

|  |                                                                                                                                                          |                       |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
|  | <b>UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID</b><br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>Curso <b>2025-2026</b><br>MATERIA: <b>MATEMÁTICAS II</b> | Modelo<br>Orientativo |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):**

**Pregunta 1.** Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene  $A(1,0,2)$  como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano  $\pi: x + y + 2z + 1 = 0$ . Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano  $\pi$ . Se toma el punto  $C(0, -3, 1)$  de  $\pi$  para calibrar el dron.

- (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano  $\pi$  y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano  $\pi$ . Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
- (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
  - El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.
  - La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano  $\pi$  para situarse en  $A'$ , a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por C y  $A'$ .

**Pregunta 2.** Dada  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$ , se pide:

- (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de  $f(x)$ .
- (1 punto) Hallar  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ .

**Pregunta 3.** Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.
- (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):**

**Pregunta 4.1.** Sean  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Se pide:

- a) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que la matriz  $AA^t$  sea una matriz diagonal.
- b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ .

**Pregunta 4.2.** Sea el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$$
. Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real  $\lambda$ .
- b) (1 punto) Resolver el sistema si  $\lambda = -1$ .

---

**Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos):**

**Pregunta 5.1.** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \operatorname{sen}(2x) + b & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

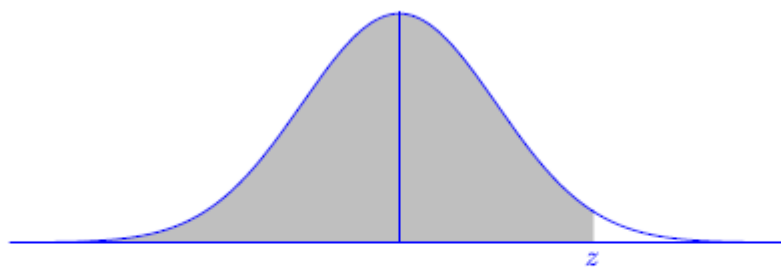
- a) (1 punto) Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en  $[0, 2\pi]$ .
- b) (1 punto) Justifique razonadamente que la función  $f(x)$  tiene una única raíz en el intervalo  $(0, 2\pi)$  y calcule dicha raíz.

**Pregunta 5.2.** Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Se pide:

- a) (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
- b) (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es derivable en el punto  $x = 0$  y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  para  $x = 0$ .

tangente a la gráfica de  $f(x)$  para  $x = 0$ .

### DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si  $Z$  tiene distribución  $N(0,1)$ ,  $P(Z < 0,45) = 0,6736$ .

| $z$ | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

## SOLUCIONES

|              |               |                 |                                  |
|--------------|---------------|-----------------|----------------------------------|
| Análisis 40% | Álgebra (20%) | Geometría (20%) | Probabilidad y estadística (20%) |
|--------------|---------------|-----------------|----------------------------------|

**Pregunta 1. (Obligatoria) Geometría.**

**Pregunta 2. (Obligatoria) Análisis.**

**Pregunta 3. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.**

**Pregunta 4. (Con optatividad) Álgebra.**

**Pregunta 5. (Con optatividad) Análisis.**

**Pregunta 1.** Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene  $A(1,0,2)$  como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano  $\pi: x + y + 2z + 1 = 0$ . Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano  $\pi$ . Se toma el punto  $C(0, -3, 1)$  de  $\pi$  para calibrar el dron.

- a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano  $\pi$  y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano  $\pi$ . Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
- b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
- b1) El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.
- b2) La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano  $\pi$  para situarse en  $A'$ , a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por C y  $A'$ .

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \\ \pi: x + y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 + 0 + 2 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

El dron vuela en un plano paralelo a  $\pi$  que pasa por A. Hallamos su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + y + 2z + 1 = 0 \\ A(1,0,2) \in \pi' \\ \pi' \parallel \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': x + y + 2z + D = 0 \\ A(1,0,2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y + 2z - 5 = 0}$$

El plano en el que el dron vuela manteniendo la misma distancia al plano  $\pi$  tiene ecuación  $\pi': x + y + 2z - 5 = 0$ .

b1) El punto  $C'$  del plano  $\pi'$  más cercano al punto  $C$  del plano  $\pi$  es el punto situado en la recta perpendicular al plano  $\pi$  de dicho punto  $C$ . Hallamos la ecuación de la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por el punto  $C$ . Luego hallaremos el punto  $C'$  de corte de la recta obtenida con el plano  $\pi'$ .

$$\pi: x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 2) \\ C(0, -3, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto  $C'$  de corte de la recta  $r$  y el plano  $\pi'$ .

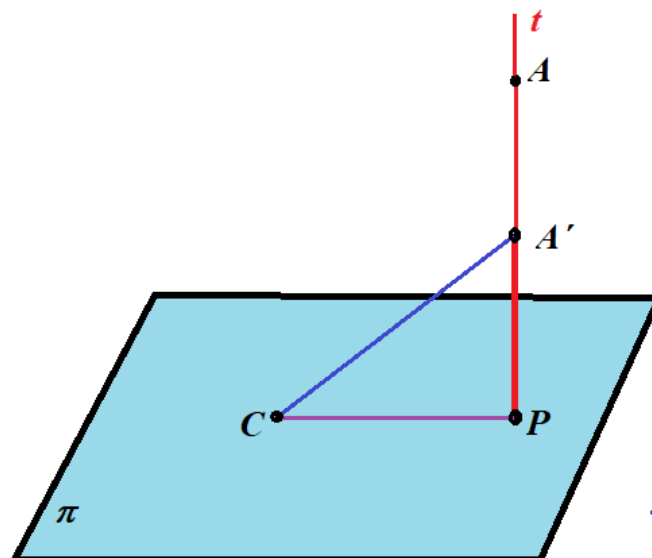
$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \\ \pi': x + y + 2z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 3 + \lambda + 2(1 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda - 3 + \lambda + 2 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 1 = -2 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C'(1, -2, 3)}$$

La recta  $s$  que define la trayectoria del dron es la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $C'$ .

$$\left. \begin{array}{l} C'(1, -2, 3) \in s \\ A(1, 0, 2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \overrightarrow{AC'} = (1, -2, 3) - (1, 0, 2) = (0, -2, 1) \\ A(1, 0, 2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

b2) Hallamos la recta  $t$  perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por  $A$  (el dron descende por esa recta).



$$\pi : x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = \vec{n} = (1, 1, 2) \\ A(1, 0, 2) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta  $t$  y el plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 2z + 1 = 0 \\ t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2(2 + 2\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 + 2(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0, -1, 0)}$$

El punto  $A'$  buscado es el punto medio del segmento  $AP$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, 0) \\ A(1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow A' = \frac{(0, -1, 0) + (1, 0, 2)}{2} = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right)$$

Nos piden calcular el ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por C y  $A'$ .  
Hallamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A' \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) \\ C(0, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CA'} = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) - (0, -3, 1) = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{CA'} = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA'}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CA'}|} =$$

$$= \frac{(1, 1, 2) \cdot \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 0^2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{\sqrt{6} \sqrt{\frac{26}{4}}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{39}}}$$

$$(\vec{n}, \overrightarrow{CA'}) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{39}}\right) = 61.29^\circ$$

El ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por C y A' tiene un valor de  $90^\circ - 61.29^\circ = 28.71^\circ$ .

#### OTRA FORMA DE HACERLO

El ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por C y A' es el ángulo formado por los vectores  $\overrightarrow{CP}$  y  $\overrightarrow{CA'}$ .

$$\left. \begin{array}{l} A' \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) \\ C(0, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CA'} = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) - (0, -3, 1) = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(0, -1, 0) \\ C(0, -3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = (0, -1, 0) - (0, -3, 1) = (0, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CP} = (0, 2, -1) \\ \overrightarrow{CA'} = \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA'}}{|\overrightarrow{CP}| \cdot |\overrightarrow{CA'}|} =$$

$$= \frac{(0, 2, -1) \cdot \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right)}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 0^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{\frac{26}{4}}} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA'}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{130}}{13}\right) = 28.71^\circ$$

**Pregunta 2.** Dada  $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$ , se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de  $f(x)$ .

b) (1 punto) Hallar  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ .

a) Comprobamos si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{|x|+1} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2+1}{|-x|+1} = \frac{x^2+1}{|x|+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

La función es par.

Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula. Para ello obtenemos la expresión de  $f(x)$  como una función a trozos.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x^2+1}{-x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(-x+1) - (-1)(x^2+1)}{(-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+x^2+1}{(-x+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x(x+1) - (1)(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(-x+1)^2} = 0 \rightarrow -x^2+2x+1=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+4}}{2(-1)} = \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{8}}{-2} = 1-\sqrt{2} = x \\ \frac{-2-\sqrt{8}}{-2} > 0 \end{cases} \\ \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2+2x-1=0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+4}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2} = x \\ \frac{-2-\sqrt{8}}{2} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos  $x = 1 - \sqrt{2} \approx -0.41$  y  $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41$ . Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos y  $x = 0$  (cambio de definición).

- En el intervalo  $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$  tomamos  $x = -1$  y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^2 + 2(-1) + 1}{(-(-1) + 1)^2} = \frac{-2}{4} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 1 - \sqrt{2}).$$

- En el intervalo  $(1-\sqrt{2}, 0)$  tomamos  $x = -0.1$  y la derivada vale

$$f'(-0.1) = \frac{-(-0.1)^2 + 2(-0.1) + 1}{(-(-0.1) + 1)^2} = \frac{0.79}{1.21} > 0. \text{ La función crece en } (1-\sqrt{2}, 0).$$

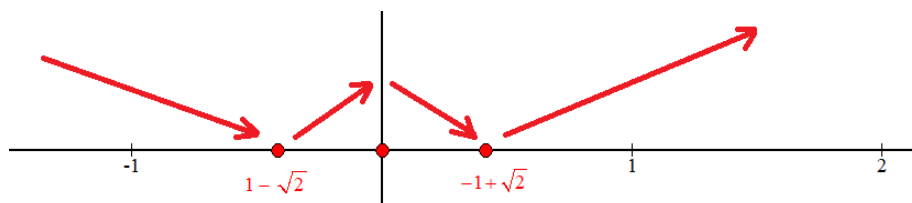
- En el intervalo  $(0, -1+\sqrt{2})$  tomamos  $x = 0.1$  y la derivada vale

$$f'(0.1) = \frac{0.1^2 + 2 \cdot 0.1 - 1}{(0.1 + 1)^2} = \frac{-0.79}{1.21} < 0. \text{ La función decrece en } (0, -1+\sqrt{2}).$$

- En el intervalo  $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$  tomamos  $x = 1$  y la derivada vale

$$f'(1) = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 1}{(1 + 1)^2} = \frac{2}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-1+\sqrt{2}, +\infty).$$

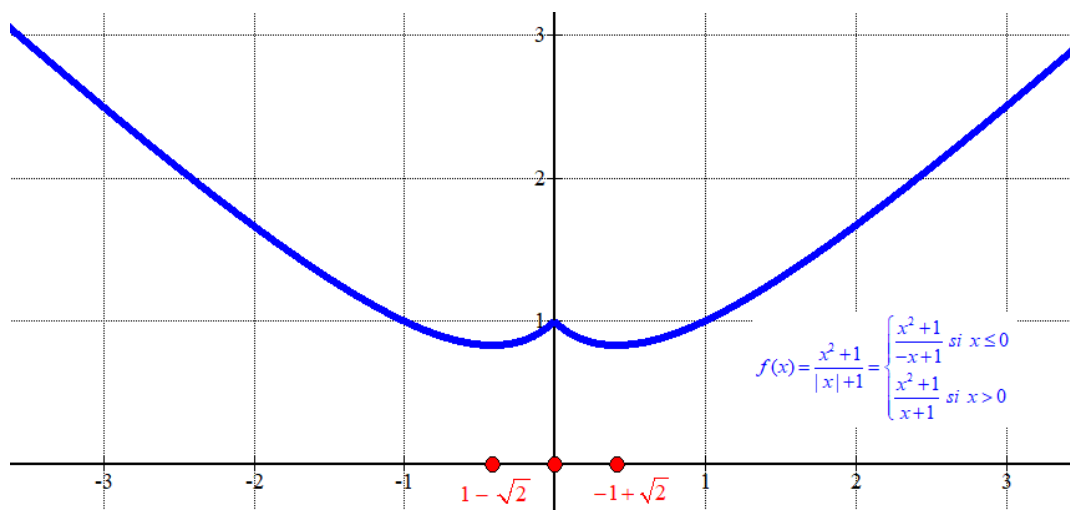
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en  $x = 0$  y dos mínimos relativos, uno en  $x = 1 - \sqrt{2} \approx -0.41$  y otro en  $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41$ .

Las coordenadas del máximo relativo son  $(0, 1)$ .

Las coordenadas de los mínimos relativos son  $(1 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$  y  $(-1 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$



- b) En el intervalo  $(-1, 0)$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{x^2+1}{-x+1}$ . Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+1}{-x+1} dx = \dots$$

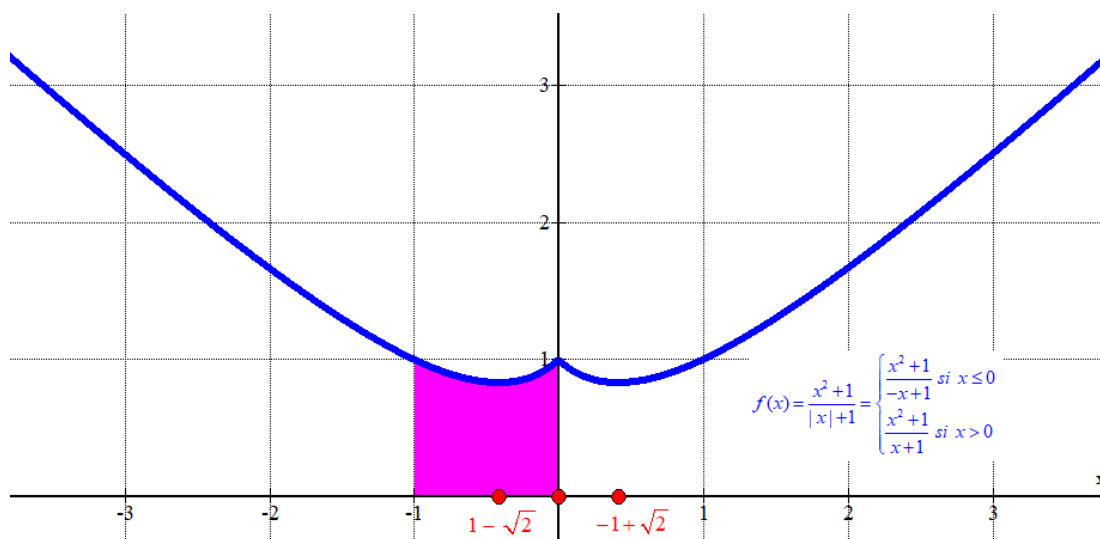
|          |      |        |
|----------|------|--------|
| $x^2$    | $+1$ | $-x+1$ |
| $-x^2+x$ |      | $-x-1$ |
| $x+1$    |      |        |
| $-x+1$   |      |        |
| $2$      |      |        |

$$\dots = \int -x-1 + \frac{2}{-x+1} dx = -\int x dx - \int dx - 2 \int \frac{-1}{-x+1} dx = \boxed{\frac{-x^2}{2} - x - 2 \ln(-x+1)}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \left[ \frac{-x^2}{2} - x - 2 \ln(-x+1) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[ \frac{-0^2}{2} - 0 - 2 \ln(-0+1) \right] - \left[ \frac{-(-1)^2}{2} - (-1) - 2 \ln(-(-1)+1) \right] = \end{aligned}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} - 1 + 2 \ln 2 = \boxed{\frac{-1}{2} + 2 \ln 2 \approx 0.89}$$



**Pregunta 3.** Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.  
 b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

- a) Consideramos la variable aleatoria  $X$  = “número de aceitunas de entre las 12 elegidas al azar que forman una bolsa que no tienen la enfermedad”.

Si una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete entonces 19 de cada 20 no presenta la enfermedad.

La variable  $X$  sigue una distribución Binomial de parámetros  $n = 12$  y  $p = \frac{19}{20} = 0.95$ .

$X = B(12, 0.95)$ . Debemos calcular  $P(X = 12)$ .

$$P(X = 12) = \binom{12}{12} 0.95^{12} \cdot 0.05^0 = 0.95^{12} \approx \boxed{0.5404}$$

La probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad es de 0.5404.

- b) Sea  $Y$  la variable aleatoria “número de bolsas con alguna aceituna con escudete entre las 100 bolsas empaquetadas sin control sanitario”.

La probabilidad de que una bolsa de aceitunas no tenga ninguna aceituna con escudete es 0.5404. La probabilidad de que una bolsa de aceitunas tenga alguna aceituna con escudete es de  $1 - 0.5404 = 0.4596$ .

La variable  $Y$  sigue una distribución binomial de parámetros  $n = 100$  y  $p = 0.4596$ .

$Y = B(100, 0.4596)$ .

La probabilidad de que al menos el 60% de las 100 bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete es el valor de  $P(Y \geq 60)$ .

El número de repeticiones es muy alto, además,  $n \cdot p = 45.96 > 5$  y

$n \cdot q = 100 \cdot 0.5404 = 54.04 > 5$ , por lo que podemos aproximar esta variable con una normal  $T$  de media  $\mu = 45.96$  y desviación típica  $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.4596 \cdot 0.5404} \approx 4.98$ .  
 $T = N(45.96, 4.98)$ .

Calculamos  $P(Y \geq 60)$ .

$$P(Y \geq 60) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección} \\ \text{de Yates} \end{array} \right\} = P(T \geq 59.5) =$$

$$= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \geq \frac{59.5 - 45.96}{4.98}\right) =$$

$$= P(Z \geq 2.72) = 1 - P(Z < 2.72) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9967 = 0.0033$$

| z   | 0,00   | 0,01   | 0,02   |   |
|-----|--------|--------|--------|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0 |

**Pregunta 4.1.** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Se pide:

- a) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que la matriz  $AA^t$  sea una matriz diagonal.  
 b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ .

a) Determinamos la expresión de la matriz  $AA^t$ .

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 + 4 & 2a^2 - 2 \\ 2a^2 - 2 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Para que esta matriz sea diagonal debe cumplirse que  $2a^2 - 2 = 0$ .

$$2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Para  $a = \pm 1$  la matriz  $AA^t$  es una matriz diagonal

b) Averiguamos cuando se cumple  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ .

$$\left. \begin{aligned} A-B &= \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & -4 \\ a+1 & -1 \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ a-1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 2a-1 & -4 \\ a+1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 \\ a-1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2a-1)(2a+1) - 4a + 4 & -12 \\ (2a+1)(a+1) - a + 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 - 1 - 4a + 4 & -12 \\ 2a^2 + 2a + a + 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 - 4a + 3 & -12 \\ 2a^2 + 3a + 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 - 2a & -4a - 2 \\ 2a^2 + a & -2a + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-2 & 2+4 \\ -1-2 & -2+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4a^2 - 2a + 1 & -4a - 8 \\ 2a^2 + a + 3 & -2a - 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a^2 - 4a + 3 & -12 \\ 2a^2 + 3a + 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 - 2a + 1 & -4a - 8 \\ 2a^2 + a + 3 & -2a - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a^2} - 4a + 3 = \cancel{4a^2} - 2a + 1 \\ \cancel{2a^2} + 3a + 1 = \cancel{2a^2} + a + 3 \\ -12 = -4a - 8 \\ -3 = -2a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -2 \rightarrow a = 1 \\ 2a = 2 \rightarrow a = 1 \\ -4 = -4a \rightarrow a = 1 \\ -2 = -2a \rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Para  $a = 1$  se cumple que  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ .

**Pregunta 4.2.** Sea el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$ . Se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real  $\lambda$ .  
 b) (1 punto) Resolver el sistema si  $\lambda = -1$ .

a) Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 - 4 + \lambda - 4\lambda - 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 = \lambda \\ \frac{3-5}{2} = -1 = \lambda \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

**CASO 1.**  $\lambda \neq -1$  y  $\lambda \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.**  $\lambda = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 2^a \\ 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc} \overbrace{1}^{A/B} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ \underbrace{0}_A & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

### CASO 3. $\lambda = 4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 4 \quad -2 \quad 4 \\ -2 \quad -4 \quad -1 \quad -7 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\ -1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 15 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -15 \quad -15 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad -15 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

**Resumiendo:** Para  $\lambda \neq -1$  y  $\lambda \neq 4$  el sistema es **compatible determinado**, para  $\lambda = -1$  el sistema es **compatible indeterminado** y para  $\lambda = 4$  el sistema es **incompatible**.

a) Si  $\lambda = -1$  el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ 5y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ y = \frac{-3+3z}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2 \frac{-3+3z}{5} - z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{-6+6z}{5} - z = 2 \Rightarrow 5x - 6 + 6z - 5z = 10 \Rightarrow 5x + z = 16 \Rightarrow \boxed{z = 16 - 5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3+3(16-5x)}{5} = \frac{-3+48-15x}{5} = \frac{45-15x}{5} = 9-3x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = 9-3\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 16-5\alpha \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema para  $\lambda = -1$  son  $x = \alpha$ ;  $y = 9 - 3\alpha$ ;  $z = 16 - 5\alpha$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Pregunta 5.1.** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \operatorname{sen}(2x) + b & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

- a) (1 punto) Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en  $[0, 2\pi]$ .  
 b) (1 punto) Justifique razonadamente que la función  $f(x)$  tiene una única raíz en el intervalo  $(0, 2\pi)$  y calcule dicha raíz.

- a) Cada una de las funciones que definen  $f$  son continuas en  $\mathbb{R}$ . La función es continua en  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup (\pi, 2\pi]$ .

Averiguamos los valores de  $a$  para que la función sea continua en  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 = a + 4 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = \frac{1}{2}\left(-8 + \cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(-8) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} a \operatorname{sen}(x) + 4 = a + 4 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 4 = -4 \Rightarrow \boxed{a = -8}$$

La función queda  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -8 \operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \operatorname{sen}(2x) + b & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

Averiguamos los valores de  $b$  para que la función sea continua en  $x = \pi$ .

$$\left. \begin{aligned} f(\pi) &= 2 \operatorname{sen}(2\pi) + b = b \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} -8 \operatorname{sen}(x) + 4 = -8 \operatorname{sen}(\pi) + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} 2 \operatorname{sen}(2x) + b = b \\ f(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Para  $a = -8$  y  $b = 4$  la función es continua en  $[0, 2\pi]$ .

La función queda 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -8\operatorname{sen}(x) + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2\operatorname{sen}(2x) + 4 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Se cumple una de las hipótesis del teorema de Bolzano. Comprobamos si la función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo  $[0, 2\pi]$ .

$$f(0) = \frac{1}{2}(-8 + \cos 0) = \frac{1}{2}(-8 + 1) = \frac{-7}{2} < 0$$

$$f(2\pi) = 2\operatorname{sen}(2 \cdot 2\pi) + 4 = 4 > 0$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano para  $f(x)$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

- b) En el intervalo  $[0, 2\pi]$  la función es continua y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Se cumplen las dos condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y podemos afirmar que existe  $c \in (0, 2\pi)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Falta demostrar que esta solución es única.

En el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{1}{2}(-8 + \cos x)$ . Esta función siempre es negativa pues:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 > \cos x \geq 0 \Rightarrow -8 + 1 > -8 + \cos x \geq -8 + 0 \Rightarrow \frac{-7}{2} > \frac{1}{2}(-8 + \cos x) \geq -4$$

En el intervalo  $(\pi, 2\pi]$  la función tiene la expresión  $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x) + 4$ . Esta función siempre es positiva pues:

$$\pi < x \leq 2\pi \Rightarrow 2\pi < 2x \leq 4\pi \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen}(2x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\operatorname{sen}(2x) \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4 \leq 2\operatorname{sen}(2x) + 4 \leq 2 + 4 \Rightarrow 2 \leq 2\operatorname{sen}(2x) + 4 \leq 6$$

Por tanto, el valor  $c \in (0, 2\pi)$  tal que  $f(c) = 0$  debe pertenecer al intervalo  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

En este intervalo la función tiene la expresión  $f(x) = -8\operatorname{sen}(x) + 4$ . Resolvemos la ecuación  $-8\operatorname{sen}(c) + 4 = 0$  que nos permite encontrar el valor de  $c$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(c) = 0 \\ c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow -8\operatorname{sen}(c) + 4 = 0 \Rightarrow -8\operatorname{sen}(c) = -4 \Rightarrow \operatorname{sen}(c) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} x = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \dots \end{cases}$$

El único valor del intervalo  $[0, 2\pi]$  que cumple lo pedido es  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Pregunta 5.2.** Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Se pide:

- a) (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .  
 b) (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es derivable en el punto  $x=0$  y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  para  $x=0$ .

a) Para  $x \neq 0$  la función tiene la expresión  $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$  que es una función continua pues no se anula el denominador y la expresión del logaritmo es siempre positiva.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\ln(0^2+1)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0 \quad \left. \begin{matrix} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0}$$

La función es continua en  $x=0$ . Por tanto, la función es continua en  $\mathbb{R}$ .

b) La derivada de la función en  $x \neq 0$  es:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{1}{x} \ln(x^2+1)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-\ln(x^2+1)}{x^2} + \frac{2}{x^2+1}$$

Calculamos el límite de la derivada cuando  $x$  tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(x^2+1)}{x^2} + \frac{2}{x^2+1} = \frac{-\ln(0^2+1)}{0^2} + \frac{2}{0^2+1} = \frac{0}{0} + 2 =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{x^2+1}}{2x} + \frac{2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{2x(x^2+1)} + \frac{2}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1} = \frac{-1}{0^2 + 1} + \frac{2}{0^2 + 1} = -1 + 2 = \boxed{1}$$

La función  $f(x)$  es derivable en el punto  $x = 0$  y su derivada vale  $f'(0) = 1$ .

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  para  $x = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$