

Matemáticas II

INDICACIONES

- . El examen consta de seis ejercicios. El alumno ha de elegir y resolver tres de ellos completos.
- Si se responde a más de tres ejercicios, solo se corregirán los tres primeros que se hayan resuelto, según el orden en que se presenten en el cuadernillo de examen.
- Cada ejercicio tiene un valor de 10 puntos. La nota del examen será igual a la media aritmética de las notas de los tres ejercicios elegidos.
- Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [10 puntos].

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 4 & a-4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) **[5 puntos].** Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a.
- b) **[5 puntos].** Considera $a = 0$. Si es posible, halla la matriz X que satisface la ecuación matricial: $AX = 2I_3 - B$.

Ejercicio 2 [10 puntos].

Considera la siguiente función: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) **[2 puntos].** Determina el valor de a si la función f(x) corta al eje de abscisas OX en $x = 2$.

- b) **[4 puntos]**. Considera $a = 5$. Si existen, halla las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.
- c) **[4 puntos]**. Considera $a = 5$. Obtén una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, que cumpla: $F(1) = 0$.

Ejercicio 3 [10 puntos]

Considera los puntos en el espacio: $A = (1,1,1)$, $B = (2,-1,0)$ y $C = (2,0,3)$.

- a) **[2 puntos]**. Calcula la distancia entre A y B .
- b) **[4 puntos]**. Obtén la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A y B .
- c) **[4 puntos]**. Obtén la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A , B y C .

Ejercicio 4 [10 puntos]

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 5y + 2z &= 2a \\ x + 3y + a^2z &= -1 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) **[6 puntos]**. Determina para qué valores de a el sistema es incompatible.
- b) **[4 puntos]**. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Ejercicio 5 [10 puntos]

Considera la siguiente función: $f(x) = x + ae^{-x}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) **[2 puntos]**. Determina el valor del parámetro a sabiendo que $f(x)$ toma el valor mínimo en $x = \ln 2$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.
- b) **[4 puntos]**. Considera $a = 1$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) **[4 puntos]**. Considera $a = 1$. Calcula los límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Ejercicio 6 [10 puntos]

Considera el punto en el plano: $A = (2,1)$.

- a) **[2 puntos]**. Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta r que pasa por el punto A y tiene pendiente $m_r = 1$.
- b) **[2 puntos]**. Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta s que pasa por el punto A y por el punto $B = (5,7)$.
- c) **[2 puntos]**. Calcula la distancia entre los puntos de corte de las rectas r y s con el eje de ordenadas OY.
- d) **[4 puntos]**. Calcula el ángulo que forman las rectas r y s .