaria 2022. Problema 3.** Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.
- a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s . (5 puntos)
- b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

Solución: a) Las rectas r y s se cruzan (no son coplanarias). b) $l: \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \end{cases}$

- 16. Valencia Ordinaria 2022. Problema 4.** Dados los planos

$$\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0 \text{ y } \pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}, \text{ y la recta } r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

- a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
- b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1, 0, 0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
- c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

Solución: a) Los planos son paralelos. b) $P'(-3, 2, 2)$ c) $Q(-3, -8, 6)$

- 17. Valencia Extraordinaria 2021. Problema 2.** Se dan las rectas $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x + my + z = 2$ y $\pi_3: x + ay + z = 1$ que depende del parámetro real m . Obtened:

- a) La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
- b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π . (3 puntos)
- c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$. (3 puntos)

Solución: a) Las rectas r y s son paralelas b) $m = 3$ c) Volumen $ABCP = 2u^3$

- 18. Valencia Extraordinaria 2021. Problema 5.** Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

- a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
- b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . Calculad la distancia entre las rectas r y s . (4 puntos)
- c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Solución: a) $\pi: y + 2z - 1 = 0$. $d(O, \pi) = \frac{\sqrt{5}}{5}u$ b) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ La distancia entre las rectas paralelas r y

s es $\sqrt{\frac{5}{6}}u$ c) $\alpha = 0$. $s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$

- 19. Valencia Ordinaria 2021. Problema 2.** Se dan los planos $\pi_1: x + y + z = a - 1$, $\pi_2: 2x + y + az = a$ y $\pi_3: x + ay + z = 1$.

- a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
 b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
 c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

Solución: a) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ los tres planos se cortan en un punto. Para $a = 1$ los planos π_1 y π_3 son paralelos y son secantes con el plano π_2 y para $a = 2$ los planos son secantes y se cortan en una recta común a los tres. b) No tienen recta común

$$c) r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

20. Valencia Ordinaria 2021. Problema 5. Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano

$\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- a) Calculad la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
 b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
 c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π . (3 puntos)

Solución: a) $d(P, \pi) = \sqrt{14}$ unidades b) $P' = (-5, -2, 1)$ c) $\pi' \equiv 3x + 2y + z + 18 = 0$

21. Valencia Extraordinaria 2020. Problema 2. Se dan los planos $\pi: x + y = 1$ y

$\pi': x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π' . (3 puntos)
 b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π' . (3 puntos)
 c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π' . (4 puntos)

Solución: a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ b) $d(r, \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2} u$; $d(r, \pi') = \frac{\sqrt{3}}{3} u$ c) $t: \begin{cases} x - y - 2z - 2 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$

22. Valencia Extraordinaria 2020. Problema 5. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 2\lambda \end{cases}$

y el plano $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π . (4 puntos)
 b) La distancia entre las rectas r y s . (3 puntos)
 c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

Solución: a) No existe ningún valor de a . b) $d(r, s) = \frac{10}{\sqrt{29}} u$ c) $\cos(r, t) = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8944$

23. Valencia Ordinaria 2020. Problema 2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos

$P = (1, 0, 0)$ y $Q = (2, 1, \alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r . (3 puntos)
- La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
- La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r , cuando $\alpha = 1$. (4 puntos)

Solución: a) $\alpha = -1$ b) $\pi \equiv x - y - 1 = 0$ c) Distancia(Q, π') = $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 u$

24. Valencia Ordinaria 2020. Problema 5. Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π . (4 puntos)
- Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A . Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r . (1+2 puntos)
- La distancia entre el punto B y la recta r . (3 puntos)

Solución: a) $\pi' \equiv y + z - 1 = 0$ b) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \cdot \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -y - z + 1 = 0 \end{cases}$ c) $d(B, r) = \sqrt{3} u$

25. Valencia Julio 2019. Problema A.2.

Se da el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia del punto P al plano π . (3 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C , obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 puntos)
- El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C . (3 puntos)

Solución: a) $\frac{32}{3} u$ b) Área triángulo $ABC = 24 u^2$ c) $\frac{512}{6} = 85,33 u^3$

26. Valencia Julio 2019. Problema B.2. Problema B.2.

Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β . (5 puntos)
- La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 puntos)
- La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π . (2 puntos)

Solución: a) Si $\beta \neq 3$ plano y recta se cortan en un punto. Siendo $\beta = 3$, si $\alpha = 6$ la recta está contenida en el plano. Si $\alpha \neq 6$ la recta es paralela al plano. b) La distancia es 0. c) $\pi': x + 2y + 3z = 0$

27. Valencia Junio 2019. Problema A.2.

Consideremos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$

Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s . (3 puntos)
- b) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r . (4 puntos)
- c) El valor que deben tener los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 puntos)

Solución: a) $\pi: 7x + y - 4z + 9 = 0$ b) $s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ c) $a = 0,5$ y $b = 3$

28. Valencia Junio 2019. Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.**Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π . (4 puntos)
- b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)
- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (2 puntos)

Solución: a) $\pi': 9x + 12y + 20z - 80 = 0$ y $\pi'': 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) $A(20, 0, 0)$; $B(0, 15, 0)$; $C(0, 0, 9)$. $43,15^\circ$ c) $450 u^3$

29. Valencia Junio 2018. A.2. Dados los puntos $A = (-1, 2, \lambda)$, $B = (2, 3, 5)$ y $C = (3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
- b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. (4 puntos)
- c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. (4 puntos)

Solución: a) $\lambda = 2,5$. b) $\text{Área} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u^2$ c) $\pi: x + z - 8 = 0$

30. Valencia Junio 2018. B.2. Dados el punto $A(5, 7, 3)$ y la recta $r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La recta s que corta a la recta r , pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r . (4 puntos)
- b) La distancia del punto A a la recta r . (3 puntos)
- c) La distancia del punto $B(1, 1, 1)$ al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a r . (2 puntos)

Solución: a) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ b) $d(A, r) = \sqrt{21} u$ c) $d(B, \pi) = \frac{5\sqrt{14}}{7} u$

31. Valencia Julio 2018. A.2. Se tienen el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$, la recta $s: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 1, 1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π . (4 puntos)
- b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s . (3 puntos)
- c) Discute si el punto $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$. (3 puntos)

Solución: a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$ b) $\pi': x - 2y - 3z + 4 = 0$ c) $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s

32. Valencia Julio 2018. B.2. Dada la recta $r: \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente** escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r . (3 puntos)
 b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$. (4 puntos)
 c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior. (2 puntos)

Solución: a) $\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=4-3t \end{cases}$ b) $x+y-5=0$ c) $d(r, \pi) = \sqrt{2} u$

33. Valencia Julio 2017. A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz=n$.

Obtener **razonadamente**, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
 b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3.5 puntos)
 c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3.5 puntos)

Solución: a) $m \neq -3$ y n cualquier valor b) $m = -3$ y $n \neq 2$ c) $m = -3$ y $n = 2$

34. Valencia Julio 2017. B.2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x-y+bz=0$, siendo a y b dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2.5 puntos)
 b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2.5 puntos)
 c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

Solución: a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$ b) $d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{21}}{7} u$ c) Si $a = 10$ y $b = -2$ la recta r está contenida en el plano π . Si $b \neq -2$ y $a + b = 8$ la recta r es paralela al plano π . Si $a + b \neq 8$ la recta r y el plano π se cortan.

35. Valencia Junio 2017. A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1$

Obtener **razonadamente**, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, las ecuaciones de:

- a) El plano que contiene al punto P y a la recta r . (2 puntos)
 b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
 c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

Solución: a) $\pi: x+3y-z-3=0$ b) $s: x=y=z$. $d(P, \pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3} u$. Punto de intersección es $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ c) $\sigma: -x+z-3=0$

36. Valencia Junio 2017. B. 2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$.

Obtener **razonadamente**, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C , (1 punto)

- | | |
|--|------------|
| y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O. | (2 puntos) |
| b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . | (3 puntos) |
| c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, | (2 puntos) |
| y el volumen del tetraedro T. | (2 puntos) |

Solución: a) $\pi : x + y + z - 3 = 0$. $x = y = z$ b) (1, 1, 1)

c) área de la cara = $\frac{3\sqrt{3}}{2}u^2$. Volumen del tetraedro = $\frac{3}{2}u^3$