



UNIBERTSITATEAN SARTZEKO
PROBA

2025eko MAIATZA

PRUEBA DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

MAYO 2025

MATEMATIKA

MATEMÁTICAS

Aclaraciones previas

- **Tiempo de duración de la prueba: 1 hora**
- **Contesta a cinco de los seis ejercicios propuestos**
- **Cada ejercicio vale 2 puntos**

1) Un pastelero hornea tartas de limón y de fresa. Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €. Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €. Calcula el beneficio que obtiene con cada uno de los tipos de tarta.

2) Una empresa utiliza cajas de base cuadrada sin tapa de volumen 500 cm^3 . Para optimizar beneficios, necesita calcular las dimensiones de dicha caja de modo que sea lo más económica posible (menor superficie). Calcula las dimensiones de dicha caja.

3) Dibuja y calcula el área del recinto que delimitan las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = 2x - 1$$

4) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y haz un dibujo aproximado de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

5) Se ha realizado una encuesta a 100 adolescentes para saber el número de horas semanales que dedican al estudio fuera del centro. Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Intervalo	(0,3]	(3,6]	(6,9]	(9,12]	(12,15]
Frecuencia	25	30	20	15	10

Calcula la moda, mediana, media aritmética y desviación típica de la distribución, y realiza el histograma.

6) Resuelve el sistema y la ecuación siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } -x + y + z &= 4 \\ 3x - y + 4z &= 13 \\ 4x + y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{3}$$

SOLUCIONES

1) Un pastelero hornea tartas de limón y de fresa. Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €. Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €. Calcula el beneficio que obtiene con cada uno de los tipos de tarta.

Llamamos “x” al beneficio obtenido por una tarta de limón e “y” al beneficio obtenido por una tarta de fresa.

“Si vende 12 tartas de limón y 5 de fresa obtiene un beneficio de 520 €” $\rightarrow 12x + 5y = 520$

“Si vende 8 tartas de limón y 10 de fresa obtiene un beneficio de 560 €” $\rightarrow 8x + 10y = 560$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ 8x + 10y = 560 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ 4x + 5y = 280 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 5y = 520 \\ -4x - 5y = -280 \end{array} \Rightarrow$$

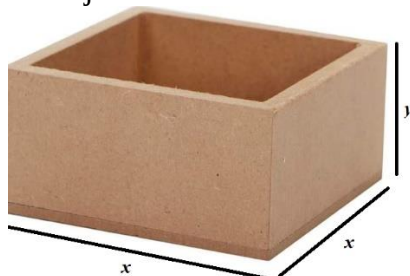
$$\overline{8x} \quad \quad \quad \overline{= 240} \Rightarrow \boxed{x = \frac{240}{8} = 30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 30 + 5y = 520 \Rightarrow 5y = 520 - 360 = 160 \Rightarrow \boxed{y = \frac{160}{5} = 32}$$

El beneficio obtenido por una tarta de limón es de 30 euros y por una tarta de fresa de 32 euros.

2) Una empresa utiliza cajas de base cuadrada sin tapa de volumen 500 cm^3 . Para optimizar beneficios, necesita calcular las dimensiones de dicha caja de modo que sea lo más económica posible (menor superficie). Calcula las dimensiones de dicha caja.

La situación planteada es la del dibujo.



Como el volumen es de 500 cm^3 entonces tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = \text{Área base} \cdot \text{altura} = x^2 \cdot y \\ \text{Volumen} = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 y = 500 \Rightarrow \boxed{y = \frac{500}{x^2}}$$

Deseamos minimizar la superficie de la caja que obtenemos con la suma del área de la base (x^2) y de las cuatro paredes laterales ($4xy$).

$$\left. \begin{array}{l} S(x, y) = x^2 + 4xy \\ y = \frac{500}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

Hallamos la derivada de la función superficie y averiguamos cuando se anula.

$$\left. \begin{array}{l} S(x) = x^2 + \frac{2000}{x} \Rightarrow S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} \\ S'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2000}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x^3 = \frac{2000}{2} = 1000 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1000} = 10}$$

La función tiene un punto crítico para $x = 10$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Para x menor de 10 consideramos $x = 5$ y la derivada vale

$$S'(5) = 2 \cdot 5 - \frac{2000}{5^2} = -70 < 0. \text{ La función decrece antes de 10.}$$

- Para x mayor de 10 consideramos $x = 20$ y la derivada vale

$$S'(20) = 2 \cdot 20 - \frac{2000}{20^2} = 35 > 0. \text{ La función crece después de 10.}$$

Como la función decrece antes y crece después de $x = 10$, podemos afirmar que la superficie es mínima para este valor. Hallamos el valor de la altura de la caja: $y = \frac{500}{10^2} = 5$.

La caja sin tapa de base cuadrada con volumen de 500 cm^3 con superficie mínima mide 10 cm en la base cuadrada y 5 cm de altura.

3) Dibuja y calcula el área del recinto que delimitan las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + 4 \\ g(x) = 2x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$$

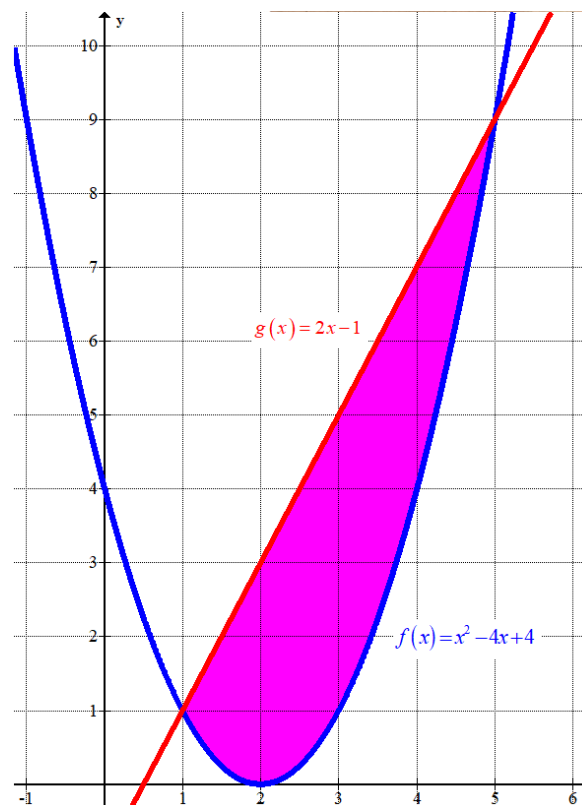
$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x=1$ y $x=5$.

La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ es una parábola y la de $g(x) = 2x - 1$ es una recta.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto delimitado por ellas.

x	$f(x) = x^2 - 4x + 4$	x	$g(x) = 2x - 1$
1	1	1	1
2	0	2	3
5	9	5	9



Calculamos el valor del área del recinto como la integral definida entre 1 y 5 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^5 g(x) - f(x) dx = \int_1^5 2x - 1 - (x^2 - 4x + 4) dx = \int_1^5 2x - 1 - x^2 + 4x - 4 dx = \\ &= \int_1^5 -x^2 + 6x - 5 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \left[\frac{-5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 \right] - \left[\frac{-1^3}{3} + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{-125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

4) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y haz un dibujo aproximado de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

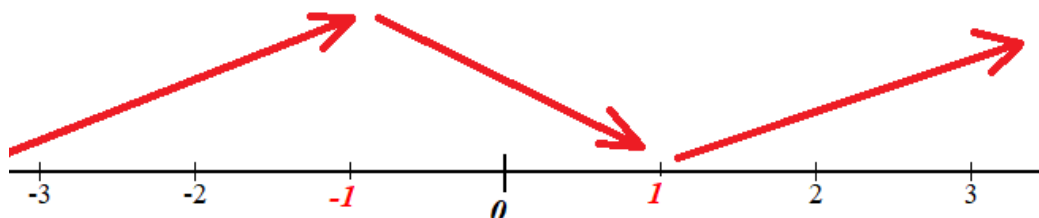
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función crece $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función sigue el esquema siguiente.

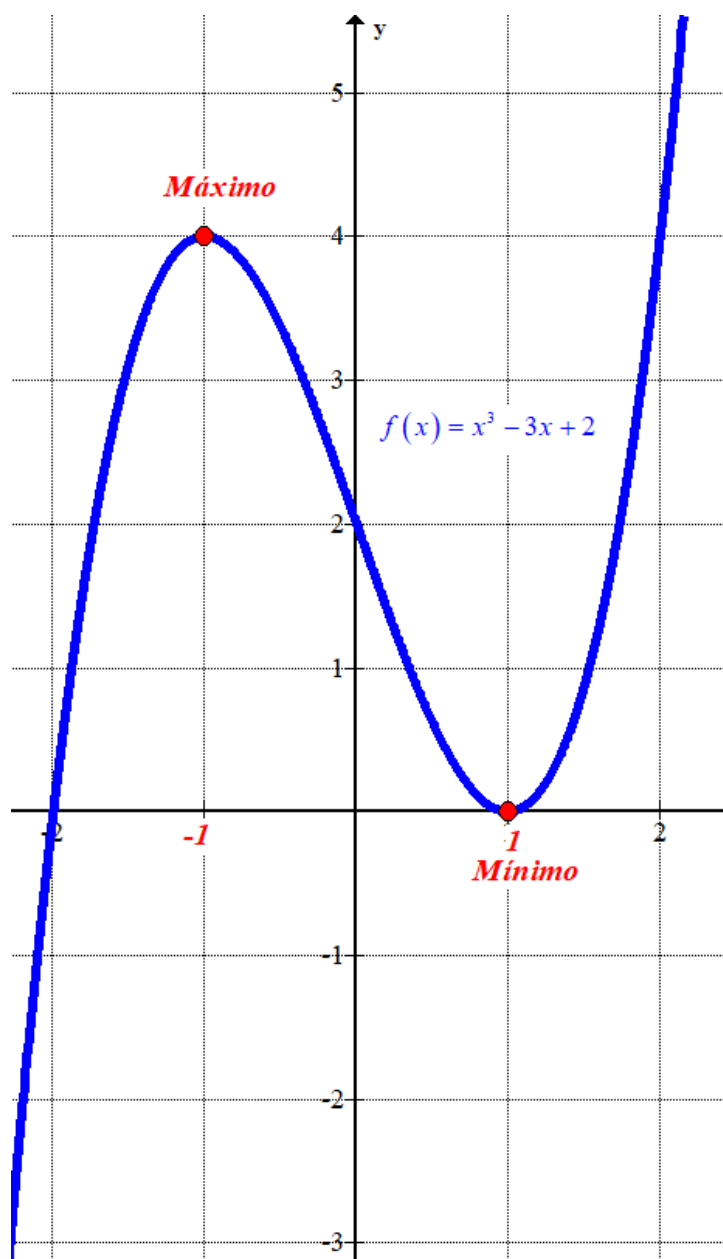


La función tiene un máximo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, 4)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 - 3x + 2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4



5) Se ha realizado una encuesta a 100 adolescentes para saber el número de horas semanales que dedican al estudio fuera del centro. Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Intervalo	(0,3]	(3,6]	(6,9]	(9,12]	(12,15]
Frecuencia	25	30	20	15	10

Calcula la moda, mediana, media aritmética y desviación típica de la distribución, y realiza el histograma.

La moda es el intervalo con mayor frecuencia. Este intervalo es $(3,6]$ con 30 adolescentes.

La moda es estudiar entre 3 y 6 horas semanales.

Completamos la tabla proporcionada.

Intervalo	(0,3]	(3,6]	(6,9]	(9,12]	(12,15]	TOTALES
Marca de clase (x_i)	1.5	4.5	7.5	10.5	13.5	
Frecuencia (f_i)	25	30	20	15	10	100 = N
Frecuencia acumulada (F_i)	25	55	75	90	100 = N	
$x_i f_i$	37.5	135	150	157.5	135	615
$(x_i)^2 f_i$	56.25	607.5	1125	1653.75	1822.5	5265

La mediana es el valor central de la distribución, que deja la mitad de los individuos por debajo y la otra mitad por encima. Observando la frecuencia acumulada sabemos que el dato 50º y 51º dejan por encima y por debajo 49 individuos y estos datos están en el intervalo $(3,6]$.

La mediana es el intervalo $(3,6]$.

La fórmula de la media de una distribución es $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$, siendo x_i el dato, f_i la frecuencia del dato y N el número de datos de la distribución.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{615}{100} = 6.15$$

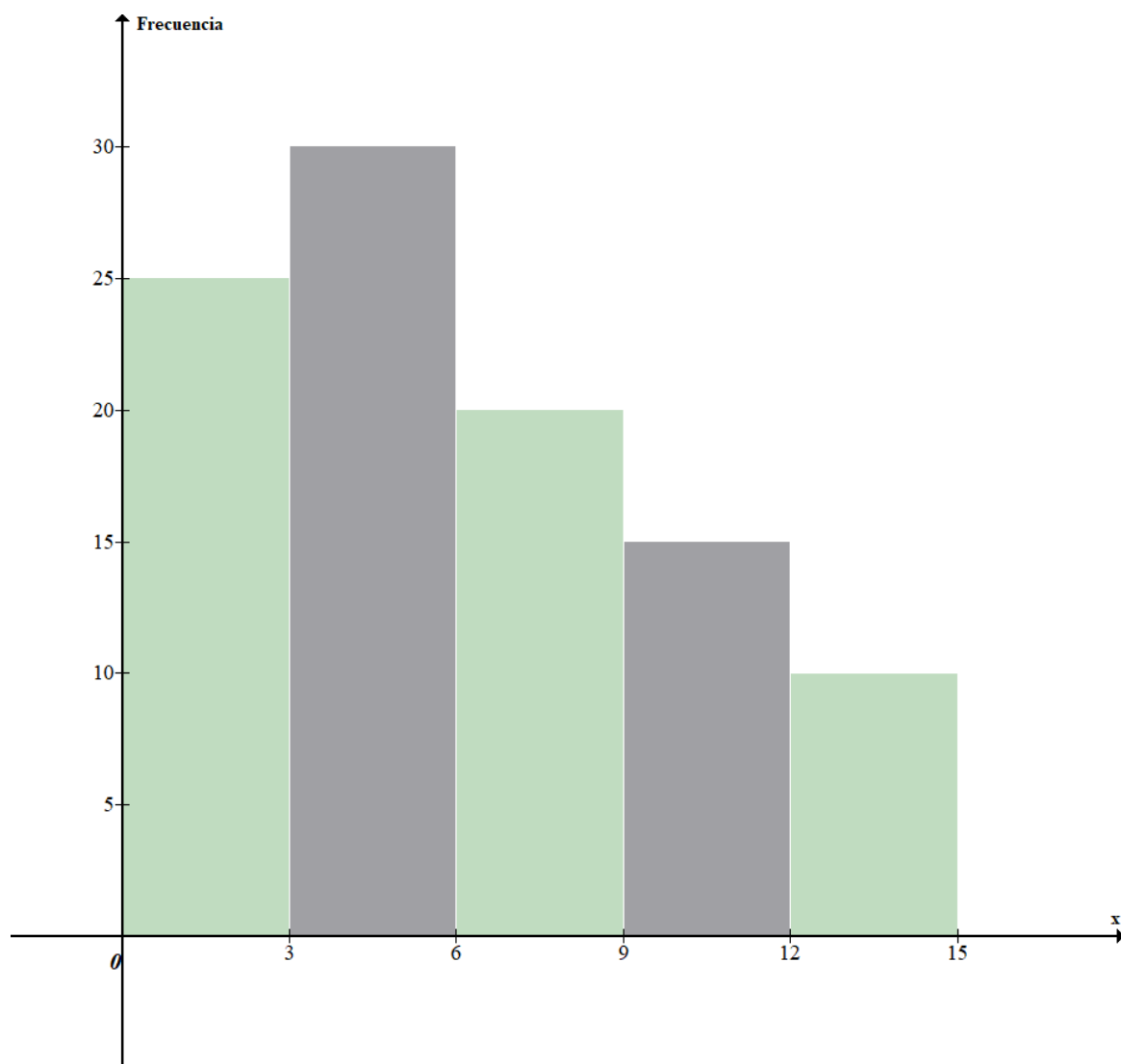
La media de horas de estudio semanales es de 6.15 horas, es decir 6 horas y 9 minutos.

La desviación típica de la distribución es $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2 f_i}{N} - \bar{x}^2}$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2 f_i}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{5265}{100} - 6.15^2} \approx 3.85$$

La desviación típica de la distribución es aproximadamente de 3.85 horas, es decir, aproximadamente 3 horas y 51 minutos.

Realizamos el histograma de frecuencias.



6) Resuelve el sistema y la ecuación siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } -x + y + z &= 4 \\ 3x - y + 4z &= 13 \\ 4x + y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{3}$$

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 4 \\ 3x - y + 4z = 13 \\ 4x + y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 4 + x - z \\ 3x - y + 4z = 13 \\ 4x + y - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - (4 + x - z) + 4z = 13 \\ 4x + 4 + x - z - 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4 - x + z + 4z = 13 \\ 5x - 4z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 5z = 17 \\ 5x - 4z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x \rightarrow 2x + 5z = 17 \\ 5x \rightarrow 5x - 4z = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8x + 20z = 68 \\ 25x - 20z = -35 \end{array} \right\}$$

$$\frac{33x}{33} = \frac{33}{33} \Rightarrow \boxed{x = \frac{33}{33} = 1} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 5z = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z = 15 \Rightarrow \boxed{z = \frac{15}{5} = 3} \Rightarrow \boxed{y = 4 + 1 - 3 = 2}$$

La solución del sistema es $x=1, y=2, z=3$.

b) Resolvemos la ecuación.

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{(x+1)(x+1) - (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{x^2 + 1 + 2x - (x^2 + 1 - 2x)}{x^2 - 1} = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} + 1 + 2x - \cancel{x^2} - 1 + 2x}{x^2 - 1} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{4x}{x^2 - 1} = \frac{8}{3} \Rightarrow 12x = 8x^2 - 8 \Rightarrow 8x^2 - 12x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = \boxed{2 = x} \\ \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{2} = x} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x=2$ y $x=\frac{-1}{2}$.