

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PAU

CURSO 2025–2026

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Convocatoria:

Pregunta 1 (2 puntos): OBLIGATORIA. Sentido estocástico

Después de una campaña de vacunación contra la gripe, las autoridades de una región afirman que el 55% de su población de riesgo está inmunizada.

- (1 punto) Si se toman al azar 8 habitantes de esa población de riesgo, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo 7 no estén inmunizados contra la gripe?
- (1 punto) Si se toman al azar 80 habitantes de esa población de riesgo, ¿cuál es la probabilidad de que el número de inmunizados contra la gripe sea mayor que 48?

Solución

El 55% están inmunizados $\Rightarrow p = 0.55$. Sea X = “número de no inmunizados en la muestra”, $p_{no} = 0.45$.

a) $P(\text{A lo sumo 7 no estén inmunizados}) = P(X \leq 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0.45^8 = 0.9983$.

b) Sea Y el número de inmunizados. Entonces $Y \sim B(80, 0.55)$ y como $n > 30$, $np > 5$ y $n(1 - p) > 5$ podemos aproximar:

$$Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}) \equiv N(80 \cdot 0.55, \sqrt{80 \cdot 0.55 \cdot 0.45}) \equiv N(44, 4.4497)$$

La probabilidad de que haya más de 48 inmunizados es entonces:

$$P(Y > 48) = 1 - P(Y \leq 48) \cong 1 - P\left(Z \leq \frac{48.5 - 44}{4.4497}\right) = 1 - 0.8441 = 0.1559$$

Pregunta 2 (3 puntos): OBLIGATORIA. Sentido de la medida

Una empresa informática ha lanzado una nueva aplicación de mensajería móvil. Se observa que, de todos los usuarios de telefonía móvil registrados, el porcentaje de los que descargan esta aplicación evoluciona de acuerdo a la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} -\frac{6}{10}t^2 + 12t, & 0 \leq t \leq 15, \\ \frac{8t - 75}{t - 14}, & t > 15. \end{cases}$$

siendo el tiempo (en meses) desde que se lanzó la aplicación.

a) (0.5 ptos) ¿Es continua esta función?

b) (1.5 ptos) Indicar, usando derivadas, cuándo la función es creciente o decreciente. ¿En qué momento se observa el porcentaje máximo de descargas? ¿Cuánto vale dicho porcentaje? Representa gráficamente la función.

c) (0,5 puntos) Se desea estudiar cómo evolucionan las descargas de la aplicación en un barrio de la ciudad cuya forma está delimitada por la recta $y = 0$ y la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ (unidades en km). Calcula el área del barrio (en km^2) usando integración.

d) (0,5 puntos) Suponiendo que la densidad de usuarios de telefonía móvil en la zona es de 5000 usuarios por km^2 , determina el número total de usuarios de telefonía móvil en el barrio. ¿Cuántos usuarios de ese barrio se descargarán la aplicación a los 10 meses desde su lanzamiento?

Solución

a) El primer trozo de la función ($0 \leq t \leq 15$) es una función polinómica y por tanto es continua; el segundo trozo ($t > 15$) es una función racional cuyo denominador solo se anula para $t = 14$ que cae fuera del dominio de esta parte de la función; por tanto este trozo también es continuo. Hay que comprobar la continuidad en $t = 15$:

- La función está definida en ese punto: $P(15) = -\frac{6}{10}15^2 + 12 \cdot 15 = 45$
- Los límites por la izquierda y por la derecha coinciden con el valor anterior:

$$\lim_{t \rightarrow 15^-} P(t) = -\frac{6}{10}15^2 + 12 \cdot 15 = 45$$

$$\lim_{t \rightarrow 15^+} P(t) = \frac{8 \cdot 15 - 75}{15 - 14} = 45$$

Como coinciden y el valor está definido, la función es continua.

b) Crecimiento / decrecimiento. Derivando e igualando a 0 en el primer tramo se obtiene $P_1'(t) = -1.2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 10$. La segunda derivada es $P_1''(t) = -1.2 < 0$. Por tanto $t = 10$ es un máximo. y la función es creciente en $[0,10]$ y decreciente en $(10,15]$.

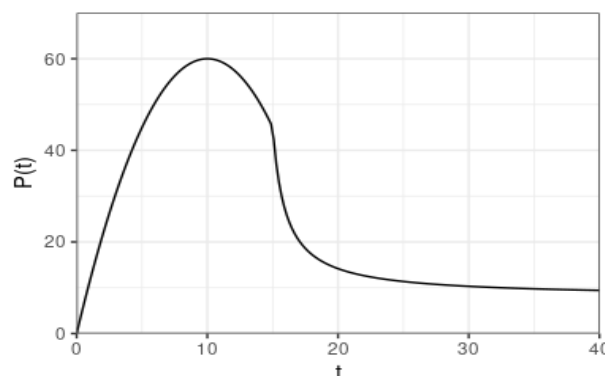
La derivada del segundo tramo de la función es:

$$P_2'(t) = \frac{8(t-14) - (8t-75)}{(t-14)^2} = \frac{-37}{(t-14)^2} < 0 \quad \text{para } t > 15.$$

Luego P_2 es decreciente para $t > 15$.

Por tanto la función presenta un máximo global en $t = 10$. El porcentaje máximo de descargas es el valor de la función en ese punto, es decir $P(10) = -0.6 \cdot 100 + 12 \cdot 10 = 60$. Así pues el porcentaje máximo de descargas es del 60% y se alcanza a los 10 meses de lanzada la aplicación.

La gráfica de la función es:



c) Para calcular el área del barrio delimitado por $y = 0$ y $y = -x^2 + 6x - 5$ hallamos en primer lugar los puntos de corte de la parábola con $y = 0$:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

El área del barrio es entonces:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \\ &= (-125/3 + 75 - 25) - (-1/3 + 3 - 5) = \\ &= 25/3 - (-7/3) = 32/3 \text{ km}^2 \approx 10.6667 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

d) Como la densidad es de 5000 usuarios/km², el número de usuarios en el barrio será:

$$N = 5000 \cdot A = 5000 \cdot \frac{32}{3} = \frac{160000}{3} \approx 53\,333 \text{ usuarios.}$$

Los que descargarán la app a los 10 meses serán entonces 60% de N :

$$N_{\text{descargas}} = 0.6 \cdot N = 0.6 \cdot \frac{160000}{3} = \frac{96\,000}{3} = 32\,000 \text{ usuarios.}$$

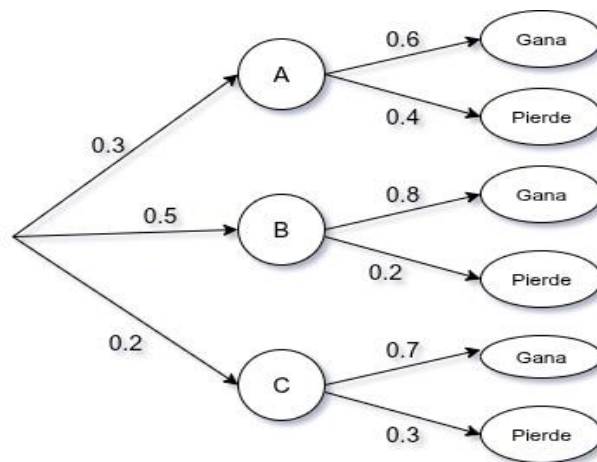
Pregunta 3 (2 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 3.1 Y 3.2. Sentido estocástico

3.1 (2 puntos) Una empresa informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de esos casos, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de esos casos, mientras que el bufete C recibe el resto de los casos legales, de los cuales gana el 70%. Se elige al azar uno de los casos legales de la empresa presentados en los tribunales.

- (0.5 pts) Representar el árbol de probabilidades.
- (0.75 pts) Calcular la probabilidad de que la empresa gane el caso.
- (0.75 pts) Si el caso elegido se pierde en los tribunales, calcular la probabilidad de que se haya hecho cargo el bufete C.

Solución

a) Árbol de probabilidades.



b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(\text{Gana}) &= P(A)P(G|A) + P(B)P(G|B) + P(C)P(G|C) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.7 = \\ &= 0.18 + 0.40 + 0.14 = 0.72. \end{aligned}$$

c) Si el caso se pierde, la probabilidad de que lo llevase el bufete C se calcula mediante el teorema de Bayes:

$$P(C|\text{Pierde}) = \frac{P(\text{Pierde}|C)P(C)}{P(\text{Pierde})} = \frac{0.3 \cdot 0.2}{1 - P(\text{Gana})} = \frac{0.06}{1 - 0.72} = 0.2143$$

3.2 (2 puntos) En cierta comunidad, el gasto realizado por cada persona en las rebajas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

- a) (1 pto) Se toma una muestra aleatoria simple de individuos y se obtiene el intervalo de confianza $[251,6; 271,2]$ para μ , con un nivel de confianza del 95%. Calcular la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- b) (1 pto) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ . Calcular el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

Solución

a) El IC al 95% para μ es $[251,6, 271,2]$. Como la media muestral es el centro del intervalo:

$$\bar{x} = \frac{251,6 + 271,2}{2} = 261,4 \text{ €}.$$

El error es la mitad de la longitud del intervalo:

$$E = \frac{271,2 - 251,6}{2} = 9,8.$$

Con $\sigma = 45$ y nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$. Entonces:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 9,8 = 1,96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}}$$

Despejando:

$$\sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 45}{9,8} = \frac{88,2}{9,8} = 9 \Rightarrow n = 81.$$

b) Para $n = 64$ y nivel de confianza $1 - \alpha = 0.90\%$: $z_{\alpha/2} = 1,645$. Error máximo:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{45}{\sqrt{64}} = 1,645 \cdot \frac{45}{8} \approx 9,25 \text{ €}.$$

Pregunta 4 (3 puntos): ELEGIR UNA OPCIÓN ENTRE 4.1 Y 4.2. Sentido numérico y algebraico
--

4.1 Canarias experimenta un aumento de los turistas que visitan las islas por lo que, para maximizar sus beneficios, una empresa quiere ampliar su flota de vehículos de alquiler. La empresa tiene previsto adquirir un máximo de 150 vehículos. Además, la experiencia indica que debe comprar un mínimo de 20 vehículos de gama alta y, como máximo, 120 de gama media. Asimismo, los vehículos de gama media deben ser, al menos, el doble que los de gama alta.

Si se espera obtener un beneficio anual de 2000€ por cada vehículo de gama media y 3000€ por cada uno de gama alta:

a) (0,75 puntos) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

- b) (1.5 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo deben adquirir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio máximo?
- c) (0.75 puntos) Debido a los requisitos de limitación de emisiones contaminantes, la empresa finalmente decide adquirir 35 vehículos de gama alta y 110 de gama media, lo que le permite acogerse a una subvención de 150€ adicionales de beneficio por cada coche de gama media. ¿Cumple esta elección los requisitos del problema? ¿Compensa la subvención los beneficios que dejan de generarse por no elegir la solución óptima del apartado b)?

Solución

Definimos variables:

- m = número de vehículos de gama media.
- h = número de vehículos de gama alta.

a) Formulación del problema de programación lineal.

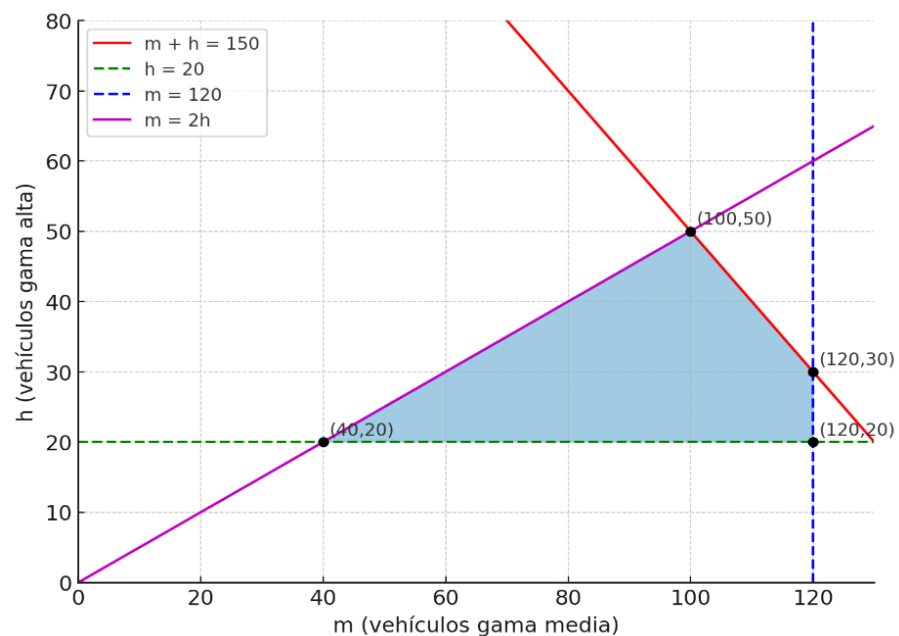
Maximizar

$$Z = 2000m + 3000h$$

sujeto a

$$\begin{cases} m + h \leq 150 & (\text{máx. 150 vehículos}), \\ h \geq 20 & (\text{mínimo 20 de gama alta}), \\ m \leq 120 & (\text{máx. 120 de gama media}), \\ m \geq 2h & \\ m \geq 0, h \geq 0 & . \end{cases}$$

b) Región factible



Los vértices de la región factible son:

1. $A = (m, h) = (40, 20)$ (intersección $m = 2h$ con $h = 20$),
2. $B = (120, 20)$ (intersección $m = 120$ con $h = 20$),
3. $C = (120, 30)$ (intersección $m = 120$ con $m + h = 150$),
4. $D = (100, 50)$ (intersección $m = 2h$ con $m + h = 150$).

c) Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Calculemos $Z = 2000m + 3000h$ en cada vértice:

- $A(40,20)$: $Z = 2000 \cdot 40 + 3000 \cdot 20 = 80\,000 + 60\,000 = 140\,000$ €.
- $B(120,20)$: $Z = 2000 \cdot 120 + 3000 \cdot 20 = 240\,000 + 60\,000 = 300\,000$ €.
- $C(120,30)$: $Z = 2000 \cdot 120 + 3000 \cdot 30 = 240\,000 + 90\,000 = 330\,000$ €.
- $D(100,50)$: $Z = 2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 50 = 200\,000 + 150\,000 = 350\,000$ €.

Por tanto la solución óptima es comprar 100 vehículos de gama media y 50 de gama alta, lo que producirá un beneficio de 350.000€

d) Finalmente la empresa decide $h = 35$ y $m = 110$. Comprobamos si esta elección cumple las restricciones:

- Total $m + h = 110 + 35 = 145 \leq 150$ ✓.
- $h \geq 20$: $35 \geq 20$ ✓.
- $m \leq 120$: $110 \leq 120$ ✓.
- $m \geq 2h$: $110 \geq 2 \cdot 35 = 70$ ✓.

Por tanto sí cumple todas las restricciones del problema.

El beneficio con esa elección sin subvención:

$$Z_{\text{elec}} = 2000 \cdot 110 + 3000 \cdot 35 = 220\,000 + 105\,000 = 325\,000 \text{ €}.$$

La subvención añade 150 € por cada coche de gama media, es decir, un ingreso adicional de $150 \cdot 110 = 16\,500$ €. El beneficio total con la subvención es, pues:

$$325\,000 + 16\,500 = 341\,500 \text{ €}.$$

que es menor que el obtenido con la solución óptima (350,000 €). Por tanto, la elección cumple los requisitos pero la subvención no compensa totalmente la pérdida frente a la solución óptima: la empresa se queda 8 500€ por debajo del máximo posible.

4.2 Ciento diez alumnos que superaron la EBAU el año anterior se han matriculado en el presente curso en carreras universitarias de ciencias, ciencias sociales e ingenierías. Por cada seis alumnos que se han matriculado en ciencias sociales, hay dos que se han matriculado en ingenierías; y los que lo han hecho en ciencias sociales superan en diez a los que se han matriculado en ciencias más los que han optado por ingenierías.

- (1,5 puntos) Formular el correspondiente sistema de ecuaciones.
- (1 punto) Determinar el número de estudiantes matriculados en ciencias, ciencias sociales e ingenierías.
- (0,5 puntos) El coste de la matrícula anual para alumnos de nuevo ingreso es de 1100€ para ciencias sociales y 1400€ para ciencias e ingenierías. Para los alumnos repetidores el coste de matrícula se incrementa en un 15%. Si a los 110 alumnos anteriores se les añaden 25 repetidores, de los cuales 6 son de ciencias sociales, ¿cuál será el importe total de las matrículas abonadas por los 135 alumnos?

Solución

a) El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} 2S = 6I, \\ S = C + I + 10, \\ C + S + I = 110. \end{cases}$$

b) $C = 30$, $S = 60$, $I = 20$.

c) Coste de los 110 alumnos nuevos:

- Ciencias (30) $\rightarrow 30 \cdot 1400 = 42\,000$ €.
- Ciencias sociales (60) $\rightarrow 60 \cdot 1100 = 66\,000$ €.
- Ingenierías (20) $\rightarrow 20 \cdot 1400 = 28\,000$ €.

Total nuevos = $42\,000 + 66\,000 + 28\,000 = 136\,000$ €.

Coste de los 25 repetidores:

- Ciencias sociales: 6 repetidores $\rightarrow$ coste por repetidor = $1100 \cdot 1,15 = 1\,265$ € $\rightarrow 6 \cdot 1\,265 = 7\,590$ €.
- Ciencias+Ingenierías: 19 repetidores $\rightarrow$ coste $1400 \cdot 1,15 = 1\,610$ € $\rightarrow 19 \cdot 1\,610 = 30\,590$ €.

Total repetidores = $7\,590 + 30\,590 = 38\,180$ €.

Por tanto, el importe total de las matrículas de todos los alumnos es:

$$136\,000 + 38\,180 = 174\,180 \text{ €}.$$