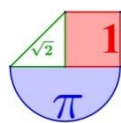


Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

PAU en Cataluña
Años 2017 a 2025



WWW.EBAUMATEMATICAS.COM

Introducción

Este cuaderno contiene los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II propuestos en las pruebas PAU de Cataluña desde el año 2017 al 2025. Los exámenes están resueltos por Juan Antonio Martínez García que ha sido profesor de matemáticas en distintos institutos de educación secundaria.

La web www.ebaumatematicas.com dispone de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II resueltos de otras comunidades autónomas de España, así como distintas formas de recopilar los ejercicios que aparecen en todas las pruebas, también existen unos apuntes de la materia.

PAU septiembre (serie 3) 2025	3
PAU junio (serie 1) 2025	14
PAU junio (serie 4) 2025	25
PAU septiembre (serie 3) 2024	37
PAU junio (serie 5) 2024	47
PAU junio (serie 1) 2024	57
PAU septiembre (serie 2) 2023	68
PAU junio (serie 5) 2023	78
PAU Junio (serie 1) 2023.....	89
PAU septiembre (serie 3) 2022	101
PAU junio (serie 5) 2022	112
PAU Junio (serie 2) 2022.....	122
PAU septiembre (serie 1) 2021	133
PAU junio (serie 5) 2021	143
PAU Junio (serie 2) 2021.....	155
PAU septiembre (serie 4) 2020	167
PAU julio (serie 3) 2020	176
PAU Julio (serie 1) 2020.....	188
PAU septiembre (serie 5) 2019	198
PAU junio (serie 4) 2019	209
PAU Junio (serie 1) 2019.....	219
PAU septiembre (serie 3) 2018	228
PAU junio (serie 5) 2018	239
PAU Junio (serie 1) 2018.....	250
PAU septiembre (serie 2) 2017	260
PAU junio (serie 5) 2017	269
PAU Junio (serie 1) 2017	280



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Un agricultor ha observado que, si se plantan 25 perales por hectárea, el rendimiento es de 370 peras por árbol. Además, también ha comprobado que la relación entre el número de peras por árbol y el número de perales por hectárea es lineal, por lo que, por cada árbol plantado de más por hectárea, el rendimiento disminuye en 10 peras por peral.

a) Llamamos x al número de perales de más que plantamos, adicionales a las 25 iniciales. Calcule la función de la producción total de peras por hectárea $P(x)$ en función de x .

[1 punto]

b) ¿Cuál es el número total de perales por hectárea a plantar para obtener el máximo de producción por hectárea? ¿Cuál es esa producción máxima? ¿A partir de cuántos perales por hectárea no se obtiene ninguna producción?

[1,5 puntos]

Ejercicio 2

Una marca de zapatos conocida puso a la venta uno de sus modelos más populares y vendió toda su producción en la temporada de verano. El precio de cada par de zapatos era de 90 €, pero algunos se vendieron al precio original, otros con un 20% de descuento y el resto con un 50% en la liquidación de final de temporada. En total se produjeron 820.000 pares de zapatos de este modelo, que proporcionaron unos ingresos de 63.837.000€. Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20% que al 50%.

Encuentre cuántos pares de zapatos se vendieron al precio original, cuántos con un 20% de descuento y cuántos al 50%.

[2,5 puntos]

Ejercicio 3

En un parque natural, los visitantes pueden acceder en coche, en bicicleta o a pie. Una vez dentro del parque, los visitantes pueden realizar una ruta guiada o bien visitarlo por su cuenta.

- a) Sabemos que el 60 % de los visitantes acceden en coche, el 15 % en bicicleta y el 25 % restante a pie. También sabemos que de los que llegan en coche el 80% hacen la ruta guiada, mientras que de los que llegan en bicicleta la hacen el 60% y de los que llegan a pie sólo la hacen el 30%.

Si escogemos a un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haga la ruta guiada? Si sabemos que ha realizado la ruta guiada, ¿cuál es la probabilidad de que haya accedido al parque en coche?

[12.5 puntos]

- b) Queremos realizar un estudio del tiempo que pasan de media los visitantes dentro del parque. Hemos preguntado a 100 visitantes cuánto rato han estado dentro del parque y hemos obtenido una media de 231 minutos con una desviación típica de 32 minutos. Construya un intervalo de confianza del 95% para el tiempo medio que pasan los visitantes dentro del parque.

[12.5 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Ejercicio 4

Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000€ y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000€.

	Coches eléctricos	Coches de motor de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de 1€ para los vehículos eléctricos y de 6€ para los de motor de combustión.

El 2% de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1% de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez se hayan vendido todos los coches. Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de motor de combustión si sabemos que ha salido defectuoso?

[1.5 puntos]

b) Es más caro comprar un coche eléctrico, pero tiene menos gastos por kilómetros recorridos que uno de combustión. Determine la función que representa el gasto acumulado, entre la compra y los kilómetros recorridos, para cada tipo de vehículo en función del número de kilómetros recorridos, x . Si un conductor recorre 20.000 km al año, ¿a partir de cuántos años le saldrá más a cuenta el coche eléctrico que el de combustión?

[1 punto]

OPCIÓN B

a) Ha habido un error en el recuento de vehículos eléctricos de la L2. El valor 30 de la tabla del enunciado es erróneo, pero sabemos que, si se vendieran todos los vehículos de la L2, los ingresos de esta línea serían de 3.720.000€. ¿Cuántos coches eléctricos existen realmente en la L2? Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la L2, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor eléctrico, si sabemos que ha salido defectuoso?

[1.5 puntos]

b) Si sabemos que el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos de un vehículo de combustión es de 36.000 €, ¿cuántos kilómetros ha recorrido? ¿Qué gasto acumulado tendría un vehículo eléctrico que hubiera recorrido ese mismo número de kilómetros?

[1 punto]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Un agricultor ha observado que, si se plantan 25 perales por hectárea, el rendimiento es de 370 peras por árbol. Además, también ha comprobado que la relación entre el número de peras por árbol y el número de perales por hectárea es lineal, por lo que, por cada árbol plantado de más por hectárea, el rendimiento disminuye en 10 peras por peral.

a) Llamamos x al número de perales de más que plantamos, adicionales a las 25 iniciales. Calcule la función de la producción total de peras por hectárea $P(x)$ en función de x .

[1 punto]

b) ¿Cuál es el número total de perales por hectárea a plantar para obtener el máximo de producción por hectárea? ¿Cuál es esa producción máxima? ¿A partir de cuántos perales por hectárea no se obtiene ninguna producción?

[1,5 puntos]

a) Con 25 perales por hectárea el rendimiento es de 370 peras por árbol.

Con $25 + 1$ perales por hectárea el rendimiento es de $370 - 10$ peras por árbol.

Con $25 + x$ perales por hectárea el rendimiento es de $370 - 10x$ peras por árbol.

La producción por hectárea de peras es $P(x) = (25 + x)(370 - 10x)$.

$$P(x) = (25 + x)(370 - 10x) = 9250 - 250x + 370x - 10x^2 = -10x^2 + 120x + 9250$$

b) Averiguamos cuando la producción $P(x) = -10x^2 + 120x + 9250$ alcanza un máximo.

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) = -20x + 120 \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -20x + 120 = 0 \Rightarrow -20x = -120 \Rightarrow \boxed{x = \frac{120}{20} = 6}$$

Obtenemos el signo de la segunda derivada para el punto crítico obtenido $x = 6$.

$$P'(x) = -20x + 120 \Rightarrow P''(x) = -20 \Rightarrow P''(6) = -20 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la producción tiene un máximo para $x = 6$.

El número total de perales a sembrar para obtener una máxima producción es de $25 + 6 = 31$ perales por hectárea.

Para este valor la producción es de $P(6) = (25 + 6)(370 - 60) = 9610$ peras por hectárea.

Resolvemos la igualdad $P(x) = 0$ para averiguar cuando la producción es nula.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = (25 + x)(370 - 10x) \\ P(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (25 + x)(370 - 10x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 25 + x = 0 \rightarrow \boxed{x = -25} \\ 370 - 10x = 0 \rightarrow \boxed{x = 37} \end{cases}$$

Interpretamos el valor negativo obtenido como no plantar ningún peral por hectárea.

Plantando 37 perales más por hectárea la producción también es nula. Esto significa plantar $25 + 37 = 62$ perales por hectárea.

Ejercicio 2

Una marca de zapatos conocida puso a la venta uno de sus modelos más populares y vendió toda su producción en la temporada de verano. El precio de cada par de zapatos era de 90 €, pero algunos se vendieron al precio original, otros con un 20% de descuento y el resto con un 50% en la liquidación de final de temporada. En total se produjeron 820.000 pares de zapatos de este modelo, que proporcionaron unos ingresos de 63.837.000€. Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20% que al 50%.

Encuentre cuántos pares de zapatos se vendieron al precio original, cuántos con un 20% de descuento y cuántos al 50%.

[2,5 puntos]

Llamamos “x” al número de zapatos vendidos a 90 €, “y” al número de zapatos vendidos con un 20% de descuento, es decir, a $0.8 \cdot 90 = 72$ €, y por último, “z” al número de zapatos vendidos con un 50 % de descuento, es decir, a 45 €.

“En total se produjeron 820.000 pares de zapatos” $\rightarrow x + y + z = 820000$.

“proporcionaron unos ingresos de 63.837.000€” $\rightarrow 90x + 72y + 45z = 63837000$.

“Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20% que al 50%” $\rightarrow y = 2z$.

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 820000 \\ 90x + 72y + 45z = 63837000 \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 820000 \\ 90x + 72 \cdot 2z + 45z = 63837000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 820000 \\ 90x + 144z + 45z = 63837000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 820000 - 3z \\ 90x + 189z = 63837000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90(820000 - 3z) + 189z = 63837000 \Rightarrow 73800000 + 270z + 189z = 63837000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 459z = 56457000 \Rightarrow \boxed{z = \frac{56457000}{459} = 123000} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 820000 - 3 \cdot 123000 = 451000} \\ \boxed{y = 2 \cdot 123000 = 246000} \end{cases}$$

Se vendieron 451000 pares de zapatos a 90 €, 246000 con un descuento del 20% y 123000 con un descuento del 50%.

Ejercicio 3

En un parque natural, los visitantes pueden acceder en coche, en bicicleta o a pie. Una vez dentro del parque, los visitantes pueden realizar una ruta guiada o bien visitarlo por su cuenta.

a) Sabemos que el 60 % de los visitantes acceden en coche, el 15 % en bicicleta y el 25 % restante a pie. También sabemos que de los que llegan en coche el 80% hacen la ruta guiada, mientras que de los que llegan en bicicleta la hacen el 60% y de los que llegan a pie sólo la hacen el 30%.

Si escogemos a un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haga la ruta guiada? Si sabemos que ha realizado la ruta guiada, ¿cuál es la probabilidad de que haya accedido al parque en coche?

[12.5 puntos]

b) Queremos realizar un estudio del tiempo que pasan de media los visitantes dentro del parque. Hemos preguntado a 100 visitantes cuánto rato han estado dentro del parque y hemos obtenido una media de 231 minutos con una desviación típica de 32 minutos. Construya un intervalo de confianza del 95% para el tiempo medio que pasan los visitantes dentro del parque.

[12.5 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

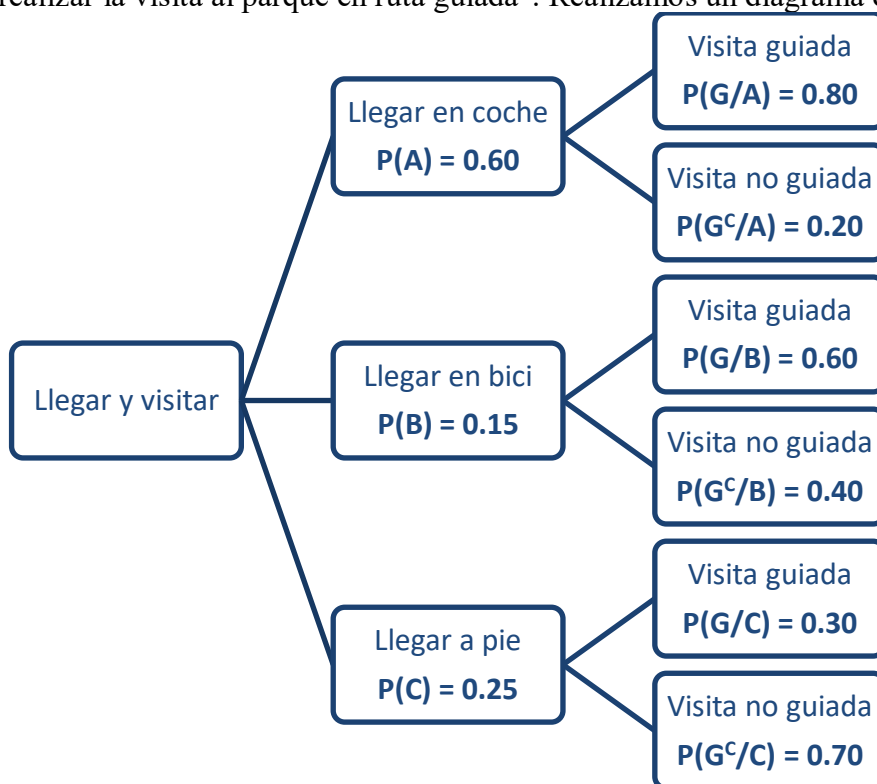
• $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

• Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

a) Llamamos A a “llegar al parque en coche”, B a “llegar al parque en bicicleta”, C a “llegar al parque a pie” y G a “realizar la visita al parque en ruta guiada”. Realizamos un diagrama de árbol.



Debemos calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.8 + 0.15 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.3 = \boxed{0.645}$$

La probabilidad de que un visitante elegido al azar haga la ruta guiada es de 0.645.

También nos piden calcular $P(A/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P(G/A)}{P(G)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.645} = \boxed{\frac{32}{43} \approx 0.7442}$$

La probabilidad de que un visitante que ha realizado una visita guiada haya llegado al parque en coche es de 0.7442.

- b) El tamaño de la muestra es $n = 100$. La estimación puntual de la media y la desviación típica en la muestra han sido $\bar{x} = 231$ minutos y $s = 32$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$, por lo que $z_\gamma = 1.96$.

Cuando el tamaño de la muestra es grande, el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ se obtiene a partir de la fórmula $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

Determinamos el intervalo de confianza.

$$z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{32}{\sqrt{100}} = 6.272$$

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = [231 - 6.272, 231 + 6.272] = [224.728, 237.272]$$

El intervalo de confianza pedido es $[224.728, 237.272]$ minutos. Es decir, con una confianza del 95% sabemos que la media de tiempo que pasan los visitantes al parque natural está entre 224,728 y 237,272 minutos.

Ejercicio 4

Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000€ y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000€.

	Coches eléctricos	Coches de motor de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de 1€ para los vehículos eléctricos y de 6€ para los de motor de combustión.

El 2% de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1% de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez se hayan vendido todos los coches. Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor de combustión si sabemos que ha salido defectuoso?

[1.5 puntos]

b) Es más caro comprar un coche eléctrico, pero tiene menos gastos por kilómetros recorridos que uno de combustión. Determine la función que representa el gasto acumulado, entre la compra y los kilómetros recorridos, para cada tipo de vehículo en función del número de kilómetros recorridos, x . Si un conductor recorre 20.000 km al año, ¿a partir de cuántos años le saldrá más a cuenta el coche eléctrico que el de combustión?

[1 punto]

a) Colocamos en una matriz 3×2 el número de coches de cada tipo en cada línea de producción.

$$\begin{array}{c}
 \text{Eléctrico} \quad \text{Combustión} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 A = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow L1 \\ \rightarrow L2 \\ \rightarrow L3 \end{array}
 \end{array}$$

Colocamos en una matriz 2×1 el precio de cada tipo de coche.

$$B = \begin{pmatrix} 40000 \\ 30000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Eléctrico} \\ \rightarrow \text{Combustión} \end{array}$$

Obtenemos los ingresos en cada línea de fabricación realizando el producto matricial $A \cdot B$.

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 40000 + 80 \cdot 30000 \\ 30 \cdot 40000 + 100 \cdot 30000 \\ 40 \cdot 40000 + 110 \cdot 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.200.000 \\ 4.200.000 \\ 4.900.000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow L1 \\ \rightarrow L2 \\ \rightarrow L3 \end{array}$$

Obtenemos que la línea 1 generará unos ingresos de 3.200.000 €, la línea 2 generará unos ingresos de 4.200.000 € y la línea 3 unos ingresos de 4.900.000 €.

- b) Consideramos los sucesos: C = el vehículo es de motor de combustión, C^c = el vehículo es eléctrico y D = el vehículo es defectuoso.

	Coches eléctricos	Coches de motor de combustión	
L1	20	80	100
L2	30	100	130
L3	40	110	150
TOTALES	90	290	380

En la fábrica de un total de 380 coches hay 90 coches eléctricos y 290 coches de motor de combustión.

Por tanto, si escogemos un coche al azar sabemos que $P(C) = \frac{290}{380}$; $P(C^c) = \frac{90}{380}$.

También sabemos que $P(D|C^c) = 0,01$ y $P(D|C) = 0,02$.

Nos piden la probabilidad $P(C|D)$. Utilizamos la fórmula de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(C)P(D/C) + P(C^c)P(D/C^c)} =$$

$$= \frac{\frac{29}{38} \cdot 0.02}{\frac{29}{38} \cdot 0.02 + \frac{9}{38} \cdot 0.01} = \boxed{\frac{58}{67} \approx 0.8657}$$

- b) La función que representa el gasto acumulado después de cada x km recorridos por cada tipo de vehículo viene dada por el gasto de compra más el gasto por los kilómetros recorridos. Para los vehículos eléctricos, el precio de venta asciende a 40.000 euros y 1 euro por cada 100 km recorridos. Por tanto, la función que da el gasto en euros en función de los kilómetros recorridos será:

$$G_e(x) = 40000 + \frac{1}{100}x$$

Para los vehículos con motor de combustión, el precio de venta asciende a 30.000 euros y 6 euros por cada 100 km recorridos. Mientras que para los vehículos de combustión esta función será:

$$G_c(x) = 30000 + \frac{6}{100}x$$

Inicialmente sale más caro el vehículo eléctrico. Igualamos los gastos por encontrar a partir de cuántos kilómetros saldrá más económico el vehículo eléctrico.

$$G_e(x) = G_c(x) \Rightarrow 40000 + \frac{1}{100}x = 30000 + \frac{6}{100}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10000 = \frac{5}{100}x \Rightarrow 10000 = \frac{1}{20}x \Rightarrow \boxed{x = 200000}$$

A los 200.000 Km. los gastos serán iguales. A partir de 200.000 km es más rentable el coche eléctrico. Como cada año un coche recorre 20 000 km, podemos afirmar que a partir de los 10 años será más económico el vehículo eléctrico.

Ejercicio 4

Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000€ y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000€.

	Coches eléctricos	Coches de motor de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de 1€ para los vehículos eléctricos y de 6€ para los de motor de combustión.

El 2% de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1% de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

OPCIÓN B

a) Ha habido un error en el recuento de vehículos eléctricos de la L2. El valor 30 de la tabla del enunciado es erróneo, pero sabemos que, si se vendieran todos los vehículos de la L2, los ingresos de esta línea serían de 3.720.000€. ¿Cuántos coches eléctricos existen realmente en la L2? Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la L2, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor eléctrico, si sabemos que ha salido defectuoso?

[1.5 puntos]

b) Si sabemos que el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos de un vehículo de combustión es de 36.000 €, ¿cuántos kilómetros ha recorrido? ¿Qué gasto acumulado tendría un vehículo eléctrico que hubiera recorrido ese mismo número de kilómetros?

[1 punto]

a) Si llamamos “e” a los vehículos eléctricos de la línea L2, por los datos proporcionados tenemos que $40000e + 100 \cdot 30000 = 3720000$. Obtenemos el valor de “e”.

$$40000e + 100 \cdot 30000 = 3720000 \Rightarrow 40000e + 3000000 = 3720000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40000e = 720000 \Rightarrow e = \frac{720000}{40000} = 18$$

En la línea L2 hay 18 vehículos eléctricos.

Llamamos C a “ser un vehículo de combustión” y D a “el vehículo es defectuoso”.

Si escogemos un coche de la línea L2 sabemos que $P(C) = \frac{100}{100+18} = \frac{50}{59}$ y

$$P(C^c) = \frac{18}{100+18} = \frac{9}{59}.$$

También sabemos que $P(D|C^c) = 0,01$ y $P(D|C) = 0,02$.

Nos piden la probabilidad $P(C^c / D)$. Utilizamos la fórmula de Bayes.

$$P(C^c / D) = \frac{P(C^c \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C^c)P(D / C^c)}{P(C)P(D / C) + P(C^c)P(D / C^c)} =$$

$$= \frac{\frac{9}{59} \cdot 0.01}{\frac{50}{59} \cdot 0.02 + \frac{9}{59} \cdot 0.01} = \boxed{\frac{9}{109} \approx 0.0826}$$

- b) De los 36000 € se han gastado 30000 € en la compra del vehículo, por lo que debemos gastar 6000 € en mantenimiento que cuesta a 6 € cada 100 kilómetros, por lo que podemos recorrer $1000 \cdot 100 = 100\,000$ kilómetros.

Con un coche eléctrico cuesta 1 € recorrer 100 kilómetros, por lo que recorrer 100 000 kilómetros nos cuesta 1000 € que sumado al precio de compra resulta $40\,000 + 1000 = 41\,000$ euros.

Con un coche eléctrico recorrer la misma distancia nos cuesta 41 000 €.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2025

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Queremos alojar a 10 personas en un hotel que tiene habitaciones individuales, dobles y triples. Sabemos que si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles, debemos pagar 702 €, y si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples.

- Determine los precios de la habitación doble y de la triple en función del precio de la individual.
[1,25 puntos]
- Si el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual, ¿cuál es el precio de cada tipo de habitación? De las tres opciones planteadas para alojar a las 10 personas, ¿con cuál obtenemos el precio más bajo y cuál es ese precio?
[1,25 puntos]

Ejercicio 2

Un inversor tiene un dinero invertido en un fondo de inversión muy volátil. El valor de su inversión en euros durante un día determinado es dado por la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250,$$

donde $x \in [0, 24]$ representa el tiempo en horas.

- Calcule el valor inicial de la inversión al empezar el día y determine qué beneficio o pérdida habrá tenido al cabo de 24 horas. Encuentre también a qué hora del día el valor de la inversión ha sido máximo y cuál era ese valor máximo.
[1,5 puntos]
- ¿Hay algún momento del día en el que el valor de la inversión es negativo?
[1 punto]

Ejercicio 3

Hace unos años una granja de vacas frisonas dedicada a la producción de leche realizó un estudio sobre el peso de sus vacas y llegó a la conclusión de que esta variable seguía una distribución normal con una media de 580 kg y una desviación típica de 25 kg.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
 - para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
 - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 - para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

a) Calcule, de forma razonada, la probabilidad de que si tomamos al azar una vaca frisona de esta granja, su peso esté entre 531 y 629 kg.

[1 punto]

b) Creemos que un cambio en el tipo de forraje que se da a las vacas ha modificado la media del peso. Para comprobarlo, hemos obtenido el peso de una muestra de 10 vacas de la granja escogidas al azar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media del peso de las vacas, suponiendo que este peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 kg. ¿A partir del resultado obtenido, podemos afirmar que la media del peso de las vacas ha cambiado? Justifique la respuesta.

[1.5 puntos]

Ejercicio 4

En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.

A estas alturas, un 10% de los docentes inscritos son de universidad, un 50% son de secundaria y el resto son de infantil y primaria. Por otra parte, un 40% de los docentes inscritos de universidad, un 52% de los docentes inscritos de secundaria y un 65% de los docentes inscritos de infantil y primaria son mujeres.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Calcule la probabilidad de que una persona escogida al azar de entre todos los inscritos sea una mujer. Si entre todas las mujeres inscritas escogemos una al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea docente de secundaria?

[1.25 puntos]

- b) Calcule el número de docentes que se han inscrito en el Congreso de cada nivel educativo si sabemos que en total hay 476 mujeres inscritas.

[1.25 puntos]

OPCIÓN B

- a) La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo D1 para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo D2 para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo D3 para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos E1, E2 y E3. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos D1, D2 y D3 (filas) según las empresas E1, E2 y E3 (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z) , en el que x representa la cantidad de detalles de tipo D1, y es la cantidad de detalles de tipo D2 y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo D3 a comprar.

La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.

Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.

[1.25 puntos]

- b) Un hotel situado cerca del espacio donde se celebrará el Congreso ha realizado un estudio de mercado. Inicialmente se planteaban ofrecer la habitación doble a un precio de 80€ la noche y con ese precio estimaban que tendrían 100 reservas de habitaciones dobles. Pero el estudio muestra que la relación entre el precio de la habitación doble y el número de reservas es lineal, por lo que por cada euro de descuento sobre el precio de la habitación consiguen dos reservas más. Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento de un euro, escriba la función que da los ingresos del hotel en función de x . ¿Cuál debe ser el precio de la habitación doble para maximizar los ingresos?

[1.25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Queremos alojar a 10 personas en un hotel que tiene habitaciones individuales, dobles y triples. Sabemos que si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles, debemos pagar 702 €, y si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples.

- a) Determine los precios de la habitación doble y de la triple en función del precio de la individual. [1,25 puntos]
- b) Si el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual, ¿cuál es el precio de cada tipo de habitación? De las tres opciones planteadas para alojar a las 10 personas, ¿con cuál obtenemos el precio más bajo y cuál es ese precio? [1,25 puntos]

- a) Llamamos “x” al precio de la habitación individual, “y” al precio de la habitación doble y “z” al precio de la habitación triple.

“si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles cuesta 702 €” $\rightarrow 6x + 2y = 702$.

“si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples” $\rightarrow x + 3z = 2y + 2z$.

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y = 702 \\ x + 3z = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y = 351 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 351 - 3x \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2(351 - 3x) + z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 702 + 6x + z = 0 \Rightarrow z = 702 - 7x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = 351 - 3x \\ z = 702 - 7x \end{cases}}$$

El precio de la habitación doble es 351 € menos el triple del precio de la habitación individual. El precio de la habitación triple es 702 € menos 7 veces el precio de la habitación individual.

- b) Tenemos una nueva ecuación que añadimos al sistema obtenido en el apartado anterior.

“el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual” $\rightarrow z = 2x$.

Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y = 702 \\ x + 3z = 2y + 2z \\ z = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 351 - 3x \\ z = 702 - 7x \\ z = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 351 - 3x \\ 702 - 7x = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 351 - 3x \\ 702 = 9x \rightarrow x = \frac{702}{9} = 78 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = 351 - 3 \cdot 78 = 117 \\ z = 2 \cdot 78 = 156 \end{cases}}$$

La habitación individual cuesta 78 €, la doble 117 € y la triple 156 €.

Para decidir la opción más barata calculamos el precio de cada opción.

6 habitaciones individuales y 2 dobles cuestan 702 €.

1 individual y 3 triples cuestan $78 + 3 \cdot 156 = 546$ €

2 dobles y 2 triples cuestan $2 \cdot 117 + 2 \cdot 156 = 546$ €

Las opciones más económicas son las dos últimas que cuestan lo mismo 546 €.

Lo más económico es reservar “1 individual + 3 triples” o bien “2 dobles + 2 triples”.

Ejercicio 2

Un inversor tiene un dinero invertido en un fondo de inversión muy volátil. El valor de su inversión en euros durante un día determinado es dado por la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250,$$

donde $x \in [0, 24]$ representa el tiempo en horas.

a) Calcule el valor inicial de la inversión al empezar el día y determine qué beneficio o pérdida habrá tenido al cabo de 24 horas. Encuentre también a qué hora del día el valor de la inversión ha sido máximo y cuál era ese valor máximo. [1,5 puntos]

b) ¿Hay algún momento del día en el que el valor de la inversión es negativo? [1 punto]

a) Como $f(0) = \frac{0^3}{3} - \frac{35 \cdot 0^2}{2} + 300 \cdot 0 + 250 = 250$ el valor inicial de la inversión es 250 €. Al acabar el día el valor de su inversión es $f(24) = \frac{24^3}{3} - \frac{35 \cdot 24^2}{2} + 300 \cdot 24 + 250 = 1978$ €. Ha tenido un beneficio de $1978 - 250 = 1528$ €. Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{70x}{2} + 300 = x^2 - 35x + 300$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 35x + 300 = 0 \Rightarrow x = \frac{35 \pm \sqrt{(-35)^2 - 4 \cdot 300}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{35+5}{2} = 20 = x \\ \frac{35-5}{2} = 15 = x \end{cases}$$

Calculamos el valor de la inversión a las 15 y a las 20 horas y lo comparamos con el valor inicial y final.

$$f(0) = 250 \text{ Mínimo}$$

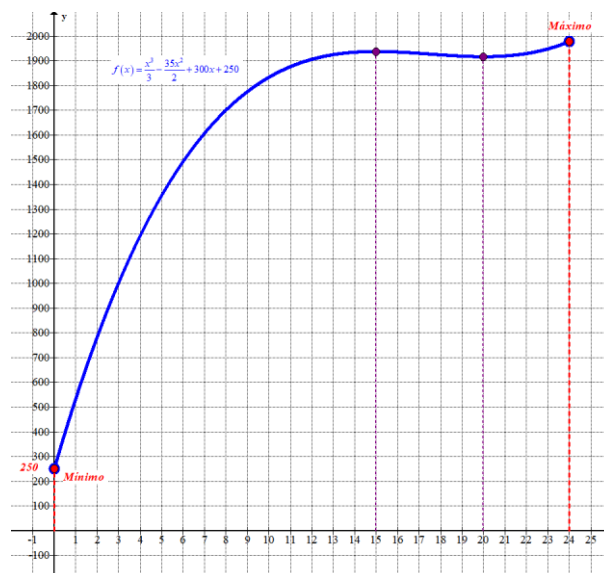
$$f(15) = \frac{15^3}{3} - \frac{35 \cdot 15^2}{2} + 300 \cdot 15 + 250 = 1937.5$$

$$f(20) = \frac{20^3}{3} - \frac{35 \cdot 20^2}{2} + 300 \cdot 20 + 250 = 1916.66$$

$$f(24) = 1978 \text{ Máximo}$$

Al acabar el día se alcanza el valor máximo de 1978 €.

b) Nunca se alcanza un valor negativo de la inversión pues el valor mínimo es de 250 € al comenzar el día. El valor de la inversión a lo largo del día permanece entre 250 € y 1978 €.



Ejercicio 3

Hace unos años una granja de vacas frisonas dedicada a la producción de leche realizó un estudio sobre el peso de sus vacas y llegó a la conclusión de que esta variable seguía una distribución normal con una media de 580 kg y una desviación típica de 25 kg.

a) Calcule, de forma razonada, la probabilidad de que si tomamos al azar una vaca frisona de esta granja, su peso esté entre 531 y 629 kg.

[1 punto]

b) Creemos que un cambio en el tipo de forraje que se da a las vacas ha modificado la media del peso. Para comprobarlo, hemos obtenido el peso de una muestra de 10 vacas de la granja escogidas al azar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media del peso de las vacas, suponiendo que este peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 kg. ¿A partir del resultado obtenido, podemos afirmar que la media del peso de las vacas ha cambiado? Justifique la respuesta.

[1.5 puntos]

Sea X = el peso de las vacas de una granja. $X = N(580, 25)$

a) Nos piden calcular $P(531 \leq X \leq 629)$.

$$P(531 \leq X \leq 629) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{531-580}{25} \leq Z \leq \frac{629-580}{25}\right) =$$

$$= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq -1.96) = P(Z \leq 1.96) - P(Z \geq 1.96) =$$

$$= P(Z \leq 1.96) - [1 - P(Z \leq 1.96)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.975 - (1 - 0.975) = \boxed{0.95}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

b) El tamaño muestral es $n = 10$.

La media muestral es $\frac{569 + 575 + 611 + 581 + 583 + 614 + 589 + 555 + 566 + 571}{10} = 581.4$ kg.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Calculamos el error.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{25}{\sqrt{10}} \approx 15,5 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left[\bar{x} - z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [581,4 - 15,5, 581,4 + 15,5] = [565,9, 596,9]$$

La media dada al principio era de 580 kg que pertenece al intervalo de confianza. Por tanto, podemos decir que no ha cambiado la media del peso de las vacas. De hecho, la diferencia con la media muestral es de solo 1,4 kg.

Ejercicio 4

En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.

A estas alturas, un 10% de los docentes inscritos son de universidad, un 50% son de secundaria y el resto son de infantil y primaria. Por otra parte, un 40% de los docentes inscritos de universidad, un 52% de los docentes inscritos de secundaria y un 65% de los docentes inscritos de infantil y primaria son mujeres.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

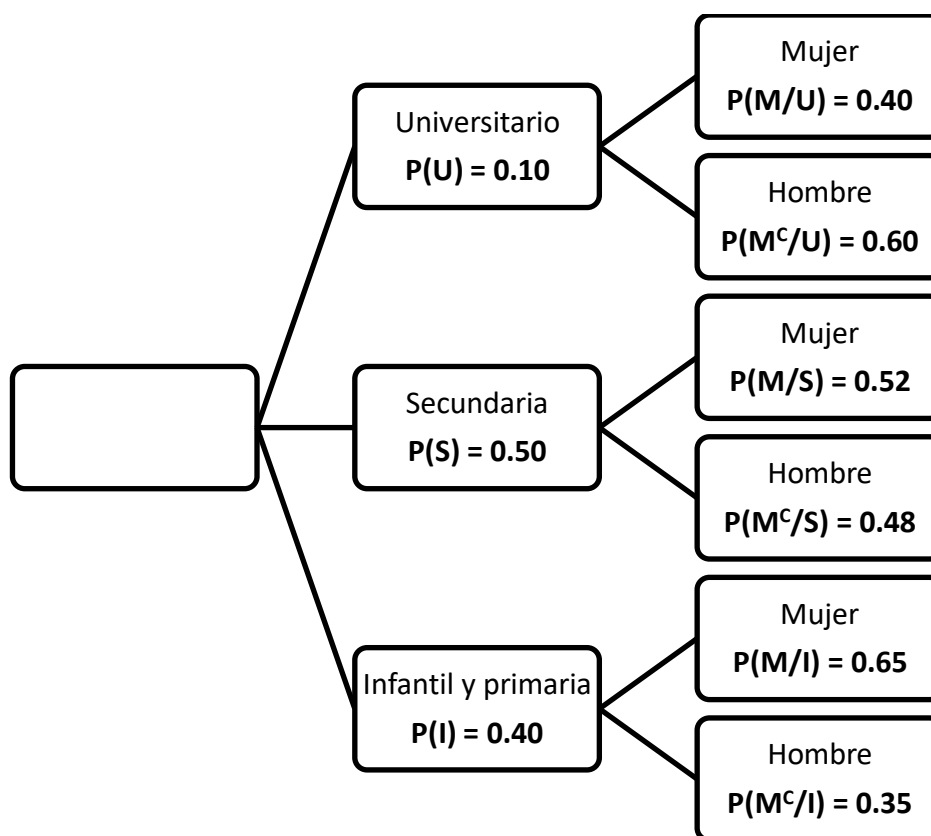
- a) Calcule la probabilidad de que una persona escogida al azar de entre todos los inscritos sea una mujer. Si entre todas las mujeres inscritas escogemos una al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea docente de secundaria?

[1.25 puntos]

- b) Calcule el número de docentes que se han inscrito en el Congreso de cada nivel educativo si sabemos que en total hay 476 mujeres inscritas.

[1.25 puntos]

- a) Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(U)P(M/U) + P(S)P(M/S) + P(I)P(M/I) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.52 + 0.4 \cdot 0.65 = \boxed{0.56}$$

También nos piden calcular $P(S/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{P(S)P(M/S)}{P(M)} = \frac{0.5 \cdot 0.52}{0.56} = \boxed{\frac{13}{28} \approx 0.4643}$$

- b) La probabilidad de que al elegir un docente asistente al congreso este sea mujer es de 0.56. Esto se corresponde con un 56% de los asistentes. Hacemos una regla de tres y obtenemos cuantos asistentes hay al congreso viendo lo que representa el 100%.

$$\left. \begin{array}{l} 56\% \longrightarrow 476 \text{ mujeres} \\ 100\% \longrightarrow x \text{ asistentes} \end{array} \right\} \Rightarrow 56x = 476 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{47600}{56} = 850 \text{ asistentes.}$$

El número total de asistentes es de 850 docentes. Como un 10% son universitarios, esto representa $0.10 \cdot 850 = 85$ docentes universitarios. Un 50% son docentes de secundaria, esto representa $0.5 \cdot 850 = 425$ docentes de secundaria. El resto son de infantil y primaria, es decir, $850 - 85 - 425 = 340$ son docentes de infantil y primaria.

OPCIÓN B

- a) La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo D1 para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo D2 para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo D3 para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos E1, E2 y E3. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos D1, D2 y D3 (filas) según las empresas E1, E2 y E3 (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z) , en el que x representa la cantidad de detalles de tipo D1, y es la cantidad de detalles de tipo D2 y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo D3 a comprar.

La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.

Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.

[1.25 puntos]

- b) Un hotel situado cerca del espacio donde se celebrará el Congreso ha realizado un estudio de mercado. Inicialmente se planteaban ofrecer la habitación doble a un precio de 80€ la noche y con ese precio estimaban que tendrían 100 reservas de habitaciones dobles. Pero el estudio muestra que la relación entre el precio de la habitación doble y el número de reservas es lineal, por lo que por cada euro de descuento sobre el precio de la habitación consiguen dos reservas más. Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento de un euro, escriba la función que da los ingresos del hotel en función de x . ¿Cuál debe ser el precio de la habitación doble para maximizar los ingresos?

[1.25 puntos]

- a) Como los porcentajes son el 10 % de docentes universitarios serían $0,10 \cdot 1000 = 100$ docentes universitarios, el 50 % de docentes de secundaria, significa $0,5 \cdot 1000 = 500$ docentes de secundaria y el resto $1000 - 100 - 500 = 400$ docentes de infantil y primaria.

La matriz fila que representa el pedido es $(100 \ 500 \ 400)$.

Calculamos el coste del pedido para cada uno de los proveedores.

$$\begin{array}{cccccc} D1 & D2 & D3 & E1 & E2 & E3 & & E1 & & E2 & & E3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (100 & 500 & 400) \begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow D1 \\ \rightarrow D2 \\ \rightarrow D3 \end{matrix} & = & (125 + 375 + 400 & 100 + 500 + 340 & 125 + 575 + 320) = \end{array}$$

$$1 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 1 \times 3$$

$$\begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \\ = (900 & 940 & 1020) \end{array}$$

El mejor precio lo ofrece la empresa E1, siendo el precio de 900 €.

- b) Con 0 descuentos tenemos 100 reservas que a 80 € cada una representa unos ingresos de 8000 €.

Con 1 € de descuento tenemos $100 + 2$ reservas que a $80 - 1$ € representan unos ingresos de:

$$x = 1 \Rightarrow I(1) = (100 + 2 \cdot 1) \cdot (80 - 1) = 8058$$

Con 2 € de descuento tenemos $100 + 2 \cdot 2$ reservas que a $80 - 2$ € representan unos ingresos de:

$$x = 2 \Rightarrow I(2) = (100 + 2 \cdot 2) \cdot (80 - 2) = 8112$$

Con x € de descuento tenemos $100 + 2x$ reservas que a $80 - x$ € representan unos ingresos de:

$$I(x) = (100 + 2x)(80 - x) = 8000 - 100x + 160x - 2x^2 = -2x^2 + 60x + 8000$$

Hallamos los puntos críticos de la función ingresos.

$$I(x) = -2x^2 + 60x + 8000 \Rightarrow I'(x) = -4x + 60$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 60 = 0 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{4} = 15$$

En $x = 15$ la función tiene un punto crítico. Sustituimos este valor en la derivada segunda y comprobamos si es un máximo de la función ingresos.

$$I'(x) = -4x + 60 \Rightarrow I''(x) = -4 \Rightarrow I''(15) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función ingresos presenta un máximo relativo para $x = 15$. Para este valor los ingresos son $I(15) = (100 + 2 \cdot 15)(80 - 15) = 8450$ €, siendo el precio de la habitación doble que hacen máximos los ingresos de $80 - 15 = 65$ €.



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar la página en blanco del final del cuaderno para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

Una tienda online tenía a la venta tres tipos de productos, que llamaremos A, B y C. Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €. En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta. Dos semanas después, empezaron las segundas rebajas y la tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información del problema.

[0,75 puntos]

b) Calcule el precio de cada artículo antes de las vacaciones de Navidad.

[1,75 puntos]

Ejercicio 2

Una empresa fabrica bicicletas convencionales y eléctricas. El responsable de calidad de la empresa ha mirado el historial de ventas y ha calculado que el 5% de las bicicletas convencionales habían tenido algún tipo de problema que había requerido una revisión posventa. En el caso de las bicicletas eléctricas, este porcentaje era del 15%. Actualmente, el 25% de la producción es de bicicletas convencionales y el 75%, de bicicletas eléctricas.

a) Si escogemos una bicicleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún tipo de problema que requiera una revisión postventa? Si la bicicleta escogida al azar presenta algún tipo de problema que requiera una revisión postventa, ¿cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?

[1,25 puntos]

- b) El responsable de calidad cree que el dato según el cual un 15% de bicicletas eléctricas tienen algún problema que requiere el servicio posventa ha quedado desfasada. Considera que actualmente tanto la tecnología como los controles de calidad previos han mejorado mucho y esta proporción ha disminuido. Para comprobarlo, toma una muestra de 100 bicicletas eléctricas que ha vendido en los últimos meses y observa que sólo 8 han requerido una revisión postventa. A partir de estos datos, encuentra un intervalo de confianza del 95% para la proporción de bicicletas eléctricas que tienen algún problema y requieren una revisión postventa. A partir del resultado obtenido, ¿podemos afirmar que esta proporción ha disminuido?

[1,25 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
 - para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
 - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 - para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Ejercicio 3

Un estudio establece que el número de microorganismos vivos en una muestra de laboratorio, medido en decenas, viene dado por la función

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k,$$

donde x representa las horas transcurridas desde el inicio del estudio.

- a) Determine el valor de k si sabemos que al inicio del estudio había 50 microorganismos. ¿Cuál es el valor máximo de microorganismos a los que se llegará? ¿En qué instante se alcanzará el máximo?

[1,75 puntos]

- b) ¿En qué valor se estabilizará el número de microorganismos a largo término?

[0,75 puntos]

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.

2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.
3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

- a) La empresa necesita 300 litros de aceite, 700 kg de harina y 25 kg de sal. Escriba esta información junto con los precios por producto de cada proveedor en forma matricial (dejando bien claro lo que representan las filas y las columnas) y calcule mediante un producto de matrices el coste total del pedido por cada proveedor. ¿Cuál de los tres proveedores es el más económico?

[1.25 puntos]

- b) Cada paquete de pasta tiene un coste total de producción de 0,5€. Si la empresa lo vende por 1,1€, se venden 1.000 paquetes diarios de pasta. También han comprobado que la relación entre el precio de venta y el número de paquetes vendidos es lineal, por lo que por cada 0,01 € que sube el precio de venta del paquete disminuye en 10 el número de paquetes vendidos. Llamaremos x al número de veces que subimos 0,01 € al precio de venta del paquete. Encuentre la función que describe el beneficio diario en función de x y calcule el valor de venta del paquete que hace que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

[1.25 puntos]

OPCIÓN B

- a) La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€. Ha comprado el triple de harina que de sal. Además, la cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite. ¿Qué cantidad de cada producto ha comprado?

[1.25 puntos]

- b) En el control de calidad, se ha tomado una muestra al azar del peso en gramos de 9 paquetes de pasta y se han obtenido los siguientes valores:

501, 506, 497, 495, 503, 491, 512, 505, 499.

Construya un intervalo de confianza del 95% para la media del peso del paquete de pasta, suponiendo que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 g. A partir de estos datos, razone brevemente si podemos afirmar que la etiqueta que dice que los paquetes son de 500 g es incorrecta.

[1.25 puntos]

SOLUCIONES

Ejercicio 1

Una tienda online tenía a la venta tres tipos de productos, que llamaremos A, B y C. Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €. En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta. Dos semanas después, empezaron las segundas rebajas y la tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información del problema.

[0,75 puntos]

b) Calcule el precio de cada artículo antes de las vacaciones de Navidad.

[1,75 puntos]

a) Llamamos “x” al precio de un producto A antes de Navidad, “y” al precio de un producto B y “z” al precio de un producto C.

“Ares compró un producto de cada tipo antes de las vacaciones de Navidad y pagó 135 €” $\rightarrow x + y + z = 135$.

“En las rebajas de enero, la tienda rebajó el artículo A un 4%, el artículo B un 6% y el artículo C un 5% respecto al precio inicial. Al verlo, Ares decidió comprar un producto tipo A, dos tipo B y tres tipo C, y calculó que se había ahorrado 16 € respecto al coste total de la misma compra sin oferta” $\rightarrow 1 \cdot 0.04x + 2 \cdot 0.06y + 3 \cdot 0.05z = 16$.

“La tienda rebajó el artículo A un 8%, el artículo B un 10% y el artículo C un 6% respecto al precio inicial de antes de Navidad. Al verlo, Ares no lo pudo resistir e hizo una tercera compra. Esta vez adquirió tres productos de tipo A, uno de tipo B y cinco de tipo C, y calculó que se había ahorrado 29 € respecto al precio total de la misma compra si la hubiera realizado antes de las vacaciones de Navidad” $\rightarrow 3 \cdot 0.08x + 1 \cdot 0.10y + 5 \cdot 0.06z = 29$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 0.04x + 2 \cdot 0.06y + 3 \cdot 0.05z = 16 \\ 3 \cdot 0.08x + 0.10y + 5 \cdot 0.06z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 0.04x + 0.12y + 0.15z = 16 \\ 0.24x + 0.10y + 0.30z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ \Rightarrow 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 24x + 10y + 30z = 2900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ \Rightarrow 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 4 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 4x + 12y + 15z = 1600 \\ -4x - 4y - 4z = -540 \\ \hline 8y + 11z = 1060 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 12 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \\ -12x - 12y - 12z = -1620 \\ \hline -7y + 3z = -170 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ -7y + 3z = -170 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 \cdot \text{Ecuación 3ª} + 7 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ -56y + 24z = -1360 \\ 56y + 77z = 7420 \\ \hline 101z = 6060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ 101z = 6060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 135 \\ 8y + 11z = 1060 \\ \boxed{z = \frac{6060}{101} = 60} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + 60 = 135 \\ 8y + 11 \cdot 60 = 1060 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 75 \\ 8y = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 75 \\ \boxed{y = \frac{400}{8} = 50} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 50 = 75 \Rightarrow \boxed{x = 25}
 \end{aligned}$$

Antes de las vacaciones de Navidad un producto A costaba 25 €, uno del tipo B costaba 50 € y uno del tipo C costaba 60 €.

Ejercicio 2

Una empresa fabrica bicicletas convencionales y eléctricas. El responsable de calidad de la empresa ha mirado el historial de ventas y ha calculado que el 5% de las bicicletas convencionales habían tenido algún tipo de problema que había requerido una revisión postventa. En el caso de las bicicletas eléctricas, este porcentaje era del 15%. Actualmente, el 25% de la producción es de bicicletas convencionales y el 75%, de bicicletas eléctricas.

a) Si escogemos una bicicleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún tipo de problema que requiera una revisión postventa? Si la bicicleta escogida al azar presenta algún tipo de problema que requiera una revisión postventa, ¿cuál es la probabilidad de que sea eléctrica?

[1,25 puntos]

b) El responsable de calidad cree que el dato según el cual un 15% de bicicletas eléctricas tienen algún problema que requiere el servicio posventa ha quedado desfasado. Considera que actualmente tanto la tecnología como los controles de calidad previos han mejorado mucho y esta proporción ha disminuido. Para comprobarlo, toma una muestra de 100 bicicletas eléctricas que ha vendido en los últimos meses y observa que sólo 8 han requerido una revisión postventa. A partir de estos datos, encuentra un intervalo de confianza del 95% para la proporción de bicicletas eléctricas que tienen algún problema y requieren una revisión postventa. A partir del resultado obtenido, ¿podemos afirmar que esta proporción ha disminuido?

[1,25 puntos]

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

• $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$

• Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

- para la proporción (muestras grandes):

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

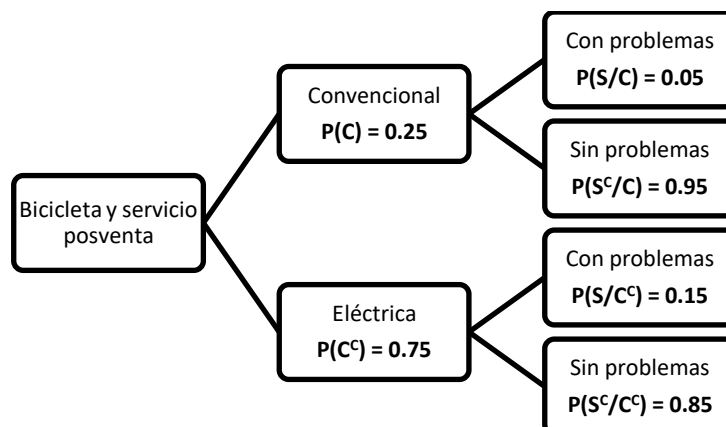
- para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

a) Llamamos S al suceso “la bicicleta tiene algún tipo de problema que requiere del servicio postventa” y C a “la bicicleta es convencional”. Hacemos un diagrama de árbol.



Nos piden que calculemos $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(C)P(S/C) + P(C^c)P(S/C^c) = 0.25 \cdot 0.05 + 0.75 \cdot 0.15 = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

La probabilidad de que una bicicleta elegida al azar presente problemas vale 0.125 (una de cada 8 bicicletas).

También nos piden calcular $P(C^c/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C^c/S) = \frac{P(C^c \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C^c)P(S/C^c)}{P(S)} = \frac{0.75 \cdot 0.15}{0.125} = \boxed{\frac{9}{10} = 0.9}$$

La probabilidad de que una bicicleta que presenta problemas sea eléctrica es de 0.9 (9 de cada 10 veces).

- b) El tamaño de la muestra es $n=100$. La proporción de bicicletas que han requerido revisión del servicio postventa es de $\frac{8}{100} = 0.08$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$, por lo que $z_\gamma = 1.96$.

Para obtener el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$.

$$z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.08 \cdot 0.92}{100}} \approx 0.0532$$

$$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = [0.08 - 0.0532, 0.08 + 0.0532] = [0.0268, 0.1332]$$

El intervalo de confianza solicitado es $[0.0268, 0.1332]$. Por tanto, con una confianza del 95% sí podemos afirmar que el porcentaje ha mejorado respecto al histórico del 15%. Sabemos que actualmente el porcentaje de bicicletas eléctricas que requieren del servicio postventa está entre el 2.68% y el 13.32% con una confianza del 95%.

Ejercicio 3

Un estudio establece que el número de microorganismos vivos en una muestra de laboratorio, medido en decenas, viene dado por la función

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k,$$

donde x representa las horas transcurridas desde el inicio del estudio.

- a) Determine el valor de k si sabemos que al inicio del estudio había 50 microorganismos. ¿Cuál es el valor máximo de microorganismos a los que se llegará? ¿En qué instante se alcanzará el máximo? [1,75 puntos]
- b) ¿En qué valor se estabilizará el número de microorganismos a largo término? [0.75 puntos]

a) Sabemos que $f(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = \frac{15 \cdot 0}{9+0^2} + k \Rightarrow \boxed{k=5}$$

El valor necesario para que se cumpla lo pedido es $k = 5$.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{15(9+x^2) - 2x \cdot 15x}{(9+x^2)^2} = \frac{135 + 15x^2 - 30x^2}{(9+x^2)^2} = \frac{135 - 15x^2}{(9+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{135 - 15x^2}{(9+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 135 - 15x^2 = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = 3}$$

Solo consideramos el valor positivo $x=3$ como punto crítico ya que el dominio de la función es $[0, +\infty)$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{135 - 15 \cdot 1^2}{(9+1^2)^2} = \frac{120}{100} > 0$. La función crece antes de las 3 horas.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{135 - 15 \cdot 4^2}{(9+4^2)^2} = \frac{-21}{125} < 0$.

La función decrece a partir de las 3 horas.

Como la función crece antes y decrece después de las 3 horas podemos afirmar que el máximo número de microorganismos se produce a las 3 horas.

Como $f(3) = \frac{15 \cdot 3}{9+3^2} + 5 = 7.5$, el número máximo de microorganismos es de 75.

b) Para responder a la pregunta planteada calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x}{9+x^2} + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{x}}{\frac{9}{x^2} + 1} + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15}{x}}{\frac{9}{x^2} + 1} + 5 = \frac{0}{0+1} + 5 = \boxed{5}$$

La población tiende a estabilizarse en 50 microorganismos.

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.
2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.
3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

OPCIÓN A

- a) La empresa necesita 300 litros de aceite, 700 kg de harina y 25 kg de sal. Escriba esta información junto con los precios por producto de cada proveedor en forma matricial (dejando bien claro lo que representan las filas y las columnas) y calcula mediante un producto de matrices el coste total del pedido por cada proveedor. ¿Cuál de los tres proveedores es el más económico?

[1.25 puntos]

- b) Cada paquete de pasta tiene un coste total de producción de 0,5€. Si la empresa lo vende por 1,1€, se venden 1.000 paquetes diarios de pasta. También han comprobado que la relación entre el precio de venta y el número de paquetes vendidos es lineal, por lo que por cada 0,01 € que sube el precio de venta del paquete disminuye en 10 el número de paquetes vendidos. Llamaremos x al número de veces que subimos 0,01 € al precio de venta del paquete. Encuentre la función que describe el beneficio diario en función de x y calcula el valor de venta del paquete que hace que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

[1.25 puntos]

- a) Colocamos en una matriz 3×3 los precios de cada producto en cada proveedor.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Aceite} & \text{Harina} & \text{Sal} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 A = \begin{pmatrix} 3 & 0.6 & 1 \\ 3.5 & 1 & 0.7 \\ 2.5 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Proveedor 1} \\ \rightarrow \text{Proveedor 2} \\ \rightarrow \text{Proveedor 3} \end{array}
 \end{array}$$

Colocamos en una matriz 3×1 las cantidades a comprar de cada producto.

$$B = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Litros de aceite} \\ \rightarrow \text{Kgs de harina} \\ \rightarrow \text{Kgs de sal} \end{array}$$

Obtenemos el coste de la compra en cada proveedor realizando el producto matricial $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0.6 & 1 \\ 3.5 & 1 & 0.7 \\ 2.5 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 + 420 + 25 \\ 1050 + 700 + 17.5 \\ 750 + 560 + 22.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1345 \\ 1767.5 \\ 1332.5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Proveedor 1} \\ \rightarrow \text{Proveedor 2} \\ \rightarrow \text{Proveedor 3} \end{array}$$

Con el proveedor 1 el pedido nos cuesta 1345 €, con el proveedor 2 nos cuesta 1767.5 € y con el proveedor 3 solo 1332.5.

Con el tercer proveedor el pedido es más económico.

b) Con un precio de 1.1 € por paquete se venden 1000 paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 = 1.11$ € por paquete se venden $1000 - 10$ paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 \cdot 2 = 1.12$ € por paquete se venden $1000 - 10 \cdot 2$ paquetes.

Con un precio de $1.1 + 0.01 \cdot x$ € por paquete se venden $1000 - 10x$ paquetes.

Los ingresos con x subidas de 0.1 € son $I(x) = (1.1 + 0.01x)(1000 - 10x)$.

Con x subidas de 0.01 € vendemos $1000 - 10x$ paquetes de pasta. Como el coste de cada paquete es de 0.5 € entonces los costes son $C(x) = 0.5(1000 - 10x)$.

El beneficio es la diferencia entre ingresos y costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = (1.1 + 0.01x)(1000 - 10x) - 0.5(1000 - 10x) =$$

$$= 1100 - 11x + 10x - 0.1x^2 - 500 + 5x = -0.1x^2 + 4x + 600$$

Averiguamos cuando la función beneficio $B(x) = -0.1x^2 + 4x + 600$ alcanza un máximo.

$$B(x) = -0.1x^2 + 4x + 600 \Rightarrow B'(x) = -0.2x + 4$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0.2x + 4 = 0 \Rightarrow -0.2x = -4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{0.2} = 20}$$

Obtenemos el signo de la segunda derivada para el punto crítico obtenido $x = 20$.

$$B'(x) = -0.2x + 4 \Rightarrow B''(x) = -0.2 \Rightarrow B''(20) = -0.2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficio tiene un máximo para $x = 20$.

Para estas 20 subidas de precio nos queda el precio del paquete a $1.1 + 20 \cdot 0.01 = 1.3$ €.

Y venderemos $1000 - 10 \cdot 20 = 800$ paquetes de pasta.

El beneficio máximo que se consigue es de $B(20) = -0.1 \cdot 20^2 + 4 \cdot 20 + 600 = 640$ euros.

Ejercicio 4

Una fábrica se dedica a la elaboración de pasta. Todo el proceso de producción puede resumirse en tres etapas:

1. Compra de materias primas. Para elaborar la pasta, la empresa debe comprar aceite, harina y sal de buena calidad. La compra la puede realizar a tres proveedores diferentes. El primer proveedor vende el aceite a 3€/L, la harina a 0,6€/kg y la sal a 1€/kg. El segundo proveedor vende el aceite a 3,5€/L, la harina a 1€/kg y la sal a 0,7€/kg. Por último, el tercer proveedor vende el aceite a 2,5 €/L, la harina a 0,8 €/kg y la sal a 0,9 €/kg.
2. Elaboración, empaquetado y control de calidad. Se fabrica y envasa la pasta. Posteriormente, se comprueba que la pasta esté bien hecha y envasada correctamente, y se verifica que los paquetes pesen 500 g de media.
3. Venta. La estrategia de venta y el precio de los paquetes se determinan realizando un estudio de mercado.

OPCIÓN B

- a) La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€. Ha comprado el triple de harina que de sal. Además, la cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite. ¿Qué cantidad de cada producto ha comprado?

[1.25 puntos]

- b) En el control de calidad, se ha tomado una muestra al azar del peso en gramos de 9 paquetes de pasta y se han obtenido los siguientes valores:

501, 506, 497, 495, 503, 491, 512, 505, 499.

Construya un intervalo de confianza del 95% para la media del peso del paquete de pasta, suponiendo que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 4 g. A partir de estos datos, razone brevemente si podemos afirmar que la etiqueta que dice que los paquetes son de 500 g es incorrecta.

[1.25 puntos]

- a) Llamamos “x” a los litros de aceite comprados, “y” a los kilos de harina y “z” a los kilos de sal.
 “La empresa ha hecho un gran pedido al primer proveedor y se ha gastado 1.320€” $\rightarrow 3x + 0.6y + z = 1320$.
 “Ha comprado el triple de harina que de sal” $\rightarrow y = 3z$.
 “La cantidad gastada en harina representa el 30% del dinero gastado en aceite” $\rightarrow 0.6y = 0.30 \cdot 3x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 0.6y + z = 1320 \\ y = 3z \\ 0.6y = 0.30 \cdot 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 0.6 \cdot 3z + z = 1320 \\ 0.6 \cdot 3z = 0.9x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 1.8z + z = 1320 \\ 1.8z = 0.9x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2.8z = 1320 \\ \Rightarrow \frac{1.8}{0.9} z = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2.8z = 1320 \\ 2z = x \end{array} \right\} \Rightarrow 6z + 2.8z = 1320 \Rightarrow 8.8z = 1320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1320}{8.8} = 150} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 150 = 300} \\ \boxed{y = 3 \cdot 150 = 450} \end{array} \right.$$

Han comprado 300 litros de aceite, 450 kilos de harina y 150 kilos de sal.

b) El tamaño muestral es $n = 9$.

La media muestral es $\frac{501+506+497+495+503+491+512+505+499}{9} = 501$ gramos.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$, por lo que $z_\gamma = 1.96$.

Para obtener el intervalo de confianza utilizamos la fórmula $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

$$z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{9}} \approx 2.613$$

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [501 - 2.613, 501 + 2.613] = [498.387, 503.613]$$

El intervalo de confianza solicitado es $[498.387, 503.613]$. Por tanto, con una confianza del 95% no podemos afirmar que los paquetes de pasta estén mal etiquetados pues el valor de 500 gramos pertenece al intervalo de confianza obtenido.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

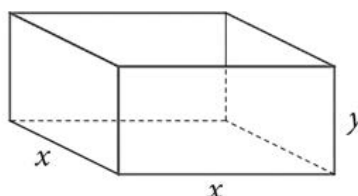
Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- Los beneficios o pérdidas diarios de una nueva empresa durante su primer año de funcionamiento vienen dados por la función $B(x) = -x^2 + 260x - 12000$, en la que x representa el día desde el inicio de la actividad de la empresa.
 - ¿Qué beneficio o pérdida tuvo la empresa el día 45? ¿Qué días obtuvo un beneficio de 4.000 €? [1 punto]
 - Calcule qué día la empresa obtuvo el beneficio máximo y cuál es este valor. Calcule también entre qué días la empresa no tuvo pérdidas. [1,5 puntos]
- Una inversora quiere invertir su capital en un banco especializado en criptomonedas que ofrece distintos depósitos con los siguientes intereses:
 - BTC (bitcoin): 15 % anual.
 - ETH (ether): 10 % anual.
 - LNK (link): 13 % anual.La inversora quiere invertir la misma cantidad en bitcoins que entre las otras dos criptomonedas juntas y desea obtener un rendimiento anual global de un 13 %.
 - ¿Cuál debe ser la relación entre la inversión en ethers y en links? [1,25 puntos]
 - Si se sabe que la inversión total será de 150.000 €, ¿qué cantidad invertirá en cada criptomoneda? [1,25 puntos]
- Ona quiere construir una caja de cartón de base cuadrada y abierta (sin tapa) para poner rotuladores y colores, como la de la siguiente figura:



La caja tiene que tener un volumen de 4 litros.

- Expresa la altura de la caja (y) en función de la longitud del lado de la base (x). [0,5 puntos]
- Ona quiere usar el mínimo de cartón posible para construir la caja. ¿Cuántos centímetros debe medir el lado de la base (x) para que la superficie de la caja sea mínima? ¿Cuántos centímetros debe medir la altura (y)? ¿Qué cantidad de cartón usará para construir la caja? [2 puntos]

4. Un cine dispone de dos salas en las que se proyectan dos películas diferentes. La siguiente tabla muestra el número de personas que han asistido a la proyección de cada película en la última semana, agrupadas por franjas de edad:

Franja de edad	Película de la sala 1	Película de la sala 2
Menores de 18 años	122	620
18-65 años	930	433
Mayores de 65 años	384	281

La información de la tabla anterior se registra con la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

- a) Considerando la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule el producto $A \cdot B$. Explique el significado de la matriz obtenida.

Se sabe que una entrada para menores de 18 años cuesta 5 €, una entrada para adultos de entre 18 y 65 años cuesta 8,5 € y una entrada para mayores de 65 años cuesta 6,5 €. Encuentre una matriz $C(a \ b \ c)$ de forma que el producto $C \cdot A \cdot B$ dé los ingresos semanales totales obtenidos por la venta de entradas, y calcule los ingresos correspondientes a esta semana. [1,5 puntos]

- b) Al cabo de unos meses, el registro semanal viene dado por la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix}$$

pero hay un valor que se ha borrado, el del número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película, y lo hemos denotado por x . Calcule el valor de x sabiendo que los ingresos totales de esa semana fueron de 12.076 €. [1 punto]

5. Un centro deportivo tiene dos zonas: la zona de la piscina (A1) y la zona del gimnasio (A2). Los abonados deben escoger a cuál de las dos zonas (solo una) quieren acceder y también si desean ir al centro deportivo en horario de mañana (opción B1) o en horario de tarde (opción B2). Si se selecciona a un abonado del centro al azar, se sabe que la probabilidad de que utilice la zona de la piscina es de 0,4 y la probabilidad de que utilice el gimnasio es de 0,6. Por otro lado, la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza la zona de la piscina, es de 0,55, mientras que la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza el gimnasio, es de 0,45.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo esté abonado en horario de mañana? [1,25 puntos]
 b) Si se sabe que está abonado en horario de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la zona de piscina? [1,25 puntos]

6. Una empresa de autobuses afirma que realiza el trayecto entre el aeropuerto y el centro de la ciudad en 30 minutos. Se ha obtenido una muestra del tiempo, en minutos, que ha tardado en 10 trayectos escogidos al azar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

- a) Construya un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de trayecto, suponiendo que este tiempo sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 minutos.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$.

Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ cuando la variancia σ^2 es conocida viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$. [1,5 puntos].

- b) A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿puede afirmarse que la información que proporciona la empresa de autobuses es errónea? Justifique la respuesta. [1 punto]

SOLUCIONES

1. Los beneficios o pérdidas diarios de una nueva empresa durante su primer año de funcionamiento vienen dados por la función $B(x) = -x^2 + 260x - 12000$, en la que x representa el día desde el inicio de la actividad de la empresa.
- a) ¿Qué beneficio o pérdida tuvo la empresa el día 45? ¿Qué días obtuvo un beneficio de 4.000 €? [1 punto]
- b) Calcule qué día la empresa obtuvo el beneficio máximo y cuál es este valor. Calcule también entre qué días la empresa no tuvo pérdidas. [1,5 puntos]

- a) Nos piden calcular el valor de $B(45)$.

$$B(45) = -45^2 + 260 \cdot 45 - 12000 = -2325$$

El día 45 tiene unas pérdidas de 2325 €.

Averiguamos el día x para el que $B(x) = 4000$.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 260x - 12000 \\ B(x) = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \Rightarrow -x^2 + 260x - 16000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-260 \pm \sqrt{260^2 - 4(-1)(-16000)}}{2(-1)} = \frac{-260 \pm 60}{-2} = \begin{cases} \frac{-260 + 60}{-2} = \boxed{100 = x} \\ \frac{-260 - 60}{-2} = \boxed{160 = x} \end{cases}$$

La empresa obtiene unos beneficios de 4000 euros los días 100 y 160.

- b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 260 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 260 = 0 \Rightarrow 2x = 260 \Rightarrow \boxed{x = \frac{260}{2} = 130}$$

El punto crítico es el día 130. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(130) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo relativo el día 130. Calculamos $B(130)$.

$$B(130) = -130^2 + 260 \cdot 130 - 12000 = 4900$$

El máximo beneficio que obtiene la empresa es de 4900 euros y los obtiene el día 130.

Averiguamos cuando el beneficio es 0.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 260x - 12000 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 260x - 12000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-260 \pm \sqrt{260^2 - 4(-1)(-12000)}}{2(-1)} = \frac{-260 \pm 140}{-2} = \begin{cases} \frac{-260 + 140}{-2} = \boxed{60 = x} \\ \frac{-260 - 140}{-2} = \boxed{200 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de los beneficios antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(0, 60)$ tomamos $x = 10$ y los beneficios son
 $B(10) = -10^2 + 2600 - 12000 = -9500$. La empresa tiene pérdidas.
- En el intervalo $(60, 200)$ tomamos $x = 100$ y los beneficios son
 $B(100) = -100^2 + 26000 - 12000 = +4000$. La empresa NO tiene pérdidas.
- En el intervalo $(200, 365)$ tomamos $x = 250$ y los beneficios son
 $B(250) = -250^2 + 260 \cdot 250 - 12000 = -9500$. La empresa tiene pérdidas.

La empresa no tiene pérdidas entre los días 60 y 200.

2. Una inversora quiere invertir su capital en un banco especializado en criptomonedas que ofrece distintos depósitos con los siguientes intereses:

— BTC (bitcoin): 15 % anual.

— ETH (ether): 10 % anual.

— LNK (link): 13 % anual.

La inversora quiere invertir la misma cantidad en bitcoins que entre las otras dos criptomonedas juntas y desea obtener un rendimiento anual global de un 13 %.

a) ¿Cuál debe ser la relación entre la inversión en ethers y en links? [1,25 puntos]

b) Si se sabe que la inversión total será de 150.000 €, ¿qué cantidad invertirá en cada criptomoneda? [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al dinero invertido en bitcoin, “y” al dinero invertido en ether y “z” al dinero invertido en link.

A partir de la información del ejercicio obtenemos las ecuaciones del sistema.

“La inversora quiere invertir la misma cantidad en bitcoins que entre las otras dos criptomonedas juntas” $\rightarrow x = y + z$.

“Desea obtener un rendimiento anual global de un 13 %.” $\rightarrow$

$$0.15x + 0.10y + 0.13z = 0.13(x + y + z).$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 0.15x + 0.10y + 0.13z = 0.13(x + y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 0.15x + 0.10y + 0.13z = 0.13x + 0.13y + 0.13z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 0.02x - 0.03y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(y + z) - 3y = 0 \Rightarrow 2y + 2z - 3y = 0 \Rightarrow \boxed{2z = y}$$

El dinero invertido en ether debe ser el doble del invertido en link.

b) Añadimos al sistema la ecuación $x + y + z = 150000$ y resolvemos el sistema.

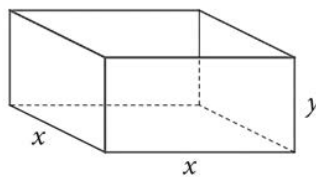
$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 2x - 3y = 0 \\ x + y + z = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(y + z) - 3y = 0 \\ y + z + y + z = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z - 3y = 0 \\ 2y + 2z = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = y \\ y + z = 75000 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z + z = 75000 \Rightarrow 3z = 75000 \Rightarrow \boxed{z = \frac{75000}{3} = 25000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 25000 = 50000} \Rightarrow \boxed{x = 50000 + 25000 = 75000}$$

Se invertirán 75.000 € en bitcoin, 50.000 € en ether y 25.000 € en link.

3. Ona quiere construir una caja de cartón de base cuadrada y abierta (sin tapa) para poner rotuladores y colores, como la de la siguiente figura:



La caja tiene que tener un volumen de 4 litros.

- a) Exprese la altura de la caja (y) en función de la longitud del lado de la base (x). [0,5 puntos]
 b) Ona quiere usar el mínimo de cartón posible para construir la caja. ¿Cuántos centímetros debe medir el lado de la base (x) para que la superficie de la caja sea mínima? ¿Cuántos centímetros debe medir la altura (y)? ¿Qué cantidad de cartón usará para construir la caja? [2 puntos]

- a) Sabemos que el volumen de la caja es de 4 litros que son 4000 centímetros cúbicos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = 4000 \\ \text{Volumen} = x^2 \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 y = 4000 \Rightarrow \boxed{y = \frac{4000}{x^2}}$$

La expresión buscada es $y = \frac{4000}{x^2}$.

- b) La superficie de la caja sin tapa es la suma de las superficies laterales y la de la base.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Superficie} = 4 \cdot \text{caras} + \text{base} = 4xy + x^2 \\ y = \frac{4000}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = 4x \frac{4000}{x^2} + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2$$

Deseo hallar el mínimo de la función $S(x) = \frac{16000}{x} + x^2$. Utilizamos la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} S(x) = \frac{16000}{x} + x^2 \Rightarrow S'(x) = -\frac{16000}{x^2} + 2x \\ S'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{16000}{x^2} + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{16000}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 16000 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{8000} = 20}$$

Hemos encontrado que la función superficie tiene un punto crítico en $x = 20$. Utilizamos la segunda derivada y su signo para averiguar si es un máximo o un mínimo.

$$S'(x) = -\frac{16000}{x^2} + 2x = -16000x^{-2} + 2x \Rightarrow S''(x) = -(-2)16000x^{-3} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S''(x) = 64000x^{-3} + 2 = \frac{64000}{x^3} + 2 \Rightarrow S''(20) = \frac{64000}{20^3} + 2 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva para $x = 20$ en dicho valor la función tiene un mínimo relativo.

Para que la superficie de la caja sea mínima el lado de la base debe medir 20 centímetros. La altura debe medir $y = \frac{4000}{20^2} = 10$ centímetros.

Como $S(20) = \frac{16000}{20} + 20^2 = 1200$ la cantidad de cartón que usará para la caja con superficie mínima es de 1200 centímetros cuadrados de cartón.

4. Un cine dispone de dos salas en las que se proyectan dos películas diferentes. La siguiente tabla muestra el número de personas que han asistido a la proyección de cada película en la última semana, agrupadas por franjas de edad:

Franja de edad	Película de la sala 1	Película de la sala 2
Menores de 18 años	122	620
18-65 años	930	433
Mayores de 65 años	384	281

La información de la tabla anterior se registra con la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

- a) Considerando la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcule el producto $A \cdot B$. Explique el significado de la matriz obtenida.

Se sabe que una entrada para menores de 18 años cuesta 5 €, una entrada para adultos de entre 18 y 65 años cuesta 8,5 € y una entrada para mayores de 65 años cuesta 6,5 €. Encuentre una matriz $C(a \ b \ c)$ de forma que el producto $C \cdot A \cdot B$ dé los ingresos semanales totales obtenidos por la venta de entradas, y calcule los ingresos correspondientes a esta semana. [1,5 puntos]

- b) Al cabo de unos meses, el registro semanal viene dado por la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix}$$

pero hay un valor que se ha borrado, el del número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película, y lo hemos denotado por x . Calcule el valor de x sabiendo que los ingresos totales de esa semana fueron de 12.076 €. [1 punto]

- a) Calculamos el producto $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 + 620 \\ 930 + 433 \\ 384 + 281 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$$

La matriz $A \cdot B$ nos indica el número de personas de cada franja de edad que acuden al cine.

La matriz C es $C(5 \ 8.5 \ 6.5)$. Calculamos el producto $C \cdot A \cdot B$ y comprobamos que obtenemos los ingresos semanales totales obtenidos por la venta de entradas.

$$C \cdot A \cdot B = (5 \ 8.5 \ 6.5) \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$1 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 1 \times 2$$

$$= (5 \cdot 122 + 8.5 \cdot 930 + 6.5 \cdot 384 \quad 5 \cdot 620 + 8.5 \cdot 433 + 6.5 \cdot 281) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11011 & 8607 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 11011 + 8607 = \boxed{19618}$$

Los ingresos correspondientes a esta semana son 19618 euros.

b) Debemos resolver la ecuación $C \cdot D \cdot B = 12076$.

$$C \cdot D \cdot B = 12076 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 8.5 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12076 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \cdot 84 + 8.5 \cdot 338 + 6.5 \cdot 256 & 5 \cdot 23 + 8.5 \cdot x + 6.5 \cdot 408 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12076 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4957 & 8.5x + 2767 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12076 \Rightarrow 4957 + 8.5x + 2767 = 12076 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8.5x = 4352 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4352}{8.5} = 512}$$

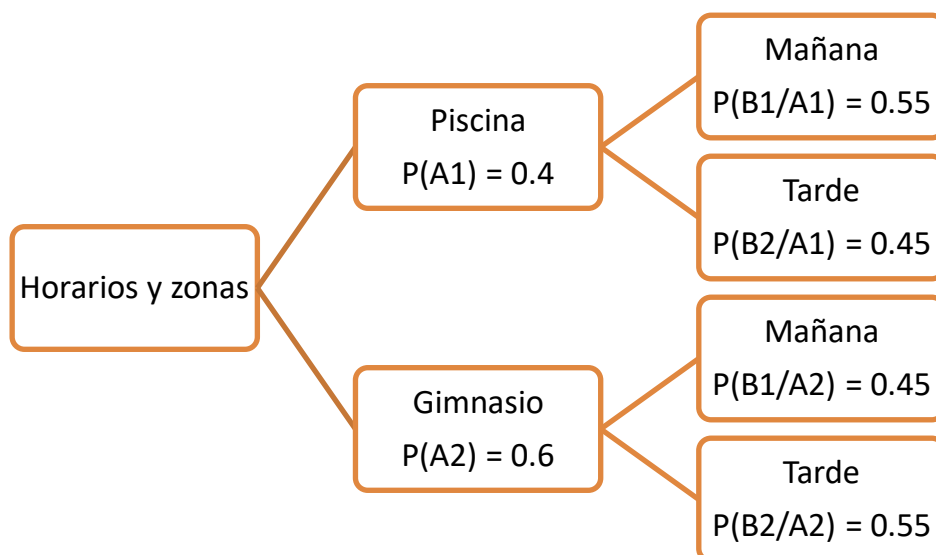
El número de personas entre 18 y 65 años que han asistido a la segunda película es de 512.

5. Un centro deportivo tiene dos zonas: la zona de la piscina (A1) y la zona del gimnasio (A2). Los abonados deben escoger a cuál de las dos zonas (solo una) quieren acceder y también si desean ir al centro deportivo en horario de mañana (opción B1) o en horario de tarde (opción B2). Si se selecciona a un abonado del centro al azar, se sabe que la probabilidad de que utilice la zona de la piscina es de 0,4 y la probabilidad de que utilice el gimnasio es de 0,6. Por otro lado, la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza la zona de la piscina, es de 0,55, mientras que la probabilidad de que esté abonado en horario de mañana, si se sabe que utiliza el gimnasio, es de 0,45.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo esté abonado en horario de mañana? [1,25 puntos]
- b) Si se sabe que está abonado en horario de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la zona de piscina? [1,25 puntos]

Llamamos A1 al suceso “el abonado utiliza la zona de la piscina”, A2 al suceso “el abonado utiliza la zona del gimnasio”, B1 a “el abonado desea acudir en horario de mañana” y B2 a “el abonado desea ir en horario de tarde”.

Sabemos que $P(A1) = 0.4$, $P(A2) = 0.6$, $P(B1/A1) = 0.55$ y $P(B1/A2) = 0.45$.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(B1)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B1) = P(A1)P(B1/A1) + P(A2)P(B1/A2) = 0.4 \cdot 0.55 + 0.6 \cdot 0.45 = \boxed{0.49}$$

La probabilidad de que el individuo esté abonado en horario de mañana es de 0.49.

- b) Nos piden calcular $P(A1/B1)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A1/B1) = \frac{P(A1 \cap B1)}{P(B1)} = \frac{P(A1)P(B1/A1)}{P(B1)} = \frac{0.4 \cdot 0.55}{0.49} = \boxed{\frac{22}{49} \approx 0.449}$$

La probabilidad de que un abonado que utiliza el horario de mañana haya escogido la zona de piscina tiene un valor aproximado de 0.449.

6. Una empresa de autobuses afirma que realiza el trayecto entre el aeropuerto y el centro de la ciudad en 30 minutos. Se ha obtenido una muestra del tiempo, en minutos, que ha tardado en 10 trayectos escogidos al azar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

- a) Construya un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de trayecto, suponiendo que este tiempo sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 minutos.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$.

Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$

cuando la variancia σ^2 es conocida viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$. [1,5 puntos].

- b) A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿puede afirmarse que la información que proporciona la empresa de autobuses es errónea? Justifique la respuesta. [1 punto]

- a) $X =$ Tiempo (en minutos) que tarda un autobús en realizar el trayecto entre el aeropuerto y el centro de la ciudad. $X = N(\mu, 2)$

La muestra es de tamaño $n = 10$.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{33+29+28+31+34+35+32+29+37+35}{10} = 32.3$.

Sabemos que $\gamma = 0.95 \in (0,1)$ y que $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95 \Rightarrow z_\gamma = 1.96$.

El intervalo de confianza pedido es:

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[32.3 - 1.96 \frac{2}{\sqrt{10}}, 32.3 + 1.96 \frac{2}{\sqrt{10}} \right] = [31.06, 33.54]$$

Con un nivel de confianza del 95% la media poblacional tiene un valor comprendido entre 31.06 y 33.54 minutos.

- b) La afirmación “Una empresa de autobuses afirma que realiza el trayecto entre el aeropuerto y el centro de la ciudad en 30 minutos” no es correcta pues 30 no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior: $30 < 31.06$.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Una empresa de paquetería tiene unas tarifas de envío de paquetes que dependen del peso de cada paquete, aunque no de forma lineal. Se quiere enviar un paquete a una distancia aproximada de 650 km. La información que ofrece la empresa en su web sobre los precios para enviar un paquete a esta distancia es la siguiente:
 - si un paquete pesa hasta 2 kg, el envío tiene un coste fijo de 30 €;
 - si un paquete pesa más de 2 kg pero menos de 11 kg, los primeros 2 kg cuestan 15 €/kg y el resto de kilogramos se pagan a 12 €/kg;
 - si un paquete pesa entre 11 y 25 kg, ambos incluidos, los primeros 11 kg cuestan 13 €/kg y el resto cuestan 15 €/kg;
 - a partir de 25 kg, hay que ponerse en contacto con la empresa.
 - a) ¿Cuánto costará enviar un paquete de 9,5 kg? ¿Y uno de 13 kg? Encuentre la función definida a trozos que da el precio del envío de un paquete de hasta 25 kg en función de su peso y estudie su continuidad. [1,75 puntos]
 - b) Si se han pagado 162 € por un envío, ¿cuánto pesaba el paquete que se ha enviado? [0,75 puntos]
2. El nuevo modelo de maletas Rodamons dispone de tres tamaños diferentes: pequeño, mediano y grande. El precio de la maleta grande es el mismo que el de la maleta pequeña y la mediana juntas. El lote de una maleta de cada tamaño cuesta 240 €, pero si se compra el lote de dos maletas pequeñas, una mediana y una grande, se obtiene un 10 % de descuento del total y el precio final es de 256,5 €. ¿Cuál es el precio de cada tipo de maleta sin descuento? [2,5 puntos]
3. Una empresa de alquiler de vehículos dispone de una flota de 250 vehículos. Si el precio del alquiler diario de un vehículo es de 50 €, consigue alquilarlos todos. Se ha observado que la relación entre el precio del alquiler de los vehículos y el número de vehículos que se alquilan es lineal, de forma que por cada euro que se incrementa el precio diario del alquiler se alquilan dos vehículos menos. Cada vehículo alquilado genera un coste diario de 1 € de mantenimiento.
 - a) Si se denomina x al número de euros que se incrementa el precio del alquiler, escriba la función que determina los beneficios obtenidos en función de x . [1 punto]
 - b) ¿A qué precio hay que alquilar los vehículos para conseguir el máximo de beneficios? ¿Cuál es este beneficio máximo? [1,5 puntos]

4. Laia, una aficionada a la artesanía elaborada con madera, montó un pequeño negocio hace un par de meses. En su taller, elabora tres tipos de productos con madera reciclada, que luego pone a la venta: nombres personalizados, palabras decorativas y peonzas. Durante el primer mes, Laia tuvo tres clientes: el primero adquirió 2 nombres personalizados y 3 peonzas; el segundo adquirió 1 nombre personalizado, 2 palabras decorativas y 5 peonzas, y el tercero solo compró 4 peonzas.

- a) Construya la matriz 3×3 correspondiente a las ventas, en la que las filas representen a los clientes ($C1$, $C2$ y $C3$) y las columnas representen los productos que adquirieron. Si durante el primer mes Laia vendió los nombres personalizados (N) a 20 € cada uno, las palabras decorativas (P) a 18 € cada una y las peonzas (B) a 6 € cada una, calcule cuánto facturó a cada cliente por su pedido mediante un producto de matrices. [1,5 puntos]
- b) Para incentivar las ventas, en el segundo mes Laia aplicó un descuento al precio de venta de todos los productos. Durante este mes, también tuvo tres clientes y obtuvo la siguiente matriz de ventas:

$$\begin{array}{ccc} N & P & B \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} C1 \\ C2 \\ C3 \end{array} \end{array}$$

Si durante el segundo mes Laia facturó 78 € al primer cliente, 52 € al segundo cliente y 62 € al tercer cliente, ¿a qué precio vendió cada producto? [1 punto]

5. En una cafetería, al mediodía, ofrecen la posibilidad de escoger entre el menú del día (opción A1) o un plato combinado (opción A2). Algunos clientes también toman café (opción B1) y otros no (opción B2). Si se selecciona a un cliente de la cafetería al azar, la probabilidad de que escoja el menú del día es de 0,6 y la probabilidad de que escoja un plato combinado es de 0,4. Por otro lado, la probabilidad de que tome café si escoge el menú del día es de 0,75, mientras que la probabilidad de que tome café si escoge un plato combinado es de 0,5.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tome café? [1,25 puntos]
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido el menú del día si se sabe que ha tomado café? [1,25 puntos]

6. Se quiere saber el tiempo medio, en minutos, que el alumnado de un instituto pasa diariamente conectado a una determinada red social. Se ha seleccionado una muestra de 175 estudiantes y se les ha pedido que proporcionen este dato. En esta muestra se ha obtenido una media de 90 minutos, con una desviación típica de 7 minutos.

Nota: Para resolver este problema, recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ y $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$. Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ cuando la variancia σ^2 es

desconocida y la muestra es grande viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

- a) Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social. [1 punto]
- b) Construya un intervalo de confianza del 99 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social. Explique por qué este intervalo y el del apartado anterior son diferentes y qué información nos da exactamente cada uno de ellos. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

- 1.** Una empresa de paquetería tiene unas tarifas de envío de paquetes que dependen del peso de cada paquete, aunque no de forma lineal. Se quiere enviar un paquete a una distancia aproximada de 650 km. La información que ofrece la empresa en su web sobre los precios para enviar un paquete a esta distancia es la siguiente:
- si un paquete pesa hasta 2 kg, el envío tiene un coste fijo de 30 €;
 - si un paquete pesa más de 2 kg pero menos de 11 kg, los primeros 2 kg cuestan 15 €/kg y el resto de kilogramos se pagan a 12 €/kg;
 - si un paquete pesa entre 11 y 25 kg, ambos incluidos, los primeros 11 kg cuestan 13 €/kg y el resto cuestan 15 €/kg;
 - a partir de 25 kg, hay que ponerse en contacto con la empresa.
- a)** ¿Cuánto costará enviar un paquete de 9,5 kg? ¿Y uno de 13 kg? Encuentre la función definida a trozos que da el precio del envío de un paquete de hasta 25 kg en función de su peso y estudie su continuidad. [1,75 puntos]
- b)** Si se han pagado 162 € por un envío, ¿cuánto pesaba el paquete que se ha enviado? [0,75 puntos]

- a) Como 9.5 kg está entre 2 y 11 kg la tarifa es: los primeros 2 kg cuestan 15 €/kg y el resto de kilogramos se pagan a 12 €/kg $\rightarrow 2 \cdot 15 + (9.5 - 2) \cdot 12 = 30 + 90 = 120$ euros.
- Como 13 kg está entre 11 y 25 kg la tarifa es: los primeros 11 kg cuestan 13 €/kg y el resto cuestan 15 €/kg $\rightarrow 11 \cdot 13 + (13 - 11) \cdot 15 = 143 + 30 = 173$ euros.
- La función definida a trozos que da el precio del envío de un paquete de hasta 25 kg en función de su peso (x) la llamamos $P(x)$.

$$P(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 30 + (x - 2)12 & \text{si } 2 < x < 11 \\ 143 + (x - 11)15 & \text{si } 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Simplificamos las expresiones.

$$P(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 30 + 12x - 24 & \text{si } 2 < x < 11 \\ 143 + 15x - 165 & \text{si } 11 \leq x \leq 25 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 6 + 12x & \text{si } 2 < x < 11 \\ 15x - 22 & \text{si } 11 \leq x \leq 25 \end{cases}$$

Las expresiones son continuas en $[0, 2)$, $(2, 11)$ y en $(11, 25]$. Estudiamos la continuidad de la función en $x = 2$ y en $x = 11$.

En $x = 2$ tenemos:

- Existe $P(2) = 30$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 30 = 30$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 6 + 12x = 6 + 12 \cdot 2 = 30$.

Como los tres valores son iguales la función es continua en $x = 2$.

En $x = 11$ tenemos:

- Existe $P(11) = -22 + 15 \cdot 11 = 143$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 11^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 11^-} 6 + 12x = 6 + 12 \cdot 11 = 138$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 11^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 11^+} -22 + 15x = 143$.

Los tres valores no son iguales y la función no es continua en $x = 11$.

La función es continua en $[0, 11) \cup (11, 25]$.

b) Averiguamos el valor de x para qué $P(x) = 162$.

$$P(x) = 162 \Rightarrow \begin{cases} 30 = 162 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 6 + 12x = 162 \Rightarrow 12x = 156 \rightarrow x = \frac{156}{12} = 13 \notin (2, 11) \\ 15x - 22 = 162 \rightarrow 15x = 184 \rightarrow x = \frac{184}{15} \simeq 12.267 \in [11, 25] \end{cases}$$

El paquete tiene un peso aproximado de 12.267 kilogramos.

2. El nuevo modelo de maletas Rodamons dispone de tres tamaños diferentes: pequeño, mediano y grande. El precio de la maleta grande es el mismo que el de la maleta pequeña y la mediana juntas. El lote de una maleta de cada tamaño cuesta 240 €, pero si se compra el lote de dos maletas pequeñas, una mediana y una grande, se obtiene un 10 % de descuento del total y el precio final es de 256,5 €. ¿Cuál es el precio de cada tipo de maleta sin descuento? [2,5 puntos]

Llamamos “x” al precio de la maleta grande, “y” al precio de la maleta mediana y “z” al precio de la maleta pequeña.

A partir de la información del ejercicio obtenemos las ecuaciones del sistema.

“El precio de la maleta grande es el mismo que el de la maleta pequeña y la mediana juntas”

$$\rightarrow x = y + z.$$

“El lote de una maleta de cada tamaño cuesta 240 €” $\rightarrow x + y + z = 240$.

“El lote de dos maletas pequeñas, una mediana y una grande, se obtiene un 10 % de descuento del total (se paga el 90%) y el precio final es de 256,5 €” $\rightarrow 0.90 \cdot (2z + y + x) = 256.5$

Reunimos las ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ x + y + z = 240 \\ 0.9 \cdot (2z + y + x) = 256.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ x + y + z = 240 \\ 2z + y + x = \frac{256.5}{0.9} = 285 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + y + z = 240 \\ 2z + y + y + z = 285 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 240 \\ 2y + 3z = 285 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 120 \rightarrow y = 120 - z \\ 2y + 3z = 285 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(120 - z) + 3z = 285 \Rightarrow 240 - 2z + 3z = 285 \Rightarrow \boxed{z = 45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 120 - 45 = 75} \Rightarrow \boxed{x = 75 + 45 = 120}$$

La maleta grande cuesta 120 euros, la mediana 75 euros y la pequeña 45 euros.

- 3.** Una empresa de alquiler de vehículos dispone de una flota de 250 vehículos. Si el precio del alquiler diario de un vehículo es de 50 €, consigue alquilarlos todos. Se ha observado que la relación entre el precio del alquiler de los vehículos y el número de vehículos que se alquilan es lineal, de forma que por cada euro que se incrementa el precio diario del alquiler se alquilan dos vehículos menos. Cada vehículo alquilado genera un coste diario de 1 € de mantenimiento.
- a)** Si se denomina x al número de euros que se incrementa el precio del alquiler, escriba la función que determina los beneficios obtenidos en función de x . [1 punto]
- b)** ¿A qué precio hay que alquilar los vehículos para conseguir el máximo de beneficios? ¿Cuál es este beneficio máximo? [1,5 puntos]

- a) Si el precio del alquiler es de 50 € se alquilan los 250 vehículos. Calculamos los ingresos $I(x)$.

$$x = 0 \Rightarrow I(0) = (250 - 2 \cdot 0) \cdot (50 + 0)$$

Si subimos el precio 1 €, es decir, $x = 1$ se alquilan 2 vehículos menos ($250 - 2$).

$$x = 1 \Rightarrow I(1) = (250 - 2 \cdot 1) \cdot (50 + 1)$$

Si subimos el precio 2 €, es decir, $x = 2$ se alquilan $2 \cdot 2 = 4$ vehículos menos ($250 - 2 \cdot 2$).

$$x = 2 \Rightarrow I(2) = (250 - 2 \cdot 2) \cdot (50 + 2)$$

Si subimos el precio 3 €, es decir, $x = 3$ se alquilan $2 \cdot 3 = 6$ vehículos menos ($250 - 2 \cdot 3$).

$$x = 3 \Rightarrow I(3) = (250 - 2 \cdot 3) \cdot (50 + 3)$$

Si subimos el precio x € se alquilan $2x$ vehículos menos ($250 - 2x$). Podemos deducir que si subimos el precio x € los ingresos serán $I(x) = (250 - 2x)(50 + x)$.

Por otro lado, tenemos los gastos de mantenimiento de 1 € por cada vehículo alquilado.

Si subimos el precio x € se alquilan $2x$ vehículos menos ($250 - 2x$) por lo que el coste será

$$C(x) = 250 - 2x.$$

Obtenemos la expresión de los beneficios como la diferencia entre los ingresos y los costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = (250 - 2x)(50 + x) - (250 - 2x) =$$

$$= 12500 + 250x - 100x - 2x^2 - 250 + 2x = -2x^2 + 152x + 12250$$

La función beneficios dependiente de la subida de x € del precio del alquiler es

$$B(x) = -2x^2 + 152x + 12250.$$

- b) Derivamos la función beneficio y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -2x^2 + 152x + 12250 \Rightarrow B'(x) = -4x + 152$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 152 = 0 \Rightarrow 4x = 152 \Rightarrow x = \frac{152}{4} = 38$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -4x + 152 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(38) = -4 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función beneficios presenta un máximo para $x = 38$.

Para este valor los beneficios son $B(38) = -2 \cdot 38^2 + 152 \cdot 38 + 12250 = 15138$.

Los beneficios son máximos para un precio del alquiler de $50 + 38 = 88$ €. Este beneficio máximo es de 15 138 €.

4. Laia, una aficionada a la artesanía elaborada con madera, montó un pequeño negocio hace un par de meses. En su taller, elabora tres tipos de productos con madera reciclada, que luego pone a la venta: nombres personalizados, palabras decorativas y peonzas. Durante el primer mes, Laia tuvo tres clientes: el primero adquirió 2 nombres personalizados y 3 peonzas; el segundo adquirió 1 nombre personalizado, 2 palabras decorativas y 5 peonzas, y el tercero solo compró 4 peonzas.

a) Construya la matriz 3×3 correspondiente a las ventas, en la que las filas representen a los clientes (C1, C2 y C3) y las columnas representen los productos que adquirieron. Si durante el primer mes Laia vendió los nombres personalizados (N) a 20 € cada uno, las palabras decorativas (P) a 18 € cada una y las peonzas (B) a 6 € cada una, calcule cuánto facturó a cada cliente por su pedido mediante un producto de matrices. [1,5 puntos]

b) Para incentivar las ventas, en el segundo mes Laia aplicó un descuento al precio de venta de todos los productos. Durante este mes, también tuvo tres clientes y obtuvo la siguiente matriz de ventas:

$$\begin{matrix} & N & P & B \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Si durante el segundo mes Laia facturó 78 € al primer cliente, 52 € al segundo cliente y 62 € al tercer cliente, ¿a qué precio vendió cada producto? [1 punto]

a) Colocamos la información proporcionada en una tabla.

	Nombres personalizados	Palabras decorativas	Peonzas
Cliente 1 (C1)	2	0	3
Cliente 2 (C2)	1	2	5
Cliente 3 (C3)	0	0	4

$$\begin{matrix} & N & P & B \\ \text{La matriz de ventas sería } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\text{Colocamos los precios en una matriz columna } \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{Nombres} \\ \rightarrow \text{Palabras} \\ \rightarrow \text{Peonzas} \end{matrix}$$

Realizamos el producto de la matriz de ventas y la matriz de precios para obtener lo que le ha facturado a cada cliente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 20 + 3 \cdot 6 \\ 24 \cdot 20 + 36 + 30 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 86 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix}$$

Le facturó al primer cliente 58 €, 86 € al segundo y 24 € al tercero.

b) La nueva matriz de ventas es $\begin{matrix} & N & P & B \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix} \end{matrix}$. Con los nuevos precios rebajados la nueva matriz

de precios es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Nombres} \\ \text{Palabras} \\ \text{Peonzas} \end{matrix}$

Planteamos la igualdad con la nueva información de ventas.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix} \begin{matrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{matrix}$$

Nos queda un sistema de ecuaciones con matriz ampliada $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 1 & 2 & 3 & 62 \end{pmatrix}$. Usamos el método de

Gauss para resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 2 & 0 & 4 & 52 \\ 1 & 2 & 3 & 62 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 6 \quad 9 \quad 186 \\ -3 \quad -1 \quad -2 \quad -78 \\ \hline 0 \quad 5 \quad 7 \quad 108 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 4 \quad 6 \quad 124 \\ -2 \quad 0 \quad -4 \quad -52 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 2 \quad 72 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 5 & 7 & 108 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 20 \quad 28 \quad 432 \\ 0 \quad -20 \quad -10 \quad -360 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 18 \quad 72 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 0 & 18 & 72 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 78 \\ 0 & 4 & 2 & 72 \\ 0 & 0 & 18 & 72 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 78 \\ 4y + 2z = 72 \\ 18z = 72 \rightarrow \boxed{z = 72/18 = 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 2 \cdot 4 = 78 \\ 2y + 4 = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 70 \\ 2y = 32 \rightarrow \boxed{y = 32/2 = 16} \end{cases} \Rightarrow 3x + 16 = 70 \Rightarrow 3x = 54 \Rightarrow \boxed{x = \frac{54}{3} = 18}$$

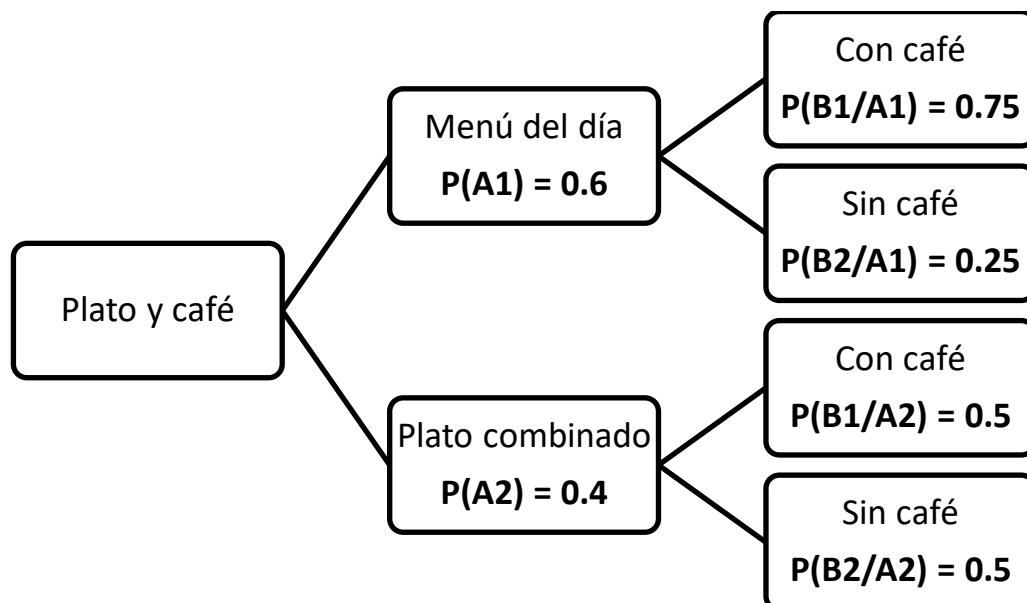
Los nuevos precios son 18 € los nombres personalizados, 16 € las palabras decorativas y 4 € la peonza.

5. En una cafetería, al mediodía, ofrecen la posibilidad de escoger entre el menú del día (opción A1) o un plato combinado (opción A2). Algunos clientes también toman café (opción B1) y otros no (opción B2). Si se selecciona a un cliente de la cafetería al azar, la probabilidad de que escoja el menú del día es de 0,6 y la probabilidad de que escoja un plato combinado es de 0,4. Por otro lado, la probabilidad de que tome café si escoge el menú del día es de 0,75, mientras que la probabilidad de que tome café si escoge un plato combinado es de 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tome café? [1,25 puntos]

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido el menú del día si se sabe que ha tomado café? [1,25 puntos]

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada en el ejercicio.



a) Nos piden calcular $P(B1)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B1) = P(A1)P(B1/A1) + P(A2)P(B1/A2) = 0.6 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.5 = \boxed{0.65}$$

b) Nos piden calcular $P(A1/B1)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A1/B1) = \frac{P(A1 \cap B1)}{P(B1)} = \frac{P(A1)P(B1/A1)}{P(B1)} = \frac{0.6 \cdot 0.75}{0.65} = \boxed{\frac{9}{13} \approx 0.6923}$$

La probabilidad de haya escogido el menú del día si se sabe que ha tomado café tiene un valor aproximado de 0.6923.

- 6.** Se quiere saber el tiempo medio, en minutos, que el alumnado de un instituto pasa diariamente conectado a una determinada red social. Se ha seleccionado una muestra de 175 estudiantes y se les ha pedido que proporcionen este dato. En esta muestra se ha obtenido una media de 90 minutos, con una desviación típica de 7 minutos.

Nota: Para resolver este problema, recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ y $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$. Recuerde también que el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ cuando la variancia σ^2 es desconocida y la muestra es grande viene dado por $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

- a)** Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social. [1 punto]
b) Construya un intervalo de confianza del 99 % para el tiempo medio que el alumnado pasa diariamente conectado a esta red social. Explique por qué este intervalo y el del apartado anterior son diferentes y qué información nos da exactamente cada uno de ellos. [1,5 puntos]

- a) La muestra es de tamaño $n = 175$. La media muestral es $\bar{x} = 90$ minutos. La desviación típica en la muestra es $s = 7$ minutos.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $\gamma = 0.95$ y como $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ el valor de $z_\gamma = 1.96$.

Podemos aplicar la fórmula $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

El intervalo de confianza es $\left[90 - 1.96 \frac{7}{\sqrt{175}}, 90 + 1.96 \frac{7}{\sqrt{175}} \right] = [88.9629, 91.0371]$

- b) Para un nivel de confianza del 99% tenemos que $\gamma = 0.99$ y como $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$ el valor de $z_\gamma = 2.58$.

Podemos aplicar la fórmula $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$.

El intervalo de confianza es $\left[90 - 2.58 \frac{7}{\sqrt{175}}, 90 + 2.58 \frac{7}{\sqrt{175}} \right] = [88.6348, 91.3652]$

Ambos intervalos son diferentes porque los niveles de confianza son diferentes. Como es natural, en el segundo caso que el nivel de confianza es mayor, el intervalo que obtenemos es también mayor. Tenemos una mayor confianza en que el valor real de la media estará entre los dos valores obtenidos pero el intervalo es mayor.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2024

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

 - ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi? [1 punto]
 - Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio? [1,5 puntos]
- Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

 - Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica. [1,25 puntos]
 - Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado. [1,25 puntos]
- Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función $G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$.

- a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \frac{7350}{x} + 6x$. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]
4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*. Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.
- a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas). [1,25 puntos]
- b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí? [1,25 puntos]
5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están suscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.
- a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu. [1,5 puntos]
- b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto. [1 punto]
6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.
- a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo. [1 punto]
- b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.
- Nota: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción

con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ viene dado por $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

- 1.** Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.
- a)** ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi? [1 punto]
- b)** Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio? [1,5 puntos]

- a)** La tarifa de la compañía A tiene la expresión:

“La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido” $\rightarrow$
 $f(x) = 0.4x + 20$.

La tarifa de la compañía B tiene la expresión $g(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 10$.

Para $x = 10$ en la compañía A hay que pagar $f(10) = 0.4 \cdot 10 + 20 = 24$ euros y en la B hay que pagar $g(10) = 0.01 \cdot 10^2 + 0.1 \cdot 10 + 10 = 12$ euros. Es más económica la compañía B.

Para $x = 80$ en la compañía A hay que pagar $f(80) = 0.4 \cdot 80 + 20 = 52$ euros y en la B hay que pagar $g(80) = 0.01 \cdot 80^2 + 0.1 \cdot 80 + 10 = 82$ euros. Es más económica la compañía A.

La diferencia de precio para 10 kilómetros es $24 - 12 = 12$ euros y para 80 kilómetros es $82 - 52 = 30$ euros.

En la compañía B si haces 0 kilómetros (solo subirte al taxi) el coste es $g(0) = 0.01 \cdot 0^2 + 0.1 \cdot 0 + 10 = 10$ euros. Este es el coste fijo de la compañía B.

- b)** Veamos cuando se cortan las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0.4x + 20 \\ g(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 10 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.01x^2 + 0.1x + 10 = 0.4x + 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.01x^2 - 0.3x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(-1000)}}{2} = \frac{30 \pm 70}{2} = \begin{cases} \frac{30+70}{2} = 50 \\ \frac{30-70}{2} = -20 \text{ ¡No válido!} \end{cases}$$

Las tarifas coinciden cuando se hacen 50 kilómetros.

Obtenemos la función diferencia de precios.

$$d(x) = f(x) - g(x) = 0.4x + 20 - (0.01x^2 + 0.1x + 10) \Rightarrow d(x) = -0.01x^2 + 0.3x + 10$$

Hallamos los puntos críticos de la función $d(x) = -0.01x^2 + 0.3x + 10$.

$$\left. \begin{array}{l} d'(x) = -0.02x + 0.3 \\ d'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0.02x + 0.3 = 0 \Rightarrow 0.02x = 0.3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{0.3}{0.02} = 15}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$d'(x) = -0.02x + 0.3 \Rightarrow d''(x) = -0.02 \Rightarrow d''(15) = -0.02 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la diferencia de precios presenta un máximo para 15 kilómetros.

Para 15 kilómetros la diferencia de precio es máxima tomando un valor de $d(15) = -0.01 \cdot 15^2 + 0.3 \cdot 15 + 10 = 12.25$ euros.

2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.
- a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica. [1,25 puntos]
- b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado. [1,25 puntos]

- a) Llamamos “x” al número de sofás fabricados en la primera fábrica, “y” al número de sofás fabricados en la segunda y “z” al número de sofás fabricados en la tercera.

A partir de la información del ejercicio obtenemos las ecuaciones del sistema.

“El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades” $\rightarrow x + y + z = 1260$.

“La segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas” $\rightarrow y = x + z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo.

$$\left. \begin{array}{l} x + z + y = 1260 \\ y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow y + y = 1260 \Rightarrow 2y = 1260 \Rightarrow y = \frac{1260}{2} = 630 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + z = 630 \Rightarrow x = 630 - z \Rightarrow \begin{cases} x = 630 - \alpha \\ y = 630 \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Con la información proporcionada en el ejercicio solo podemos determinar que en la segunda fábrica se hicieron 630 sofás. El número de sofás hechos en la primera y tercera fábrica quedan indeterminados, a falta de algún dato más.

- b) Obtenemos una tercera ecuación con el nuevo dato proporcionado en este apartado.

“Un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color” $\rightarrow 0.10x + 0.30y + 0.20z = 284$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y resolvemos este nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} x = 630 - \alpha \\ y = 630 \\ z = \alpha \end{cases} \\ 0.10x + 0.30y + 0.20z = 284 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \begin{cases} x = 630 - \alpha \\ y = 630 \\ z = \alpha \end{cases} \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{array} \right\} \Rightarrow 630 - \alpha + 3 \cdot 630 + 2\alpha = 2840 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2520 + \alpha = 2840 \Rightarrow \alpha = 320 \Rightarrow \begin{cases} x = 630 - 320 = 310 \\ y = 630 \\ z = 320 \end{cases}$$

Se han producido 310 sofás en la primera fábrica, 630 en la segunda y 320 en la tercera.

3. Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función $G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$.

a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \frac{7350}{x} + 6x$. [1,25 puntos]

b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

a) A una velocidad constante de 40 km/h los 300 kilómetros se recorren en $300/40 = 7.5$ horas. Por las 7.5 horas hay que pagarle al conductor $7.5 \cdot 14.7 = 110.25$ euros.

En el viaje los litros de gasoil por hora son $G(40) = 5 + \frac{40^2}{98} = \frac{1045}{49}$, por lo que litros de gasoil

que se consumen durante el viaje son $\frac{1045}{49} \cdot 7.5$ litros. Lo multiplicamos por el precio por litro

para obtener el coste del gasoil $\rightarrow \frac{1045}{49} \cdot 7.5 \cdot 1.96 = 313.5$ euros.

El coste total del viaje es la suma del gasto en gasoil más el coste del conductor $110.25 + 313.5 = 423.75$ euros.

La función $C(x)$ que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor es la suma del gasto en gasoil y el coste del conductor.

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{tiempo}} \Rightarrow x = \frac{300}{\text{horas}} \Rightarrow \text{horas} = \frac{300}{x}$$

$$C(x) = 1.96 \cdot \frac{300}{x} \cdot G(x) + \frac{300}{x} \cdot 14.7 = 1.96 \cdot \frac{300}{x} \cdot \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) + \frac{300}{x} \cdot 14.7 =$$

$$= \frac{2940}{x} + \frac{588x^2}{98x} + \frac{4410}{x} = \frac{7350}{x} + 6x$$

La expresión de la función coste del viaje en función de la velocidad (x) es $C(x) = \frac{7350}{x} + 6x$.

b) Buscamos cuando la derivada del coste se anula.

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6 \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{7350}{x^2} + 6 = 0 \Rightarrow \frac{7350}{x^2} = 6 \Rightarrow 7350 = 6x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{7350}{6} = 1225 \Rightarrow x = \sqrt{1225} = \begin{cases} x = 35 \\ x = -35 \text{ ¡No válido!} \end{cases}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6 \Rightarrow C''(x) = 2\frac{7350}{x^3} \Rightarrow C''(35) = 2\frac{7350}{35^3} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función coste presenta un mínimo en $x = 35$.

El coste del viaje es mínimo para una velocidad de 35 km/h. Este coste mínimo tiene un valor de

$$C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420 \text{ euros.}$$

4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*. Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

- a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas). [1,25 puntos]
- b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí? [1,25 puntos]

a) Calculamos la matriz mágica pedida.

$$\begin{aligned} 10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C &= 10 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 54 & 0 \\ 18 & 18 & 18 \\ 36 & -18 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobamos que la matriz obtenida es mágica.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix} & \rightarrow & 10 + 41 + 3 = 54 \\ & & 11 + 18 + 25 = 54 \\ & & 33 - 5 + 26 = 54 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 54 & 54 & 54 \end{array}$$

La constante mágica de la matriz es 54.

- b) El padre de Martí cumple k años el día 8 del mes 9, por lo que la matriz mágica correspondiente a su padre es $8 \cdot A + 9 \cdot B + k \cdot C$. Obtenemos la expresión de dicha matriz.

$$\begin{aligned} 8 \cdot A + 9 \cdot B + k \cdot C &= 8 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -9 & 9 \\ 9 & 0 & -9 \\ -9 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3k & 0 \\ k & k & k \\ 2k & -k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3k-17 & 9 \\ 1+k & k & -1+k \\ -9+2k & 17-k & 2k-8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como la constante mágica de esta matriz es 153 la suma de los elementos de la primera fila debe ser 153.

$$\begin{pmatrix} 8 & 3k-17 & 9 \\ 1+k & k & -1+k \\ -9+2k & 17-k & 2k-8 \end{pmatrix} \rightarrow 8+3k-17+9=3k=153 \rightarrow \boxed{k=153/3=51}$$

El padre de Martí cumple 51 años.

5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están suscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu. [1,5 puntos]

b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto. [1 punto]

Llamamos G al suceso “la película la ha visto Guiu” y R al suceso “la película la ha visto Roc”. Sabemos que $P(G) = 0.5$, $P(R) = 0.6$ y $P(G \cap R) = 0.25$.

a) Nos piden calcular $P(R \cup G)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(R \cup G) = P(G) + P(R) - P(R \cap G) = 0.5 + 0.6 - 0.25 = \boxed{0.85}$$

La probabilidad de que al menos uno de los dos haya visto la película tiene un valor de 0.85.

También nos piden calcular $P(R \cap \bar{G})$.

$$P(R) = P(R \cap G) + P(R \cap \bar{G}) \Rightarrow 0.6 = 0.25 + P(R \cap \bar{G}) \Rightarrow P(R \cap \bar{G}) = 0.6 - 0.25 = \boxed{0.35}$$

La probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu tiene un valor de 0.35.

b) Nos piden calcular $P(G / (G \cup R))$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G / (G \cup R)) = \frac{P(G \cap (G \cup R))}{P(G \cup R)} = \{G \cap (G \cup R) = G\} = \frac{P(G)}{P(G \cup R)} = \frac{0.5}{0.85} = \boxed{\frac{10}{17} \approx 0.5882}$$

La probabilidad de que Guiu haya visto la película si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto tiene un valor de $\frac{10}{17} \approx 0.5882$.

6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo. [1 punto]

b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

Nota: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de

confianza $\gamma \in (0,1)$ viene dado por $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$. [1,5 puntos]

a) La muestra es de tamaño $n = 350$. La proporción muestral de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal es $p = \frac{218}{350} = \frac{109}{175} \approx 0.6229$.

El porcentaje muestral de personas que están a favor de la construcción del polideportivo tiene un valor aproximado de 62.29 %.

b) Como el tamaño de la muestra es grande para el cálculo del intervalo de confianza podemos

aplicar la fórmula $\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$.

Sabemos que $\gamma = 0.95 \in (0,1)$ y que $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95 \Rightarrow z_\gamma = 1.96$.

El intervalo de confianza pedido es:

$$\left[\frac{109}{175} - 1.96 \sqrt{\frac{\frac{109}{175} \left(1 - \frac{109}{175}\right)}{350}}, \frac{109}{175} + 1.96 \sqrt{\frac{\frac{109}{175} \left(1 - \frac{109}{175}\right)}{350}} \right] = [0.5721, 0.6736]$$

Con un nivel de confianza del 95% el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo está entre el 57.21% y el 67.36%.



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.
 - a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]
 - b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]
2. Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.
 - a) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]
 - b) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]
3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.
 - a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 - b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

- a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]
- b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]
5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.
- a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]
- b) Para $a = -1$, calcule A^2 , A^3 , y A^4 . Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23} . [1,5 puntos]
6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3 , es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.
- a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3 ? [1,5 puntos]
- b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

SOLUCIONES

1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.

- a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]
 b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

a) Llamamos “x”, “y”, “z” al número de clientes que han elegido esquí, kayak o moto acuática.

“DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total” $\rightarrow x + y + z = 45$.

“El número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak” $\rightarrow x = 3y$.

“La recaudación total del día ha sido de 1.700 €” $\rightarrow 40x + 20y + 60z = 1700$

Reunimos las ecuaciones en un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ x = 3y \\ 40x + 20y + 60z = 1700 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ x = 3y \\ 2x + y + 3z = 85 \end{array} \right\}$$

b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 45 \\ x = 3y \\ 2x + y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + y + z = 45 \\ 2 \cdot 3y + y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y + z = 45 \\ 7y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 45 - 4y \\ 7y + 3z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow 7y + 3(45 - 4y) = 85 \Rightarrow 7y + 135 - 12y = 85 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -50 \Rightarrow \boxed{y = 10} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 3 \cdot 10 = 30} \\ \boxed{z = 45 - 4 \cdot 10 = 5} \end{array} \right.$$

De los 45 clientes 30 realizaron esquí acuático, 10 realizaron kayak y 5 realizaron moto acuática.

2. Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.

- a) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]
 b) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Obtenemos la función beneficios. Es la diferencia entre los ingresos y los costes.

Como vende x coches a 35000 € cada uno los ingresos son $I(x) = 35000x$.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Averiguamos cuando los beneficios son nulos.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = -x^2 + 120x - 1100 \\ B(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 120x - 1100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-1)(-1100)}}{2(-1)} = \frac{-120 \pm 100}{-2} = \begin{cases} \frac{-120+100}{-2} = \boxed{10 = x} \\ \frac{-120-100}{-2} = \boxed{110 = x} \end{cases}$$

Comprobamos el signo de los beneficios antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(0,10)$ tomamos $x = 5$ y la función vale

$$B(5) = -5^2 + 120 \cdot 5 - 1100 = -525 < 0. \text{ El fabricante tiene pérdidas en } (0,10).$$

- En el intervalo $(10,110)$ tomamos $x = 50$ y la función vale

$$B(50) = -50^2 + 120 \cdot 50 - 1100 = 2400 > 0. \text{ El fabricante tiene beneficios en } (10,110).$$

- En el intervalo $(110, +\infty)$ tomamos $x = 120$ y la función vale

$$B(120) = -120^2 + 120 \cdot 120 - 1100 = -1100 < 0. \text{ El fabricante tiene pérdidas en } (110, +\infty).$$

Para no tener pérdidas deben fabricarse entre 10 y 110 coches.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 120 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 120 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 60}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(60) = -2 < 0 \rightarrow x = 60 \text{ es máximo relativo}$$

Produciendo 60 coches se obtiene un beneficio máximo.

Como $B(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 1100 = 2500$ el beneficio máximo tiene un valor de 2500 euros.

3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cajas tipo A e “y” al número de cajas tipo B.

Hacemos una tabla para ordenar la información proporcionada.

	Kg de naranjas	Kg de mandarinas	Ingresos
Nº cajas tipo A (x)	8x	2x	$0.6(8x) + 0.7(2x) = 6.2x$
Nº cajas tipo B (y)	5y	5y	$0.6(5y) + 0.7(5y) = 6.5y$
TOTALES	$8x + 5y$	$2x + 5y$	$6.2x + 6.5y$

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow I(x, y) = 6.2x + 6.5y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones:

“La empresa dispone de 24.000 kg de naranjas” $\rightarrow 8x + 5y \leq 24000$

“La empresa dispone de 12.000 kg de mandarinas” $\rightarrow 2x + 5y \leq 12000$

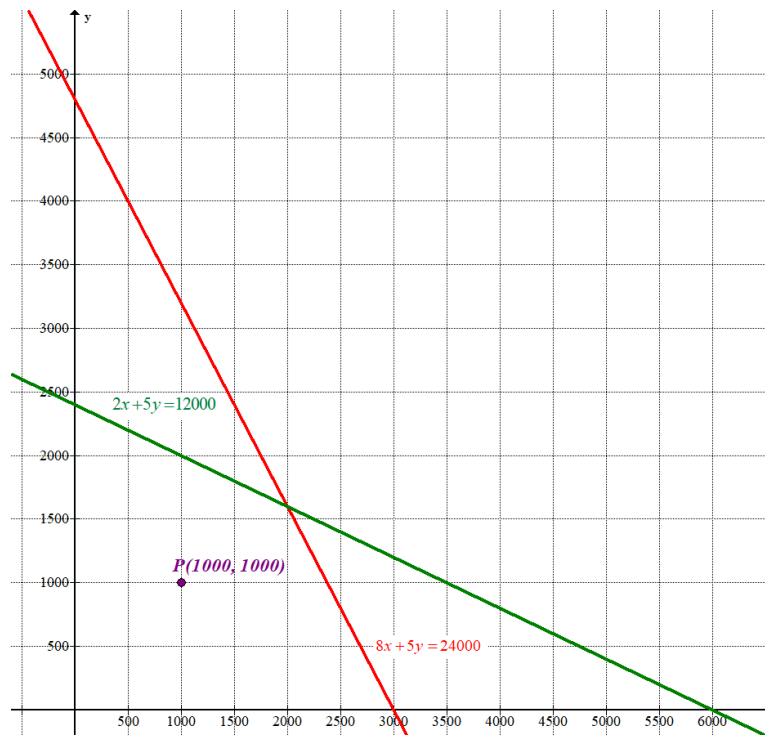
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$8x + 5y = 24000$	$2x + 5y = 12000$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{24000 - 8x}{5} \\ \hline 0 & 4800 \\ 3000 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{12000 - 2x}{5} \\ \hline 0 & 2400 \\ 6000 & 0 \end{array}$	Primer Cuadrante



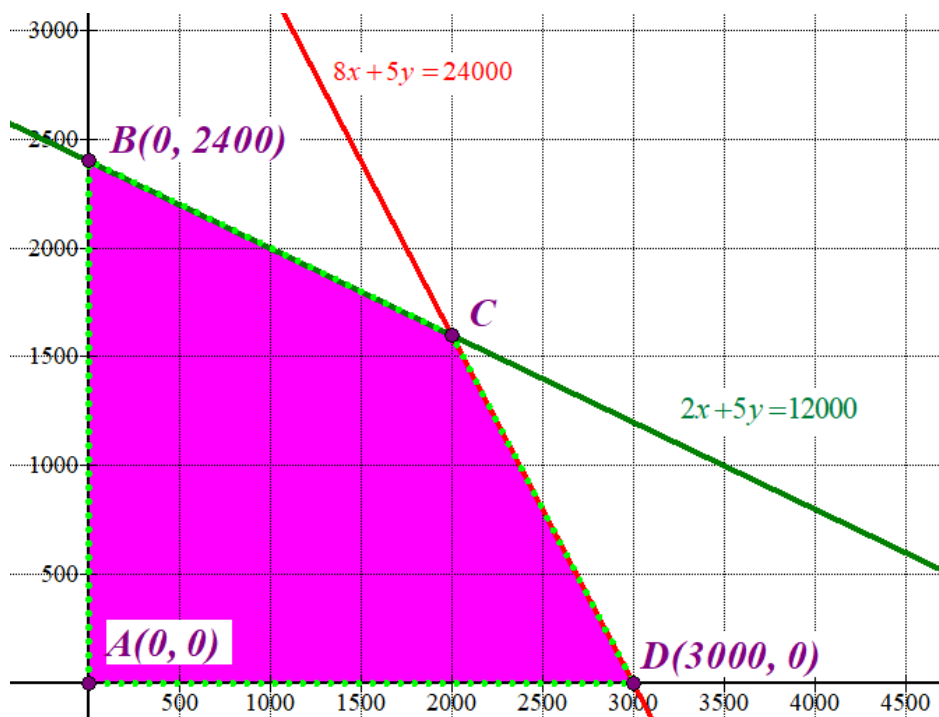
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y verde.

Comprobamos que el punto $P(1000, 1000)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 8000 + 5000 \leq 24000 \\ 2000 + 5000 \leq 12000 \\ 1000 \geq 0; 1000 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 5y = 24000 \\ 2x + 5y = 12000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8x + 5y = 24000 \\ -2x - 5y = -12000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{6x}{6} = 12000 \Rightarrow x = \frac{12000}{6} = 2000 \Rightarrow 4000 + 5y = 12000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 8000 \Rightarrow y = \frac{8000}{5} = 1600 \Rightarrow \boxed{C(2000, 1600)}$$

Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 2400), C(2000, 1600) y D(3000, 0).

- b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 6.2x + 6.5y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 2400) \rightarrow I(0, 2400) = 6.2 \cdot 0 + 6.5 \cdot 2400 = 15600 \text{ €}$$

$$C(2000, 1600) \rightarrow I(2000, 1600) = 6.2 \cdot 2000 + 6.5 \cdot 1600 = 22800 \text{ € ¡Máximo!}$$

$$D(3000, 0) \rightarrow I(3000, 0) = 6.2 \cdot 3000 + 6.5 \cdot 0 = 18600 \text{ €}$$

Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas son 22 800 € y se consiguen vendiendo 2000 cajas tipo A y 1600 tipo B.

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

- a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]
 b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]

- a) Nos piden determinar $f(1)$ y $f(2)$.

$$f(1) = \frac{30 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = \frac{30}{3} = 10$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = \frac{60}{4} = 15$$

En la semana 1 hay 10 000 infectados y en la semana 2 hay 15 000 infectados.

¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer?

Hallamos el límite de la función cuando $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{30t}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} - \frac{2t}{t^2} + \frac{4}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{30}{t}}{1 - \frac{2}{t} + \frac{4}{t^2}} = \frac{\frac{30}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = \boxed{0}$$

A largo plazo el número de infectados termina siendo cero, es decir, la infección tiende a desaparecer.

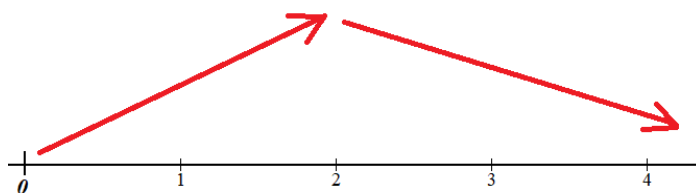
- b) Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f'(t) = \frac{30(t^2 - 2t + 4) - 30t(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 4)^2} = \frac{30t^2 - 60t + 120 - 60t^2 + 60t}{(t^2 - 2t + 4)^2} = \frac{-30t^2 + 120}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-30t^2 + 120}{(t^2 - 2t + 4)^2} = 0 \Rightarrow -30t^2 + 120 = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2} \quad (t \geq 0)$$

En $t = 2$ hay un punto crítico. Como en $t = 2$ la función vale 15 y en $t = 1$ vale 10 (menor) la función crece en el intervalo $[0, 2)$.

En $t = 3$ la función vale $f(3) = \frac{30 \cdot 3}{3^2 - 2 \cdot 3 + 4} = \frac{90}{7} \approx 12.85$ (menor de 15). La función decrece en el intervalo $(2, +\infty)$.



El máximo de la función se produce en $t = 2$ siendo $f(2) = 15$.

El máximo número de infectados es 15 000 que se producen en la semana 2.

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]
 b) Para $a = -1$, calcule A^2 , A^3 , y A^4 . Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23} . [1,5 puntos]

- a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2a & a-a \\ 2-2 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1+2a=1 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

El valor buscado es $a = 0$.

- b) Para $a = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1+1 \\ 2-2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-I) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-I)(-I) = I$$

Calculamos la inversa de la matriz A .

Como $A^2 = -I$ entonces $-A^2 = I \Rightarrow (-A)A = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Calculamos A^{23} .

$$A^{23} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 \cdot A^4 \cdot A^3 = I \cdot I \cdot I \cdot I \cdot I \cdot A^3 = A^3 = \boxed{-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3 , es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.
- a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3 ? [1,5 puntos]
- b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

- a) En la oferta 4×3 nos llevamos 4 botellas por el precio $70 \cdot 3 = 210$ céntimos. En la oferta 20 % de descuento si nos llevamos 4 botellas pagamos el 80 % de su precio, es decir, $0.80 \cdot (70 \cdot 4) = 224$ céntimos.

Para que 4 botellas me cuesten 210 céntimos cuando valen $70 \cdot 4 = 280$ céntimos el porcentaje que debemos pagar es $\frac{210}{280} = 0.75$. Debo pagar solo el 75 %, es decir, el descuento debe ser del 25 %.

- b) Con la oferta $m \times (m - 1)$ tenemos que m botellas cuestan $70m$ céntimos, pero solo pagamos $m - 1$ botellas, es decir, pagamos $70(m - 1) = 70m - 70$.

En la oferta con x % de descuento tenemos que pagar el $(100 - x)$ % .
 m botellas cuestan $70m$ céntimos. Con el descuento debo pagar:

$$\frac{100 - x}{100} 70m = \frac{7000m - 70xm}{100}.$$

Igualemos el pago de las dos formas y obtendremos el valor del descuento x en función de m .

$$\frac{7000m - 70xm}{100} = 70m - 70 \Rightarrow 7000m - 70xm = 7000m - 7000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70xm = 7000 \Rightarrow x = \frac{7000}{70m} = \frac{100}{m}$$

Para igualar la oferta $m \times (m - 1)$ el descuento debe ser del $\frac{100}{m}$ %.

PAU junio (serie 5) 2023

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- En los últimos meses, la demanda de gel hidroalcohólico ha bajado mucho respecto a los primeros momentos de la pandemia. La función $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, donde $x \in [0, +\infty)$ indica el número de meses transcurridos desde el inicio de la pandemia, da las ventas mensuales, en millones de litros, de gel hidroalcohólico.
 - Determine si la función $f(x)$ es continua en todo su dominio. Calcule la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$. ¿A qué valor tenderán las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo? [1,25 puntos]
 - Compruebe que la función es decreciente en todo su dominio y encuentre la recta tangente en el punto $x = 1$. [1,25 puntos]
- Una gran pastelería especializada en cocas de San Juan elabora la masa de las cocas con harina y azúcar. En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año y quieren hacer de dos tipos: sin relleno y rellenas de crema.

Para elaborar la masa de una coca sin relleno se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar. Este tipo de coca la ponen a la venta a 15 €. En cambio, para elaborar la masa de una coca rellena de crema se necesitan 400 g de harina y 120 g de azúcar. Y esta otra coca se vende a 25 €.

La pastelería ya ha cerrado el periodo de pedidos anticipados y, una vez contabilizados, se sabe que como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema. La pastelera jefa quiere saber cuántas cocas de cada tipo tendría que elaborar y vender para obtener el máximo de ingresos.

 - Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 - Determine cuántas cocas de cada tipo hay que elaborar para obtener el máximo de ingresos y cuáles serán esos ingresos. ¿Sobrarán alguna cantidad de los ingredientes utilizados para elaborar la masa? En caso afirmativo, ¿de qué ingrediente y de qué cantidad se trata? [1,25 puntos]
- Una empresa distribuye dos tipos de paquetes a las farmacias (A y B). El paquete de tipo A contiene los siguientes productos: 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos. El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos.

El precio del paquete de tipo A es de 550 € y el del paquete de tipo B es de 200 €. El precio de cada producto es el mismo en los dos tipos de paquetes.

a) Con los datos del enunciado, ¿es posible encontrar el precio de un termómetro, el de una mascarilla y el de un test de antígenos? Justifique su respuesta planteando y clasificando un sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema dejando la solución en función del precio del test de antígenos. [1,75 puntos]

b) Si un test de antígenos cuesta 4 €, ¿cuál será el precio de una mascarilla? ¿Y el de un termómetro? [0,75 puntos]

4. El coste anual de la limpieza de las instalaciones de una empresa que abrió hace 20 años, expresado en centenares de euros, viene dado por la función

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

en la que t es el tiempo expresado en años.

a) ¿Cuál fue el coste de la limpieza de la empresa en el momento de abrir? ¿Y al cabo de los 10 años de funcionamiento? Compruebe que en este punto la función es continua. ¿Cuál es el coste de la limpieza de la empresa al cabo de 20 años de funcionamiento? [1,25 puntos]

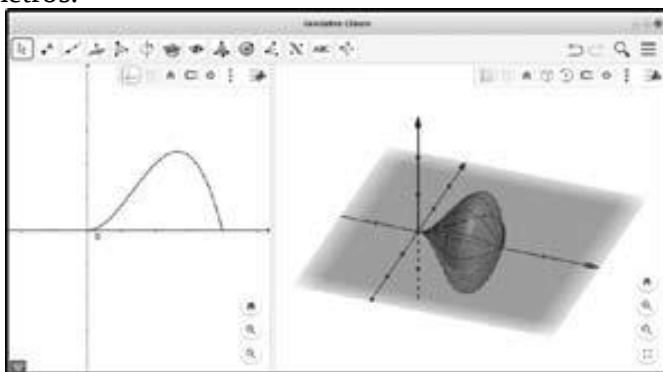
b) Represente gráficamente la función $C(t)$. ¿En qué momento el coste de la limpieza de la empresa fue máximo? [1,25 puntos]

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a y b son dos parámetros reales.

a) Encuentre los valores de los parámetros a y b para los que se cumple que $A^2 - 2A = B$. [1,25 puntos]

b) Si $a = 1$ y $b = 1$, resuelva la ecuación matricial $2A = AX + B$. [1,25 puntos]

6. Una joven emprendedora quiere crear una empresa de peonzas, que tiene pensado imprimir con una impresora 3D a partir de un diseño matemático hecho con el programa GeoGebra. Para hacerlo, hace girar el perfil de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ alrededor del eje de abscisas entre los dos puntos de corte con este eje, y así obtiene una peonza tumbada. Las unidades están expresadas en centímetros.



a) ¿Cuál será la altura de la peonza? Observe que para obtenerla debe calcular la distancia entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas. [1 punto]

b) ¿Cuál será la anchura de la peonza? Observe que la anchura corresponde al doble del valor que toma la función en el máximo que hay entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

- 1.** En los últimos meses, la demanda de gel hidroalcohólico ha bajado mucho respecto a los primeros momentos de la pandemia. La función $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, donde $x \in [0, +\infty)$ indica el número de meses transcurridos desde el inicio de la pandemia, da las ventas mensuales, en millones de litros, de gel hidroalcohólico.
- a)** Determine si la función $f(x)$ es continua en todo su dominio. Calcule la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$. ¿A qué valor tenderán las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo? [1,25 puntos]
- b)** Compruebe que la función es decreciente en todo su dominio y encuentre la recta tangente en el punto $x = 1$. [1,25 puntos]

- a) La función es racional y es continua en todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$4x+1=0 \Rightarrow 4x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \notin [0, +\infty)$$

Como el valor que anula el denominador es negativo la función es continua en $[0, +\infty)$.

Calculamos la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{12+8 \cdot 0}{4 \cdot 0+1} = 12 \\ f(1) = \frac{12+8 \cdot 1}{4 \cdot 1+1} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow TVM_f[0,1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-12}{1} = -8$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12+8x}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{x} + \frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{x} + 8}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{12}{\infty} + 8}{4 + \frac{1}{\infty}} = \frac{8}{4} = 2$$

Las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo tienden a ser de 2 millones de litros.

- b) Obtenemos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{12+8x}{4x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{8(4x+1) - 4(12+8x)}{(4x+1)^2} = \frac{32x+8-48-32x}{(4x+1)^2} = \frac{-40}{(4x+1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa, pues el numerador es constante y negativo y el denominador siempre es positivo (elevado al cuadrado).

La función es decreciente en $[0, +\infty)$.

Hallamos la recta tangente en el punto $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 \\ f'(1) = \frac{-40}{(4+1)^2} = \frac{-8}{5} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 4 = \frac{-8}{5}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-8}{5}x + \frac{8}{5} + 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-8}{5}x + \frac{28}{5}}$$

2. Una gran pastelería especializada en cocas de San Juan elabora la masa de las cocas con harina y azúcar. En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año y quieren hacer de dos tipos: sin relleno y rellenas de crema.

Para elaborar la masa de una coca sin relleno se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar. Este tipo de coca la ponen a la venta a 15 €. En cambio, para elaborar la masa de una coca rellena de crema se necesitan 400 g de harina y 120 g de azúcar. Y esta otra coca se vende a 25 €.

La pastelería ya ha cerrado el periodo de pedidos anticipados y, una vez contabilizados, se sabe que como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema. La pastelera jefa quiere saber cuántas cocas de cada tipo tendría que elaborar y vender para obtener el máximo de ingresos.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

[1,25 puntos]

b) Determine cuántas cocas de cada tipo hay que elaborar para obtener el máximo de ingresos y cuáles serán esos ingresos. ¿Sobrarán alguna cantidad de los ingredientes utilizados para elaborar la masa? En caso afirmativo, ¿de qué ingrediente y de qué cantidad se trata?

[1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cocas sin relleno e “y” al número de cocas con relleno de crema. Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Gramos de harina	Gramos de azúcar	Ingresos
Nº cocas sin relleno (x)	500x	300x	15x
Nº de cocas con relleno (y)	400y	120y	25y
TOTALES	500x + 400y	300x + 120y	15x + 25y

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 15x + 25y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones:

“En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año” $\rightarrow$

$$500x + 400y \leq 60000; 300x + 120y \leq 30000$$

“Como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema” $\rightarrow$

$$x \geq 60; y \geq 30$$

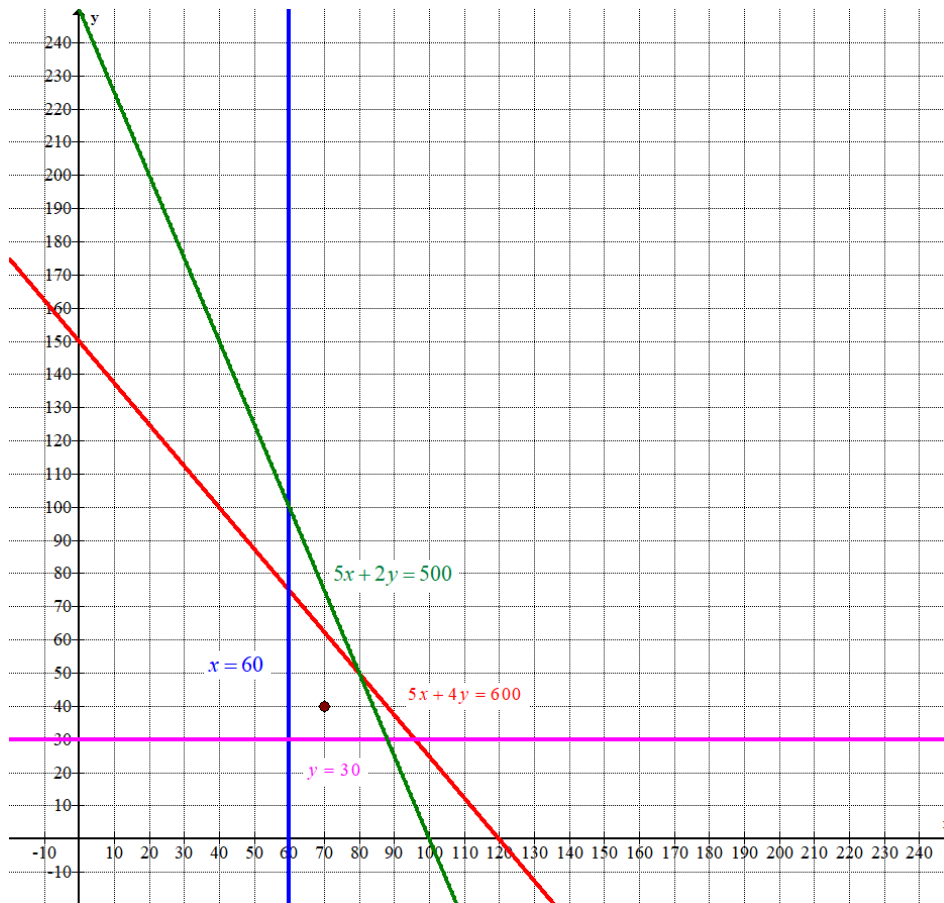
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 400y \leq 60000 \\ 300x + 120y \leq 30000 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 600 \\ 5x + 2y \leq 500 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$5x + 4y = 600$	$5x + 2y = 500$	$x = 60$	$y = 30$	$x \geq 0; y \geq 0$																
$x \mid y = \frac{600 - 5x}{4}$ <table> <tr><td>0</td><td>150</td></tr> <tr><td>80</td><td>50</td></tr> </table>	0	150	80	50	$x \mid y = \frac{500 - 5x}{2}$ <table> <tr><td>0</td><td>250</td></tr> <tr><td>80</td><td>50</td></tr> </table>	0	250	80	50	$x = 60 \mid y$ <table> <tr><td>60</td><td>30</td></tr> <tr><td>60</td><td>75</td></tr> </table>	60	30	60	75	$x \mid y = 30$ <table> <tr><td>0</td><td>30</td></tr> <tr><td>60</td><td>30</td></tr> </table>	0	30	60	30	Primer Cuadrante
0	150																			
80	50																			
0	250																			
80	50																			
60	30																			
60	75																			
0	30																			
60	30																			



Como las restricciones son

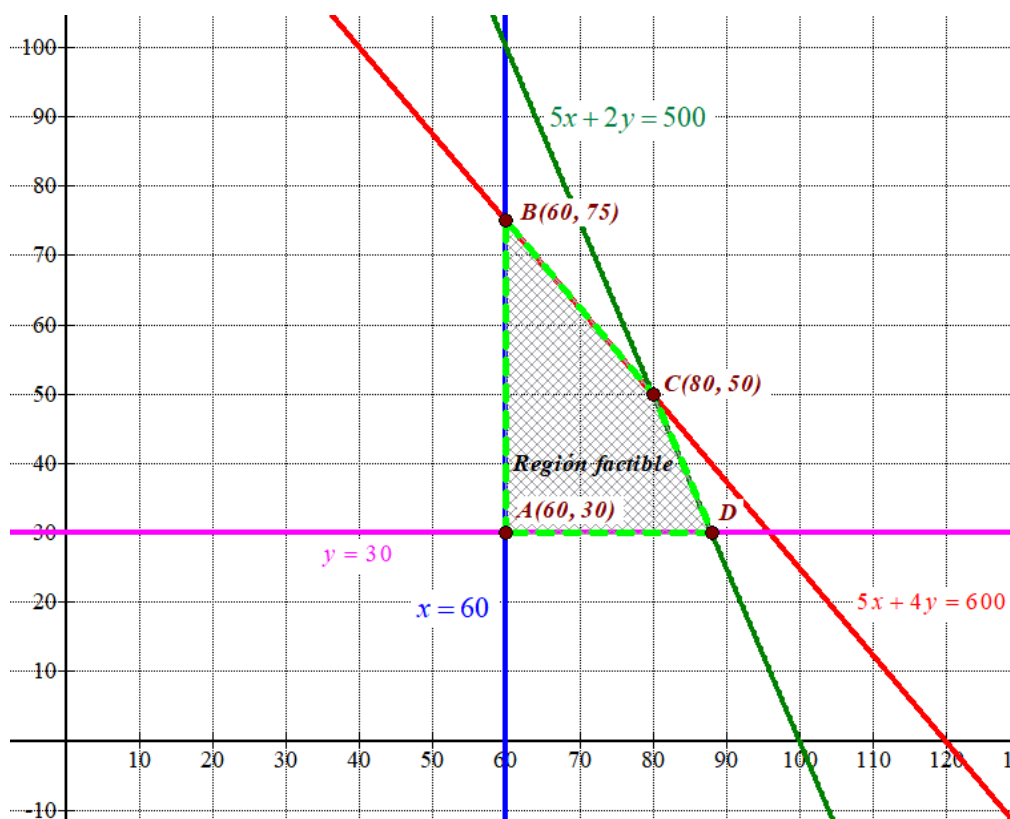
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 600 \\ 5x + 2y \leq 500 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas oblicuas roja y verde, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto $P(70, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 70 + 4 \cdot 40 \leq 600 \\ 5 \cdot 70 + 2 \cdot 40 \leq 500 \\ 70 \geq 60 \\ 40 \geq 30 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} y = 30 \\ 5x + 2y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 60 = 500 \Rightarrow 5x = 440 \Rightarrow x = 88 \Rightarrow D(88, 30)$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 15x + 25y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo.

$$A(60, 30) \rightarrow f(60, 30) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 30 = 1650$$

$$B(60, 75) \rightarrow f(60, 75) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 75 = 2775 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(80, 50) \rightarrow f(80, 50) = 15 \cdot 80 + 25 \cdot 50 = 2450$$

$$D(88, 30) \rightarrow f(88, 30) = 15 \cdot 88 + 25 \cdot 30 = 2070$$

Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas son 2775 € y se consiguen elaborando 60 cocas sin relleno y 75 rellenas de crema.

Fabricando las cocas indicadas tenemos:

	Gramos de harina	Gramos de azúcar
60 cocas sin relleno	30 000	18000
75 cocas con relleno	30 000	9000
TOTALES	60 000	27 000

Como se dispone de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar, no sobra harina y sobran 3 kilogramos de azúcar.

3. Una empresa distribuye dos tipos de paquetes a las farmacias (A y B). El paquete de tipo A contiene los siguientes productos: 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos. El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos.

El precio del paquete de tipo A es de 550 € y el del paquete de tipo B es de 200 €. El precio de cada producto es el mismo en los dos tipos de paquetes.

a) Con los datos del enunciado, ¿es posible encontrar el precio de un termómetro, el de una mascarilla y el de un test de antígenos? Justifique su respuesta planteando y clasificando un sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema dejando la solución en función del precio del test de antígenos.

[1,75 puntos]

b) Si un test de antígenos cuesta 4 €, ¿cuál será el precio de una mascarilla? ¿Y el de un termómetro?

[0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al precio de un termómetro digital, “y” al precio de una mascarilla y “z” al precio de un test rápido de antígenos.

El paquete de tipo A contiene 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos y cuesta 550 € $\rightarrow 5x + 30y + 10z = 550$.

El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos y cuesta 200 € $\rightarrow x + 15y + 20z = 200$.

El sistema queda
$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases}$$
.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & 30 & 10 \\ 1 & 15 & 20 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2 pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera columna tiene determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 30 = 45 \neq 0$$

Por lo tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada, pero menor que el número de incógnitas (3) y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius podemos decir que el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y + 2z = 110 \\ x = -15y - 20z + 200 \end{cases} \Rightarrow -15y - 20z + 200 + 6y + 2z = 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y - 18z = -90 \Rightarrow y + 2z = 10 \Rightarrow \boxed{y = 10 - 2z} \Rightarrow x = -15(10 - 2z) - 20z + 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -150 + 30z - 20z + 200 = 10z + 50 \Rightarrow \begin{cases} x = 10z + 50 \\ y = 10 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). El precio de un termómetro (x) y de una mascarilla (y) depende del precio de un test de antígenos (z).

b) Si el test vale 4 € el termómetro valdrá $4 \cdot 10 + 50 = 90$ euros. El precio de la mascarilla es de $10 - 2 \cdot 4 = 2$ euros.

4. El coste anual de la limpieza de las instalaciones de una empresa que abrió hace 20 años, expresado en centenares de euros, viene dado por la función

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

en la que t es el tiempo expresado en años.

- a) ¿Cuál fue el coste de la limpieza de la empresa en el momento de abrir? ¿Y al cabo de los 10 años de funcionamiento? Compruebe que en este punto la función es continua. ¿Cuál es el coste de la limpieza de la empresa al cabo de 20 años de funcionamiento? [1,25 puntos]
 b) Represente gráficamente la función $C(t)$. ¿En qué momento el coste de la limpieza de la empresa fue máximo? [1,25 puntos]

a) Como $C(0) = \frac{0^2}{10} + 10 = 10$ el coste de la limpieza al abrir es de 1000 euros.

Como $C(10) = \frac{10^2}{10} + 10 = 20$ el coste de la limpieza al cabo de 10 años es de 2000 euros.

Comprobamos la continuidad de la función en $t = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} C(10) = 20 \\ \lim_{t \rightarrow 10^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} \frac{t^2}{10} + 10 = 20 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} 28 - \frac{(t-14)^2}{2} = 28 - \frac{(10-14)^2}{2} = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 10^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} C(t) = C(10) = 20$$

La función es continua en $t = 10$.

Como $C(20) = 28 - \frac{(20-14)^2}{2} = 10$ al cabo de 20 años el coste de la limpieza es de 1000 €.

- b) La gráfica son dos trozos de dos parábolas. Hallamos el vértice de cada una de ellas viendo cuando se anula la derivada.

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases} \Rightarrow C'(t) = \begin{cases} \frac{2t}{10} = \frac{t}{5}, & \text{si } t \in [0, 10] \\ -\frac{2(t-14)}{2} = -t + 14, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{5} = 0 \rightarrow t = 0 \in [0, 10] \\ -t + 14 = 0 \rightarrow t = 14 \in (10, 20] \end{cases}$$

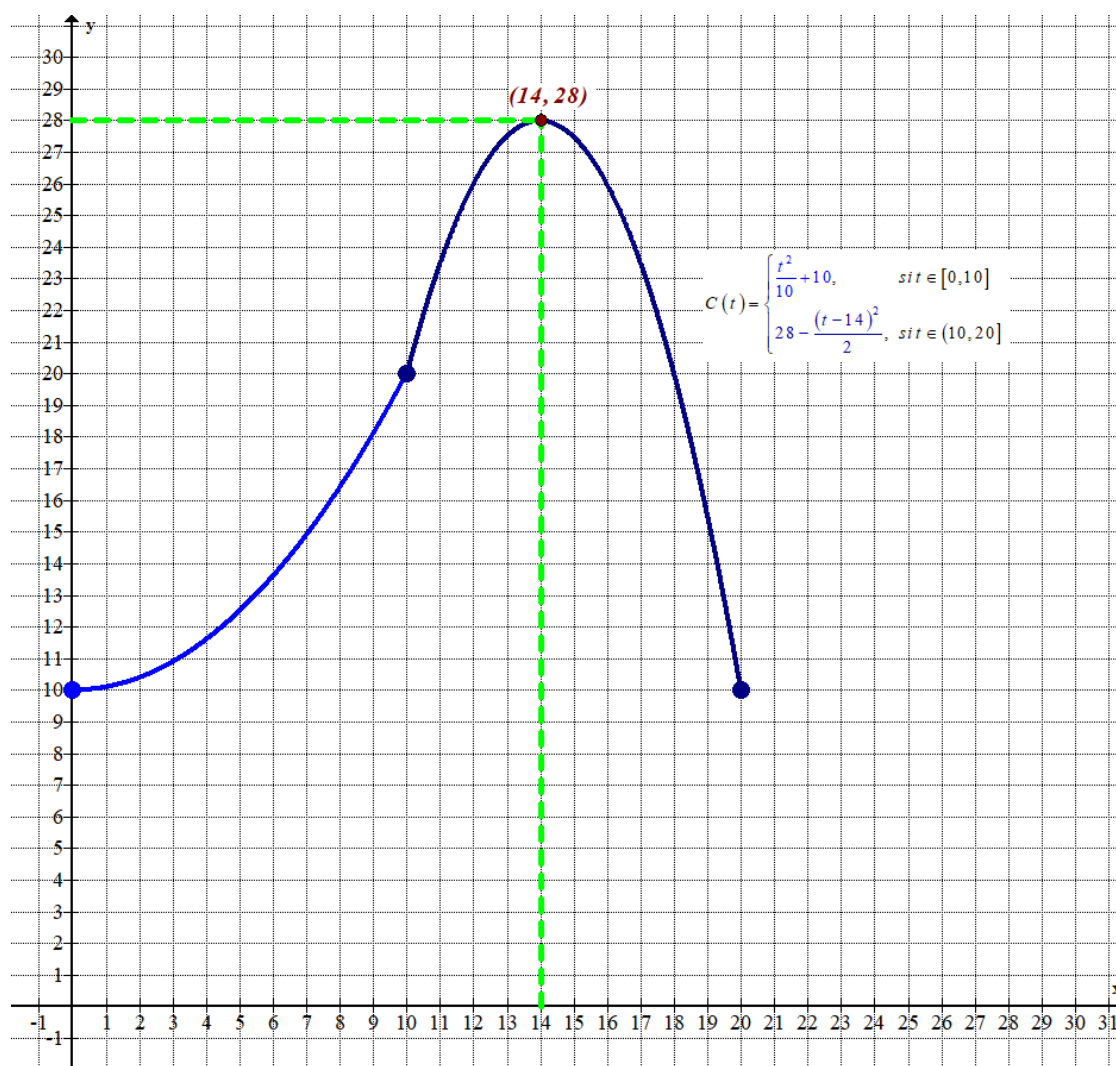
De 0 a 10 la función es creciente pues su derivada $C'(t) = \frac{t}{5}$ es positiva. De 10 a 14 la función es creciente pues su derivada $C'(t) = 14 - t$ es positiva. De 14 a 20 la derivada $C'(t) = 14 - t$ es negativa y la función es decreciente.

$$si\ t \in [0,10]$$

t	$C(t) = \frac{t^2}{10} + 10$
0	10
5	12.5
10	20

$$si\ t \in (10,20]$$

t	$C(t) = 28 - \frac{(t-14)^2}{2}$
12	26
14	28
20	10



El coste de la limpieza de la empresa fue máximo al cabo del año 14, siendo el coste de 2800 euros.

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a y b son dos parámetros reales.

a) Encuentre los valores de los parámetros a y b para los que se cumple que $A^2 - 2A = B$.
[1,25 puntos]

b) Si $a = 1$ y $b = 1$, resuelva la ecuación matricial $2A = AX + B$. [1,25 puntos]

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} A^2 - 2A = B &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+ba \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \\ 0 = 0 \\ a^2 - 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab - 2b = 1 \\ a^2 - 2a = 0 \rightarrow a(a-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow 0 - 2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow 4b - 2b = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Hay dos soluciones: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$2A = AX + B \Rightarrow 2A - B = AX \Rightarrow A^{-1}(2A - B) = X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A^{-1}A - A^{-1}B = X \Rightarrow X = 2I - A^{-1}B$$

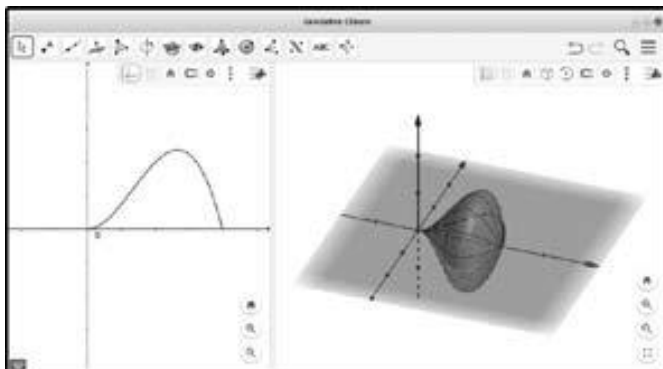
Si $a = 1$ y $b = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos la inversa de la matriz A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X .

$$X = 2I - A^{-1}B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Una joven emprendedora quiere crear una empresa de peonzas, que tiene pensado imprimir con una impresora 3D a partir de un diseño matemático hecho con el programa GeoGebra. Para hacerlo, hace girar el perfil de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ alrededor del eje de abscisas entre los dos puntos de corte con este eje, y así obtiene una peonza tumbada. Las unidades están expresadas en centímetros.



- a) ¿Cuál será la altura de la peonza? Observe que para obtenerla debe calcular la distancia entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1 punto]
- b) ¿Cuál será la anchura de la peonza? Observe que la anchura corresponde al doble del valor que toma la función en el máximo que hay entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1,5 puntos]

- a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 2x^2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La altura de la peonza es de 2 centímetros.

- b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 4x \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituimos $x = \frac{4}{3}$ en la segunda derivada para averiguar si es un máximo.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = -6x + 4 \Rightarrow f''\left(\frac{4}{3}\right) = -6 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = \frac{4}{3} \in (0, 2)$.

Como $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$ la anchura de la peonza es de $2 \cdot \frac{32}{27} = \frac{64}{27} \approx 2.37$ centímetros.

PAU Junio (serie 1) 2023



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

**Proves d'accés a la universitat**

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

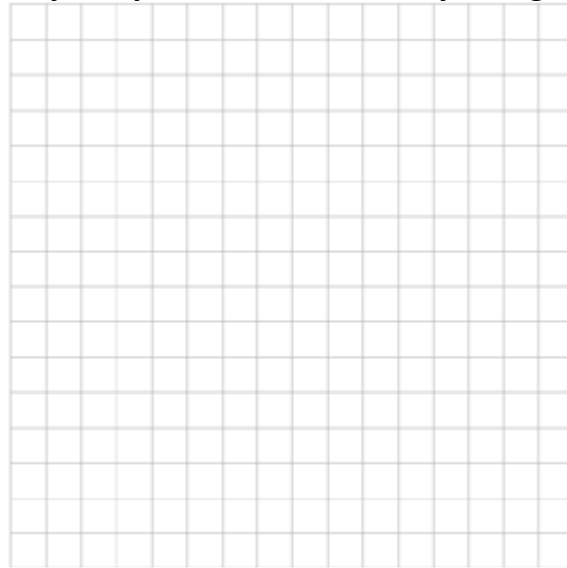
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. El precio de un vuelo entre Barcelona e Islandia es de 500€. Una compañía aérea tiene capacidad para 300 pasajeros diarios, pero existe una determinada época del año en la que sólo vende 180 billetes. Después de realizar un estudio de mercado, la compañía se da cuenta de que la relación entre el precio del billete y el número de pasajeros es lineal, por lo que por cada 5 € de descuento en el precio del billete consigue dos pasajeros más.
 - a) Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento, escriba la función que da los ingresos diarios de la compañía por la venta de billetes en función de x . [1 punto]
 - b) ¿A qué precio es necesario vender cada billete para obtener el máximo de ingresos? ¿Qué ingresos se obtendrán con este precio? [1,5 puntos]
2. Un centro cívico ofrece cursos de francés de nivel principiante, intermedio y avanzado. Los alumnos inscritos, si lo desean, tienen garantizada una plaza para el siguiente curso. Es por ello que, antes de terminar el curso, se hacen las reservas de plaza para el próximo curso. Del alumnado de nivel principiante, un 15% quiere repetir el mismo curso, un 50% quiere realizar el curso intermedio y un 5% quiere pasar directamente al curso de nivel avanzado. En cuanto al alumnado de nivel intermedio, un 10 % quiere repetir el curso y un 60 % quiere realizar el curso de nivel avanzado. Por último, del alumnado de nivel avanzado, un 20% quiere repetir el curso. Ningún alumno pide reserva de plaza para un curso de nivel inferior y el resto de alumnos no quieren continuar en el centro el próximo curso. Este año ha habido 100 alumnos matriculados de nivel novato, 90 de nivel intermedio y 60 de nivel avanzado.
 - a) Calcule el número de plazas a reservar de cada nivel para el curso siguiente mediante un producto de matrices. [1,25 puntos]
 - b) El mismo centro cívico ofrece dos horarios de yoga, uno por la mañana y uno por la tarde. Para el próximo curso, el 50 % de los alumnos que actualmente hacen yoga por la mañana quieren continuar con el mismo horario, mientras que un 30 % quieren pasar al horario de tarde. El resto de alumnos por la mañana no continuarán. En cuanto a los alumnos que actualmente realizan yoga por la tarde, un 40% quieren pasar al horario de mañana y un 60% quieren continuar haciendo el horario de tarde. Si sabemos que para el curso siguiente es necesario reservar 49 plazas para el horario de mañana y 51 plazas para el horario de tarde, ¿cuántos alumnos están matriculados actualmente en cada horario? [1,25 puntos]

3. Robert ha realizado tres pruebas de una asignatura. Haciendo la media aritmética de las notas obtenidas en cada una de las tres pruebas le ha quedado una nota global de 6. Robert sabe que la nota de la tercera prueba ha sido igual que la media aritmética de las notas de las otras dos pruebas.
- a) Con esta información, ¿puede saber alguna de las tres notas? En caso afirmativo, ¿de qué prueba y cuál sería la nota obtenida? [1,25 puntos]
- b) La profesora le dice que ha sido muy irregular y que si sólo se tuvieran en cuenta las notas de las dos últimas pruebas habría obtenido una media de 7. ¿Qué nota ha obtenido en cada prueba? [1,25 puntos]

4. Una empresa de Menorca quiere ofrecer dos tipos de actividades: bautizos de submarinismo desde una barca y excursiones en barca por la costa para bañarse en calas. El bautizo de submarinismo tiene un precio de 60 euros por persona y en cada embarcación irán 10 participantes y 5 instructores. La excursión por la costa tiene un precio de 18 euros por persona y en cada embarcación irán 25 participantes y 2 instructores. La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales y de 75 instructores que pueden realizar salidas de submarinismo o excursiones en barca por las calas indistintamente. Su intención es obtener el máximo de ingresos suponiendo que llenará todas las embarcaciones.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]



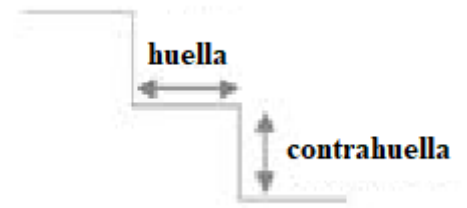
- b) ¿Cuántas salidas de cada tipo debe ofrecer la empresa todos los días para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuánto dinero ingresará a diario? [1,25 puntos]

5. El número de kilogramos de comida que han gastado en un albergue de animales durante una semana concreta se puede calcular mediante la función $f(t) = 10 \left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \right)$, en la que

t es el tiempo en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la semana siguiente).

- a) Calcule cuántos kilogramos de comida se gastaron el primer lunes y el lunes siguiente. Encuentre qué día de esa semana se gastaron 100 kg de comida. [1 punto]
- b) Determine los días de la semana en que el gasto en comida fue mayor y los días en que fue menor. ¿Cuántos kilogramos de comida se gastaron estos días? [1,5 puntos]

6. Cuando se diseñan los escalones de una escalera hay varios parámetros a tener en cuenta, dos de los cuales son la huella (la parte horizontal del escalón, donde se pone el pie) y la contrahuella (la parte vertical del escalón, es decir, la altura). El arquitecto francés François Blondel estableció a finales del siglo XVII que la relación ideal entre estas dos magnitudes era que la suma de dos contrahuellas más una huella fuera igual a 64 cm. Llamamos y a la longitud de la contrahuella y x a la longitud de la huella.



- a) Encuentre la función que permite calcular la longitud ideal de la contrahuella en función de la longitud de la huella. ¿Cuál sería la longitud ideal de la contrahuella si la huella es de 28 cm? [1 punto]
- b) La normativa actual establece que en el diseño de escaleras de uso público es necesario que la huella sea como mínimo de 28 cm y que la contrahuella esté comprendida entre 13 y 18,5 cm. Además, la suma de dos contrahuellas más una huella debe estar entre 54 y 70 cm. Escriba estas tres condiciones en función de x y de y . Si queremos construir una escalera con escalones de 40 cm de huella, calcule entre qué valores debe estar comprendida la contrahuella para cumplir con la normativa actual. [1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. El precio de un vuelo entre Barcelona e Islandia es de 500€. Una compañía aérea tiene capacidad para 300 pasajeros diarios, pero existe una determinada época del año en la que sólo vende 180 billetes. Después de realizar un estudio de mercado, la compañía se da cuenta de que la relación entre el precio del billete y el número de pasajeros es lineal, por lo que por cada 5 € de descuento en el precio del billete consigue dos pasajeros más.
- a) Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento, escriba la función que da los ingresos diarios de la compañía por la venta de billetes en función de x . [1 punto]
- b) ¿A qué precio es necesario vender cada billete para obtener el máximo de ingresos? ¿Qué ingresos se obtendrán con este precio? [1,5 puntos]

- a) Para $x = 0$ el número de pasajeros es 180, para $x = 1$ el número de pasajeros es $180 + 2$, para $x = 2$ el número de pasajeros es $180 + 2 \cdot 2$, así sucesivamente para x descuentos de 5 € el número de pasajeros es $180 + 2x$. Como el precio del vuelo sin descuentos es de 500 €, tenemos que para x descuentos de 5 € el billete costará $500 - 5x$ y los ingresos serán $(180 + 2x)(500 - 5x)$.

$$I(x) = (180 + 2x)(500 - 5x) = 90000 - 10x^2 + 1000x - 900x = -10x^2 + 100x + 90000$$

- b) Derivamos la función ingresos y buscamos sus puntos críticos.

$$\left. \begin{aligned} I'(x) = -10x^2 + 100x + 90000 &\Rightarrow I'(x) = -20x + 100 \\ I'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -20x + 100 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$I'(x) = -20x + 100 \Rightarrow I''(x) = -20 \Rightarrow I''(5) = -20 < 0 \rightarrow x = 5 \text{ es máximo relativo}$$

La función ingresos toma un valor máximo para 5 descuentos.

Con 5 descuentos de 5 € el precio del billete es $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €.

Los ingresos que se obtendrán son $I(5) = -10 \cdot 5^2 + 100 \cdot 5 + 90.000 = 90.250$ €.

2. Un centro cívico ofrece cursos de francés de nivel principiante, intermedio y avanzado. Los alumnos inscritos, si lo desean, tienen garantizada una plaza para el siguiente curso. Es por ello que, antes de terminar el curso, se hacen las reservas de plaza para el próximo curso. Del alumnado de nivel principiante, un 15% quiere repetir el mismo curso, un 50% quiere realizar el curso intermedio y un 5% quiere pasar directamente al curso de nivel avanzado. En cuanto al alumnado de nivel intermedio, un 10 % quiere repetir el curso y un 60 % quiere realizar el curso de nivel avanzado. Por último, del alumnado de nivel avanzado, un 20% quiere repetir el curso. Ningún alumno pide reserva de plaza para un curso de nivel inferior y el resto de alumnos no quieren continuar en el centro el próximo curso. Este año ha habido 100 alumnos matriculados de nivel novato, 90 de nivel intermedio y 60 de nivel avanzado.

- a) Calcule el número de plazas a reservar de cada nivel para el curso siguiente mediante un producto de matrices. [1,25 puntos]
- b) El mismo centro cívico ofrece dos horarios de yoga, uno por la mañana y uno por la tarde. Para el próximo curso, el 50 % de los alumnos que actualmente hacen yoga por la mañana quieren continuar con el mismo horario, mientras que un 30 % quieren pasar al horario de tarde. El resto de alumnos por la mañana no continuarán. En cuanto a los alumnos que actualmente realizan yoga por la tarde, un 40% quieren pasar al horario de mañana y un 60% quieren continuar haciendo el horario de tarde. Si sabemos que para el curso siguiente es necesario reservar 49 plazas para el horario de mañana y 51 plazas para el horario de tarde, ¿cuántos alumnos están matriculados actualmente en cada horario? [1,25 puntos]

- a) Representamos en las columnas de una matriz cuadrada de orden 3 los porcentajes de alumnos que se van a matricular por cada nivel.

$$\begin{array}{l}
 \text{Prin} \quad \text{Interm} \quad \text{Avanz} \\
 \text{Nivel principiante}(\%) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Nivel Intermedio}(\%) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.50 & 0.10 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{Nivel Avanzado}(\%) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.05 & 0.60 & 0.20 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

En una matriz columna ponemos el número de alumnos matriculados en cada nivel.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Nivel principiante} \\ \text{Nivel Intermedio} \\ \text{Nivel Avanzado} \end{array}$$

Realizando el producto de ambas matrices obtenemos el número de alumnos que el curso próximo se matricularán en cada nivel.

$$\begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.10 & 0 \\ 0.05 & 0.60 & 0.20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 \cdot 100 \\ 0.5 \cdot 100 + 0.1 \cdot 90 \\ 0.05 \cdot 100 + 0.6 \cdot 90 + 0.2 \cdot 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

El número de plazas a reservar son 15 en nivel principiante, 59 en nivel intermedio y 71 en nivel avanzado.

- b) Si llamamos “x” a los alumnos matriculados por la mañana e “y” a los alumnos matriculados por la tarde tenemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.30 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.30 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.5x + 0.4y \\ 0.3x + 0.6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0.5x + 0.4y = 49 \\ 0.3x + 0.6y = 51 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 490 \\ 3x + 6y = 510 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 490 \\ x + 2y = 170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 490 \\ x = 170 - 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(170 - 2y) + 4y = 490 \Rightarrow 850 - 10y + 4y = 490 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 360 = 6y \Rightarrow \boxed{y = \frac{360}{6} = 60} \Rightarrow \boxed{x = 170 - 120 = 50}$$

Hay matriculados 50 alumnos en horario de mañana y 60 en horario de tarde.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

También podemos resolver la ecuación matricial usando la matriz inversa.

Hallamos la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.30 & 0.60 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.30 & 0.60 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}}{0.30 - 0.12} = \frac{1}{0.18} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Con lo que

$$\begin{pmatrix} 0.50 & 0.40 \\ 0.30 & 0.60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.18} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{0.18} \begin{pmatrix} 0.6 \cdot 49 - 0.4 \cdot 51 \\ -0.3 \cdot 49 + 0.5 \cdot 51 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.18} \begin{pmatrix} 9 \\ 10.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Hay matriculados 50 alumnos en horario de mañana y 60 en horario de tarde.

3. Robert ha realizado tres pruebas de una asignatura. Haciendo la media aritmética de las notas obtenidas en cada una de las tres pruebas le ha quedado una nota global de 6. Robert sabe que la nota de la tercera prueba ha sido igual que la media aritmética de las notas de las otras dos pruebas.
- a) Con esta información, ¿puede saber alguna de las tres notas? En caso afirmativo, ¿de qué prueba y cuál sería la nota obtenida? [1,25 puntos]
- b) La profesora le dice que ha sido muy irregular y que si sólo se tuvieran en cuenta las notas de las dos últimas pruebas habría obtenido una media de 7. ¿Qué nota ha obtenido en cada prueba? [1,25 puntos]

a) Llamamos “x”, “y” y “z” a las notas de la primera, la segunda y la tercera prueba.

“Haciendo la media aritmética de las notas obtenidas en cada una de las tres pruebas le ha quedado una nota global de 6” $\rightarrow \frac{x+y+z}{3} = 6$.

“La nota de la tercera prueba ha sido igual que la media aritmética de las notas de las otras dos pruebas” $\rightarrow z = \frac{x+y}{2}$.

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} &= 6 \\ z &= \frac{x+y}{2} \end{aligned} \right\}$$

Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} &= 6 \\ z &= \frac{x+y}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x+y+z &= 18 \\ 2z &= x+y \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2z+z=18 \Rightarrow 3z=18 \Rightarrow \boxed{z=6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x+y+6 &= 18 \\ 12 &= x+y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{y=12-x}$$

Solo podemos obtener la tercera nota (6). Las otras dos notas no tienen una solución concreta.

- b) “Si sólo se tuvieran en cuenta las notas de las dos últimas pruebas habría obtenido una media de 7” $\rightarrow \frac{y+6}{2} = 7$.

Añadimos esta tercera ecuación al sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+y+z}{3} &= 6 \\ z &= \frac{x+y}{2} \\ \frac{y+6}{2} &= 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} z &= 6 \\ x+y &= 12 \\ y &= 14-6=8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z &= 6 \\ x &= 12-8=4 \\ y &= 8 \end{aligned}}$$

Las notas de las pruebas han sido 4 en la primera, 8 en la segunda y 6 en la tercera.

4. Una empresa de Menorca quiere ofrecer dos tipos de actividades: bautizos de submarinismo desde una barca y excursiones en barca por la costa para bañarse en calas. El bautizo de submarinismo tiene un precio de 60 euros por persona y en cada embarcación irán 10 participantes y 5 instructores. La excursión por la costa tiene un precio de 18 euros por persona y en cada embarcación irán 25 participantes y 2 instructores. La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales y de 75 instructores que pueden realizar salidas de submarinismo o excursiones en barca por las calas indistintamente. Su intención es obtener el máximo de ingresos suponiendo que llenará todas las embarcaciones.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántas salidas de cada tipo debe ofrecer la empresa todos los días para obtener el máximo de ingresos? ¿Cuánto dinero ingresará a diario? [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de barcas dedicadas a los bautizos de submarinismo e “y” al número de barcas dedicadas a las excursiones en barca.

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº de instructores	Nº de personas	Ingresos
Nº barcas de bautizos (x)	$5x$	$10x$	$600x$
Nº de barcas de excursiones (y)	$2y$	$25y$	$450y$
TOTALES	$5x + 2y$		$600x + 450y$

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 600x + 450y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones:

“La empresa dispone de 30 embarcaciones iguales” $\rightarrow x + y \leq 30$

“La empresa dispone de 75 instructores” $\rightarrow 5x + 2y \leq 75$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$$5x + 2y = 75$$

$$x + y = 30$$

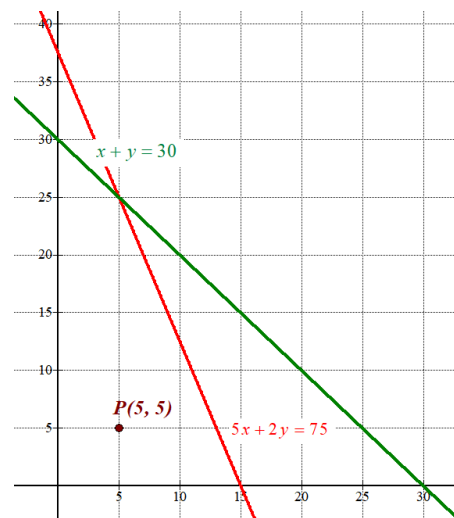
x	$y = \frac{75-5x}{2}$
5	25
15	0

x	$y = 30 - x$
5	25
30	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer

Cuadrante



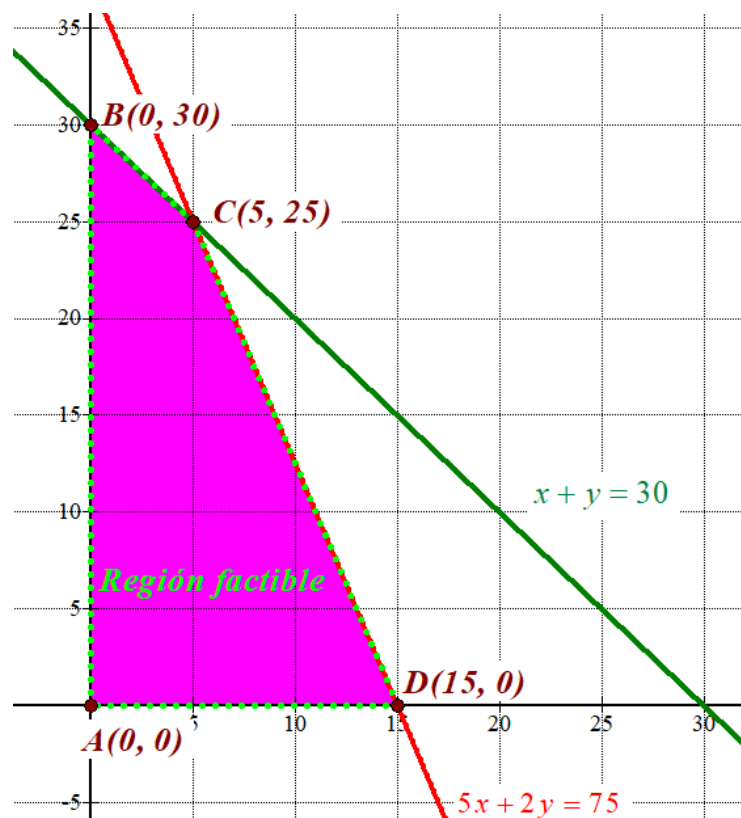
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y verde.

Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \leq 75 \\ 5 + 5 \leq 30 \\ 5 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 600x + 450y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 30) \rightarrow f(0, 30) = 0 + 450 \cdot 30 = 13.500$$

$$C(5, 25) \rightarrow f(5, 25) = 600 \cdot 5 + 450 \cdot 25 = 14.250 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(15, 0) \rightarrow f(15, 0) = 600 \cdot 15 + 0 = 9.000$$

Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas son 14.250 € y se consiguen utilizando 5 barcas para los bautizos de submarinismo y 25 para las excursiones.

5. El número de kilogramos de comida que han gastado en un albergue de animales durante una semana concreta se puede calcular mediante la función $f(t) = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right)$, en la que t es el tiempo en días y va desde el día $t = 1$ (lunes) hasta el día $t = 8$ (lunes de la semana siguiente).
- a) Calcule cuántos kilogramos de comida se gastaron el primer lunes y el lunes siguiente. Encuentre qué día de esa semana se gastaron 100 kg de comida. [1 punto]
- b) Determine los días de la semana en que el gasto en comida fue mayor y los días en que fue menor. ¿Cuántos kilogramos de comida se gastaron estos días? [1,5 puntos]

a) Nos piden el valor de $f(1)$.

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9}{2} + 10\right) = \frac{275}{4} = 68.75$$

El primer lunes se gastaron 68.75 kg de comida.

Los kilos de comida del lunes siguiente es $f(8)$.

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10\right) = 60$$

El lunes siguiente se gastaron 60 kg de comida.

Nos piden el valor de t para el que $f(t) = 100$.

$$100 = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) \Rightarrow 10 = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \Rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^3 + 12t^2 - 36t = 0 \Rightarrow -t(t^2 - 12t + 36) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 12t + 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(36)}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6 \end{cases}$$

El valor $t = 0$ no se corresponde con ningún día de los considerados. Solo es válido el valor $t = 6$.

Se consumieron 100 kg de comida el día 6, es decir, el sábado.

b) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2}\right) \Bigg|_{f'(t)=0} \Rightarrow 10\left(-\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{3t^2}{8} + \frac{6t}{2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3t^2 + 24t - 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = \boxed{6=t} \\ \frac{8-4}{2} = \boxed{2=t} \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[1, 8]$ y en los puntos críticos obtenidos para decidir donde se alcanza el valor máximo y mínimo.

$$f(1) = 10 \left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9}{2} + 10 \right) = \frac{275}{4} = 68.75$$

$$f(2) = 10 \left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10 \right) = 10(-1 + 6 - 9 + 10) = 60 \text{ ¡Mínimo!}$$

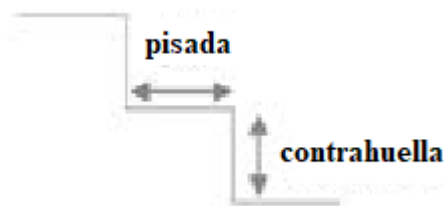
$$f(6) = 10 \left(-\frac{6^3}{8} + \frac{3 \cdot 6^2}{2} - \frac{9 \cdot 6}{2} + 10 \right) = 10(-27 + 54 - 27 + 10) = 100 \text{ ¡Máximo!}$$

$$f(8) = 10 \left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10 \right) = 60 \text{ ¡Mínimo!}$$

El menor consumo se produjo el día 2 (martes) y el día 8 (lunes siguiente) siendo un consumo de 60 kg.

El mayor consumo se produjo el día 6 (sábado) siendo un consumo de 100 kg.

6. Cuando se diseñan los escalones de una escalera hay varios parámetros a tener en cuenta, dos de los cuales son la huella (la parte horizontal del escalón, donde se pone el pie) y la contrahuella (la parte vertical del escalón, es decir, la altura). El arquitecto francés François Blondel estableció a finales del siglo XVII que la relación ideal entre estas dos magnitudes era que la suma de dos contrahuellas más una huella fuera igual a 64 cm. Llamamos y a la longitud de la contrahuella y x a la longitud de la huella.



- a) Encuentre la función que permite calcular la longitud ideal de la contrahuella en función de la longitud de la huella. ¿Cuál sería la longitud ideal de la contrahuella si la huella es de 28 cm? [1 punto]
- b) La normativa actual establece que en el diseño de escaleras de uso público es necesario que la huella sea como mínimo de 28 cm y que la contrahuella esté comprendida entre 13 y 18,5 cm. Además, la suma de dos contrahuellas más una huella debe estar entre 54 y 70 cm. Escriba estas tres condiciones en función de x y de y . Si queremos construir una escalera con escalones de 40 cm de huella, calcule entre qué valores debe estar comprendida la contrahuella para cumplir con la normativa actual. [1,5 puntos]

- a) “La suma de dos contrahuellas más una huella fuera igual a 64 cm” $\rightarrow 2y + x = 64$.

Si despejamos de esta expresión tenemos la función que relaciona la longitud de la contrahuella con la longitud de la huella.

$$2y + x = 64 \Rightarrow 2y = 64 - x \Rightarrow y = \frac{64 - x}{2}$$

¿Cuál sería la longitud ideal de la contrahuella si la huella es de 28 cm?

Aplicando la fórmula obtenida para $x = 28 \rightarrow y = \frac{64 - 28}{2} = 18$ cm.

- b) “La huella sea como mínimo de 28 cm” $\rightarrow x \geq 28$.

“La contrahuella esté comprendida entre 13 y 18,5 cm” $\rightarrow 13 \leq y \leq 18.5$.

“La suma de dos contrahuellas más una huella debe estar entre 54 y 70 cm” $\rightarrow 54 \leq 2y + x \leq 70$.

Si queremos construir una escalera con escalones de 40 cm de huella $\rightarrow x = 40$.

$$54 \leq 2y + 40 \leq 70 \Rightarrow 54 - 40 \leq 2y \leq 70 - 40 \Rightarrow \frac{14}{2} \leq y \leq \frac{30}{2} \Rightarrow 7 \leq y \leq 15$$

La contrahuella debe tener una longitud entre 7 y 15 centímetros. Pero como la normativa dice que $13 \leq y \leq 18.5$ para cumplir todas las normas la contrahuella debe tener una longitud entre 13 y 15 centímetros.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- El coste de producción (en euros) de x unidades de un producto determinado viene dado por la función $C(x) = 0.02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio de venta unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x . Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0.06x$. Se supone que se venden todas las unidades que se producen.
 - Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x . [1,25 puntos]
 - Determine cuántas unidades hay que producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]
- Martí le explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se averió justo a la mitad del trayecto. Desde ese punto fue andando hasta la población más próxima, de manera que recorrió a pie una vigésima parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que recorrió 5 kilómetros más en autocar que en taxi.
 - Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros recorrió en autocar, a pie y en taxi. [1,75 puntos]
 - Si el autocar iba a 100 km/h, Martí anduvo a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en recorrer todo el trayecto? [0,75 puntos]
- El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresado en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \frac{240x}{x^2 - 2x + 4}$, donde $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, que hace que la exposición está abierta al público.
 - ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4. [1 punto]
 - ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán aquella semana? [1,5 puntos]

4. La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Se quiere usar esta técnica para tratar alimentos que ya han empezado a deteriorarse. Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Se sabe que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.
- a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays. Para hacerlo, determine cuál es la función objetivo que debe minimizarse y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,5 puntos]
- b) Si se aplica un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia a sus alrededores). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a? [1 punto]
5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.
- a) Calcule para qué valor de a las dos matrices conmutan, es decir, para qué valor de a se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden dos. [1,25 puntos]
- b) Para el valor de a encontrado en el apartado anterior, calcule las matrices inversas de las matrices A y B . Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2 \cdot I$. [1,25 puntos]
6. Un inversor se da cuenta de que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 €. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha empezado a aumentar y que dentro de pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, durante los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de ese día los beneficios volverán a crecer. El asesor también le dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $x \in [0, 30]$.
- a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c . [1,5 puntos]
- b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante esos 30 días, ¿cuál es el día en el que obtendrá más beneficios por la venta? ¿Qué beneficios obtendrá? [1 punto]

SOLUCIONES

1. El coste de producción (en euros) de x unidades de un producto determinado viene dado por la función $C(x) = 0.02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio de venta unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x . Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0.06x$. Se supone que se venden todas las unidades que se producen.
- a) Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x . [1,25 puntos]
- b) Determine cuántas unidades hay que producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]

- a) El beneficio es la diferencia entre lo ingresos obtenidos por la venta y los costes de producción de los productos.

Los ingresos son el producto del precio de venta por unidad y el número de unidades vendidas.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = 0.02x^2 + 3x + 100 \\ I(x) = x \cdot p(x) = x(47 - 0.06x) = 47x - 0.06x^2 \\ B(x) = I(x) - C(x) \end{array} \right\} \Rightarrow B(x) = 47x - 0.06x^2 - (0.02x^2 + 3x + 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(x) = 47x - 0.06x^2 - 0.02x^2 - 3x - 100 \Rightarrow \boxed{B(x) = -0.08x^2 + 44x - 100}$$

La función beneficios es $B(x) = -0.08x^2 + 44x - 100$.

- b) Utilizamos la derivada. Derivamos y vemos cuando se anula (punto crítico).

$$B(x) = -0.08x^2 + 44x - 100 \Rightarrow B'(x) = -0.16x + 44$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0.16x + 44 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-44}{-0.16} = 275}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda y vemos si es un máximo o un mínimo relativo.

$$B'(x) = -0.16x + 44 \Rightarrow B''(x) = -0.16 \Rightarrow B''(275) = -0.16 < 0$$

Como la derivada segunda en $x = 275$ es negativa en dicho valor existe un máximo de la función beneficios.

$$B(275) = -0.08 \cdot 275^2 + 44 \cdot 275 - 100 = 5950$$

Los beneficios máximos son 5950 € y se obtienen con la fabricación y venta de 275 unidades de producto.

2. Martí le explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se averió justo a la mitad del trayecto. Desde ese punto fue andando hasta la población más próxima, de manera que recorrió a pie una vigésima parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que recorrió 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros recorrió en autocar, a pie y en taxi. [1,75 puntos]

b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí anduvo a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en recorrer todo el trayecto? [0,75 puntos]

a) Llamamos x , y , z la cantidad de kilómetros recorridos en autocar, a pie y en taxi, respectivamente.

El recorrido total es la suma de lo recorrido de cada manera $\rightarrow$ Recorrido total = $x + y + z$

“El autocar se averió justo a la mitad del trayecto” $\rightarrow x = \frac{x + y + z}{2}$

“Recorrió a pie una vigésima parte del total del trayecto” $\rightarrow y = \frac{x + y + z}{20}$

“Recorrió 5 kilómetros más en autocar que en taxi” $\rightarrow x = z + 5$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{x + y + z}{2} \\ y = \frac{x + y + z}{20} \\ x = z + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = x + y + z \\ 20y = x + y + z \\ x = z + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y + z \\ 19y = x + z \\ x = z + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z + 5 = y + z \\ 19y = z + 5 + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 = y \\ 19y = 2z + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 95 = 2z + 5 \Rightarrow 2z = 90 \Rightarrow \boxed{z = 45} \Rightarrow \boxed{x = 45 + 5 = 50}$$

Se han recorrido 50 kilómetros en autocar, 5 a pie y 45 en taxi.

b) Si el autocar iba a 100 km/h tarda $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ hora en recorrer los 50 kilómetros, si Martí anduvo a 5 km/h y tenía que recorrer 5 km tardó 1 hora y si el taxi iba a 90 km/h y tenía que recorrer 45 km tardó otra media hora.

¿cuánto tiempo tardó en recorrer todo el trayecto? $0.5 + 1 + 0.5 = 2$ horas.

Martí tardó 2 horas en hacer todo el recorrido.

3. El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresado en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \frac{240x}{x^2 - 2x + 4}$, donde $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, que hace que la exposición está abierta al público.

- a) ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4. [1 punto]
 b) ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán aquella semana? [1,5 puntos]

a) Nos piden calcular $f(1)$.

$$f(1) = \frac{240}{1^2 - 2 + 4} = 80$$

En la primera semana acuden 80 decenas de personas, es decir, 800 visitantes.

La tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4 es:

$$TVM(1,4) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{240 \cdot 4}{4^2 - 2 \cdot 4 + 4} - \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4}}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0$$

Esta tasa nos da cero, porque tanto en la primera semana como en la cuarta se espera el mismo número de visitantes.

b) Buscamos el máximo de la función. Para ello, calculamos la derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{240(x^2 - 2x + 4) - 240x(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{240x^2 - 480x + 960 - 480x^2 + 480x}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-240x^2 + 960}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0 \Rightarrow -240x^2 + 960 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4} = +2$$

Solo consideramos el valor positivo de x pues $x \geq 1$.

En el intervalo $[1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{-240 \cdot 1.5^2 + 960}{(1.5^2 - 3 + 4)^2} = \frac{6720}{169} > 0$. La

función crece en $[1, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-240 \cdot 3^2 + 960}{(3^2 - 6 + 4)^2} = \frac{-1200}{49} < 0$. La

función decrece en $(2, +\infty)$.

Como la función crece antes de $x = 2$ y decrece a partir de $x = 2$ la función presenta un máximo en $x = 2$. Calculamos $f(2)$.

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 4 + 4} = 120$$

El número máximo de visitantes se espera en la segunda semana, siendo este valor máximo de 1200 visitantes.

4. La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Se quiere usar esta técnica para tratar alimentos que ya han empezado a deteriorarse.

Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Se sabe que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

- a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays. Para hacerlo, determine cuál es la función objetivo que debe minimizarse y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,5 puntos]
- b) Si se aplica un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia a sus alrededores). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a? [1 punto]

a) Queremos minimizar la función $F(x, y) = 4x + 5y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

“En la parte dañada la cantidad de radiación tiene que ser como mínimo de 60 grays y en los alrededores no puede exceder de 27 grays” $\rightarrow 6x + 4y \geq 60; 3x + y \leq 27$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y \geq 60 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 30 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

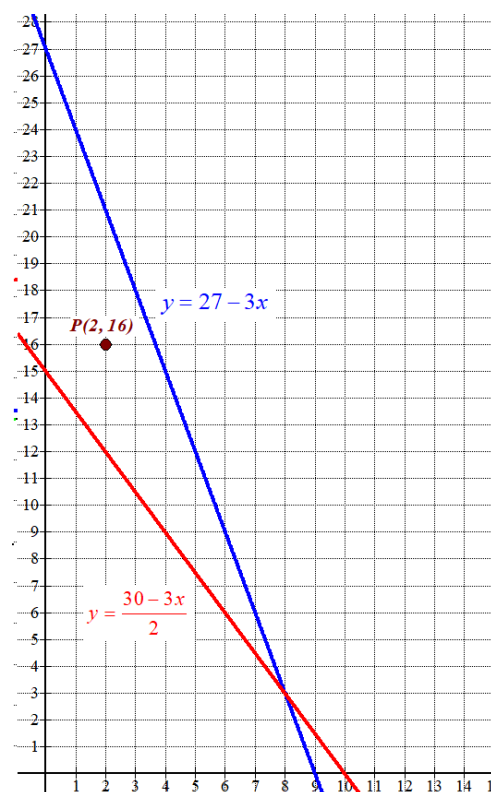
$$\begin{array}{r|l} x & y = \frac{30-3x}{2} \\ 3x + 2y = 30 & 0 \quad 15 \\ & 8 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x & y = 27 - 3x \\ 3x + y = 27 & 0 \quad 27 \\ & 8 \quad 3 \end{array}$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer

Cuadrante



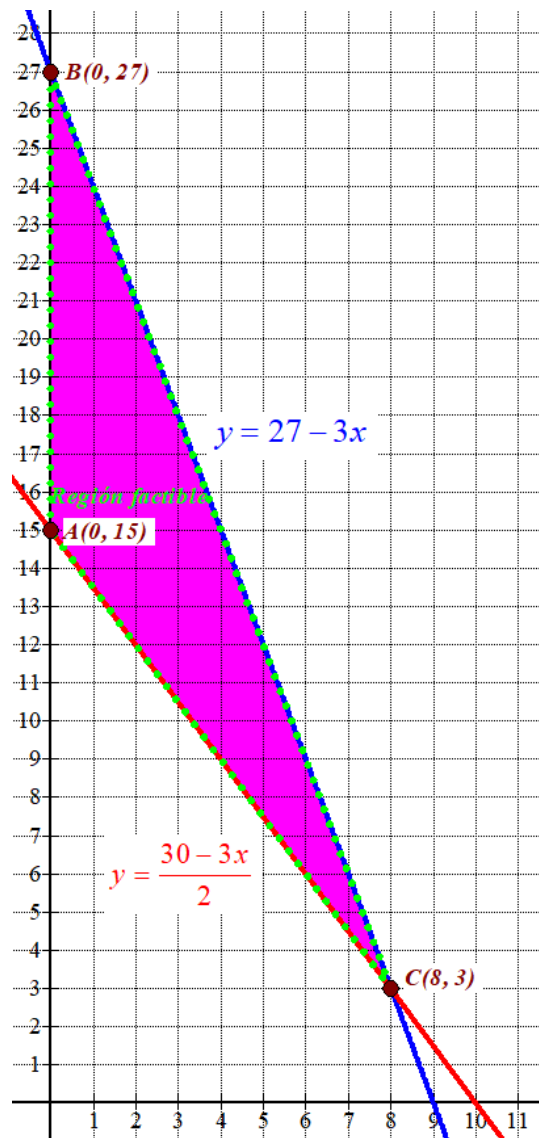
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 30 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja.

Comprobamos que el punto P(2, 16) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 16 \geq 30 \\ 3 \cdot 2 + 16 \leq 27 \\ 2 \geq 0; 16 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $F(x, y) = 4x + 5y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor mínimo en dicha región.

$$A(0, 15) \rightarrow F(0, 15) = 0 + 75 = 75$$

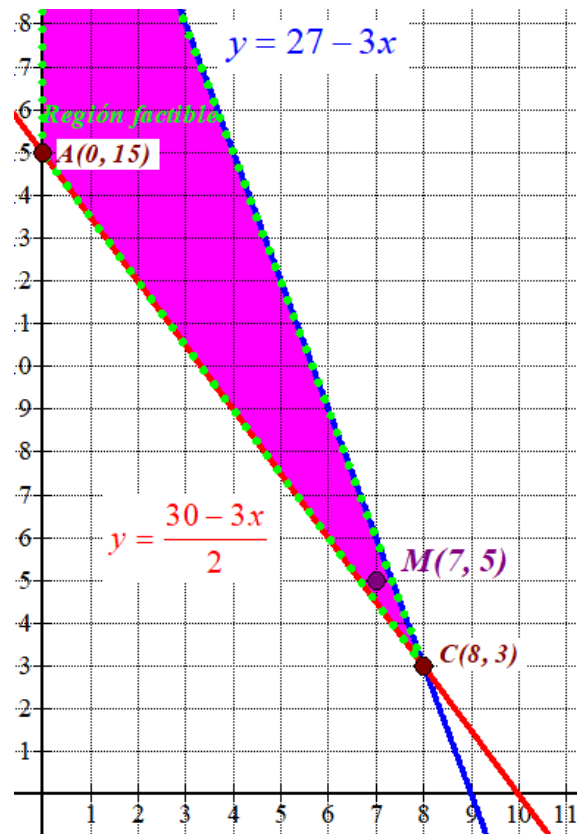
$$B(0, 27) \rightarrow F(0, 27) = 0 + 135 = 135$$

$$C(8, 3) \rightarrow F(8, 3) = 32 + 15 = 47 \text{ ¡Mínimo!}$$

El valor mínimo es de 47.

Para que la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima deben radiarse 8 grays de rayos de cobalto y 3 grays de rayos de cesio.

- b) Una radiación de 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio supone el punto $M(7, 5)$ que pertenece a la región factible, por lo que cumple las restricciones pedidas.



Comprobamos el valor de la función $F(x, y) = 4x + 5y$ en el punto $M(7, 5)$ y comprobamos que este valor es mayor de $F(8, 3) = 47$.

Y por tanto es peor que el valor que tiene la función en $C(8, 3)$.

$$F(7, 5) = 28 + 25 = 53 > 47$$

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Calcule para qué valor de a las dos matrices conmutan, es decir, para qué valor de a se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden dos. [1,25 puntos]
- b) Para el valor de a encontrado en el apartado anterior, calcule las matrices inversas de las matrices A y B . Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2 \cdot I$. [1,25 puntos]

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2+2 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2=2 \\ 1-a=0 \\ 0=0 \\ 2a=2a \end{cases} \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor de “a” debe ser 1.

Comprobamos que para $a = 1$ se cumple $A \cdot B = 2 \cdot I$.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot I &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ii } A \cdot B = 2 \cdot I !!$$

- b) Para $a = 1$ tenemos que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y hemos comprobado que $A \cdot B = 2 \cdot I$.

$$A \cdot B = 2 \cdot I \Rightarrow \frac{1}{2} A \cdot B = I \Rightarrow \begin{cases} A \cdot \frac{1}{2} B = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} B \\ \frac{1}{2} A \cdot B = I \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} A \end{cases}$$

Obtenemos la expresión de las matrices inversas pedidas.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Un inversor se da cuenta de que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 €. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha empezado a aumentar y que dentro de pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, durante los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de ese día los beneficios volverán a crecer. El asesor también le dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $x \in [0, 30]$.

- a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c . [1,5 puntos]
 b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante esos 30 días, ¿cuál es el día en el que obtendrá más beneficios por la venta? ¿Qué beneficios obtendrá? [1 punto]

a) Según el enunciado, la función $f(x)$ verifica:

“En el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 €” $\rightarrow f(0) = -2000$

“Durante los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de ese día los beneficios volverán a crecer” $\rightarrow$ En el día 10 habrá un máximo y en el día 20 un mínimo $\rightarrow f'(10) = 0$; $f'(20) = 0$.

Aplicamos estas condiciones a la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(0) = -2000 \end{array} \right\} \Rightarrow -2000 = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow -2000 = c$$

La función queda $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2000$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2000 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f'(10) = 0 \\ f'(20) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 10^2 + 2a \cdot 10 + b = 0 \\ 3 \cdot 20^2 + 2a \cdot 20 + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

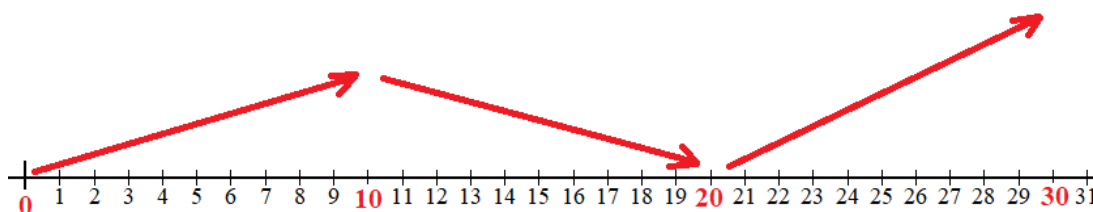
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 300 + 20a + b = 0 \\ 1200 + 40a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = -20a - 300 \\ 1200 + 40a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1200 + 40a - 20a - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20a + 900 = 0 \Rightarrow a + 45 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -45} \Rightarrow \boxed{b = 900 - 300 = 600}$$

Los valores buscados son $a = -45$, $b = 600$ y $c = -2000$.

b) La función beneficios es $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2000$, donde $x \in [0, 30]$.

Y sabemos que durante los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de ese día los beneficios volverán a crecer. Esto implica que en el día 10 habrá un máximo relativo y en el día 20 un mínimo relativo.



Valoramos la función beneficios en estos valores y en los extremos del intervalo $[0, 30]$ para determinar el máximo absoluto de la función beneficios. Aunque bastaría con comparar el valor de la función en $x = 10$ y $x = 30$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -2000 \\ f(10) &= 10^3 - 45 \cdot 10^2 + 6000 - 2000 = 500 \\ f(20) &= 20^3 - 45 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 2000 = 0 \\ f(30) &= 30^3 - 45 \cdot 30^2 + 600 \cdot 30 - 2000 = 2500 \end{aligned} \right\}$$

Le interesa vender el día 30 donde el beneficio sería de 2500 €.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que hace que está a la venta, t , viene dado por la función $f(t) = -(t+25)(t-75)$.
 - Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$. ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es ese valor máximo? [1,25 puntos]
 - Se sabe que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475 €. ¿En qué momento dejará de comercializarse? [1,25 puntos]
- Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.
 - ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlelo. En caso negativo, dé la solución en función de un parámetro. [1,25 puntos]
 - Averigüe si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlelo. [1,25 puntos]
- Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabiendo que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \quad [2,5 \text{ puntos}]$$
- Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.
 - Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

- b)** Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]
5. Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado *Paradís* y los vende a 58.000 €. Se sabe que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.
- a)** Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verifique que la función de beneficios es $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704$ (en miles de euros). [0,75 puntos]
- b)** Determine el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es ese beneficio máximo? [1 punto]
- c)** Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de forma que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál tiene que ser el nuevo precio de venta del coche? [0,75 puntos]
6. Considere la función $f(x) = e^{3x}$.
- a)** Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
- b)** Obtenga la ecuación de esta recta tangente. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

- 1.** El valor de un producto electrónico, en función del número de meses que hace que está a la venta, t , viene dado por la función $f(t) = -(t+25)(t-75)$.
- a)** Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$. ¿En qué momento el producto alcanzará el valor máximo? ¿Cuál es ese valor máximo? [1,25 puntos]
- b)** Se sabe que el producto dejará de comercializarse cuando llegue a un valor de 475 €. ¿En qué momento dejará de comercializarse? [1,25 puntos]

a) Utilizamos la derivada para estudiar el comportamiento de la función.

$$f(t) = -(t+25)(t-75) = -(t^2 - 75t + 25t - 1875) = -t^2 + 50t + 1875 \Rightarrow f'(t) = -2t + 50$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 50 = 0 \Rightarrow 2t = 50 \Rightarrow \boxed{t = 25}$$

En $t = 25$ existe un punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si es máximo o mínimo.

$$f''(t) = -2 \Rightarrow f''(25) = -2 < 0$$

La función presenta un máximo en $t = 25$. Como $f(25) = -(25+25)(25-75) = 2500$, tenemos que el valor del producto electrónico alcanza un valor máximo de 2500 € al cabo de 25 meses a la venta.

b) Averiguamos cuando se alcanza el valor de 475 €.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = -t^2 + 50t + 1875 \\ f(t) = 475 \end{array} \right\} \Rightarrow -t^2 + 50t + 1875 = 475 \Rightarrow -t^2 + 50t + 1400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4(-1)(1400)}}{-2} = \frac{-50 \pm 90}{-2} = \begin{cases} \frac{-50 - 90}{-2} = \boxed{70 = t} \\ \frac{-50 + 90}{-2} = -20 < 0 \text{ ¡No válido!} \end{cases}$$

Como la función tiene un máximo en $t = 25$, a partir de este valor es decreciente. En $t = 70$ se alcanza el valor de 475 € y por ello podemos afirmar que a partir de los 70 meses el producto tendrá un precio inferior a 475 €. Dejará de comercializarse a partir de los 70 meses.

2. Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €. Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €.
- a) ¿Puede saberse el número de monedas que hay de cada tipo? En caso afirmativo, calcúlelo. En caso negativo, dé la solución en función de un parámetro. [1,25 puntos]
- b) Averigüe si puede calcularse el valor total, en euros, de las monedas de la caja. En caso afirmativo, calcúlelo. [1,25 puntos]

a) Llamamos x , y , z al número de monedas de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €.

“Una caja contiene 40 monedas, que son de 50 céntimos, de 1 € y de 2 €” $\rightarrow x + y + z = 40$

“Se sabe que el número de monedas de 50 céntimos que hay es el doble que el de monedas de 2 €” $\rightarrow x = 2z$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 40 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow 2z + y + z = 40 \Rightarrow y = 40 - 3z \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 2z \\ y = 40 - 3z \\ z = z \end{cases}$$

No existe una solución única pues nos falta información para obtener una tercera ecuación. El problema tiene muchas soluciones, una por cada valor que le demos a la incógnita “ z ”.

La solución es $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 40 - 3\lambda; \lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ z = \lambda \end{cases}$

b) El valor total de las monedas de la caja es:

$$\left. \begin{array}{l} V(x, y, z) = 0.5x + y + 2z \\ \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 40 - 3\lambda; \lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow V(\lambda) = 0.5 \cdot 2\lambda + 40 - 3\lambda + 2\lambda = 40 \text{ €}$$

El valor de la caja es de 40 € y no depende del número de monedas que hay de cada tipo.

3. Calcule la matriz X que verifica $A \cdot X \cdot B = C$, sabiendo que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \quad [2,5 \text{ puntos}]$$

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-3b=-2 \\ a-b-c=-3 \\ 2a-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1+b \\ 2a-3b=-2 \\ a-b-c=-3 \\ 2a-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1+b)-3b=-2 \\ -1+b-b-c=-3 \\ 2(-1+b)-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+2b-3b=-2 \\ -1-c=-3 \\ -2+2b-3b-3c=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=0 \rightarrow \boxed{b=0} \\ \boxed{2=c} \\ -b-3c=-6 \rightarrow -0-3 \cdot 2=-6 \text{ ¡Se cumple!} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

La matriz que se busca es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone y ofrece dos tarifas diferentes: la tarifa estándar (sin gastos de cancelación) es de 120 € por noche, y la tarifa reducida (que no admite cancelaciones) es de 90 € por noche. Les interesa tener reservado al menos un 20% del total de habitaciones con la tarifa reducida y quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas habitaciones deben tener reservadas con cada tarifa para obtener el beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de reservas de tarifa estándar e “y” al número de reservas de tarifa reducida.

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 120x + 90y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

“Un hotel admite reservas para las 420 habitaciones dobles de que dispone” $\rightarrow x + y \leq 420$

“Les interesa tener reservado al menos un 20 % del total de habitaciones con la tarifa reducida”
 $\rightarrow y \geq 0.20 \cdot 420 \rightarrow y \geq 84$

“Quieren que el número de habitaciones reservadas con la tarifa estándar sea igual o superior que el doble del número de habitaciones reservadas con la tarifa reducida” $\rightarrow x \geq 2y$

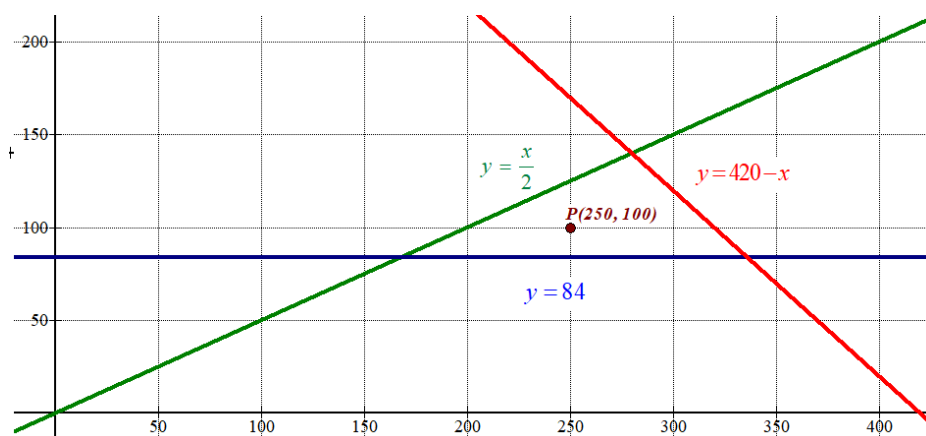
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 420 \\ y \geq 84 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 420 - x \\ y \geq 84 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

x	$y = 420 - x$	x	$y = \frac{x}{2}$	$y = 84$	$x \geq 0; y \geq 0$
0	420	0	0	Recta	Primer
280	140	280	140	horizontal	Cuadrante



Como las restricciones son

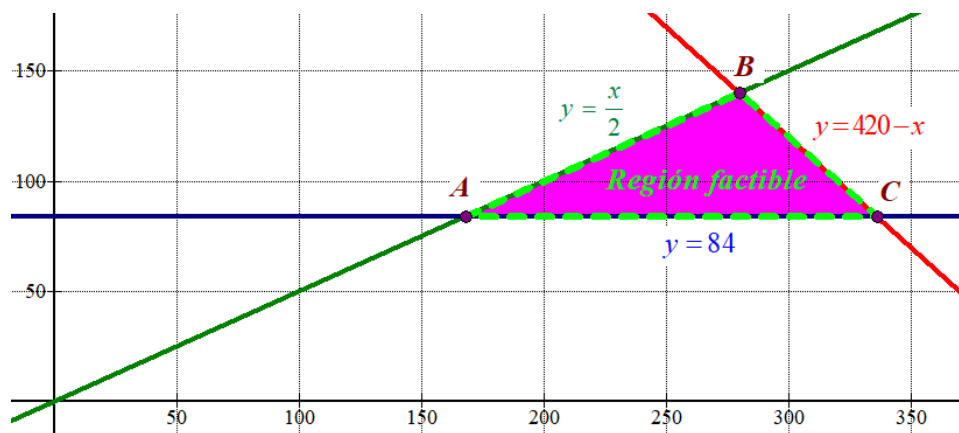
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 420 - x \\ y \geq 84 \\ y \leq \frac{x}{2} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante situada}$$

por debajo de las rectas roja y verde y por encima de la recta horizontal azul.

Comprobamos que el punto P(250, 100) cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq 420 - 250 \\ 100 \geq 84 \\ 100 \leq \frac{250}{2} \\ 250 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas de los vértices resolviendo los sistemas correspondientes:

$$A \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{2} \\ y = 84 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = 84 \Rightarrow x = 168 \Rightarrow \boxed{A(168, 84)}$$

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 420 - x \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = 420 - x \Rightarrow x = 840 - 2x \Rightarrow 3x = 840 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{840}{3} = 280 \Rightarrow y = \frac{280}{2} = 140 \Rightarrow \boxed{B(280, 140)}$$

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 420 - x \\ y = 84 \end{array} \right\} \Rightarrow 84 = 420 - x \Rightarrow x = 420 - 84 = 336 \Rightarrow \boxed{C(336, 84)}$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 120x + 90y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

$$A(168, 84) \rightarrow f(168, 84) = 27720 \text{ €}$$

$$B(280, 140) \rightarrow f(280, 140) = 46200 \text{ €}$$

$$C(336, 84) \rightarrow f(336, 84) = 47880 \text{ € ¡Máximo!}$$

Para obtener unos ingresos máximos debemos reservar 336 habitaciones en tarifa estándar y 140 en tarifa reducida. Conseguimos unos beneficios máximos de 47880 €.

5. Una fábrica de vehículos produce coches de un modelo llamado *Paradís* y los vende a 58.000 €. Se sabe que los costes mensuales de producción vienen dados por la función $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704$ (en miles de euros), donde x denota el número de coches que se fabrican mensualmente.

a) Suponiendo que se venden todos los coches que se fabrican, verifique que la función de beneficios es $B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704$ (en miles de euros). [0,75 puntos]

b) Determine el número de coches que hay que fabricar mensualmente para no tener pérdidas. ¿Para qué número de unidades producidas se obtiene el beneficio máximo y cuál es ese beneficio máximo? [1 punto]

c) Se quiere aumentar el precio de venta por unidad, de forma que el beneficio máximo se obtenga con 130 unidades (la función que da el coste mensual en miles de euros no varía). ¿Cuál tiene que ser el nuevo precio de venta del coche? [0,75 puntos]

a) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los costes. Como se venden x coches a 58000 euros cada uno los ingresos son $I(x) = 58x$ expresados en miles de euros.

$$B(x) = I(x) - C(x) = 58x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4704 \right) = 58x - \frac{1}{2}x^2 + 64x - 4704$$

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704$$

b) Buscamos cuando el beneficio es 0.

$$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4704 = 0 \Rightarrow x^2 - 244x + 9408 = 0 \Rightarrow \\ B(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x = \frac{244 \pm \sqrt{(-244)^2 - 4(9408)}}{2} = \frac{244 \pm 148}{2} = \begin{cases} \frac{244-148}{2} = 48 \\ \frac{244+148}{2} = 192 \end{cases}$$

Los beneficios son nulos cuando se fabrican y venden 48 o 192 coches.

En el intervalo (48, 192) tomamos $x = 100$ y comprobamos si los beneficios son positivos.

$$B(100) = -\frac{1}{2}100^2 + 12200 - 4.704 = 2496 > 0.$$

Los beneficios son positivos en el intervalo (48, 192).

Se deben fabricar entre 48 y 192 coches para tener beneficios.

Buscamos el máximo de la función beneficios usando la derivada.

$$B'(x) = -\frac{1}{2}2x + 122 = -x + 122$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -x + 122 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 122}$$

En $x = 122$ hay un punto crítico. Sustituimos en la derivada segunda.

$$B'(x) = -x + 122 \Rightarrow B''(x) = -1 \Rightarrow B''(122) = -1 < 0$$

La función tiene un máximo en $x = 122$.

Esto significa que los beneficios son máximos con la producción de 122 coches.

Como $B(122) = -\frac{1}{2}(122)^2 + 122 \cdot 122 - 4704 = 2738$ los beneficios máximos son de 2738000 €.

- c) Llamamos p al nuevo precio del coche, por lo que los ingresos serían de $I(x) = p \cdot x$, expresados en miles de euros.

La función beneficios es ahora $B(x) = px - \frac{1}{2}x^2 + 64x - 4704 = -\frac{1}{2}x^2 + (64 + p)x - 4704$.

Derivamos esta nueva función y sabemos que debe anularse en $x = 130$, por tener un máximo en $x = 130$.

$$\left. \begin{aligned} B'(x) &= -\frac{1}{2}2x + (64 + p) = -x + 64 + p \\ B'(130) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -130 + 64 + p = 0 \Rightarrow \boxed{p = 66}$$

El nuevo precio debe ser de 66000 € por coche.

6. Considere la función $f(x) = e^{3x}$.

- a) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
 b) Obtenga la ecuación de esta recta tangente. [1,25 puntos]

- a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$ es el valor de la derivada de la función en $x = 0$.

$$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow \boxed{f'(0) = 3e^{3 \cdot 0} = 3}$$

La pendiente pedida vale 3.

- b) La recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Hallamos $f(0)$ y $f'(0)$ y obtenemos la expresión de la recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = e^{3 \cdot 0} = e^0 = 1 \\ f'(0) = 3e^{3 \cdot 0} = 3e^0 = 3 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow \boxed{y = 3x + 1}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 3x + 1$.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo? [1,75 puntos]

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos? [0,75 puntos]

2. Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un determinado tipo de fruta que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20 °C de temperatura. [1,25 puntos]

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso? [1,25 puntos]

3. Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa? [1,75 puntos]
- b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer? [0,75 puntos]
4. Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b}$, donde a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Se sabe que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.
- a) Encuentre los valores de las constantes a y b . [1,25 puntos]
- b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias. [1,25 puntos]
5. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.
- a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$. [1,5 puntos]
- b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2. [1 punto]
6. En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se denomina R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia.
- Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0 , que se denomina efectiva y se denota con R_e , es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.
- a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si se analiza una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población? [0,75 puntos]
- b) En el caso concreto de la denominada gripe española del 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calcule qué porcentaje de población se tendría que haber vacunado, como mínimo, para parar la epidemia de esta enfermedad. [0,75 puntos]
- c) Exprese, en general, el umbral de población mínima que debe vacunarse en función del valor R_0 de una enfermedad. Realice un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20. [1 punto]

SOLUCIONES

1. En el instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de Sant Jordi. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción de ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Se sabe que se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

- a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo? [1,75 puntos]
 b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, el de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos? [0,75 puntos]

a) Llamamos x , y , z al número de ramos de tipo clásico, pequeño y grande que se elaboran. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Rosas	Espigas	Envoltorio
Nº ramos clásicos (x)	x	x	x
Nº ramos pequeños (y)	$3y$	$2y$	y
Nº ramos grandes (z)	$6z$	$3z$	z
TOTAL	$x + 3y + 6z$	$x + 2y + 3z$	$x + y + z$

Como se han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \\ x + y + z = 85 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \\ x + y + z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +2y \quad +3z \quad = 135 \\ -x \quad -3y \quad -6z \quad = -200 \\ \hline -y \quad -3z \quad = -65 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +y \quad +z \quad = 85 \\ -x \quad -3y \quad -6z \quad = -200 \\ \hline -2y \quad -5z \quad = -115 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 6z = 200 \\ -y - 3z = -65 \\ -2y - 5z = -115 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ -2y \quad -5z \quad = -115 \\ 2y \quad +6z \quad = 130 \\ \hline z \quad = 15 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 6z = 200 \\ -y - 3z = -65 \\ \boxed{z = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 90 = 200 \\ -y - 45 = -65 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 110 \\ -y = -20 \rightarrow \boxed{y = 20} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 60 = 110 \Rightarrow \boxed{x = 50}$$

Se han elaborado 50 ramos clásicos, 20 pequeños y 15 grandes.

- b) Se han elaborado y vendido 50 ramos clásicos a 3 € cada uno, 20 pequeños a 5 € cada uno y 15 grandes a 10 € cada uno.

Las ganancias son $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 400$ € por la venta de todos los ramos elaborados.

2. Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un determinado tipo de fruta que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en centenares de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable a 1,2 euros por cada kilogramo.
- a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20 °C de temperatura. [1,25 puntos]
- b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso? [1,25 puntos]

a) Averiguamos cuando la producción es cero.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 46x - 360 = 0 \Rightarrow x = \frac{-46 \pm \sqrt{46^2 - 1440}}{-2} = \frac{-46 \pm 26}{-2} = \begin{cases} \frac{-46 + 26}{-2} = 10 \\ \frac{-46 - 26}{-2} = 36 \end{cases}$$

Valoramos la función antes, entre y después de estos dos valores para averiguar cuando $f(x) > 0$.

Por debajo de 10° C, por ejemplo, $x = 5^\circ$ tenemos que $f(5) = -5^2 + 46 \cdot 5 - 360 = -155 < 0$.

Entre 10° y 36°, por ejemplo, $x = 20^\circ$ tenemos que $f(20) = -20^2 + 46 \cdot 20 - 360 = 160 > 0$.

Por encima de 36°, por ejemplo, $x = 40^\circ$ tenemos que $f(40) = -40^2 + 46 \cdot 40 - 360 = -120 < 0$.

La producción es positiva entre 10° y 36°.

La producción a 20° C es $f(20) = -20^2 + 46 \cdot 20 - 360 = 160$, lo que significa una producción de 16000 kilos por hectárea. Como el precio por kilo es de 1.2 € los ingresos son de $16000 \cdot 1.2 = 19200$ €.

b) Derivamos la función e igualamos a cero la derivada.

$$f(x) = -x^2 + 46x - 360 \Rightarrow f'(x) = -2x + 46$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 46 = 0 \Rightarrow x = \frac{46}{2} = 23$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y vemos su signo.

$$f'(x) = -2x + 46 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(23) = -2 < 0$$

Al ser negativo el valor de la derivada segunda en $x = 23$ hay un máximo de la función.

Calculamos el valor de la función para $x = 23 \rightarrow f(23) = -23^2 + 46 \cdot 23 - 360 = 169$.

La producción máxima se produce a 23° C y dicha producción máxima es de 16900 kilos por hectárea. Siendo los ingresos de $16900 \cdot 1.2 = 20280$ €

3. Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para sus trabajadores y trabajadoras. Cada cesta de tipo A contendrá 1 jamón, 1 botella de cava y 5 barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá 2 jamones, 3 botellas de cava y 2 barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por lo tanto, seguro que cava no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa? [1,75 puntos]

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa cambia de opinión y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo habrá que hacer? [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cestas de navidad de tipo A e “y” al número de cestas de navidad de tipo B.

Queremos maximizar el número de cestas (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = x + y$

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº de jamones	Nº de botellas de cava	Nº de barras de turrón
Nº de cestas tipo A (x)	x	x	5x
Nº de cestas tipo B (y)	2y	3y	2y
TOTALES	$x + 2y$	$x + 3y$	$5x + 2y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

“disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava” $\rightarrow$
 $x + 2y \leq 40$; $5x + 2y \leq 120$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$$x + 2y = 40$$

x	$y = \frac{40 - x}{2}$
0	20
20	10

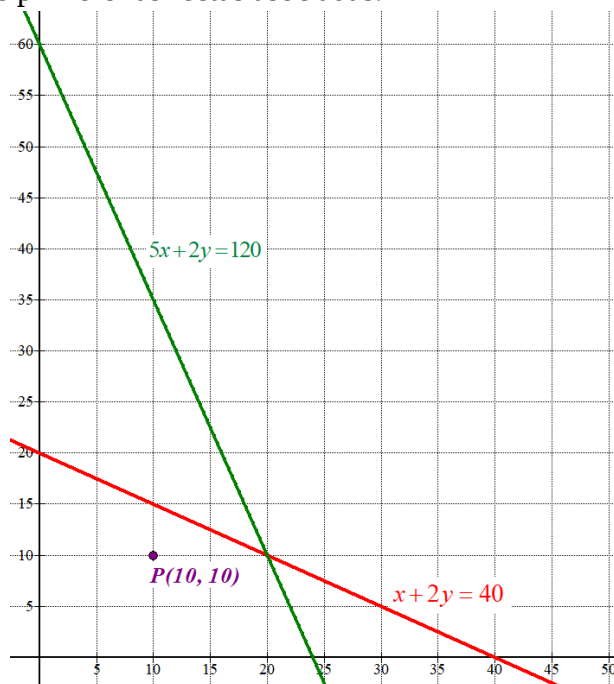
$$5x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - 5x}{2}$
0	60
20	10

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer

Cuadrante



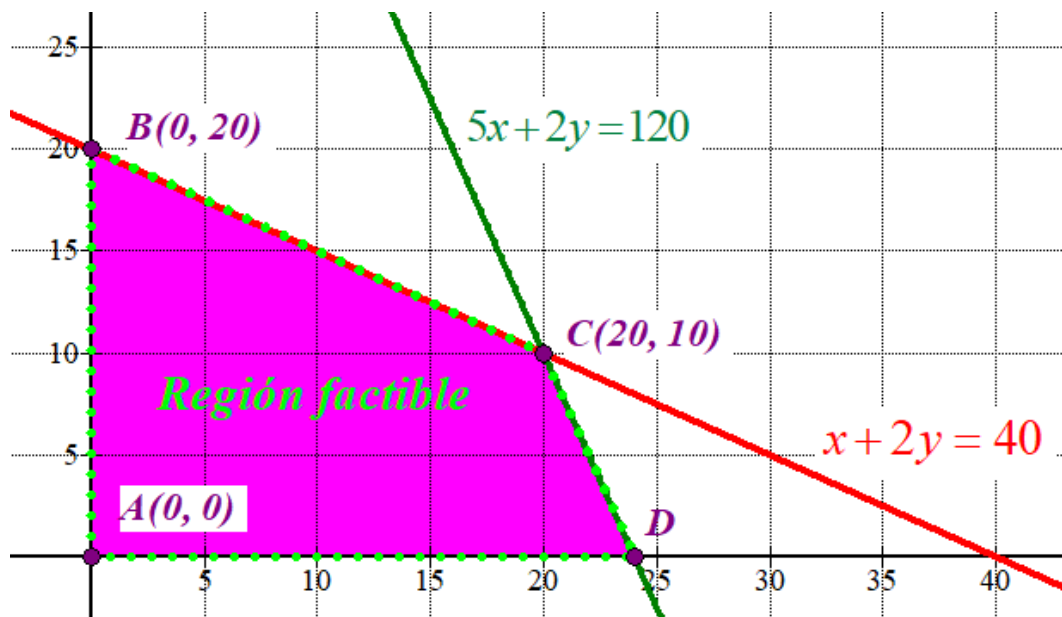
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 40 \\ 50 + 20 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D resolviendo el sistema correspondiente:

$$D \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 0 = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow D(24, 0)$$

Valoramos la función objetivo $f(x, y) = x + y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(0, 20) \rightarrow f(0, 20) = 20$$

$$C(20, 10) \rightarrow f(20, 10) = 30 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(24, 0) \rightarrow f(24, 0) = 24$$

El número máximo de cestas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 30 y se consiguen con 20 del tipo A y 10 del tipo B.

b) Si añadimos la condición de que se hagan la misma cantidad de los dos tipos de cesta las nuevas restricciones serán:

	Nº de jamones	Nº de botellas de cava	Nº de barras de turrón
Nº de cestas tipo A (x)	x	x	5x
Nº de cestas tipo B (x)	2x	3x	2x
TOTALES	3x	4x	7x

Queremos maximizar el número de cestas (función objetivo) $\rightarrow f(x) = 2x$

Las restricciones son:

“disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava” $\rightarrow$
 $3x \leq 40$; $7x \leq 120$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x \leq 40 \\ 7x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq \frac{40}{3} \approx 13.33 \\ x \leq \frac{120}{7} \approx 17.14 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

La solución es un número entero positivo menor que 13.33, la solución es $x = 13$.

Con la nueva restricción se deben hacer 13 cestas de cada tipo para hacer el máximo número posible ajustándose a las limitaciones indicadas en el problema.

4. Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en centenares) viene dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b}$, donde a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Se sabe que en el instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 centenares y que el valor máximo de población se ha alcanzado al cabo de 2 minutos de haber iniciado el estudio.

- a) Encuentre los valores de las constantes a y b . [1,25 puntos]
 b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie su comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias. [1,25 puntos]

a) Se sabe que $P(0) = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b} \\ P(0) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = a + \frac{0}{0^2 + b} \Rightarrow \{b \neq 0\} \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

El valor máximo de $P(t)$ está en $t = 2$, lo que implica que la derivada se anula en dicho valor.

$$P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2 + b} \Rightarrow P'(t) = \frac{12(t^2 + b) - 2t \cdot 12t}{(t^2 + b)^2} = \frac{12t^2 + 12b - 24t^2}{(t^2 + b)^2} = \frac{12b - 12t^2}{(t^2 + b)^2}$$

$$P'(2) = 0 \Rightarrow \frac{12b - 12 \cdot 2^2}{(t^2 + b)^2} = 0 \Rightarrow 12b - 48 = 0 \Rightarrow b - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Comprobamos que para $b = 4$ la función tiene un máximo en $t = 2$, es decir, la derivada es positiva en $[0, 2)$ y negativa a partir de 2.

$$\text{En } [0, 2) \text{ valoramos la derivada en } t = 1 \rightarrow P'(1) = \frac{48 - 12 \cdot 1^2}{(1^2 + 4)^2} = \frac{36}{25} > 0. \text{ Es creciente en}$$

$[0, 2)$

$$\text{A partir de } t = 2 \text{ tomamos } t = 3 \rightarrow P'(3) = \frac{48 - 12 \cdot 3^2}{(3^2 + 4)^2} = \frac{-60}{169} < 0. \text{ Es decreciente a partir de 2.}$$

Los valores buscados son $a = 6$ y $b = 4$.

b) La función es $P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2 + 4}$. Y su máximo relativo se produce en $t = 2$.

La población máxima es $P(2)$.

$$P(2) = 6 + \frac{24}{2^2 + 4} = 9$$

La población máxima es de 900 bacterias.

Calculamos el límite cuando $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6 + \frac{\frac{12}{t}}{1 + \frac{4}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6 + \frac{\frac{12}{t}}{1 + \frac{4}{t^2}} = 6 + \frac{0}{1 + 0} = 6$$

La población de bacterias se estabiliza a largo plazo en 600 bacterias.

5. Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

[1,5 puntos]

b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

[1 punto]

a) Obtenemos la expresión de $P \cdot A$.

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2+1 \\ -a+3 & -2a+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|P \cdot A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{vmatrix} = 2a+1+3a-9 = 5a-8$$

$$|P \cdot A| = 0 \Rightarrow 5a-8=0 \Rightarrow 5a=8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{5}}$$

Para que la matriz $P \cdot A$ sea invertible el valor de a debe ser distinto de $\frac{8}{5}$.

b) Si $a = 2$ la matriz $P \cdot A$ queda $P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2+3 & -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$P \cdot A + X = I \Rightarrow X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}$$

6. En los modelos matemáticos que se utilizan para describir la evolución de una enfermedad, se denomina R_0 al número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando este número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, de media, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia.

Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando solo a una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0 , que se denomina efectiva y se denota con R_e , es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se consigue controlar la epidemia si la R_e es inferior a 1.

- a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si se analiza una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿hay riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población? [0,75 puntos]
- b) En el caso concreto de la denominada gripe española del 1918, se estima que $R_0 = 4$. Calcule qué porcentaje de población se tendría que haber vacunado, como mínimo, para parar la epidemia de esta enfermedad. [0,75 puntos]
- c) Expresé, en general, el umbral de población mínima que debe vacunarse en función del valor R_0 de una enfermedad. Realice un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20. [1 punto]

a) Sabemos que $R_e = R_0 \cdot (1 - 0.95) = 15 \cdot 0.05 = 0.75$.

Como este valor es inferior a 1, según el modelo, no hay riesgo de una epidemia de sarampión.

b) En el caso de la gripe española $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 4 \cdot (1 - p)$.

Imponemos que $4 \cdot (1 - p) < 1 \Rightarrow 4 - 4p < 1 \Rightarrow -4p < -3 \Rightarrow 3 < 4p \Rightarrow p > \frac{3}{4} = 0.75$.

Habría que vacunar a más de un 75% de la población para detener la epidemia.

c) El umbral de vacunación viene dado por $R_0 \cdot (1 - p) < 1$.

Despejamos p y obtenemos que $R_0 \cdot (1 - p) < 1 \Rightarrow 1 - p < \frac{1}{R_0} \Rightarrow 1 - \frac{1}{R_0} < p$.

Por tanto, la función que nos determina el umbral del mínimo de vacunación necesaria, en función de R_0 es $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.

Para hacer un esbozo de la función entre 1 y 20 obtenemos el valor de la función en los dos extremos: $p(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$ y

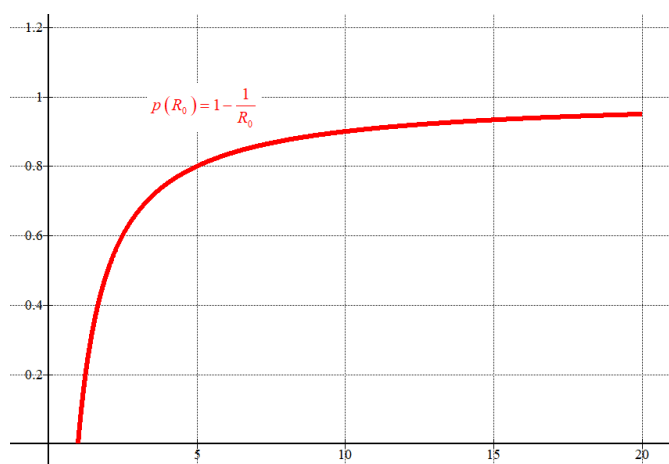
$$p(20) = 1 - \frac{1}{20} = 0.95.$$

La función siempre es creciente pues

$$p'(R_0) = \frac{1}{(R_0)^2} > 0. \text{ Por lo tanto, no}$$

tiene extremos relativos.

La gráfica de la función es:



PAU septiembre (serie 1) 2021



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. La siguiente tabla muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Se ha recogido la información anterior en la matriz A , en la que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix}$$

- a) Considere los vectores $v = (1 \ 1 \ 1)$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Realice las operaciones $v \cdot A$ y $A \cdot w$. Interprete

en cada caso el resultado obtenido. [1,25 puntos]

- b) La matriz B recoge los resultados del siguiente trimestre, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Se desconoce el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que se ha denominado x , pero se sabe que el rango de la matriz B es 2. Encuentre el valor de x . [1,25 puntos]

2. Filomena hace una fiesta e invita a sus amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra

- otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta de que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 €, la segunda 6,5 € y la última 3,5 €.
- a)** Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema. [0,75 puntos]
- b)** Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno. [1,75 puntos]
- 3.** Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.
- a)** Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
- b)** Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá? [1,25 puntos]
- 4.** La función $C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$, en la que t son los años transcurridos y $C(t)$ la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.
- a)** Calcule cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía un año después. [0,5 puntos]
- b)** Encuentre el instante en el que la empresa deja de perder clientes y calcule cuántos clientes tiene en ese instante. [1 punto]
- c)** Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa consiga tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio. [1 punto]
- 5.** Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio B obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, donde $x > 0$ es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.
- a)** ¿Qué beneficio obtendrá si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? ¿Entre qué valores hay que fijar el precio de venta de una caja para obtener beneficios? [1,25 puntos]
- b)** ¿A qué precio tiene que vender cada caja para que el beneficio sea lo más grande posible? ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]
- 6.** Considere la función $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.
- a)** Calcule cuál tiene que ser el valor del parámetro p para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas. [1,25 puntos]
- b)** Escriba la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ para el valor de $p = 2$. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. La siguiente tabla muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Se ha recogido la información anterior en la matriz **A**, en la que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente:

$$A = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix}$$

- a) Considere los vectores $v = (1 \ 1 \ 1)$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Realice las operaciones $v \cdot A$ y $A \cdot w$. Interprete en

cada caso el resultado obtenido. [1,25 puntos]

- b) La matriz **B** recoge los resultados del siguiente trimestre, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Se desconoce el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que se ha denominado x , pero se sabe que el rango de la matriz **B** es 2. Encuentre el valor de x . [1,25 puntos]

a)

$$v \cdot A = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix} = (13,5+11+15 \quad 13,2+12,5+14 \quad 4,2+3,8+2,7)$$

$$v \cdot A = (39,5 \quad 39,7 \quad 10,7)$$

El vector tiene unos elementos que se corresponden con los ingresos totales en miles de euros del conjunto de los tres locales en los meses de enero (39,5), febrero (39,7) y marzo (10,7) de 2020.

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,5+13,2+4,2 \\ 11+12,5+3,8 \\ 15+14+2,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,9 \\ 27,3 \\ 31,7 \end{pmatrix}$$

En esta matriz aparecen los ingresos totales durante los tres meses en cada uno de los locales.

- b) Calculamos el determinante de **B** y vemos cuando se anula.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{vmatrix} = 14x + 120 + 88 - 112 - 12x - 110 = 2x - 14$$
$$|B| = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$$

Para $x = 7$ el determinante de B es nulo y por tanto su rango no es 3.

¿El rango de B es 2 para $x = 7$?

La matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ y de ella podemos extraer un menor de orden 2 con

determinante no nulo, por ejemplo, quitando la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$

Queda demostrado que el rango de la matriz B para $x = 7$ no es 3 ($\det B = 0$) y sí es 2.

2. Filomena hace una fiesta e invita a sus amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta de que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 €, la segunda 6,5 € y la última 3,5 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema. [0,75 puntos]

b) Calcule el precio de una docena de huevos, el de una bolsa de harina de almendra y el de un paquete de azúcar moreno. [1,75 puntos]

a) Llamamos x , y , z al precio de una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar moreno, respectivamente.

“Compra una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar por 6 €” $\rightarrow$
 $x + y + z = 6$

“Compra una docena de huevos y dos bolsas de harina por 6,5 €” $\rightarrow x + 2y = 6.5$

“Compra una docena de huevos y un paquete de azúcar por 3,5 €” $\rightarrow x + z = 3.5$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6.5 \\ x + z = 3.5 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6.5 \\ x + z = 3.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6.5 \\ x = 3.5 - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3.5 - z + y + z = 6 \\ 3.5 - z + 2y = 6.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 6 - 3.5 \\ -z + 2y = 6.5 - 3.5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2.5 \\ -z + 2y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -z + 5 = 3 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = 3.5 - 2 = 1.5$$

El precio de una docena de huevos es de 1.5 €, el de una bolsa de harina de almendra es 2.5 € y el de un paquete de azúcar moreno es de 2 €.

3. Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y en la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay que hacer 3. Cada anuncio en la televisión cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, pueden hacerse como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) Calcule cuántos anuncios tendrá que poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de nuevos clientes sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá? [1,25 puntos]

- a) Llamamos “x” al número de anuncios en la radio e “y” al número de anuncios en la televisión.

Realizamos una tabla con los datos.

	Nº clientes nuevos	Coste
Nº anuncios radio (x)	$10x$	$1000x$
Nº anuncios TV (y)	$60y$	$3000y$
TOTALES	$10x + 60y$	$1000x + 3000y$

La función objetivo es el número de clientes nuevos $f(x, y) = 10x + 60y$. Deseamos maximizar esta función.

Las restricciones son:

“Disponemos de un presupuesto de 18000 €” $\rightarrow 1000x + 3000y \leq 18000$

“Debemos de hacer, al menos, 3 anuncios en la radio” $\rightarrow x \geq 3$

“Podemos hacer como máximo 4 anuncios en la TV” $\rightarrow y \leq 4$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 1000x + 3000y \leq 18000 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$$x + 3y = 18$$

$$x = 3$$

$$y = 4$$

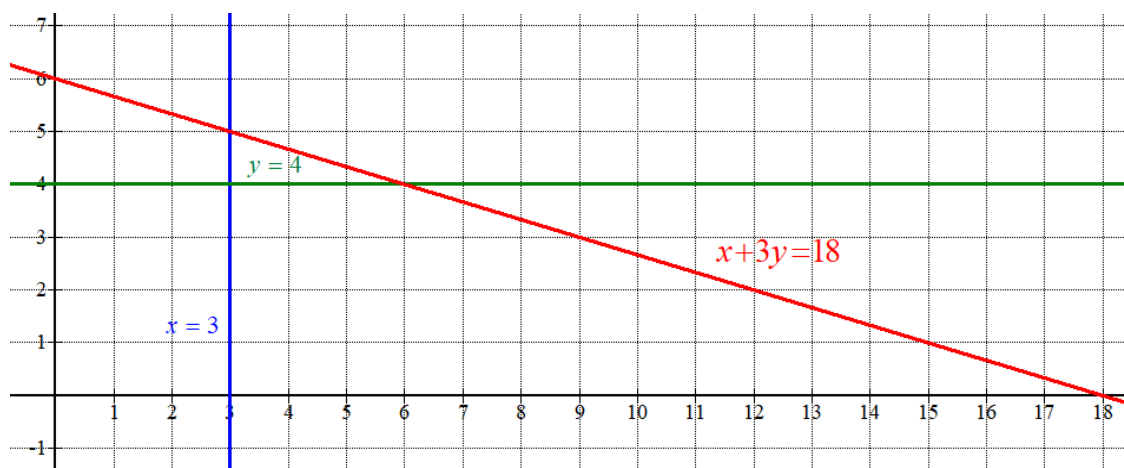
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{18-x}{3}$
6	4
3	5

x = 3	y
3	5
3	4

x	y = 4
3	4
6	4

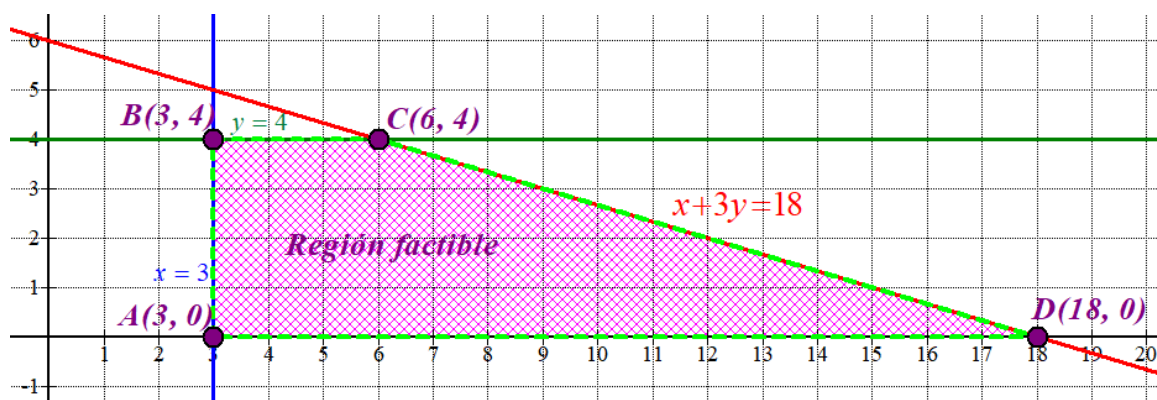
Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región del plano que cumple estas restricciones es la

región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja y la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical azul.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo y marcamos los vértices.



- b) La función objetivo es el número de clientes nuevos que viene reflejada en la expresión dependiente del número de anuncios en radio y TV como $f(x, y) = 10x + 60y$.

Valoramos la función en cada vértice.

$$A(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 30$$

$$B(3, 4) \rightarrow f(3, 4) = 30 + 240 = 270$$

$$C(6, 4) \rightarrow f(6, 4) = 60 + 240 = 300 \text{ ¡¡MÁXIMO!!}$$

$$D(18, 0) \rightarrow f(18, 0) = 180$$

El número máximo de clientes nuevos es 300 y se consigue con 6 anuncios de radio y 4 de TV.

4. La función $C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$, en la que t son los años transcurridos y $C(t)$ la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.
- a) Calcule cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía un año después. [0,5 puntos]
- b) Encuentre el instante en el que la empresa deja de perder clientes y calcule cuántos clientes tiene en ese instante. [1 punto]
- c) Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa consiga tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio. [1 punto]

- a) En el momento $t = 0$ el número de clientes es $C(0) = 3 - \frac{1}{0^2 - 0 + 5} = 3 - \frac{1}{5} = 2.8$, lo que significa 2800 clientes. En el momento $t = 1$ el número de clientes es $C(1) = 3 - \frac{1}{1^2 - 4 + 5} = 3 - \frac{1}{2} = 2.5$, lo que significa 2500 clientes al cabo de 1 año.
- b) Averiguamos cuando la función deja de decrecer utilizando la derivada.

$$C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} \Rightarrow C'(t) = 0 - \frac{0 - (2t - 4)}{(t^2 - 4t + 5)^2} = \frac{-4 + 2t}{(t^2 - 4t + 5)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-4 + 2t}{(t^2 - 4t + 5)^2} = 0 \Rightarrow -4 + 2t = 0 \Rightarrow t = 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 2$.

- En $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $C'(1) = \frac{-4 + 2}{(1^2 - 4 + 5)^2} = \frac{-2}{4} < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3) = \frac{-4 + 6}{(3^2 - 12 + 5)^2} = \frac{2}{4} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

El número de clientes decrece los dos primeros años y a partir del segundo año empiezan a crecer, siendo en este momento $C(2) = 3 - \frac{1}{2^2 - 8 + 5} = 3 - \frac{1}{1} = 2$, es decir, 2000 clientes.

- c) Igualamos la función a 2.8 para ver cuando vuelve a tener 2800 clientes como en el momento inicial.

$$C(t) = 3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = 2.8 \Rightarrow \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = 0.2 \Rightarrow \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = \frac{1}{5} \Rightarrow t^2 - 4t + 5 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4} \end{cases}$$

En el cuarto año se vuelve a tener los 2800 clientes del momento inicial.

5. Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio B obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, donde $x > 0$ es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.

- a) ¿Qué beneficio obtendrá si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? ¿Entre qué valores hay que fijar el precio de venta de una caja para obtener beneficios? [1,25 puntos]
 b) ¿A qué precio tiene que vender cada caja para que el beneficio sea lo más grande posible? ¿Cuál es ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $B(6)$.

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$$

El beneficio con un precio de 6 euros por cada caja es de 5000 euros.

Nos piden que precio hay que fijar para obtener beneficios. Es decir, a partir de que x se tiene que $B(x) > 0$.

Vemos cuando se anula la función beneficio.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-1)(-55)}}{-2}$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(-1)(-55)}}{-2} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \frac{-16+6}{-2} = 5 \\ \frac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

El beneficio es nulo para un precio de 5 euros y de 11 euros.

Veamos como evoluciona el beneficio antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(0, 5)$ tomamos $x = 1$ y el beneficio es $B(1) = -1^2 + 16 - 55 = -40 < 0$
- En $(5, 11)$ tomamos $x = 6$ y el beneficio es $B(6) = 5 > 0$
- En $(11, +\infty)$ tomamos $x = 20$ y el beneficio es $B(20) = -20^2 + 320 - 55 = -135 < 0$

El beneficio es positivo en el intervalo de precio de la caja de 5 a 11 euros.

b) Nos piden determinar el máximo de la función beneficio.

Derivamos la función e igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \Rightarrow B'(x) = -2x + 16$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 16 = 0 \Rightarrow -2x = -16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Vemos si el punto crítico es máximo o mínimo sustituyendo el valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 16 \Rightarrow B''(x) = -2$$

$$B''(8) = -2 < 0$$

El beneficio tiene un máximo relativo en $x = 8$.

El beneficio máximo es de $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$, es decir, de 9000 euros.

6. Considere la función $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

- a) Calcule cuál tiene que ser el valor del parámetro p para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas. [1,25 puntos]
 b) Escriba la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ para el valor de $p = 2$. [1,25 puntos]

- a) Para que las rectas tangentes a la curva sean paralelas deben de tener la misma pendiente y para ello la derivada de la función en ambos valores debe ser igual, es decir, $f'(3) = f'(1)$.

$$f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18 \Rightarrow f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p \left\{ \begin{array}{l} f'(3) = f'(1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3p(3)^2 - 24 + 7p = 3p(1)^2 - 8 + 7p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27p - 24 + 7p = 3p - 8 + 7p \Rightarrow 24p = 16 \Rightarrow \boxed{p = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}}$$

El valor buscado es $p = 2/3$.

- b) Para $p = 2$ la función es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 3$ tiene ecuación $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x + 14 \\ f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 18 = 42 \\ f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 14 = 44 \\ y - f(3) = f'(3)(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 42 = 44(x - 3) \Rightarrow \boxed{y = 44x - 90}$$



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
- b) Encuentre en que intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuales es decreciente. Indique también los extremos relativos y diga si son máximos o mínimos. [1,25 puntos]

2. Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancletas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancletas y un bañador por 50€, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancletas y dos bañadores por 30€. Para cumplir los propósitos de la tienda, el número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda. [1,25 puntos]
- b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendrán que venderse para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán esos ingresos? [1,25 puntos]

3. Una empresa de productos lácteos ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos. Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas. Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5%, las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10%. Determine las cantidades que ingresó por cada concepto (ventas a nivel estatal, exportaciones a la Unión Europea y exportaciones a países extracomunitarios) el año pasado, así como las cantidades que ha ingresado este año. [2,5 puntos]

4. Suponga que la temperatura del agua del mar en una zona concreta es dada por la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}, \text{ en la que } x \text{ representa la profundidad en metros negativos (por ejemplo, } f(-5) \text{ representa el valor de la temperatura del agua en grados Celsius a 5 metros de profundidad).}$$

- a) ¿Cuál es la temperatura del agua en la superficie? ¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados? ¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad? [1,25 puntos]
- b) Calcule a qué profundidad la temperatura es más baja y cuál es el valor de esa temperatura mínima. [1,25 puntos]

5. Hacemos dos pruebas de consumo de combustible en un vehículo: en la primera, el vehículo recorre 200 km por carretera y 100 km por ciudad, y consume un total de 17 litros, mientras que en la segunda recorre 300 km por carretera y 50 km por ciudad, y consume 17,5 litros. Suponiendo que los consumos medios por carretera y por ciudad son siempre constantes:

- a) ¿Cuál es el consumo medio por 100 km en cada una de las dos pruebas? [1,25 puntos]
- b) ¿Cuántos litros consumirá el mismo vehículo si en una tercera prueba recorre 400 km por carretera y 150 km por ciudad? [1,25 puntos]

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

- a) Calcule A^2 , A^3 y A^4 . [1,25 puntos]
- b) Deduce cuánto valdrá la matriz A^{100} . [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
 b) Encuentre en que intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuales es decreciente. Indique también los extremos relativos y diga si son máximos o mínimos. [1,25 puntos]

a) La recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Hallamos $f(0)$ y $f'(0)$ y obtenemos la expresión de la recta tangente.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = 0 \\ f'(0) = \frac{-2 \cdot 0^2 + 2}{(0^2 + 1)^2} = 2 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 2x$.

b) Igualamos la derivada a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-2(-2)^2 + 2}{((-2)^2 + 1)^2} = \frac{-6}{25} < 0$

. La función decrece en $(-\infty, -1)$.

- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 + 2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{-6}{25} < 0$. La

función decrece en $(1, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(-1, 1)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$ las

coordenadas del mínimo relativo son $(-1, -1)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = \frac{2}{2} = 1$ las coordenadas del máximo relativo son $(1, 1)$.

2. Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancletas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancletas y un bañador por 50€, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancletas y dos bañadores por 30€. Para cumplir los propósitos de la tienda, el número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda. [1,25 puntos]
- b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendrán que venderse para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán esos ingresos? [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de lotes de la oferta azul e “y” al número de lotes de la oferta amarilla.

Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Nº bañadores	Nº chancletas	Ingresos
Nº lotes azul (x)	x	3x	50x
Nº lotes amarilla (y)	2y	y	30y
TOTAL	$x + 2y$	$3x + y$	$50x + 30y$

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 50x + 30y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

“Disponen de 100 bañadores y 200 pares de chancletas” $\rightarrow x + 2y \leq 100; 3x + y \leq 200$

“El número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla” $\rightarrow x \geq \frac{y}{2} \rightarrow y \leq 2x$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 200 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$$x + 2y = 100$$

$$x \mid y = \frac{100 - x}{2}$$

20	40
60	20

$$3x + y = 200$$

$$x \mid y = 200 - 3x$$

0	200
60	20

$$y = 2x$$

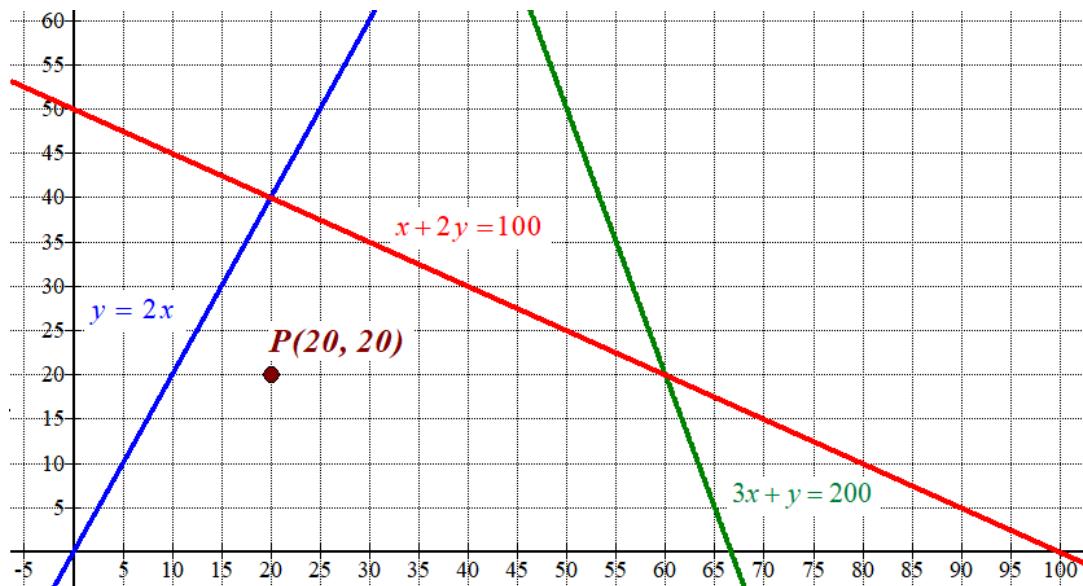
$$x \mid y = 2x$$

0	0
10	20

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer

Cuadrante



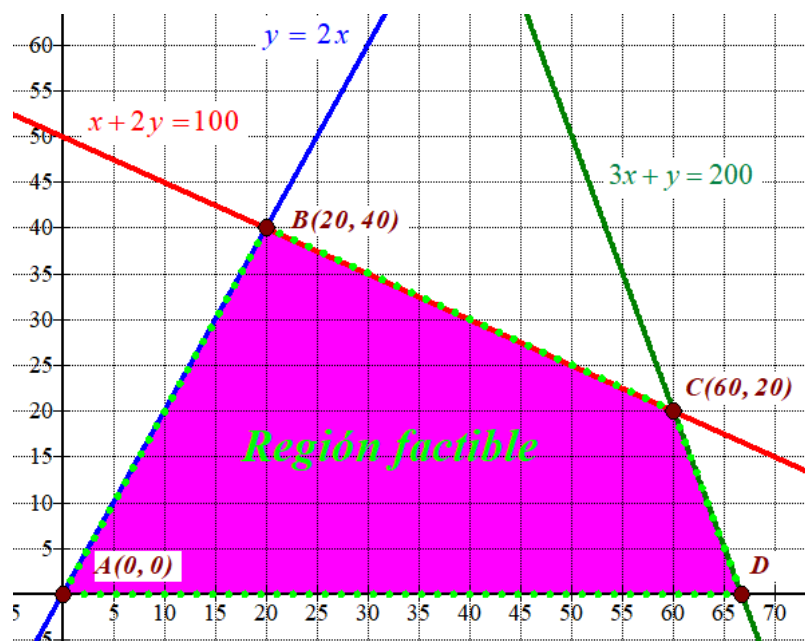
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 100 \\ 3x + y \leq 200 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 + 40 \leq 100 \\ 60 + 20 \leq 200 \\ 20 \leq 40 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D resolviendo el sistema correspondiente:

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 3x + 2y = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{3} \Rightarrow \boxed{D(200/3, 0)}$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 50x + 30y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$B(20, 40) \rightarrow f(20, 40) = 1000 + 1200 = 2200$$

$$C(60, 20) \rightarrow f(60, 20) = 3000 + 600 = 3600 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(200/3, 0) \rightarrow f\left(\frac{200}{3}, 0\right) = 50 \frac{200}{3} + 0 = \frac{10000}{3} \simeq 3333$$

Para obtener unos ingresos máximos se deben vender 60 lotes de la oferta azul y 20 de la oferta amarilla. Conseguimos unos ingresos máximos de 3600 €.

3. Una empresa de productos lácteos ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos. Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas. Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5%, las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10%. Determine las cantidades que ingresó por cada concepto (ventas a nivel estatal, exportaciones a la Unión Europea y exportaciones a países extracomunitarios) el año pasado, así como las cantidades que ha ingresado este año. [2,5 puntos]

Consideramos las siguientes variables:

x : importe de las ventas a nivel estatal del año pasado,

y : importe de las exportaciones a Europa del año pasado,

z : importe de las exportaciones a países no comunitarios el pasado año.

“Ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos” $\rightarrow x + y + z = 1.800.000$

“Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas” $\rightarrow y = x + z$

“Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5% (el 95% las del año pasado), las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% (un 115 % las del año pasado) y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10% (un 110 % las del año pasado)” $\rightarrow 0.95x + 1.15y + 1.10z = 1.950.000$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1800000 \\ y = x + z \\ 0.95x + 1.15y + 1.10z = 1950000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + x + z + z = 1800000 \\ 0.95x + 1.15(x + z) + 1.10z = 1950000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 1800000 \\ 0.95x + 1.15x + 1.15z + 1.10z = 1950000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 900000 \\ 2.1x + 2.25z = 1950000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 900000 - z \\ 2.1x + 2.25z = 1950000 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.1(900000 - z) + 2.25z = 1950000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1890000 - 2.1z + 2.25z = 1950000 \Rightarrow 0.15z = 60000 \Rightarrow \boxed{z = \frac{60000}{0.15} = 400000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 900000 - 400000 = 500000} \Rightarrow \boxed{y = 500000 + 400000 = 900000}$$

Las ventas el año pasado a nivel estatal han sido de 500 000 €, las exportaciones a la Unión Europea han sido de 900 000 € y las exportaciones a países extracomunitarios de 400 000 €.

Las ventas en el año actual han sido de $500\,000 \cdot 0.95 = 475\,000$ € a nivel estatal, las exportaciones a Europa han tenido un valor de $900\,000 \cdot 1.15 = 1\,035\,000$ € y las exportaciones a países extracomunitarios de $400\,000 \cdot 1.10 = 440\,000$ €.

4. Suponga que la temperatura del agua del mar en una zona concreta está dada por la función $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$, en la que x representa la profundidad en metros negativos (por ejemplo, $f(-5)$ representa el valor de la temperatura del agua en grados Celsius a 5 metros de profundidad).

a) ¿Cuál es la temperatura del agua en la superficie? ¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados? ¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad?

[1,25 puntos]

b) Calcule a qué profundidad la temperatura es más baja y cuál es el valor de esa temperatura mínima.

[1,25 puntos]

a) En la superficie la temperatura es $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0^2 + 5 \cdot 0 + 4}{0^2 + 4} = 1$$

La temperatura es de 1°.

¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados?

Buscamos cuando la función se anula (la temperatura es 0°).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{2} = \boxed{-1 = x} \\ \frac{-5-3}{2} = \boxed{-4 = x} \end{cases}$$

La temperatura es de 0° a 1 y a 4 metros de profundidad.

¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad?

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = \boxed{1}$$

La temperatura tiende a estabilizarse en 1° C a mucha profundidad.

b) Buscamos los extremos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 5)(x^2 + 4) - (x^2 + 5x + 4)(2x)}{(x^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{8x} + 5x^2 + 20 - \cancel{2x^3} - 10x^2 - \cancel{8x}}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-5x^2 + 20}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow -5x^2 + 20 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Existen dos puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.

Como tratamos con un caso real y solo tiene sentido el valor negativo, pues hablamos de profundidad, estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = -2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-5(-3)^2 + 20}{((-3)^2 + 4)^2} = \frac{-25}{256} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-5 \cdot 0^2 + 20}{(0^2 + 4)^2} = \frac{20}{16} > 0$. La

función crece en $(-2, 2)$.

En $x = -2$ hay un mínimo de la función. Como $f(-2) = \frac{(-2)^2 + 5(-2) + 4}{(-2)^2 + 4} = \frac{-1}{4}$.

A dos metros de profundidad la temperatura es mínima siendo de $-1/4$ de grado.

5. Hacemos dos pruebas de consumo de combustible en un vehículo: en la primera, el vehículo recorre 200 km por carretera y 100 km por ciudad, y consume un total de 17 litros, mientras que en la segunda recorre 300 km por carretera y 50 km por ciudad, y consume 17,5 litros. Suponiendo que los consumos medios por carretera y por ciudad son siempre constantes:

- a) ¿Cuál es el consumo medio por 100 km en cada una de las dos pruebas? [1,25 puntos]
 b) ¿Cuántos litros consumirá el mismo vehículo si en una tercera prueba recorre 400 km por carretera y 150 km por ciudad? [1,25 puntos]

a) En la primera prueba ha consumido 17 litros por recorrer 300 km, por tanto la media es de 0.057 litros por km o, equivalentemente, 5.7 litros por 100 km.

En la segunda prueba ha consumido 17.5 litros por recorrer por 350 km, por tanto la media es de 0.05 litros por km o, equivalentemente, 5 litros por 100 km.

b) Llamamos x = litros consumidos por 100 km por carretera e y = litros consumidos por 100 km por ciudad.

Queremos calcular el consumo en litros en 400 km por carretera y 150 por ciudad, por tanto queremos calcular: $4x + 1.5y$.

De las dos primeras vueltas sabemos que:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 17 \\ 3x + 0.5y = 17.5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 17 - 2x \\ 3x + 0.5y = 17.5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 0.5(17 - 2x) = 17.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 8.5 - x = 17.5 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow \boxed{x = \frac{9}{2} = 4.5} \Rightarrow \boxed{y = 17 - 2 \cdot 4.5 = 8}$$

El consumo en carretera es de 4.5 litros por 100 km. El consumo por ciudad es de 8 litros por 100 km.

Recorriendo 400 km por carretera y 150 km por ciudad consumirá $4.5 \cdot 4 + 8 \cdot 1.5 = 30$ litros.

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Calcule A^2 , A^3 y A^4 . [1,25 puntos]

b) Deduce cuánto valdrá la matriz A^{100} . [1,25 puntos]

a) Obtenemos las potencias pedidas.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+a & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 2a^2 + a^2 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 3a^3 + a^3 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos una regularidad en las potencias de la matriz A.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a^{2-1} & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^{3-1} & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^{4-1} & a^4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, sabemos que $A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{100-1} & a^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}.$



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

- Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dado por la función $f(x) = \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x}$, la que x representa el número de toneladas de confeti vendidas.
 - Determine en qué intervalo de valores debe encontrarse la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas. [1,25 puntos]
 - Calcule la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]
- En una pastelería quieren preparar cajitas de *panellets* para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 *panellets* de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 *panellets* de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los *panellets* de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.
 - Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 - Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los *panellets* disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo. [1,25 puntos]
- En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.
 - Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta. [0,75 puntos]
 - Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado. [1,75 puntos]

4. Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Se sabe que solo dispone de 40 m lineales de valla metálica.
- a) Se denomina x la anchura del corral e y su longitud. Escriba la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta solo la anchura x . [1,25 puntos]
 - b) Calcule en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deduzca cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esa área máxima? [1,25 puntos]

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Encuentre la expresión general de A^n . Demuestre que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]
- b) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$. [1,25 puntos]

6. Considere la función real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

- a) Determine el valor del parámetro real a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]
- b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indique también los puntos en los que hay extremos relativos y clasifíquelos. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dado por la función $f(x) = \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x}$, la que x representa el número de toneladas de confeti vendidas.
- a) Determine en qué intervalo de valores debe encontrarse la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas. [1,25 puntos]
- b) Calcule la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y diga cuál es ese beneficio. [1,25 puntos]

a) Averiguamos cuando los beneficios son cero.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x} = 0 \Rightarrow -0,2x^2 + 5x - 20 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 50x + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 400}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} = \begin{cases} \frac{25+15}{2} = 20 \\ \frac{25-15}{2} = 5 \end{cases}$$

Estudiamos el comportamiento de los beneficios según las toneladas de confeti vendidas.

- En $(0, 5)$ tomamos $x = 4$ y los beneficios son $f(4) = \frac{-0,2(4)^2 + 5(4) - 20}{4} = -\frac{4}{5} < 0$. En el intervalo $(0, 5)$ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).

- En $(5, 20)$ tomamos $x = 10$ y los beneficios son $f(10) = \frac{-0,2(10)^2 + 5(10) - 20}{10} = 1 > 0$. En el intervalo $(5, 20)$ el beneficio es positivo (no tiene pérdidas).

- En $(20, +\infty)$ tomamos $x = 30$ y los beneficios son

$$f(30) = \frac{-0,2(30)^2 + 5(30) - 20}{30} = -\frac{5}{3} < 0. \text{ En el intervalo } (20, +\infty) \text{ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).}$$

Para que no tenga pérdidas se deben producir entre 5 y 20 toneladas.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(x) = \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-0,4x + 5)x - 1 \cdot (-0,2x^2 + 5x - 20)}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-0,4x^2 + 5x + 0,2x^2 - 5x + 20}{x^2} = \frac{-0,2x^2 + 20}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0,2x^2 + 20}{x^2} = 0 \Rightarrow -0,2x^2 + 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,2x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = \frac{20}{0,2} = 100 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{100} = 10}$$

No consideramos el valor $x = -10$ pues los valores de x son las toneladas de confetis y no puede tomar un valor negativo.

En $x = 10$ la función presenta un punto crítico, veamos si la función crece o decrece antes y después de este valor.

- En $(0,10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = \frac{-0,2 \cdot 5^2 + 20}{5^2} = \frac{3}{5} > 0$. La función crece en $(0,10)$.
- En $(10,+\infty)$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale $f'(20) = \frac{-0,2 \cdot 20^2 + 20}{20^2} = -\frac{3}{20} < 0$. La función decrece en $(10,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 10$, pues crece antes de $x = 10$ y luego decrece.

Los beneficios son máximos fabricando 10 toneladas de confeti.

Como $f(10) = \frac{-0,2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 20}{10} = 1$ estos beneficios máximos son de 1000 €.

2. En una pastelería quieren preparar cajitas de *panellets* para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 *panellets* de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 *panellets* de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el máximo número de cajitas posible con los *panellets* de los que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) Determine cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para realizar el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los *panellets* disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo. [1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cajitas de *panellets* del primer tipo e “y” al número de cajitas de *panellets* del segundo tipo.

Queremos maximizar el número de cajitas (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = x + y$

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº <i>panellets</i> de piñons	Nº de <i>panellets</i> de coco
Nº de cajitas tipo I (x)	3x	2x
Nº de cajitas tipo II (y)	4y	6y
TOTALES	$3x + 4y$	$2x + 6y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

“como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo” $\rightarrow x \geq 9; y \geq 9$

“disponen de 120 *panellets* de piñones y de 150 *panellets* de coco” $\rightarrow 3x + 4y \leq 120, 2x + 6y \leq 150$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 9; y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ 2x + 6y \leq 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 9; y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x + 3y \leq 75 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$$x = 9$$

$$y = 9$$

$$3x + 4y = 120$$

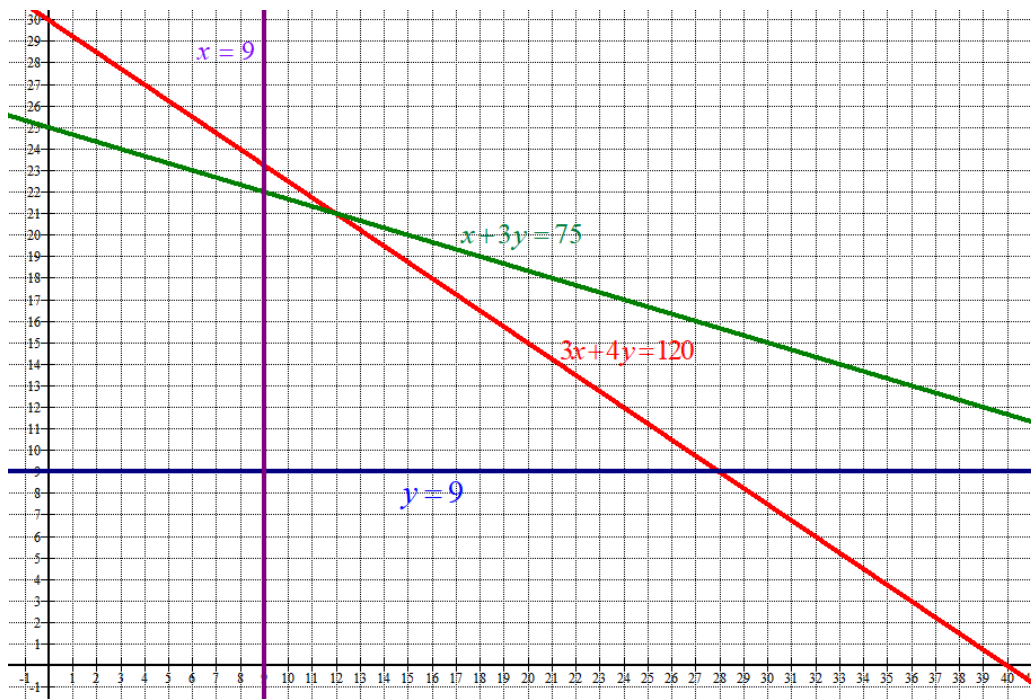
$$x + 3y = 75$$

$x = 9$	y
9	9
9	22

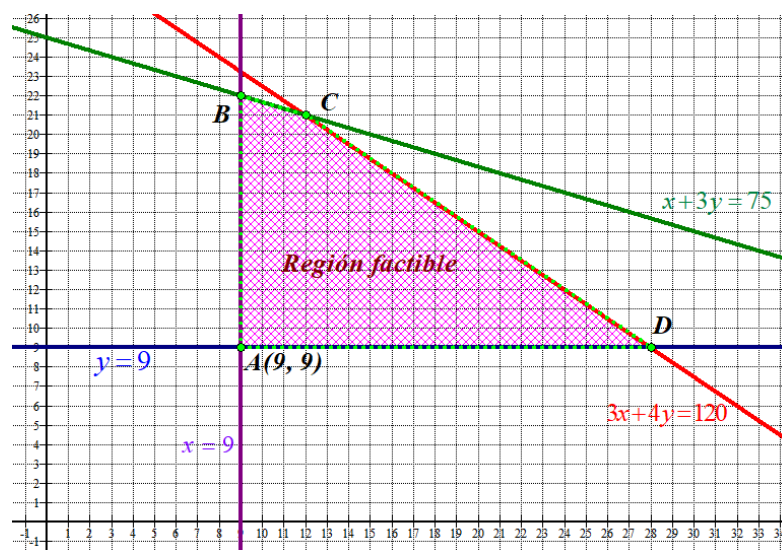
x	$y = 9$
9	9
28	9

x	$y = \frac{120 - 3x}{4}$
28	9
12	21

x	$y = \frac{75 - x}{3}$
9	22
12	21



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 9; y \geq 9 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x + 3y \leq 75 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por encima de la recta horizontal de color azul y por debajo de las rectas roja y verde. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice A es fácil de determinar. Las coordenadas de los restantes vértices las determinamos resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$B \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 75 \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow 9 + 3y = 75 \Rightarrow 3y = 66 \Rightarrow y = 22 \Rightarrow B(9, 22)$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 75 \\ 3x + 4y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 9y = -225 \\ 3x + 4y = 120 \end{cases}$$

$$\hline -5y = -105 \Rightarrow y = \frac{105}{5} = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 63 = 75 \Rightarrow x = 75 - 63 = 12 \Rightarrow C(12, 21)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow 3x + 36 = 120 \Rightarrow 3x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{3} = 28 \Rightarrow D(28, 9)$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = x + y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

$$A(9, 9) \rightarrow f(9, 9) = 18$$

$$B(9, 22) \rightarrow f(9, 22) = 31$$

$$C(12, 21) \rightarrow f(12, 21) = 33$$

$$D(28, 9) \rightarrow f(28, 9) = 37$$

El número máximo de cajitas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 37 y se consiguen con 28 del tipo 1 y 9 del tipo 2.

Rellenamos la tabla siguiente y vemos si sobran panellets.

	Nº panellets de pinyons	Nº de panellets de coco
Nº de cajitas tipo I (28)	84	56
Nº de cajitas tipo II (9)	36	54
TOTALES	120	110

Se disponen de 120 panellets de piñones y se utilizan todos.

Se disponen de 150 panellets de coco y utilizamos 110, nos sobran 40 panellets de coco.

- 3.** En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños. Además, se sabe que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres.
- a)** Plantee un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta. [0,75 puntos]
- b)** Resuelva el sistema del apartado anterior e interprete el resultado. [1,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de hombres, “y” al número de mujeres y “z” al número de niños.

“En una fiesta familiar se han reunido 20 personas” $\rightarrow x + y + z = 20$

“Contando el total de hombres y mujeres juntos, se observa que hay el triple que de niños” $\rightarrow x + y = 3z$

“si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual al número de hombres” $\rightarrow y + 1 = x$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

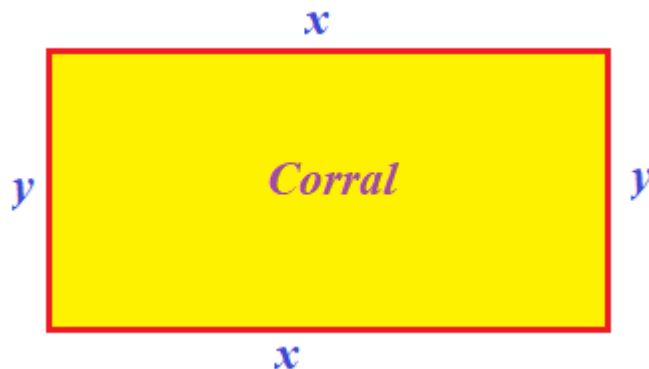
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (y+1) + y + z = 20 \\ (y+1) + y = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 19 \\ 2y + 1 = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 19 - 2y \\ 2y + 1 = 3z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 1 = 3(19 - 2y) \Rightarrow 2y + 1 = 57 - 6y \Rightarrow 8y = 56 \Rightarrow \boxed{y = \frac{56}{8} = 7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 19 - 14 = 5} \\ \boxed{x = 7 + 1 = 8} \end{cases}$$

Acuden a la fiesta 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

4. Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Se sabe que solo dispone de 40 m lineales de valla metálica.
- a) Se denomina x la anchura del corral e y su longitud. Escriba la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta solo la anchura x . [1,25 puntos]
- b) Calcule en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deduzca cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esa área máxima? [1,25 puntos]

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El área del corral viene dada por la expresión $A(x, y) = x \cdot y$.

Como el perímetro debe ser de 40 metros, tenemos que $2x + 2y = 40$.

Aplicando esto a la expresión del área del corral tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = x \cdot y \\ 2x + 2y = 40 \rightarrow x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$A(x) = 20x - x^2 \Rightarrow A'(x) = 20 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si $x = 10$ es un máximo relativo del área del corral.

$$A'(x) = 20 - 2x \Rightarrow A''(x) = -2 \Rightarrow A''(10) = -2 < 0$$

En $x = 10$ la función $A(x) = 20x - x^2$ presenta un máximo.

Este valor máximo es de $A(10) = 200 - 10^2 = 100 \text{ m}^2$

El valor del lado "y" es $y = 20 - 10 = 10$ metros

El corral rectangular de área máxima con perímetro 40 metros es un corral cuadrado de lado 10.

El área máxima es de 100 metros cuadrados.

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la expresión general de A^n . Demuestre que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

b) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$. [1,25 puntos]

a) Buscamos una regularidad en las potencias de la matriz A .

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

Observamos que en cada potencia de la matriz A los valores no cambian salvo el elemento situado en la primera fila y segunda columna. Su valor cambia en función de la potencia calculada y se

cumple la regla $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz A^n tiene inversa pues su determinante es no nulo. $|A^n| = \begin{vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Calculamos su inversa.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^n)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^n)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^n)^T\right)}{|(A^n)^T|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando lo obtenido en el apartado anterior sabemos que la matriz A^{10} tiene inversa y la

inversa de A^{10} es $(A^{10})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

También sabemos que $A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^{10} \cdot X - A^{20} = A \Rightarrow (A^{10})^{-1} A^{10} \cdot X - (A^{10})^{-1} \cdot A^{20} = (A^{10})^{-1} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - (A^{10})^{-1} \cdot A^{20} = (A^{10})^{-1} A \Rightarrow X = (A^{10})^{-1} \cdot A^{20} + (A^{10})^{-1} A$$

Sustituyendo los valores de cada matriz y haciendo las operaciones tendremos la expresión de la matriz X.

$$X = (A^{10})^{-1} \cdot A^{20} + (A^{10})^{-1} A$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 20-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Considere la función real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

- a) Determine el valor del parámetro real a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]
 b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indique también los puntos en los que hay extremos relativos y clasifíquelos. [1,25 puntos]

- a) Para tener un extremo relativo en $x = -1$ la derivada primera debe anularse, por lo que debe ser $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2ax$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 12(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \Rightarrow 12 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Para que la función $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ debe ser $a = 6$.

- b) Siendo $a = 12$ la función queda $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

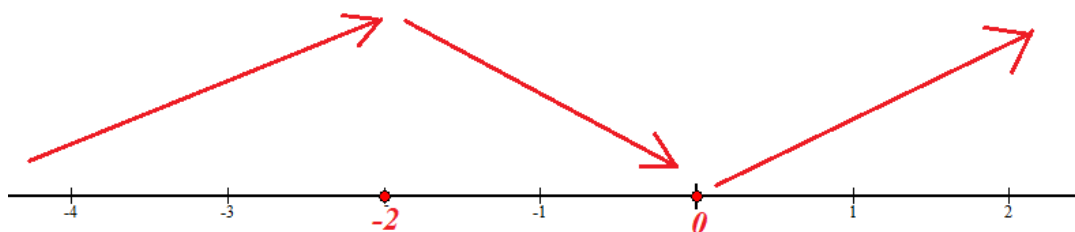
$$f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 12x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Evaluamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores críticos obtenidos.

- En $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = 12(-3)^2 + 24(-3) = 36 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$
- En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 12(-1)^2 + 24(-1) = -12 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 + 24 = 36 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -2$. Como $f(-2) = 4(-2)^3 + 12(-2)^2 - 2 = 14$ las coordenadas del máximo relativo son $(-2, 14)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = 4(0)^3 + 12(0)^2 - 2 = -2$ las coordenadas del máximo relativo son $(0, -2)$.



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores de x la matriz inversa de la matriz

A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$.

[2,5 puntos]

2. Un fabricante tuvo un producto a la venta durante diez años. Durante este tiempo, el precio del producto P , en euros, estuvo relacionado con el tiempo que llevaba a la venta t , expresado en años, siguiendo la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto durante estos diez años.

[1,25 puntos]

- b) Halle el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los últimos cinco años que estuvo a la venta.

[1,25 puntos]

3. Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en frascos pequeños que cuestan 70 euros, y la colonia, que es más diluida y que se vende en frascos más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar un frasco de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar uno de colonia necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

[1,25 puntos]

- b)** ¿Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos?
[1,25 puntos]
- 4.** Considere las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$.
- a)** Calcule los valores de los parámetros a , b y c para que los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ se corten en los puntos $(-1, 3)$ y $(3, -5)$.
[1,25 puntos]
- b)** Para $c = 4$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]
- 5.** Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte distintas: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Se sabe que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay que recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Se sabe también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.
[2,5 puntos]
- 6.** La función $Q(x) = (x+1)^2 (32-x)$, donde $x \in [-1, 32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x , expresada en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$), que puede variar entre -1°C y 32°C .
- a)** Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la que se obtiene la máxima producción. ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esta temperatura?
[1,25 puntos]
- b)** Calcule a qué temperaturas se alcanza el nivel mínimo de producción y cuál es este valor mínimo.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$. [2,5 puntos]

Veamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

Para que exista la inversa de A el determinante debe ser no nulo y por tanto $x \neq \pm\sqrt{10}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} x & 5 \\ -2 & -x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10} = \frac{\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10}$$

$$A^{-1} = -A \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow -x^2 + 10 = 1 \Rightarrow -x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Los valores de x buscados son $x = 3$ o $x = -3$.

2. Un fabricante tuvo un producto a la venta durante diez años. Durante este tiempo, el precio del producto P , en euros, estuvo relacionado con el tiempo que llevaba a la venta t , expresado en años, siguiendo la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto durante estos diez años. [1,25 puntos]
 b) Halle el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los últimos cinco años que estuvo a la venta. [1,25 puntos]

- a) Calculamos la derivada de la función.

$$P'(t) = \begin{cases} 10(t+1) & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -4 & \text{si } 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

La derivada en $0 \leq t < 2$ es positiva siempre, pues $t + 1$ solo es negativa cuando $t < -1$. La función crece en $[0, 2)$.

La derivada ($P'(t) = -4$) en $2 < t \leq 10$ es negativa siempre. La función decrece en $(2, 10]$.

En $t = 2$ la función es continua ($P(2) = 40 = \lim_{t \rightarrow 2} P(t)$) y cambia de crecer a decrecer. Es un máximo relativo.

Resumiendo: La función crece en $[0, 2)$ y decrece en $(2, 10]$.

- b) Por lo visto en el apartado anterior el precio máximo se alcanza en $t = 2$ (al cabo de 2 años) y este precio es de $P(2) = 40$ euros.

$$TVM[5,10] = \frac{P(10) - P(5)}{10 - 5} = \frac{(-40 + 48) - (-20 + 48)}{5} = \frac{-20}{5} = -4 \text{ euros por año.}$$

3. Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en frascos pequeños que cuestan 70 euros, y la colonia, que es más diluida y que se vende en frascos más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar un frasco de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar uno de colonia necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) ¿Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos? [1,25 puntos]

- a) Llamemos “x” al número de ampollas de perfume e “y” al número de ampollas de colonia. Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Ml de ingrediente A	Ml de ingrediente B	Ingresos
Nº ampollas de perfume (x)	10x	40x	70x
Nº ampollas de colonia (y)	10y	90y	82y
TOTALES	10x+10y	40x+90y	70x+82y

Se desean maximizar los ingresos que vienen expresados por la función objetivo $I(x, y) = 70x + 82y$.

Las restricciones del problema vienen expresadas por las inecuaciones:

“El fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A” $\rightarrow 10x + 10y \leq 5000$

“El fabricante dispone de 30.000 ml del ingrediente B” $\rightarrow 40x + 90y \leq 30000$

“Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia” $\rightarrow x \geq 120; y \geq 70$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 10y \leq 5000 \\ 40x + 90y \leq 30000 \\ x \geq 120; y \geq 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ 4x + 9y \leq 3000 \\ x \geq 120; y \geq 70 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 500$$

x	y = 500 - x
0	500
500	0

$$4x + 9y = 3000$$

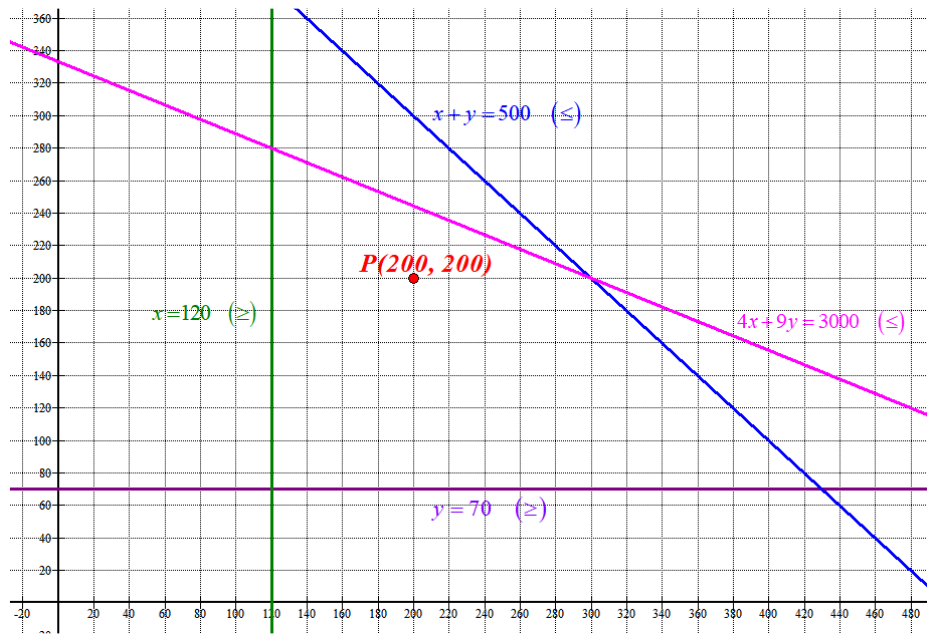
x	y = $\frac{3000 - 4x}{9}$
750	0
300	200

$$x = 120$$

x = 120	y
120	0
120	100

$$y = 70$$

x	y = 70
0	70
100	70



Comprobamos si el punto $P(200, 200)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 200 \leq 500 \\ 800 + 1800 \leq 3000 \\ 200 \geq 120; \quad 200 \geq 70 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del plano que contiene el punto P y delimitada por las rectas dibujadas. La pintamos de rojo en la siguiente figura.



b) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices en busca de unos ingresos máximos.

$$A(120, 70) \rightarrow I(120, 70) = 14140$$

$$B(120, 280) \rightarrow I(120, 280) = 31360$$

$$C(300, 200) \rightarrow I(300, 200) = \mathbf{37400 \text{ €}}$$

$$D(430, 70) \rightarrow I(430, 70) = 35840$$

Los ingresos máximos son de 37400 € que se obtienen con la fabricación de 300 ampollas de perfume y 200 de colonia.

4. Considere las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c para que los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ se corten en los puntos $(-1, 3)$ y $(3, -5)$. [1,25 puntos]

b) Para $c = 4$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]

a) Las gráficas coinciden en $(-1, 3) \rightarrow f(-1) = g(-1) = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + a(-1) + b = 3 \\ -(-1)^2 + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{Las gráficas coinciden en } (3, -5) \rightarrow f(3) = g(3) = -5 \Rightarrow \begin{cases} 3^2 + 3a + b = -5 \\ -3^2 + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -14 \\ c = 4 \end{cases}$$

Juntamos las ecuaciones y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 6 \\ 3a + b = -14 \end{cases}$$

$$\hline 4b = -8 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow -a - 2 = 2 \Rightarrow a = -4$$

Los valores buscados son $a = -4$, $b = -2$ y $c = 4$.

b) Para $c = 4$ la función $g(x)$ queda $g(x) = -x^2 + 4$. Hallamos su derivada:

$$g(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = -2x$$

La recta tangente en $x = -1$ de la gráfica de $g(x)$ tiene la expresión

$$y - g(-1) = g'(-1)(x - (-1))$$

Sustituimos x por -1 en la función y su derivada y obtenemos la ecuación de la recta tangente.

$$\left. \begin{aligned} g(-1) &= -(-1)^2 + 4 = 3 \\ g'(-1) &= -2(-1) = 2 \\ y - g(-1) &= g'(-1)(x - (-1)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 3 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 5$$

5. Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte distintas: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Se sabe que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay que recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Se sabe también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad. [2,5 puntos]

Llamamos “x” a la distancia a recorrer nadando, “y” a la distancia a recorrer en bici y “z” a la distancia a recorrer corriendo.

“La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km” $\rightarrow x + y + z = 75$

“El recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que se recorre nadando y corriendo conjuntamente” $\rightarrow y = 4(x + z)$

“Si sumamos 3 km a la distancia que se va a correr se obtiene lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando” $\rightarrow z + 3 = 5x$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 75 \\ y = 4(x + z) \\ z + 3 = 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4(x + z) + z = 75 \\ z + 3 = 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4x + 4z + z = 75 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 5z = 75 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow \boxed{z = 15 - 3 = 12} \Rightarrow \boxed{y = 4(3 + 12) = 60}$$

El triatlón consta de 3 km nadando, 60 km en bicicleta y 12 nadando.

6. La función $Q(x) = (x+1)^2 (32-x)$, donde $x \in [-1, 32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x , expresada en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$), que puede variar entre -1°C y 32°C .

- a) Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la que se obtiene la máxima producción. ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esta temperatura? [1,25 puntos]
 b) Calcule a qué temperaturas se alcanza el nivel mínimo de producción y cuál es este valor mínimo. [1,25 puntos]

a) Utilizamos la derivada.

$$Q(x) = (x+1)^2 (32-x) \Rightarrow Q'(x) = 2(x+1)(32-x) - (x+1)^2 =$$

$$= 64x - 2x^2 + 64 - 2x - (x^2 + 2x + 1) = -3x^2 + 60x + 63$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 60x + 63 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x - 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 + 84}}{2} = \frac{20 \pm 22}{2} = \begin{cases} \frac{20+22}{2} = 21 = x \\ \frac{20-22}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos como puntos críticos de la función están en el dominio de definición. Calculamos la derivada segunda y comprobamos los valores en los extremos del intervalo de definición $[-1, 32]$.

$$Q''(x) = -6x + 60 \Rightarrow \begin{cases} Q''(-1) = -6(-1) + 60 = 66 > 0 \rightarrow x = -1 \text{ es mínimo} \\ Q''(21) = -6(21) + 60 = -66 < 0 \rightarrow x = 21 \text{ es máximo} \end{cases}$$

Obtenemos la producción con -1°C , en 21°C y en 32°C .

$$Q(-1) = (-1+1)^2 (32+1) = 0$$

$$Q(21) = (21+1)^2 (32-21) = 5324$$

$$Q(32) = (32+1)^2 (32-32) = 0$$

La producción máxima se produce con 21°C y es de 5324 kg de hortalizas.

- b) En el apartado anterior hemos visto que para -1°C y a 32°C la producción es 0 Kg. Esta es la producción mínima que se puede obtener.

La función $Q(x) = (x+1)^2 (32-x)$, $x \in [-1, 32]$ es siempre positiva en este intervalo pues es el producto de un cuadrado (positivo) y una resta que siempre es positiva en los valores $x \in [-1, 32]$.



PAU julio (serie 3) 2020
 Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. La siguiente tabla refleja el precio unitario, expresado en euros, de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, suministrados a un restaurante por dos empresas diferentes $E1$ y $E2$:

	E1	E2
P1	6	5
P2	5	8
P3	9	7

El restaurante tendrá que hacer dos pedidos: uno esta semana y otro la semana que viene. Esta semana necesita 8 unidades del producto $P1$, 5 unidades del producto $P2$ y 12 unidades del producto $P3$; mientras que para la próxima semana necesitará 10 unidades del producto $P1$, 15 unidades del producto $P2$ y 7 unidades del producto $P3$.

- a) Escriba en forma matricial la información que relaciona el precio unitario de los productos y las empresas suministradoras, y también la información de las cantidades de productos solicitados en cada uno de los dos pedidos que debe hacer el restaurante.

[1,25 puntos]

- b) Calcule a cuál de las dos empresas debe encargar el restaurante cada uno de los pedidos para que le salga más económico y a qué precio le saldrá cada uno.

[1,25 puntos]

2. Una empresa quiere fabricar un producto nuevo. Encarga un estudio de mercado que determina que la evolución de las ventas en los próximos seis años seguirá la función $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en la que $f(t)$ representa la cantidad de miles de unidades vendidas en función del tiempo $t \in [0, 6]$ expresado en años.

- a) ¿Cuántas unidades venderá el primer año? Salvo el instante inicial ($t = 0$), ¿se prevé que habrá algún otro año en el que no se producirá ninguna venta?

[1,25 puntos]

- b) ¿En qué año se producirá el máximo número de ventas y cuántos productos se habrán vendido ese año?

[1,25 puntos]

3. Una fábrica especializada en ropa de deporte tiene problemas con el suministro de las fibras. Para satisfacer un pedido de camisetas y mallas solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano. Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas.

Para fabricar cada pieza de ropa, tanto si es una camiseta como si son unas mallas, se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno en ambos casos. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano, y en la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano.

El beneficio que el fabricante obtiene por cada camiseta que fabrica es de 5 € y por cada una de las mallas obtiene un beneficio de 3 €.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene el fabricante para satisfacer el pedido con las fibras disponibles.

[1,25 puntos]

- b) Calcule cuántas camisetas y cuántas mallas deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio?

[1,25 puntos]

4. Considere la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

- a) Encuentre los valores de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$.

[1,25 puntos]

- b) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para los valores de los parámetros a , b y c encontrados en el apartado anterior.

[1,25 puntos]

5. En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones: administración, investigación y publicidad. Todos los empleados de cada sección cobran el mismo sueldo mensual: 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros.

- a) Plantee y estudie el sistema de ecuaciones asociado. Justifique si se puede determinar el número de empleados de cada sección.

[1,25 puntos]

- b) Una reestructuración reciente ha obligado a despedir $\frac{1}{10}$ parte de los empleados de

administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad. Este hecho ha

supuesto un ahorro mensual en salarios de 33.200 euros. Determine cuántos empleados tenía cada sección de la empresa antes de la reestructuración.

[1,25 puntos]

6. Un centro de formación organiza un curso subvencionado que tiene un coste fijo de 9.000 €, al que hay que sumar una cantidad que varía según el número de alumnos del curso y que viene dada por la función $0,02x^3 - 24x$, en la que x representa el número de alumnos matriculados. El Consejo Comarcal ha otorgado al centro una subvención de 5.000 € para la organización del curso y el Ayuntamiento paga al centro 30 € por cada alumno matriculado.

El gasto que debe asumir el centro es la diferencia entre el coste total del curso y las dos subvenciones recibidas.

¿Cuántos alumnos deben matricularse al curso para que el gasto sea mínimo para el centro y cuál sería este gasto?

[2,5 puntos]

SOLUCIONES

1. La siguiente tabla refleja el precio unitario, expresado en euros, de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, suministrados a un restaurante por dos empresas diferentes $E1$ y $E2$:

	E1	E2
P1	6	5
P2	5	8
P3	9	7

El restaurante tendrá que hacer dos pedidos: uno esta semana y otro la semana que viene. Esta semana necesita 8 unidades del producto $P1$, 5 unidades del producto $P2$ y 12 unidades del producto $P3$; mientras que para la próxima semana necesitará 10 unidades del producto $P1$, 15 unidades del producto $P2$ y 7 unidades del producto $P3$.

- a) Escriba en forma matricial la información que relaciona el precio unitario de los productos y las empresas suministradoras, y también la información de las cantidades de productos solicitados en cada uno de los dos pedidos que debe hacer el restaurante. [1,25 puntos]
- b) Calcule a cuál de las dos empresas debe encargar el restaurante cada uno de los pedidos para que le salga más económico y a qué precio le saldrá cada uno. [1,25 puntos]

a) La matriz de precios es $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, donde en las filas aparecen los precios de cada producto y en las

columnas los dos proveedores. La matriz de pedidos es $P = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix}$, donde en las filas aparecen el primer y segundo pedido y en las columnas las cantidades de cada uno de los tres productos.

b) Hacemos el producto matricial $P \cdot C$ para obtener el coste de los dos pedidos en cada proveedor.

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 12 \cdot 9 & 8 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 12 \cdot 7 \\ 10 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 7 \cdot 9 & 10 \cdot 5 + 15 \cdot 8 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$= \begin{pmatrix} 181 & 164 \\ 198 & 219 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Pedido 1} \\ \text{Pedido 2} \end{matrix}$$

El primer pedido es más económico (164 euros) en la empresa E2 y el segundo pedido es más económico (198 euros) en la empresa E1.

2. Una empresa quiere fabricar un producto nuevo. Encarga un estudio de mercado que determina que la evolución de las ventas en los próximos seis años seguirá la función $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en la que $f(t)$ representa la cantidad de miles de unidades vendidas en función del tiempo $t \in [0, 6]$ expresado en años.
- a) ¿Cuántas unidades venderá el primer año? Salvo el instante inicial ($t = 0$), ¿se prevé que habrá algún otro año en el que no se producirá ninguna venta? [1,25 puntos]
- b) ¿En qué año se producirá el máximo número de ventas y cuántos productos se habrán vendido ese año? [1,25 puntos]

a) Calculamos $f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 25$. Venderá 25 000 unidades el primer año.

Buscamos cuando son iguales a 0 las ventas.

$$f(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 12t + 36) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 12t + 36 = 0 \rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(36)}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

No se producirán ventas el año 0 y el año 6, al final del periodo de estudio.

b) Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = 6 \in [0, 6] \\ \frac{8-4}{2} = 2 \in [0, 6] \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos: $t = 2$ y $t = 6$. Determinamos el signo de la derivada segunda para estos valores.

$$f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 \Rightarrow f''(t) = 6t - 24 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0 \\ f''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 12 > 0 \end{cases}$$

La segunda derivada es negativa para $t = 2$, por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$. En $t = 6$ hay un mínimo.

Para encontrar el máximo absoluto valoramos la función en $t = 2$ y en los extremos del intervalo $[0, 6]$.

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 32 \qquad f(6) = 0$$

El máximo de ventas se produce al segundo año con 32 000 unidades.

3. Una fábrica especializada en ropa de deporte tiene problemas con el suministro de las fibras. Para satisfacer un pedido de camisetas y mallas solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano. Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas.

Para fabricar cada pieza de ropa, tanto si es una camiseta como si son unas mallas, se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno en ambos casos. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano, y en la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano.

El beneficio que el fabricante obtiene por cada camiseta que fabrica es de 5 € y por cada una de las mallas obtiene un beneficio de 3 €.

- a)** Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene el fabricante para satisfacer el pedido con las fibras disponibles. [1,25 puntos]
b) Calcule cuántas camisetas y cuántas mallas deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio? [1,25 puntos]

a) Llamemos “x” al número de camisetas e “y” al número de mallas que fabrica.

Como cada camiseta le proporciona un beneficio de 5 € y cada malla 3 € el beneficio total es:

$B(x, y) = 5x + 3y$. Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.

Para cada camiseta se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano $\rightarrow 0.90 \cdot 200 = 180$ metros de polipropileno, $0.06 \cdot 200 = 12$ metros de poliamida y $0.04 \cdot 200 = 8$ metros de elastano son necesarios para fabricar cada camiseta.

Para cada malla se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno. En la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano $\rightarrow 0.90 \cdot 200 = 180$ metros de polipropileno, $0.02 \cdot 200 = 4$ metros de poliamida y $0.08 \cdot 200 = 16$ metros de elastano son necesarios para fabricar cada malla.

Hacemos una tabla con los datos.

	Metros de polipropileno	Metros de poliamida	Metros de elastano
Nº camisetas (x)	180x	12x	8x
Nº mallas (y)	180y	4y	16y
TOTALES	$180x + 180y$	$12x + 4y$	$8x + 16y$

Las restricciones son:

“Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas” $\rightarrow x \geq 80; y \geq 50$

“Solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano” $\rightarrow 180x + 180y \leq 90000; 12x + 4y \leq 3200; 8x + 16y \leq 6800$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90000 \\ 12x + 4y \leq 3200 \\ 8x + 16y \leq 6800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ y \leq 500 - x \\ y \leq 800 - 3x \\ 2y \leq 850 - x \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible primero dibujamos las rectas que la delimitan.

$x = 80$

$y = 50$

$y = 500 - x$

$y = 800 - 3x$

$2y = 850 - x$

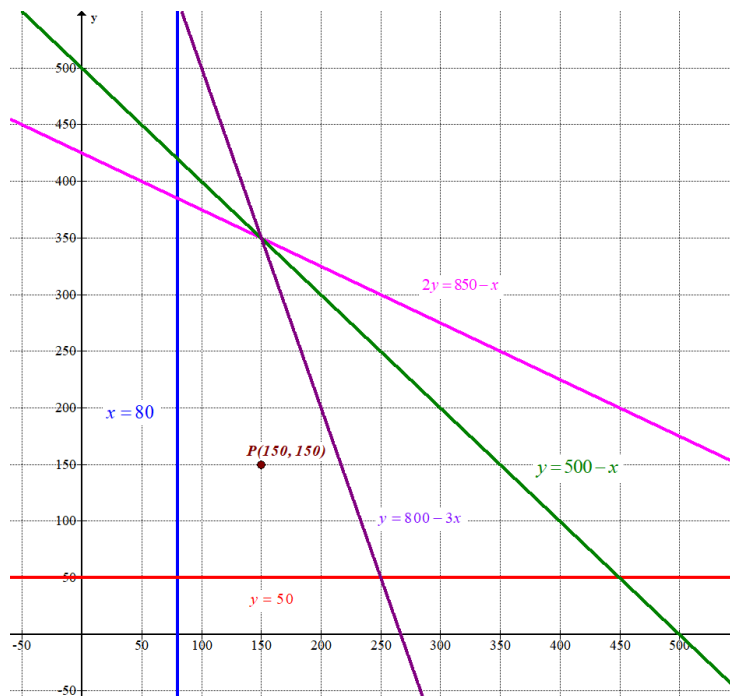
$x = 80$	y
80	0
80	385

x	$y = 50$
0	50
80	50

x	$y = 500 - x$
0	500
150	350

x	$y = 800 - 3x$
0	800
150	350

x	$y = \frac{850 - x}{2}$
80	385
150	350

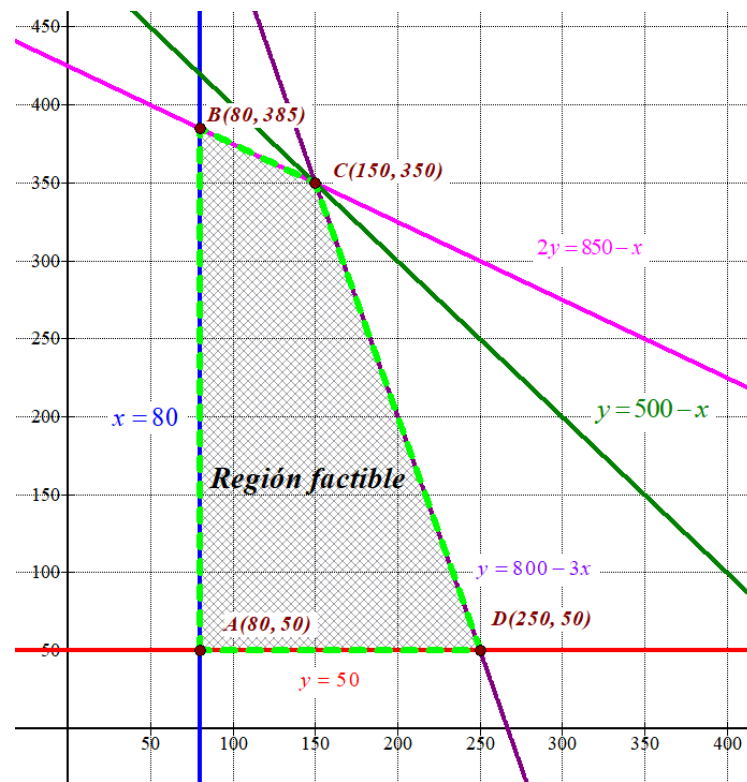


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ y \leq 500 - x \\ y \leq 800 - 3x \\ 2y \leq 850 - x \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada a la

derecha de la recta vertical azul, por encima de la recta horizontal roja y por debajo de las rectas oblicuas verde, violeta y rosa. Lo comprobamos viendo si el punto $P(150, 150)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 150 \geq 80 \\ 150 \geq 50 \\ 150 \leq 500 - 150 \\ 150 \leq 800 - 3 \cdot 150 \\ 2 \cdot 150 \leq 850 - 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150 \geq 80 \\ 150 \geq 50 \\ 150 \leq 500 - 150 \\ 150 \leq 800 - 450 \\ 300 \leq 850 - 150 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada del dibujo.



- b) Para determinar con qué producción se puede obtener mayores beneficios, cumpliendo las restricciones, valoramos los beneficios $B(x, y) = 5x + 3y$ en cada uno de los vértices de la región factible buscando el máximo.

$$A(80, 50) \rightarrow B(80, 50) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 550$$

$$B(80, 385) \rightarrow B(80, 385) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 385 = 1555$$

$$C(150, 350) \rightarrow B(150, 350) = 5 \cdot 150 + 3 \cdot 350 = 1800 \text{ ;Máximo!}$$

$$D(250, 50) \rightarrow B(250, 50) = 5 \cdot 250 + 3 \cdot 50 = 1400$$

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1800 € y se consigue en el punto $C(150, 350)$ que significa fabricar 150 camisetas y 350 mallas.

4. Considere la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

- a) Encuentre los valores de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$. [1,25 puntos]
 b) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para los valores de los parámetros a , b y c encontrados en el apartado anterior. [1,25 puntos]

a) La función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$, por lo que la derivada se anula en $x = 2$ y en $x = 0 \rightarrow f'(2) = 0$ y $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \\ f'(0) &= 0 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a \cdot 0^3 + 2b \cdot 0 &= 0 \\ 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32a + 4b = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -8a}$$

La función queda $f(x) = ax^4 - 8ax^2 + c$.

La función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$, por lo que la función pasa por estos puntos $\rightarrow f(2) = 1$ y $f(0) = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^4 - 8ax^2 + c \\ f(0) &= -1 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -1 &= a \cdot 0^4 - 8a \cdot 0^2 + c \\ 1 &= a \cdot 2^4 - 8a \cdot 2^2 + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \boxed{-1 = c} \\ 1 &= 16a - 32a + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -16a - 1 \Rightarrow 2 = -16a \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-16} = \frac{-1}{8}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{8} = -0.125$, $b = -8 \frac{-1}{8} = 1$ y $c = -1$.

b) Para los valores $a = \frac{-1}{8}$, $b = 1$ y $c = -1$ la función queda $f(x) = \frac{-x^4}{8} + x^2 - 1$.

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{-x^4}{8} + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^3}{8} + 2x = \frac{-x^3}{2} + 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^3}{2} + 2x = 0 \Rightarrow -x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \end{aligned} \right.$$

La función presenta tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-(-3)^3}{2} + 2(-3) = 7.5 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^3}{2} + 2(-1) = -1.5 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1^3}{2} + 2 \cdot 1 = 1.5 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3^3}{2} + 2 \cdot 3 = -7.5 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

5. En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones: administración, investigación y publicidad. Todos los empleados de cada sección cobran el mismo sueldo mensual: 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros.

a) Plantee y estudie el sistema de ecuaciones asociado. Justifique si se puede determinar el número de empleados de cada sección. [1,25 puntos]

b) Una reestructuración reciente ha obligado a despedir $\frac{1}{10}$ parte de los empleados de administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad. Este hecho ha supuesto un ahorro mensual en salarios de 33.200 euros. Determine cuántos empleados tenía cada sección de la empresa antes de la reestructuración. [1,25 puntos]

a) Llamamos x , y , z al número de empleados en administración, investigación y publicidad, respectivamente.

En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones $\rightarrow$
 $x + y + z = 100$.

Cobran 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros $\rightarrow$
 $2000x + 2400y + 2800z = 228000$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2000x + 2400y + 2800z = 228000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \end{array} \right\}$$

No se pueden determinar el número de empleados en cada sección pues falta información, hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones.

b) Al no pagar los sueldos de todos los despedidos se han ahorrado 33.200 euros. Podemos obtener una tercera ecuación con la nueva información.

$\frac{1}{10}$ parte de los empleados de administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad cobran, sumando todos sus sueldos 33200 € $\rightarrow \frac{x}{10} 2000 + \frac{y}{6} 2400 + \frac{z}{5} 2800 = 33200$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ \frac{x}{10} 2000 + \frac{y}{6} 2400 + \frac{z}{5} 2800 = 33200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 200x + 400y + 560z = 33200 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 100 - y - z \\ \Rightarrow 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(100 - y - z) + 6y + 7z = 570 \\ 5(100 - y - z) + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 500 - 5y - 5z + 6y + 7z = 570 \\ 500 - 5y - 5z + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 70 \\ 5y + 9z = 330 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 70 - 2z \\ 5y + 9z = 330 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(70 - 2z) + 9z = 330 \Rightarrow 350 - 10z + 9z = 330 \Rightarrow -z = -20 \Rightarrow \boxed{z = 20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 70 - 2 \cdot 20 = 30} \Rightarrow \boxed{x = 100 - 30 - 20 = 50}$$

Antes de la reestructuración había 50 empleados en administración, 30 en investigación y 20 en publicidad.

6. Un centro de formación organiza un curso subvencionado que tiene un coste fijo de 9.000 €, al que hay que sumar una cantidad que varía según el número de alumnos del curso y que viene dada por la función $0,02x^3 - 24x$, en la que x representa el número de alumnos matriculados. El Consejo Comarcal ha otorgado al centro una subvención de 5.000 € para la organización del curso y el Ayuntamiento paga al centro 30 € por cada alumno matriculado. El gasto que debe asumir el centro es la diferencia entre el coste total del curso y las dos subvenciones recibidas. ¿Cuántos alumnos deben matricularse al curso para que el gasto sea mínimo para el centro y cuál sería este gasto? [2,5 puntos]

Determinamos la expresión del gasto del curso en función del número de alumnos que participan. Llamamos $C(x)$ al coste del curso y $S(x)$ al total de las subvenciones que se reciben.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = 9000 + 0,02x^3 - 24x \\ S(x) = 5000 + 30x \\ G(x) = C(x) - S(x) \end{array} \right\} \Rightarrow G(x) = 9000 + 0,02x^3 - 24x - (5000 + 30x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000}$$

La función que establece el gasto que debe realizar el centro para impartir el curso en función de los alumnos matriculados tiene la expresión: $G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000$.

Derivamos esta función y buscamos los valores de x que anulan la derivada (puntos críticos).

$$G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000 \Rightarrow G'(x) = 0,06x^2 - 54$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow 0,06x^2 - 54 = 0 \Rightarrow 0,06x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = \frac{54}{0,06} = 900 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{900} = 30}$$

La función presenta un punto crítico en $x = 30$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$G'(x) = 0,06x^2 - 54 \Rightarrow G''(x) = 0,12x \Rightarrow G''(30) = 0,12 \cdot 30 = 3,6 > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada la función presenta un mínimo relativo para $x = 30$.

Hallamos el gasto para este valor: $G(30) = 0,02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4000 = 2920$.

Para que el gasto sea mínimo para el centro deben matricularse 30 alumnos en el curso. Este gasto mínimo es de un importe de 2920 euros.



PAU Julio (serie 1) 2020
 Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Un vendedor de una librería de viejo cobra, además de un sueldo fijo, varias comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela.

Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y consiguió en total una comisión de 30 €.

¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?

[2,5 puntos]

2. El 1 de enero de 2019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. La función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ nos da el número total de unidades vendidas, en la que x denota el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0, 12]$).

a) ¿Cuántas unidades se habían vendido al cabo de 3 meses? ¿Cuántas se vendieron al cabo de un año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12.

[1,25 puntos]

b) Compruebe que la función es creciente en el intervalo $[0, 12]$ y encuentre en qué instante el crecimiento ha sido más lento.

[1,25 puntos]

3. El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8 €. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión de que si el precio del menú es de 18 € entran a comer en el restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de forma que, por cada euro que se aumenta el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que se disminuye el precio, aumenta en 4 el número de clientes.

a) Obtenga la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros en que se aumenta o se disminuye el precio inicial del menú.

[1,25 puntos]

- b)** Encuentre en cuántos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el beneficio máximo. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio?
[1,25 puntos]
- 4.** Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.
- a)** Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b)** ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio?
[1,25 puntos]
- 5.** Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- a)** Compruebe que cumple que $A^{-1} = A^2$.
[1,25 puntos]
- b)** Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
[1,25 puntos]
- 6.** El beneficio de una empresa, expresado en millones de euros, viene dado por la siguiente función, en la que x indica el número de años que han pasado desde que empezó a funcionar:
- $$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9}.$$
- a)** ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa comienza su funcionamiento? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas?
[1,25 puntos]
- b)** ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Un vendedor de una librería de viejo cobra, además de un sueldo fijo, varias comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela.
- Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y consiguió en total una comisión de 30 €.
- ¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo? [2,5 puntos]

Llamamos "x" al número de comics que vende, "y" al número de revistas y "z" al número de novelas.

Cobra 1 € de comisión por cada comic que vende, 1.5 por cada revista y 2 € por cada novela. Siendo el total de la comisión que recibe de 30 € por estas ventas $\rightarrow x + 1,5y + 2z = 30$

Vende el doble de revistas que de novelas $\rightarrow y = 2z$

Vende 5 comics menos que revistas $\rightarrow x = y - 5$

Juntamos estas ecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 2z = 30 \\ x = y - 5 \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1,5 \cdot 2z + 2z = 30 \\ x = 2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z - 5 + 3z + 2z = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z = 35 \Rightarrow \boxed{z = 5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 10 - 5 = 5} \\ \boxed{y = 10} \end{array} \right.$$

Vende 5 comics, 10 revistas y 5 novelas.

2. El 1 de enero de 2019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. La función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x$ nos da el número total de unidades vendidas, en la que x denota el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0, 12]$).
- a) ¿Cuántas unidades se habían vendido al cabo de 3 meses? ¿Cuántas se vendieron al cabo de un año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12. [1,25 puntos]
- b) Compruebe que la función es creciente en el intervalo $[0, 12]$ y encuentre en qué instante el crecimiento ha sido más lento. [1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $f(3)$, sustituimos en la función:

$$f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1470 \cdot 3 = 2790 \text{ unidades.}$$

Al final del año es el mes 12, se venden:

$$f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1470 \cdot 12 = 4680 \text{ unidades.}$$

La tasa de variación media entre el mes 3 y 12 es

$$TVM(3,12) = \frac{4680 - 2790}{12 - 3} = 210$$

b) Utilizamos la derivada y vemos si es creciente en el intervalo $[0, 12]$.

$$f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x \Rightarrow f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30x^2 - 420x + 1470 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de $x = 7$.

- En $(0, 7)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 30 - 420 + 1470 = 1020 > 0$. La función crece en $(-\infty, 7)$.
- En $(7, 12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = 3000 - 4200 + 1470 = 270 > 0$. La función crece en $(7, 12)$.

La función crece en $[0, 12]$.

Nos preguntan dónde alcanza la derivada $f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470$ el valor más pequeño.

Como la derivada hemos visto que siempre es positiva o cero el valor más pequeño que toma es 0. Esto ocurre en $x = 7$.

El crecimiento es más lento en el mes 7 (Julio).

- 3.** El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8 €. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión de que si el precio del menú es de 18 € entran a comer en el restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de forma que, por cada euro que se aumenta el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que se disminuye el precio, aumenta en 4 el número de clientes.
- a)** Obtenga la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros en que se aumenta o se disminuye el precio inicial del menú. [1,25 puntos]
- b)** Encuentre en cuántos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el beneficio máximo. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio? [1,25 puntos]

- a) Llamemos “x” al número de euros que aumenta o disminuye el precio del menú e “y” al número de clientes.

Nos dicen que el número de clientes está en función del cambio del precio del menú de forma lineal.

$$y = mx + n$$

Por cada 1 € que aumenta el precio del menú disminuye en 4 el número de clientes. Si con 18 € ($x = 0$) tienen 120 clientes con un precio de 19 € ($x = 1$) tendrán $120 - 4 = 116$ ($y = 116$).

Hacemos un sistema y determinamos el valor de “m” y “n”.

$$\left. \begin{array}{l} 120 = m \cdot 0 + n \\ 116 = m \cdot 1 + n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 120 = n \\ 116 = m + n \end{array} \right\} \Rightarrow 116 = m + 120 \Rightarrow \boxed{-4 = m}$$

La función que relaciona la variación del precio del menú y el número de clientes es

$$y = -4x + 120.$$

Como la elaboración del menú cuesta 8 € y se vende a un precio “18 + x” por cada menú se gana $18 + x - 8 = 10 + x$.

Como se venden “y” menús el beneficio es $B(x, y) = y(10 + x)$.

Además, sabemos que el precio y el número de clientes está relacionado con la fórmula $y = -4x + 120$ la función beneficio queda:

$$B(x) = (10 + x)(-4x + 120) = -4x^2 - 40x + 120x + 1200 = -4x^2 + 80x + 1200$$

$$\boxed{B(x) = -4x^2 + 80x + 1200}$$

- b) Buscamos un máximo de esta función usando su derivada.

$$B(x) = -4x^2 + 80x + 1200 \Rightarrow B'(x) = -8x + 80$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 80 = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{8} = 10$$

Sustituimos en la derivada segunda y vemos si es un máximo.

$$B'(x) = -8x + 80 \Rightarrow B''(x) = -8 \Rightarrow B''(10) = -8 < 0$$

En $x = 10$ hay un máximo relativo.

Con una subida de precio de 10 € se obtiene un beneficio máximo.

El precio del menú para obtener el máximo beneficio es de $18 + 10 = 28$ € y el beneficio máximo que se puede obtener es de $B(10) = -4 \cdot 10^2 + 80 \cdot 10 + 1200 = 1600$ €

4. Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio? [1,25 puntos]

a) Llamemos “x” al número de sillas que fabrica en un mes e “y” al número de mesas.

Como cada silla le proporciona un beneficio de 20 € y cada mesa 25 € el beneficio total es:

$$B(x, y) = 20x + 25y. \text{ Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.}$$

Las restricciones son:

$$\text{“Cada mes produce como máximo 120 muebles”} \rightarrow x + y \leq 120$$

$$\text{“Como máximo puede fabricar 100 sillas y un mínimo de 10 mesas”} \rightarrow x \leq 100; \quad y \geq 10$$

$$\text{“El número de sillas ha de ser igual o superior al triple de mesas”} \rightarrow x \geq 3y$$

$$\text{“El número de sillas y mesas debe ser positivo o cero”} \rightarrow x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Reunimos todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible primero dibujamos las rectas que la delimitan.

$$x + y = 120$$

$$x = 100$$

$$y = 10$$

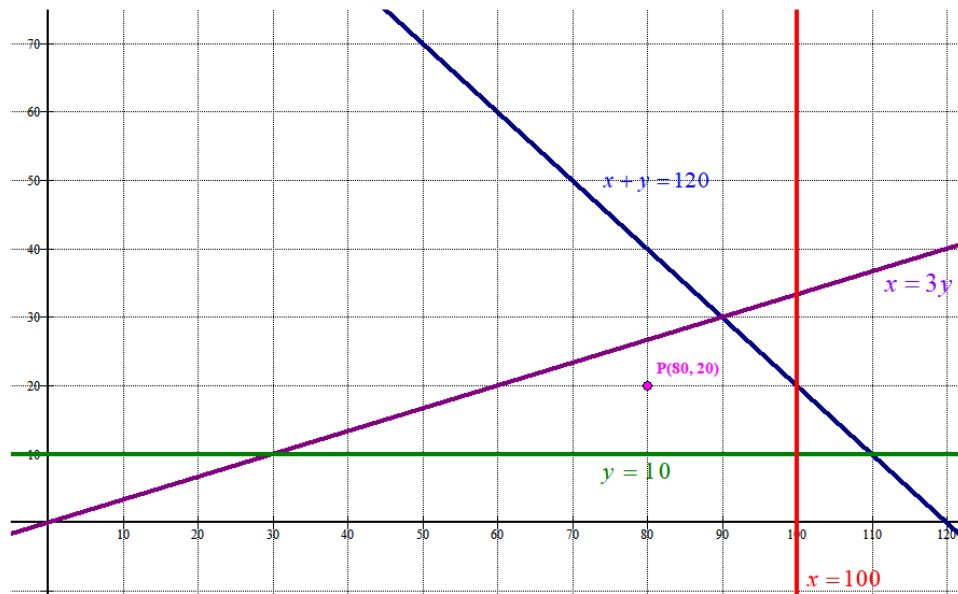
$$x = 3y$$

x	y = 120 - x
0	120
120	0

x = 100	y
100	0
100	120

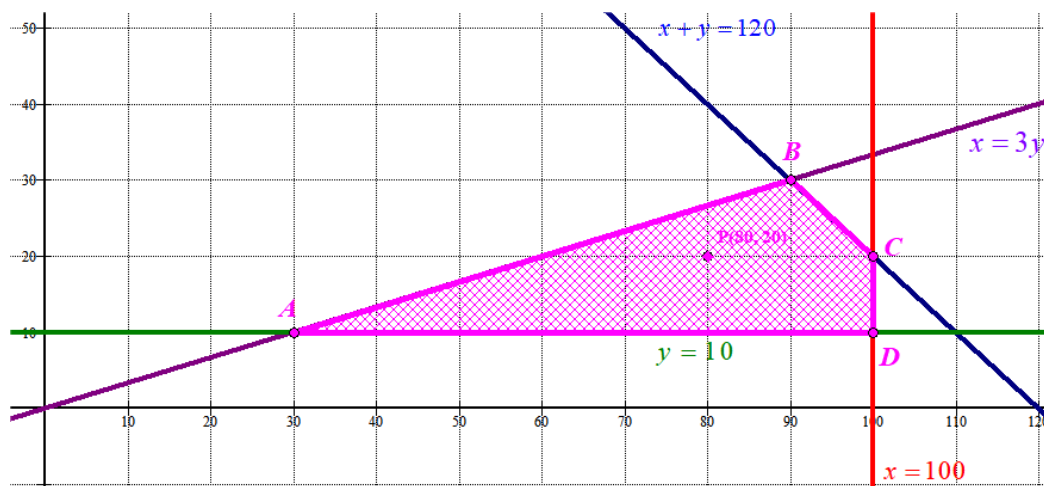
x	y = 10
0	10
120	10

x	y = $\frac{x}{3}$
0	0
120	40



Probamos si el punto $P(80, 20)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 80 + 20 \leq 120 \\ 80 \leq 100 \\ 20 \geq 10 \\ 80 \geq 3 \cdot 20 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada del dibujo.}$$



- b) Para determinar con qué producción se puede obtener máximo beneficio, cumpliendo las restricciones, averiguamos las coordenadas de los vértices de la región factible y valoramos la función beneficio en cada uno de ellos.

$$A(30, 10) \rightarrow B(30, 10) = 600 + 250 = 850$$

$$B(90, 30) \rightarrow B(90, 30) = 1800 + 750 = 2550$$

$$C(100, 20) \rightarrow B(100, 20) = 2000 + 500 = 2500$$

$$D(100, 10) \rightarrow B(100, 10) = 2000 + 250 = 2250$$

El máximo beneficio es de 2550 € y se consigue en el punto $B(90, 30)$ que significa una producción de 90 sillas y 30 mesas.

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a)** Compruebe que es cumple que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]
b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

a) Determinamos la expresión de A^2 y comprobamos que es la inversa de la matriz A .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que A^2 sea la inversa de A debe cumplirse que $A^2 \cdot A = I$ y $A \cdot A^2 = I$.

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+1 \\ 0+0 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = I$$

Queda demostrado que $A^{-1} = A^2$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot X + B = I \Rightarrow A \cdot X = I - B \Rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. El beneficio de una empresa, expresado en millones de euros, viene dado por la siguiente función, en la que x indica el número de años que han pasado desde que empezó a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

- a) ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa comienza su funcionamiento? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas? [1,25 puntos]
 b) ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $B(0)$, sustituimos y calculamos.

$$B(0) = \frac{0+20}{0^2+9} - \frac{20}{9} = 0. \text{ En los comienzos de la empresa el beneficio es 0.}$$

Nos preguntan por el momento en que el beneficio $B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}$ pasa de tomar valores positivos ($B(x) > 0$) a tener valores negativos ($B(x) < 0$).
 Para ello averiguamos primero cuando se anula la función.

$$B(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \Rightarrow \frac{5x+20}{x^2+9} = \frac{20}{9} \Rightarrow 45x+180 = 20x^2+180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x^2 - 45x = 0 \Rightarrow 5x(4x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x-9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25 \end{cases}$$

Como es una función continua basta ver como son los beneficios antes y después de 2,25 años.

- En $(0, 2.25)$ tomamos $x = 2$ y obtenemos $B(2) = \frac{5 \cdot 2 + 20}{2^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{10}{117} > 0$. Los beneficios son positivos antes de 2.25 años.
- En $(2.25, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y obtenemos $B(3) = \frac{15+20}{3^2+9} - \frac{20}{9} = -\frac{5}{28} < 0$. Los beneficios son negativos a partir de 2,25 años.

A los 2.25 años cambian de signo los beneficios. A los 2 años y 3 meses.

b) Utilizamos la derivada de la función para obtener los puntos críticos.

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} \Rightarrow B'(x) = \frac{5(x^2+9) - 2x(5x+20)}{(x^2+9)^2} = \frac{5x^2+45-10x^2-40x}{(x^2+9)^2}$$

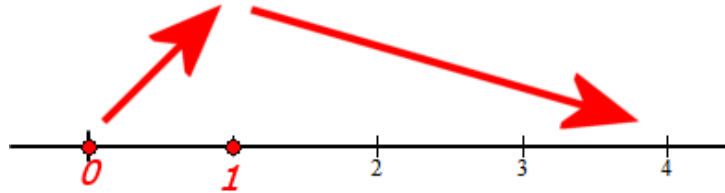
$$\left. \begin{aligned} B'(x) &= \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} \\ B'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow -5x^2-40x+45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 36}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-8+10}{2} = 1 = x \\ \frac{-8-10}{2} = -9 = x \end{cases}$$

No consideramos el valor $x = -9$ por ser negativo y vemos que ocurre antes y después del año 1.

- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $B'(x) = \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2 + 9)^2}$. La función crece en $(0,1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $B'(2) = \frac{-20 - 80 + 45}{(2^2 + 9)^2} = \frac{-55}{169} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La empresa tiene un máximo beneficio en el año 1.

Este beneficio máximo tiene un valor de $B(1) = \frac{5+20}{1^2+9} - \frac{20}{9} = \frac{5}{18} = 0.277777$ millones. Un beneficio de 277 777 €.

PAU septiembre (serie 5) 2019

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat**2019****Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales****Serie 5**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

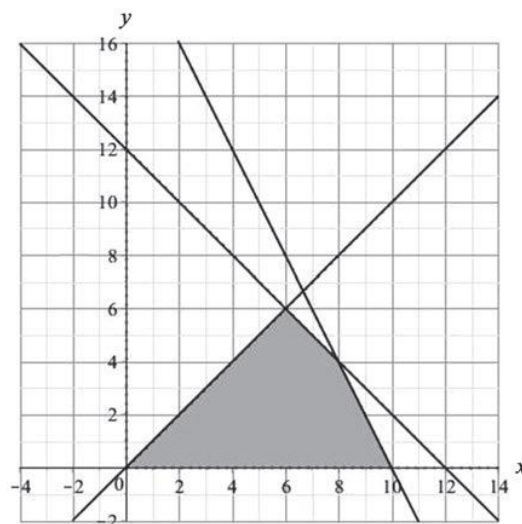
1. Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X = (d \ m \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X \cdot A + B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

- a) Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, ¿cuál es el vector codificado que se enviará? [0,75 puntos]
- b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036 \ 1 \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar? [1,25 puntos]
2. Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 € por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 € y el número de patinetes vendidos es lineal, y, por cada 50 € de rebaja en el precio de venta de cada patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.
- a) Escriba la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaje en 50 € el precio inicial de 1.000 € del patinete. [1 punto]
- b) Encuentre cuál debe ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con este precio. [1 punto]
3. Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, vendrá dado por la función
- $$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el tiempo en años desde el momento actual } (t = 0).$$
- a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo. [1 punto]
- b) ¿En qué momento se llegará al número mínimo de habitantes? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona? [1 punto]

4. En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos. [2 puntos]
5. Considere una función $f(x)$ cuya primera derivada es $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.
- Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo. [1 punto]
 - Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto. [1 punto]
6. Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.
- Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y , el número de panecillos de cereales.

- Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible. [1 punto]
- Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 €, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos? [1 punto]

SOLUCIONES

1. Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X = (d \ m \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X \cdot A + B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (5 \ -5 \ 5).$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

- a)** Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, ¿cuál es el vector codificado que se enviará? [0,75 puntos]
b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036 \ 1 \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar? [1,25 puntos]

- a) Realizamos el cálculo correspondiente con $X = (1 \ 1 \ 2019)$.

$$\begin{aligned} X \cdot A + B &= (1 \ 1 \ 2019) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \ -5 \ 5) = \\ &= (1+0+2019 \ 0+1+0 \ -1-1) + (5 \ -5 \ 5) = (2025 \ -4 \ 3) \end{aligned}$$

El vector codificado que se enviaría es $(2025 \ -4 \ 3)$.

- b) Si el vector codificado es $(2036 \ 1 \ -13)$ resolvemos la ecuación matricial correspondiente.

$$X \cdot A + B = (2036 \ 1 \ -13) \Rightarrow (d \ m \ a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \ -5 \ 5) = (2036 \ 1 \ -13) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d \ m \ a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2036 \ 1 \ -13) - (5 \ -5 \ 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d+a \ m \ -d-m) = (2031 \ 6 \ -18) \Rightarrow \begin{cases} d+a = 2031 \\ m = 6 \\ -d-m = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d+a = 2031 \\ -d-6 = -18 \rightarrow 12 = d \end{cases} \Rightarrow 12+a = 2031 \Rightarrow a = 2019$$

La fecha sin codificar es día 12 del mes 6 (junio) del año 2019.

- 2.** Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 € por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 € y el número de patinetes vendidos es lineal, y, por cada 50 € de rebaja en el precio de venta de cada patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.
- a)** Escriba la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaje en 50 € el precio inicial de 1.000 € del patinete. [1 punto]
- b)** Encuentre cuál debe ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con este precio. [1 punto]

- a) Llamamos “ x ” al número de veces que se rebaja 50 € el precio del patinete (1000 €). Si rebajamos “ x ” veces 50 € el precio de venta de cada patinete el nuevo precio será de $1000 - 50x$, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más ($40 + 10x$ patinetes vendidos) entonces la función de ingresos de la empresa será el número de patinetes multiplicado por el precio de cada patinete.

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1000 - 50x)$$

Realizamos el producto y obtenemos la expresión polinómica de la función ingresos.

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1000 - 50x) = 40000 - 2000x + 10000x - 500x^2 = -500x^2 + 8000x + 40000$$

La función ingresos es $I(x) = -500x^2 + 8000x + 40000$, siendo x el número de veces que se rebaja 50 € el precio del patinete.

- b) Derivamos la función ingresos y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$I(x) = -500x^2 + 8000x + 40000 \Rightarrow I'(x) = -1000x + 8000$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -1000x + 8000 = 0 \Rightarrow 1000x = 8000 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Sustituimos el valor obtenido $x = 8$ en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo de la función.

$$I'(x) = -1000x + 8000 \Rightarrow I''(x) = -1000 \Rightarrow I''(8) = -1000 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función ingresos tiene un máximo relativo para $x = 8$.

Los ingresos son máximos con 8 rebajas de 50 € en el precio del patinete, es decir, si rebajamos su precio $50 \cdot 8 = 400$ €. El precio del patinete que nos proporciona unos ingresos máximos es de $1000 - 400 = 600$ €.

Los ingresos máximos tendrán un valor de $I(8) = -500 \cdot 8^2 + 8000 \cdot 8 + 40000 = 72000$ €.

3. Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, vendrá dado por la función

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el tiempo en años desde el momento actual } (t=0).$$

- a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo. [1 punto]
 b) ¿En qué momento se llegará al número mínimo de habitantes? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona? [1 punto]

a) El número de habitantes de la zona actualmente es el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{0^2 + 28}{(0+2)^2} = 7$$

Actualmente hay 7 millones de habitantes.

A muy largo plazo se supone que los años crecen hasta $+\infty$. Calculo el límite de la función cuando pasan un número de años grande.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 28}{t^2 + 4t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2} + \frac{28}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{4t}{t^2} + \frac{4}{t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{28}{t^2}}{1 + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2}} = \frac{1 + \frac{28}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 + 0 + 0} = 1 \end{aligned}$$

El número de habitantes a largo plazo tiende a ser de 1 millón de habitantes.

b) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función $P(t)$.

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{2t(t+2)^2 - 2(t+2)(t^2 + 28)}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2) - 2(t^2 + 28)}{(t+2)^3}$$

$$P'(t) = \frac{2t^2 + 4t - 2t^2 - 56}{(t+2)^3} = \frac{4t - 56}{(t+2)^3}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{4t - 56}{(t+2)^3} = 0 \Rightarrow 4t - 56 = 0 \Rightarrow t = \frac{56}{4} = 14$$

La función presenta un punto crítico en $t=14$. Estudiamos la evolución de la función antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0,14)$ tomamos $t=1$ y su derivada vale $P'(1) = \frac{4-56}{(1+2)^3} = \frac{-52}{27} < 0$. La función decrece en $(0,14)$.

- En el intervalo $(14, +\infty)$ tomamos $t=15$ y su derivada vale $P'(15) = \frac{4 \cdot 15 - 56}{(15+2)^3} = \frac{4}{4913} > 0$
. La función crece en $(14, +\infty)$.

Como la función decrece antes de $t=14$ y crece después de dicho valor tenemos un mínimo de la función al cabo de 14 años.

La población al cabo de 14 años será de $P(14) = \frac{14^2 + 28}{(14+2)^2} = 0.875$ millones, es decir, 875 000

habitantes.

La población alcanza un mínimo número de habitantes (875 000) pasados 14 años.

4. En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos. [2 puntos]

Llamamos “x” al número de acertantes del primer sorteo, “y” al número de acertantes del segundo y “z” al número de acertantes del tercero.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a cada información proporcionada en el enunciado del problema.

En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos $\rightarrow x + y + z = 51$.

El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos $\rightarrow z = \frac{x+y}{2}$.

El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos $\rightarrow x = y + z + 11$.

Juntamos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 51 \\ z = \frac{x+y}{2} \\ x = y + z + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 51 \\ 2z = x + y \\ x = y + z + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + 11 + y + z = 51 \\ 2z = y + z + 11 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 40 \\ z = 2y + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 20 \\ z = 2y + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 2y + 11 = 20 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow \boxed{y = \frac{9}{3} = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 3 + 11 = 17} \Rightarrow \boxed{x = 3 + 17 + 11 = 31}$$

Acertaron 31 personas en el primer sorteo, 3 en el segundo y 17 en el tercero.

5. Considere una función $f(x)$ cuya primera derivada es $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

- a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo. [1 punto]
 b) Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto. [1 punto]

- a) Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces la derivada se anula para dicho valor $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ f'(x) = 2x^2 + bx + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2(-1)^2 + b(-1) + 4 \Rightarrow -b + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Para este valor la función derivada queda $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$. Sustituimos el valor $x = -1$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \Rightarrow f''(x) = 4x + 6 \Rightarrow f''(-1) = 4(-1) + 6 = 2 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

- b) Si la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$ entonces se cumple que $f(0) = 3$.

Además, podemos obtener el valor de la derivada en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 4 = 4$.

Con estos datos podemos obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(0, 3)$.

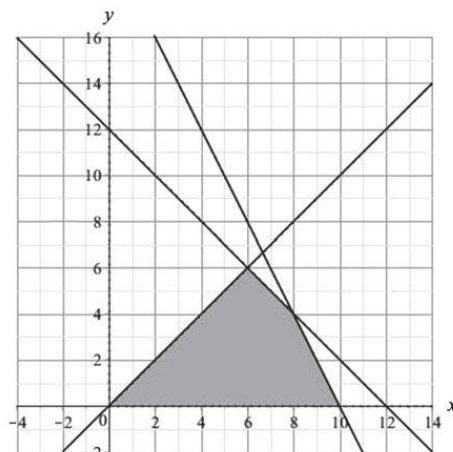
$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = 4x \Rightarrow \boxed{y = 4x + 3}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 3)$ tiene ecuación $y = 4x + 3$.

6. Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.

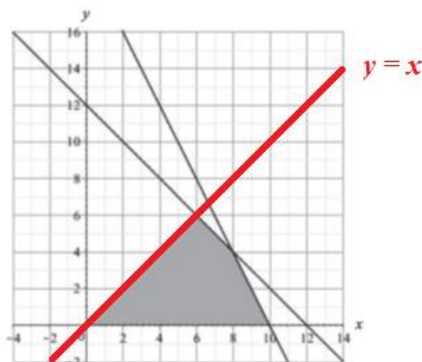
Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y , el número de panecillos de cereales.

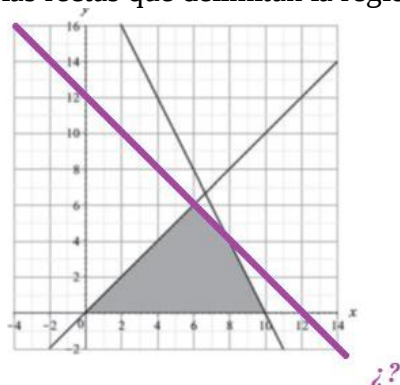
- a) Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible. [1 punto]
 b) Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 €, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos? [1 punto]

- a) En la gráfica podemos identificar la recta de ecuación $y = x$ que marco de rojo en el siguiente dibujo.



Como nos dicen que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar (debe ser menor) la de panecillos integrales podemos establecer que una de las restricciones será $y \leq x$.

Hallamos la ecuación de otra de las rectas que delimitan la región factible.

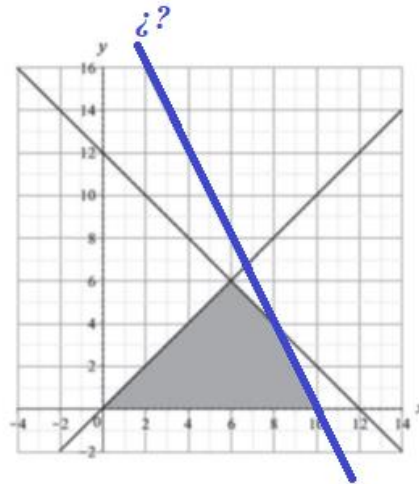


Esta recta pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0).

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ (0, 12) \\ (12, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 12m + n \\ 12 = m \cdot 0 + n \rightarrow \boxed{n = 12} \end{cases} \Rightarrow 0 = 12m + 12 \Rightarrow 12m = -12 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

La recta tiene ecuación $y = -x + 12$. Como la región factible está situada por debajo de la recta la restricción es $y \leq -x + 12 \rightarrow x + y \leq 12$.

Repetimos el proceso para la tercera recta.



Esta recta pasa por los puntos (10, 0) y (8, 4).

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ (10, 0) \\ (8, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m \cdot 10 + n \\ 4 = m \cdot 8 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10m = n \\ 4 = 8m + n \end{cases} \Rightarrow 4 = 8m - 10m \Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -2} \Rightarrow \boxed{n = -10(-2) = 20}$$

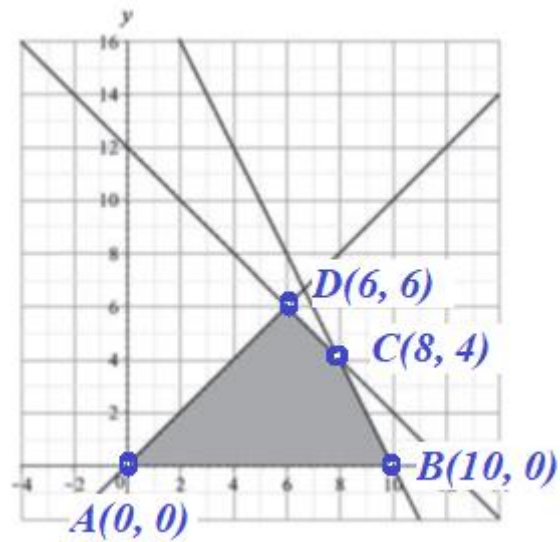
La recta tiene ecuación $y = -2x + 20$. Como la región factible está situada por debajo de la recta la restricción es $y \leq -2x + 20 \rightarrow 2x + y \leq 20$.

La región factible está situada en el primer cuadrante $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 € la función ingresos es $I(x, y) = 8x + 10y$. Valoramos esta función en los vértices de la región factible.



$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(10, 0) \rightarrow I(10, 0) = 8 \cdot 10 + 10 \cdot 0 = 80$$

$$C(8, 4) \rightarrow I(8, 4) = 8 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 104$$

$$D(6, 6) \rightarrow I(6, 6) = 8 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 108 \text{ ¡Máximo!}$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 108 euros con la venta de 6 panecillos de cada tipo.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

PAU junio (serie 4) 2019

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 + ax$. Calcule el valor de la constante a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. Diga si se trata de un máximo o de un mínimo y dé también el valor que toma la función $f(x)$ en este punto.
[2 puntos]

2. La empresa de deporte de aventura Xtrem prepara para la última semana de junio dos paquetes: el paquete básico (PB) y el paquete súper (PS). El PB incluye una bajada de *rafting*, una bajada haciendo barranquismo y un salto en caída libre haciendo *puenting*, y tiene un precio de 50 €. Por otro lado, el PS incluye tres bajadas de *rafting*, dos de barranquismo y un *puenting*, y el precio es de 120 €.

Por limitaciones climáticas y de personal, solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings*.

Para hacer la promoción turística, se quiere saber qué combinación de paquetes proporciona más ingresos.

- a) Encuentre las inecuaciones que han de cumplir todas las posibles combinaciones de paquetes. Dibuje la región del plano donde se encuentran estas posibles soluciones y encuentre la función que da los ingresos en función del número de paquetes de cada tipo.
[1,25 puntos]

- b) Encuentre el número de paquetes de cada tipo que tiene que ofrecer la empresa para obtener los ingresos máximos y diga cuáles serían estos ingresos.
[0,75 puntos]

3. Un nutricionista, después de hacer un estudio personalizado a un paciente, le propone una dieta. Según el modelo del nutricionista, el peso en kilogramos del paciente seguirá la función

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

donde x denota el número de meses que lleva siguiendo la dieta.

- a) Justifique que la función f es estrictamente decreciente cuando $x \geq 0$.
[0,75 puntos]

- b) Determine el peso inicial del paciente y cuánto pesará al cabo de dos meses siguiendo la dieta según el modelo. ¿Hacia qué valor tenderá su peso a largo plazo? Argumente si este valor límite se alcanzará en algún momento.
[1,25 puntos]

4. Por la Fiesta Mayor, la pastelería del pueblo elabora unas cajas de bombones especiales. La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Cada caja va decorada con un lazo conmemorativo. En total han utilizado 210 lazos y 2.650 bombones. Teniendo en cuenta que han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas, ¿cuántas cajas de cada tipo han elaborado?
[2 puntos]

5. Un comerciante puede comprar artículos a 350 € la unidad. Si los vende a 750 € la unidad, vende 30. Se sabe que la relación entre estas dos variables (el precio de venta y el número de unidades vendidas) es lineal y que, por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades. Considerando que el comerciante solo comprará el número de artículos que sabe que venderá:

a) Escriba la función de beneficios a partir del número de veces x que se aplica el descuento.
[1 punto]

b) Determine el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante y justifique que es un máximo. Determine cuántas unidades venderá.
[1 punto]

6. En una oficina tienen tres proveedores que les suministran el material. La matriz P nos da los precios unitarios, en euros, de cada uno de los artículos $A1$, $A2$ y $A3$, según los proveedores $p1$, $p2$ y $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representamos un pedido de x unidades de $A1$, y unidades de $A2$ y z unidades de $A3$ por un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

a) Explique qué representan cada uno de los elementos del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
[0,5 puntos]

[0,5 puntos]

b) Si tenemos que comprar 25 unidades de $A1$, 10 de $A2$ y 15 de $A3$, ¿cuál de los tres proveedores nos ofrece un mejor precio para todo el pedido? ¿Cuál es este precio?

[1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 + ax$. Calcule el valor de la constante a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. Diga si se trata de un máximo o de un mínimo y dé también el valor que toma la función $f(x)$ en este punto. [2 puntos]

Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ implica que la derivada de la función se anula para este valor $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ f(x) = 2x^3 + ax \rightarrow f'(x) = 6x^2 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6(-1)^2 + a \Rightarrow 0 = 6 + a \Rightarrow \boxed{a = -6}$$

El valor buscado es $a = -6$.

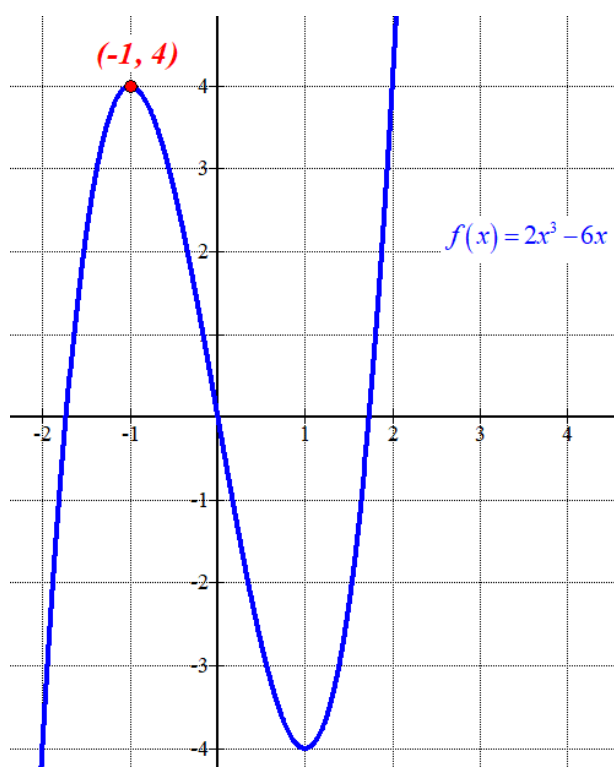
Para este valor la función queda $f(x) = 2x^3 - 6x$.

Sustituimos $x = -1$ en la segunda derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow f''(x) = 12x \Rightarrow f''(-1) = 12(-1) = -12 < 0$$

Como la derivada segunda es negativa la función presenta un máximo relativo en $x = -1$.

El valor que toma la función $f(x)$ en este punto es $f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4$.



2. La empresa de deporte de aventura Xtrem prepara para la última semana de junio dos paquetes: el paquete básico (PB) y el paquete súper (PS). El PB incluye una bajada de *rafting*, una bajada haciendo barranquismo y un salto en caída libre haciendo *puenting*, y tiene un precio de 50 €. Por otro lado, el PS incluye tres bajadas de *rafting*, dos de barranquismo y un *puenting*, y el precio es de 120 €.

Por limitaciones climáticas y de personal, solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings*.

Para hacer la promoción turística, se quiere saber qué combinación de paquetes proporciona más ingresos.

a) Encuentre las inecuaciones que han de cumplir todas las posibles combinaciones de paquetes. Dibuje la región del plano donde se encuentran estas posibles soluciones y encuentre la función que da los ingresos en función del número de paquetes de cada tipo. [1,25 puntos]

b) Encuentre el número de paquetes de cada tipo que tiene que ofrecer la empresa para obtener los ingresos máximos y diga cuáles serían estos ingresos. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de paquetes PB e “y” al número de paquetes PS.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Raftings	Barranquismo	Puentings	Ingresos
Nº PB (x)	x	x	x	50x
Nº PS (y)	3y	2y	y	120y
TOTALES	$x + 3y$	$x + 2y$	$x + y$	$50x + 120y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 50x + 120y$.

Las restricciones son:

Solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings* $\rightarrow x + 3y \leq 12$, $x + 2y \leq 9$; $x + y \leq 8$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y \leq 12 - x \\ 2y \leq 9 - x \\ y \leq 8 - x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 3y = 12$$

x	$y = \frac{12-x}{3}$
0	4
3	3
12	0

$$x + 2y = 9$$

x	$y = \frac{9-x}{2}$
0	4.5
3	3
7	1
9	0

$$x + y = 8$$

x	$y = 8 - x$
0	8
7	1
8	0

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Primer
cuadrante



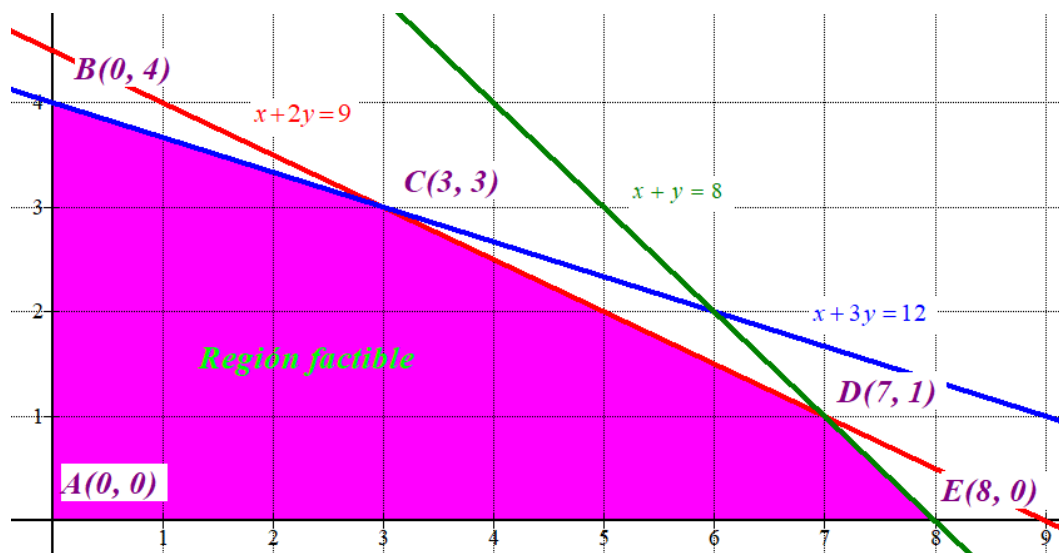
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 3y \leq 12 - x \\ 2y \leq 9 - x \\ y \leq 8 - x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las tres rectas dibujadas.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leq 12 - 1 \\ 2 \leq 9 - 1 \\ 1 \leq 8 - 1 \\ 1 \geq 0, 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 50x + 120y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow I(0, 4) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480$$

$$C(3, 3) \rightarrow I(3, 3) = 50 \cdot 3 + 120 \cdot 3 = 510 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(7, 1) \rightarrow I(7, 1) = 50 \cdot 7 + 120 \cdot 1 = 470$$

$$E(8, 0) \rightarrow I(8, 0) = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 400$$

Los máximos ingresos se consiguen con 3 paquetes de PB y otros 3 de PS, siendo estos ingresos máximos de 510 euros.

3. Un nutricionista, después de hacer un estudio personalizado a un paciente, le propone una dieta. Según el modelo del nutricionista, el peso en kilogramos del paciente seguirá la función

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

donde x denota el número de meses que lleva siguiendo la dieta.

- a) Justifique que la función f es estrictamente decreciente cuando $x \geq 0$. [0,75 puntos]
 b) Determine el peso inicial del paciente y cuánto pesará al cabo de dos meses siguiendo la dieta según el modelo. ¿Hacia qué valor tenderá su peso a largo plazo? Argumente si este valor límite se alcanzará en algún momento. [1,25 puntos]

- a) Obtenemos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6} \Rightarrow f'(x) = \frac{63(x + 6) - (63x + 510)}{(x + 6)^2} = \frac{\cancel{63x} + 378 - \cancel{63x} - 510}{(x + 6)^2} = \frac{-132}{(x + 6)^2}$$

El denominador de la derivada es $(x + 6)^2 \geq 0$ y el numerador es $-132 < 0$, por lo que la derivada siempre es negativa y la función es decreciente cuando $x \geq 0$.

- b) Nos piden determinar el valor de $f(0) = \frac{63 \cdot 0 + 510}{0 + 6} = 85$. El peso inicial del paciente es de 85 kilos.

Al cabo de dos meses su peso será $f(2) = \frac{63 \cdot 2 + 510}{2 + 6} = 79.5$ kilos.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63x + 510}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{63x}{x} + \frac{510}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63 + \frac{510}{x}}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{63 + 0}{1 + 0} = 63 \text{ podemos}$$

afirmar que a largo plazo el peso va descendiendo y tendiendo a ser de 63 kilos.

Este valor límite del peso nunca se alcanzará, se estará muy cerca de él con el paso de los meses, peso según el modelo siempre tendrá el paciente un peso un poco superior. Por ejemplo, al cabo

de un año (12 meses) el peso será de $f(12) = \frac{63 \cdot 12 + 510}{12 + 6} = 70.333$ kilos.

Al cabo de 3 años (36 meses) el peso del paciente será $f(36) = \frac{63 \cdot 36 + 510}{36 + 6} = 66.14$ kilos.

Al cabo de 10 años (120 meses) el peso será $f(120) = \frac{63 \cdot 120 + 510}{120 + 6} = 64.05$ kilos.

4. Por la Fiesta Mayor, la pastelería del pueblo elabora unas cajas de bombones especiales. La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Cada caja va decorada con un lazo conmemorativo. En total han utilizado 210 lazos y 2.650 bombones. Teniendo en cuenta que han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas, ¿cuántas cajas de cada tipo han elaborado? [2 puntos]

Llamamos x, y, z al número de cajas de bombones pequeñas, medianas y grandes, respectivamente.

- Si se han utilizado 210 lazos es que se han elaborado 210 cajas de bombones $\rightarrow x + y + z = 210$.
- La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Si se han utilizado 2650 bombones $\rightarrow 10x + 15y + 25z = 2650$.
- Se han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas $\rightarrow x = 2(y + z)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2650 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + y + z = 210 \\ 2(2y + 2z) + 3y + 5z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 210 \\ 4y + 4z + 3y + 5z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 70 \\ 7y + 9z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 70 - z \\ 7y + 9z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7(70 - z) + 9z = 530 \Rightarrow 490 - 7z + 9z = 530 \Rightarrow 2z = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 20} \Rightarrow \boxed{y = 70 - 20 = 50} \Rightarrow \boxed{x = 2(50 + 20) = 140}$$

Se han elaborado 140 cajas de bombones pequeñas, 50 medianas y 20 grandes.

5. Un comerciante puede comprar artículos a 350 € la unidad. Si los vende a 750 € la unidad, vende 30. Se sabe que la relación entre estas dos variables (el precio de venta y el número de unidades vendidas) es lineal y que, por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades. Considerando que el comerciante solo comprará el número de artículos que sabe que venderá:

a) Escriba la función de beneficios a partir del número de veces x que se aplica el descuento.

[1 punto]

b) Determine el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante y justifique que es un máximo. Determine cuántas unidades venderá.

[1 punto]

a) Si por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades entonces por x descuentos de 20 € incrementa $3x$ unidades vendidas, es decir con un precio de $750 - 20x$ se venden $30 + 3x$ unidades.

El beneficio por unidad de artículo vendido sin descuento es de $750 - 350 = 400$ €.

El beneficio por unidad de artículo vendido con x descuentos de 20 € es $400 - 20x$.

El beneficio total es el producto del beneficio por unidad por las unidades vendidas.

$$B(x) = (400 - 20x)(30 + 3x) = 12000 + 1200x - 600x - 60x^2 = -60x^2 + 600x + 12000$$

b) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -60x^2 + 600x + 12000 \Rightarrow B'(x) = -120x + 600$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -120x + 600 = 0 \Rightarrow 120x = 600 \Rightarrow x = \frac{600}{120} = 5$$

La función beneficios tiene un punto crítico en $x = 5$. Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -120x + 600 \Rightarrow B''(x) = -120 \Rightarrow B''(5) = -120 < 0$$

La segunda derivada es negativa, por lo que el beneficio tiene un máximo valor para 5 descuentos de 20 €. Se venderán $30 + 3 \cdot 5 = 45$ unidades a un precio por artículo de $750 - 100 = 650$ €.

Se obtienen unos beneficios máximos de $B(5) = -60 \cdot 5^2 + 600 \cdot 5 + 12000 = 13500$ euros.

6. En una oficina tienen tres proveedores que les suministran el material. La matriz P nos da los precios unitarios, en euros, de cada uno de los artículos A1, A2 y A3, según los proveedores p_1 , p_2 y p_3 .

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representamos un pedido de x unidades de A1, y unidades de A2 y z unidades de A3 por un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Explique qué representan cada uno de los elementos del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. [0,5 puntos]
 b) Si tenemos que comprar 25 unidades de A1, 10 de A2 y 15 de A3, ¿cuál de los tres proveedores nos ofrece un mejor precio para todo el pedido? ¿Cuál es este precio? [1,5 puntos]

- a) Calculamos la expresión de la matriz que resulta del producto $C \cdot P$.

$$C \cdot P = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (5x+11y+13z \ 4x+12y+13z \ 4x+13y+12z)$$

$$1 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 1 \times 3$$

La matriz obtenida nos indica el coste del pedido realizándolo a cada uno de los tres proveedores p_1 , p_2 y p_3 .

- b) Si $x = 25$, $y = 10$, $z = 15$ el coste del pedido será:

$$C \cdot P = (5 \cdot 25 + 11 \cdot 10 + 13 \cdot 15 \ 4 \cdot 25 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 15 \ 4 \cdot 25 + 13 \cdot 10 + 12 \cdot 15)$$

$$C \cdot P = (430 \ 415 \ 410)$$

El mejor precio nos lo da el proveedor p_3 , siendo un precio de 410 €.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

PAU Junio (serie 1) 2019

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto.

[2 puntos]

2. Resuelva las siguientes cuestiones:

- a) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad

$$M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y es la matriz nula } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1 punto]

- b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz

A, es decir, que cumplen que $A \cdot B = B \cdot A$.

[1 punto]

3. La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

- a) Calcule el valor de a .

[1 punto]

- b) Calcule el valor de b .

[1 punto]

4. La función $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x , donde x es el día del mes de febrero.
- a) ¿Cuántas unidades de perfume se vendieron, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?
[0,75 puntos]
- b) ¿Qué día del mes de febrero se vendieron más perfumes y cuántas unidades se vendieron?
[1,25 puntos]
5. En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.
[0,75 puntos]
6. Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Se sabe que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dados por la función:
- $$I(t) = -5(m-t)^2 + n$$
- para $10 \leq t \leq 21$.
- a) Encuentre el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.
[1,25 puntos]
- b) Encuentre el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 €.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto. [2 puntos]

Llamamos x , y , z al número de personas que han escogido el café A, B o C respectivamente.

- 500 participantes han probado tres cafés diferentes $\rightarrow x + y + z = 500$.
- El producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A $\rightarrow y = 2x$.
- El producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos $\rightarrow y = x + z + 32$.

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2x + z = 500 \\ 2x = x + z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + z = 500 \\ x = z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(z + 32) + z = 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z + 96 + z = 500 \Rightarrow 4z = 404 \Rightarrow \boxed{z = \frac{404}{4} = 101} \Rightarrow \boxed{x = 101 + 32 = 133} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 133 = 266}$$

El producto A ha sido escogido por 133 personas, el B por 266 y el C por las restantes 101 personas.

2. Resuelva las siguientes cuestiones:

a) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad

$$M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y es la matriz nula } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1 punto]

b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz A , es decir, que cumplen que $A \cdot B = B \cdot A$.

[1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+10 & 10-5 \\ 4-2 & 10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \\ M^2 + a \cdot M + b \cdot I &= 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 14+2a+b & 5+5a \\ 2+2a & 11-a+b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ 5+5a=0 \\ 2+2a=0 \\ 11-a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ 1+a=0 \\ 1+a=0 \\ 11-a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ a=-1 \\ 11-a+b=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 14-2+b=0 \\ 11+1+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+b=0 \\ 12+b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=-12} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = -12$.

b) Para que sea posible el producto por la matriz A por ambos lados la matriz B debe ser cuadrada de orden 2 $\rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obtenemos los valores de a , b , c y d para los que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} c=b \\ d=a-b \\ a-c=d \\ b-d=c-d \rightarrow b=c \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d=a-c \\ a-c=d \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a-c \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Las matrices B que conmutan con la matriz A tienen la expresión $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a-c \end{pmatrix}$, siendo a y c números reales cualesquiera.

3. La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

a) Calcule el valor de a .

[1 punto]

b) Calcule el valor de b .

[1 punto]

a) Si la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas significa que la recta tangente tiene pendiente 0 y por tanto la derivada en $x = -2$ es nula $\rightarrow f'(-2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax + b + \frac{8}{x} \Rightarrow f'(x) = a - \frac{8}{x^2} \\ f'(-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a - \frac{8}{(-2)^2} \Rightarrow 0 = a - 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor de a es 2.

b) Sabemos que $a = 2$, por lo que la función es $f(x) = 2x + b + \frac{8}{x}$.

Si la gráfica de la función $f(x) = 2x + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ significa que $f(-2) = -6$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = -6 \\ f(x) = 2x + b + \frac{8}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow -6 = 2(-2) + b + \frac{8}{-2} \Rightarrow -6 = -4 + b - 4 \Rightarrow \boxed{2 = b}$$

El valor de b es 2.

4. La función $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x , donde x es el día del mes de febrero.
- a) ¿Cuántas unidades de perfume se vendieron, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?
[0,75 puntos]
- b) ¿Qué día del mes de febrero se vendieron más perfumes y cuántas unidades se vendieron?
[1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $f(5)$.

$$f(5) = \frac{40}{5^2 - 22 \cdot 5 + 125} = 1$$

El día 5 de febrero se venden 1000 unidades de perfume.

También se nos pide el incremento $f(9) - f(7)$.

$$f(9) - f(7) = \frac{40}{9^2 - 22 \cdot 9 + 125} - \frac{40}{7^2 - 22 \cdot 7 + 125} = 3$$

El incremento es de 3000 unidades del día 7 al 9 de febrero.

b) Utilizamos la derivada para encontrar el punto crítico de la función.

$$f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 22x + 125) - 40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2} = \frac{-40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2} = 0 \Rightarrow -40(2x - 22) = 0 \Rightarrow 2x - 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 11 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 11$.

- Antes de $x = 11$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-40(2 \cdot 10 - 22)}{(10^2 - 22 \cdot 10 + 125)^2} = \frac{80}{25} > 0. \text{ La función crece entre 1 y 11.}$$

- Después de $x = 11$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$f'(20) = \frac{-40(2 \cdot 20 - 22)}{(20^2 - 22 \cdot 20 + 125)^2} = \frac{-720}{7225} < 0. \text{ La función decrece del 11 al final de febrero.}$$

Como la función crece antes y decrece después de $x = 11$ tenemos en dicho valor un máximo de la función.

El número de unidades vendidas el 11 de febrero fueron $f(11) = \frac{40}{11^2 - 22 \cdot 11 + 125} = 10$ mil unidades.

El día de febrero que más unidades se vendieron fue el día 11, siendo esta cantidad máxima de 10 000 unidades.

5. En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de bicicletas de montaña e “y” al número de bicicletas de paseo que se fabrican.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Kg de acero	Kg de aluminio	Ingresos
Nº bicicletas de montaña (x)	x	3x	200x
Nº bicicletas de paseo (y)	2y	2y	150y
TOTALES	$x + 2y$	$3x + 2y$	$200x + 150y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 200x + 150y$.

Las restricciones son:

En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo $\rightarrow x + 2y \leq 80$, $3x + 2y \leq 120$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 80$$

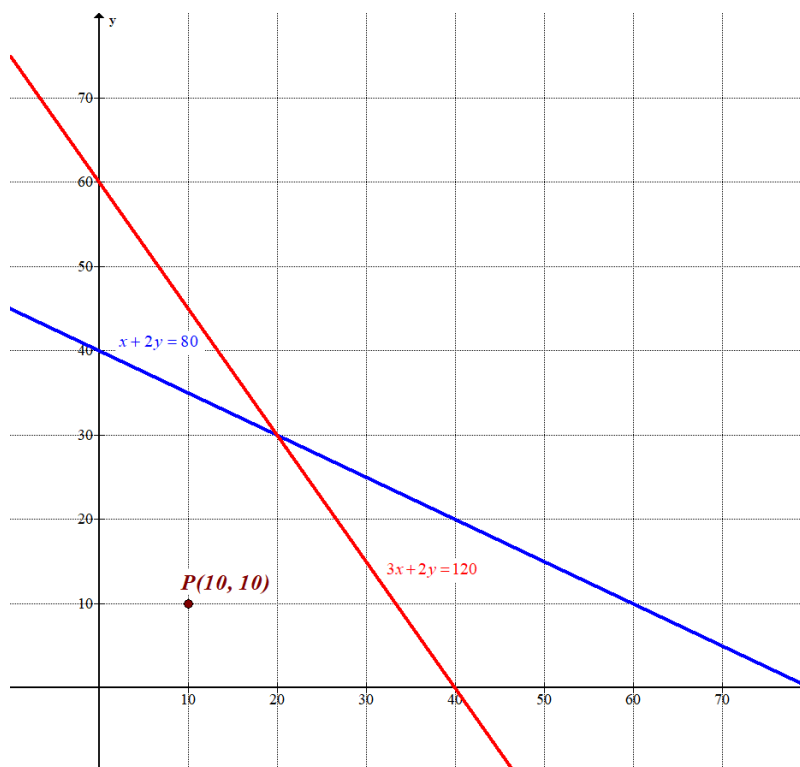
x	$y = \frac{80 - x}{2}$
0	40
20	30
80	0

$$3x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$
0	60
20	30
40	0

$$x \geq 0, y \geq 0$$

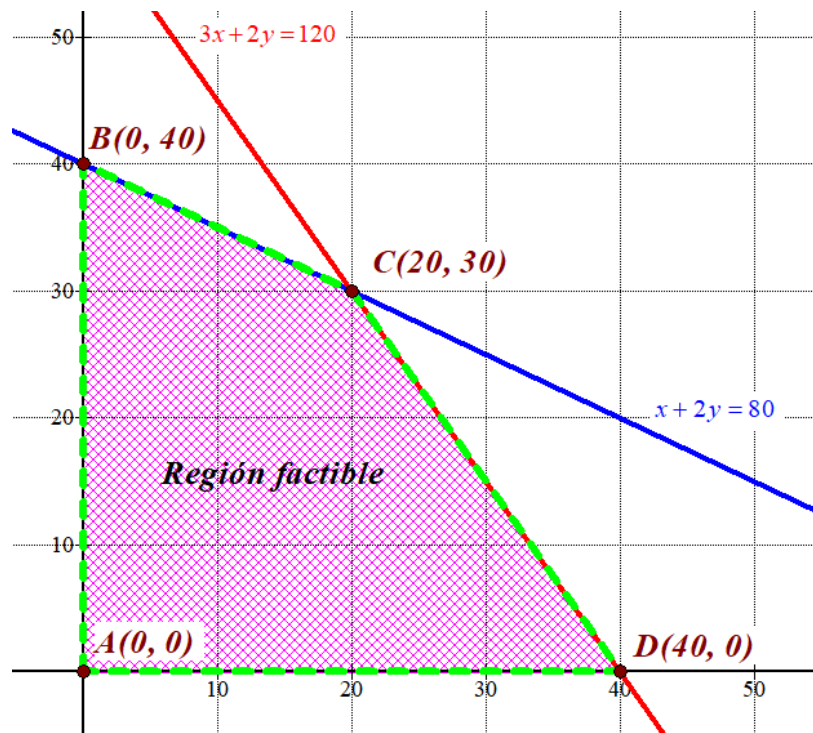
Primer
cuadrante



Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 2 \cdot 10 \leq 80 \\ 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \leq 120 \\ 10 \geq 0, 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región del primer cuadrante limitada por las rectas y que contiene el punto $P(10, 10)$. La coloreamos en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 200x + 150y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow I(0, 40) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 40 = 6000$$

$$C(20, 30) \rightarrow I(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 8500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(40, 0) \rightarrow I(40, 0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8000$$

Los máximos ingresos se consiguen fabricando 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo, siendo estos ingresos máximos de 8500 euros.

6. Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Se sabe que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dados por la función:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n$$

para $10 \leq t \leq 21$.

- a) Encuentre el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.
[1,25 puntos]
b) Encuentre el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 €.
[1,25 puntos]

- a) Si los ingresos máximos se producen a las 18 horas la derivada de la función debe anularse $\rightarrow$
 $I'(18) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} I(t) = -5(m-t)^2 + n \Rightarrow I'(t) &= -10(m-t)(-1) \\ I'(18) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -10(m-18)(-1) \Rightarrow \boxed{m=18}$$

Para $m=18$ la función queda $I(t) = -5(18-t)^2 + n$. Comprobamos que la segunda derivada es negativa para $m=18$ y por tanto los ingresos máximos se producen a las 18 horas como se pide.

$$I(t) = -5(18-t)^2 + n \Rightarrow I'(t) = -10(18-t)(-1) = 180 - 10t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I''(t) = -10 \Rightarrow I''(18) = -10 < 0$$

Se cumple lo pedido para $m=18$.

- b) La función ingresos queda $I(t) = -5(18-t)^2 + n$. Si a las 21 horas hay unos ingresos de 500 € entonces $I(21) = 500$.

$$\left. \begin{aligned} I(t) &= -5(18-t)^2 + n \\ I(21) &= 500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 500 = -5(18-21)^2 + n \Rightarrow 500 = -45 + n \Rightarrow \boxed{n=545}$$

El valor buscado es $n=545$.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

PAU septiembre (serie 3) 2018

Convocatoria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre el valor de a y b para que la función sea continua para todos los números reales.

[2 puntos]

2. Al acabar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 €, y los verdes, que traen 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 €. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches. Necesita preparar como mínimo 40 estuches y el número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes. Con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos obsequios.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela.

[1,25 puntos]

b) Calcule cuántos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es este gasto mínimo.

[0,75 puntos]

3. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 € después de invertir un total de 40.000 € en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente forma: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tres empresas?

[2 puntos]

4. El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, donde x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

- a) Determine el salario para el cual el gasto en tabaco es máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?
[1 punto]
- b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 €?
[1 punto]

5. Resuelva las siguientes preguntas:

- a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.
[1 punto]
- b) Determine el valor de a , b , c y d para que se verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.
[1 punto]

6. Se sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $(2, -5)$ y que las rectas $x = 1$ e $y = 2$ son sus asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule a , b y c .
[2 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 2. \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre el valor de a y b para que la función sea continua para todos los números reales.
[2 puntos]

La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 2(-1) + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1 + a}$$

La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax + b = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 4 - 2a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 + a \\ b &= 4 - 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a = 4 - 2a \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 1 + 1 = 2}$$

Para que la función sea continua para todos los números reales debe ser $a = 1$ y $b = 2$.

2. Al acabar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 €, y los verdes, que traen 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 €. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches. Necesita preparar como mínimo 40 estuches y el número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes. Con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos obsequios.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuántos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es este gasto mínimo. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de estuches rojos e “y” al número de estuches verdes que se preparan. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Rotuladores	Colores	Coste
Nº estuches rojos (x)	x	2x	9x
Nº estuches verdes (y)	3y	y	15y
TOTALES	$x + 3y$	$2x + y$	$9x + 15y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y que viene expresado como

$$C(x, y) = 9x + 15y.$$

Las restricciones son:

- La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches $\rightarrow x + 3y \leq 200$; $2x + y \leq 100$.
- Necesita preparar como mínimo 40 estuches $\rightarrow x + y \geq 40$.
- El número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes $\rightarrow x \leq y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x + y \geq 40 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y \leq 200 - x \\ y \leq 100 - 2x \\ y \geq 40 - x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$3y = 200 - x$$

$$y = 100 - 2x$$

$$y = 40 - x$$

$$y = x$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

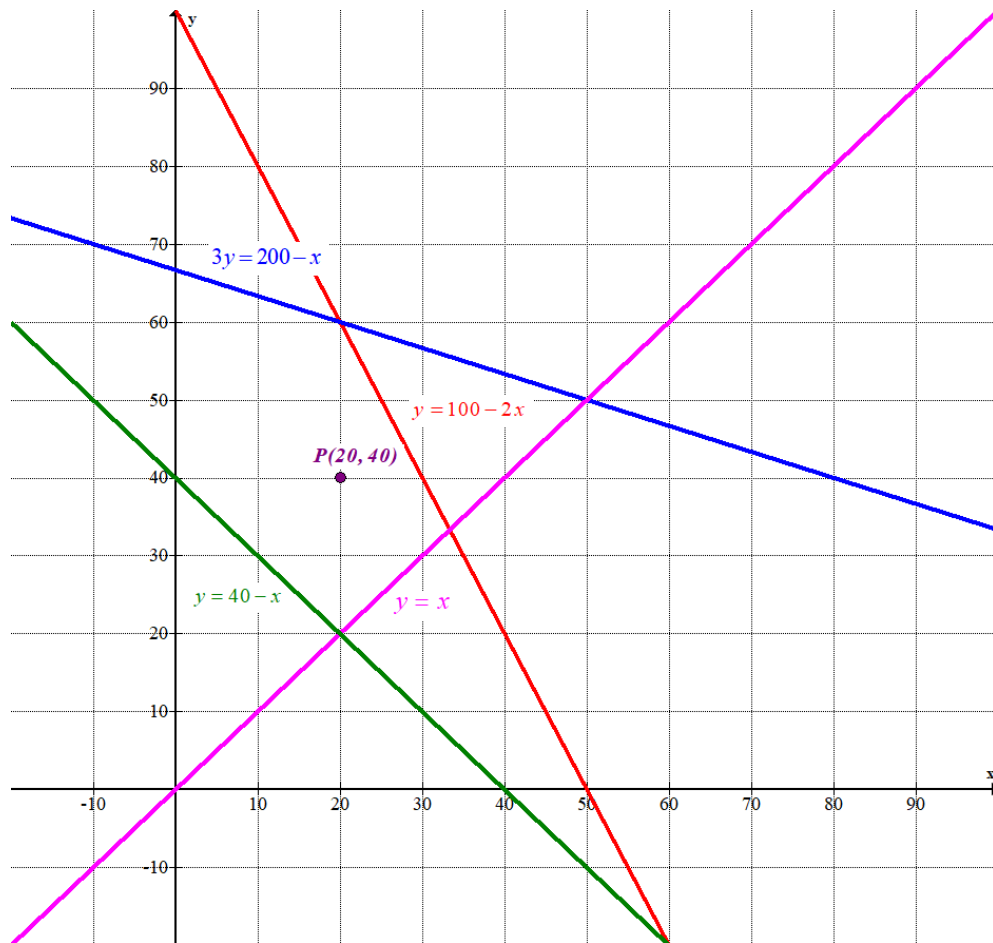
x	$y = \frac{200 - x}{3}$
0	$200/3$
20	60
200	0

x	$y = 100 - 2x$
0	100
20	60
50	0

x	$y = 40 - x$
0	40
20	20
40	0

x	$y = x$
0	0
20	20
40	40

Primer
cuadrante

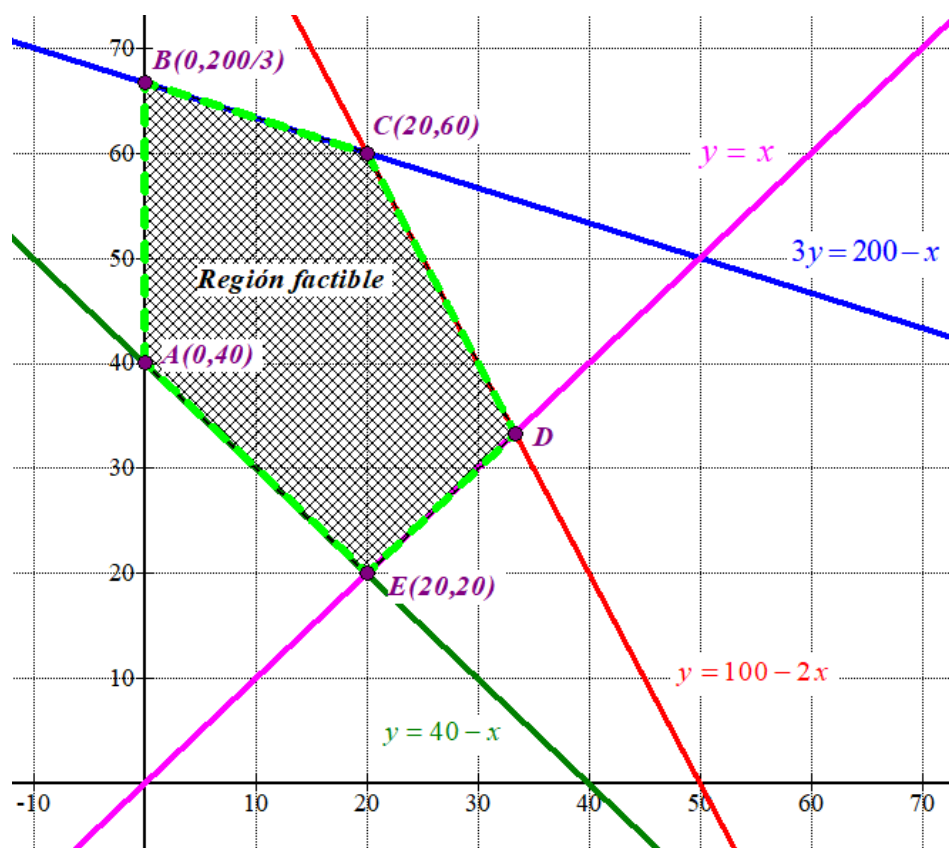


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3y \leq 200 - x \\ y \leq 100 - 2x \\ y \geq 40 - x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por encima de la recta verde y rosa y por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(20, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 40 \leq 200 - 20 \\ 40 \leq 100 - 2 \cdot 20 \\ 40 \geq 40 - 20 \\ 40 \geq 20 \\ 20 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de esta región.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 100 - 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = 100 - 2x \Rightarrow 3x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{3} \Rightarrow y = \frac{100}{3} \Rightarrow D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

b) Valoramos la función coste $C(x, y) = 9x + 15y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(0, 40) \rightarrow C(0, 40) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot 40 = 600$$

$$B\left(0, \frac{200}{3}\right) \rightarrow C\left(0, \frac{200}{3}\right) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot \frac{200}{3} = 1000$$

$$C(20, 60) \rightarrow C(20, 60) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 60 = 1080$$

$$D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) \rightarrow C\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = 9 \cdot \frac{100}{3} + 15 \cdot \frac{100}{3} = 800$$

$$E(20, 20) \rightarrow C(20, 20) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 20 = 480 \text{ ¡Mínimo!}$$

El coste mínimo es de 480 euros y se consigue con la preparación de 20 estuches rojos y otros 20 verdes.

3. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 € después de invertir un total de 40.000 € en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente forma: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tres empresas? [2 puntos]

Llamamos a , b y c a la cantidad de dinero invertido en las empresas A, B y C, respectivamente.

“Ha invertido 40000 euros” $\rightarrow a + b + c = 40000$.

“La cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %, obteniendo 1500 € de beneficio” $\rightarrow 0.02a + 0.05b + 0.07c = 1500 \rightarrow 2a + 5b + 7c = 150000$.

“El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas” $\rightarrow b = a + c$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 40000 \\ 2a + 5b + 7c = 150000 \\ b = a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + a + c + c = 40000 \\ 2a + 5(a + c) + 7c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + 2c = 40000 \\ 2a + 5a + 5c + 7c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 20000 \\ 7a + 12c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 20000 - c \\ 7a + 12c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow 7(20000 - c) + 12c = 150000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140000 - 7c + 12c = 150000 \Rightarrow 5c = 10000 \Rightarrow \boxed{c = \frac{10000}{5} = 2000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 20000 - 2000 = 18000} \Rightarrow \boxed{b = 18000 + 2000 = 20000}$$

Se han invertido 18 000 euros en la empresa A, 20 000 euros en la empresa B y 2 000 euros en la empresa C.

4. El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función

$f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, donde x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

a) Determine el salario para el cual el gasto en tabaco es máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

[1 punto]

b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 €?

[1 punto]

a) Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{400(x^2 + 4) - (2x)400x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{400x^2 + 1600 - 800x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 1600 - 400x^2 = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = 2$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz cuadrada de 4 pues no tiene sentido un salario negativo. Tenemos un punto crítico para un sueldo de 2000 euros.

Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-800x(x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)2x(1600 - 400x^2)}{(x^2 + 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-800x(x^2 + 4) - 4x(1600 - 400x^2)}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-800x^3 - 3200x - 6400x + 1600x^3}{(x^2 + 4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-9600x + 800x^3}{(x^2 + 4)^3} \Rightarrow f''(2) = \frac{-9600 \cdot 2 + 800 \cdot 2^3}{(2^2 + 4)^3} = -25 < 0$$

En $x = 2$ hay un máximo relativo. Para un salario de 2000 euros el gasto en tabaco es máximo.

Este gasto máximo tiene un valor de $f(2) = \frac{400 \cdot 2}{2^2 + 4} = 100$ euros mensuales.

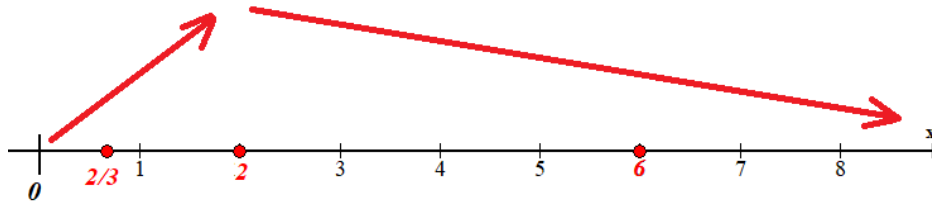
b) Averiguamos cuando el gasto mensual es de 60 euros.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4} \\ f(x) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{400x}{x^2 + 4} = 60 \Rightarrow 400x = 60x^2 + 240 \Rightarrow 60x^2 - 400x + 240 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{20 \pm 16}{6} = \begin{cases} \frac{20+16}{6} = 6 = x \\ \frac{20-16}{6} = \frac{2}{3} = 0.666 = x \end{cases}$$

El gasto mensual en tabaco es de 60 euros con un sueldo de 666.67 euros mensuales y con un sueldo de 6000 euros mensuales.

La función tiene un máximo para un sueldo de 2000 euros por lo que la función crece de 0 a 2000 euros y decrece de 2000 euros en adelante. La función sigue el esquema siguiente.



El gasto crece de $\frac{2}{3}$ a 22, estando por encima de 60 euros y el gasto sigue estando por encima de 60 euros de 2 a 6, cuando vuelve a ser de 60 euros y continúa disminuyendo.

El gasto es inferior a 60 euros con un salario inferior a 666.67 euros mensuales y con un salario superior a 6000 euros mensuales.

5. Resuelva las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine el valor de a, b, c y d para que se verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{array}{l} A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 2B + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \left[2B + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right] + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B + \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 7B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -35 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & -35 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 2 \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0+4 & c-8 \\ 0+2 & ac-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = b \\ c - 8 = -5 \rightarrow c = 8 - 5 = 3 \\ 2 = d \\ ac - 4 = -7 \end{cases} \Rightarrow 3a - 4 = -7 \Rightarrow 3a = -7 + 4 = -3 \Rightarrow a = -1$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$ y $d = 2$.

6. Se sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $(2, -5)$ y que las rectas $x = 1$ e $y = 2$ son sus asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule a , b y c . [2 puntos]

Si la recta $x = 1$ es asíntota vertical este valor debe estar excluido del dominio de la función, por lo que el denominador de la función debe anularse para $x = 1$.

$$c \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

La función queda $f(x) = \frac{ax+b}{-x+1}$.

Si la recta $y = 2$ es asíntota horizontal debe cumplirse que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{-x+1} = 2 \Rightarrow \frac{a}{-1} = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La función queda con la expresión $f(x) = \frac{-2x+b}{1-x}$.

Como se sabe que la función $f(x) = \frac{-2x+b}{1-x}$ pasa por el punto $(2, -5)$ debe cumplirse que $f(2) = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -5 \\ f(x) = \frac{-2x+b}{1-x} \end{array} \right\} \Rightarrow -5 = \frac{-4+b}{1-2} \Rightarrow -5 = \frac{b-4}{-1} \Rightarrow b-4 = 5 \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

Los valores necesarios para que se cumpla todo lo pedido son $a = -2$, $b = 9$ y $c = -1$.

PAU junio (serie 5) 2018



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatoria 2018

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$.

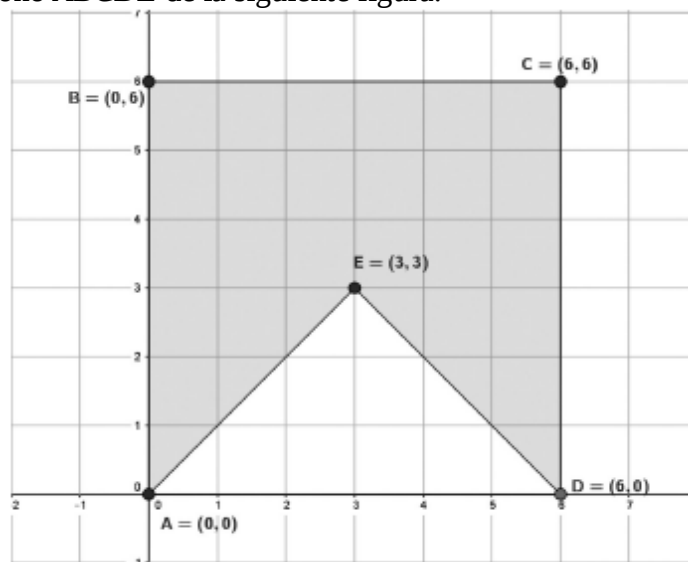
a) Indique justificadamente su dominio y determine los puntos donde el gráfico de f corta el eje de abscisas.

[1 punto]

b) Estudie su crecimiento y haga un esbozo aproximado del gráfico de la función.

[1 punto]

2. Considere el pentágono $ABCDE$ de la siguiente figura:



a) Justifique que la región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones.

[1 punto]

b) Escriba el sistema de inecuaciones que determina los puntos de la frontera y del interior del triángulo AED.

[1 punto]

3. Sea $y = f(x)$ una parábola que tiene el vértice en el punto $V = (0, -4)$ y corta el eje de abscisas en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

a) Determine su ecuación.

[1 punto]

b) Sea una función g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudie el crecimiento de la función g , determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

[1 punto]

4. Considere el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Justifique si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Este sistema de ecuaciones representa dos rectas paralelas porque ambas tienen pendiente -1 .

[1 punto]

b) Este sistema es compatible determinado y su solución es $x = 1$, $y = 1$.

[1 punto]

5. Un fabricante de automóviles produce los modelos Record y Astrid. Guarda la producción en tres naves. En la primera nave tiene 150 vehículos del modelo Record y 120 vehículos del modelo Astrid. En la segunda guarda 80 Record y 140 Astrid. Finalmente, en la tercera nave almacena 250 Record y 125 Astrid. Además, el precio de los automóviles Record es de 6.520 €, mientras que cada Astrid vale 8.130 €. Toda esta información se recoge en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

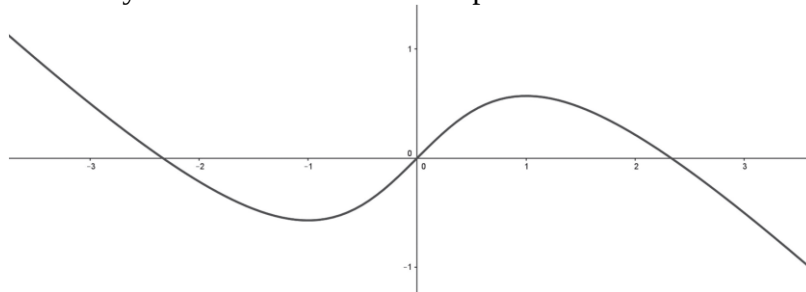
a) ¿Qué representa la matriz $B \cdot A$? Calcúlela.

[1 punto]

b) ¿Qué representa la matriz $B \cdot A \cdot P$? Calcúlela.

[1 punto]

6. A continuación se muestra el gráfico de una función f que presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



a) Sabiendo que $f'(0) = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a f que pasa por el origen de coordenadas.

[1 punto]

b) Haga un esbozo del gráfico de la función f' con los datos de los que dispone.

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$.

a) Indique justificadamente su dominio y determine los puntos donde el gráfico de f corta el eje de abscisas. [1 punto]

b) Estudie su crecimiento y haga un esbozo aproximado del gráfico de la función. [1 punto]

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} B(-\sqrt{3}, 0) \\ C(\sqrt{3}, 0) \end{cases} \end{cases}$$

La función tiene tres puntos de corte con el eje de abscisas: $A(0, 0)$; $B(-\sqrt{3}, 0)$ y $C(\sqrt{3}, 0)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-4) - (x^2-3x)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - 3x^2 + 12 - \cancel{2x^3} + 6x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2 - 8x + 12}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 8x + 12}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{-80}}{6} = \text{No existe}$$

La función no tiene puntos críticos.

Estudiamos el signo antes, entre y después de los puntos excluidos del dominio: $x = -2$ y $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{3(-3)^2 - 8(-3) + 12}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{63}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, +2)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 12}{(0^2 - 4)^2} = \frac{12}{16} > 0. \text{ La función crece en } (-2, +2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12}{(3^2 - 4)^2} = \frac{15}{25} > 0$

. La función crece en $(2, +\infty)$.

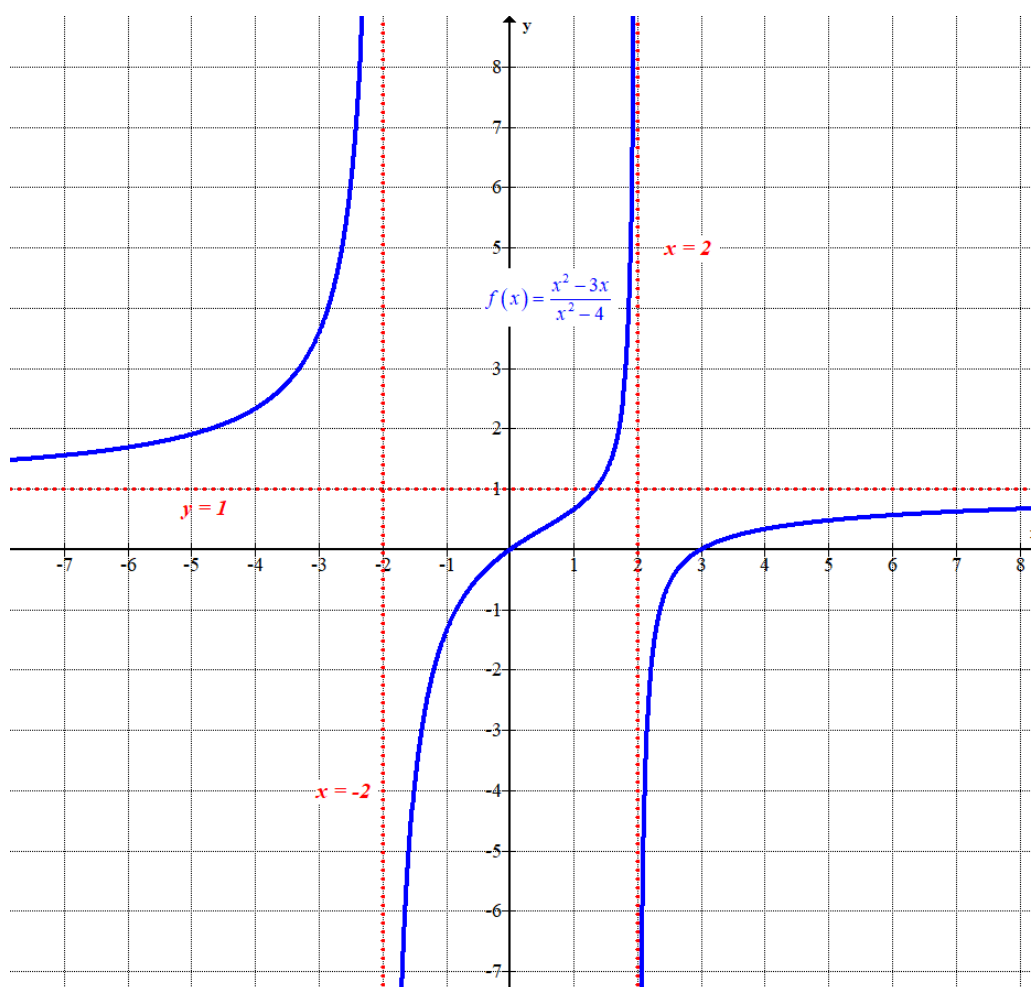
La función crece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$.

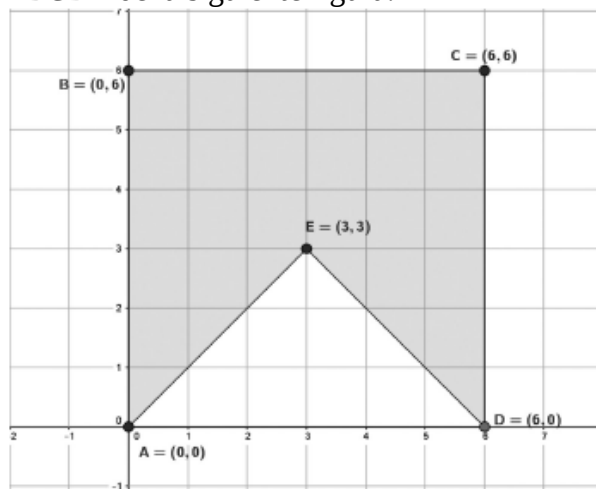
Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = 1$, la función tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$
-3	3.6
-1	-4/3
0	0
1	2/3
3	0



2. Considere el pentágono $ABCDE$ de la siguiente figura:



- a) Justifique que la región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones. [1 punto]
- b) Escriba el sistema de inecuaciones que determina los puntos de la frontera y del interior del triángulo AED. [1 punto]

a) Las rectas que delimitan la región sombreada son:

$$BC \rightarrow y = 6$$

$$AB \rightarrow x = 0$$

$$CD \rightarrow x = 6$$

$$AE \rightarrow \left. \begin{array}{l} A(0,0) \\ E(3,3) \end{array} \right\} \rightarrow y = x$$

$$ED \rightarrow \left. \begin{array}{l} E(3,3) \\ D(6,0) \\ y = mx + n \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 = 3m + n \\ 0 = 6m + n \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 = 3m + n \\ -6m = n \end{array} \right\} \rightarrow 3 = 3m - 6m \rightarrow 3m = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = -1 \rightarrow n = -6(-1) = 6 \rightarrow y = -x + 6$$

Considerando los puntos $P(1, 2)$ y $Q(5, 2)$ pertenecientes a la región sombreada, vemos que no cumplen las mismas inecuaciones.

$$P(1,2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \geq x \\ y \leq -x + 6 \end{array} \right.$$

$$Q(5,2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \leq x \\ y \geq -x + 6 \end{array} \right.$$

Los puntos P y Q difieren en dos de las inecuaciones. La región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones.

- b) El triángulo AED contiene a los puntos del plano con la segunda coordenada positiva y que están por debajo de las rectas AE y ED.

$$\text{Los puntos del triángulo AED cumplen el sistema de inecuaciones: } \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq -x + 6 \end{array} \right\}.$$

3. Sea $y = f(x)$ una parábola que tiene el vértice en el punto $V = (0, -4)$ y corta el eje de abscisas en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

a) Determine su ecuación. [1 punto]

b) Sea una función g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudie el crecimiento de la función g , determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos. [1 punto]

a) La parábola tiene ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinamos los valores de a , b y c para que cumpla lo pedido en el ejercicio.

La parábola que tiene el vértice en el punto $V = (0, -4)$ cumple que la derivada se anula para $x = 0$

$$\rightarrow f'(0) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2ax + b \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a(0) + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $f(x) = ax^2 + c$.

También se cumple que la función pasa por el punto $(0, -4) \rightarrow f(0) = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + c \\ f(0) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

La función queda $f(x) = ax^2 - 4$.

También se cumple que la función pasa por el punto $(-2, 0) \rightarrow f(-2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 4 \\ f(-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 - 4 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

La parábola tiene ecuación: $f(x) = x^2 - 4$.

b) Nos dicen que $g'(x) = x^2 - 4$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función g .

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = x^2 - 4 \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

La función g tiene dos puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.

Estudiamos el signo antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ consideramos $x = -3$ y la derivada vale $g'(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0$. La función crece en $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, +2)$ consideramos $x = 0$ y la derivada vale $g'(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0$. La función decrece en $(-2, +2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale $g'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$.

Observando el esquema podemos decir que la función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

4. Considere el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Justifique si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a)** Este sistema de ecuaciones representa dos rectas paralelas porque ambas tienen pendiente -1 .
[1 punto]
- b)** Este sistema es compatible determinado y su solución es $x = 1, y = 1$.
[1 punto]

a) Obtenemos la pendiente de cada una de las rectas que representan las dos ecuaciones del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = y \rightarrow \boxed{m = 2} \\ -x + 2 = y \rightarrow \boxed{m' = -1} \end{array} \right.$$

No es cierta la afirmación pues la primera ecuación representa una recta de pendiente 2.

- b) Al tener las dos rectas distinta pendiente deben cortarse en un punto, lo que implica que el sistema es compatible determinado (una única solución). Compruebo si el punto de corte de las rectas es el punto $(1, 1)$. Sustituimos en el sistema y vemos si se cumplen las dos ecuaciones que lo componen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{¿} 2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0? \\ \text{¿} -1 - 1 + 2 = 0? \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{¿} 2 - 1 - 1 = 0? \\ \text{¿} -1 - 1 + 2 = 0? \end{array} \right.$$

Se cumplen ambas igualdades y la afirmación es cierta: el sistema es compatible determinado y la solución es $x = 1, y = 1$.

5. Un fabricante de automóviles produce los modelos Record y Astrid. Guarda la producción en tres naves. En la primera nave tiene 150 vehículos del modelo Record y 120 vehículos del modelo Astrid. En la segunda guarda 80 Record y 140 Astrid. Finalmente, en la tercera nave almacena 250 Record y 125 Astrid. Además, el precio de los automóviles Record es de 6.520 €, mientras que cada Astrid vale 8.130 €. Toda esta información se recoge en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \quad 1 \quad 1)$$

a) ¿Qué representa la matriz $B \cdot A$? Calcúlela.

[1 punto]

b) ¿Qué representa la matriz $B \cdot A \cdot P$? Calcúlela.

[1 punto]

a) Calculamos $B \cdot A$.

$$B \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} = (150 + 80 + 250 \quad 120 + 140 + 125) = (480 \quad 385)$$

$$1 \times 3 \quad \boxed{} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 1 \times 2$$

La matriz resultante de $B \cdot A$ nos da el número de coches modelo Record y Astrid que hay guardados en total en las tres naves.

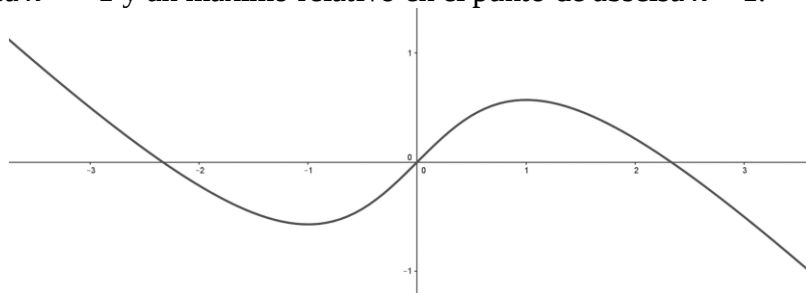
b) Calculamos $B \cdot A \cdot P$.

$$B \cdot A \cdot P = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} = (480 \quad 385) \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} = (480 \cdot 6.520 + 385 \cdot 8.130)$$

$$1 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

La matriz resultante de $B \cdot A \cdot P$ nos da el valor total de los coches guardados en las tres naves:
 $480 \cdot 6.520 + 385 \cdot 8.130 = 6.259.650$ euros.

6. A continuación se muestra el gráfico de una función f que presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

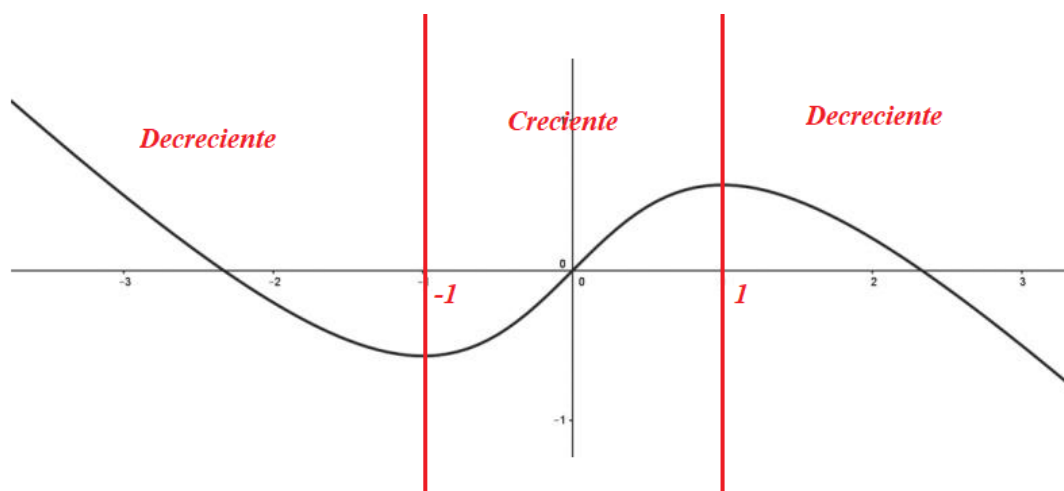


- a) Sabiendo que $f'(0) = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a f que pasa por el origen de coordenadas. [1 punto]
 b) Haga un esbozo del gráfico de la función f' con los datos de los que dispone. [1 punto]

- a) Mirando la gráfica de la función sabemos que $f(0) = 0$ y en el enunciado del problema nos dicen que $f'(0) = 1$. Hallamos la ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

- b) Dividimos la recta real en tres partes según la función crece o decrece.



En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función decrece y la derivada es negativa llegando a ser cero en $x = -1$, pues hay un mínimo de la función ($f''(-1) > 0$).

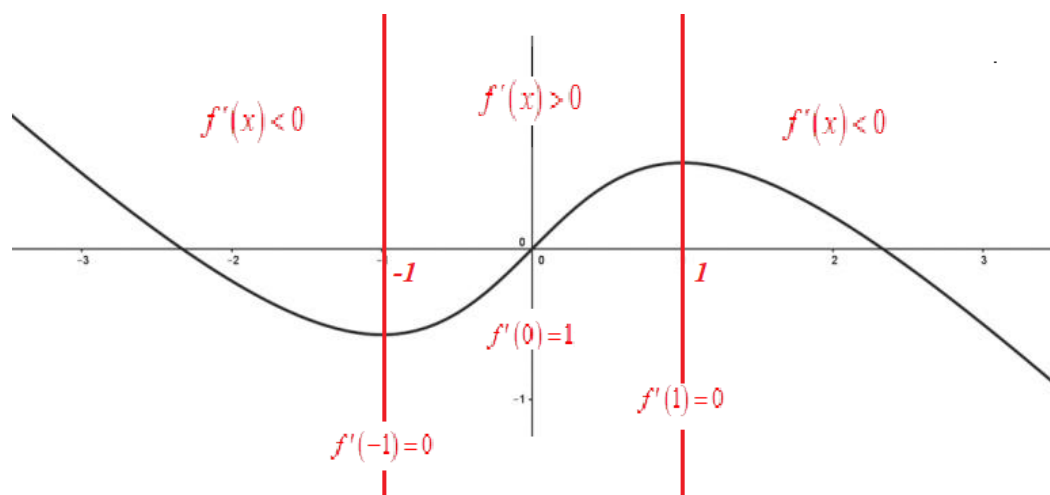
En el intervalo $(-1, 1)$ la función crece y la derivada es positiva llegando a ser cero en $x = 1$, pues hay un máximo de la función ($f''(1) < 0$).

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función decrece y la derivada es negativa.

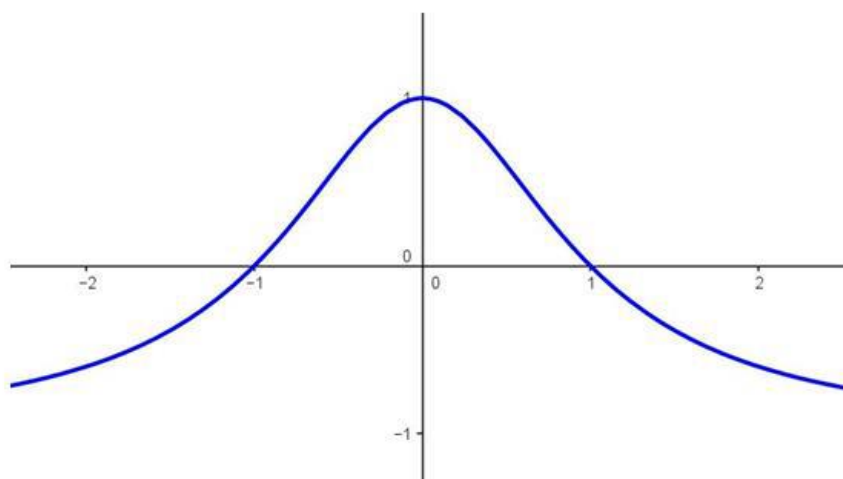
Tenemos un punto de inflexión en $x = 0$, por lo que la derivada segunda vale cero. La derivada tiene un punto crítico en $x = 0$.

Solo tenemos tres puntos de la gráfica: $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 1$; $f'(1) = 0$.

La derivada es creciente en $x = -1$, en $x = 0$ tiene un punto crítico y es decreciente en $x = 1$.



Hacemos un esbozo de la gráfica de la derivada.





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatoria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M . Es

decir, $M \cdot M^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

[1 punto]

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$.

[1 punto]

b) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función f .

[1 punto]

3. Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.

[1 punto]

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado?

[1 punto]

4. Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una determinada pieza, que se denominarán A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza. En cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 € por el modelo A y 50 € por el modelo B.
- a)** Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b)** ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora tendrán que fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?
[0,75 puntos]
5. Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.
- a)** Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$.
[1 punto]
- b)** Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos.
[1 punto]
6. El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función
- $$P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el número de años transcurridos.}$$
- a)** ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?
[1 punto]
- b)** Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. [1 punto]

b) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M . Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a+0 \\ -2a+0 & -a^2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4-a^2 = 3 \\ 2a = 2a \\ -2a = -2a \\ -a^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -1 \\ -a^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a=1$ y $a=-1$.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M \cdot M^{-1} &= I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-a & 2+2a \\ 0+0 & -a+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2+2a = 0 \\ 0 = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2a = -2 \rightarrow a = -1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1} \end{aligned}$$

El valor buscado es $a = -1$.

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$. [1 punto]

b) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función f . [1 punto]

a) Si la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$ ambas rectas deben tener la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada: $f'(1)$ y la pendiente de la recta $y+3x+5=0 \rightarrow y=-3x-5$ es $m=-3$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-a) - (x^2) \cdot 1}{(x-a)^2} = \frac{2x^2 - 2ax - x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1^2 - 2a}{(1-a)^2} \Rightarrow \frac{1-2a}{(1-a)^2} = -3 \Rightarrow 1-2a = -3(1-a)^2 \Rightarrow$$

Pendiente tangente = -3

$$\Rightarrow 1-2a = -3(1^2 + a^2 - 2a) \Rightarrow 1-2a = -3-3a^2+6a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = \boxed{2=a} \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}=a} \end{cases}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = \frac{2}{3}$ o $a = 2$.

b) Para el valor del parámetro $a=1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Esta función tiene como dominio $\mathbb{R} - \{1\}$. Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores: $x=0$, $x=2$ y $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 2(0.5)}{(0.5-1)^2} = -3 < 0$.

La función decrece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{1.5^2 - 2(1.5)}{(1.5-1)^2} = -3 < 0$.

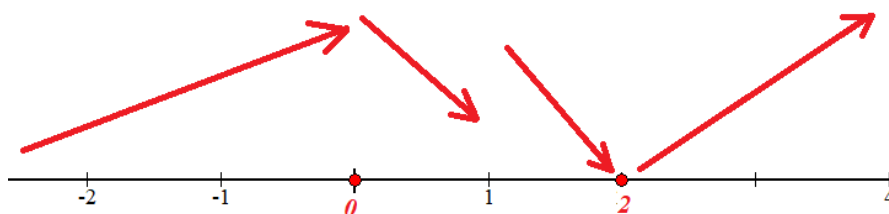
La función decrece en $(1,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 2(3)}{(3-1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La

función crece en $(2,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ y decrece en $(0,1) \cup (1,2)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$. Como

$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$ y $f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$ las coordenadas del máximo relativo son $(0,0)$ y las del mínimo relativo son $(2,4)$.

3. Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total. [1 punto]

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado? [1 punto]

a) Averiguamos el precio de un refresco (r €), de un bocadillo (b €) y de una bola de helado (h €) resolviendo el sistema que podemos obtener con los datos proporcionados en el ejercicio.

4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado cuestan 19,50 € $\rightarrow 4r + 3b + 5h = 19.5$

2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado cuestan 8,10 € $\rightarrow 2r + b + 2h = 8.1$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo (nos faltaría una ecuación).

$$\left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ 2r + b + 2h = 8.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ b = 8.1 - 2r - 2h \end{array} \right\} \Rightarrow 4r + 3(8.1 - 2r - 2h) + 5h = 19.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r + 24.3 - 6r - 6h + 5h = 19.5 \Rightarrow -2r - h = -4.8 \Rightarrow 4.8 - 2r = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 8.1 - 2r - 2(4.8 - 2r) = 8.1 - 2r - 9.6 + 4r = 2r - 1.5 \Rightarrow \begin{cases} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \end{cases}$$

Estos precios del bocadillo y del helado dependen del valor del refresco. Calculamos cuánto cuestan 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5b = 10r - 7.5 \\ 8h = 38.4 - 16r \end{array} \right\} \Rightarrow 6r + 5b + 8h = \cancel{6r} + 10r - 7.5 + 38.4 - \cancel{16r} = 30.9$$

Han pagado 30.9 € por 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado.

b) Añadimos al sistema anterior una nueva ecuación con el nuevo dato aportado.

1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 € $\rightarrow r + b + h = 5.1$.

$$\left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ 2r + b + 2h = 8.1 \\ r + b + h = 5.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r + \cancel{2r} - 1.5 + 4.8 - \cancel{2r} = 5.1 \Rightarrow \\ r + b + h = 5.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 5.1 + 1.5 - 4.8 = 1.8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 2 \cdot 1.8 - 1.5 = 2.1} \\ \boxed{h = 4.8 - 2 \cdot 1.8 = 1.2} \end{cases}$$

Los precios son: 1.8 € cada refresco, 2.1 € cada bocadillo y 1.2 € cada bola de helado.

4. Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una determinada pieza, que se denominarán A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza. En cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 € por el modelo A y 50 € por el modelo B.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora tendrán que fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo? [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de piezas del modelo A e “y” al número de piezas del modelo B. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Trabajadores fase 1	Trabajadores fase 2	Beneficio
Nº piezas modelo A (x)	x	2x	40x
Nº piezas modelo B (y)	y	3y	50y
TOTALES	$x + y$	$2x + 3y$	$40x + 50y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y que viene expresado como $B(x, y) = 40x + 50y$.

Las restricciones son:

- En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12 $\rightarrow x + y \leq 5$; $2x + 3y \leq 12$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

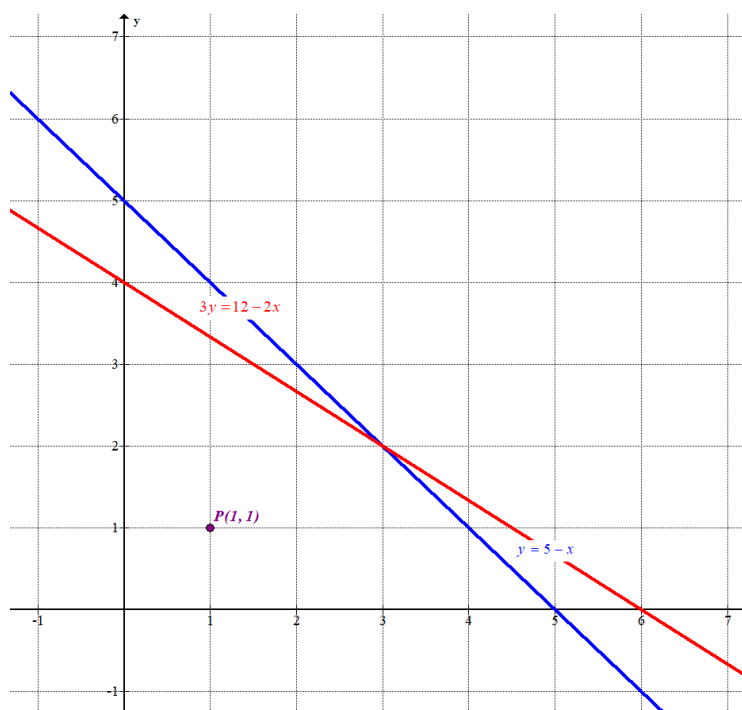
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 5 - x \\ 3y \leq 12 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$\begin{array}{c|c} y = 5 - x & 3y = 12 - 2x \\ \hline x & y = 5 - x \\ \hline 0 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & y = \frac{12 - 2x}{3} \\ \hline x & y = \frac{12 - 2x}{3} \\ \hline 0 & 4 \\ 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



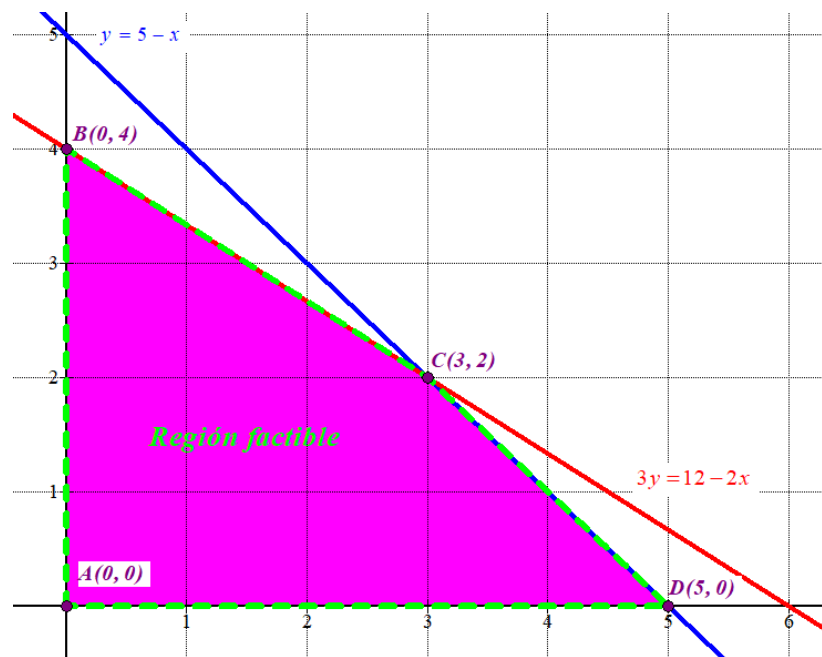
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 5 - x \\ 3y \leq 12 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Lo comprobamos viendo si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq 5 - 1 \\ 3 \leq 12 - 2 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de esta región.



b) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 40x + 50y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 200$$

$$C(3, 2) \rightarrow B(3, 2) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 220 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(5, 0) \rightarrow B(5, 0) = 40 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 200$$

El beneficio máximo que se puede conseguir cumpliendo con las restricciones es de 220 euros y se consigue con la fabricación de 3 piezas del modelo A y 2 del modelo B.

5. Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.
- a) Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$. [1 punto]
- b) Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos. [1 punto]

- a) Si llamamos p al precio del móvil tenemos para $p = 750$ que el número de móviles vendidos son 2000, por lo que los ingresos son $2000 \cdot 750 = 1\,500\,000$ euros.

Si subimos el precio 10 euros ($750 + 10$) lo compran 100 clientes menos ($2000 - 1 \cdot 100$) por lo que los ingresos mensuales serán $(750 + 10)(2000 - 100)$.

Si subimos el precio 20 euros ($750 + 20$) lo compran 200 clientes menos ($2000 - 2 \cdot 100$) por lo que los ingresos mensuales serán $(750 + 20)(2000 - 200)$.

Si el precio del móvil es p con respecto al precio inicial de 750 € el precio ha subido $p - 750$ y si

dividimos esta cantidad entre 10 obtenemos $\frac{p-750}{10}$ que nos indica el número de múltiplos de

10 que ha subido (o bajado) su precio. Entonces se habrán vendido

$$2000 - \frac{p-750}{10} \cdot 100 = 2000 - 10(p - 750) = 2000 - 10p + 7500 = 9500 - 10p.$$

Los ingresos obtenidos serían el resultado de multiplicar el precio de un móvil por el número de móviles vendidos: $I(p) = p(9500 - 10p) = -10p^2 + 9500p$.

- b) Nos preguntan cuándo la función ingresos es positiva. Averiguamos cuando los ingresos son nulos.

$$I(p) = 0 \Rightarrow p(9500 - 10p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ 9500 - 10p = 0 \rightarrow 10p = 9500 \rightarrow p = 950 \end{cases}$$

Evidentemente con un precio $p = 0$ los ingresos son nulos. Los ingresos vuelven a ser nulos para un precio de 950 euros. Para un precio de 750 euros sabemos que los ingresos son de un millón y medio de euros. Como la función ingresos es continua se cumple que con un precio entre 0 y 950 euros los ingresos son positivos.

Derivamos la función y buscamos cuando los ingresos son más altos.

$$I(p) = -10p^2 + 9500p \Rightarrow I'(p) = -20p + 9500 \quad \left. \begin{matrix} \\ I'(p) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -20p + 9500 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20p = 9500 \Rightarrow p = \frac{9500}{20} = 475$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada para un precio de 475 euros.

$$I'(p) = -20p + 9500 \Rightarrow I''(p) = -20 \Rightarrow I''(475) = -20 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función ingresos tiene un máximo para $p = 475$.

Tenemos que $I(475) = -10 \cdot 475^2 + 9.500 \cdot 475 = 2256250$.

Con un precio del móvil de 475 euros se consiguen los máximos beneficios siendo el importe de 2 256 250 euros.

6. El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$$P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el número de años transcurridos.}$$

a) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos? [1 punto]

b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población? [1 punto]

a) La población inicial es el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{5+0^2}{(0+1)^2} = 5$$

La población inicial es de 5 millones de habitantes.

Para $t=9$ tenemos que $P(9) = \frac{5+9^2}{(9+1)^2} = 0.86$.

La población después de 9 años es de 860 000 habitantes.

Buscamos cuando la población es de 1 millón de habitantes.

$$P(t) = 1 \Rightarrow \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = 1 \Rightarrow 5+t^2 = (t+1)^2 \Rightarrow 5+t^2 = 1+t^2+2t \Rightarrow 0 = 2t-4 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

Al cabo del segundo año la población pasa a ser de 1 millón de habitantes.

La derivada de la función es

$$P'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - (5+t^2)2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t(t+1) - (5+t^2)2}{(t+1)^3} = \frac{\cancel{2t^2} + 2t - 10 - \cancel{2t^2}}{(t+1)^3} = \frac{2(t-5)}{(t+1)^3}$$

En el segundo año la derivada es $P'(2) = \frac{2(2-5)}{(2+1)^3} = \frac{-6}{27} < 0$, por lo que a partir del segundo año

la población va disminuyendo y es inferior a 1 millón de habitantes. A partir del quinto año vuelve a crecer el número de habitantes.

b) Calculamos el límite de la función cuando el número de años transcurridos t tiende a ser muy grande.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5+t^2}{t^2+1+2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{2t}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{t^2} + 1}{1 + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}} = \frac{0+1}{1+0+0} = 1$$

Con el paso de los años la población tiende a ser de 1 millón de habitantes.

PAU septiembre (serie 2) 2017



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg del ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo deben fabricarse para maximizar los ingresos?
[2 puntos]

2. Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y cuenta con 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.
 - a) Exprese el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre ambas variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios?
[1 punto]
 - b) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso?
[1 punto]

3. Consideramos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^2 + bx - 3$, donde b es un parámetro real.
 - a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o mínimo.
[1 punto]
 - b) Para $b = -8$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$.
[1 punto]

4. Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7%:

a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero?

[1 punto]

b) Cuánto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos?

[1 punto]

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $A^3 - I = 0$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

[1 punto]

b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado a.

[1 punto]

6. El vértice de una parábola es el punto (1, 2).

a) Si la parábola corta el eje de abscisas en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de abscisas?

[1 punto]

b) Encuentre la ecuación de la parábola

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg del ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo deben fabricarse para maximizar los ingresos? [2 puntos]

- a) Llamamos “x” al número de cajas de helados G1 e “y” al número de cajas de helados G2 que se elaboran. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Ingrediente A	Ingrediente B	Ingresos
Nº helados G1 (x)	x	2x	10x
Nº helados G2 (y)	2y	y	15y
TOTALES	$x + 2y$	$2x + y$	$10x + 15y$

La función objetivo son los ingresos que deseamos maximizar y que viene expresado como $I(x, y) = 10x + 15y$.

Las restricciones son:

- Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B $\rightarrow x + 2y \leq 90; 2x + y \leq 150$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y \leq 90 - x \\ y \leq 150 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$2y = 90 - x$$

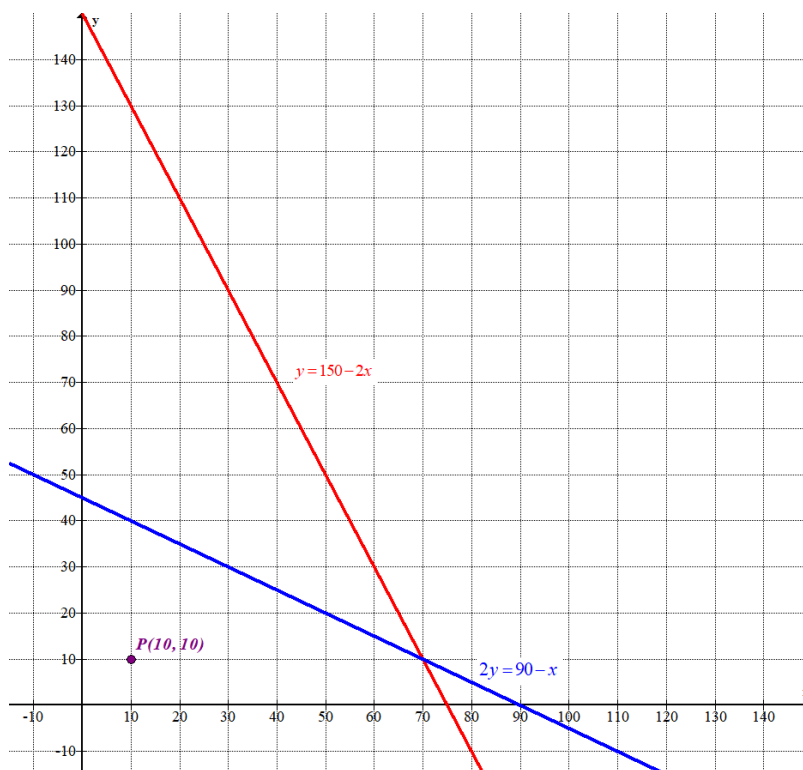
x	$y = \frac{90 - x}{2}$
0	45
70	10
90	0

$$y = 150 - 2x$$

x	$y = 150 - 2x$
0	150
70	10
75	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

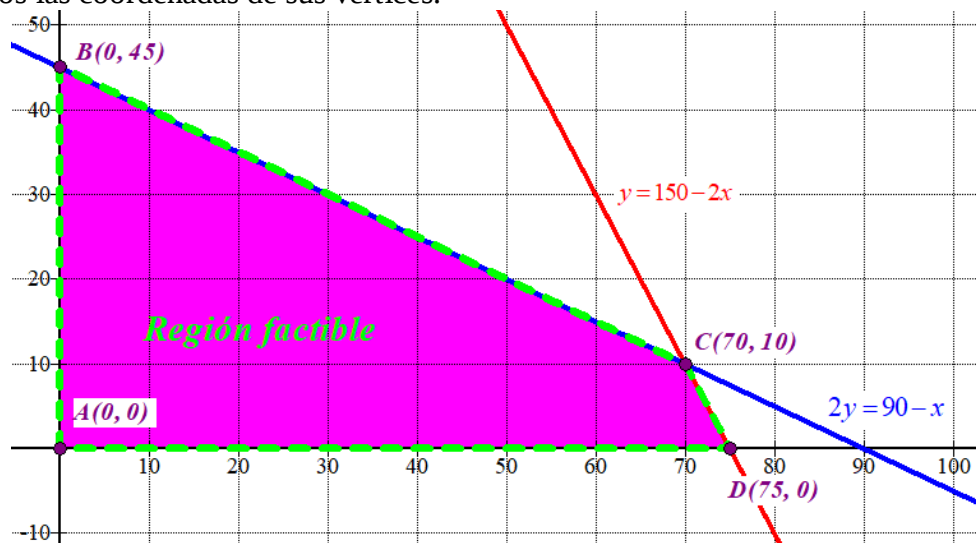


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2y \leq 90 - x \\ y \leq 150 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 90 - 10 \\ 10 \leq 150 - 20 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 10x + 15y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 45) \rightarrow I(0, 45) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 675$$

$$C(70, 10) \rightarrow I(70, 10) = 10 \cdot 70 + 15 \cdot 10 = 850 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 0) \rightarrow I(75, 0) = 10 \cdot 75 + 15 \cdot 0 = 750$$

Los ingresos máximos que se pueden conseguir cumpliendo con las restricciones son de 850 euros y se consigue con la preparación de 70 cajas de helado G1 y 10 cajas de helado G2.

2. Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y cuenta con 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.
- a) Exprese el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre ambas variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios? [1 punto]
- b) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso? [1 punto]

a) Con una cuota de 42 euros se tienen 2000 usuarios.

Si la cuota es de $42 + 1 = 43$ euros se tienen $2000 - 20 = 1980$ usuarios.

Si la cuota es de $42 + 2 = 44$ euros se tienen $2000 - 2 \cdot 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 + c$ se tienen $2000 - c \cdot 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 - 1 = 41$ euros se tienen $2000 + 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 - 2 = 40$ euros se tienen $2000 + 2 \cdot 20$ usuarios.

Si llamamos x a la cuota mensual la subida o bajada respecto de la cuota inicial de 42 euros es $x - 42$ el número de usuarios es $N(x) = 2000 - (x - 42)20 = 2000 - 20x + 840 = 2840 - 20x$.

Averiguamos cuando $N(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} N(x) = 0 \\ N(x) = 2840 - 20x \end{array} \right\} \Rightarrow 2840 - 20x = 0 \Rightarrow 20x = 2840 \Rightarrow x = \frac{2840}{20} = 142$$

Con una cuota mensual de 142 euros el gimnasio se quedaría sin usuarios.

b) El beneficio mensual es el producto de la cuota mensual por el número de usuarios.

$$B(x) = x \cdot N(x) = x(2840 - 20x) = 2840x - 20x^2$$

Hallamos los puntos críticos de la función beneficio.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = 2840x - 20x^2 \Rightarrow B'(x) = 2840 - 40x \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2840 - 40x = 0 \Rightarrow x = \frac{2840}{40} = 71$$

Hemos obtenido un punto crítico para $x = 71$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = 2840 - 40x \Rightarrow B''(x) = -40 \Rightarrow B''(71) = -40 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficios tiene un máximo relativo en $x = 71$.

El beneficio mensual para esta cuota es de $B(71) = 2840 \cdot 71 - 20 \cdot 71^2 = 100820$. El número de usuarios sería $N(71) = 2840 - 20 \cdot 71 = 1420$.

Los beneficios máximos se alcanzan con una cuota de 71 euros mensuales obteniendo 100820 euros de los 1420 usuarios del gimnasio con esa cuota.

3. Consideramos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^2 + bx - 3$, donde b es un parámetro real.

a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o mínimo. [1 punto]

b) Para $b = -8$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$. [1 punto]

a) Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -3$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(-3) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-3) = 0 \\ f'(x) = x^2 + bx - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = (-3)^2 - 3b - 3 \Rightarrow 9 - 3b - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

El valor buscado es $b = 2$. Para este valor la derivada de la función es $f'(x) = x^2 + 2x - 3$.

Sustituimos $x = -3$ en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x + 2 \Rightarrow f''(-3) = 2(-3) + 2 = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = -3$.

b) Para $b = -8$ la derivada queda $f'(x) = x^2 - 8x - 3$.

Como la función pasa por el punto $(0, 2)$ tenemos que $f(0) = 2$.

También tenemos que $f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 - 3 = -3$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f'(0) = -3 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -3x \Rightarrow \boxed{y = -3x + 2}$$

4. Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7%:

a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero? [1 punto]

b) Cuánto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos? [1 punto]

a) Llamamos “x”, “y”, “z” a lo invertido en letras, bonos y acciones respectivamente. Obtenemos las ecuaciones con la información proporcionada en el problema.

- Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros $\rightarrow x + y + z = 6000$.
- Invierte en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7% $\rightarrow 0.10 \cdot x + 0.08 \cdot y + 0.04 \cdot z = 0.07 \cdot 6000 \rightarrow 10x + 8y + 4z = 42000$.

Tenemos dos ecuaciones que forman un sistema que resolvemos dejando las soluciones en función de la cantidad invertida en acciones “z”.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6000 \\ 10x + 8y + 4z = 42000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6000 - y - z \\ 5x + 4y + 2z = 21000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(6000 - y - z) + 4y + 2z = 21000 \Rightarrow 30000 - 5y - 5z + 4y + 2z = 21000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9000 = y + 3z \Rightarrow \boxed{y = 9000 - 3z} \Rightarrow \boxed{x = 6000 - 9000 + 3z - z = 2z - 3000}$$

Las cantidades invertidas son $x = 2z - 3000$ e $y = 9000 - 3z$.

Como los valores del dinero invertido debe ser positivo deben cumplirse las desigualdades:

$$\left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 9000 - 3z \geq 0 \\ 2z - 3000 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 9000 \geq 3z \\ 2z \geq 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 3000 \geq z \\ z \geq 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 1500 \leq z \leq 3000$$

El dinero invertido en acciones debe estar comprendido entre 1500 y 3000 euros.

b) Añadimos una nueva ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

Quiere invertir en letras (x) tanto como en los otros dos productos juntos $\rightarrow x = y + z$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6000 \\ 5x + 4y + 2z = 21000 \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2z - 3000 \\ y = 9000 - 3z \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow 2z - 3000 = 9000 - 3z + z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z = 12000 \Rightarrow \boxed{z = 3000} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 3000 - 3000 = 3000} \\ \boxed{y = 9000 - 3 \cdot 3000 = 0} \end{array} \right.$$

Debe invertir 3000 € en letras, 0 € en bonos y otros 3000 € en acciones.

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $A^3 - I = 0$ donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado a. [1 punto]

a) Para que se cumpla $A^3 - I = 0$ debe cumplirse que $A^3 = I$.

Determinamos la expresión de A^3 y comprobamos si obtenemos la matriz identidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & -2+3 \\ 14-21 & -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & 3-3 \\ -14+14 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Es cierto que $A^3 - I = 0$.

b) Como sabemos que $A^3 = I$ lo aplicamos al cálculo de A^{11} .

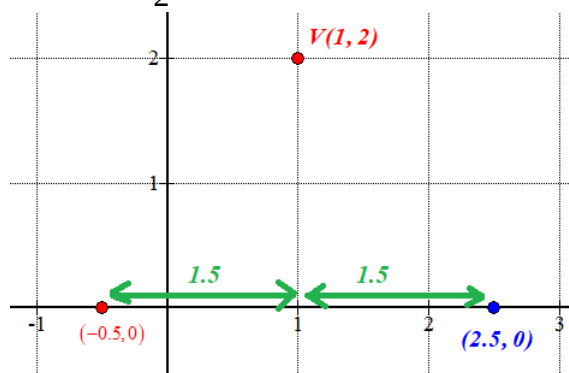
$$A^{11} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = I \cdot I \cdot I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

6. El vértice de una parábola es el punto $(1, 2)$.

a) Si la parábola corta el eje de abscisas en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de abscisas? [1 punto]

b) Encuentre la ecuación de la parábola. [1 punto]

a) Si el vértice de la parábola está situado en $x=1$ y en $x=-\frac{1}{2}$ la función vale 0 la función también vale 0 en el punto simétrico de $x=-\frac{1}{2}$ respecto de 1.



El otro punto es $(2.5, 0)$.

b) La parábola tiene ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabemos que la parábola tiene un extremo relativo en $x=1$, por lo que $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow \boxed{b = -2a}$$

La ecuación de la parábola queda $f(x) = ax^2 - 2ax + c$.

También sabemos que la parábola pasa por el punto $(1, 2)$, por lo que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + c \\ f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 - 2a + c \Rightarrow 2 = -a + c \Rightarrow \boxed{c = 2 + a}$$

La ecuación de la parábola queda $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + a$.

También sabemos que la función pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + 2 + a \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 + a \Rightarrow 0 = \frac{a}{4} + a + 2 + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = a + 4a + 8 + 4a \Rightarrow 9a + 8 = 0 \Rightarrow 9a = -8 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{8}{9}}$$

La ecuación de la parábola queda:

$$f(x) = -\frac{8}{9}x^2 - 2\left(-\frac{8}{9}\right)x + 2 - \frac{8}{9} \Rightarrow f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.$$

PAU junio (serie 5) 2017



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo.

Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad. Sabiendo que se venderá toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo es necesario producir para obtener el máximo beneficio e indique cuál es ese beneficio.

[2 puntos]

2. Una empresa ofrece 225 euros por repartir todo un paquete de hojas de propaganda. Roc, Martí y Guiu deciden hacer el trabajo entre los tres: Martí reparte un 20% del total; Guiu reparte 100 hojas más que Roc, y entre Roc y Martí reparten 850.

a) Calcule el número de hojas que ha repartido cada uno de ellos.

[1 punto]

b) Una vez terminado el trabajo, deciden dividir las ganancias entre los tres, proporcionalmente a las hojas repartidas. Según este criterio, ¿cuánto dinero cobrará Guiu, cuánto cobrará Roc y cuánto Martí?

[1 punto]

3. En 2008 la nómina de un trabajador era de 1.000 euros. En 2009 la empresa donde trabajaba decidió rebajarle la nómina un 10%. El año 2010 con la intención de recuperar la situación económica del trabajador, la empresa decidió incrementar la nómina un 10%.

a) Calcule la nómina del trabajador una vez aplicada la rebaja del 10 % del año 2009.

[0,5 puntos]

b) Calcule la nómina del trabajador después de aplicar el incremento del 10 % del año 2010.

[0,5 puntos]

c) Si una nómina de 1.000 euros ha sufrido una rebaja de un 10 %, ¿qué incremento porcentual se debe aplicar a la nueva nómina para recuperar el sueldo de 1.000 euros?

[1 punto]

4. Las pérdidas o beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, donde $f(t)$ se expresa en cientos de miles de euros, una vez transcurridos t años desde inicio de 2010.
- a) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f(t)$ para $t > 0$, calculando los intervalos de crecimiento, los cortes con los ejes y asíntotas.
[1 punto]
 - b) Al inicio del año 2010, ¿cuántos euros perdía o ganaba la empresa? ¿Qué años tuvo pérdidas la empresa y a partir de qué año dejó de tener?
[0,5 puntos]
 - c) ¿A partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a un centenar de miles de euros? ¿Se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios? Razone las respuestas.
[0,5 puntos]
5. El precio en euros de una piedra preciosa es cinco veces el cuadrado de su peso en gramos. Si tenemos una piedra preciosa de 8 gramos y nos planteamos partirla en dos trozos:
- a) ¿Qué peso debe tener cada uno de los trozos para que el conjunto valga lo menos posible?
[1 punto]
 - b) ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo que puede valer este conjunto?
[1 punto]
6. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Calcule el valor del parámetro a para el cual se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$.
[1 punto]
 - b) Para el valor $a = 2$, encuentre una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo.

Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad. Sabiendo que se venderá toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo es necesario producir para obtener el máximo beneficio e indique cuál es ese beneficio. [2 puntos]

Llamamos “x” al número de anillos modelo A e “y” al número de anillos modelo B que se fabrican. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Gramos plata	Horas de trabajo	Beneficio
Nº anillos A (x)	6x	3x	35x
Nº anillos B (y)	2y	6y	55y
TOTALES	$6x + 2y$	$3x + 6y$	$35x + 55y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y que viene expresado como

$$B(x, y) = 35x + 55y.$$

Las restricciones son:

- Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos $\rightarrow 6x + 2y \leq 150; 3x + 6y \leq 180$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y \leq 150 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 75 \\ x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 75 - 3x \\ 2y \leq 60 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$y = 75 - 3x$$

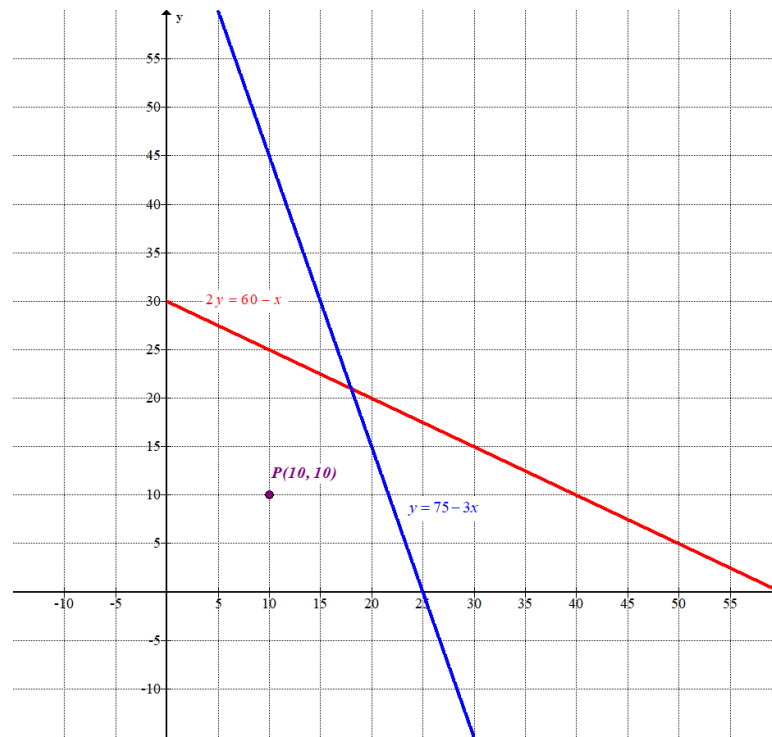
x	y = 75 - 3x
0	75
18	21
25	0

$$2y = 60 - x$$

x	y = $\frac{60 - x}{2}$
0	30
18	21
60	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

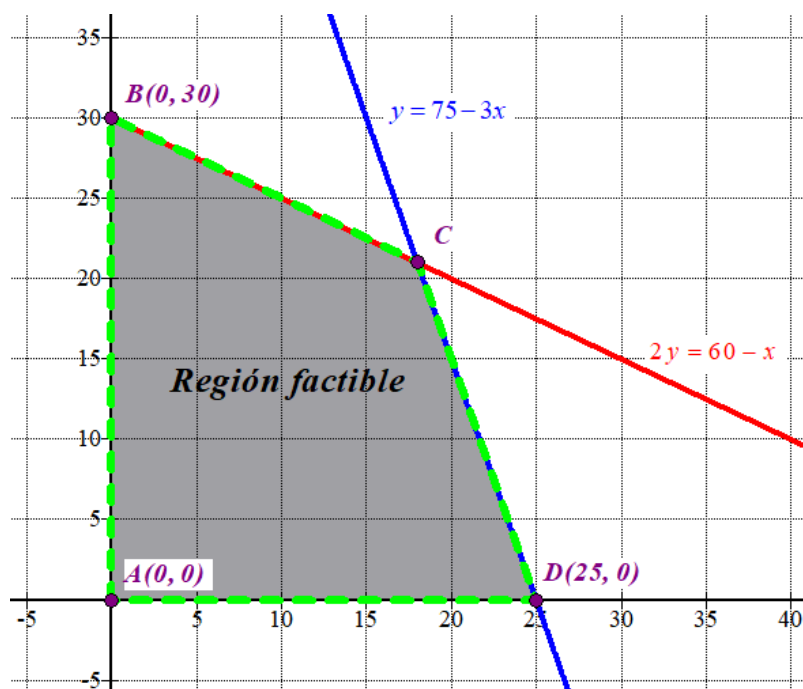


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \leq 75 - 3x \\ 2y \leq 60 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 75 - 30 \\ 20 \leq 60 - 10 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} y = 75 - 3x \\ 2y = 60 - x \end{cases} \Rightarrow 2(75 - 3x) = 60 - x \Rightarrow 150 - 6x = 60 - x \Rightarrow 90 = 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{90}{5} = 18 \Rightarrow y = 75 - 3 \cdot 18 = 21 \Rightarrow C(18, 21)$$

Valoramos la función beneficio en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 35 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 1650$
- $C(18, 21) \rightarrow B(18, 21) = 35 \cdot 18 + 55 \cdot 21 = 1785$ ¡Máximo!
- $D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 35 \cdot 25 + 55 \cdot 0 = 875$

El máximo beneficio se consigue fabricando y vendiendo 18 anillos del modelo A y 21 del modelo B. Este beneficio máximo es de 1785 euros.

2. Una empresa ofrece 225 euros por repartir todo un paquete de hojas de propaganda. Roc, Martí y Guiu deciden hacer el trabajo entre los tres: Martí reparte un 20% del total; Guiu reparte 100 hojas más que Roc, y entre Roc y Martí reparten 850.
- a)** Calcule el número de hojas que ha repartido cada uno de ellos. [1 punto]
- b)** Una vez terminado el trabajo, deciden dividir las ganancias entre los tres, proporcionalmente a las hojas repartidas. Según este criterio, ¿cuánto dinero cobrará Guiu, cuánto cobrará Roc y cuánto Martí? [1 punto]

a) Llamamos x , y , z al número de hojas que reparte Roc, Martí y Guiu, respectivamente.

- Martí reparte un 20% del total $\rightarrow y = 0.20(x + y + z)$.
- Guiu reparte 100 hojas más que Roc $\rightarrow z = x + 100$.
- Entre Roc y Martí reparten 850 $\rightarrow x + y = 850$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0.20(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10y = 2(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = x + y + z \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - x - z = 0 \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(850 - x) - x - x - 100 = 0 \Rightarrow 3400 - 4x - 2x - 100 = 0 \Rightarrow 3300 = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3300}{6} = 550} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 550 + 100 = 650} \\ \boxed{y = 850 - 550 = 300} \end{cases}$$

Roc reparte 550 hojas, Martí reparte 300 y Guiu 650 hojas. En total reparten $550 + 300 + 650 = 1500$ hojas.

b) Por repartir 1500 hojas se obtiene 225 euros. Se cobra por cada hoja $\frac{225}{1500} = 0.15$ euros.

Roc recibe $0.15 \cdot 550 = 82.5$ euros, Martí recibe $0.15 \cdot 300 = 45$ euros y Guiu recibe $0.15 \cdot 650 = 97.5$.

- 3.** En 2008 la nómina de un trabajador era de 1.000 euros. En 2009 la empresa donde trabajaba decidió rebajarle la nómina un 10%. El año 2010 con la intención de recuperar la situación económica del trabajador, la empresa decidió incrementar la nómina un 10%.
- a)** Calcule la nómina del trabajador una vez aplicada la rebaja del 10 % del año 2009. [0,5 puntos]
- b)** Calcule la nómina del trabajador después de aplicar el incremento del 10 % del año 2010. [0,5 puntos]
- c)** Si una nómina de 1.000 euros ha sufrido una rebaja de un 10 %, ¿qué incremento porcentual se debe aplicar a la nueva nómina para recuperar el sueldo de 1.000 euros? [1 punto]

- a) Le rebajan el sueldo $0.10 \cdot 1000 = 100$ euros y pasa a cobrar $1000 - 100 = 900$ euros.
- b) En el año 2009 cobraba 900 euros y en el año 2010 le suben un 10% lo que significa un aumento de $0.10 \cdot 900 = 90$ euros, por lo que pasa a cobrar $900 + 90 = 990$ euros.
- c) Como de 1000 € pasa a cobrar 900 € debemos de buscar un incremento de 100 €. Con una subida porcentual de un x % le deben subir 100 €. Resolvemos una regla de tres.

$$\left. \begin{array}{l} 900 \longrightarrow 100 \\ 100 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow 900x = 100 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{10000}{900} = \frac{100}{9} \approx 11.11$$

No se consigue recuperar exactamente el sueldo inicial, pero se aproxima bastante con una subida del 11.11 %.

Lo comprobamos. Una subida del 11.11% le supone un incremento en su sueldo de $900 \cdot 0.1111 = 99.99$ euros.

4. Las pérdidas o beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, donde $f(t)$ se expresa en cientos de miles de euros, una vez transcurridos t años desde inicio de 2010.
- a) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f(t)$ para $t > 0$, calculando los intervalos de crecimiento, los cortes con los ejes y asíntotas. [1 punto]
- b) Al inicio del año 2010, ¿cuántos euros perdía o ganaba la empresa? ¿Qué años tuvo pérdidas la empresa y a partir de qué año dejó de tener? [0,5 puntos]
- c) ¿A partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a un centenar de miles de euros? ¿Se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios? Razone las respuestas. [0,5 puntos]

a) El dominio de la función es $(0, +\infty)$. La función es continua, pues el denominador se anula en $t = -2$ que no pertenece al dominio de definición de la función.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \frac{3t-6}{t+2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3t-6}{t+2} = 0 \Rightarrow 3t-6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

La gráfica corta el eje de abscisas en $A(2, 0)$. No corta el eje de ordenadas pues $t = 0$ no pertenece al dominio de la función.

Hallamos las asíntotas.

No tiene asíntotas verticales pues la función no presenta discontinuidades en $(0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t-6}{t+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3t}{t} - \frac{6}{t}}{\frac{t}{t} + \frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{6}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = \frac{3 - \frac{6}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{3-0}{1+0} = \boxed{3}$$

La función tiene una asíntota horizontal: $y = 3$ cuando t tiende a $+\infty$.

No tiene asíntota oblicua, pues tiene una asíntota horizontal.

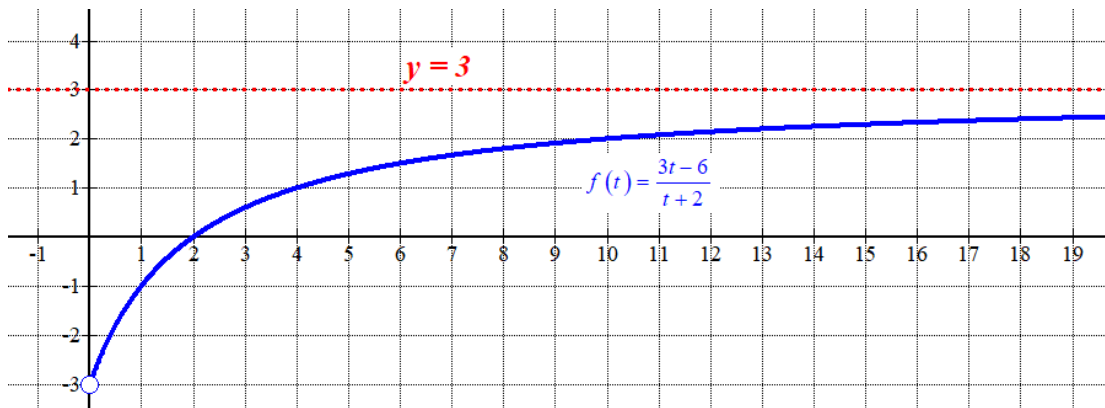
Hallamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(t) = \frac{3t-6}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{3(t+2) - (3t-6) \cdot 1}{(t+2)^2} = \frac{3t+6-3t+6}{(t+2)^2} = \frac{12}{(t+2)^2}$$

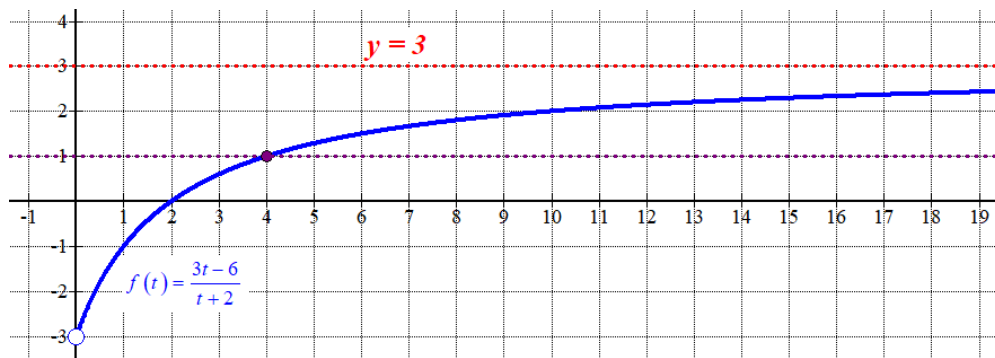
Con esta expresión de la derivada sabemos que el signo de la derivada va a ser siempre positivo, por lo que la función siempre crece.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$
0	-3 No incluido
1	-1
2	0
4	1



- b) Al inicio del año 2010 la empresa perdía 3 cientos de miles de euros. La empresa dejó de tener pérdidas el segundo año (2012). A partir de ahí tuvo ganancias.
- c) Nos preguntan a partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a 1 centenar de miles de euros, es decir, a partir de que momento la función toma valores mayores o iguales que 1. Mirando en la gráfica vemos que eso ocurre a partir del cuarto año (2014).



También nos preguntan si se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios. Es lo mismo que preguntar si la función supera el valor de 3. Esto no ocurre pues en la gráfica se observa que hay una asíntota que indica que la función siempre toma valores inferiores a 3.

5. El precio en euros de una piedra preciosa es cinco veces el cuadrado de su peso en gramos. Si tenemos una piedra preciosa de 8 gramos y nos planteamos partirla en dos trozos:

- a)** ¿Qué peso debe tener cada uno de los trozos para que el conjunto valga lo menos posible?
[1 punto]
- b)** ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo que puede valer este conjunto?
[1 punto]

a) Llamamos $P(x)$ al precio de una piedra preciosa en función de su peso " x ".

La piedra pesa 8 gramos y la partimos en dos trozos, uno de ellos pesa x y el otro $8 - x$.

El precio $P(x)$ de los dos trozos es $P(x) = 5x^2 + 5(8 - x)^2$, siendo x un valor comprendido entre 0 y 8 gramos.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$P(x) = 5x^2 + 5(8 - x)^2 \Rightarrow P'(x) = 10x + 10(8 - x)(-1) = 10x - 80 + 10x = 20x - 80$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 20x - 80 = 0 \Rightarrow 20x = 80 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 4$. Estudiamos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$P'(x) = 20x - 80 \Rightarrow P''(x) = 20 \Rightarrow P''(4) = 20 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

Partiendo la piedra preciosa de 8 gramos en dos trozos de 4 gramos obtenemos un precio mínimo.

b) Valoramos la función en el mínimo relativo y en los extremos del intervalo $[0, 8]$.

$$P(0) = 5 \cdot 0^2 + 5(8 - 0)^2 = 320$$

$$P(4) = 5 \cdot 4^2 + 5(8 - 4)^2 = 160$$

$$P(8) = 5 \cdot 8^2 + 5(8 - 8)^2 = 320$$

El precio mínimo es de 160 euros partiendo la piedra en dos trozos iguales y el máximo es 320 € dejando la piedra sin romper.

6. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el valor del parámetro a para el cual se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punto]

b) Para el valor $a = 2$, encuentre una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2-2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{aligned}$$

Para $a=1$ se cumple lo pedido.

b) Para el valor $a = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X \cdot A = B \Rightarrow X = A^{-1} B A^{-1}$$

Hallamos la inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X = A^{-1} B A^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -2-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -4-6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PAU Junio (serie 1) 2017



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. De una función $y = f(x)$ se sabe que su derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$.
 - a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = f(x)$.
[1 punto]
 - b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.
[1 punto]

2. Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentajes del 0% al 100%, queda perfectamente descrita por la expresión $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en la que el tiempo t varía entre 0 y 4 minutos.
 - a) Calcule para qué valor de t el porcentaje de intensidad lumínica será máxima.
[1 punto]
 - b) Si desde la costa la bengala sólo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75%, ¿cuál es el intervalo de tiempo en el que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento?
[1 punto]

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$.
 - a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$.
[1 punto]
 - b) Determine m y n para que las matrices B y C conmuten, es decir, $B \cdot C = C \cdot B$.
[1 punto]

4. Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.
- a) Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta.
[1 punto]
- b) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas.
[1 punto]
5. Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona - El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones del tipo A, que pueden transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo B, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo A cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo B cuesta 1.000:
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía.
[1 punto]
- b) Calcule el número de aviones de cada tipo a contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es ese coste mínimo.
[1 punto]
6. Considere la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, con b y c números reales.
- a) Encuentre b y c de manera que la gráfica de la función pase por el punto $(-1, 0)$ y tenga un extremo local en el punto de abscisas $x = 3$. Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.
[1 punto]
- b) Para el caso $b = 3$ y $c = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta $y = 5x - 2$.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. De una función $y = f(x)$ se sabe que su derivada es $f'(x) = x^3 - 4x$.

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $y = f(x)$.

[1 punto]

b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

[1 punto]

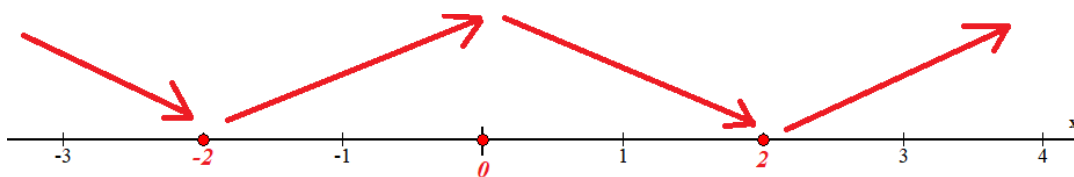
a) Hallamos los puntos críticos de la función que son los valores que anulan la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x^3 - 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Tenemos tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ consideramos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15 < 0$. La función decrece en $(-\infty, -2)$.
- En el intervalo $(-2, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (-1)^3 - 4(-1) = 3 > 0$. La función crece en $(-2, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ consideramos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 = 15 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y crece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

b) Con lo obtenido en el apartado anterior podemos decir que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$ y dos mínimos relativos, uno en $x = -2$ y otro en $x = 2$.

2. Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentajes del 0% al 100%, queda perfectamente descrita por la expresión $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en la que el tiempo t varía entre 0 y 4 minutos.

a) Calcule para qué valor de t el porcentaje de intensidad lumínica será máxima. [1 punto]

b) Si desde la costa la bengala sólo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75%, ¿cuál es el intervalo de tiempo en el que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento? [1 punto]

a) Obtenemos la expresión polinómica de la función: $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t) = 100t - 25t^2$.

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$L(t) = 100t - 25t^2 \Rightarrow L'(t) = 100 - 50t$$

$$L'(t) = 0 \Rightarrow 100 - 50t = 0 \Rightarrow 50t = 100 \Rightarrow t = 2 \in [0, 4]$$

Determinamos el signo de la derivada segunda para $t = 2$.

$$L'(t) = 100 - 50t \Rightarrow L''(t) = -50 \Rightarrow L''(2) = -50 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, para $t = 2$ la función tiene un valor máximo de

$$L(2) = 25 \cdot 2 \cdot (4 - 2) = 100 \text{ \% de intensidad lumínica.}$$

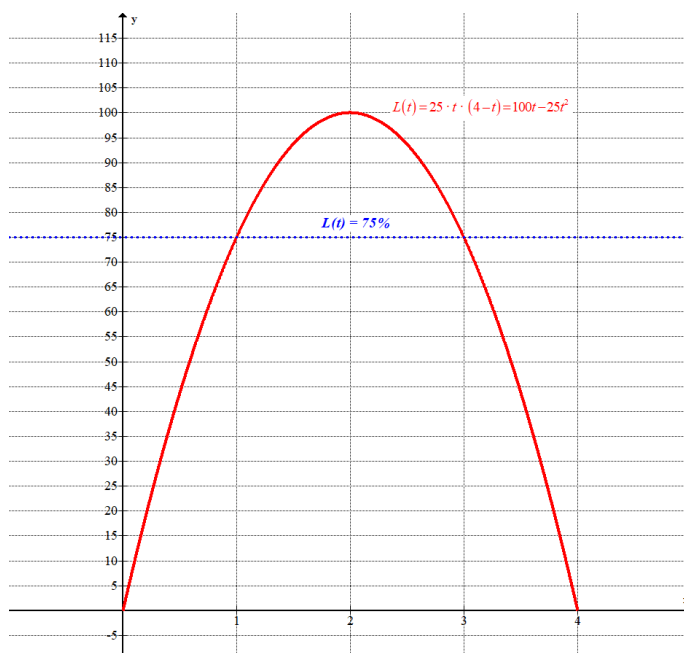
b) Averiguamos cuando la intensidad lumínica es del 75%.

$$L(t) = 75 \Rightarrow 100t - 25t^2 = 75 \Rightarrow 25t^2 - 100t + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = t \\ \frac{4-2}{2} = 1 = t \end{cases}$$

Con lo obtenido tenemos que pasado 1 minuto la intensidad lumínica es del 75%, sube hasta que en el minuto 2 alcanza una luminosidad del 100% y a partir de ahí baja hasta que en el minuto 3 está de nuevo al 75% de intensidad lumínica.

La intensidad lumínica es superior al 75% entre el minuto 1 y el 3.



3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que se cumple la igualdad $(A-B) \cdot (A+B) = A^2 - B^2$. [1 punto]

b) Determine m y n para que las matrices B y C conmuten, es decir, $B \cdot C = C \cdot B$. [1 punto]

a) Determinamos la matriz resultante del primer miembro de la igualdad.

$$\left. \begin{aligned} A-B &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A-B) \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+24 & 6+4 \\ 4+6 & 24+1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz resultante del segundo miembro de la igualdad.

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+25 & 5+5 \\ 5+5 & 25+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que se obtiene el mismo resultado.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ 1 = n \\ -1 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m = -1} \\ \boxed{n = 1} \end{cases}$$

Para que las matrices B y C conmuten debe ser $m = -1$ y $n = 1$.

- 4.** Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.
- a)** Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta. [1 punto]
- b)** Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas. [1 punto]

- a) Llamamos x , y , z al número de monedas de 1 euro apiladas en la primera, segunda y tercera pilas. Si pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda tendríamos $12 + y$ en la segunda pila y $z - 12$ en la tercera. Si a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera tendríamos $12 + y - 10 = y + 2$ en la segunda pila y $x + 10$ en la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas. Lo expresamos en un sistema de ecuaciones.

$$x + 10 = z - 12 = y + 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 8 = y \\ x + 22 = z \end{array} \right\}$$

No podemos determinar el número de monedas de 1 euro que hay en cada pila. Nos falta algún dato más.

- b) Si en total hay 51 monedas podemos añadir una tercera ecuación al sistema: $x + y + z = 51$. Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 8 = y \\ x + 22 = z \\ x + y + z = 51 \end{array} \right\} \Rightarrow x + x + 8 + x + 22 = 51 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow \boxed{x = 7} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 7 + 8 = 15} \\ \boxed{z = 7 + 22 = 29} \end{array} \right.$$

Hay 7 monedas en la primera pila, 15 en la segunda y 29 en la tercera.

5. Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona - El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones del tipo A, que pueden transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo B, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo A cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo B cuesta 1.000:

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía. [1 punto]
- b) Calcule el número de aviones de cada tipo a contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es ese coste mínimo. [1 punto]

a) Llamamos “x” al número aviones tipo A e “y” al número de aviones tipo B que se contratan. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Nº pasajeros	Toneladas de carga	Coste
Nº aviones A (x)	200x	6x	4000x
Nº aviones B (y)	100y	15y	1000y
TOTALES	200x + 100y	6x + 15y	4000x + 1000y

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y que viene expresado como

$$C(x, y) = 4000x + 1000y.$$

Las restricciones son:

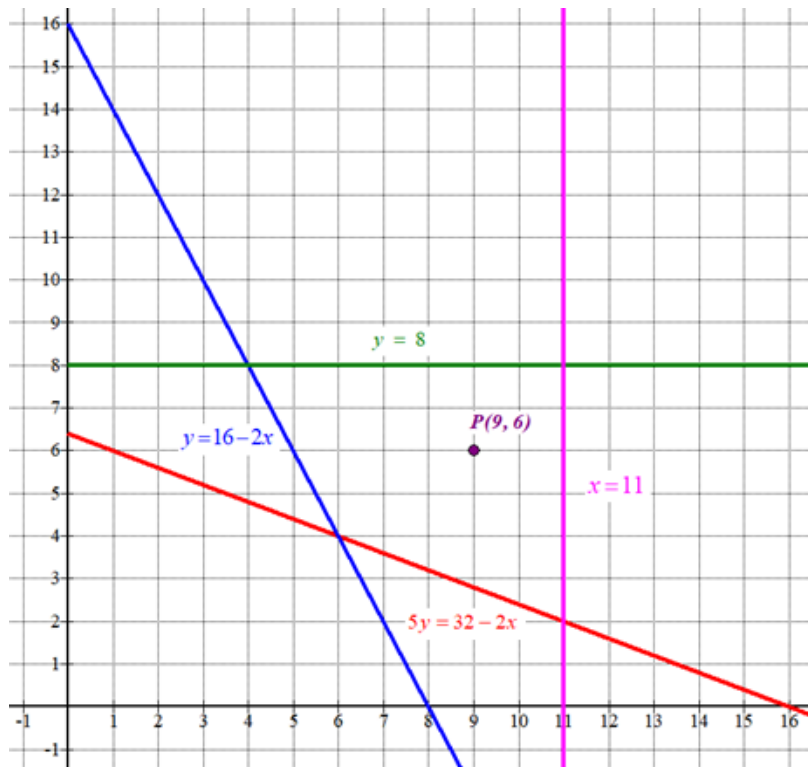
- Con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías $\rightarrow 200x + 100y \geq 1600$; $6x + 15y \geq 96$.
- Tiene a su disposición 11 aviones del tipo A y 8 aviones del tipo B $\rightarrow x \leq 11$; $y \leq 8$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 100y \geq 1600 \\ 6x + 15y \geq 96 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 16 \\ 2x + 5y \geq 32 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 16 - 2x \\ 5y \geq 32 - 2x \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = 16 - 2x$	$5y = 32 - 2x$	$x = 11$	$y = 8$	$x \geq 0; y \geq 0$																																																
<table> <tr><td>x</td><td> </td><td>y = 16 - 2x</td></tr> <tr><td>0</td><td> </td><td>16</td></tr> <tr><td>6</td><td> </td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td> </td><td>0</td></tr> </table>	x		y = 16 - 2x	0		16	6		4	8		0	<table> <tr><td>x</td><td> </td><td>y = $\frac{32 - 2x}{5}$</td></tr> <tr><td>0</td><td> </td><td>6.4</td></tr> <tr><td>6</td><td> </td><td>4</td></tr> <tr><td>16</td><td> </td><td>0</td></tr> </table>	x		y = $\frac{32 - 2x}{5}$	0		6.4	6		4	16		0	<table> <tr><td>x = 11</td><td> </td><td>y</td></tr> <tr><td>11</td><td> </td><td>2</td></tr> <tr><td>11</td><td> </td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td> </td><td>8</td></tr> </table>	x = 11		y	11		2	11		4	11		8	<table> <tr><td>x</td><td> </td><td>y = 8</td></tr> <tr><td>0</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td> </td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td> </td><td>8</td></tr> </table>	x		y = 8	0		8	4		8	11		8	Primer cuadrante
x		y = 16 - 2x																																																		
0		16																																																		
6		4																																																		
8		0																																																		
x		y = $\frac{32 - 2x}{5}$																																																		
0		6.4																																																		
6		4																																																		
16		0																																																		
x = 11		y																																																		
11		2																																																		
11		4																																																		
11		8																																																		
x		y = 8																																																		
0		8																																																		
4		8																																																		
11		8																																																		



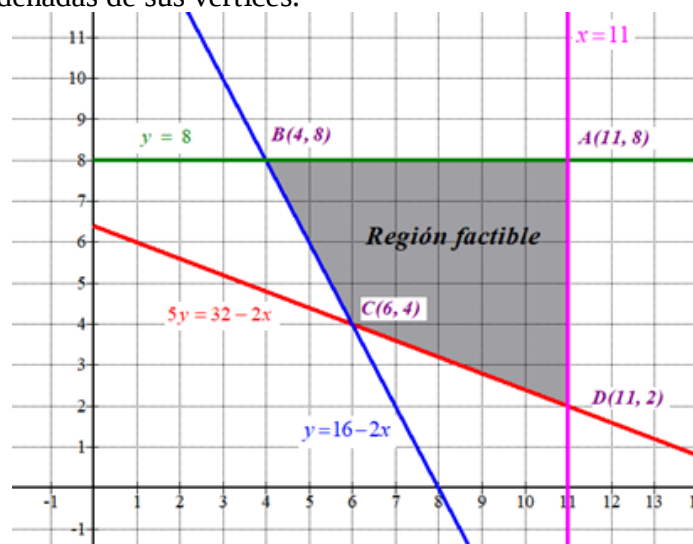
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 16 - 2x \\ 5y \geq 32 - 2x \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por encima de las rectas oblicuas de color azul y rojo, por debajo de la recta horizontal y a la izquierda de la recta vertical. Lo comprobamos viendo si el punto $P(9, 6)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6 \geq 16 - 2 \cdot 9 \\ 5 \cdot 6 \geq 32 - 2 \cdot 9 \\ 9 \leq 11 \\ 6 \leq 8 \\ 9 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoramos la función coste $C(x, y) = 4000x + 1000y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(11, 8) \rightarrow C(11, 8) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52000$$

$$B(4, 8) \rightarrow C(4, 8) = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24000 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(6, 4) \rightarrow C(6, 4) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28000$$

$$D(11, 2) \rightarrow C(8, 0) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46000$$

El coste mínimo cumpliendo con las restricciones del problema es de 24 000 euros y se consigue contratando 4 aviones del tipo A y 8 del tipo B.

6. Considere la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, con b y c números reales.

a) Encuentre b y c de manera que la gráfica de la función pase por el punto $(-1, 0)$ y tenga un extremo local en el punto de abscisas $x = 3$. Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.

[1 punto]

b) Para el caso $b = 3$ y $c = 2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta $y = 5x - 2$.

[1 punto]

a) Si la función tiene un extremo relativo en $x = 3$ se cumple que la derivada se anula para este valor $\rightarrow f'(3) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = -2x + b \\ f'(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

La función queda $f(x) = -x^2 + 6x + c$.

Como la función pasa por el punto $(-1, 0)$ se cumple que $f(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(x) = -x^2 + 6x + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -(-1)^2 + 6(-1) + c \Rightarrow 0 = -1 - 6 + c \Rightarrow \boxed{c = 7}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $b = 6$ y $c = 7$.

La función queda $f(x) = -x^2 + 6x + 7$.

Obtenemos el signo de la segunda derivada de la función en $x = 3$.

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada la función tiene un máximo relativo en $x = 3$.

b) Para el caso $b = 3$ y $c = 2$ la función queda $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

Nos piden hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta $y = 5x - 2$, por lo que la pendiente de la recta tangente debe ser la misma que la recta dada, es decir, 5. La derivada de la función debe valer 5.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x + 3 \\ f'(x) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = -2x + 3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Determinamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) + 2 = -2 \\ f'(-1) = 5 \\ y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = 5(x + 1) \Rightarrow y + 2 = 5x + 5 \Rightarrow \boxed{y = 5x + 3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta $y = 5x - 2$ tiene ecuación $y = 5x + 3$.