

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN PAU JULIO 2025 MATEMÁTICAS II

Por la propia naturaleza de la disciplina, una misma cuestión admite múltiples soluciones correctas. Por supuesto, cualquier solución de cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, aunque no esté incluida en este documento.

El examen consta de un total de cuatro cuestiones con dos opciones (A y B) cada una. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Las cuatro cuestiones son:

Cuestión 1 (opciones 1A y 1B): Sentido numérico y algebraico (2,5 puntos cada una).

Cuestión 2 (opciones 2A y 2B): Sentido de la medida (2,5 puntos cada una).

Cuestión 3 (opciones 3A y 3B): Sentido espacial (2,5 puntos cada una).

Cuestión 4 (opciones 4A y 4B): Sentido estocástico (2,5 puntos una).

Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se pueden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 8 de julio de 2025.

Pedro Nicolás Zaragoza
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Didáctica de las CC. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia

Cuestión 1: Sentido numérico y algebraico (2,5 puntos cada una)**Opción 1A (2,5 p.):**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 2 \\ x + ky + 3z = 0 \end{cases}$$

- a) (1 p.) Discuta el sistema en función del parámetro k .
- b) (0,5 p.) Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.
- c) (1 p.) Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

Solución:

a) La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix},$$

que tiene por determinante

$$-k^2 + 3k - 2 = -(k - 1)(k - 2).$$

Así es que el sistema es **compatible determinado para $k \neq 1$ y $k \neq 2$** , porque en ese caso no se anula el determinante de A .

Para $k = 1$ tenemos que el rango de A es 2, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por otro lado, el rango de la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{array} \right)$$

es 3, porque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces, **para $k = 1$ el sistema es incompatible.**

Para $k = 2$ tenemos que el rango de A es 2, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Por otro lado, el rango de la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

no es 3, porque tiene las dos primeras filas son iguales, pero sí es 2, porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces, **para $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado.**

b) Para $k = 2$, el sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Si a la segunda ecuación le restamos la primera, tenemos

$$y + 2z = -1 \iff y = -1 - 2z.$$

Sustituyendo en la primera tenemos

$$x - 1 - 2z + z = 1 \iff x = 2 + z.$$

Entonces la solución podría ser

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2\lambda - 1 \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Mediante argumentos parecidos se podría llegar a las siguientes soluciones alternativas

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -2 + \lambda, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

c) Para $k \neq 1$ y $k \neq 2$ podemos usar el método de Cramer para encontrar la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix}}{-(k-1)(k-2)} = \frac{-k^2 + 2k}{-(k-1)(k-2)} = \frac{-k(k-2)}{-(k-1)(k-2)} = \frac{k}{k-1}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-(k-1)(k-2)} = \frac{k-2}{-(k-1)(k-2)} = \frac{-1}{k-1} = \frac{1}{1-k}.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix}}{-(k-1)(k-2)} = \frac{0}{-(k-1)(k-2)} = 0.$$

Así, en el caso $k \neq 2$ y $k \neq 1$ tenemos que

$$\begin{cases} x = \frac{k}{k-1} \\ y = \frac{1}{1-k} \\ z = 0. \end{cases}$$

Opción 1B (2,5 p.):

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

- a) **(0,75 p.)** Compruebe que $(A + I)^2 = 2A + I$, y que $(A + I)^3 = 3A + I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
- b) **(0,75 p.)** Compruebe que las matrices $I - A$ e $I + A$ son mutuamente inversas.
- c) **(1 p.)** Resuelva la ecuación matricial $X + AX = A$ expresando X en función de A .

Solución: a) Tenemos que

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I = O + 2A + I = 2A + I,$$

y

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I = O + 3O + 3A + I = 3A + I,$$

porque

$$A^3 = A^2 \cdot A = O \cdot A = O.$$

b) Tenemos que

$$(I + A) \cdot (I - A) = I^2 - A^2 = I - O = I.$$

Lo mismo puede hacerse con $(I - A) \cdot (I + A)$.

c) Tenemos que, usando (b),

$$\begin{aligned} X + AX &= A \iff (I + A) \cdot X = A \iff \\ (I - A) \cdot (I + A) \cdot X &= (I - A) \cdot A \iff \\ X &= (I - A) \cdot A = A - A^2 = A - O = A. \end{aligned}$$

Es decir, $X = A$.

Cuestión 2: sentido de la medida (2,5 puntos cada una)

Opción 2A (2,5 p.):

Calcule los siguientes límites:

a) (1 p.) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) (0,5 p.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$

c) (1 p.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

Solución: a) El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

da lugar a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Hacemos entonces lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)},$$

dando así lugar a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

b) El límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$$

da lugar a la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Hacemos entonces lo siguiente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2}}{\frac{9x^2+5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^4}}}{9 + \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}{9 + \frac{5}{x^2}} = \frac{0}{9} = 0.$$

c) El límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

da lugar a la indeterminación $\infty \cdot 0$. Considerando el cociente

$$x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

la transformamos en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Opción 2B (2,5 p.):

Considere la función $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$.

- a) **(1,5 p.)** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$.
- b) **(0,75 p.)** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.
- c) **(0,25 p.)** Compruebe, sin calcular su valor con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

Solución: a) Hacemos el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x)$, que nos lleva a $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3(x)dx &= \int t^3 \cdot \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \frac{(1+t^2)t - t}{1+t^2}dt = \\ &= \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \int tdt - \int \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2} \int 2tdt - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2}dt = \\ &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2(x)| + C \end{aligned}$$

b) La función $\operatorname{tg}(x)$ es no negativa en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, y lo mismo pasa con $f(x) = \operatorname{tg}^3(x)$. Entonces, el área pedida viene dada por la integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3(x)dx &= \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2(x)| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)| - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(0) - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2(0)| = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+1) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

c) Podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2} (\ln(e) - \ln(2)) = \frac{1}{2} (1 - \ln(2)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Cuestión 3: sentido espacial (2,5 puntos cada una)

Opción 3A (2,5 p.):

- a) (1,25 p.) Determine el valor de a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

- b) (1,25 p.) ¿Para qué valores de a y b corta r a π ? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

Solución: a) Para que el plano contenga a la recta, el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser ortogonales. El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, 1, a)$, y el vector director de la recta es el producto vectorial de los productos normales de los planos que la definen, es decir

$$\vec{d} = (1, 1, 1) \wedge (-1, -2, 1) = (3, -2, -1).$$

Ahora, el producto escalar

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = (2, 1, a) \cdot (3, -2, -1) = 6 - 2 - a = 4 - a$$

es 0 si, y solo si, $a = 4$. Así es que para $a = 4$ la recta es paralela al plano o incluso puede estar contenida en él. Para que esté contenida en él basta con saber que algún punto de r pertenece a π . Sumando las ecuaciones de los planos que definen r , es fácil ver que un punto genérico de la recta puede ser de la forma

$$P_{\lambda}(2 - 3\lambda, 2\lambda - 1, \lambda).$$

En particular, $P_0(2, -1, 0) \in r$, y este punto pertenecerá a π si, y solo si

$$b = 2x + y + az = 4 - 1 + 0 = 3.$$

Así pues, r está contenida en π precisamente cuando $a = 4$ y $b = 3$.

b) Ya hemos visto en (a) que para cualquier valor de b la recta corta al plano siempre y cuando $a \neq 4$. Ahora, si $a = 0$ y $b = 7$, tenemos

$$\pi : 2x + y = 7.$$

Un punto, $P_{\lambda}(2 - 3\lambda, 2\lambda - 1, \lambda)$, de r pertenecerá a π si se cumple

$$7 = 2x + y = 2(2 - 3\lambda) + 2\lambda - 1 = 4 - 6\lambda + 2\lambda - 1 = 3 - 4\lambda,$$

que, a su vez, se cumple si, y solo si, $4\lambda = -4$, es decir, $\lambda = -1$. De modo que el punto de corte es

$$P_{-1}(2 + 3, -2 - 1, -1) = (5, -3, -1).$$

Opción 3B (2,5 p.):

Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : x + y + 3z = 0$.

- a) (1 p.) Calcule la ecuación en forma continua de la recta, r , de la trayectoria que le lleve al punto más cercano de π .
- b) (0,75 p.) Halle dicho punto.
- c) (0,75 p.) Calcule la distancia que debe recorrer.

Solución: a) El punto más cercano es la proyección ortogonal de P en π , que es la intersección con π de la recta que pasa por P y tiene como vector director el vector normal a π :

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda(1, 1, 3) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 1 + 3\lambda).$$

Su ecuación en forma continua es

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

b) Para calcular la proyección ortogonal de P en π sustituimos

$$0 = 1 + \lambda + 2 + \lambda + 3(1 + 3\lambda) = 1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + 9\lambda = 6 + 11\lambda,$$

de modo que

$$\lambda = -\frac{6}{11},$$

y el punto es

$$Q \left(1 - \frac{6}{11}, 2 - \frac{6}{11}, 1 - 3 \cdot \frac{6}{11} \right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, -\frac{7}{11} \right).$$

c) Tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{6}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{18}{11} \right),$$

de modo que la distancia a recorrer es

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{6^2}{11^2} + \frac{6^2}{11^2} + \frac{18^2}{11^2}} = \sqrt{\frac{396}{11^2}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 11}{11^2}} = \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{11}}{11}.$$

Opción 4: sentido estocástico (2,5 puntos cada una)

Opción 4A (2,5 p.): En un cine hay tres salas. En la sala S_1 hay 240 espectadores, en la sala S_2 hay 180 y en la sala S_3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S_1 gusta al 40 % de los espectadores, la de la sala S_2 al 50 % y la de la sala S_3 al 90 %. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

- a) (1 p.) Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
- b) (0,5 p.) Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S_3 .
- c) (1 p.) Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S_3 si le ha gustado.

Solución:

Llamamos G al suceso “le ha gustado la película”, y llamamos S_i al suceso “ha estado en la sala S_i ”. En total hay $240+180+80=500$ espectadores. Así es que la probabilidad de haber estado en cada una de las salas es:

$$P(S_1) = \frac{240}{500} = \frac{12}{25}, \quad P(S_2) = \frac{180}{500} = \frac{9}{25} \quad \text{y} \quad P(S_3) = \frac{80}{500} = \frac{4}{25}.$$

Además, sabemos por el enunciado que

$$P(G | S_1) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}, \quad P(G | S_2) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(G | S_3) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}.$$

a) Usando el Teorema de la Probabilidad Total, hacemos:

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G | S_1) \cdot P(S_1) + P(G | S_2) \cdot P(S_2) + P(G | S_3) \cdot P(S_3) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{25} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{25} = \frac{4 \cdot 12 + 5 \cdot 9 + 9 \cdot 4}{10 \cdot 25} = \frac{129}{250} = 0,516. \end{aligned}$$

b) Por el enunciado ya sabemos que $P(G | S_3) = \frac{9}{10} = 0,9$.

c) Usando la fórmula de Bayes para la probabilidad *a posteriori* hacemos:

$$P(S_3 | G) = \frac{P(S_3 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G | S_3) \cdot P(S_3)}{P(G)} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{4}{25}}{\frac{129}{250}} = \frac{\frac{36}{250}}{\frac{129}{250}} = \frac{36}{129} \simeq 0,279.$$

Opción 4B (2,5 p.): Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95 % de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

- a) **(0,5 p.)** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
- b) **(0,75 p.)** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
- c) **(0,5 p.)** Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
- d) **(0,75 p.)** Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n = 280$ y $p = 0,95$, que denotamos por $B(280; 0,95)$. La media es $\mu = n \cdot p = 280 \cdot 0,95 = 266$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{266 \cdot 0,05} = \sqrt{13,3} \simeq 3,65$. Llamemos X a la variable aleatoria $B(280; 0,95)$ que estamos considerando.

Como n es grande y $n \cdot p = 266 > 5$ y $n \cdot (1 - p) = 14 > 5$, podemos utilizar la aproximación de De Moivre para aproximar X por una variable aleatoria normal $N(266; 3,65)$ a la que llamaremos Y . En nuestros cálculos también usaremos una variable aleatoria normal $N(0; 1)$ a la que llamaremos Z .

b) Para calcular $P(X > 260)$ hacemos:

$$P(260 < X) \simeq P(260,5 \leq Y) = P\left(\frac{260,5 - 266}{3,65} \leq Z\right) \simeq P(-1,51 \leq Z) = P(Z \leq 1,51) = 0,9345.$$

Hemos pasado de $P(260 < X)$ a $P(260,5 \leq Y)$ utilizando la corrección de Yates, y hemos usado que $P(-1,51 \leq Z) = P(Z \leq 1,51)$ por simetría de la distribución $N(0; 1)$.

c) Como se pregunta por la probabilidad del suceso opuesto al del apartado (b), basta hacer:

$$P(X \leq 260) = 1 - P(260 < X) = 1 - 0,9345 = 0,0655.$$

También se puede calcular como sigue:

$$P(X \leq 260) \simeq P(Y \leq 260,5) = P\left(Z \leq \frac{260,5 - 266}{3,65}\right) \simeq P(Z \leq -1,51) = P(Z \geq 1,51) = 1 - P(Z < 1,51) = 1 - P(Z \leq 1,51) = 1 - 0,9345 = 0,0655.$$

d) Para calcular $P(X = 260)$ hacemos:

$$\begin{aligned} P(X = 260) &\simeq P(260 - 0,5 \leq Y \leq 260 + 0,5) = P(259,5 \leq Y \leq 260,5) = \\ P(Y \leq 260,5) - P(Y \leq 259,5) &= P\left(Z \leq \frac{260,5 - 266}{3,65}\right) - P\left(Z \leq \frac{259,5 - 266}{3,65}\right) = \\ P(Z \leq -1,51) - P(Z \leq -1,78) &= P(Z \geq 1,51) - P(Z \geq 1,78) = \\ 1 - P(Z \leq 1,51) - [1 - P(Z < 1,78)] &= P(Z < 1,78) - P(Z \leq 1,51) = \\ P(Z \leq 1,78) - P(Z \leq 1,51) &= \\ 0,9625 - 0,9345 &= 0,028. \end{aligned}$$

Hemos pasado de $P(X = 260)$ a $P(260 - 0,5 \leq Y \leq 260 + 0,5)$ usando la corrección de Yates, y hemos utilizado que $P(-1,51 \leq Z) = P(Z \leq 1,51)$ y $P(Z \leq -1,78) = P(Z \geq 1,78)$ por simetría de la distribución $N(0; 1)$.