



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar). Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia.

Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- a) [0.5 puntos] Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- b) [0.5 puntos] Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- c) [0.5 puntos] Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- d) [0.5 puntos] Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

2. Responde justificadamente los siguientes apartados:

- a) [1 punto] Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- b) [0.5 puntos] Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- c) [0.5 puntos] Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) [0.5 puntos] Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- b) [1.5 puntos] Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctg(x + \pi)$, donde $\arctg$ denota la función arcotangente.

a) [1 punto] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 (2 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

5.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1 punto) Considera el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales, calcula su área, y comprueba el resultado mediante otro método.

Nota: Puedes utilizar las siguientes fórmulas si te resultan de utilidad en alguno de los ejercicios anteriores.

▪ En el paralelogramo ABCD podemos calcular su área con la expresión $\text{Área} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$.

▪ Dado un triángulo ABC, su área puede obtenerse con la expresión $\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$.

▪ Sea el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, entonces su volumen puede ser obtenido por la expresión $\text{Volumen} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$.

▪ El volumen de un tetraedro de vértices A , B , C y D puede ser obtenido por la expresión

$$\text{Volumen} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}.$$

SOLUCIONES

Análisis 40%	Álgebra (20%)	Geometría (20%)	Probabilidad y estadística (20%)
---------------------	---------------	-----------------	----------------------------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.

Pregunta 2. (Obligatoria) Análisis.

Pregunta 3. (Obligatoria) Álgebra.

Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis.

Pregunta 5. (Con optatividad) Geometría.

1. La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

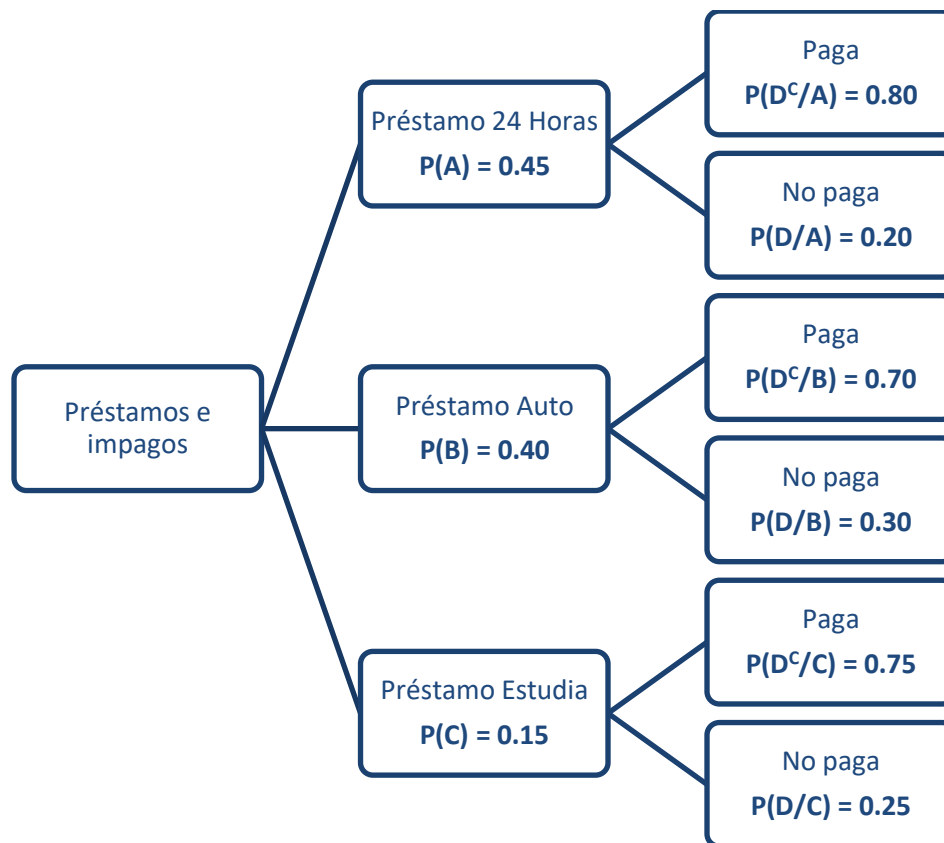
La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia.

Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- [0.5 puntos] Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- [0.5 puntos] Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- [0.5 puntos] Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- [0.5 puntos] Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

Llamamos A al suceso “tener un Préstamo 24 Horas”, B a “tener un Préstamo Auto”, C a “tener un Préstamo Estudia” y D a “no pagar el préstamo”.

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite expresar de forma ordenada lo que sucede en el experimento y la probabilidad de cada suceso del mismo.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.20 + 0.40 \cdot 0.30 + 0.15 \cdot 0.25 = \boxed{0.2475}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.40 \cdot 0.30}{0.2475} = \boxed{\frac{16}{33} \approx 0.4848}$$

c) Nos piden calcular $P(C/D^c)$.

$$P(C/D^c) = \frac{P(C \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C)P(D^c/C)}{1 - P(D)} = \frac{0.15 \cdot 0.75}{1 - 0.2475} = \boxed{\frac{45}{301} \approx 0.1495}$$

d) Dos sucesos F y G son incompatibles cuando $F \cap G = \emptyset$, es decir, no tienen nada en común.

El experimento consiste en elegir un préstamo al azar y sabemos que cada cliente solo puede tener uno de los préstamos que la entidad concede, por lo que $A \cap B = \emptyset$.

El suceso A = “el préstamo es 24 Horas” y el suceso B = “el préstamo es Auto” son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$.

2. Responde justificadamente los siguientes apartados:

- a) [1 punto] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- b) [0.5 puntos] Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- c) [0.5 puntos] Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x = x^2 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \\ x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

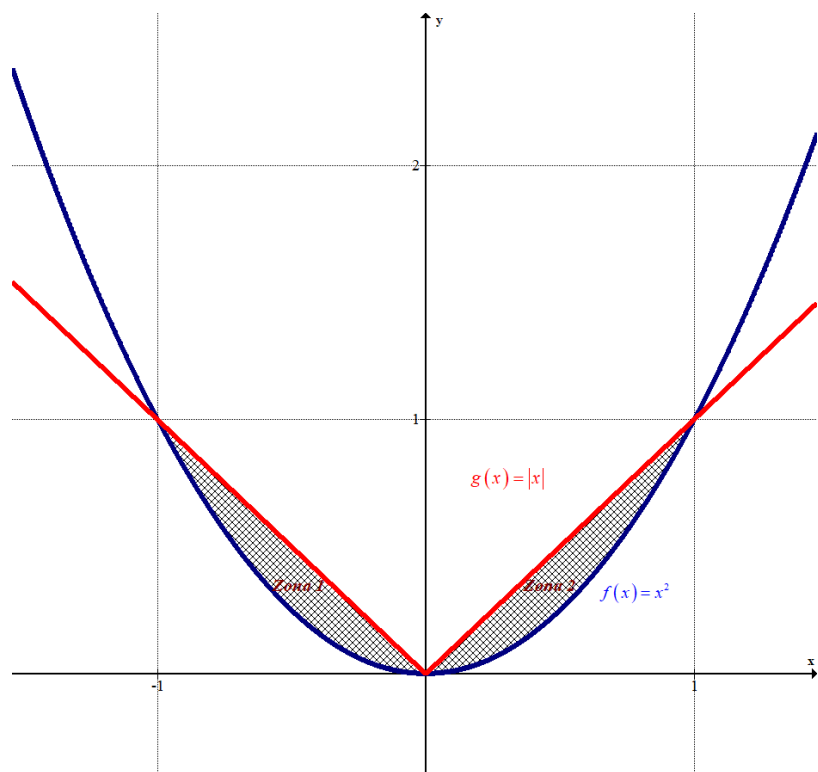
Las dos gráficas se cortan en tres puntos. Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto limitado por ellas.

$$f(x) = x^2$$

x	y = x ²
-2	4
-1	1
0	0 vértice
1	1
2	4

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x	y = x
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2



El área es la suma de área de la zona 1 y de la zona 2 del dibujo. Las dos funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas y como se aprecia los dos recintos tienen el mismo valor de área. El área total es el doble del área de la zona 2.

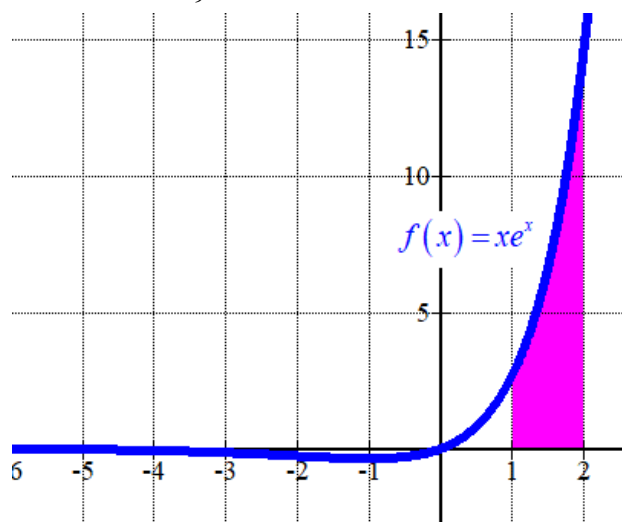
$$\text{Área} = 2 \int_0^1 x - x^2 dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(\left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ tiene un

valor de $\frac{1}{3} \approx 0.333$ unidades cuadradas.

- b) La función $f(x) = xe^x$ es una función positiva en el intervalo $(1, 2)$ por lo que la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ tendrá un valor positivo.

$$\left. \begin{array}{l} x \in (1, 2) \rightarrow x > 0 \\ e^x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = xe^x > 0, \text{ siendo } x \in (1, 2)$$



- c) Calculamos primero la integral indefinida $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_1^2 = \left[2 \cdot e^2 - e^2 \right] - \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] = \boxed{e^2 \approx 7.39}$$

3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes, Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) [0.5 puntos] Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- b) [1.5 puntos] Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

- a) Es una matriz con 4 filas y 3 columnas. En cada fila aparecen los datos de cada cliente y en cada columna los datos de cada fármaco, por lo que en la celda situada en la fila 4 y columna 2 aparece un 7 que indica que el cliente 4 pide 7000 unidades del 4º fármaco. El cliente 1º ha hecho una compra de 9000 unidades del fármaco 1, 5000 unidades del 2º y 2000 del 3º. El cliente 2º ha hecho una compra de 3000 unidades del fármaco 1, 8000 unidades del 2º y 0 del 3º. El cliente 3º no ha hecho ninguna compra (toda la fila 3ª está llena de ceros). El cliente 4º ha hecho una compra de 6000 unidades del fármaco 1, 7000 unidades del 2º y ha devuelto 1000 unidades del 3º.

- b) Si llamamos “x”, “y” y “z” a los precios por unidad del fármaco 1, 2 y 3, respectivamente se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000x \\ 1000y \\ 1000z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2850 \\ 0 \\ 2800 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9000x + 5000y + 2000z = 3250 \\ 3000x + 8000y = 2850 \\ 6000x + 7000y - 1000z = 2800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ 300x + 800y = 285 \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ x = \frac{285 - 800y}{300} \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900 \frac{285 - 800y}{300} + 500y + 200z = 325 \\ 60 \frac{285 - 800y}{300} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(285 - 800y) + 500y + 200z = 325 \\ \frac{285 - 800y}{5} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 855 - 2400y + 500y + 200z = 325 \\ 57 - 160y + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1900y + 200z = -530 \\ -90y - 10z = -29 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -90y - 10z = -29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -180y - 20z = -58 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\overline{-370y} = -111 \Rightarrow y = \frac{111}{370} = 0.30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{285 - 800 \cdot 0.3}{300} = 0.15 \Rightarrow 60 \cdot 0.15 + 70 \cdot 0.3 - 10z = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 21 - 10z = 28 \Rightarrow -10z = -2 \Rightarrow z = \frac{2}{10} = 0.20$$

Una unidad del primer fármaco cuesta 15 céntimos, una del segundo 30 céntimos y una del tercer fármaco cuesta 20 céntimos.

4.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) [1 punto] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

b) [1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

a) Obtenemos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 1 \cdot 2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = 0 \Rightarrow -2(x + \pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad de la función antes y después de $x = -\pi$.

- En el intervalo $(-\infty, -\pi)$ tomamos $x = -2\pi$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2\pi) = \frac{-2(-2\pi + \pi)}{(1 + (-2\pi + \pi)^2)^2} = \frac{2\pi}{(1 + \pi^2)^2} > 0. \text{ La función es convexa (U) en el}$$

intervalo $(-\infty, -\pi)$.

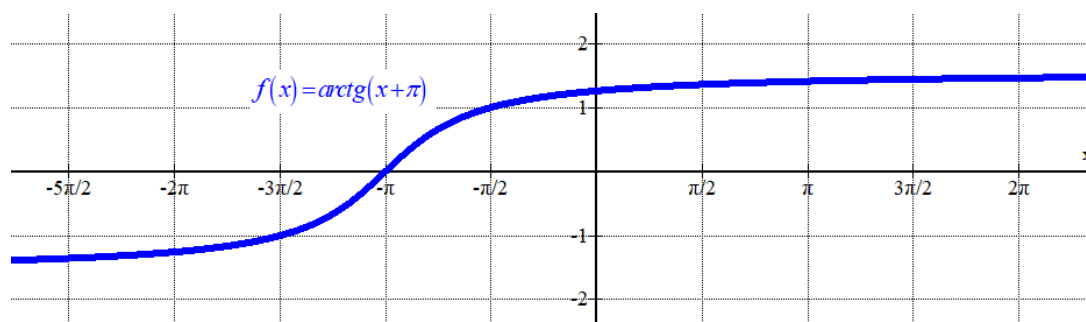
- En el intervalo $(-\pi, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{-2(0 + \pi)}{(1 + (0 + \pi)^2)^2} = \frac{-2\pi}{(1 + \pi^2)^2} < 0. \text{ La función es cóncava (O) en el intervalo}$$

$(-\pi, +\infty)$.

La función es convexa antes de $x = -\pi$ y cóncava después. La función presenta un punto de inflexión en $x = -\pi$.

Para $x = -\pi$ tenemos que $f(-\pi) = \operatorname{arctg}(-\pi + \pi) = \operatorname{arctg}(0) = 0$, por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $(-\pi, 0)$.



b) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctg(x+\pi)}{\sin(x)} = \frac{\arctg(-\pi+\pi)}{\sin(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)} = \frac{\frac{1}{-1}}{-1} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

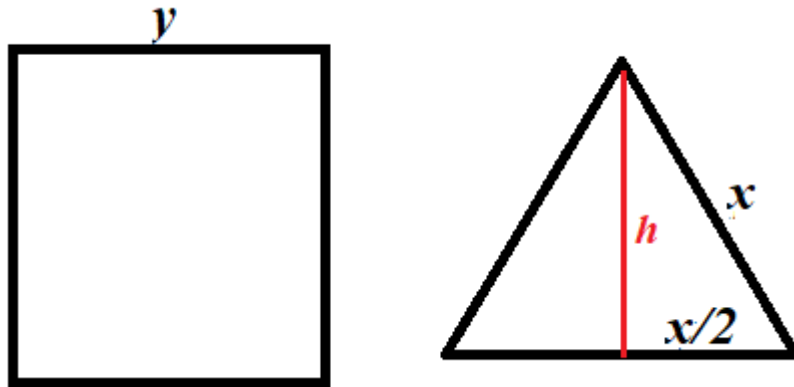
Si cambiamos en el denominador $\sin(x)$ por $g(x) = \sin(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$ el límite nos queda igual. La función $g(x)$ y la función $\sin(x)$ solo difieren en $x = -\pi$. Esta variación puntual no cambia la tendencia de la función en el entorno de $x = -\pi$. El cálculo del límite seguiría el mismo proceso, obteniendo el mismo valor.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctg(x+\pi)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \arctg(x+\pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \arctg(x+\pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin(x)} = \\ &= \frac{\arctg(-\pi+\pi)}{\sin(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{g'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{(\sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)} = \frac{\frac{1}{-1}}{-1} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

- a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?
- b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El cuadrado tiene de lado “y” y el triángulo equilátero tiene de lado “x”.

La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y + 3x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 3x}{4} = 25 - \frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos “h” y “x/2”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x, y) = y^2 + \frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{ h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \Rightarrow A(x, y) = y^2 + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = y^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ y = 25 - \frac{3}{4}x \right\} \Rightarrow A(x) = \left(25 - \frac{3}{4}x\right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} =$$

$$= 625 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{4}x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16} \Rightarrow A'(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9+4\sqrt{3})x - 600}{16} = 0 \Rightarrow 2(9+4\sqrt{3})x - 600 = 0 \Rightarrow x = \frac{600}{18+8\sqrt{3}} \approx 18.83$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x = 18.83$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = \frac{2(9+4\sqrt{3})10 - 600}{16} \approx -17 < 0. \text{ La función decrece antes de } x = 18.83.$$

- Después de $x = 18.83$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = \frac{2(9+4\sqrt{3})20 - 600}{16} \approx 2.32 > 0. \text{ La función crece después de } x = 18.83.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x = 18.83$ la función tiene un mínimo.

Para este valor del lado del triángulo determinamos el valor del lado del cuadrado.

$$y = 25 - \frac{3}{4} \left(\frac{600}{18+8\sqrt{3}} \right) \approx 10.87$$

El cuadrado debe tener 10.87 metros de lado y el triángulo equilátero debe tener 18.83 metros de lado para conseguir una suma de áreas del cuadrado y triángulo mínima.

b) Como debe cumplirse que $4y + 3x = 100$, entonces el valor de “x” está en el intervalo

$$\left[0, \frac{100}{3} \right] \text{ y el valor de “y” está en el intervalo } [0, 25].$$

La función $A(x) = \frac{(9+4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$ decrece hasta $x = 18.83$ y crece después, por lo que el valor máximo debe situarse en los extremos del intervalo de definición de “x”.

Obtenemos el área para $x = 0$ y para $x = \frac{100}{3}$.

$$A(0) = \frac{(9+4\sqrt{3}) \cdot 0^2 - 600 \cdot 0 + 10000}{16} = \frac{10000}{16} = 625 m^2$$

$$A\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{(9+4\sqrt{3})\left(\frac{100}{3}\right)^2 - 600 \frac{100}{3} + 10000}{16} = 481.12 m^2$$

Para $x = 0$ se consigue una suma de áreas máxima, que en realidad es el área del cuadrado pues el triángulo no existe (lado 0). El valor del lado del cuadrado es $y = 25 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 25$

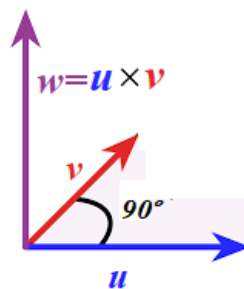
El área máxima se puede conseguir sin triángulo y solo con un cuadrado de lado 25 metros.

5.1 (2 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

$a = (u \times v) + w$ es un vector pues $u \times v$ es un vector (w) y al sumarle w obtenemos un vector que es igual a $2w$.

$b = v \times (v \times w)$ es un vector pues los productos vectoriales siempre dan como resultado un vector.

$c = u \cdot (v \times w)$ es un escalar, de hecho, es el producto mixto de los vectores u , v y w que se usa para determinar el volumen del paralelepípedo determinado por dichos vectores.



El vector $a = (u \times v) + w$ hemos visto que es igual a $2w$, por lo que es paralelo a w y perpendicular a u y v pues $a = 2(u \times v)$ y con el producto vectorial $u \times v$ obtenemos un vector perpendicular a u y v .

El vector $b = v \times (v \times w)$ es perpendicular a u y v , paralelo a w . Con $v \times w$ obtenemos un vector paralelo a u y con $v \times (v \times w)$ obtenemos un vector perpendicular a u y v , por lo tanto, paralelo a w .

Otra forma de razonarlo. Situamos el vector u sobre el eje X, así sería $u = (m, 0, 0)$. Situamos el vector v sobre el eje Y, así sería $v = (0, n, 0)$.

Al realizar el producto vectorial $u \times v$ tendríamos un vector w situado en el eje Z, así sería $w = (0, 0, mn)$.

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{vmatrix} = mnk = (0, 0, mn)$$

El vector $v \times w$ estaría sobre el eje X y sería $v \times w = (mn^2, 0, 0)$.

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & mn^2 \end{vmatrix} = mn^3 i = (mn^3, 0, 0)$$

El vector $b = v \times (v \times w)$ estaría sobre el eje Z y sería paralelo a w y perpendicular a u y v .

$$b = v \times (v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ mn^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = mn^4 k = (0, 0, mn^4)$$

- 5.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.
- b) (1 punto) Considera el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales, calcula su área, y comprueba el resultado mediante otro método.

- a) Si la recta debe ser perpendicular al plano π entonces debe tener como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, -2, 1) \\ P(4, -3, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

- b) Utilizamos la fórmula: $\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (2, 4, 0) - (0, 0, 0) = (2, 4, 0) \\ \vec{AC} = (5, 0, 0) - (0, 0, 0) = (5, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20k = (0, 0, 20)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + 20^2}}{2} = \frac{20}{2} = 10 u^2$$

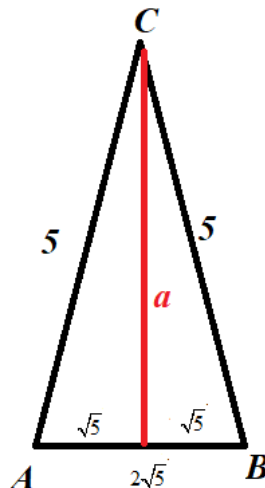
El área del triángulo ABC tiene un valor de 10 unidades cuadradas.

Otra forma de calcular el área del triángulo ABC.

Hallamos la longitud de los lados del triángulo ABC.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (2, 4, 0) - (0, 0, 0) = (2, 4, 0) \\ \vec{AC} = (5, 0, 0) - (0, 0, 0) = (5, 0, 0) \\ \vec{BC} = (5, 0, 0) - (2, 4, 0) = (3, -4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ AC = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5 \\ BC = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \end{array}$$

El triángulo tiene los lados AC y BC iguales y el lado AB distinto. El triángulo es isósceles.



Hallamos la altura del triángulo usando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos a y $\sqrt{5}$ de la figura anterior.

$$a^2 + (\sqrt{5})^2 = 5^2 \Rightarrow a^2 + 5 = 25 \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{20}}$$

Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del producto de su base por su altura.

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}}{2} = \sqrt{100} = 10$$

El área del triángulo ABC tiene un valor de 10 unidades cuadradas.