

**Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales****INDICACIONES**

- El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
- Cada ejercicio se calificará sobre una puntuación máxima de 10 puntos. La nota del examen será la media aritmética de esas tres puntuaciones.
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
- Se permite utilizar una calculadora científica básica con funciones estadísticas, pero queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.

**EJERCICIO 1 [10 puntos]**

Disponemos de tres fábricas, A, B y C, para la producción de camisetas. La fábrica A tiene capacidad para producir un 20% más de camisetas que las fábricas B y C juntas, y la fábrica B tiene capacidad para producir el doble de camisetas que la fábrica C. Se sabe además que entre las tres fábricas se pueden producir un total de 792 camisetas.

A. [5 PUNTOS]. Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

B. [5 PUNTOS]. Resuélvalo.

**EJERCICIO 2 [10 puntos]**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

A. [3 PUNTOS]. ¿Es posible calcular el producto  $AB$ ? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo,

¿qué dimensión tendrá la matriz resultante?

B. [3 PUNTOS]. Calcule  $AB + C$ . ¿Es invertible? Justifique la respuesta.

C. [4 PUNTOS]. Obtenga la matriz  $X$  tal que  $(AB + C)X = C$

**EJERCICIO 3 [10 puntos]**

Dada la función  $f(x) = \frac{15x-2}{3-x}$ .

A. [3 PUNTOS]. Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [4 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [3 PUNTOS]. Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**EJERCICIO 4 [10 puntos]**

Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx + 3$ .

A. [7 PUNTOS]. Determine los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función tenga un máximo relativo en el punto  $x_0 = 1$  y que dicho máximo sea  $f(1) = 6$ .

B. [3 PUNTOS]. Usando los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en el apartado anterior, calcule las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$

**EJERCICIO 5 [10 puntos]**

Se ha realizado un estudio sobre el número de horas semanales que dedican los estudiantes a estudiar fuera del horario lectivo. Se ha seleccionado una muestra de 40 alumnos y se ha obtenido la siguiente distribución de datos:

| Horas de estudio    | 2 | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 |
|---------------------|---|---|----|----|----|----|
| Frecuencia absoluta | 3 | 5 | 10 | 12 | 7  | 3  |

A. [2 PUNTOS]. Elabore la tabla de frecuencias relativas. Represente gráficamente los datos mediante un histograma o un polígono de frecuencias.

B. [5 PUNTOS]. Calcule las siguientes medidas de centralización: media, moda y mediana.

C. [3 PUNTOS]. Calcule la desviación típica.

**EJERCICIO 6 [10 puntos]**

En un examen de selección para un empleo, los candidatos deben responder a una prueba de conocimientos generales. Se sabe que:

- El 60% de los candidatos ha estudiado para el examen.
- Entre los que han estudiado, el 80% aprueba la prueba.
- Entre los que no han estudiado, solo el 30% aprueba la prueba.

Se elige un candidato al azar.

A. [3 PUNTOS]. ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato haya estudiado, pero no haya aprobado el examen?

B. [3 PUNTOS]. Determine la probabilidad de que un candidato seleccionado apruebe el examen.

C. [4 PUNTOS]. Si un candidato ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

**SOLUCIONES****EJERCICIO 1 [10 puntos]**

Disponemos de tres fábricas, A, B y C, para la producción de camisetas. La fábrica A tiene capacidad para producir un 20% más de camisetas que las fábricas B y C juntas, y la fábrica B tiene capacidad para producir el doble de camisetas que la fábrica C. Se sabe además que entre las tres fábricas se pueden producir un total de 792 camisetas.

A. [5 PUNTOS]. Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

B. [5 PUNTOS]. Resuélvalo.

A. Llamamos “x” a la capacidad de producción de la fábrica A, “y” a la capacidad de producción de la fábrica B y “z” a la capacidad de producción de la fábrica C.

“La fábrica A tiene capacidad para producir un 20% más de camisetas que las fábricas B y C juntas”  $\rightarrow x = 1.20(y + z)$

“La fábrica B tiene capacidad para producir el doble de camisetas que la fábrica C”  $\rightarrow y = 2z$

“Entre las tres fábricas se pueden producir un total de 792 camisetas”  $\rightarrow x + y + z = 792$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 792 \\ y = 2z \\ x = 1.20(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 792 \\ y = 2z \\ x = 1.2y + 1.2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 792 \\ y - 2z = 0 \\ x - 1.2y - 1.2z = 0 \end{array} \right\}$$

B. Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 792 \\ y = 2z \\ x - 1.2y - 1.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z + z = 792 \\ x - 1.2 \cdot 2z - 1.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 792 \\ x - 2.4z - 1.2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 792 \\ x - 3.6z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 792 \\ x = 3.6z \end{array} \right\} \Rightarrow 3.6z + 3z = 792 \Rightarrow 6.6z = 792 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{792}{6.6} = 120} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 3.6 \cdot 120 = 432} \\ \boxed{y = 2 \cdot 120 = 240} \end{array} \right.$$

La fábrica A produce 432 camisetas, la fábrica B produce 240 camisetas y la C produce 120 camisetas.

**EJERCICIO 2 [10 puntos]**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

A. [3 PUNTOS]. ¿Es posible calcular el producto  $AB$ ? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, ¿qué dimensión tendrá la matriz resultante?

B. [3 PUNTOS]. Calcule  $AB + C$ . ¿Es invertible? Justifique la respuesta.

C. [4 PUNTOS]. Obtenga la matriz  $X$  tal que  $(AB + C)X = C$

A. Para que sea posible el producto  $AB$  el número de columnas de  $A$  debe ser igual al número de columnas de  $B$ . Es posible el producto pues  $A$  tiene 3 columnas y  $B$  tiene 3 filas.

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0+0 & 0+0+1 \\ 5-2+0 & 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Hemos visto que si es posible el producto y la matriz resultado de la operación es una matriz cuadrada con 2 filas y 2 columnas.

B. Obtenemos la expresión de  $AB + C$ .

$$AB + C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C. Despejamos  $X$  en la ecuación matricial.

$$(AB + C)X = C \Rightarrow X = (AB + C)^{-1}C$$

Hallamos la inversa de  $AB + C$ .

$$AB + C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |AB + C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$(AB + C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB + C)^t)}{|AB + C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de  $X$ .

$$X = (AB + C)^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 1+0 \\ 0-3 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es  $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

**EJERCICIO 3 [10 puntos]**

Dada la función  $f(x) = \frac{15x-2}{3-x}$ .

A. [3 PUNTOS]. Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [4 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [3 PUNTOS]. Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

A. Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{15x-2}{3-x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{15x-2}{3-x} = 0 \Rightarrow 15x-2=0 \Rightarrow 15x=2 \Rightarrow x = \frac{2}{15} \Rightarrow A\left(\frac{2}{15}, 0\right)$$

Con el eje de abscisas la función tiene 1 punto de corte:  $A\left(\frac{2}{15}, 0\right)$ .

Hallamos los puntos de corte con el eje de ordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{15x-2}{3-x} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{15 \cdot 0 - 2}{3-0} = \frac{-2}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{-2}{3}\right)$$

Con el eje de ordenadas la función tiene 1 punto de corte  $B\left(0, \frac{-2}{3}\right)$ .

B. El dominio de la función  $f(x) = \frac{15x-2}{3-x}$  es  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{15x-2}{3-x} \rightarrow f'(x) = \frac{15(3-x) - (-1)(15x-2)}{(3-x)^2} = \frac{45-15x+15x-2}{(3-x)^2} = \frac{43}{(3-x)^2}$$

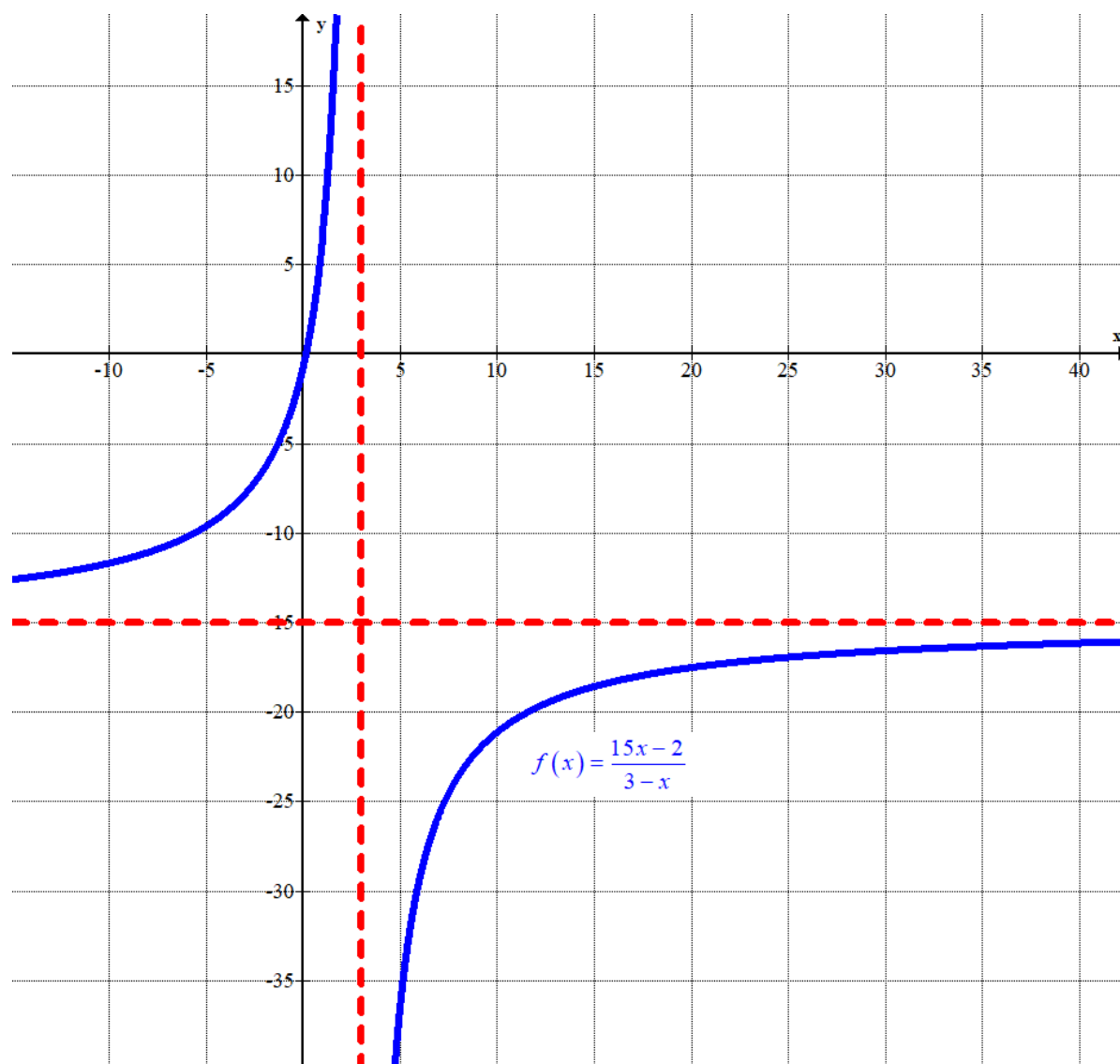
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{43}{(3-x)^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{43}{(3-x)^2} = 0 \Rightarrow 43 = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La derivada de la función tiene la expresión  $f'(x) = \frac{43}{(3-x)^2}$ . No presenta puntos críticos,

siendo la derivada siempre positiva. La función crece en todo su dominio  $\mathbb{R} - \{3\}$ .

C. Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x-2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15x}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15 - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{15 - \frac{2}{+\infty}}{\frac{3}{+\infty} - 1} = \frac{15-0}{0-1} = \boxed{-15}$$



**EJERCICIO 4 [10 puntos]**

Dada la función  $f(x) = ax^2 + bx + 3$ .

A. [7 PUNTOS]. Determine los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función tenga un máximo relativo en el punto  $x_0 = 1$  y que dicho máximo sea  $f(1) = 6$ .

B. [3 PUNTOS]. Usando los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en el apartado anterior, calcule las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$

A. Para que la función tenga un máximo relativo en el punto  $x_0 = 1$  la derivada debe anularse para dicho valor  $\Rightarrow f'(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + 3 \rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + b \rightarrow \boxed{b = -2a}$$

La función queda  $f(x) = ax^2 - 2ax + 3$ . Para determinar el valor de  $a$  usamos que  $f(1) = 6$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 2ax + 3 \\ f(1) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 = a \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + 3 \Rightarrow 6 = a - 2a + 3 \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Para  $a = -3$  tenemos que  $b = -2(-3) = 6$ . Los valores buscados son  $a = -3$  y  $b = 6$ .

B. Para los valores obtenidos la función queda  $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$

Resolvemos la ecuación  $f(x) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -3x^2 + 6x + 3 \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{1 \pm \sqrt{2}}$$

La ecuación tiene dos soluciones:  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$  y  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ .

**EJERCICIO 5 [10 puntos]**

Se ha realizado un estudio sobre el número de horas semanales que dedican los estudiantes a estudiar fuera del horario lectivo. Se ha seleccionado una muestra de 40 alumnos y se ha obtenido la siguiente distribución de datos:

|                            |          |          |           |           |           |           |
|----------------------------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Horas de estudio</b>    | <b>2</b> | <b>4</b> | <b>6</b>  | <b>8</b>  | <b>10</b> | <b>12</b> |
| <b>Frecuencia absoluta</b> | <b>3</b> | <b>5</b> | <b>10</b> | <b>12</b> | <b>7</b>  | <b>3</b>  |

A. [2 PUNTOS]. Elabore la tabla de frecuencias relativas. Represente gráficamente los datos mediante un histograma o un polígono de frecuencias.

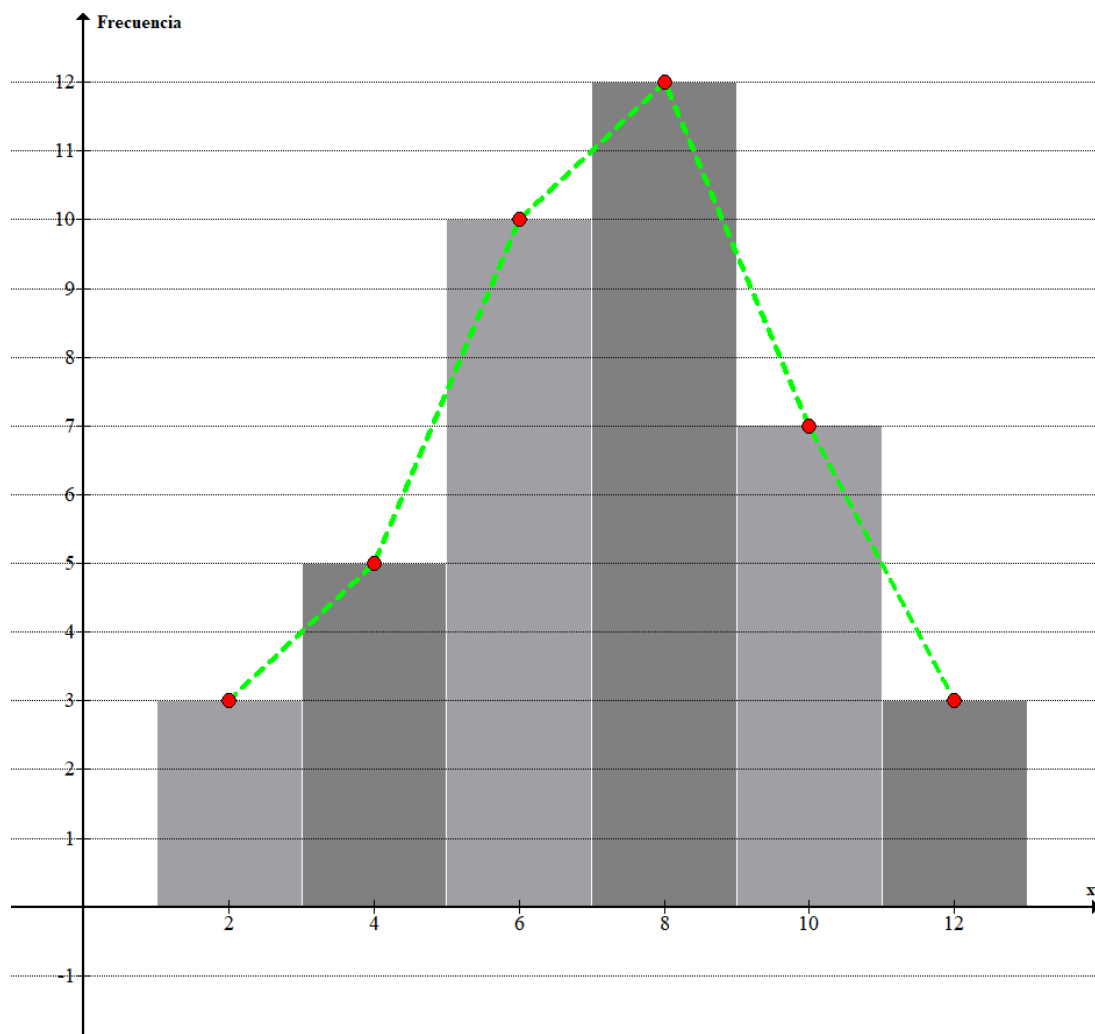
B. [5 PUNTOS]. Calcule las siguientes medidas de centralización: media, moda y mediana.

C. [3 PUNTOS]. Calcule la desviación típica.

A. Obtenemos las frecuencias relativas.

|                            |             |             |             |              |             |             |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|
| <b>Horas de estudio</b>    | <b>2</b>    | <b>4</b>    | <b>6</b>    | <b>8</b>     | <b>10</b>   | <b>12</b>   |
| <b>Frecuencia absoluta</b> | <b>3</b>    | <b>5</b>    | <b>10</b>   | <b>12</b>    | <b>7</b>    | <b>3</b>    |
| <b>Frecuencia relativa</b> | <b>3/40</b> | <b>5/40</b> | <b>6/40</b> | <b>12/40</b> | <b>7/40</b> | <b>3/40</b> |

Dibujamos el histograma y el polígono de frecuencias absolutas.



**B. Media.**

La media es  $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{N} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 3}{40} = 7.2$  horas semanales que dedican los alumnos a estudiar fuera del horario lectivo, es decir, 7 horas y 12 minutos.

Moda = 8 horas semanales pues tiene la frecuencia más alta (12 alumnos)

Mediana. Añadimos a la tabla la frecuencia acumulada para determinar el valor central.

|                             |          |          |           |           |           |           |
|-----------------------------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>Horas de estudio</b>     | <b>2</b> | <b>4</b> | <b>6</b>  | <b>8</b>  | <b>10</b> | <b>12</b> |
| <b>Frecuencia absoluta</b>  | <b>3</b> | <b>5</b> | <b>10</b> | <b>12</b> | <b>7</b>  | <b>3</b>  |
| <b>Frecuencia acumulada</b> | <b>3</b> | <b>8</b> | <b>18</b> | <b>30</b> | <b>37</b> | <b>40</b> |

$$\frac{40}{2} = 20 \Rightarrow \begin{cases} 20^\circ \rightarrow 8 \text{ horas} \\ 21^\circ \rightarrow 8 \text{ horas} \end{cases} \Rightarrow \text{Mediana} = 8 \text{ horas semanales}$$

**C. Desviación típica ( $\sigma$ ). Completamos la tabla de frecuencias.**

|                                               |           |           |            |            |            |            |             |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| <b>Horas de estudio (<math>x_i</math>)</b>    | <b>2</b>  | <b>4</b>  | <b>6</b>   | <b>8</b>   | <b>10</b>  | <b>12</b>  |             |
| $x_i^2$                                       | <b>4</b>  | <b>16</b> | <b>36</b>  | <b>64</b>  | <b>100</b> | <b>144</b> |             |
| <b>Frecuencia absoluta (<math>f_i</math>)</b> | <b>3</b>  | <b>5</b>  | <b>10</b>  | <b>12</b>  | <b>7</b>   | <b>3</b>   |             |
| $x_i^2 \cdot f_i$                             | <b>12</b> | <b>80</b> | <b>360</b> | <b>768</b> | <b>700</b> | <b>432</b> | <b>2352</b> |

Utilizamos la fórmula:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2}$ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{2352}{40} - 7.2^2} = \frac{\sqrt{174}}{5} \approx 2.64$$

La desviación típica tiene un valor aproximado de 2.64 horas, es decir, 2 horas y 38 minutos.

**EJERCICIO 6 [10 puntos]**

En un examen de selección para un empleo, los candidatos deben responder a una prueba de conocimientos generales. Se sabe que:

- El 60% de los candidatos ha estudiado para el examen.
- Entre los que han estudiado, el 80% aprueba la prueba.
- Entre los que no han estudiado, solo el 30% aprueba la prueba.

Se elige un candidato al azar.

A. [3 PUNTOS]. ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato haya estudiado, pero no haya aprobado el examen?

B. [3 PUNTOS]. Determine la probabilidad de que un candidato seleccionado apruebe el examen.

C. [4 PUNTOS]. Si un candidato ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

Llamamos  $A$  = "El candidato ha estudiado para el examen",  $B$  = "El candidato aprueba el examen.

Con los datos proporcionados sabemos que  $P(A) = 0.60$ ;  $P(B/A) = 0.80$  y  $P(B/\bar{A}) = 0.30$ .

A. Nos piden determinar el valor de  $P(\bar{B}/A)$ . Como el 80% de los que han estudiado aprueban el examen, el restante  $100 - 80 = 20\%$  no han aprobado el examen. Por lo tanto  $P(\bar{B}/A) = 0.20$ .

B. Nos piden determinar el valor de  $P(B)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(A) P(B/A) + P(\bar{A}) P(B/\bar{A}) = 0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.30 = \boxed{0.6}$$

C. Debemos calcular  $P(A/B)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B/A)}{P(B)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6} = \boxed{0.8}$$