

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1.50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

Pregunta 1.2. Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.
- b) (1.25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$, $g(x) = \frac{1}{x - 1}$.

- a) (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.
- b) (0.75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.
- c) (0.75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.

Pregunta 2.2. Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.

- a) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1.5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x + 2y - 2z = 1$. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .
- b) (0.75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .
- c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .

Pregunta 3.2. Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

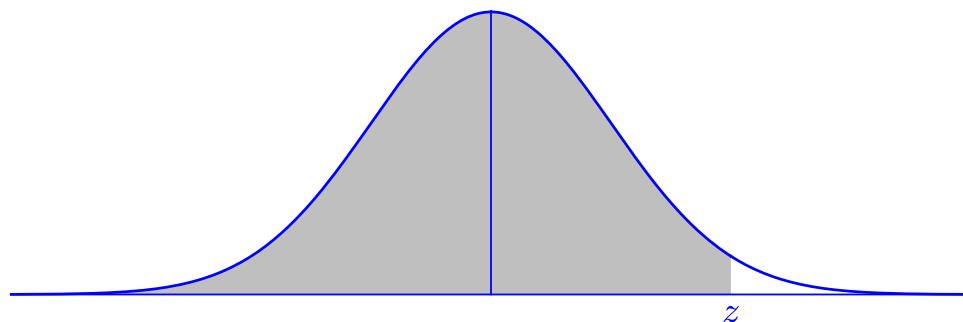
- a) (1.5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B .
- b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S .

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B , según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- a) (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este *post* en una red social: "De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B , en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón." ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- b) (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

Por cada ecuación correctamente planteada: 0.5 puntos. Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

1.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Cálculo de la derivada: 0.25 puntos. Determinar que la función es decreciente en su dominio: 0.5 puntos.

c) Cada asíntota: 0.25 puntos.

2.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Función de área en una variable: 0.5 puntos. Punto crítico: 0.5 puntos. Discusión del máximo local: 0.25 puntos. Valor del área correcta: 0.25 puntos.

3.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

3.2.

a) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos. Penalizar con 0.25 puntos si dan un punto fuera del segmento como solución.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Cálculo de los parámetros de la normal: 0.25 puntos por cada uno. Cálculo de la probabilidad: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.5 puntos). En el caso de no aplicar la corrección por continuidad se restarán 0.25 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

Si x es el número de conejos, y el de gallinas y z el de pavos en la granja, del enunciado se plantea el siguiente sistema lineal de ecuaciones en estas incógnitas

$$\begin{cases} 150x + 4y + 30z = 4400 \\ \frac{1}{4}x - y + 4z = 0 \\ 11x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{que equivale a} \quad \begin{cases} 4y + 150x + 30z = 4400 \\ 4y - x - 16z = 0 \\ 4y - 22x - 2z = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que en la granja hay $z = 30$ pavos, $x = 20$ conejos e $y = 125$ gallinas.

1.2.

a) La matriz AB tiene rango 3 si, y sólo si, A y B tienen rango 3. Como A tiene rango 3 si, y sólo si, $a \neq 0, 6$ y B tiene rango 3 si, y sólo si, $a \neq 1/3$, la matriz AB tiene rango 3 si, y sólo si, $a \neq 0, 1/3, 6$.

b) La inversa de la matriz B cuando $a \neq 1/3$ es

$$B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}.$$

2.1.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$. Resolvemos la indeterminación aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(x-1) - e^x + e}{(x-1)(e^x - e)} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e} \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}.$$

b) El dominio $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1\}$. $f'(x) = \frac{-e \cdot e^x}{(e^x - e)^2} < 0$. Por lo tanto, $f(x)$ no tiene puntos críticos. Se tiene que $f'(x) < 0$ en su dominio. Luego $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$.

c) La función $g(x) + g(-x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ tiene dos asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$ ya que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x^2 - 1} = \infty$. Tiene una asíntota horizontal $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0$.

2.2.

a) Los puntos de corte de la parábola con el eje OX son $(\pm 2, 0)$. El área se calcula con la integral:

$$A = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

b) Los vértices del rectángulo son de la forma $(\pm x, 0)$, $(\pm x, -x^2 + 4)$. El área del rectángulo es base, $2x$, por altura, $-x^2 + 4$, y se puede expresar en función de x : $A(x) = 2x(-x^2 + 4)$ con $x \in [0, 2]$ para que el valor sea no negativo.

Derivamos para obtener los valores críticos:

$$A'(x) = -6x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Como $A(0) = 0$, $A(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 6.158$ y $A(2) = 0$, en $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ se alcanza un máximo.

El área máxima del rectángulo es $\frac{32\sqrt{3}}{9} = 6.158$ con dimensiones $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ de base y $\frac{8}{3}$ de altura.

3.1.

a) Recta y plano son paralelos, basta calcular la distancia de un punto de la recta al plano. Tomando el punto $P(1, 0, 2)$ en r se obtiene

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}.$$

b) El plano $2x + z - 5 = 0$ pasa por A y es perpendicular a r . La proyección viene dada por la intersección de dicho plano con la recta r . Resolvemos $2(1 + 2\lambda) + 0(0) + (2 + \lambda) - 5 = 0$, obteniendo $\lambda = 1/5$. Así pues, el punto buscado es $P(7/5, 0, 11/5)$.

c) El plano $\pi' : x + 2y - 2z = -1$ pasa por A y es paralelo a π . Los puntos de corte con los ejes de π' son $(-1, 0, 0)$, $(0, -1/2, 0)$ y $(0, 0, 1/2)$. Luego el volumen pedido es:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{24}.$$

3.2.

a) Los puntos sobre S son $(x, y, z) = (\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ con $\lambda \in [0, 1]$. Sea P un punto de S , la distancia de P a A viene dada por $\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2}$ y la de P a B por $\sqrt{(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2}$, por tanto $\sqrt{3}\lambda^2 = 2\sqrt{3}(\lambda - 1)^2$. Luego $\lambda = 2$ o $\lambda = \frac{2}{3}$. Como $\lambda < 1$ el punto buscado es $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

b) El punto medio del segmento S es $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el vector normal del plano buscado es $\overrightarrow{BA} = (1, -1, 1)$ y el plano es: $x - y + z = \frac{1}{2}$.

4.

a) La probabilidad de que diez de los cuarenta trayectos lleguen con retraso superior a una hora es igual a $\binom{40}{10} \cdot 0.05^{10} \cdot 0.95^{30} = 1.78 \cdot 10^{-5}$ que no es menor que 10^{-6} . Por lo tanto, el usuario enfurecido no ha hecho bien los cálculos.

b) La variable aleatoria X ="número de trayectos en los que la compañía devolvió dinero en enero de 2025" sigue una distribución binomial de parámetros $p = 0.2$, $q = 0.8$ y $n = 6 \cdot 31 = 186$ que podemos aproximar por una normal $X' \approx N(37.2, 5.46)$. Tipificando $Z = \frac{X' - 37.2}{5.46}$, se tiene utilizando la corrección de Yates que

$$P(X \leq 31) \approx P(X' \leq 31.5) \approx P(Z \leq -1.04) = 1 - P(Z \leq 1.04) = 0.1492.$$
