

MATERIA: MATEMÁTICAS ESPECIALES

1/2

- 1) a) (0.5 pt) Resolver, paso a paso, la desigualdad $\left| \frac{6x-10}{4} + 2 \right| > 70$
- b) (0.25 pt) Razona brevemente para que valores de "x" se cumple $-x^2 - 2x + 15 > 0$
- c) (0.25 puntos) 0.25 pt) Razona brevemente para que valores de "x" se cumple $x^2 - 36 > 0$
- d) 0.5 pt) Razona para que valores de "x" se cumple $(-x^2 - 2x + 15)(x^2 - 36) > 0$

- 2) a) Sea la recta que pasa por el punto $P(3,1)$ y es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{2} + 5$

(a.1) (0.5 pt) Calcula su ecuación

(a.2) (0.5 pt) Representa ambas rectas

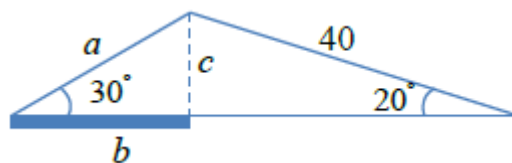
b) Sean las rectas

1ª → Recta que pasa por el punto $(-2,1)$ y tiene pendiente 2

2ª → Recta que pasa por el punto $(3,1)$ y tiene pendiente -3

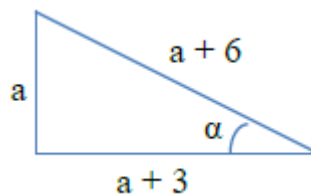
(0.5 pt) Calcula el punto en el que se cortan.

- 3) a) (0.75 pt) Calcular a y b .



b) En el siguiente triángulo

(0.5 pt) ¿Cuánto vale a ?



(0.25 pt) ¿Cuánto vale α ?

- 4) a) En un ayuntamiento, se diseña un plan a 25 años para mantenimiento de carreteras, el primer año se invertirán 200.000€, y cada año se aumentará un 12% con respecto al año anterior.

[Nota: Resolver el problema como una progresión.]

a.1) (0.5 pt) ¿Cuánto se invertirá el último año?

a.2) (0.5 pt) ¿Cuánto se invertirá en total en los 25 años?

b) Un agricultor en Canarias que cultiva tomates en invernaderos observa que la producción de su finca sigue un patrón de manera que cada mes cosecha tres cajas más que en el mes anterior. La primera cosecha la realizó en enero de 2025, cosechando 50 cajas en ese mes.

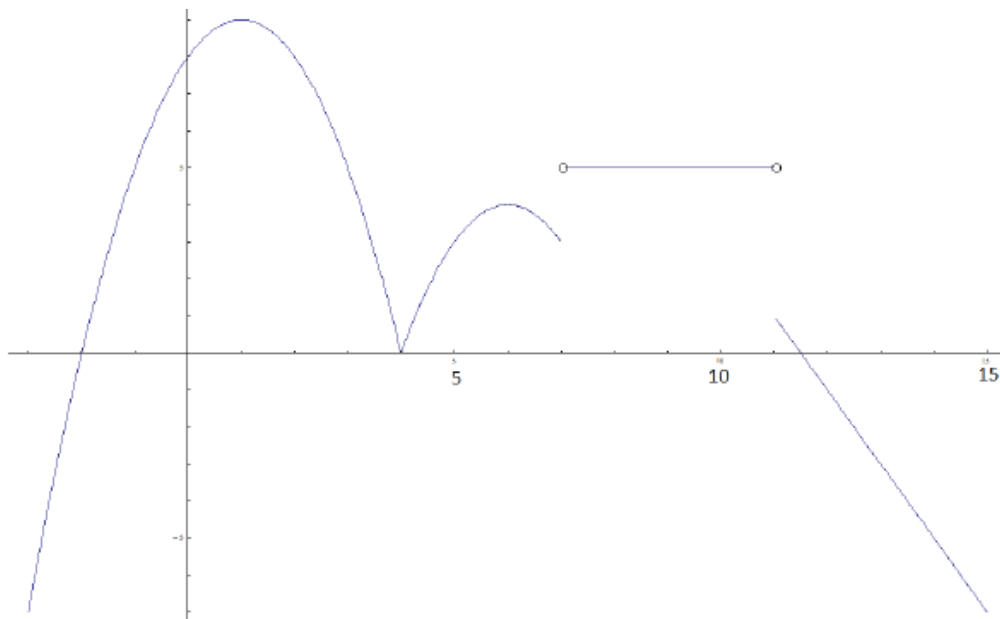
[Nota: Resolver el problema como una progresión.]

(b.1) (0.5 pt) ¿Cuántas cajas habrá cosechado en total en dos años?

(b.2) (0.5 pt) Si cada caja de tomates pesa 20 kg, ¿cuántos kilos de tomates cosechará en todo 2025?

5) a) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} - \sqrt{x - 2}$

b) (0.75 pt) Comentar acotación, continuidad, crecimiento y decrecimiento de la función representada en la siguiente gráfica



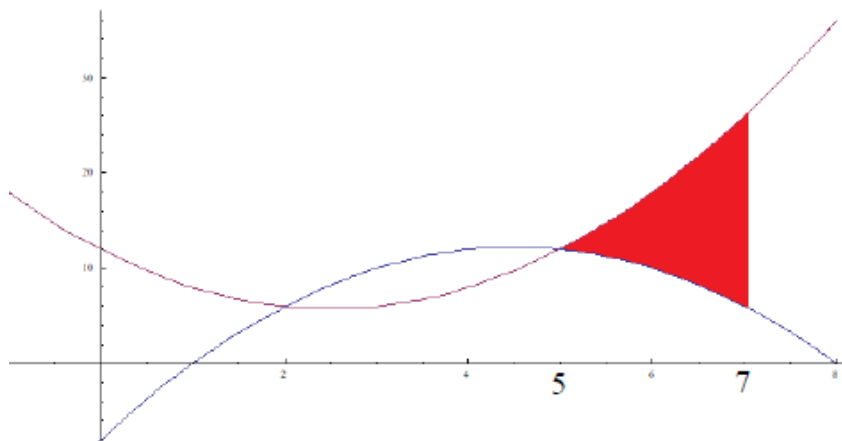
6) a) (0.75 pt) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 - 14x + 20$ en $x = 3$

b) (0.5 pt) Sea $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{7x - 5}$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 10$?

c) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$f(x) = -x^2 + 9x - 8 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 5x + 12$$

Calcular el área sombreada



$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$[\sin(x)]' = \cos(x)$	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
---	--	------------------------	----------------------------

Progresiones Aritméticas	Progresiones geométricas
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$	$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$

Trigonometría	
$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$h^2 = a^2 + b^2$

SOLUCIONES

- 1) a) (0.5 pt) Resolver, paso a paso, la desigualdad $\left| \frac{6x-10}{4} + 2 \right| > 70$
- b) (0.25 pt) Razona brevemente para que valores de “x” se cumple $-x^2 - 2x + 15 > 0$
- c) (0.25 puntos) 0.25 pt) Razona brevemente para que valores de “x” se cumple $x^2 - 36 > 0$
- d) 0.5 pt) Razona para que valores de “x” se cumple $(-x^2 - 2x + 15)(x^2 - 36) > 0$

a) Resolvemos la ecuación asociada a la desigualdad.

$$\left| \frac{6x-10}{4} + 2 \right| = 70 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6x-10}{4} + 2 = 70 \rightarrow \frac{6x-10}{4} = 68 \rightarrow 6x-10 = 272 \rightarrow \\ 6x = 282 \rightarrow \boxed{x = \frac{282}{6} = 47} \\ \frac{6x-10}{4} + 2 = -70 \rightarrow \frac{6x-10}{4} = -72 \rightarrow 6x-10 = -288 \rightarrow \\ \rightarrow 6x = -278 \rightarrow \boxed{x = \frac{-278}{6} = -\frac{139}{3} \simeq -46.33} \end{cases}$$

Veamos si se cumple o no la desigualdad antes, entre y después de estos dos valores

- En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{139}{3}\right)$ consideramos $x = -50$:

$$\dot{¿} \left| \frac{6 \cdot (-50) - 10}{4} + 2 \right| > 70? \Rightarrow \dot{¿} \left| \frac{-300 - 10}{4} + 2 \right| > 70? \Rightarrow \dot{¿} |-77.5 + 2| > 70? \Rightarrow \dot{¿} SI!. La$$

desigualdad es cierta para cualquier número menor de $-\frac{139}{3}$.

- En el intervalo $\left(-\frac{139}{3}, 47\right)$ consideramos $x = 0$:

$$\dot{¿} \left| \frac{6 \cdot 0 - 10}{4} + 2 \right| > 70? \Rightarrow \dot{¿} |-2.5 + 2| > 70? \Rightarrow \dot{¿} NO!. La desigualdad es falsa para cualquier$$

número entre $-\frac{139}{3}$ y 47.

- En el intervalo $(47, +\infty)$ consideramos $x = 50$:

$$\dot{¿} \left| \frac{6 \cdot 50 - 10}{4} + 2 \right| > 70? \Rightarrow \dot{¿} \left| \frac{300 - 10}{4} + 2 \right| > 70? \Rightarrow \dot{¿} |72.5 + 2| > 70? \Rightarrow \dot{¿} SI!. La desigualdad es$$

cierta para cualquier número mayor que 47.

La desigualdad es cierta en $\left(-\infty, -\frac{139}{3}\right) \cup (47, +\infty)$.

b) Averiguamos cuando se cumple la igualdad.

$$-x^2 - 2x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1) \cdot 15}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 8}{-2} = \begin{cases} \frac{2+8}{-2} = \boxed{-5 = x} \\ \frac{2-8}{-2} = \boxed{3 = x} \end{cases}$$

La desigualdad $-x^2 - 2x + 15 > 0$ tiene el coeficiente de x^2 negativo (-1) , por lo que para valores grandes $(100, 1000, \dots)$ o muy pequeños $(-100, -1000, \dots)$ no se cumple la desigualdad.

La desigualdad solo se cumple para los valores del intervalo $(-5, 3)$.

Lo comprobamos con $x = 0 \in (-5, 3)$.

$$¿-0^2 - 2 \cdot 0 + 15 > 0? \Rightarrow ¿15 > 0? \Rightarrow ¡Cierto!$$

c) Resolvemos la inecuación $x^2 - 36 > 0$.

$$x^2 - 36 > 0 \Rightarrow (x-6)(x+6) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x-6 > 0 \\ x+6 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x > 6 \\ x > -6 \end{array} \rightarrow \boxed{x > 6} \\ o \\ \left. \begin{array}{l} x-6 < 0 \\ x+6 < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x < 6 \\ x < -6 \end{array} \rightarrow \boxed{x < -6} \end{cases}$$

La desigualdad se cumple en $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$.

d) Resolvemos la inecuación $(-x^2 - 2x + 15)(x^2 - 36) > 0$.

$$(-x^2 - 2x + 15)(x^2 - 36) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \left. \begin{array}{l} -x^2 - 2x + 15 > 0 \\ x^2 - 36 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} (-5, 3) \\ (-\infty, -6) \cup (6, +\infty) \end{array} \rightarrow \emptyset \\ o \\ \left. \begin{array}{l} -x^2 - 2x + 15 < 0 \\ x^2 - 36 < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} (-\infty, -5) \cup (3, +\infty) \\ (-6, 6) \end{array} \rightarrow (-6, -5) \cup (3, 6) \end{cases}$$

La inecuación se cumple para $(-6, -5) \cup (3, 6)$.

2) a) Sea la recta que pasa por el punto $P(3,1)$ y es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{2} + 5$

(a.1) (0.5 pt) Calcula su ecuación

(a.2) (0.5 pt) Representa ambas rectas

b) Sean las rectas

1ª → Recta que pasa por el punto $(-2,1)$ y tiene pendiente 2

2ª → Recta que pasa por el punto $(3,1)$ y tiene pendiente -3

(0.5 pt) Calcula el punto en el que se cortan.

a.1) La recta $y = -\frac{x}{2} + 5$ tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$. Una recta perpendicular tiene pendiente $m' = 2$.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $P(3,1)$ con pendiente $m' = 2$.

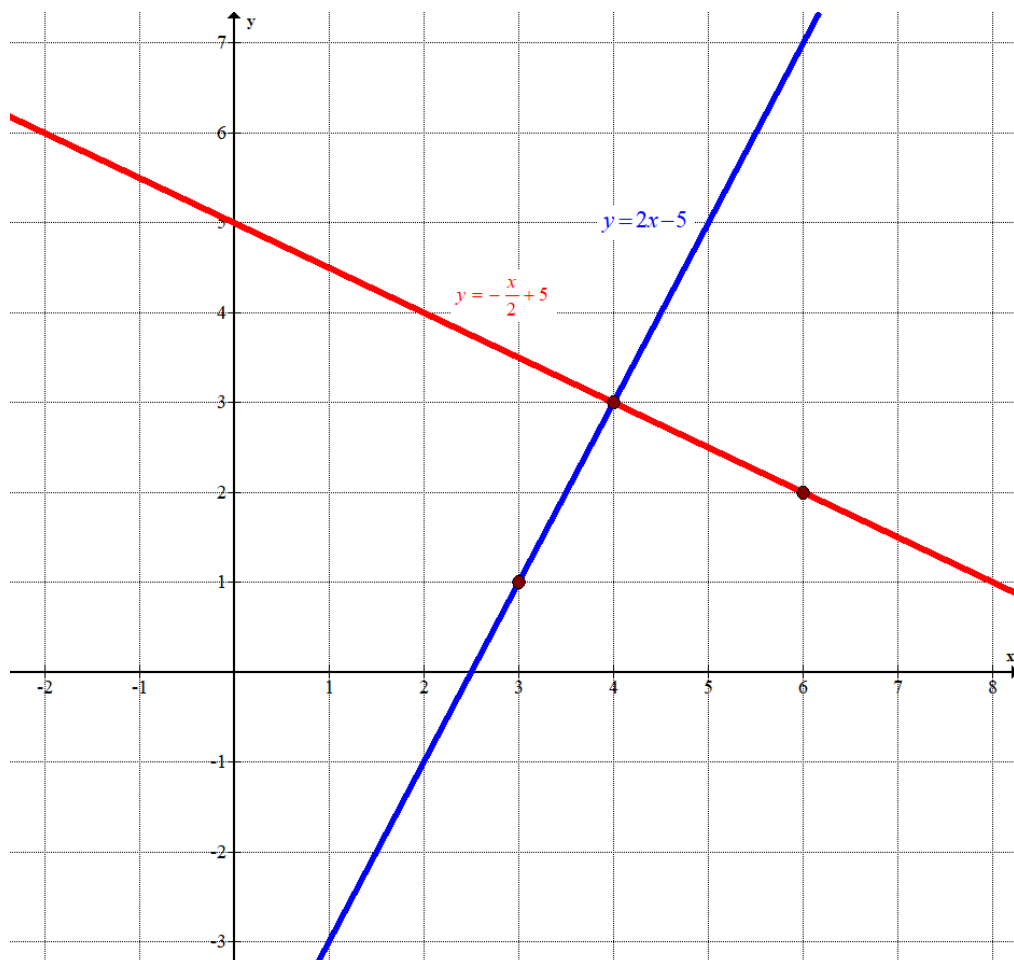
$$\left. \begin{array}{l} P(3,1) \\ m' = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = 2x - 6 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 5}$$

La ecuación de la recta buscada es $y = 2x - 5$.

a.2) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de las dos rectas.

$$y = 2x - 5 \qquad y = -\frac{x}{2} + 5$$

x	y	x	y
3	1	4	3
4	3	6	2



b) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $(-2,1)$ y con pendiente 2.

$$\left. \begin{array}{l} (-2,1) \\ m=2 \end{array} \right\} \Rightarrow y-1=2(x+2) \Rightarrow y-1=2x+4 \Rightarrow \boxed{y=2x+5}$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $(3,1)$ y con pendiente -3 .

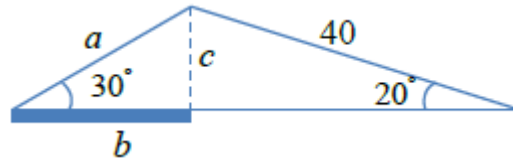
$$\left. \begin{array}{l} (3,1) \\ m=-3 \end{array} \right\} \Rightarrow y-1=-3(x-3) \Rightarrow y-1=-3x+9 \Rightarrow \boxed{y=-3x+10}$$

Hallamos el punto de corte de ambas rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

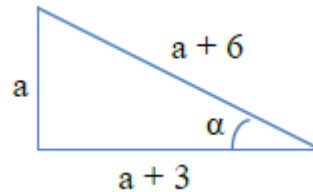
$$\left. \begin{array}{l} y=-3x+10 \\ y=2x+5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x+5=-3x+10 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{y=2 \cdot 1+5=7}$$

El punto de corte de ambas rectas tiene coordenadas $(1, 7)$.

3) a) (0.75 pt) Calcular a y b .



b) En el siguiente triángulo (0.5 pt) ¿Cuánto vale a ?



(0.25 pt) ¿Cuánto vale α ?

a) En el triángulo rectángulo de la derecha se cumple:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{40} \Rightarrow 0.342 = \frac{c}{40} \Rightarrow c = 40 \cdot 0.342 = 13.68$$

En el triángulo de la izquierda tenemos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{13.68}{a} \Rightarrow 0.5 = \frac{13.68}{a} \Rightarrow a = \frac{13.68}{0.5} = 27.36$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{27.36} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{27.36} \Rightarrow b = \frac{27.36 \cdot \sqrt{3}}{2} = 23.69$$

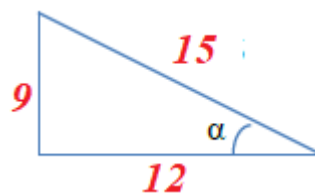
b) Al ser rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras.

$$(a+6)^2 = a^2 + (a+3)^2 \Rightarrow a^2 + 36 + 12a = a^2 + a^2 + 9 + 6a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2 + 6a + 27 = 0 \Rightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)27}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 12}{-2} = \begin{cases} \frac{-6+12}{-2} = -3 = a ; \text{No válido!} \\ \frac{-6-12}{-2} = 9 = a \end{cases}$$

Como el valor de la longitud de un cateto no puede ser negativo, podemos afirmar que el valor buscado es $a = 9$.

Obtenemos el valor del ángulo α .



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{9}{15} \Rightarrow \alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.6) \approx 36.87^\circ$$

4) a) En un ayuntamiento, se diseña un plan a 25 años para mantenimiento de carreteras, el primer año se invertirán 200.000€, y cada año se aumentará un 12% con respecto al año anterior.

[Nota: Resolver el problema como una progresión.]

a.1) (0.5 pt) ¿Cuánto se invertirá el último año?

a.2) (0.5 pt) ¿Cuánto se invertirá en total en los 25 años?

b) Un agricultor en Canarias que cultiva tomates en invernaderos observa que la producción de su finca sigue un patrón de manera que cada mes cosecha tres cajas más que en el mes anterior. La primera cosecha la realizó en enero de 2025, cosechando 50 cajas en ese mes.

[Nota: Resolver el problema como una progresión.]

(b.1) (0.5 pt) ¿Cuántas cajas habrá cosechado en total en dos años?

(b.2) (0.5 pt) Si cada caja de tomates pesa 20 kg, ¿cuántos kilos de tomates cosechará en todo 2025?

a.1) El primer año se invertirán 200.000€ $\rightarrow a_1 = 200000$

El segundo año se invertirán $200000 \cdot 1.12 = 224000 \rightarrow a_2 = 224000$

Y así sucesivamente durante 25 años.

Se trata de una progresión geométrica con primer término $a_1 = 200000$ y razón $r = 1.12$.

Nos piden determinar a_{25} . Aplicamos la fórmula.

$$a_{25} = a_1 \cdot r^{25-1} = 200000 \cdot 1.12^{24} = 3035725.787$$

El último año se invertirán aproximadamente tres millones treinta y cinco mil setecientos veinticinco euros.

a.2) Para determinar el total de la inversión en los 25 años sumamos todo lo invertido. Para ello utilizamos la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

$$S_{25} = \frac{200000 \cdot 1.12^{25} - 200000}{1.12 - 1} = 26666774.01$$

En los 25 años se invertirán aproximadamente veintiséis millones seiscientos sesenta y seis mil setecientos setenta y cuatro euros.

b.1) Las cajas cosechadas cada mes constituyen una progresión aritmética con primer término 50, siendo la diferencia $d = 3$.

En dos años hay 24 meses. Calculamos la suma de los 24 primeros términos de la progresión.

$$\left. \begin{array}{l} S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 50 \\ d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_{24} = \frac{(50 + a_{24}) \cdot 24}{2} \\ a_{24} = 50 + (24-1)3 = 119 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{24} = \frac{(50 + 119) \cdot 24}{2} = 2028$$

En los dos años se han cosechado 2028 cajas de tomates.

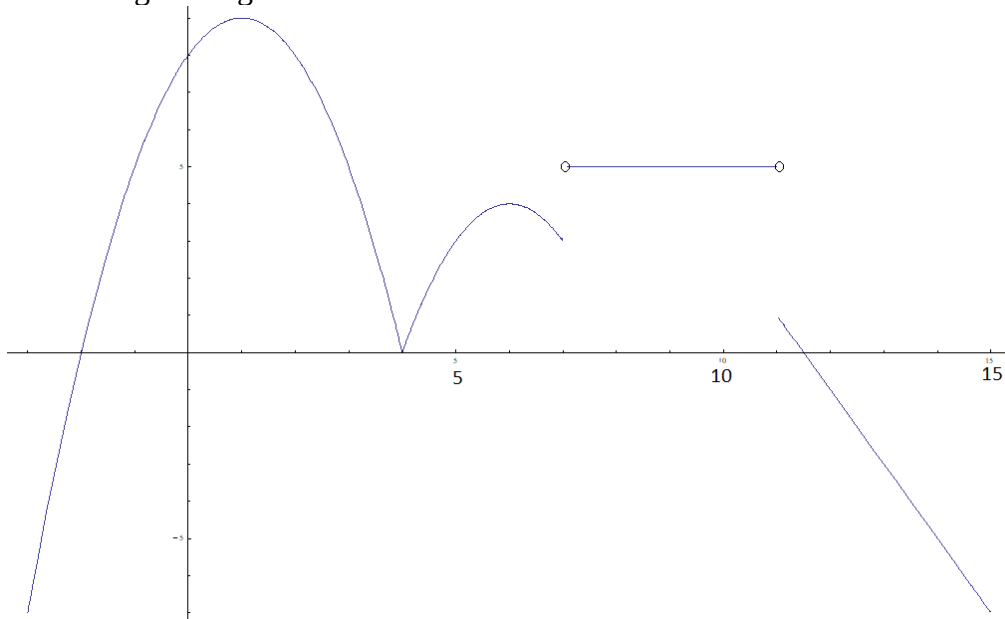
b.1) Hallamos las cajas que se cosecharán en todo 2025. Calculamos la suma de los 12 primeros términos de la progresión.

$$\left. \begin{array}{l} S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \\ a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_1 = 50 \\ d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_{12} = \frac{(50 + a_{12}) \cdot 12}{2} \\ a_{12} = 50 + (12-1)3 = 83 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{24} = \frac{(50 + 83) \cdot 12}{2} = 798$$

En todo 2025 se cosecharán 798 cajas de tomates, lo que supone $798 \cdot 20 = 15960$ kilos de tomates.

5) a) (0.5 puntos) Justifica cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} - \sqrt{x - 2}$

b) (0.75 pt) Comentar acotación, continuidad, crecimiento y decrecimiento de la función representada en la siguiente gráfica



a) Los valores incluidos en el dominio deben ser los que hagan positivo el radicando de ambos radicales.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{array} \right\}$$

Veamos que ocurre antes, entre y después de $x = 2$ y $x = 3$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la función vale

$$f(0) = \frac{4}{\sqrt{0^2 - 6 \cdot 0 + 9}} - \sqrt{0 - 2} = \frac{4}{\sqrt{9}} - \sqrt{-2} \rightarrow \text{¡No existe!}. \text{ El intervalo } (-\infty, 2) \text{ no está incluido en el dominio de la función.}$$

- En el intervalo $(2, 3)$ tomamos $x = 2.5$ y la función vale

$$f(2.5) = \frac{4}{\sqrt{2.5^2 - 6 \cdot 2.5 + 9}} - \sqrt{2.5 - 2} = \frac{4}{\sqrt{0.25}} - \sqrt{0.5} \rightarrow \text{¡Existe!}. \text{ El intervalo } (2, 3) \text{ está incluido en el dominio de la función.}$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la función vale

$$f(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2 - 6 \cdot 4 + 9}} - \sqrt{4 - 2} = \frac{4}{\sqrt{1}} - \sqrt{2} \rightarrow \text{¡Existe!}. \text{ El intervalo } (3, +\infty) \text{ está incluido en el dominio de la función.}$$

Nos falta por comprobar si $x = 2$ y $x = 3$ pertenecen al dominio o no.

$$f(2) = \frac{4}{\sqrt{2^2 - 6 \cdot 2 + 9}} - \sqrt{2 - 2} = \frac{4}{\sqrt{1}} - \sqrt{0} \rightarrow \text{¡Existe!}$$

$$f(3) = \frac{4}{\sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 + 9}} - \sqrt{3 - 2} = \frac{4}{\sqrt{0}} - \sqrt{1} = \frac{4}{0} - 1 \rightarrow \text{¡No existe!}$$

El dominio de la función es $[2, 3) \cup (3, +\infty)$.

- b) La cota superior de la función es 9 y se alcanza en $x=1$. La cota inferior no existe, pues la función decrece a partir de $x=11$ yendo a $-\infty$.

La función es continua en $(-\infty, 7) \cup (7, 11) \cup (11, +\infty)$, Dicho de otra manera, la función es discontinua en $x=7$ y $x=11$.

La función crece en $(-\infty, 1) \cup (4, 6)$, es constante en $(7, 11)$ y decrece en

$(1, 4) \cup (6, 7) \cup (11, +\infty)$.

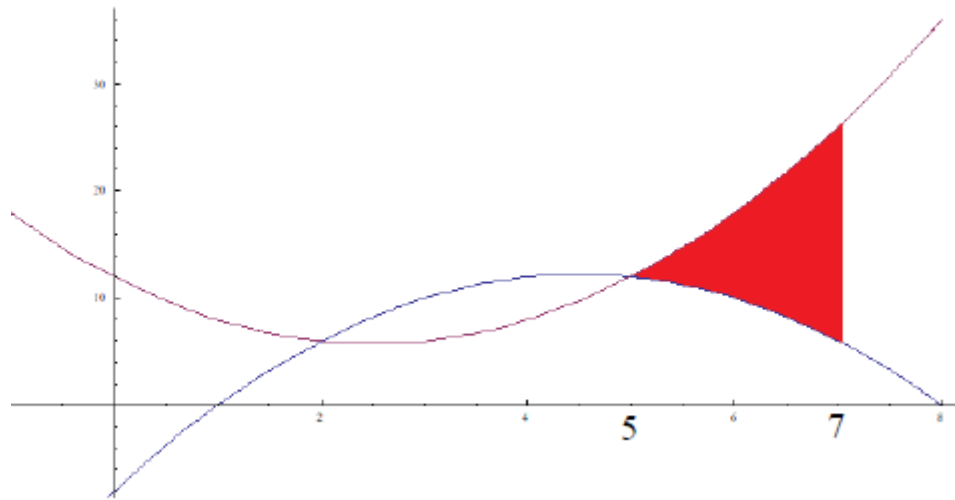
6) a) (0.75 pt) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 - 14x + 20$ en $x = 3$

b) (0.5 pt) Sea $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{7x-5}$ ¿Es $f(x)$ creciente en $x = 10$?

c) (1 punto) En la gráfica están representadas

$$f(x) = -x^2 + 9x - 8 \text{ y } g(x) = x^2 - 5x + 12$$

Calcular el área sombreada



a) La ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 - 14x + 20$ en $x = 3$ es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$.

$$f(x) = 2x^2 - 14x + 20 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 20 = -4$$

$$f'(x) = 4x - 14 \Rightarrow f'(3) = 4 \cdot 3 - 14 = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} y - f(3) = f'(3)(x - 3) \\ f(3) = -4 \\ f'(3) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 4 = -2(x - 3) \Rightarrow y + 4 = -2x + 6 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 2}$$

La recta tangente tiene ecuación $y = -2x + 2$.

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{7x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}(7x-5) - 7\ln(x^2)}{(7x-5)^2} = \frac{\frac{14x-10}{x} - 7\ln(x^2)}{(7x-5)^2}$$

Obtenemos el valor de la derivada en $x = 10$.

$$f'(10) = \frac{\frac{140-10}{10} - 7\ln(10^2)}{(70-5)^2} = \frac{13 - 7\ln(100)}{65^2} = -0.0045 < 0$$

Como la derivada es negativa en $x = 10$ la función decrece en dicho punto.

- c) El área sombreada, que está comprendida entre $x=5$ y $x=7$ es el valor de la integral definida de 5 a 7 de la diferencia entre las dos funciones.
Averiguamos que gráfica corresponde a cada una de las funciones obteniendo el valor de las dos funciones para $x=6 \in (5, 7)$.

$$\left. \begin{aligned} f(6) &= -6^2 + 9 \cdot 6 - 8 = 10 \\ g(6) &= 6^2 - 5 \cdot 6 + 12 = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(6) > f(6)$$

El área de la región del plano coloreada es el valor de la integral definida de 5 a 7 de la diferencia $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_5^7 g(x) - f(x) dx = \int_5^7 (x^2 - 5x + 12) - (-x^2 + 9x - 8) dx = \\ &= \int_5^7 2x^2 - 14x + 20 dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 7x^2 + 20x \right]_5^7 = \\ &= \left[\frac{2 \cdot 7^3}{3} - 7 \cdot 7^2 + 20 \cdot 7 \right] - \left[\frac{2 \cdot 5^3}{3} - 7 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \right] = \boxed{\frac{52}{3} \approx 17.33 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

