

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2025-2026 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	Modelo
--	---	---------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el *Melocotón de Calanda*, que celebró su 26º aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, *Jesca*, *Calante* y *Evaisa*. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

1.a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad Jesca puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del 96,8%, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

1.b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP Melocotón de Calanda permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5% de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

2.1.b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$.

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

Pregunta 2.2

El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el

contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2-x}{3+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

3.1.a) (1,3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=1$ y determine sus asíntotas.

3.1.b) (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

Pregunta 3.2

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a}$ donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.2.a) (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

3.2.b) (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 2$ y $F(3) = 7$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B se sabe que $P(B) = 0,5$, $P(A | B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,8$.

4.1.a) (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

4.1.b) (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

4.1.c) (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

Pregunta 4.2

En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El 26% de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un 10% de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un 18% también la tienen alquilada y sólo un 5% la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

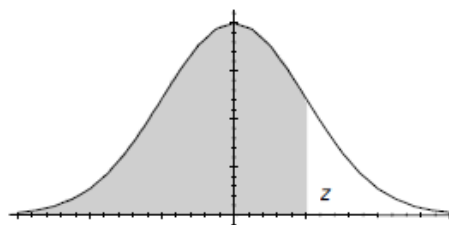
4.2.a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

4.2.b) (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

Probabilidad y estadística 50%

Análisis 25%

Álgebra 25%

Ejercicio 1. (Obligatorio) Estadística.

Ejercicio 2. (Con optatividad) Álgebra.

Ejercicio 3. (Con optatividad) Análisis.

Ejercicio 4. (Con optatividad) Probabilidad.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad. En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el *Melocotón de Calanda*, que celebró su 26º aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, *Jesca*, *Calante* y *Evaisa*. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

1.a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad *Jesca* puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del 96,8%, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

1.b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP *Melocotón de Calanda* permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5% de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

1.a) Sea $X =$ "Peso en gramos de un melocotón de Calanda de la variedad *Jesca*".

$$X = N(\mu, 50)$$

El nivel de confianza del 96.8% significa que $1 - \alpha = 0.968 \rightarrow \alpha = 0.032 \rightarrow \alpha/2 = 0.016 \rightarrow$

$$1 - \alpha/2 = 0.984 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.14 + 2.15}{2} = 2.145$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8314
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8769
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9808	0.9812	0.9816	0.9819	0.9822	0.9825	0.9828
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9877	0.9879

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{Error} < 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.145 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} < 15 \Rightarrow 2.145 \cdot 50 < 15\sqrt{n} \Rightarrow \frac{2.145 \cdot 50}{15} < \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2.145 \cdot 50}{15} \right)^2 < n \Rightarrow \boxed{n > 51.1225}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 52 melocotones.

- 1.b) Consideramos Y = número de melocotones no dañados entre los 400 seleccionados al azar. Las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5% de los frutos. El 95% restante no resultará dañado. La probabilidad de que un melocotón elegido al azar no esté dañado es de 0.95.

El número esperado de melocotones no dañados es $n \cdot p = 400 \cdot 0.95 = 380$ melocotones.

La variable Y es una binomial, siendo $n = 400$ el número de repeticiones y $p = 0.95$ la probabilidad de que un fruto no esté dañado. $Y = B(400, 0.95)$.

El número de repeticiones es muy grande. Aproximamos esta binomial con una normal Y' de media $n \cdot p = 400 \cdot 0.95 = 380$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.95 \cdot 0.05} = \sqrt{19} \approx 4.36$.

$Y' = N(380, 4.36)$.

Debemos calcular $P(Y \geq 375)$.

$$P(Y \geq 375) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección} \\ \text{de Yates} \end{array} \right\} = P(Y' \geq 374.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{374.5 - 380}{4.36}\right) =$$

$$= P(Z \geq -1.26) = P(Z \leq 1.26) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8962}$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8943	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9

La probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados es de 0.8962.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

2.1.b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$.

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

2.1.a) Despejamos C en la igualdad.

$$\begin{aligned} (I + 2C^t)^{-1} = A &\Rightarrow (I + 2C^t)(I + 2C^t)^{-1} = (I + 2C^t)A \Rightarrow I = (I + 2C^t)A \Rightarrow \\ &\Rightarrow I \cdot A^{-1} = (I + 2C^t)A \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = I + 2C^t \Rightarrow A^{-1} - I = 2C^t \Rightarrow \boxed{C^t = \frac{1}{2}(A^{-1} - I)} \end{aligned}$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de C^t .

$$C^t = \frac{1}{2}(A^{-1} - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } C^t = \begin{pmatrix} -3 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ entonces } C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.b) Hallamos las expresiones de las matrices $B^t B$ y BB^t .

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+1+1) = (3)$$

$$B^t B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de D^t .

$$D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es simétrica entonces $D = D^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.2

El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

Llamamos x = "gramos de azafrán en un sobre de papel", y = "gramos de azafrán en una caja de plástico", z = "gramos de azafrán en una caja de metal".

De la información proporcionada obtenemos las ecuaciones asociadas.

“El total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal” $\rightarrow 15x + 4y = 4y + 3z$.

“El contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal” $\rightarrow x + y = z - 5$.

“Si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases” $\rightarrow 5y + 1 = 2(x + z)$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 4y = 4y + 3z \\ x + y = z - 5 \\ 5y + 1 = 2(x + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x = 3z \\ x + y - z = -5 \\ 5y + 1 = 2x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x = z \\ x + y - z = -5 \\ 5y + 1 = 2x + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 5x = -5 \\ 5y + 1 = 2x + 2(5x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 4x = -5 \\ 5y + 1 = 2x + 10x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 4x - 5 \\ 5y + 1 = 12x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(4x - 5) + 1 = 12x \Rightarrow 20x - 25 + 1 = 12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \cdot 3 - 5 = 7 \\ z = 5 \cdot 3 = 15 \end{cases}$$

Los sobres de papel deben contener 3 gramos de azafrán, las cajas de plástico 7 gramos y las de metal 15 gramos.

Pregunta 3.1

Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2-x}{3+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

3.1.a) (1,3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=1$ y determine sus asíntotas.

3.1.b) (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

3.1.a) Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-x}{3+x} = \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{3-x} = \frac{1-1}{3-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{4} \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

No coinciden los límites laterales y la función no es continua en $x=1$.

Asíntotas verticales $x=a$

Los denominadores de la función no se anulan. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{3+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

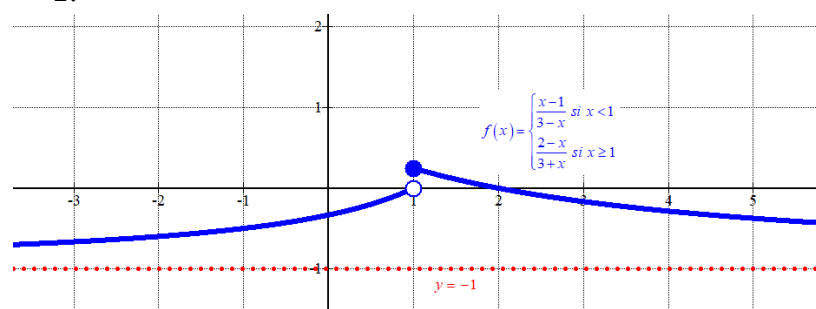
La recta $y = -1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Resumiendo: La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas, solo tiene la asíntota horizontal $y = -1$.



3.1.b) En el intervalo $(1,3)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{2-x}{3+x}$.

Obtenemos los puntos de corte de la función $g(x)$ y el eje de abscisas.

$$g(x) = (3x^2 + 9x) \frac{2-x}{3+x} = \frac{(2-x)(3x^2 + 9x)}{3+x} = \frac{3x(2-x)(\cancel{x+3})}{\cancel{3+x}} = 3x(2-x) = 6x - 3x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \\ g(x) = 3x(2-x) \end{array} \right\} \Rightarrow 3x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 2$. Solo $x = 2$ pertenece al intervalo $(1,3)$

La región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ la dividimos en dos partes para el cálculo de su área.

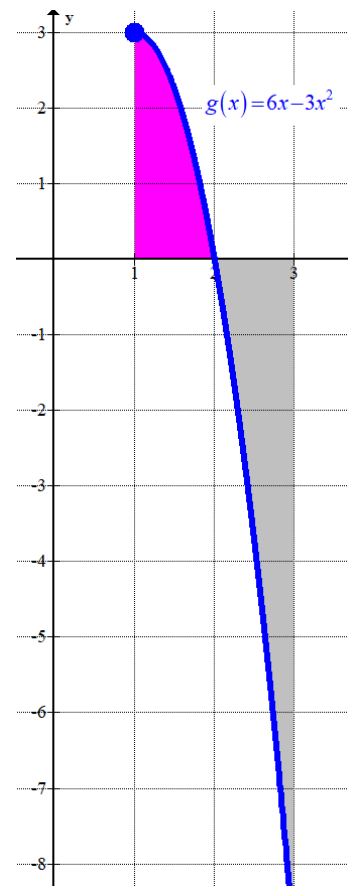
$$\text{Área 1} \rightarrow \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 6x - 3x^2 dx = \left[3x^2 - x^3 \right]_1^2 =$$

$$= [3 \cdot 2^2 - 2^3] - [3 \cdot 1^2 - 1^3] = 12 - 8 - 3 + 1 = 2 \rightarrow \boxed{\text{Área 1} = 2}$$

$$\text{Área 2} \rightarrow \int_2^3 g(x) dx = \int_2^3 6x - 3x^2 dx = \left[3x^2 - x^3 \right]_2^3 =$$

$$= [3 \cdot 3^2 - 3^3] - [3 \cdot 2^2 - 2^3] = 27 - 27 - 12 + 8 = -4 \rightarrow \boxed{\text{Área 2} = 4}$$

El área total tiene un valor de $4 + 2 = 6$ unidades cuadradas.



Pregunta 3.2

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a}$ donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.2.a) (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

3.2.b) (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0) = 2$ y $F(3) = 7$.

3.2.a) Determinamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 - 3x}{a} = 0 \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow B\left(\frac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a} \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0}{a} = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

La función tiene dos puntos de corte con los ejes: $A(0,0)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función.

Hallamos sus posibles puntos críticos.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x - 3}{a}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x - 3}{a} = 0 \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow 4x - 3 = 0 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x = \frac{3}{4}$.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{4 \cdot 0 - 3}{a} = \frac{-3}{a} < 0$.

La función decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 3}{a} = \frac{1}{a} > 0$. La

función crece en $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

3.2.b) Hallamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x^2 - 3x}{a} dx = \frac{1}{a} \int 2x^2 - 3x dx = \frac{1}{a} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) + K$$

Hallamos la primitiva de la función que cumple $F(0) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) + K \\ F(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = \frac{1}{a} \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right) + K \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

La primitiva queda $F(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) + 2$.

Averiguamos el valor de a para que la primitiva también cumpla que $F(3) = 7$.

$$\left. \begin{array}{l} F(3) = 7 \\ F(x) = \frac{1}{a} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 = \frac{1}{a} \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) + 2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{a} \left(\frac{54}{3} - \frac{27}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{1}{a} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow 5 = \frac{9}{2a} \Rightarrow 10a = 9 \Rightarrow \boxed{a = \frac{9}{10}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{10}{9} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) + 2 = \frac{20x^3}{27} - \frac{5x^2}{3} + 2$.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B se sabe que $P(B) = 0,5$, $P(A | B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,8$.

4.1.a) (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

4.1.b) (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

4.1.c) (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

Hallamos la probabilidad del suceso A y de $A \cap B$.

$$P(A/B) = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.5} = 0.2 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1}$$

$$P(A \cup B) = 0.8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 \Rightarrow P(A) + 0.5 - 0.1 = 0.8 \Rightarrow \boxed{P(A) = 0.4}$$

4.1.a) Debemos calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = \boxed{0.2}$$

4.1.b) Nos piden calcular $P(B \cap \bar{A})$.

$$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A) \Rightarrow 0.5 = P(B \cap \bar{A}) + 0.1 \Rightarrow \boxed{P(B \cap \bar{A}) = 0.4}$$

4.1.c) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A)P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = \mathbf{0.1 \neq 0.2} = P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

Pregunta 4.2

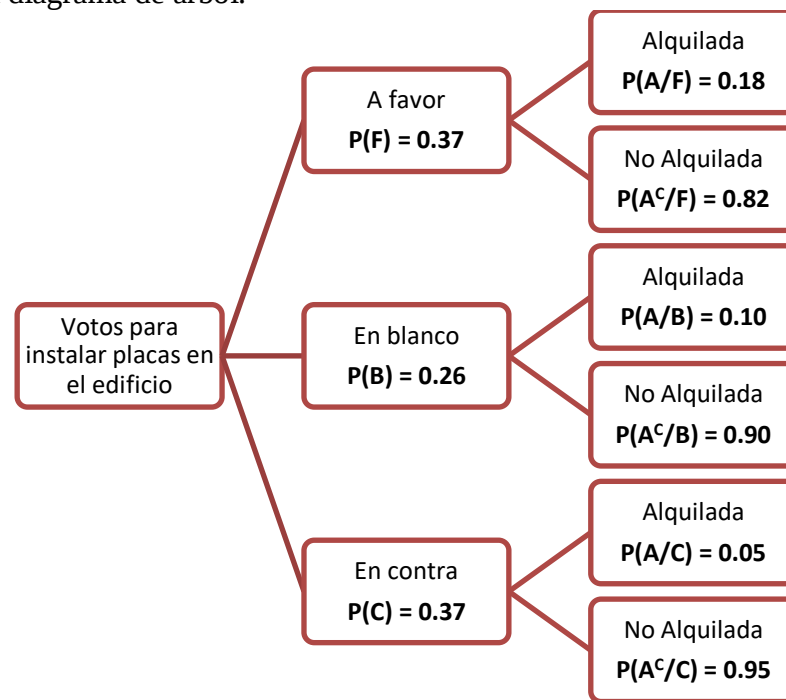
En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El 26% de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un 10% de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un 18% también la tienen alquilada y sólo un 5% la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

4.2.a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

4.2.b) (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

Si el 26% de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra, entonces el restante 74% se reparte en votos a favor (37%) y en contra (37%).

Realizamos un diagrama de árbol.



4.1.a) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(F)P(A/F) + P(B)P(A/B) + P(C)P(A^c/C) = \\
 &= 0.37 \cdot 0.18 + 0.26 \cdot 0.1 + 0.37 \cdot 0.05 = \boxed{0.1111}
 \end{aligned}$$

4.1.b) Nos piden calcular $P(F/A^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/A^c) = \frac{P(A^c \cap F)}{P(A^c)} = \frac{P(F)P(A^c/F)}{1 - P(A)} = \frac{0.37 \cdot 0.82}{1 - 0.1111} = \boxed{\frac{3034}{8889} \approx 0.3413}$$