



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



CONVOCATÒRIA: EXTRA JULIOL 2025	CONVOCATORIA: EXTRA JULIO 2025
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una de ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

- a) Calcular $M = AB^tC - D$. (0,75 puntos)
- b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. (0,75 puntos)
- c) Hallar M^2 y M^8 . (0,5 puntos)
- d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . (0,5 puntos)
- e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^tB)^t$. (1 punto)

Problema 1. B. Una empresa de organización de eventos desea poner a la venta dos tipos de entradas para un evento musical: entradas preferentes y entradas estándar, que se venden a 115€ y 90€, respectivamente, aunque en las localidades preferentes la empresa tiene unos gastos de 5€ por entrada porque en ellas se sirve un aperitivo. La instalación de cada localidad preferente tiene un coste de 20€ y la de cada localidad estándar de 10€; la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación. El aforo máximo es de 75 asientos.

- a) ¿Cuántas entradas de cada tipo se deben poner a la venta para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Una empresa agrícola que se dedica al cultivo de frutas tropicales ha implementado un sistema de riego automatizado para optimizar el consumo de agua. La función que describe la necesidad de agua del cultivo (en $m^3/día$) tras x días de crecimiento, para x entre 0 y 30, es:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 30]$. (0,75 puntos)
- b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima. (2 puntos)
- c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. (0,75 puntos)

Problema 2. B. Cuando la temperatura de un invernadero se mantiene a x grados centígrados, siendo x un número real entre 10 y 30, la producción (en kilogramos) de cierta hortaliza viene dada por la función $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$. Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.

- a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. (1,5 puntos)
- b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. (1 punto)
- c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg? (1 punto)

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. Manuel va a celebrar su cumpleaños y ha invitado a dos grupos de amigos que no se conocen entre sí: del instituto y de su barrio. Cada grupo va a una tienda distinta a comprar un regalo. El grupo del instituto va a la tienda A, donde un 40% de los regalos son libros, un 15% es ropa y un 45% son juegos. El grupo de su barrio va a la tienda B, donde el 20% son libros, el 10% es ropa y el 70% son juegos. Supón que cada grupo elige aleatoriamente su regalo. Calcula:

- a) La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo. (1 punto)
- b) La probabilidad de que Manuel tenga como regalo un libro o un juego. (1 punto)
- c) La probabilidad de que, si uno de los regalos es ropa y el otro no, el regalo de ropa se haya comprado en la tienda A. (1 punto)

Soluciones

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 1 \ 0), \quad C = (1 \ 2) \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

a) Calcular $M = AB^tC - D$. (0,75 puntos)

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. (0,75 puntos)

c) Hallar M^2 y M^8 . (0,5 puntos)

d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . (0,5 puntos)

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^tB)^t$. (1 punto)

a) Calculamos la expresión de la matriz M .

$$M = AB^tC - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 2) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ -1+3+0 \end{pmatrix} (1 \ 2) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \longrightarrow 2 \times 1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

La matriz M tiene la expresión $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Para que M sea invertible su determinante debe ser distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

La matriz M es invertible. Hallamos su inversa.

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz M tiene la expresión $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

c) Hallamos M^2 .

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-2 \\ 1-1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_2$$

Hallamos M^8 .

$$M^8 = (M^2)^4 = (3I_2)^4 = 3^4 (I_2)^4 = 81 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$ y $M^8 = 81 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$.

d) Hallamos la expresión de las matrices CC^t y C^tC .

$$CC^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1+4) = (5)$$

$$1 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

$$C^tC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{1 \cdot 1} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$$

El determinante de la matriz CC^t vale 5 que es un valor distinto de cero, por lo que la matriz CC^t tiene inversa.

El determinante de la matriz C^tC vale $|C^tC| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$. Como el determinante es nulo la matriz C^tC no tiene inversa.

e) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^tB)^t \Rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (C^tB)^t - A^t \Rightarrow X = \left[(C^tB)^t - A^t \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Determinamos la expresión de la matriz $(C^tB)^t - A^t$.

$$C^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (C^tB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C^tB)^t - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-1-2} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$\begin{aligned} X &= \left[(C^t B)^t - A^t \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0-3 & 0+3 \\ -1+1 & -2-1 \\ 2+1 & 4-1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad 3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2 \end{aligned}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 1. B. Una empresa de organización de eventos desea poner a la venta dos tipos de entradas para un evento musical: entradas preferentes y entradas estándar, que se venden a 115€ y 90€, respectivamente, aunque en las localidades preferentes la empresa tiene unos gastos de 5€ por entrada porque en ellas se sirve un aperitivo. La instalación de cada localidad preferente tiene un coste de 20€ y la de cada localidad estándar de 10€; la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación. El aforo máximo es de 75 asientos.

- a) ¿Cuántas entradas de cada tipo se deben poner a la venta para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)
 b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

a) Llamamos x = número de entradas preferentes e y = número de entradas estándar.
 Realizamos una tabla.

	Coste de aperitivo	Gastos instalación	Ingresos
Nº entradas preferentes (x)	$5x$	$20x$	$115x$
Nº entradas estándar (y)		$10y$	$90y$
TOTALES	$5x$	$20x + 10y$	$115x + 90y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que son la diferencia entre los ingresos por las entradas y los gastos en el aperitivo:

$$B(x, y) = 115x + 90y - 5x = 110x + 90y.$$

Las restricciones son:

“La empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación” $\rightarrow$
 $20x + 10y \leq 1000$

“El aforo máximo es de 75 asientos” $\rightarrow x + y \leq 75$.

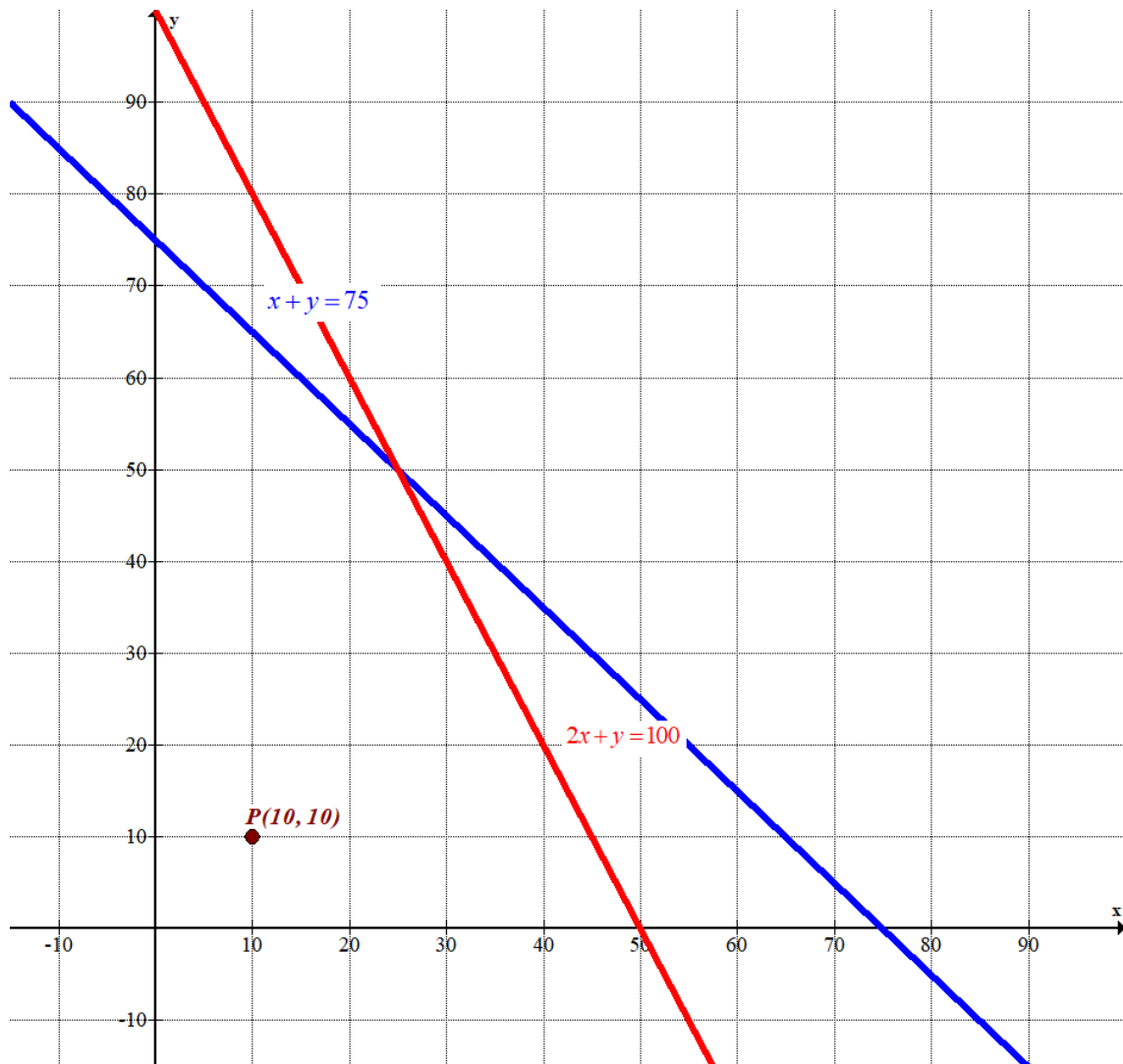
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 10y \leq 1000 \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 100$		$x + y = 75$		$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
x	$y = 100 - 2x$	x	$y = 75 - x$	
0	100	0	75	
25	50	25	50	
50	0	50	25	

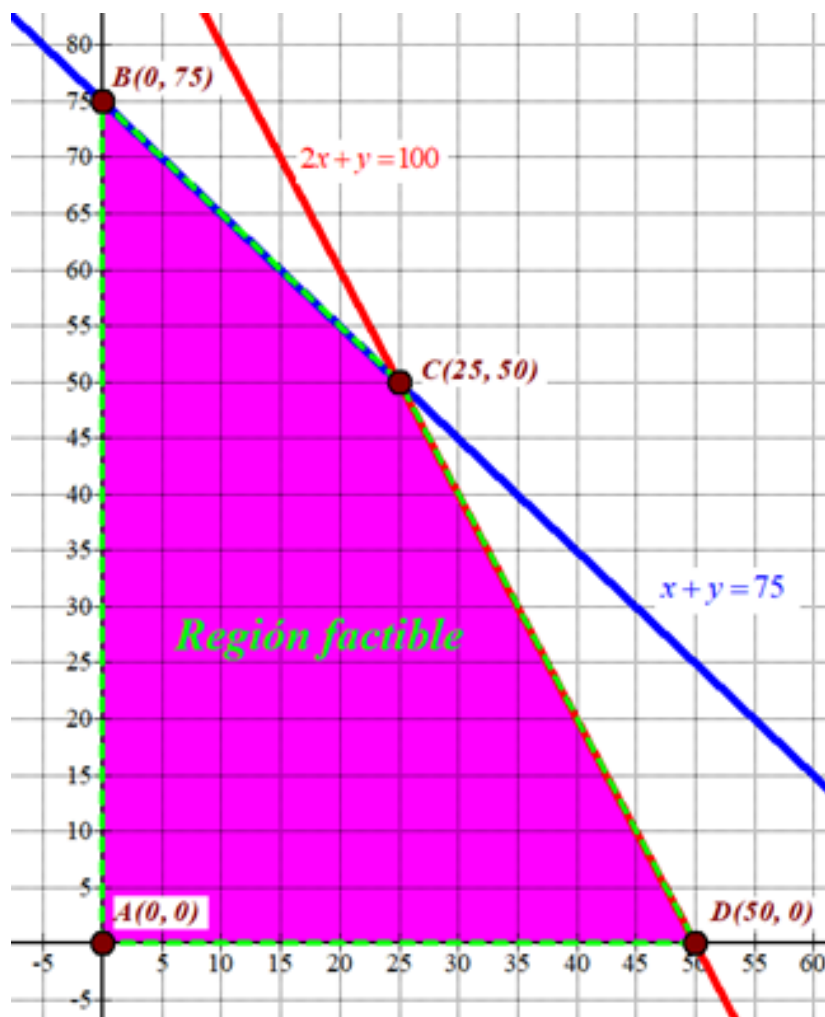


Como las restricciones del problema son $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del

primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja. Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 10 + 10 \leq 100 \\ 10 + 10 \leq 75 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 75), C(25, 50) y D(50, 0).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 110x + 90y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 75) \rightarrow B(0, 75) = 110 \cdot 0 + 90 \cdot 75 = 6750$$

$$C(25, 50) \rightarrow B(25, 50) = 110 \cdot 25 + 90 \cdot 50 = 7250 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(50, 0) \rightarrow B(50, 0) = 110 \cdot 50 + 90 \cdot 0 = 5500$$

El valor máximo de la función beneficios se obtiene en el vértice C(25, 50). Se deben vender 25 entradas preferentes y 50 estándar para maximizar los beneficios.

b) El máximo beneficio que se puede obtener es de 7250 €.

Problema 2. A. Una empresa agrícola que se dedica al cultivo de frutas tropicales ha implementado un sistema de riego automatizado para optimizar el consumo de agua. La función que describe la necesidad de agua del cultivo (en $m^3/día$) tras x días de crecimiento, para x entre 0 y 30, es:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 30]$. (0,75 puntos)
 b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima. (2 puntos)
 c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. (0,75 puntos)

a) En el intervalo $[0, 8)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(8, 20)$ la función tiene la expresión $f(x) = 3x + 9$, que es una expresión polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(20, 30]$ la función tiene la expresión $f(x) = 70$, que es una función constante y por tanto continua.

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición $x = 8$ y $x = 20$.

$$\left. \begin{aligned} f(8) &= 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266 \\ \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} x^3 - 4x^2 + 10 = 266 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 9 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 266 \neq 33 = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 8$.

$$\left. \begin{aligned} f(20) &= 3 \cdot 20 + 9 = 69 \\ \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 20^-} 3x + 9 = 69 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 20^+} 70 = 70 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 69 \neq 70 = \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 20$.

La función es continua en $[0, 8) \cup (8, 20) \cup (20, 30]$.

b) Derivamos la función.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ 3 & \text{si } 8 < x < 20 \\ 0 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

En el intervalo $[0, 8)$ la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x$. Averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(3x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0, 8) \\ 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3} \approx 2.6 \in [0, 8) \end{cases}$$

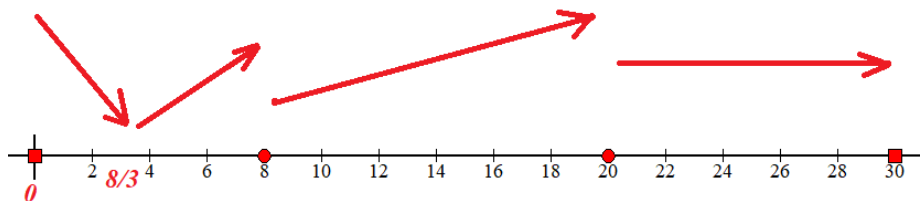
Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f''(x) = 6x - 8 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 6 \cdot 0 - 8 = -8 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ f''\left(\frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \frac{8}{3} - 8 = 8 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

En el intervalo $(8, 20)$ la derivada es $f'(x) = 3 > 0$. La función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(20, 30]$ la derivada es $f'(x) = 0$. La función es constante en este intervalo.

La función sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los extremos de cada intervalo y en $x = \frac{8}{3}$ para averiguar donde se alcanza el valor máximo y donde el valor mínimo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 10 = 10 \\ f\left(\frac{8}{3}\right) &= \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 10 = \frac{14}{27} \approx 0.518 \text{ Mínimo} \\ f(8) &= 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266 \text{ Máximo} \\ f(20) &= 3 \cdot 20 + 9 = 69 \\ f(30) &= 70 \end{aligned} \right\}$$

La necesidad de agua es máxima al octavo día y mínima entre el segundo y el tercer día.

- c) La función en el intervalo $(3, 7)$ tiene la expresión $f(x) = x^3 - 4x^2 + 10$. En el apartado anterior hemos visto que la función siempre es positiva, pues su valor mínimo es $\frac{14}{27} > 0$.

El área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7 es el valor de la integral definida entre 3 y 7 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 x^3 - 4x^2 + 10 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 10x \right]_3^7 = \\ &= \left[\frac{7^4}{4} - \frac{4 \cdot 7^3}{3} + 10 \cdot 7 \right] - \left[\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + 10 \cdot 3 \right] = \boxed{\frac{596}{3} \approx 198.66 u^2} \end{aligned}$$

Problema 2. B. Cuando la temperatura de un invernadero se mantiene a x grados centígrados, siendo x un número real entre 10 y 30, la producción (en kilogramos) de cierta hortaliza viene dada por la función $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$. Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.

- a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. (1,5 puntos)
 b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. (1 punto)
 c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg? (1 punto)

- a) Si la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados entonces la derivada se anula para $x = 21 \rightarrow Q'(21) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} Q(x) &= 30x^2 + Ax + B - x^3 \rightarrow Q'(x) = 60x + A - 3x^2 \\ Q'(21) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 \cdot 21 + A - 3 \cdot 21^2 = 0 \Rightarrow A - 63 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 63}$$

La función queda $Q(x) = 30x^2 + 63x + B - x^3$. Si la producción máxima se produce con 21 grados y dicha producción máxima es de 5.300 kg entonces tenemos que $Q(21) = 5300$.

$$\left. \begin{aligned} Q(21) &= 5300 \\ Q(x) &= 30x^2 + 63x + B - x^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 30 \cdot 21^2 + 63 \cdot 21 + B - 21^3 = 5300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5292 + B = 5300 \Rightarrow \boxed{B = 5300 - 5292 = 8}$$

Los valores buscados son $A = 63$ y $B = 8$. La expresión de la función de producción quedaría $Q(x) = 30x^2 + 63x + 8 - x^3$

- b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos (sabemos que tiene un máximo en 21 grados, realmente buscamos algún punto crítico más).

$$Q(x) = 30x^2 + 63x + 8 - x^3 \Rightarrow Q'(x) = 60x + 63 - 3x^2$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow 60x + 63 - 3x^2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 20x + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4(-1) \cdot 21}}{2(-1)} = \frac{-20 \pm 22}{-2} = \begin{cases} = \frac{-20 + 22}{-2} = -1 \notin [10, 30] \\ = \frac{-20 - 22}{-2} = 21 \in [10, 30] \end{cases}$$

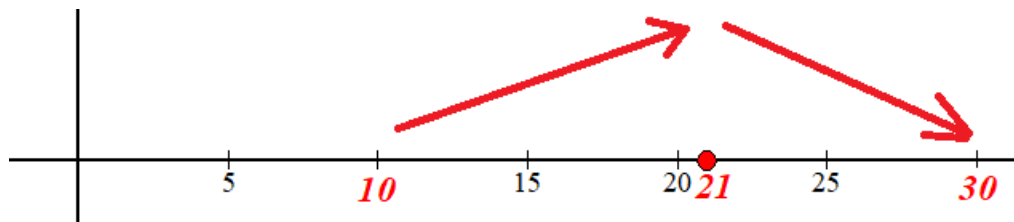
La función presenta un único punto crítico en 21 grados. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 21 (comprobamos que es un máximo).

- En el intervalo $[10, 21)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale $Q'(15) = 60 \cdot 15 + 63 - 3 \cdot 15^2 = 288 > 0$. La función crece en $[10, 21)$.
- En el intervalo $(21, 30]$ tomamos $x = 25$ y la derivada vale $Q'(25) = 60 \cdot 25 + 63 - 3 \cdot 25^2 = -312 < 0$. La función decrece en $(21, 30]$.

La función crece en $[10, 21)$ y decrece en $(21, 30]$.

c) Comprobamos si es posible que $Q(x) < 1000$.

La producción sigue el esquema siguiente (obtenido en el apartado anterior).



Los valores mínimos la función los alcanza en los extremos del intervalo de definición $[10, 30]$. Calculamos el valor de la función en dichos extremos.

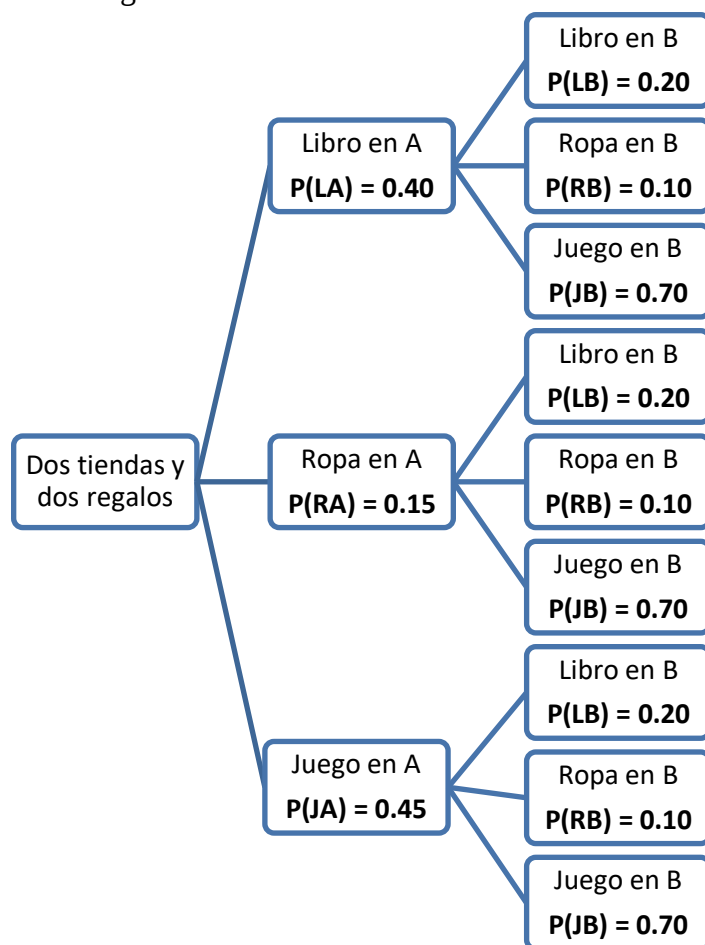
$$\left. \begin{array}{l} Q(10) = 30 \cdot 10^2 + 63 \cdot 10 + 8 - 10^3 = 2638 \\ Q(30) = 30 \cdot 30^2 + 63 \cdot 30 + 8 - 30^3 = 1898 \end{array} \right\} \Rightarrow Q(30) = 1898 \text{ ¡Mínima producción!}$$

El valor mínimo que alcanza la función $Q(x)$ en el intervalo $[10, 30]$ es 1898 kilogramos, por lo que podemos afirmar que la producción nunca es inferior a 1000 kilogramos.

Problema 3. Manuel va a celebrar su cumpleaños y ha invitado a dos grupos de amigos que no se conocen entre sí: del instituto y de su barrio. Cada grupo va a una tienda distinta a comprar un regalo. El grupo del instituto va a la tienda A, donde un 40% de los regalos son libros, un 15% es ropa y un 45% son juegos. El grupo de su barrio va a la tienda B, donde el 20% son libros, el 10% es ropa y el 70% son juegos. Supón que cada grupo elige aleatoriamente su regalo. Calcula:

- La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo. (1 punto)
- La probabilidad de que Manuel tenga como regalo un libro o un juego. (1 punto)
- La probabilidad de que, si uno de los regalos es ropa y el otro no, el regalo de ropa se haya comprado en la tienda A. (1 punto)

Llamamos LA al suceso “comprar un libro en la tienda A”, RA a “comprar ropa en la tienda A” y JA a “comprar un juego en la tienda A”. De forma análoga llamamos LB al suceso “comprar un libro en la tienda B”, RB a “comprar ropa en la tienda B” y JB a “comprar un juego en la tienda B”. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Calculamos la probabilidad de que tenga dos regalos del mismo tipo.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Mismo tipo}) &= P(LA)P(LB) + P(RA)P(RB) + P(JA)P(JB) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.2 + 0.15 \cdot 0.1 + 0.45 \cdot 0.7 = 0.41
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo (suceso complementario) vale $1 - 0.41 = 0.59$.

b) El suceso contrario a “recibir de regalo un juego o un libro” es “recibir de regalo ropa de los dos grupos”. Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$1 - P(RA)P(RB) = 1 - 0.15 \cdot 0.1 = 0.985$$

c) Nos piden calcular $P(RA / \text{un regalo es ropa y el otro no})$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(RA / \text{un regalo es ropa y el otro no}) = \frac{P(\text{un regalo es ropa y el otro no} \cap RA)}{P(\text{un regalo es ropa y el otro no})} =$$

$$= \frac{P(RA \cap LB) + P(RA \cap JB)}{P(LA \cap RB) + P(RA \cap LB) + P(RA \cap JB) + P(JA \cap RB)} =$$

$$= \frac{0.15 \cdot 0.20 + 0.15 \cdot 0.70}{0.40 \cdot 0.10 + 0.15 \cdot 0.20 + 0.15 \cdot 0.70 + 0.45 \cdot 0.10} = \boxed{\frac{27}{44} \approx 0.6136}$$