



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Model 1

La prueba consta de dos partes. La parte A contiene 3 preguntas a contestar sin diferentes opciones, mientras que la parte B contiene dos preguntas a contestar con dos subproblemas cada una de ellas, a contestar uno. El alumno debe responder un total de 5 preguntas. En caso de contestar dos subproblemas de una misma pregunta, sólo se corregirá el primero.

Justificad las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. (preguntas 1, 2 y 3). Contestad TODAS las preguntas de esta parte

Problema 1.– La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base en Cabo Cañaveral, Florida.

- [0.5 puntos]** Supongamos que la nave viaje siempre en la línea recta. Si se lanza en dirección $\vec{d} = (2, 3, 6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384.400km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?
- [0.5 puntos]** Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.
- [0.5 puntos]** En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\vec{d}_{inicial} = (1, 1, 2)$, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?
- [0.5 puntos]** Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director $(2, 3, 6)$, con el plano $z = 0$.

Problema 2.– Responded justificadamente las preguntas siguientes:

- [1 punto]** Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- [0,5 puntos]** Razone, sin calcular la integrales, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- [0,5 puntos]** Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

Problema 3.– **[2 puntos]** El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- [1 punto]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
- [1 punto]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Parte B. (preguntas 4 y 5).**Problema 4.**– [2 puntos] Conteste sólo UNA de las siguientes preguntas (P4.1 o P4.2)**P4.1** Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctg(x + \pi)$, donde $\arctg$ denota la función arco tangente.(a) [1 punto] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y encuentre, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).(b) [1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin(x)}$. Cual sería el valor del límite si cambiamos el $\sin(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?**P4.2** La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

(a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?

(b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

Problema 5.– [2 puntos] Conteste sólo UNA de las siguientes preguntas (P5.1 o P5.2)**P5.1** Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) [0.5 puntos] Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.

(b) [1.5 puntos] Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

P5.2 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2 .(a) [1 punto] Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.(b) [1 punto] Indica todas las matrices Z que cumplen la igualdad $AZ = O$

SOLUCIONES

Análisis 40%	Álgebra (20%)	Geometría (20%)	Probabilidad y estadística (20%)
--------------	---------------	-----------------	----------------------------------

Problema 1. (Obligatoria) Geometría.

Problema 2. (Obligatoria) Análisis.

Problema 3. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.

Problema 4. (Con optatividad) Análisis.

Problema 5. (Con optatividad) Álgebra.

Problema 1.– La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base en Cabo Cañaveral, Florida.

- a) **[0.5 puntos]** Supongamos que la nave viaje siempre en la línea recta. Si se lanza en dirección $\vec{d} = (2, 3, 6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384.400 km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?
- b) **[0.5 puntos]** Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.
- c) **[0.5 puntos]** En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\vec{d}_{inicial} = (1, 1, 2)$, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?
- d) **[0.5 puntos]** Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director $(2, 3, 6)$, con el plano $z = 0$.

- a) Cabo Cañaveral está en el origen del lanzamiento en $O(0,0,0)$ y la luna en el punto $L(a,b,c)$. El lanzamiento de la nave espacial va en línea recta a la luna por lo que la longitud del vector $\overrightarrow{OL}$ es de 384.400 km.

La luna está en línea recta en dirección $\vec{d} = (2, 3, 6)$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OL} &= (a, b, c) - (0, 0, 0) = (a, b, c) \\ \overrightarrow{OL} &= x\vec{d} = x(2, 3, 6) = (2x, 3x, 6x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a, b, c) = (2x, 3x, 6x)$$

La distancia de Cabo Cañaveral a la luna es de 384.400 km. El módulo del vector $\overrightarrow{OL}$ es de 384.400 km.

$$\left. \begin{aligned} |\overrightarrow{OL}| &= 384400 \\ \overrightarrow{OL} &= (2x, 3x, 6x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2 + (6x)^2} = 384400 \Rightarrow \sqrt{49x^2} = 384400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x = 384400 \Rightarrow x = \frac{384400}{7} \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7} \right)$$

Las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral son

$$L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right).$$

- b) El plano π perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna tiene como vector normal el vector $\vec{d} = (2, 3, 6)$ y contiene el punto $L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{d} = (2, 3, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right) \in \pi \\ \pi : 2x + 3y + 6z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \frac{768800}{7} + 3 \frac{1153200}{7} + 6 \frac{2306400}{7} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{-18835600}{7} = -2690800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 2x + 3y + 6z - 2690800 = 0}$$

- c) Debemos indicar una dirección $\vec{v}$ que cambie de la dirección inicial $\vec{d}_{inicial} = (1, 1, 2)$ a $\vec{d} = (2, 3, 6)$.

$$\vec{d}_{inicial} + \vec{v} = \vec{d} \Rightarrow (1, 1, 2) + \vec{v} = (2, 3, 6) \Rightarrow \vec{v} = (2, 3, 6) - (1, 1, 2) = (1, 2, 4)$$

La nueva dirección para conseguir el reajuste es $\vec{v} = (1, 2, 4)$.

- d) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por la Luna $L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right)$ y tiene el vector director $(2, 3, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right) \in r \\ \vec{u}_r = (2, 3, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow r = \begin{cases} x = \frac{768800}{7} + 2\alpha \\ y = \frac{1153200}{7} + 3\alpha \\ z = \frac{2306400}{7} + 6\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto P de intersección de la recta r y el plano $z = 0$.

$$\begin{aligned}
 r = \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = \frac{768800}{7} + 2\alpha \\ y = \frac{1153200}{7} + 3\alpha \\ z = \frac{2306400}{7} + 6\alpha \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{768800}{7} + 2\alpha \\ y = \frac{1153200}{7} + 3\alpha \\ 0 = \frac{2306400}{7} + 6\alpha \rightarrow 6\alpha = \frac{-2306400}{7} \rightarrow \alpha = \frac{-384400}{7} \end{array} \right. \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{768800}{7} + 2 \frac{-384400}{7} = 0 \\ y = \frac{1153200}{7} + 3 \frac{-384400}{7} = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow P(0,0,0)
 \end{aligned}$$

El punto de intersección tiene coordenadas $P(0,0,0)$. El punto de intersección es Cabo Cañaveral.

Problema 2.– Responded justificadamente las preguntas siguientes:

(a) **[1 punto]** Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.

(b) **[0,5 puntos]** Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.

(c) **[0,5 puntos]** Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

(a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x = x^2 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \\ x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

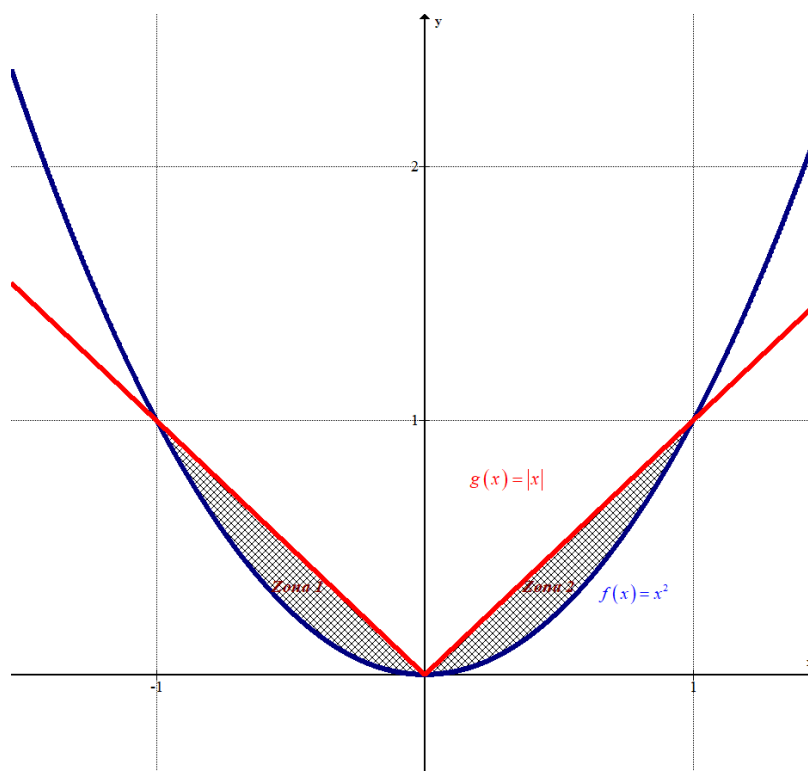
Las dos gráficas se cortan en tres puntos. Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto limitado por ellas.

$$f(x) = x^2$$

x	y = x ²
-2	4
-1	1
0	0 vértice
1	1
2	4

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x	y = x
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	4



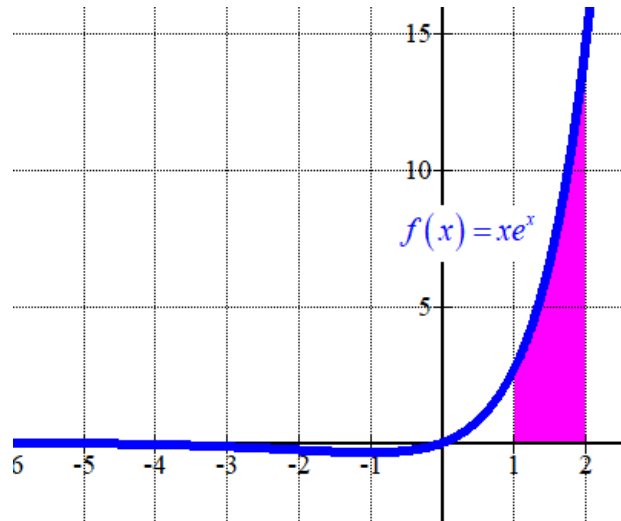
El área es la suma de área de la zona 1 y de la zona 2 del dibujo. Las dos funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas y como se aprecia los dos recintos tienen el mismo valor de área. El área total es el doble del área de la zona 2.

$$\text{Área} = 2 \int_0^1 x - x^2 dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(\left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ tiene un valor de $\frac{1}{3} \approx 0.333$ unidades cuadradas.

- (b) La función $f(x) = xe^x$ es una función positiva en el intervalo $(1, 2)$ por lo que la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ tendrá un valor positivo.

$$\left. \begin{array}{l} x \in (1, 2) \rightarrow x > 0 \\ e^x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = xe^x > 0, \text{ siendo } x \in (1, 2)$$



- (c) Calculamos primero la integral indefinida $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_1^2 = \left[2 \cdot e^2 - e^2 \right] - \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] = \boxed{e^2 \approx 7.39}$$

Problema 3.– [2 puntos] El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

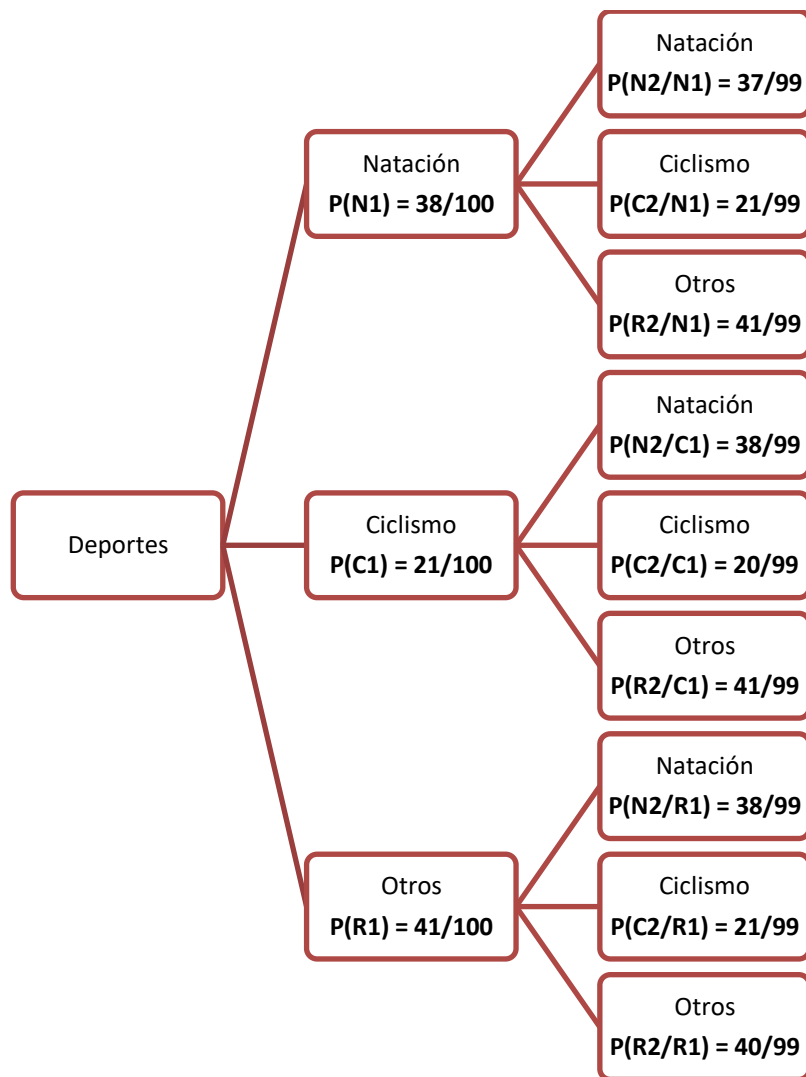
- (a) **[1 punto]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
 (b) **[1 punto]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Llamamos N a “el habitante de un pueblo prefiere la natación”, C a “el habitante prefiere el ciclismo” y R a “el habitante prefiere otros deportes”. Como se eligen dos habitantes sin reemplazamiento llamaremos N1, N2, C1, C2, R1 y R2 al suceso en primera y segunda elección.

Sabemos que en la primera elección las probabilidades son:

$$P(N1) = \frac{38}{100}, P(C1) = \frac{21}{100} \text{ y } P(R1) = 1 - \frac{38}{100} - \frac{21}{100} = \frac{41}{100}$$

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de la segunda elección que depende de lo ocurrido en la primera. Supondremos una población de 100 habitantes.



- (a) Nos piden calcular $P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$\begin{aligned}
 P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) &= P(N1)P(C2/N1) + P(C1)P(N2/C1) = \\
 &= \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} + \frac{21}{100} \cdot \frac{38}{99} = 2 \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} = \boxed{\frac{133}{825} \approx 0.1612}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación es de 0.1612.

(b) Nos piden calcular $P((N2 \cup R2)/C1)$.

$$P((N2 \cup R2)/C1) = P(N2/C1) + P(R2/C1) = \frac{38}{99} + \frac{41}{99} = \boxed{\frac{79}{99} \approx 0.798}$$

La probabilidad de que la segunda persona no prefiera el ciclismo sabiendo que la primera prefiere el ciclismo es de 0.798.

P4.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctg(x + \pi)$, donde $\arctg$ denota la función arco tangente.

(a) **[1 punto]** Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y encuentre, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) **[1 punto]** Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos el $\sin(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

(a) Obtenemos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \arctg(x + \pi) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 1 \cdot 2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = 0 \Rightarrow -2(x + \pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad de la función antes y después de $x = -\pi$.

- En el intervalo $(-\infty, -\pi)$ tomamos $x = -2\pi$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2\pi) = \frac{-2(-2\pi + \pi)}{(1 + (-2\pi + \pi)^2)^2} = \frac{2\pi}{(1 + \pi^2)^2} > 0. \text{ La función es convexa (U) en el}$$

intervalo $(-\infty, -\pi)$.

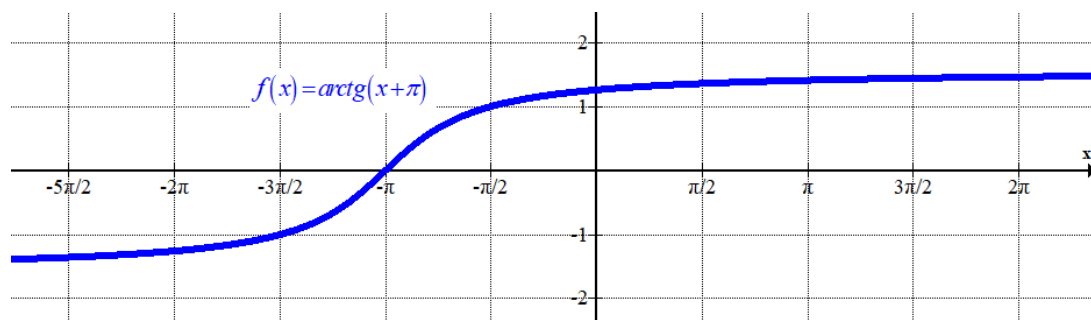
- En el intervalo $(-\pi, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{-2(0 + \pi)}{(1 + (0 + \pi)^2)^2} = \frac{-2\pi}{(1 + \pi^2)^2} < 0. \text{ La función es cóncava (n) en el intervalo}$$

$(-\pi, +\infty)$.

La función es convexa antes de $x = -\pi$ y cóncava después. La función presenta un punto de inflexión en $x = -\pi$.

Para $x = -\pi$ tenemos que $f(-\pi) = \arctg(-\pi + \pi) = \arctg(0) = 0$, por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $(-\pi, 0)$.



(b) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctg(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\arctg(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)} = \frac{\frac{1}{1}}{-1} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

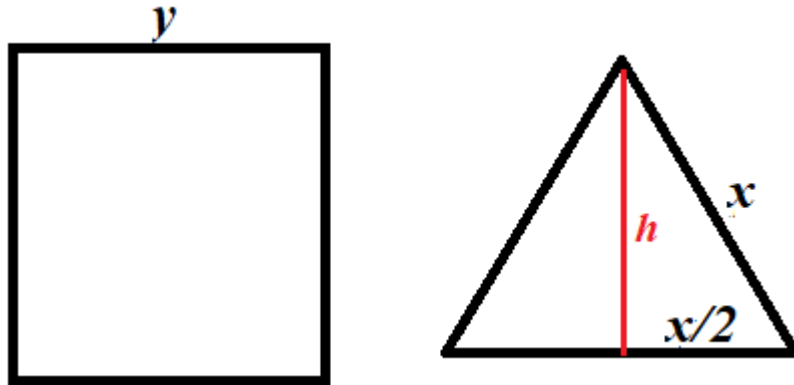
Si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$ el límite nos queda igual. La función $g(x)$ y la función $\operatorname{sen}(x)$ solo difieren en $x = -\pi$. Esta variación puntual no cambia la tendencia de la función en el entorno de $x = -\pi$. El cálculo del límite seguiría el mismo proceso, obteniendo el mismo valor.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctg(x + \pi)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \arctg(x + \pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \arctg(x + \pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} \operatorname{sen}(x)} = \\ &= \frac{\arctg(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{g'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{(\operatorname{sen}(x))'} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)} = \frac{\frac{1}{1}}{-1} = \boxed{-1}\end{aligned}$$

P4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

- (a) **[1.5 puntos]** ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?
- (b) **[0.5 puntos]** ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El cuadrado tiene de lado “y” y el triángulo equilátero tiene de lado “x”.
La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y + 3x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 3x}{4} = 25 - \frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos “h” y “x/2”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x, y) = y^2 + \frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{ h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \Rightarrow A(x, y) = y^2 + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = y^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ y = 25 - \frac{3}{4}x \right\} \Rightarrow A(x) = \left(25 - \frac{3}{4}x\right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} =$$

$$= 625 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{4}x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16} \Rightarrow A'(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9+4\sqrt{3})x - 600}{16} = 0 \Rightarrow 2(9+4\sqrt{3})x - 600 = 0 \Rightarrow x = \frac{600}{18+8\sqrt{3}} \approx 18.83$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x = 18.83$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = \frac{2(9+4\sqrt{3})10 - 600}{16} \approx -17 < 0. \text{ La función decrece antes de } x = 18.83.$$

- Después de $x = 18.83$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$A'(20) = \frac{2(9+4\sqrt{3})20 - 600}{16} \approx 2.32 > 0. \text{ La función crece después de } x = 18.83.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x = 18.83$ la función tiene un mínimo.

Para este valor del lado del triángulo determinamos el valor del lado del cuadrado.

$$y = 25 - \frac{3}{4} \left(\frac{600}{18+8\sqrt{3}} \right) \approx 10.87$$

El cuadrado debe tener 10.87 metros de lado y el triángulo equilátero debe tener 18.83 metros de lado para conseguir una suma de áreas del cuadrado y triángulo mínima.

(b) Como debe cumplirse que $4y + 3x = 100$, entonces el valor de “x” está en el intervalo

$\left(0, \frac{100}{3}\right)$ y el valor de “y” está en el intervalo $(0, 25)$.

La función $A(x) = \frac{(9+4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$ decrece hasta $x = 18.83$ y crece después, por lo que el valor máximo debe situarse en los extremos del intervalo de definición de “x”.

Obtenemos el área para $x = 0$ y para $x = \frac{100}{3}$.

$$A(0) = \frac{(9+4\sqrt{3}) \cdot 0^2 - 600 \cdot 0 + 10000}{16} = \frac{10000}{16} = 625 m^2$$

$$A\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{(9+4\sqrt{3})\left(\frac{100}{3}\right)^2 - 600 \frac{100}{3} + 10000}{16} = 481.12 m^2$$

Para $x = 0$ se consigue una suma de áreas máxima, que en realidad es el área del cuadrado pues el triángulo no existe (lado 0). El valor del lado del cuadrado es $y = 25 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 25$

El área máxima se puede conseguir sin triángulo y solo con un cuadrado de lado 25 metros.

P5.1 Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes, Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) **[0.5 puntos]** Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- (b) **[1.5 puntos]** Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

- (a) Es una matriz con 4 filas y 3 columnas. En cada fila aparecen los datos de cada cliente y en cada columna los datos de cada fármaco, por lo que en la celda situada en la fila 4 y columna 2 aparece un 7 que indica que el cliente 4 pide 7000 unidades del 4º fármaco. El cliente 1º ha hecho una compra de 9000 unidades del fármaco 1, 5000 unidades del 2º y 2000 del 3º. El cliente 2º ha hecho una compra de 3000 unidades del fármaco 1, 8000 unidades del 2º y 0 del 3º. El cliente 3º no ha hecho ninguna compra (toda la fila 3ª está llena de ceros). El cliente 4º ha hecho una compra de 6000 unidades del fármaco 1, 7000 unidades del 2º y ha devuelto 1000 unidades del 3º.

- (b) Si llamamos “x”, “y” y “z” a los precios por unidad del fármaco 1, 2 y 3, respectivamente se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000x \\ 1000y \\ 1000z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2850 \\ 0 \\ 2800 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9000x + 5000y + 2000z = 3250 \\ 3000x + 8000y = 2850 \\ 6000x + 7000y - 1000z = 2800 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ 300x + 800y = 285 \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ x = \frac{285 - 800y}{300} \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900 \frac{285 - 800y}{300} + 500y + 200z = 325 \\ 60 \frac{285 - 800y}{300} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(285 - 800y) + 500y + 200z = 325 \\ \frac{285 - 800y}{5} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 855 - 2400y + 500y + 200z = 325 \\ 57 - 160y + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1900y + 200z = -530 \\ -90y - 10z = -29 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -90y - 10z = -29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -180y - 20z = -58 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\overline{-370y} = -111 \Rightarrow \boxed{y = \frac{111}{370} = 0.30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{285 - 800 \cdot 0.3}{300} = 0.15} \Rightarrow 60 \cdot 0.15 + 70 \cdot 0.3 - 10z = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 21 - 10z = 28 \Rightarrow -10z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{10} = 0.20}$$

Una unidad del primer fármaco cuesta 15 céntimos, una del segundo 30 céntimos y una del tercer fármaco cuesta 20 céntimos.

P5.2 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2 .

(a) **[1 punto]** Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.

(b) **[1 punto]** Indica todas las matrices Z que cumplen la igualdad $AZ = O$

(a) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz $A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - I)^T}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X .

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) La matriz Z debe ser de orden 2×2 . Consideramos $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AZ = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - c = 0 \\ 3b - d = 0 \\ 3c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0} \\ 3d = 0 \rightarrow \boxed{d = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \\ 3b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

La única matriz solución de la ecuación es la matriz nula.