



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PAU

CURSO 2025–2026

MATERIA: MATEMÁTICAS II - EJEMPLO

Convocatoria:

Instrucciones:

- Parte I: Responder los tres problemas. Parte II: Responder sólo un problema de las dos opciones de cada bloque. Si responde a los dos problemas del mismo bloque sólo se evaluará el primero.
- Se califica todo el proceso. Detallar y explicar los procedimientos empleados para dar la solución.
- Las respuestas a tareas competencial o contextualizadas deberán interpretarse en la situación planteada.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

PARTE I (OPCIÓN ÚNICA)

1. Análisis Matemático (Metabolix) En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 1
- Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? 0.5

2A Álgebra. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} . 0.75

- Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.25$$

3A Geometría. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
 b) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1

PARTE II.

Análisis Matemático (seleccione solo una pregunta)

4A. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$

b) Determinar a y b para que la función f definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \ln((e+x)^a) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea derivable en $x = 0$.

4B. Considere la función $f(x) = \tan^3 x$:

- a) Calcular la integral indefinida: $\int f(x) dx$ 1
 b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$. 1

Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

5A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

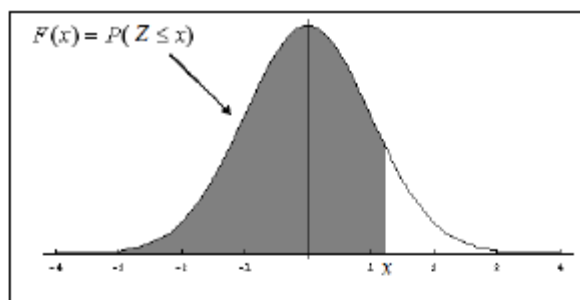
- a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego. 1
 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego. 1

5B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo? 1

- b) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes? 1



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

Análisis 40%	Álgebra (20%)	Geometría (20%)	Probabilidad y estadística (20%)
---------------------	---------------	-----------------	----------------------------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Análisis.

Pregunta 2. (Obligatoria) Álgebra.

Pregunta 3. (Obligatoria) Geometría.

Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis.

Pregunta 5. (Con optatividad) Probabilidad y estadística.

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- b) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 1
- c) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? 0.5

a) Esta función en el intervalo $[0, 2)$ es $f(x) = x^2 - 6x + 11$ que es continua.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$, donde el radicando es positivo en el

intervalo indicado: $x > 2 \rightarrow 5x > 10 \rightarrow 5x - 1 > 9$.

Falta estudiar la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{9}{\sqrt{5 \cdot 2 - 1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 6x + 11 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$$

La función es continua en $x = 2$.

La función es continua en su dominio $[0, +\infty)$.

b) Buscamos los puntos donde la derivada se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \rightarrow x=3 \notin [0,2) \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La derivada nunca se anula y el signo de la misma es igual en cada intervalo.

En el intervalo $[0, 2)$ la derivada es $f'(x) = 2x-6$ que siempre es negativa para $0 \leq x < 2$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}}$ que también es negativa.

La función siempre decrece.

La función es continua y siempre decrece por lo que la concentración máxima se producirá en $x=0$, siendo esta concentración $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11 \text{ mg/L}$.

c) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

Pasado un largo periodo de tiempo la concentración de la bacteria es 0 mg/L.

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} . 0.75

b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.25$$

a) Comprobamos el valor del determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de M es distinto de cero e independiente del valor de a , la matriz M es invertible para cualquier valor de a .

Hallamos la expresión de la inversa de la matriz M .

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a-3 & 2-a \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2-a & -a+3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = -1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$MA = B - MX \Rightarrow MX = B - MA \Rightarrow X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - M^{-1}MA = M^{-1}B - A$$

Para $a = -1$ la inversa de la matriz M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinamos la expresión de X .

$$\begin{aligned} X = M^{-1}B - A &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3+4 & 0-8 & -9-4 \\ -1+1 & 0-2 & -3-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
 b) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1

a) Hallamos el punto Q de intersección de las dos rectas.

$$r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (2, -1, 3) \\ A(-3, 2, -4) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -4 + 3\alpha \end{cases}$$

$$r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(-3 + 2\alpha) + 3(2 - \alpha) - 3(-4 + 3\alpha) = 2 \\ 2(-3 + 2\alpha) - 3(2 - \alpha) - 6(-4 + 3\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 + 8\alpha + 6 - 3\alpha + 12 - 9\alpha = 2 \\ -6 + 4\alpha - 6 + 3\alpha + 24 - 18\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha = -4 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ -11\alpha = -11 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -4 + 3 \cdot 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-1, 1, -1)}$$

El punto de corte de las dos rectas es $Q(-1, 1, -1)$.

La distancia del punto P al punto Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{matrix} P(2, -1, 1) \\ Q(-1, 1, -1) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1) - (2, -1, 1) = (-3, 2, -2)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{17} \approx 4.12}$$

La distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 vale $\sqrt{17} \approx 4.12$ unidades.

b) Hallamos el ángulo que forman sus respectivos vectores directores.

$$r_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \vec{v}_2 = (2, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 1) \in r_1 \\ Q(-1, 1, -1) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 = \overrightarrow{PQ} = (-3, 2, -2)$$

$$\cos(\vec{v}_2, \vec{u}_1) = \frac{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{v}_2| |\vec{u}_1|} \right|}{\left| \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{|\vec{v}_2| |\vec{u}_1|} \right|} = \frac{|(2, -1, 3)(-3, 2, -2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-6 - 2 - 6|}{\sqrt{14} \sqrt{17}} = \frac{14}{\sqrt{14} \sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$(r_1, r_2) = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{14}{17}} \right) \simeq 25^\circ$$

El ángulo que forman las rectas tiene un valor aproximado de 25° .

4A. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right)$

b) Determinar a y b para que la función f definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \ln((e+x)^a) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea derivable en $x = 0$.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{\operatorname{sen}(0^+)} = +\infty - \infty = \text{Indeterminación} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x \operatorname{sen}(x)} \right) = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)} \right) = \frac{\cos(0) - 1}{\operatorname{sen}(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) + x(-\operatorname{sen}(x))} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)} \right) =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(0)}{2\cos(0) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{2-0} = \boxed{0}$$

b) Para que la función sea derivable debe ser continua.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \ln((e+0)^a) = \ln e^a = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln((e+x)^a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{bx} \cdot \cos(ax) = e^{b \cdot 0} \cdot \cos(a \cdot 0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} e^{bx} \cdot \cos(x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(e+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Obtenemos la expresión de la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} be^{bx} \cdot \cos(x) - e^{bx} \cdot \operatorname{sen}(x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{e+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ deben coincidir las derivadas laterales.

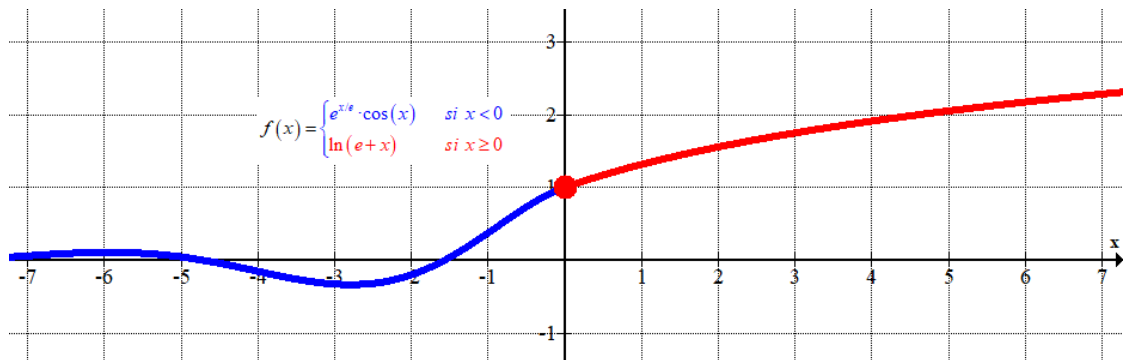
$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (be^{bx} \cdot \cos(x) - e^{bx} \cdot \operatorname{sen}(x)) = be^{b \cdot 0} \cdot \cos(0) - e^{b \cdot 0} \cdot \operatorname{sen}(0) = b$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e+x} = \frac{1}{e+0} = \frac{1}{e}$$

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{e}}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ debe ser $a=1$ y $b = \frac{1}{e}$.

La función queda $f(x) = \begin{cases} e^{x/e} \cdot \cos(x) & \text{si } x < 0 \\ \ln(e+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Como se aprecia en el dibujo la función es continua (sin interrupción) y derivable (sin cambios bruscos) en $x=0$.



4B. Considere la función $f(x) = \tan^3 x$:

a) Calcular la integral indefinida: $\int f(x) dx$ 1

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$. 1

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos(x) = t \rightarrow -\sin(x) dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin(x)} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\sin^3(x)}{t^3} \left(\frac{dt}{-\sin(x)} \right) = - \int \frac{\sin^2(x)}{t^3} dt = - \int \frac{1 - \cos^2(x)}{t^3} dt = - \int \frac{1 - t^2}{t^3} dt = \\ &= - \int \frac{1}{t^3} dt + \int \frac{t^2}{t^3} dt = - \int t^{-3} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + \ln(t) = \frac{1}{2t^2} + \ln(t) = \boxed{\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + K} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx = \left\{ \begin{array}{l} \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \\ = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \end{array} \right\} = \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x dx - \int \tan x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \tan(x) = t \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \int t dt + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{t^2}{2} + \ln|\cos x| + K = \boxed{\frac{\tan^2(x)}{2} + \ln|\cos x| + K} \end{aligned}$$

Las dos soluciones proporcionadas son distintas, lo que induce a pensar que una de ellas es errónea, pero las dos son válidas.

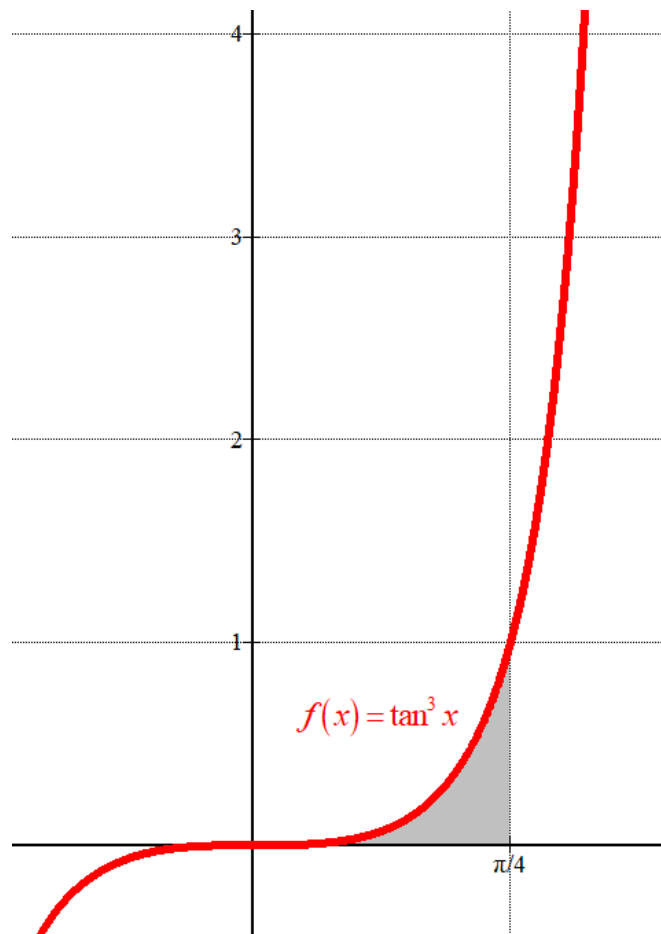
$$\frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + K = \frac{\tan^2 x}{2} + \frac{1}{2} + \ln|\cos x| + K = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + K'$$

b) En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ la función se anula para $x = 0$. La función es positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, pues la función seno y la función coseno son positivas en el intervalo.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ de la función.

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_0^{\pi/4} f(x) dx = \left[\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln(\cos x) \right]_0^{\pi/4} = \\
 &= \left[\frac{1}{2 \cos^2 \frac{\pi}{4}} + \ln\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) \right] - \left[\frac{1}{2 \cos^2 0} + \ln(\cos 0) \right] = \\
 &= \frac{1}{2 \left(1/\sqrt{2}\right)^2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{1} + \ln 1 - \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \\
 &= 1 + 0 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2} \approx 0.1534 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$



5A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

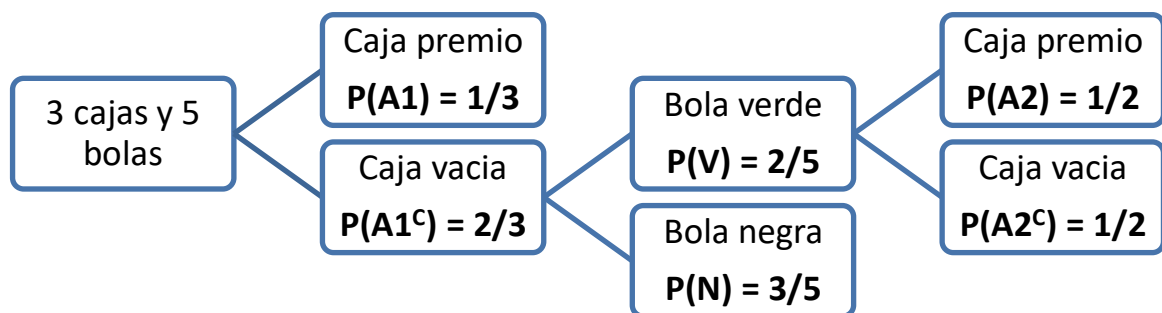
- Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
- Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

a) Llamamos A_1 a sacar caja con premio en la primera elección, A_2 a sacar caja con premio en la segunda extracción sabiendo que en la primera extracción se ha sacado una caja vacía, V a sacar bola verde de la urna y N a sacar bola negra.

Las probabilidades son: $P(A_1) = 1/3$, $P(A_1^c) = 2/3$, $P(V) = 2/5$ y $P(N) = 3/5$.

Tenemos en cuenta que en la segunda elección de caja solo quedan una caja con premio y otra sin premio, por lo que $P(A_2) = 1/2$.

Dibujamos el diagrama de árbol pedido,



- Hay dos formas de acabar sin premio y otras dos de acabar con premio. Sumamos las probabilidades de las dos formas de conseguir un premio.

$$P(\text{Premio}) = P(A_1) + P(A_1^c)P(V)P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$$

5B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
- Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Sea X = La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante un día del mes de agosto. $X = N(22, 5)$.

- a) Debemos calcular $P(18 \leq X \leq 25)$.

$$P(18 \leq X \leq 25) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{18-22}{5} \leq Z \leq \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.6) =$$

$$= P(Z \leq 0.6) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.6) - P(Z \geq 0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.6) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7257 - 1 + 0.7881 = \boxed{0.5138}$$

	0	0,0
0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7613
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186

La probabilidad de que un día de agosto las condiciones sean ideales para realizar senderismo vale 0.5138.

- b) Hallamos la probabilidad de que un día los visitantes se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos, es decir, que la temperatura diurna sea inferior a 15°: $P(X \leq 15)$.

$$P(X \leq 15) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \leq -1.4) = P(Z \geq 1.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9192 = \boxed{0.0808}$$

	0	
0	0,5000	0,5000
0,1	0,5098	0,5098
0,2	0,5193	0,5193
0,3	0,5279	0,5279
0,4	0,5354	0,5354
0,5	0,5415	0,5415
0,6	0,5457	0,5457
0,7	0,5480	0,5480
0,8	0,5481	0,5481
0,9	0,5459	0,5459
1	0,5413	0,5413
1,1	0,5343	0,5343
1,2	0,5249	0,5249
1,3	0,5122	0,5122
1,4	0,9192	0,9192
1,5	0,9332	0,9332

Como agosto tiene 31 días se espera que la temperatura sea inferior a 15° en $31 \cdot 0.0808 = 2.5048$ días, aproximadamente 3 días.

De los 11000 visitantes diarios realizarán senderismo $11000 \cdot 0.05 = 550$. Como en 3 días habrá temperaturas inferiores a 15° tenemos que $550 \cdot 3 = 1650$ visitantes se verán afectados por cambios meteorológicos bruscos.