



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
PROBA: 25 ETA 45 URTETIK
GORAKOENTZAT
2025eko MAIATZA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD: MAYORES DE 25 Y
45 AÑOS
MAYO 2025

GIZARTE- ETA OSASUN-
ZIENTZIETARAKO MATEMATIKA

MATEMÁTICAS PARA LAS
CIENCIAS SOCIALES Y DE LA SALUD

Aclaraciones previas	1) Tiempo de duración de la prueba: 1 hora 2) Contesta a cinco de los seis ejercicios propuestos 3) Cada ejercicio vale 2 puntos
-----------------------------	---

- 1) Tenemos un dado y dos urnas con bolas. La urna A contiene 2 bolas verdes, 3 azules y 4 negras. La urna B contiene 3 bolas verdes, 5 azules y 2 negras. Lanzamos el dado para seleccionar de qué urna sacar una bola: si se obtiene 5 o 6 sacamos la bola de la urna B. Si no, la sacamos de la urna A. Calcula:
 - a) La probabilidad de que la bola extraída sea de color azul.
 - b) La probabilidad de haber sacado 5 o 6 y que la bola extraída sea azul.
 - c) Sabiendo que la bola extraída es azul, la probabilidad de que hallamos sacado un número inferior a 5.

- 2) Un pastelero hornea tartas de limón y de fresa. Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €. Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €. Calcula el beneficio que obtiene con cada uno de los tipos de tarta.

- 3) Hallar el área de recinto que delimitan las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = 2x - 1$$

- 4) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y haz un dibujo aproximado de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

- 5) La velocidad promedio de una persona al correr puede variar en función de varios factores, como la condición física, la edad y la experiencia en la práctica de este deporte. En general, se considera que la velocidad promedio de un corredor adulto se ajusta a una distribución normal de media 5,63 km/h y desviación típica 0,8 km/h. Calcula los siguientes porcentajes:

- a) El porcentaje de adultos que camina a una velocidad superior a 7 km/h.
- b) El porcentaje de adultos que camina a una velocidad entre 4 km/h y 7 km/h.

- 6) En el 2023 se vendieron 92,7 millones de coches ven el mundo, de los cuales 13,7 millones fueron híbridos enchufables (aproximadamente el 15%). En España se vendieron aproximadamente 950.000 coches.

Teniendo en cuenta los coches vendidos en España, calcula la probabilidad de que sí sean híbridos enchufables las siguientes cantidades:

- a) Su número haya sido inferior a 142.000 unidades.
- b) Su número haya estado comprendido entre 142.000 y 142.800 unidades, incluyendo ambas.

$N(0, 1)$ kurbak $-\infty$ -tik z -raino mugateko azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta z



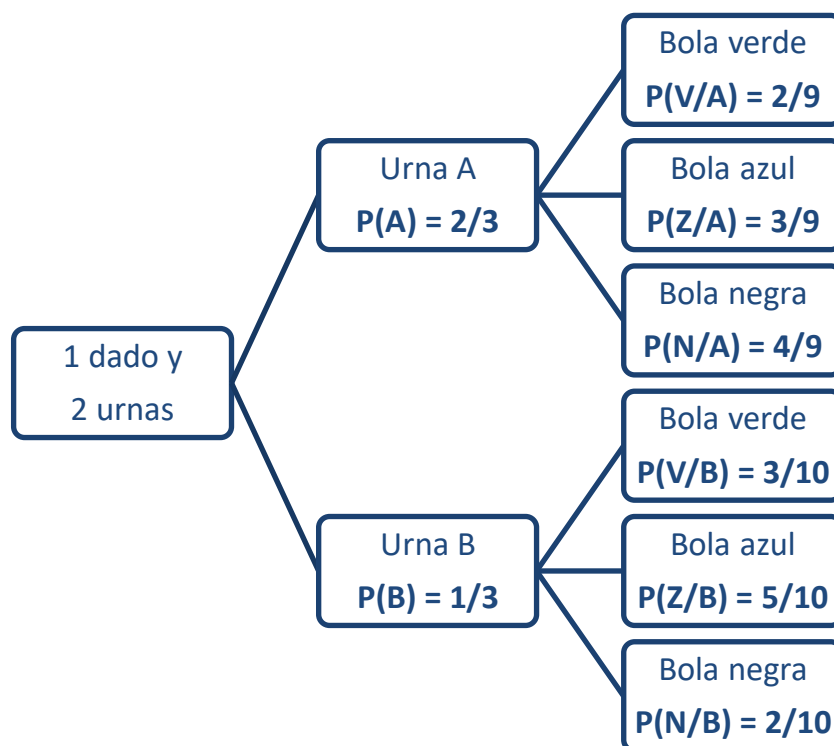
	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

- 1) Tenemos un dado y dos urnas con bolas. La urna A contiene 2 bolas verdes, 3 azules y 4 negras. La urna B contiene 3 bolas verdes, 5 azules y 2 negras. Lanzamos el dado para seleccionar de qué urna sacar una bola: si se obtiene 5 o 6 sacamos la bola de la urna B. Si no, la sacamos de la urna A. Calcula:
- La probabilidad de que la bola extraída sea de color azul.
 - La probabilidad de haber sacado 5 o 6 y que la bola extraída sea azul.
 - Sabiendo que la bola extraída es azul, la probabilidad de que hallamos sacado un número inferior a 5.

La probabilidad de elegir la urna B vale $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. La probabilidad de elegir la urna A vale $P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Llamamos V a sacar bola verde de la urna, Z a sacar bola azul y N a sacar bola negra. Realizamos un diagrama de árbol con los posibles resultados del experimento y las probabilidades de que ocurran.



a) Nos piden calcular $P(Z)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(Z) = P(A)P(Z/A) + P(B)P(Z/B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18} \approx 0.384$$

b) Nos piden calcular $P(B \cap (Z/B))$

$$P(B \cap (Z/B)) = P(B)P(Z/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{6} \approx 0.162$$

c) Debemos calcular $P(A/Z)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/Z) = \frac{P(A \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(A)P(Z/A)}{P(Z)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \approx 0.5714$$

- 2) Un pastelero hornea tartas de limón y de fresa. Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €. Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €. Calcula el beneficio que obtiene con cada uno de los tipos de tarta.

Llamamos “x” al beneficio obtenido por una tarta de limón e “y” al beneficio obtenido por una tarta de fresa.

“Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €” $\rightarrow 12x + 5y = 520$

“Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €” $\rightarrow 8x + 10y = 560$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ 8x + 10y = 560 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ 4x + 5y = 280 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ -4x - 5y = -280 \end{array} \Rightarrow$$

$$\overline{8x} \quad \quad \quad = 240 \Rightarrow \boxed{x = \frac{240}{8} = 30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 30 + 5y = 520 \Rightarrow 5y = 520 - 360 = 160 \Rightarrow \boxed{y = \frac{160}{5} = 32}$$

El beneficio obtenido por una tarta de limón es de 30 euros y por una tarta de fresa de 32 euros.

3) Hallar el área de recinto que delimitan las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + 4 \\ g(x) = 2x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x=1$ y $x=5$.

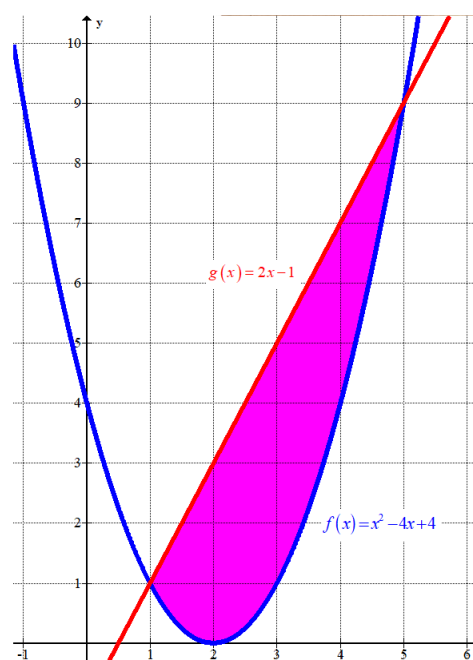
Calculamos el valor del área del recinto como la integral definida entre 1 y 5 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^5 g(x) - f(x) dx = \int_1^5 2x - 1 - (x^2 - 4x + 4) dx = \int_1^5 2x - 1 - x^2 + 4x - 4 dx = \\ &= \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \left[-\frac{5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \right] = \\ &= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto delimitado por ellas.

x	$f(x) = x^2 - 4x + 4$
1	1
2	0
5	9

x	$g(x) = 2x - 1$
1	1
2	3
5	9



4) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y haz un dibujo aproximado de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

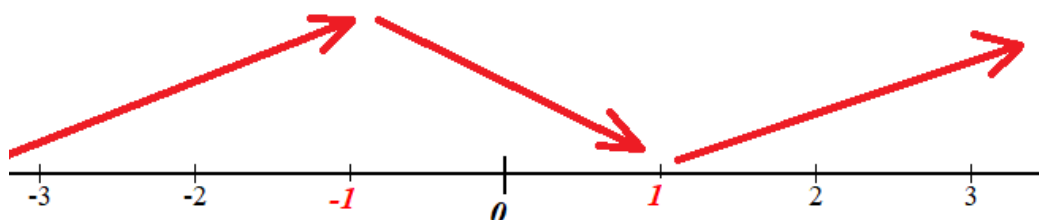
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.

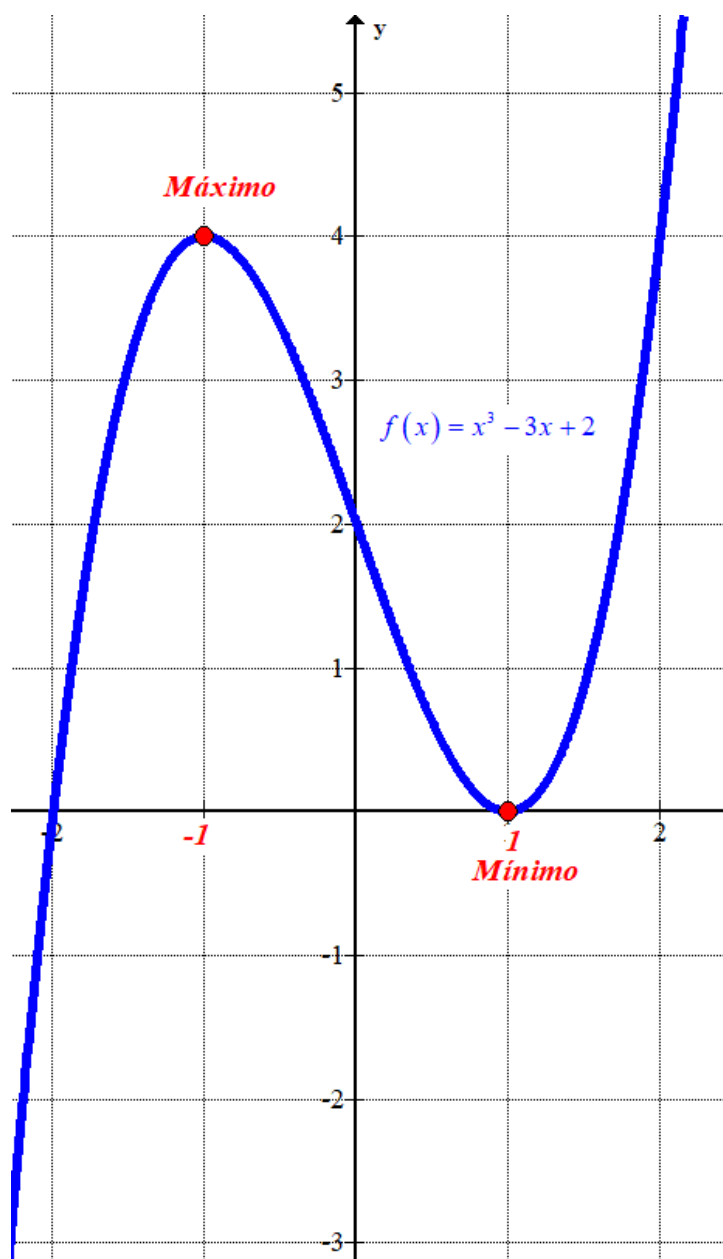


La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 4)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4



5) La velocidad promedio de una persona al correr puede variar en función de varios factores, como la condición física, la edad y la experiencia en la práctica de este deporte. En general, se considera que la velocidad promedio de un corredor adulto se ajusta a una distribución normal de media 5,63 km/h y desviación típica 0,8 km/h. Calcula los siguientes porcentajes:

- El porcentaje de adultos que camina a una velocidad superior a 7 km/h.
- El porcentaje de adultos que camina a una velocidad entre 4 km/h y 7 km/h.

Consideramos la variable aleatoria $X = \text{Velocidad promedio de un corredor adulto expresada en km/h}$. $X = N(5.63, 0.8)$.

- Calculamos la probabilidad de que un adulto camine a una velocidad superior a 7 km/h, es decir, $P(X > 7)$.

$$P(X > 7) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{7-5.63}{0.8}\right) = P(Z > 1.7125) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.7125) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7611 = \boxed{0.2389}$$

	0	0'01	
0	0'5000	0'5040	0
0'1	0'5398	0'5438	0
0'2	0'5793	0'5832	0
0'3	0'6179	0'6217	0
0'4	0'6554	0'6591	0
0'5	0'6915	0'6950	0
0'6	0'7257	0'7291	0
0'7	0'7580	0'7611	0

Como la probabilidad de que un adulto camine a una velocidad superior a 7 km/h vale 0.2389 entonces el porcentaje de adultos que camina a una velocidad superior a 7 km/h es del 23.89%.

- Calculamos la probabilidad de que un adulto camine a una velocidad entre 4 km/h y 7 km/h, es decir, $P(4 \leq X \leq 7)$.

$$P(4 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 4) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{7-5.63}{0.8}\right) - P\left(Z \leq \frac{4-5.63}{0.8}\right) = P(Z \leq 1.7125) - P(Z \leq -2.0375) =$$

$$= P(Z \leq 1.7125) - P(Z \geq 2.0375) = P(Z \leq 1.7125) - [1 - P(Z \leq 2.0375)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7611 - [1 - 0.9793] = \boxed{0.7404}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0
2	0'9779	0'9785	0'9790	0'9795	0'9799	0

Como la probabilidad de que un adulto camine a una velocidad entre 4 y 7 km/h vale 0.7404, entonces el porcentaje de adultos que camina a una velocidad entre 4 y 7 km/h es del 74.04%.

6) En el 2023 se vendieron 92,7 millones de coches en el mundo, de los cuales 13,7 millones fueron híbridos enchufables (aproximadamente el 15%). En España se vendieron aproximadamente 950.000 coches.

Teniendo en cuenta los coches vendidos en España, calcula la probabilidad de que sí sean híbridos enchufables las siguientes cantidades:

- Su número haya sido inferior a 142.000 unidades.
- Su número haya estado comprendido entre 142.000 y 142.800 unidades, incluyendo ambas.

La proporción de coches híbridos enchufables vendidos en el mundo es 0.15. Consideramos la variable aleatoria X = Número de coches híbridos enchufables de un grupo de 950000 coches vendidos en España. Esta variable es binomial de parámetros $n = 950000$ y $p = 0.15$. $X = B(950000, 0.15)$.

Como el número de repeticiones es muy alta aproximamos esta binomial por una normal $Y = N(\mu, \sigma)$, siendo la media $\mu = np = 950000 \cdot 0.15 = 142500$ coches y la desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{950000 \cdot 0.15 \cdot 0.85} \approx 348$ coches. $Y = N(142500, 348)$

a) Debemos calcular $P(X < 142000)$.

$$P(X < 142000) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 141999.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{141999.5 - 142500}{348}\right) = P(Z \leq -1.44) = P(Z \geq 1.44) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.44) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9251 = \boxed{0.0749}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7421
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8530
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8943
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265
1'5	0'9322	0'9336	0'9349	0'9362	0'9375	0'9388

b) Debemos calcular $P(142000 \leq X \leq 142800)$.

$$P(142000 \leq X \leq 142800) = P(X \leq 142800) - P(X \leq 142000) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{142800 - 142500}{348}\right) - P\left(Z \leq \frac{142000 - 142500}{348}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0.86) - P(Z \leq -1.44) = P(Z \leq 0.86) - P(Z \geq 1.44) =$$

$$= P(Z \leq 0.86) - [1 - P(Z \leq 1.44)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} =$$

$$= 0.8051 - [1 - 0.9251] = \boxed{0.7302}$$