

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	C
--	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además, el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

Pregunta 1.2. Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.
- (1.25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.
- (0.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.
- (0.75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.

Pregunta 2.2. Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

- (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sea el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano

$\pi: x + 2y - 2z = 1$. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .
- b) (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .
- c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .

Pregunta 3.2. Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

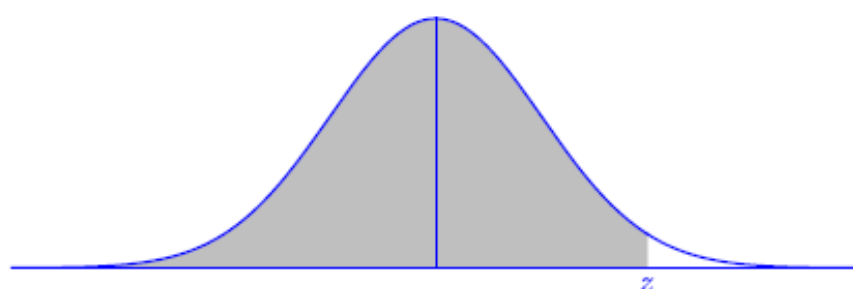
- a) (1.5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B .
- b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S .

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B , según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- a) (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social; "De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B , en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón." ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- b) (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Pregunta 1.1. En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además, el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

a) Sea “x” el número de conejos, “y” el de gallinas y “z” el de pavos en la granja.

“El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros” $\rightarrow 1.5x + 0.04y + 0.3z = 44$.

“Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos” $\rightarrow y = 4z + \frac{x}{4}$.

“El doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos” $\rightarrow 2y = x + z + 10x$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 1.5x + 0.04y + 0.3z = 44 \\ y = 4z + \frac{x}{4} \\ 2y = x + z + 10x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150x + 4y + 30z = 4400 \\ 4y = 16z + x \\ 2y = 11x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 75x + 2y + 15z = 2200 \\ 4y - 16z = x \\ 2y = 11x + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 75(4y - 16z) + 2y + 15z = 2200 \\ 2y = 11(4y - 16z) + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 300y - 1200z + 2y + 15z = 2200 \\ 2y = 44y - 176z + z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 302y - 1185z = 2200 \\ -42y = -175z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 302y - 1185z = 2200 \\ y = \frac{25}{6}z \end{array} \right\} \Rightarrow 302 \frac{25}{6}z - 1185z = 2200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{220}{3}z = 2200 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2200 \cdot 3}{220} = 30} \Rightarrow \boxed{y = \frac{25}{6}30 = 125} \Rightarrow \boxed{x = 4 \cdot 125 - 16 \cdot 30 = 20}$$

En la granja hay 20 conejos, 125 gallinas y 30 pavos.

Pregunta 1.2. Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.
 b) (1.25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

a) Determinamos la expresión de la matriz AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a+0 & 0+1+0 & 0+0+2 \\ 1+3a+0 & 3+3+0 & 0+0+a \\ a+0+0 & 3a+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1+3a & 6 & a \\ a & 3a & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de AB .

$$|AB| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1+3a & 6 & a \\ a & 3a & 0 \end{vmatrix} = 0 + a^2 + 6a + 18a^2 - 12a - 0 - 3a^3 = -3a^3 + 19a^2 - 6a$$

$$|AB| = 0 \Rightarrow -3a^3 + 19a^2 - 6a = 0 \Rightarrow a(-3a^2 + 19a - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -3a^2 + 19a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4(-3)(-6)}}{-6} = \frac{-19 \pm 17}{-6} = \begin{cases} \frac{-19+17}{-6} = \frac{1}{3} = a \\ \frac{-19-17}{-6} = 6 = a \end{cases} \end{cases}$$

Si $a \neq 0$; $a \neq 6$ y $a \neq \frac{1}{3}$ el determinante de AB es distinto de cero y su rango es 3. Para

$a = 0$; $a = 6$ o $a = \frac{1}{3}$ el determinante de AB es nulo y su rango es menor de 3.

b) Para que la matriz B tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 3a - 0 = 1 - 3a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow 1 - 3a = 0 \Rightarrow 1 = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{1}{3}$.

Calculamos su inversa para estos casos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1-3a} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$$

Para $a \neq \frac{1}{3}$ la inversa de la matriz B es $B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.1. Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

a) (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.

b) (0.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.

c) (0.75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} = \frac{e}{e^1 - e} - \frac{1}{1-1} = \frac{e}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \\ &= \text{Indeterminación} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e - e^x + e}{(e^x - e)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e^x}{(e^x - e)(x-1)} = \frac{e - e^1}{(e^1 - e)(1-1)} = \\ &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{e^x(x-1) + (e^x - e)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e^x + e^x - e} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e} = \frac{e - e^1}{e^1 - e} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x + xe^x} = \frac{-e^1}{e^1 + e^1} = \boxed{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$. Para $x=1$ se anula el denominador.

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{e}{e^x - e} \Rightarrow f'(x) &= \frac{0 - e^x \cdot e}{(e^x - e)^2} = \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} \\ f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} &= 0 \Rightarrow -e^{x+1} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!} \end{aligned}$$

La función no tiene puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-e^{0+1}}{(e^0 - e)^2} = \frac{-e}{(1 - e)^2} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-e^{2+1}}{(e^2 - e)^2} = \frac{-e^3}{(e^2 - e)^2} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) Obtenemos la expresión de la función $g(x) + g(-x)$.

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{-x-1} = \frac{-x-1+x-1}{(x-1)(-x-1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

El denominador se anula para $x=1$ y $x=-1$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + g(-x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0} = \infty.$$

La recta $x=1$ es asíntota vertical.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} (g(x) + g(-x)) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0} = \infty.$$

La recta $x=-1$ es asíntota vertical.

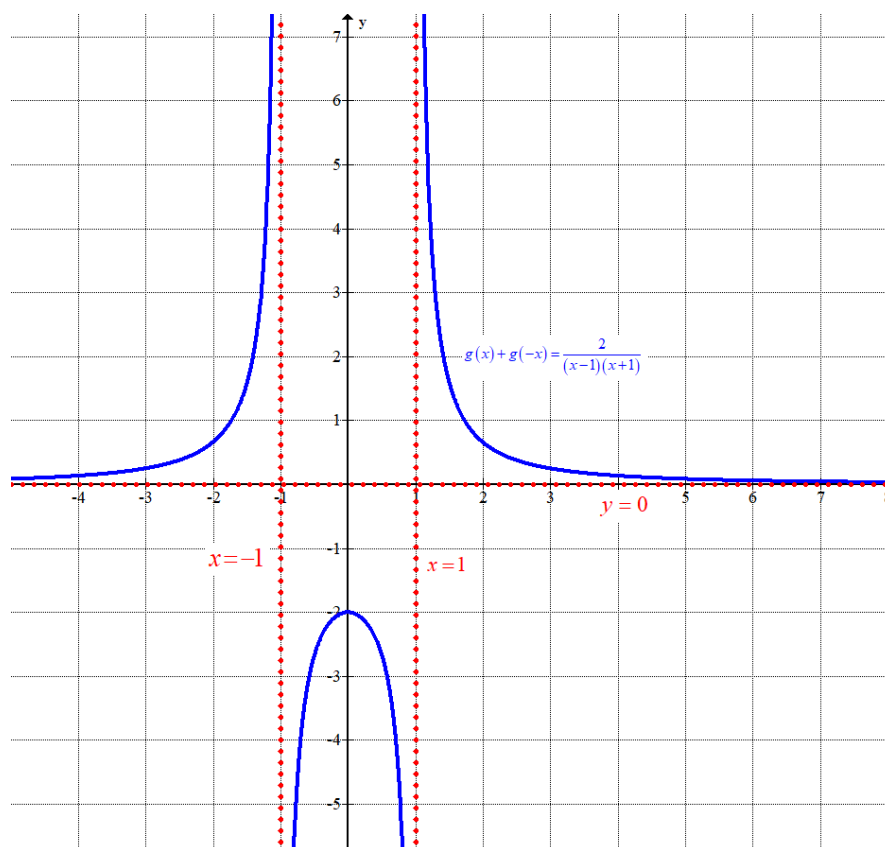
Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} = \frac{e}{\infty} - \frac{1}{\infty} = 0 - 0 = 0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al existir asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.



Pregunta 2.2. Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

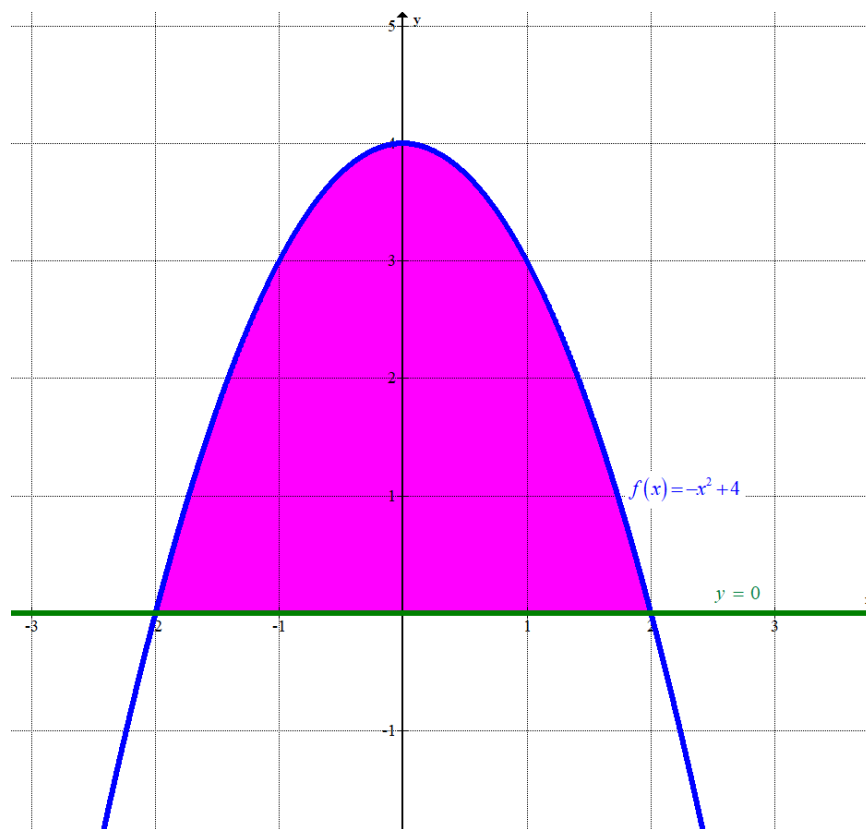
- a) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas.

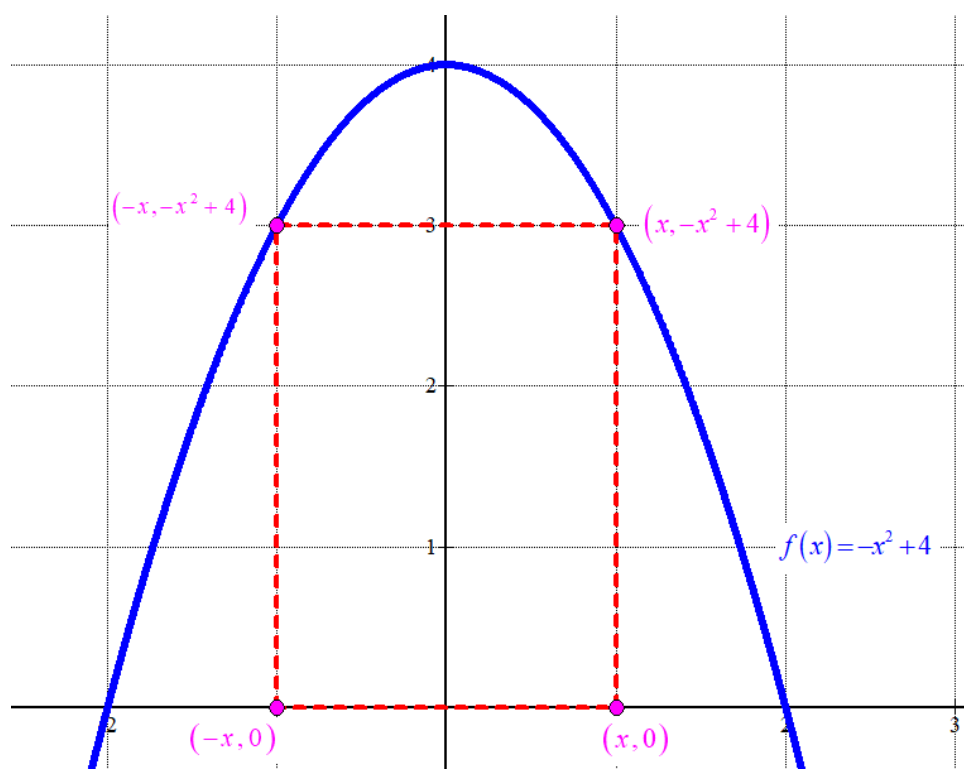
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$ es el valor absoluto de la integral definida entre -2 y 2 de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \left[\frac{-2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right] - \left[\frac{-(-2)^3}{3} + 4(-2) \right] = \\ &= \frac{-8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 u^2} \end{aligned}$$



b) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



Como los vértices del rectángulo deben apoyarse en la gráfica las coordenadas de los vértices son $(x, 0)$; $(-x, 0)$; $(x, -x^2 + 4)$ y $(-x, -x^2 + 4)$.

El área del rectángulo es el producto de la base ($2x$) por la altura.

El área viene dada por la expresión $A(x) = 2x(-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x$.

Hallamos los puntos críticos de la función área.

$$\left. \begin{array}{l} A'(x) = -6x^2 + 8 \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El valor positivo o negativo de la raíz nos lleva a la misma solución.

Sustituimos el valor $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ en la segunda derivada.

$$A'(x) = -6x^2 + 8 \Rightarrow A''(x) = -12x \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -12\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el área es máxima para $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Para este valor tenemos que $f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + 4 = \frac{-4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$. El rectángulo buscado tiene de base $2\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ y de altura $\frac{8}{3}$.

El área máxima que se puede conseguir vale $\frac{8}{3} \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \approx 6.16$ unidades cuadradas.

Pregunta 3.1. Sea el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 2z = 1$

. Se pide:

- (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .
- (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .

a) Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y - 2z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -2) \\ r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 0, 1) \cdot (1, 2, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Como el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano es nulo significa que estos vectores son perpendiculares y por lo tanto la recta r y el plano π son paralelos.

La distancia de la recta al plano la podemos obtener como la distancia de un punto cualquiera de la recta, por ejemplo $P_r(1, 0, 2)$ al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \in r \\ \pi : x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3} \text{ unidades}$$

La distancia de la recta al plano es de $\frac{4}{3}$ unidades.

b) La proyección ortogonal del punto A en la recta es la intersección de la recta r con el plano perpendicular a ella que pasa por el punto A .

Hallamos el plano π' perpendicular a la recta que pasa por A . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ A(1, 2, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi' : 2x + z + D = 0 \\ A(1, 2, 3) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi' : 2x + z - 5 = 0}$$

Hallamos la intersección del plano $\pi' : 2x + z - 5 = 0$ con la recta. Obtendremos el punto A' proyección ortogonal de A sobre la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 0 \\ z = 2 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi' : 2x + z - 5 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 0 \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) + 2 + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow 2 + 4\alpha + 2 + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{1}{5} = \frac{7}{5} \\ y = 0 \\ z = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5}\right)$$

La proyección ortogonal del punto A sobre la recta r tiene coordenadas $A'\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5}\right)$.

- c) Hallamos la ecuación del plano π'' que pasa por A y es paralelo a $\pi: x + 2y - 2z = 1$. Como es paralelo debe tener ecuación $\pi'': x + 2y - 2z + D = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 3) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow 1 + 4 - 6 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0}$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano $\pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje X} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 0 - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{B(-1, 0, 0)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje Y} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 2y - 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi'': x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ \text{Eje Z} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{D\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)}$$

Hallamos el volumen del tetraedro OBCD como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que lo definen.

$$\left. \begin{array}{l} O = (0, 0, 0) \\ B(-1, 0, 0) \\ C\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ D\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{OB} = (-1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OC} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right) \\ \overrightarrow{OD} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array} \Rightarrow [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Volumen OBCD} = \frac{[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}]}{6} = \frac{\frac{1}{4}}{6} = \frac{1}{24} u^3$$

Pregunta 3.2. Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

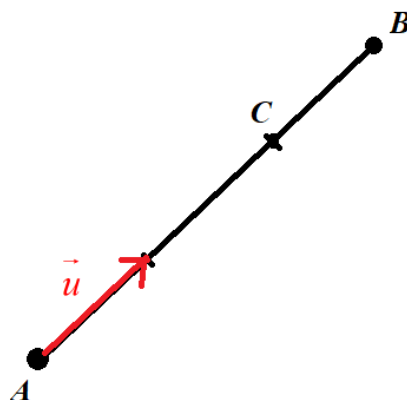
- a) (1.5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B.
 b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S.

a) Dividimos el vector que une los puntos A y B en tres partes.

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,1,0) = (1,-1,1) \Rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

El punto C que buscamos lo obtenemos sumando al punto A el doble del vector $\vec{u}$.

$$C = A + 2\vec{u} = (0,1,0) + 2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



El punto buscado tiene coordenadas $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

b) Hallamos las coordenadas del punto medio del segmento S.

$$P = \frac{(1,0,1) + (0,1,0)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El plano perpendicular al segmento S tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x - y + z + D = 0 \\ P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\pi : x - y + z - \frac{1}{2} = 0}$$

El plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S tiene ecuación

$$\pi : x - y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

Pregunta 4. Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B, según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- a) (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social; "De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B, en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón." ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- b) (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

- a) Con retraso inferior o igual a 1 hora llegan $80 + 15 = 95\%$ de los trenes. El 5% de los trenes llegan con retraso superior a 1 hora.

Llamamos X a la variable aleatoria que da el número de viajes que llegan con retraso de un grupo de 40. Esta variable aleatoria es una binomial. $X = B(40, 0.05)$.

Calculamos la probabilidad de que de 40 viajes 10 lleguen con retraso: $P(X = 10)$.

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} 0.05^{10} \cdot 0.95^{30} = 0.0000178 = \frac{17.8}{1000000}$$

La probabilidad de que ocurra lo que dice el usuario enfurecido es mayor de $\frac{1}{1000000}$. El usuario no tiene razón.

- b) Consideramos la variable aleatoria $X =$ "Número de trayectos en los que la compañía devolvió dinero en enero de 2025".

La empresa realiza 6 viajes diarios durante el mes de enero de 2025, por lo que en total realiza $6 \cdot 31 = 186$ viajes en el mes. Esta variable es una binomial de parámetros $n = 186$ y $p = 0.2$ (el 80% llegan puntuales o con retraso inferior a 30 minutos y no debe devolver dinero).

$X = B(186, 0.2)$.

Como $np = 186 \cdot 0.2 = 37.2 > 5$ y $nq = 186 \cdot 0.8 = 148.8 > 5$ la aproximación de esta variable X por una normal Y de media $np = 37.2$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{186 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \frac{2\sqrt{186}}{5} \approx 5.46. Y = N(37.2, 5.46) \text{ es buena. } Y = N(37.2, 5.46)$$

La sexta parte de los trayectos significan $\frac{186}{6} = 31$ trayectos. Calculamos $P(X \leq 31)$.

$$P(X \leq 31) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección} \\ \text{de Yates} \end{array} \right\} = P(Y \leq 31.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{31.5 - 37.2}{5.46}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.04) = P(Z \geq 1.04) = 1 - P(Z \leq 1.04) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.8508 = \boxed{0.1492}$$