



Universidad de Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025-2026

3. MODELO DE EXAMEN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

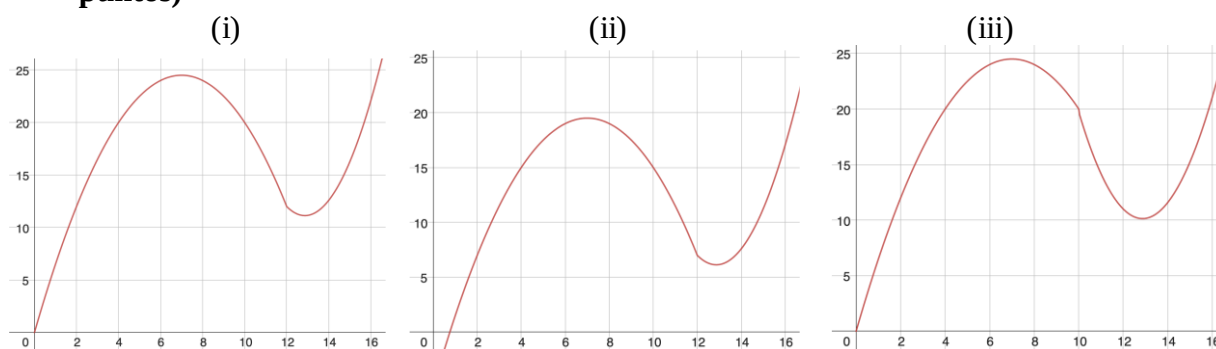
- Responde en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 12 \\ -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \leq 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

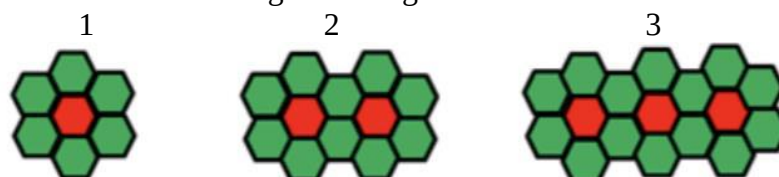
- a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**
- b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**
- c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f . **(0.5 puntos)**



Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:

- a) Encuentra la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto $(2, 0)$. **(0.5 puntos)**
- b) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. **(2 puntos)**

Pregunta 2. Opción A. Observa las siguientes figuras:



- a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. **(2 puntos)**
- b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

- a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? **(1 punto)**

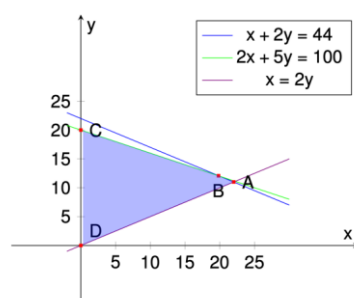


Figura 1: Región factible.

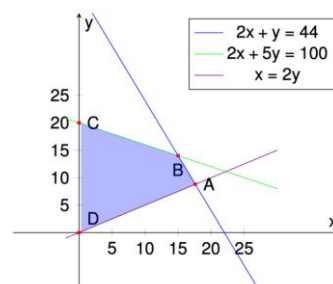


Figura 2: Región factible.

- b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? **(1.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema:
$$\begin{cases} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{cases}$$

- a) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. **(1.5 puntos)**
- b) Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x,y) = (3,0)$ y $(x,y) = (2,-2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) Si $\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
- b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones y explica por qué. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

- a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? **(1.25 puntos)**
- b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>? **(1.25 puntos)**

Pregunta 4. Opción B. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60% combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

- ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**
- Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**
- ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Pregunta 5. Opción A. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

- ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
- Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior? **(1 punto)**
- Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo sería más amplio o menos? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Pregunta 5. Opción B. Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n . En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90% y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95% de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102, 0.7898), (0.5565, 0.7435) y (0.6248, 0.7752).

- Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90% de confianza? **(1.5 puntos)**
- Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n ? ¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$$F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 \text{ y } F(2.58) = 0.995.$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n :

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

En ambas expresiones $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha / 2$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. (Con optatividad – 2.5 puntos) Análisis.

Pregunta 2. (Con optatividad – 2.5 puntos) Álgebra.

Pregunta 3. (Con optatividad – 2.5 puntos) Álgebra.

Pregunta 4. (Con optatividad – 2.5 puntos) Probabilidad.

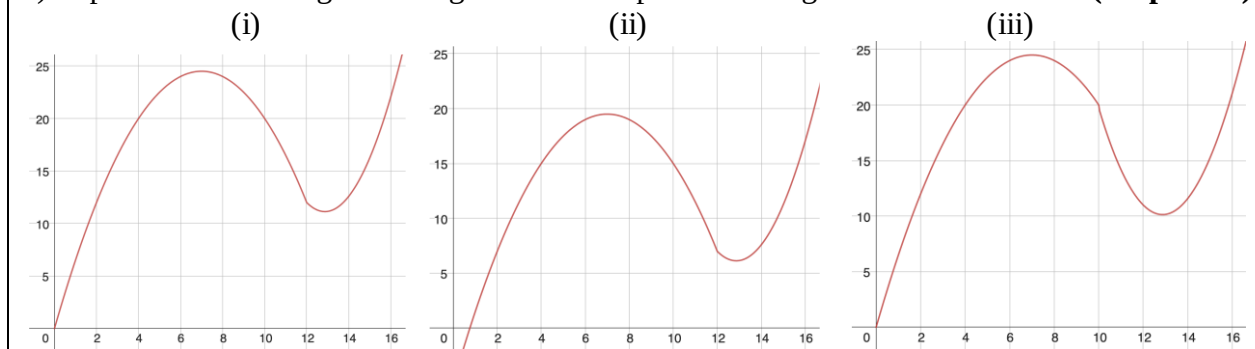
Pregunta 5. (Con optatividad – 2.5 puntos) Estadística.

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \leq x \leq 12 \\ -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \leq 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

- a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**
 b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**
 c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f . **(0.5 puntos)**



a) En el intervalo $[0,12]$ la función tiene la expresión $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x$. Su derivada es

$f'(x) = -x + 7$. Esta derivada se anula para $x = 7$.

- En el intervalo $[0,7)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = -1 + 7 = 6 > 0$. La función crece en $[0,7)$.
- En el intervalo $(7,12)$ tomamos $x=8$ y la derivada vale $f'(8) = -8 + 7 = -1 < 0$. La función decrece en $(7,12)$.

En el intervalo $(12,20]$ la función tiene la expresión $f(x) = -\frac{1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220$. Su

derivada es $f'(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34$. Estudiamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-1}{36}x^2 + 3x - 34 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{36}x^2 + 3x - 34 = 0 \Rightarrow x^2 - 108x + 1224 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{108 \pm \sqrt{(-108)^2 - 4 \cdot 1224}}{2} = \frac{108 \pm 12\sqrt{47}}{2} = 54 \pm 6\sqrt{47} = \begin{cases} 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.86 \in (12, 20) \\ 54 + 6\sqrt{47} \approx 95.1 \notin (12, 20) \end{cases}$$

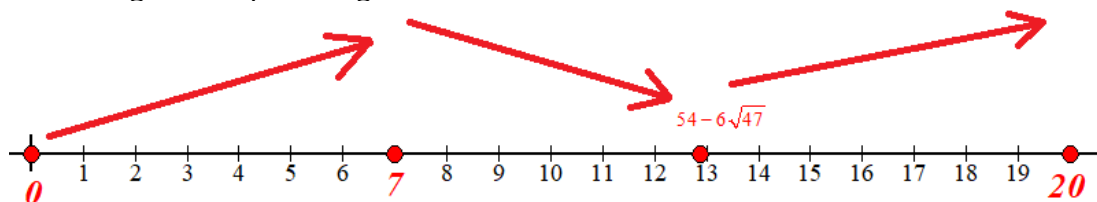
- En el intervalo $(12, 54 - 6\sqrt{47})$ tomamos $x = 12.5$ y la derivada vale

$$f'(12.5) = \frac{-1}{36}12.5^2 + 3 \cdot 12.5 - 34 = -0.8 < 0. \text{ La función decrece en } (12, 54 - 6\sqrt{47}).$$

- En el intervalo $(54 - 6\sqrt{47}, 20)$ tomamos $x = 13$ y la derivada vale

$$f'(13) = \frac{-1}{36}13^2 + 3 \cdot 13 - 34 = 0.3 > 0. \text{ La función crece en } (54 - 6\sqrt{47}, 20).$$

La función sigue el esquema siguiente.



Resumiendo: La función crece en $[0, 7) \cup (54 - 6\sqrt{47}, 20)$ y decrece en $(7, 54 - 6\sqrt{47})$.

- b) En el segundo 1 la función vale $f(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 = 6.5$. En el segundo 7 la función vale

$$f(7) = -\frac{1}{2} \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 = 24.5. \text{ La función crece del segundo 1 al 7 y es continua por lo que en}$$

ningún momento alcanza un valor inferior a 5. En el segundo 12.86 la función toma el valor

$$\frac{-1}{108}(54 - 6\sqrt{47})^3 + \frac{3}{2}(54 - 6\sqrt{47})^2 - 34(54 - 6\sqrt{47}) + 220 = 11.1. \text{ La función decrece del}$$

segundo 7 al 12.86 pero no baja de 11, por lo que sigue sin alcanzar un valor inferior a 5.

Del segundo 12.86 al 20 la función crece, partiendo de un valor de 11.1, por lo que tampoco en este intervalo toma un valor inferior a 5.

La función no toma nunca un valor inferior a 5 km/h.

¿Supera los 70 km/h en algún momento?

La función empieza valiendo 6.5 km/h, crece hasta 24.5 en el segundo 7, baja hasta 11.1 en el segundo 12.86 y crece hasta el segundo 20 que alcanza un valor de

$$\frac{-1}{108}20^3 + \frac{3}{2}20^2 - 34 \cdot 20 + 220 = 65.9. \text{ La función no supera el valor 70 en ningún momento.}$$

- c) Las tres gráficas se ajustan al esquema de la evolución de la función obtenido en el apartado a).

Hemos visto que la función alcanza el valor 24.5 en el segundo 7 que es un máximo relativo de la función. Este requisito no lo cumple la gráfica (ii) pues en el segundo 7 alcanza un valor inferior a 20.

En la gráfica (iii) observamos que la función presenta un cambio brusco para $x = 10$, lo cual no debe ocurrir pues el cambio de definición se produce para $x = 12$.

La gráfica que se corresponde con la función es la gráfica (i).

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:

- a) Encuentra la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto $(2, 0)$. **(0.5 puntos)**
 b) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. **(2 puntos)**

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 2x^2 - 3x dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K$$

Como la función pasa por el punto $(2, 0)$ debe cumplirse que $F(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K \\ F(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2^4}{4} - 2\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + K = 0 \Rightarrow 4 - \frac{16}{3} - 6 + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}$.

- b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua.
 Hallamos los puntos de corte con el eje OX .

$$\text{Eje } OX \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 = x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1 = x} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comprobamos si la función es positiva o negativa antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la función vale

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 3(-2) = -10 < 0. \text{ La función es negativa en el intervalo } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la función vale

$$f(-0.5) = (-0.5)^3 - 2(-0.5)^2 - 3(-0.5) = 0.875 > 0. \text{ La función es positiva en el intervalo } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0,3)$ tomamos $x=2$ y la función vale

$$f(2) = 2^3 - 2(2)^2 - 3(2) = -6 < 0. \text{ La función es negativa en el intervalo } (0,3).$$

- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la función vale

$$f(4) = 4^3 - 2(4)^2 - 3(4) = 20 > 0. \text{ La función es positiva en el intervalo } (3,+\infty).$$

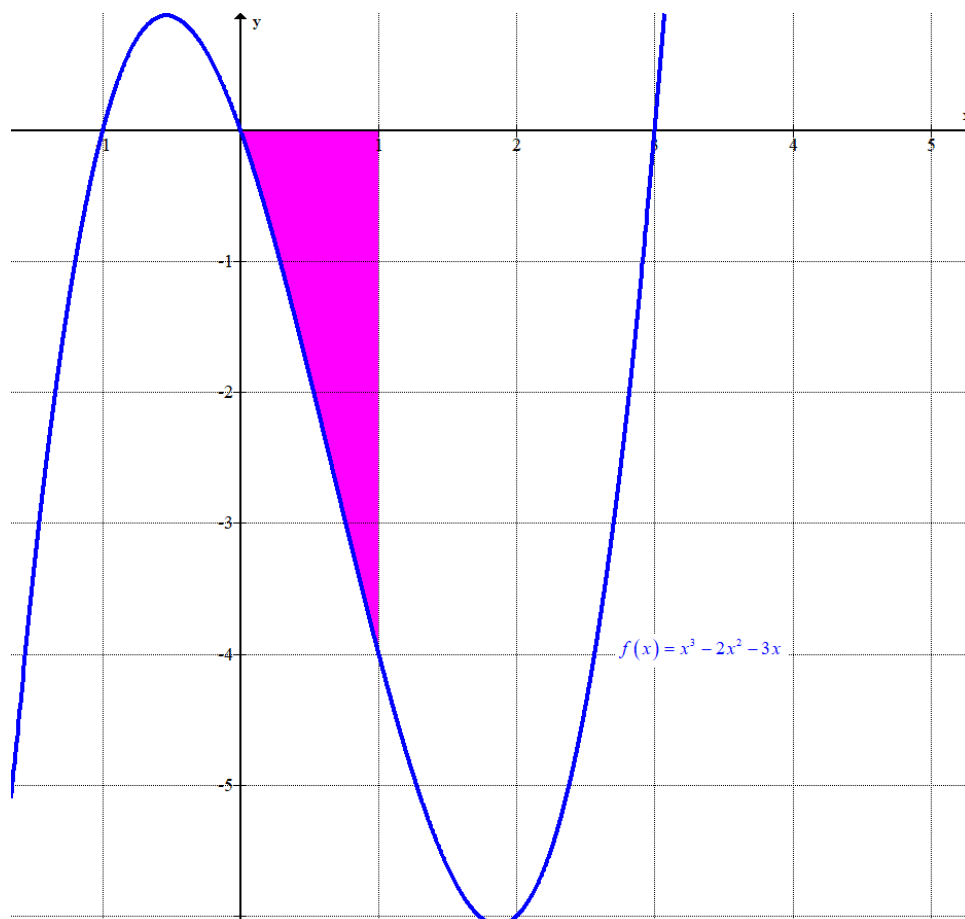
Entre los puntos $x=0$ y $x=1$ la función es negativa.

Calculamos el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

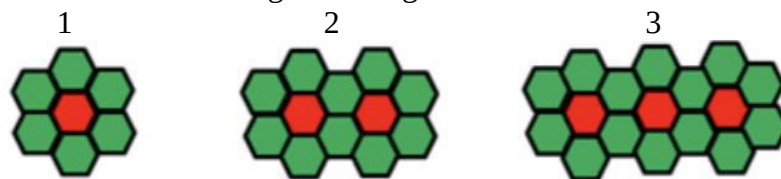
$$\text{Área} = \left| \int_0^1 x^3 - 2x^2 - 3x dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{1^4}{4} - 2\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} \right] \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \right| = \boxed{\frac{23}{12} \approx 1.9167 u^2}$$

El área tiene un valor aproximado de 1.9167 unidades cuadradas.



Pregunta 2. Opción A. Observa las siguientes figuras:



- a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. **(2 puntos)**
- b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

- a) La secuencia de hexágonos rojos es 1, 2, 3, ... Por lo que en la figura número 10 tendrá 10 hexágonos rojos.

La secuencia de hexágonos verdes es 6, 10, 14, ... Cada nueva figura incorpora 4 hexágonos verdes más. En la figura 1 hay $2 + 4 = 2 + 1 \cdot 4$, en la figura 2 hay $2 + 2 \cdot 4$, en la figura 3 hay $2 + 3 \cdot 4$, en la figura 4 deben de haber $2 + 4 \cdot 4$ y en la figura 10 habrá $2 + 10 \cdot 4 = 42$ hexágonos verdes.

La fórmula que permite obtener el número de hexágonos de cada color en la figura n es:

$$\begin{aligned}\text{Rojos} &\rightarrow r_n = n \\ \text{Verdes} &\rightarrow v_n = 2 + 4n\end{aligned}$$

- b) Nos planteamos la posibilidad de que en algún momento $2 + 4n$ sea igual a 152, siendo n el número de figura y por tanto un número natural. Lo investigamos.

$$2 + 4n = 152 \Rightarrow 4n = 150 \Rightarrow n = \frac{150}{4} = 37.5$$

Esto no es posible pues el número de figura es siempre un número natural.

Pregunta 2. Opción B. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

- a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? **(1 punto)**

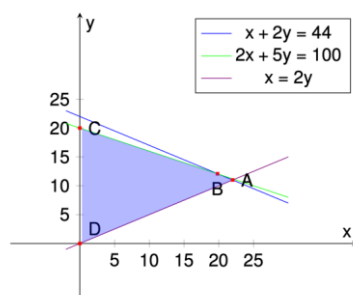


Figura 1: Región factible.

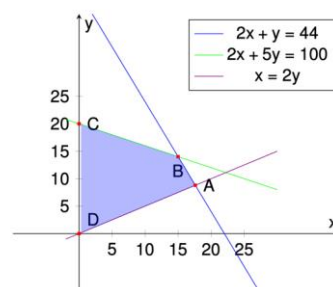


Figura 2: Región factible.

- b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? **(1.5 puntos)**

- a) Llamamos “x” al número de gorros e “y” al número de bufandas.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Metros de lana blanca	Metros de lana negra
Número de gorros (x)	50x	40x
Número de bufandas (y)	100y	100y
	50x + 100y	40x + 100y

“Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro” →

$$50x + 100y \leq 2200; 40x + 100y \leq 2000$$

“El número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas” → $x \leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50x + 100y \leq 2200 \\ 40x + 100y \leq 2000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$$x + 2y = 44$$

x	$y = \frac{44 - x}{2}$
0	22
44	0

$$2x + 5y = 100$$

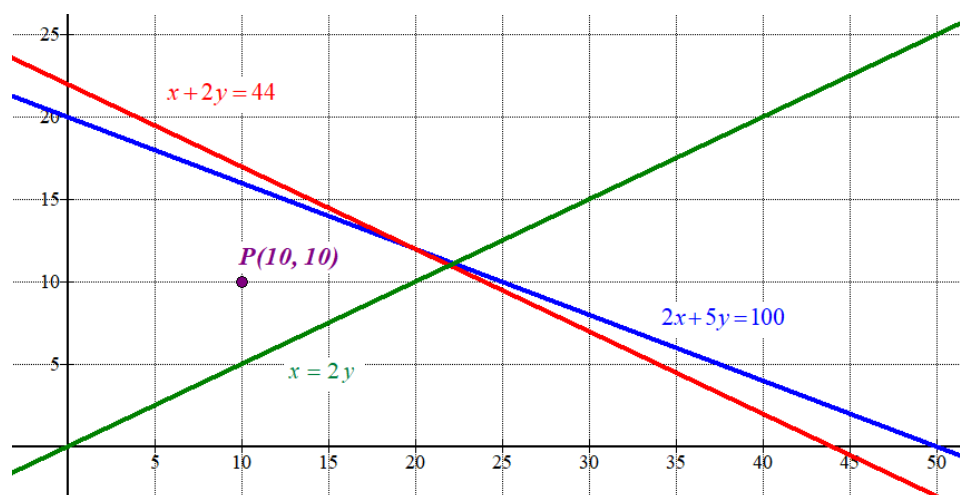
x	$y = \frac{100 - 2x}{5}$
0	20
50	0

$$x = 2y$$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
20	10

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

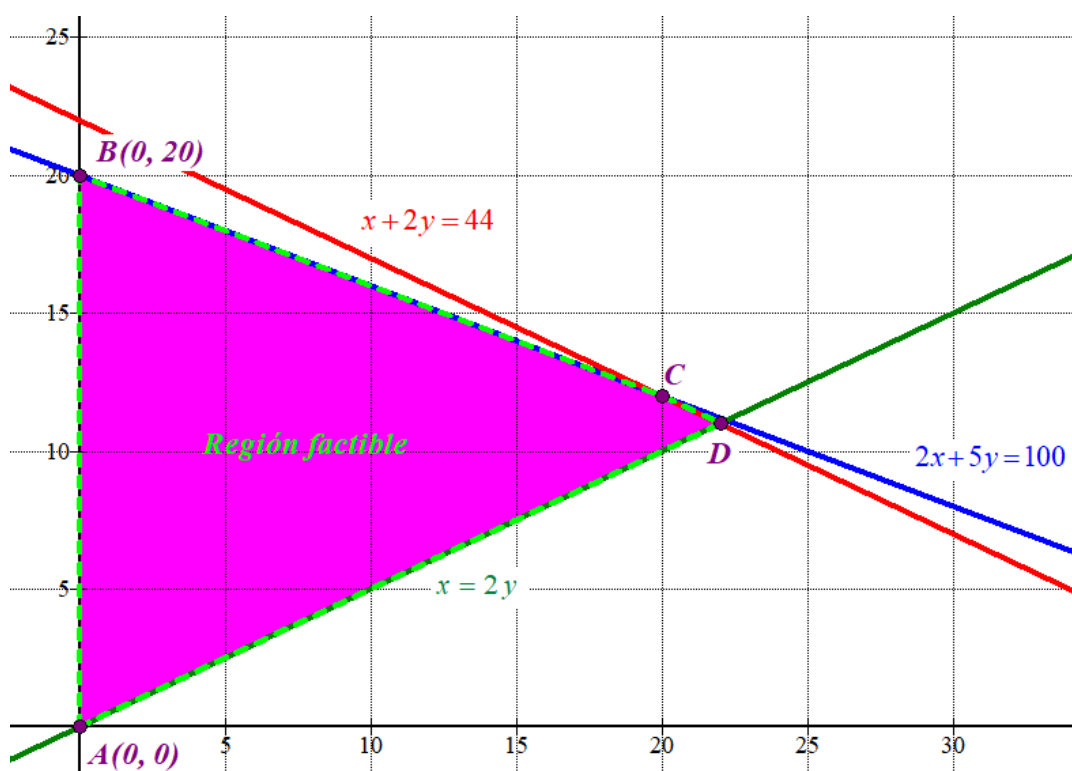
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región que contiene las soluciones del sistema}$$

es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 44 \\ 20 + 50 \leq 100 \\ 10 \leq 20 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



El conjunto de posibles soluciones se representa en la figura 1.

¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer?

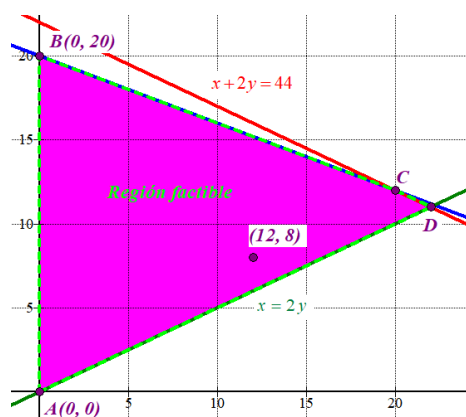
Existen muchas combinaciones posibles. Cualquier par de valores naturales que pertenezcan a la región factible dibujada.

¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible?

¿Por qué?

Solo los que tengan coordenadas enteras. El número de unidades de gorros y bufandas no puede ser decimal. Si se desea optimizar una función la solución al problema estará situado en los bordes de la región factible.

- b) **¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?** El punto (12, 8) pertenece a la región factible y si se puede tejer 12 gorros y 8 bufandas.



También se puede comprobar viendo si estos valores satisfacen las inecuaciones que representan las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 2 \cdot 8 \leq 44 \\ 2 \cdot 12 + 5 \cdot 8 \leq 100 \\ 12 \leq 2 \cdot 8 \\ 12 \geq 0; 8 \geq 0 \end{array} \right\}$$

El punto (12, 8) cumple todas las inecuaciones y si se pueden tejer 12 gorros y 8 bufandas.

Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos?

Averiguamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ 2x + 5y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 44 - 2y \\ 2x + 5y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(44 - 2y) + 5y = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88 - 4y + 5y = 100 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = 44 - 24 = 20 \Rightarrow C(20, 12)$$

$$D \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 44 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 2y = 44 \Rightarrow 4y = 44 \Rightarrow y = \frac{44}{4} = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 22 \Rightarrow D(22, 11)$$

Los ingresos son $I(x, y) = 12x + 18y$. Deseamos maximizarlos.

Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

$$A(0,0) \rightarrow I(0,0) = 0$$

$$B(0, 20) \rightarrow I(0,20) = 12 \cdot 0 + 18 \cdot 20 = 360$$

$$C(20, 12) \rightarrow I(20,12) = 12 \cdot 20 + 18 \cdot 12 = 456$$

$$D(22, 11) \rightarrow I(22,11) = 12 \cdot 22 + 18 \cdot 11 = 462 \text{ ¡Máximo!}$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 462 euros, y se obtienen con la confección y venta de 22 gorros y 11 bufandas.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema:
$$\begin{cases} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{cases}$$

a) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. **(1.5 puntos)**

b) Para $m=3$, ¿pueden ser $(x,y) = (3,0)$ y $(x,y) = (2,-2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m=3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. **(1 punto)**

a) Despejamos “ y ” en la segunda ecuación y sustituimos en la primera.

$$\begin{cases} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - 2m = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)x + (m-4)(2x-2m) = 6 \Rightarrow mx - x + 2mx - 2m^2 - 8x + 8m = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3mx - 9x = 6 - 8m + 2m^2 \Rightarrow (3m-9)x = 2m^2 - 8m + 6$$

Consideramos un valor tal que $3m-9 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$, por ejemplo $m=0$.

Terminamos de resolver el sistema para este valor.

$$\left. \begin{aligned} (3m-9)x &= 2m^2 - 8m + 6 \\ m &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -9x = 6 \Rightarrow x = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{-2}{3} - 2 \cdot 0 = \frac{-4}{3}$$

Para $m=0$ el sistema tiene solución única: $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$.

b) Para $m=3$ el sistema queda $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 6 \end{cases}$.

Si tomamos $\alpha=3$ nos queda la solución $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \end{cases}$.

$(x,y) = (3,0)$ si es solución del sistema.

Si tomamos $\alpha=2$ nos queda la solución $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \end{cases}$.

$(x,y) = (2,-2)$ si es solución del sistema.

Para $m=3$ el sistema tiene infinitas soluciones. Dando distintos valores a “ α ” obtenemos distintas e infinitas soluciones del sistema.

Pregunta 3. Opción B. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

- a) Si $\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m . **(1.5 puntos)**
 b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A+B \cdot C = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ m-2m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A+B \cdot C) \cdot D = E \Rightarrow (A+B \cdot C) \cdot D = 3E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+my=3 \\ mx+4y=3m \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} x+my=3 \\ mx+4y=3m \end{cases}$.

- b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A . Vemos cuando se anula el determinante de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{vmatrix} = 4 - m^2$$

$$\begin{cases} |A| = 4 - m^2 \\ |A| = 0 \end{cases} \Rightarrow 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m \neq \pm 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m = 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $m = -2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\begin{cases} x-2y=3 \\ -2x+4y=-6 \end{cases}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una ecuación: $x-2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones para $m = 2$ y también para $m = -2$.

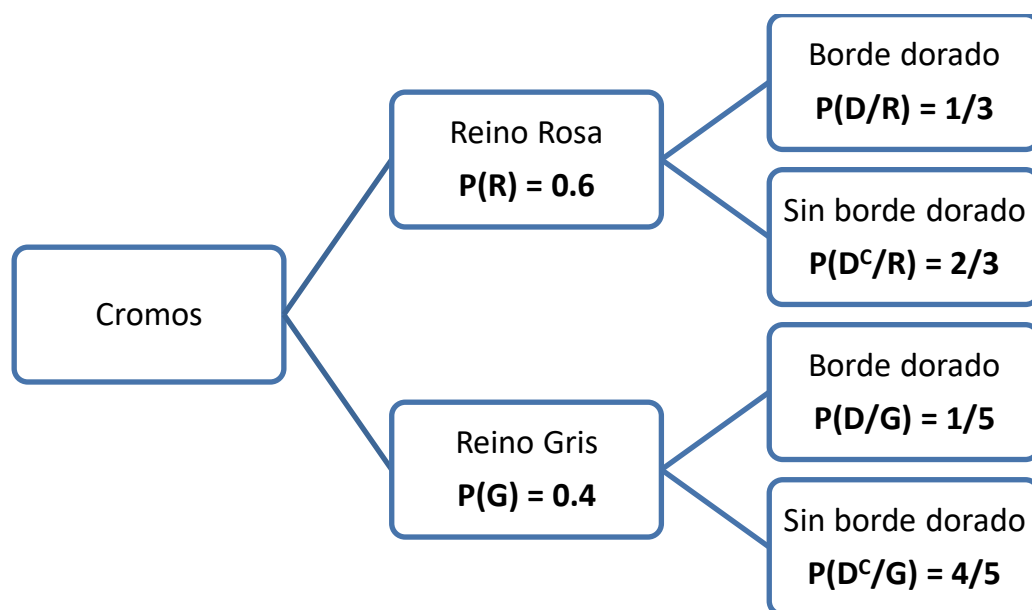
Pregunta 4. Opción A. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? **(1.25 puntos)**

b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>? **(1.25 puntos)**

Llamamos R al suceso “el cromo es de Reino Rosa”, G a “el cromo es del Reino Gris” y D a “el cromo tiene el borde dorado”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(R)P(D/R) + P(G)P(D/G) = 0.6 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{25} = 0.28$$

La probabilidad de que el cromo elegido tenga el borde dorado es de 0.28.

b) Nos piden calcular $P(R/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R/D^c) = \frac{P(R \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(R)P(D^c/R)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0.28} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

La probabilidad de que el cromo sin borde dorado elegido sea del <<Reino Rosa>> tiene un valor aproximado de 0.556

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 cromos. De ellos 60 son del Reino Rosa y 40 del Reino Gris. De los 60 del Reino Rosa tenemos que un tercio tienen borde dorado, es decir, $60/3 = 20$ cromos tienen borde dorado y son del Reino Rosa. De los 40 cromos del Reino Gris una quinta parte tienen borde dorado, es decir $40/5 = 8$ cromos son del Reino Gris y tienen borde dorado.

- a) Tenemos 20 cromos del Reino Rosa con borde dorado y 8 con borde dorado del Reino Gris. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(D) = \frac{20+8}{100} = 0.28$$

- b) Tenemos 40 cromos del Reino Rosa sin borde dorado y 32 del Reino Gris sin borde dorado. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(R / D^c) = \frac{40}{40+32} = \frac{5}{9}$$

Pregunta 4. Opción B. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60% combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

- a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**
- b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**
- c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Hay 200 trabajadores en el parque. El 80% de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años, es decir, $0.80 \cdot 200 = 160$ son menores de 30 años.

De los 160 trabajadores menores de 30 años el 60% combinan el trabajo con estudios, es decir, $0.6 \cdot 160 = 96$ trabajadores son menores de 30 años que combinan el trabajo con estudios.

Como son 120 trabajadores que compaginan el trabajo con estudios entonces $120 - 96 = 24$ son trabajadores de 30 años o más que compaginan el trabajo con los estudios.

Ponemos todos estos datos en una tabla para que estén ordenados.

	Estudian	No estudian	TOTALES
Menores de 30 años	96		160
30 años o más			
TOTALES	120		200

Completamos la tabla

	Estudian	No estudian	TOTALES
Menores de 30 años	96	64	160
30 años o más	24	16	40
TOTALES	120	80	200

- a) Hay 64 personas menores de 30 años que no estudian.
- b) Hay 120 personas que compaginan trabajo y estudios y de estas son 96 las menores de 30 años. La probabilidad de que al elegir un trabajador que compagina trabajo y estudios este sea menor de 30 años vale $\frac{96}{120} = 0.8$.
- c) Llamamos M al suceso “ser menor de 30 años” y C al suceso “estudiar”.
Para que sean independientes se debe cumplir $P(M \cap C) = P(M)P(C)$.

$$\left. \begin{aligned} P(M \cap C) &= \frac{96}{200} = 0.48 \\ P(M)P(C) &= \frac{160}{200} \cdot \frac{120}{200} = 0.48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(M \cap C) = 0.48 = P(M)P(C)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos son independientes.

- Pregunta 5. Opción A.** Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.
- ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**
 - Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior? **(1 punto)**
 - Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo sería más amplio o menos? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

- a) No tenemos un valor para la proporción muestral de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio.

Al no conocer el valor de la proporción y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable: $p = 0.5$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, \mathbf{F(1.96) = 0.975}, F(2.33) = 0.99 \text{ y } F(2.58) = 0.995$$

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96} \right)^2} = 384.16 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 tabletas de chocolate.

- b) Tamaño de la muestra = $n = 300$. La proporción de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio es: $p = 0.5$.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{300}} = 0.0566$$

El error es mayor que 0.05 y el intervalo de confianza será más amplio.

Al disminuir el tamaño muestral, la estimación empeora, aumentando la amplitud del intervalo de confianza.

- c) Si aumentamos el nivel de confianza la estimación se vuelve más imprecisa, por lo que aumenta la amplitud del intervalo de confianza. Lo comprobamos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$$

$F(1.28) = 0.90$, $F(1.64) = 0.95$, $F(1.96) = 0.975$, $F(2.33) = 0.99$ y **$F(2.58) = 0.995$** .

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58 \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{300}} \approx 0.0745$$

El error es mayor que 0.05 y por tanto el intervalo de confianza será más amplio.

Pregunta 5. Opción B. * Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n . En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90% y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95% de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102, 0.7898), (0.5565, 0.7435) y (0.6248, 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90% de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n ? ¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

Tenemos dos muestras del mismo tamaño: $n_1 = n_2$ y con porcentaje de visitantes que realiza alguna compra con valor $p_1 = 0.7$ y $p_2 = ?$.

a) El valor central del intervalo es el valor de la proporción muestral.

$$(0.6102, 0.7898) \rightarrow p = \frac{0.6102 + 0.7898}{2} = 0.7$$

$$(0.5565, 0.7435) \rightarrow p = \frac{0.5565 + 0.7435}{2} = 0.65$$

$$(0.6248, 0.7752) \rightarrow p = \frac{0.6248 + 0.7752}{2} = 0.7$$

A la primera muestra corresponden el primer y el tercer intervalo pues tienen la misma proporción muestral que la primera muestra 0.7.

Obtenemos el error del primer y tercer intervalo. Sabemos que es la mitad de la amplitud.

$$(0.6102, 0.7898) \rightarrow Error = \frac{0.7898 - 0.6102}{2} = 0.0898$$

$$(0.6248, 0.7752) \rightarrow Error = \frac{0.7752 - 0.6248}{2} = 0.0752$$

Con un nivel de confianza del 90 % (menor que el 95%) se obtiene un valor de $z_{\alpha/2}$ menor y el error también será menor, por lo que el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de confianza del 90% debe ser el tercero (0.6248, 0.7752).

b) En la segunda muestra el intervalo de confianza es (0.5565, 0.7435) con una proporción muestral de $p_2 = 0.65$. En esta muestra el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$(0.5565, 0.7435) \rightarrow Error = \frac{0.7435 - 0.5565}{2} = 0.0935$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; **$F(1,96) = 0,975$** ; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.0935 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.0935}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2275}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.0935}{1.96} \right)^2 = \frac{0.2275}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2275}{\left(\frac{0.0935}{1.96} \right)^2} = 99.97 \end{aligned}$$

El número de visitantes cogidos en la muestra es de 100.

Como la proporción de visitantes que compraron fue del 0.65 entonces $0.65 \cdot 100 = 65$ visitantes de la muestra elegida compraron algo en la tienda del parque de atracciones.