

Matemáticas II**INDICACIONES**

- El examen consta de seis ejercicios. El alumno ha de elegir y resolver tres de ellos completos.
- Si se responde a más de tres ejercicios, solo se corregirán los tres primeros que se hayan resuelto, según el orden en que se presenten en el cuadernillo de examen.
- Cada ejercicio tiene un valor de 10 puntos. La nota del examen será igual a la media aritmética de las notas de los tres ejercicios elegidos.
- Las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 4 & a-4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- a) [5 puntos]** Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a .
b) [5 puntos] Considera $a = 0$. Si es posible, halla la matriz X que satisface la ecuación matricial: $AX = 2I_3 - B$.

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la siguiente función $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) [2 puntos]** Determina el valor de a si la función $f(x)$ corta al eje de abscisas OX en $x = 2$.
b) [4 puntos]. Considera $a = 5$. Si existen, halla las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.
c) [4 puntos] Considera $a = 5$. Obtén una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, que cumpla: $F(1) = 0$.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Considera los puntos en el espacio: $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -1, 0)$ y $C = (2, 0, 3)$.

- a) [2 puntos]. Calcula la distancia entre A y B.
- b) [4 puntos]. Obtén la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A y B.
- c) [4 puntos]. Obtén la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A, B y C.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + 2z = 2a \\ x + 3y + a^2z = -1 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- a) [6 puntos]. Determina para qué valores de a el sistema es incompatible.
- b) [4 puntos]. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considera la siguiente función: $f(x) = x + ae^{-x}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) [2 puntos]. Determina el valor del parámetro a sabiendo que $f(x)$ toma el valor mínimo en $x = \ln 2$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.
- b) [4 puntos]. Considera $a = 1$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) [4 puntos]. Considera $a = 1$. Calcula los límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considera el punto en el plano: $A = (2, 1)$.

- a) [2 puntos]. Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta r que pasa por el punto A y tiene pendiente $m_r = 1$.
- b) [2 puntos]. Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta s que pasa por el punto A y por el punto $B = (5, 7)$.
- c) [2 puntos]. Calcula la distancia entre los puntos de corte de las rectas r y s con el eje de ordenadas OY.
- d) [4 puntos]. Calcula el ángulo que forman las rectas r y s .

SOLUCIONES**Ejercicio 1 [10 PUNTOS]**

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 4 & a-4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

a) [5 puntos] Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a .

b) [5 puntos] Considera $a = 0$. Si es posible, halla la matriz X que satisface la ecuación matricial: $AX = 2I_3 - B$.

a) Hallamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 4 & a-4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-4) + 0 - 4 - 0 - 0 + 4a = a^2 - 4a - 4 + 4a = a^2 - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -2$ y $a \neq +2$.

En este caso el determinante de la matriz A no se anula y el rango de A es 3.

CASO 2. $a = -2$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A no es 3. La matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera}$$

$$\text{fila y la tercera columna} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A no es 3. La matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera}$$

$$\text{fila y la tercera columna} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 \neq 0. \text{ El rango de A es 2.}$$

Resumiendo: Si $a \neq -2$ y $a \neq +2$ el rango de A es 3 y si $a = -2$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

- b) Considerando $a=0$ la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto tiene inversa. Despejamos X en la ecuación matricial $AX = 2I_3 - B$.

$$AX = 2I_3 - B \Rightarrow X = A^{-1}(2I_3 - B)$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 0 - 0 - 0 = -4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2I_3 - B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-2 & 0-1 \\ 0-0 & 2+1 & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2I_3 - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+3/4-0 & 0+0-1 \\ 1+0+0 & -2+0+0 & -1+0-1 \\ 1+0+0 & -2+0+0 & -1+0+0 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la siguiente función $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- a) [2 puntos] Determina el valor de a si la función $f(x)$ corta al eje de abscisas OX en $x = 2$.
 b) [4 puntos]. Considera $a = 5$. Si existen, halla las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.
 c) [4 puntos] Considera $a = 5$. Obtén una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, que cumpla: $F(1) = 0$.

a) Si la función $f(x)$ corta al eje de abscisas OX en $x = 2$ implica que $f(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

El valor buscado es $a = -2$.

b) Para $a = 5$ la función queda $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$.

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x^2} = \frac{0+5}{0^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} = \frac{1}{\infty} + \frac{5}{\infty} = 0 + 0 = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Para $a = 5$ la función queda $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}$. Calculamos la primitiva de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{5}{x^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{x} dx + 5 \int x^{-2} dx = \ln x + 5 \frac{x^{-1}}{-1} = \boxed{-\frac{5}{x} + \ln x + C} \end{aligned}$$

Determinamos el valor de C para que se cumpla: $F(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = -\frac{5}{x} + \ln x + C \\ F(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{5}{1} + \ln 1 + C = 0 \Rightarrow -5 + 0 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = 5}$$

La primitiva buscada es $F(x) = -\frac{5}{x} + \ln x + 5$.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Considera los puntos en el espacio: $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, -1, 0)$ y $C = (2, 0, 3)$.

a) [2 puntos]. Calcula la distancia entre A y B.

b) [4 puntos]. Obtén la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A y B.

c) [4 puntos]. Obtén la ecuación implícita del plano que contiene a los puntos A, B y C.

a) La distancia entre dos puntos A y B es el valor del módulo del vector que los une $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 1, 1) \\ B = (2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) - (1, 1, 1) = (1, -2, -1)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

La distancia entre A y B tiene un valor de $\sqrt{6}$ unidades.

b) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B como la recta que pasa por el punto A y con vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1, -2, -1) \\ A(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \boxed{r: x-1 = \frac{1-y}{2} = 1-z}$$

c) El plano π que contiene los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -2, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 0, 3) - (1, 1, 1) = (1, -1, 2) \\ A(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1) - (y-1) - (z-1) + 2(z-1) - 2(y-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 - y + 1 - z + 1 + 2z - 2 - 2y + 2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -5x - 3y + z + 7 = 0}$$

El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: -5x - 3y + z + 7 = 0$.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y + 2z = 2a \\ x + 3y + a^2z = -1 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) [6 puntos]. Determina para qué valores de a el sistema es incompatible.

b) [4 puntos]. Considera $a = 0$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

a) Estudiamos la compatibilidad del sistema.

Su matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & a^2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & a^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 5a^2 + 4 - 5 - 4a^2 - 1 = a^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq +1$

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz}$$

ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad -2 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 5 \quad 2 \quad 2 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

Los rangos de A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz}$$

ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \\ -1 \quad -2 \quad -1 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 5 \quad 2 \quad -2 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad 1 \quad 3}^{A/B} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad -4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 4}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

El sistema es incompatible para $a = -1$.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado (CASO 1, visto en el apartado anterior).

El sistema queda $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x+3y=-1 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x+3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x=-1-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-3y+2y+z=3 \\ 2(-1-3y)+5y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y+z=4 \\ -2-6y+5y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4+y \\ -y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow -y+2(4+y)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+8+2y=2 \Rightarrow \boxed{y=-6} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=4-6=-2} \\ \boxed{x=-1-3(-6)=-1+18=17} \end{cases}$$

Para $a=0$ el sistema es compatible determinado y su solución es $x=17$, $y=-6$; $z=-2$.

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considera la siguiente función: $f(x) = x + ae^{-x}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) [2 puntos]. Determina el valor del parámetro a sabiendo que $f(x)$ toma el valor mínimo en $x = \ln 2$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

b) [4 puntos]. Considera $a = 1$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) [4 puntos]. Considera $a = 1$. Calcula los límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a) Si $f(x)$ toma el valor mínimo en $x = \ln 2$ entonces la derivada de la función se anula para este valor $\rightarrow f'(\ln 2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x + ae^{-x} &\rightarrow f'(x) = 1 + ae^{-x}(-1) = 1 - ae^{-x} \\ f'(\ln 2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - ae^{-\ln 2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = ae^{-\ln 2} \Rightarrow 1 = \frac{a}{e^{\ln 2}} \Rightarrow 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor del parámetro es $a = 2$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = x + e^{-x}$. Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 1 - e^{-x} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow 1 = e^{-x} \Rightarrow 1 = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico obtenido.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 1 - e^1 = 1 - e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1 - e^{-1} \approx 0.63 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

c) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = x + e^{-x}$. Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1 + \frac{1}{e^{+\infty}} = \{e > 1\} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{+\infty}) = \{e > 1\} = 1 + \infty = \boxed{+\infty}$$

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considera el punto en el plano: $A = (2, 1)$.

- a) [2 puntos].** Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta r que pasa por el punto A y tiene pendiente $m_r = 1$.
- b) [2 puntos].** Halla la ecuación implícita (o ecuación general) de la recta s que pasa por el punto A y por el punto $B = (5, 7)$.
- c) [2 puntos].** Calcula la distancia entre los puntos de corte de las rectas r y s con el eje de ordenadas OY .
- d) [4 puntos].** Calcula el ángulo que forman las rectas r y s .

a) Utilizamos la fórmula punto – pendiente.

$$\left. \begin{array}{l} A = (2, 1) \in r \\ m_r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r: y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow r: y - 1 = x - 2 \Rightarrow \boxed{r: x - y - 1 = 0}$$

b) Calculo las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ que une los dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (5, 7) - (2, 1) = (3, 6)$$

La pendiente de la recta s que pasa por el punto A y por el punto B vale $m_s = \frac{6}{3} = 2$.

Utilizamos la fórmula punto – pendiente.

$$\left. \begin{array}{l} A = (2, 1) \in s \\ m_s = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow s: y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow s: y - 1 = 2x - 4 \Rightarrow \boxed{s: 2x - y - 3 = 0}$$

c) Hallamos los puntos de corte de las rectas r y s con el eje de ordenadas OY .

$$\left. \begin{array}{l} r: x - y - 1 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \boxed{P_r(0, -1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: 2x - y - 3 = 0 \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - y - 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \boxed{Q_s(0, -3)}$$

Los puntos de corte son $P_r(0, -1)$ y $Q_s(0, -3)$. La distancia entre ellos es de $-1 - (-3) = 2$ unidades.

d) Hallamos el ángulo formado por sus vectores directores usando el producto escalar.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0, -1) \in r \\ A(2, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{AP_r} = (0, -1) - (2, 1) = (-2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(0, -3) \in s \\ A(2, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_s = \overrightarrow{AQ_s} = (0, -3) - (2, 1) = (-2, -4)$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{v}_r| |\vec{u}_s|} = \frac{(-2, -2) \cdot (-2, -4)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{4 + 8}{\sqrt{8} \sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Ángulo}(r, s) = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \approx 18^\circ$$

Las rectas r y s forman un ángulo aproximado de 18° .

