



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Curso 2025/2026

**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES**

Cada estudiante deberá resolver cuatro ejercicios.

El Ejercicio 1 será obligatorio y de carácter competencial. Tendrá una puntuación máxima de 3 puntos.

El Ejercicio 2 será obligatorio y de carácter competencial y tendrá una puntuación máxima de 2 puntos.

El Ejercicio 3 tendrá una puntuación máxima de 2 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

El Ejercicio 4 tendrá una puntuación máxima de 3 puntos y se podrá elegir entre dos opciones (Opción 1 / Opción 2).

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Solo se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos ni tñpex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

Resuelve los apartados a) y b):

a) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes: una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

- a.1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.
- a.2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

b) **(2 PUNTOS)** La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la velocidad media (Km/h) en dicho tramo: (86,528, 93,472). Calcula la varianza poblacional y la velocidad media de la muestra de las 100 mediciones tomadas por el radar.

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

En un almacén se guarda aceite de oliva y aceite de girasol. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva y 20 de girasol. Además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Se sabe que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 2 € y el de girasol es de 1 €. Se desea saber cuántos bidones de aceite de oliva y de girasol se deben almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo. Se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que minimiza el gasto de almacenaje
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
- d) **(0,5 PUNTOS)** ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo?

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)**Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes:****(Opción 1)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ m & 3 & -1 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “ m ” la matriz A posee inversa.
 b) **(1 PUNTO)** Para $m = 2$, calcula una matriz X para que verifique la igualdad: $AX = B$

(Opción 2)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$:

- a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula A^{48} y A^{21} .
 b) **(0,5 PUNTOS)** Estudia si se verifica o no la relación: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.
 c) **(0,75 PUNTOS)** ¿Qué tendrían que cumplir A y B para que dicha relación fuera cierta?

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)**Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes:****(Opción 1)**

Los ingresos (en miles de euros) de una empresa riojana vienen dados por la función $I(t)$, siendo t el tiempo transcurrido en meses:

$$I(t) = \begin{cases} -2t^2 + 16t + 2 & 0 \leq t \leq 5 \\ K - 8t & 5 < t \leq 7 \end{cases}$$

- a) **(0,5 PUNTOS)** Se sabe que $I(t)$ es una función continua. Calcula el valor de “ K ”.
 b) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué mes se alcanzan los máximos ingresos
 c) **(0,75 PUNTOS)** Representa la función $I(t)$
 d) **(1 PUNTO)** Calcula la integral $\int_1^4 I(t) dt$.

(Opción 2)

Dada la función $f(x) = \frac{mx^2 + 8}{3x}$

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ m ” para que dicha función alcance un mínimo relativo en $x = 2$. Comprueba que realmente es un mínimo relativo.
 b) **(1 PUNTO)** Para $m = 2$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
 c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ m ” para que se verifique la igualdad: $\int_1^4 xf(x) dx = 64$

Tabla. Distribución normal tipificada.

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974

SOLUCIONES

Álgebra 40%	Análisis 30%	Probabilidad y Estadística 30%
--------------------	---------------------	---

Ejercicio 1. (Obligatorio – 3 puntos) Probabilidad y Estadística.

Ejercicio 2. (Obligatorio – 2 puntos) Álgebra.

Ejercicio 3. (Con optatividad – 2 puntos) Álgebra.

Ejercicio 4. (Con optatividad – 3 puntos) Análisis.

EJERCICIO 1 (3 PUNTOS)

a) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes: una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

a.1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.

a.2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

b) **(2 PUNTOS)** La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la velocidad media (Km/h) en dicho tramo: (86,528, 93,472). Calcula la varianza poblacional y la velocidad media de la muestra de las 100 mediciones tomadas por el radar.

a) Llamamos A = Aprobar la parte teórica del examen y B = Aprobar la parte práctica del examen. Por los datos proporcionados sabemos que:

Un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes $\rightarrow P(A \cap B) = 0.20$.

Un 70% aprueba la parte teórica $\rightarrow P(A) = 0.70$

Un 40% aprueba la parte práctica $\rightarrow P(B) = 0.40$

a1) Nos piden calcular el valor de $P(B/A)$. Aplicamos la regla de Laplace y tenemos:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.7} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0.2857}$$

a2) Nos piden calcular $P(A \cup B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.2 = \boxed{0.9}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Consideramos que hay 100 estudiantes. Habrían 20 que aprueban las dos partes, $70 - 20 = 50$ que sólo aprueban la parte teórica y $40 - 20 = 20$ que sólo aprueban la parte práctica.

a1) De los 70 que han aprobado la parte teórica solo 20 han aprobado la parte práctica y aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad pedida vale $\frac{20}{70} \approx 0.2857$.

a2) Hay 20 alumnos que aprueban las dos partes, 50 que aprueban sólo la parte teórica y 20 que aprueban solo la parte práctica, por lo que de los 100 estudiantes son $20 + 50 + 20 = 90$ los

que aprueban alguna de las partes. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe alguna de las dos partes tiene un valor de $\frac{90}{100} = 0.9$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Ponemos los datos en una tabla.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20		70
Suspenden teórica			
	40		100

Completamos la tabla.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20	50	70
Suspenden teórica	20	10	30
	40	60	100

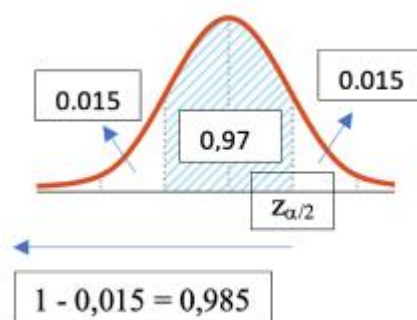
a1) La parte teórica la han aprobado el 70% y el 20% han aprobado la parte teórica y la práctica. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un alumno que ha aprobado la parte teórica apruebe la parte práctica es de $\frac{20}{70} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$.

a2) Los alumnos que aprueban solo la parte práctica son el 20 %, hay otro 50 % que solo aprueba la parte teórica y un 20% que aprueban las dos partes. Por lo tanto, la probabilidad de que al elegir un alumno al azar este apruebe alguna de las dos partes vale $\frac{20 + 50 + 20}{100} = 0.9$.

b) Sea X = Velocidad de un vehículo. $X = N(\mu, \sigma)$

Si el intervalo de confianza es (86.528, 93.472) la velocidad media de la muestra es el valor medio del intervalo. $x = \frac{86.528 + 93.472}{2} = \frac{180}{2} = 90$ km/h

Para calcular la desviación típica hallamos el error que es la mitad de la amplitud del intervalo. $Error = \frac{93.472 - 86.528}{2} = \frac{6.944}{2} = 3.472$



Por otro lado, como el nivel de confianza es 97%.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.531
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.571
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.610
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.648
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.684
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.719
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.751
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.782
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.810
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.836
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.859
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.881
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.899
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.916
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.930
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.942
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.953
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.962
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.969
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.976
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.981
2.1	.9821	.9828	.9836	.9844	.9850	.9856	.9861	.9868	.987
2.2	.9878	.9884	.9890	.9896	.9901	.9906	.9911	.9916	.992

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de la desviación típica.

$$\left. \begin{aligned} \text{Error} &= z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 2.17 \cdot \frac{\sigma}{10} \\ \text{Error} &= 3.472 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{\sigma}{10} = 3.472 \Rightarrow \sigma = \frac{34.72}{2.17} = 16$$

La varianza poblacional vale $\sigma^2 = 16^2 = 256$ y la velocidad media es 90 km/h.

EJERCICIO 2 (2 PUNTOS)

En un almacén se guarda aceite de oliva y aceite de girasol. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva y 20 de girasol. Además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Se sabe que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 2 € y el de girasol es de 1 €. Se desea saber cuántos bidones de aceite de oliva y de girasol se deben almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo. Se pide:

- (0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que minimiza el gasto de almacenaje
- (0,5 PUNTOS)** Representa la región factible S.
- (0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región S.
- (0,5 PUNTOS)** ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo?

- a) Llamamos “x” al número de bidones de aceite de oliva e “y” al número de bidones de aceite de girasol que se guardan en el almacén.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al problema de programación lineal que se nos plantea:

“Se ha de tener almacenado un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva y 20 de girasol” $\rightarrow x \geq 40; y \geq 20$.

El número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol $\rightarrow x \geq \frac{y}{2}$.

La capacidad total del almacén es de 150 bidones $\rightarrow x + y \leq 150$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 40; y \geq 20 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x + y \leq 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 40; y \geq 20 \\ 2x \geq y \\ x + y \leq 150 \end{array} \right\}$$

La función objetivo es el gasto de almacenaje $G(x, y) = 2x + y$. Nuestro objetivo es minimizarlo.

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región S de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

$$2x = y$$

x	y = 2x
20	40
50	100
75	150

$$x + y = 150$$

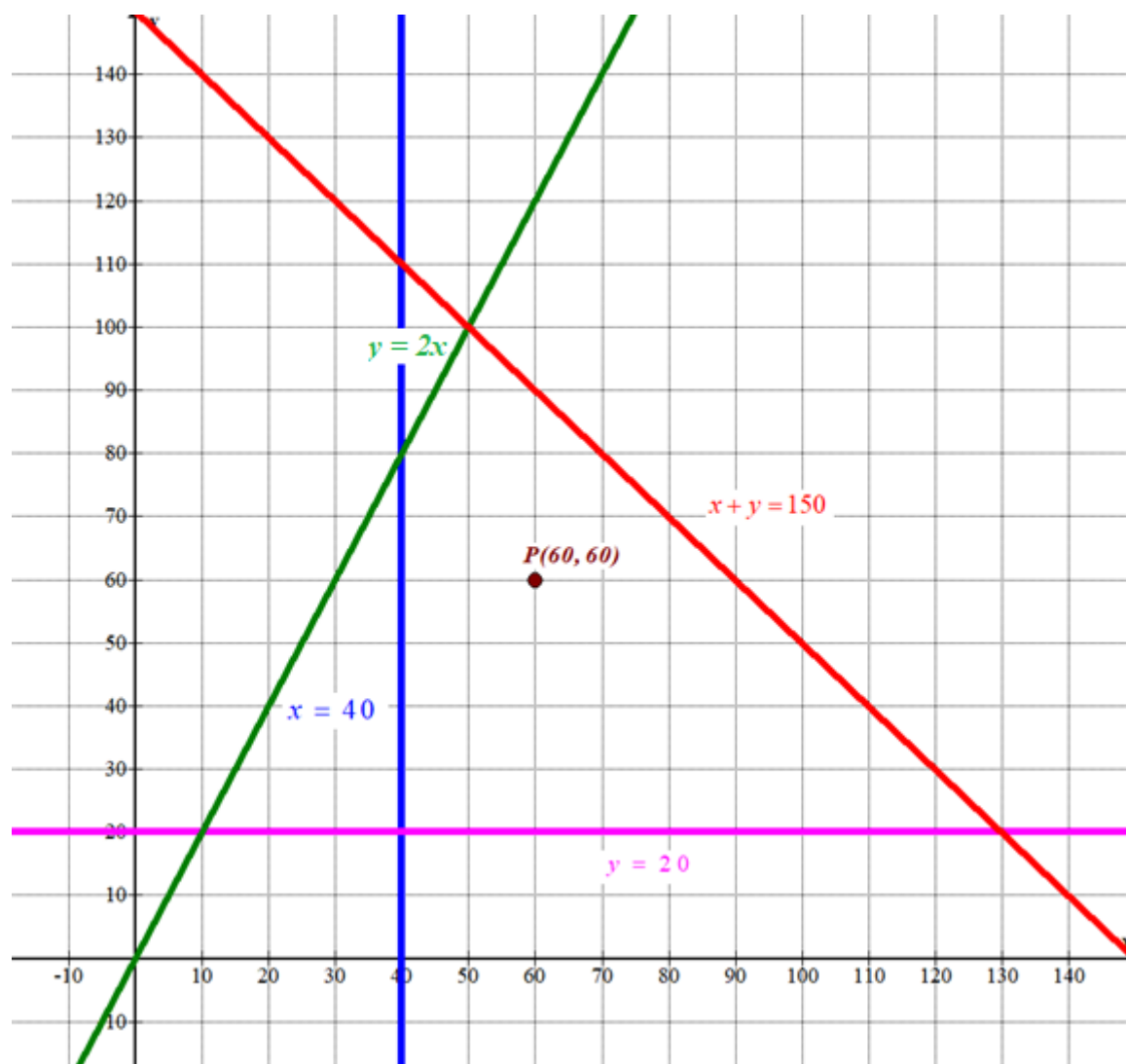
x	y = 150 - x
40	110
50	80
130	20

$$x = 40$$

x = 40	y
40	0
40	20
40	110

$$y = 20$$

x	y = 20
0	20
40	20
130	20



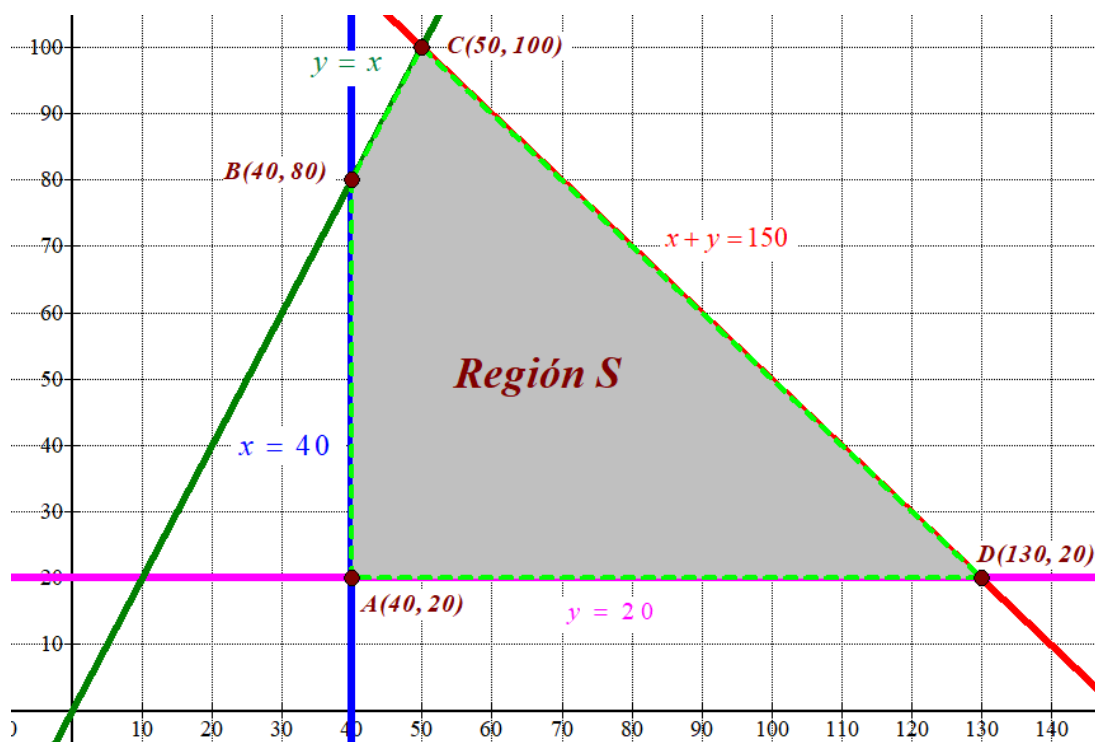
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 40; y \geq 20 \\ 2x \geq y \\ x + y \leq 150 \end{array} \right\}$ la región S es la región del primer cuadrante situada

por encima de la recta rosa, por debajo de las rectas roja y verde, y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto $P(60, 60)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 60 \geq 40; 60 \geq 20 \\ 2 \cdot 60 \geq 60 \\ 60 + 60 \leq 150 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible indicando las coordenadas de sus vértices.



c) Los vértices de la región factible son A(40, 20), B(40, 80), C(50, 100) y D(130, 20).

$$A \rightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 40 \end{cases} \rightarrow A(40, 20)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 40 \end{cases} \rightarrow y = 80 \rightarrow B(40, 80)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 150 \end{cases} \rightarrow x + 2x = 150 \rightarrow 3x = 150 \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 100 \rightarrow C(50, 100)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x + y = 150 \\ y = 20 \end{cases} \rightarrow x + 20 = 150 \rightarrow x = 130 \rightarrow D(130, 20)$$

d) Valoramos la función objetivo $G(x, y) = 2x + y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(40, 20) \rightarrow G(40, 20) = 2 \cdot 40 + 20 = 100 \text{ Mínimo}$$

$$B(40, 80) \rightarrow G(40, 80) = 2 \cdot 40 + 80 = 160$$

$$C(50, 100) \rightarrow G(50, 100) = 2 \cdot 50 + 100 = 200$$

$$D(130, 20) \rightarrow G(130, 20) = 2 \cdot 130 + 20 = 280$$

El coste de almacenaje mínimo se obtiene en el punto A(40, 20).

El objetivo de minimizar el gasto se consigue con el almacenaje de 40 bidones de aceite de oliva y 20 de aceite de girasol.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)**(Opción 1)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ m & 3 & -1 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$:

a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de “m” la matriz A posee inversa.

b) **(1 PUNTO)** Para $m = 2$, calcula una matriz X para que verifique la igualdad: $AX = B$

a) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ m & 3 & -1 \\ 0 & 2 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 0 - 0 - m^2 + 2m = 2m^2 + 2m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow 2m(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

b) Para $m = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene inversa.

Despejamos X en la igualdad planteada.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Hallamos la expresión de la matriz A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 12 - 4 + 4 = 12 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6+2 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 6-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & -1/12 \\ -1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 64-10-6 \\ -32+20+12 \\ 32-20+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriz X que cumple la igualdad $AX = B$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3 (2 PUNTOS)**(Opción 2)**

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$:

a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula A^{48} y A^{21} .

b) **(0,5 PUNTOS)** Estudia si se verifica o no la relación: $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

c) **(0,75 PUNTOS)** ¿Qué tendrían que cumplir A y B para que dicha relación fuera cierta?

a) Hallamos las primeras potencias de la matriz A en busca de alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Con este resultado obtenido podemos calcular las potencias pedidas.

$$A^{48} = A^{2 \cdot 24} = (A^2)^{24} = (Id)^{24} = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{21} = A^{2 \cdot 10 + 1} = A^{2 \cdot 10} \cdot A^1 = (A^2)^{10} \cdot A = (Id)^{10} \cdot A = Id \cdot A = A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos si los resultados de las operaciones de cada lado de la igualdad planteada coinciden.

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-12 & -6+24 \\ -1+6 & 2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 18 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2 & -1-4 \\ -2-8 & 2+16 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -10 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos no coinciden: $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -9 & 18 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 10 & -17 \end{pmatrix} = A^2 - B^2$,

por lo que la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ no se verifica.

c) Para que se pueda cumplir la igualdad debe cumplirse que la matriz A y B conmuten en el producto, es decir, que se cumpla que $AB = BA$.

$$(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ debe ocurrir que $-AB + BA = 0$ y por lo tanto: $BA = AB$.

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)**(Opción 1)**

Los ingresos (en miles de euros) de una empresa riojana vienen dados por la función $I(t)$, siendo t el tiempo transcurrido en meses:

$$I(t) = \begin{cases} -2t^2 + 16t + 2 & 0 \leq t \leq 5 \\ K - 8t & 5 < t \leq 7 \end{cases}$$

a) **(0,5 PUNTOS)** Se sabe que $I(t)$ es una función continua. Calcula el valor de “K”.

b) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué mes se alcanzan los máximos ingresos

c) **(0,75 PUNTOS)** Representa la función $I(t)$

d) **(1 PUNTO)** Calcula la integral $\int_1^4 I(t) dt$.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $t = 5$. Los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en $t = 5$.

$$\left. \begin{aligned} I(5) &= -2 \cdot 5^2 + 16 \cdot 5 + 2 = 32 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} I(t) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} -2t^2 + 16t + 2 = 32 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} I(t) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} K - 8t = K - 8 \cdot 5 = K - 40 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} &= \lim_{x \rightarrow 5^+} = I(5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K - 40 = 32 \Rightarrow \boxed{K = 72}$$

Para que la función de ingresos sea continua debe ser $K = 72$.

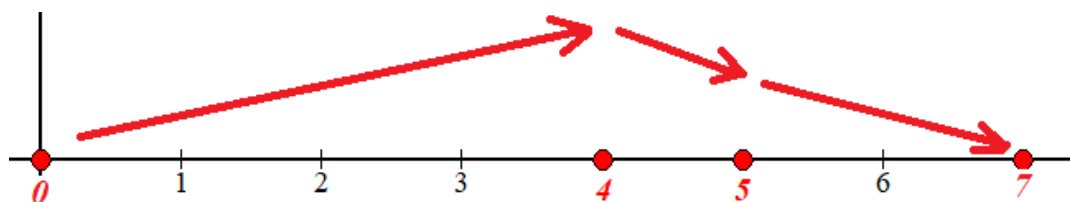
b) Para $K = 72$ la función queda $I(t) = \begin{cases} -2t^2 + 16t + 2 & 0 \leq t \leq 5 \\ 72 - 8t & 5 < t \leq 7 \end{cases}$.

En el intervalo $[0, 5]$ la función tiene la expresión $I(t) = -2t^2 + 16t + 2$ que es una expresión polinómica cuya derivada es $I'(t) = -4t + 16$. Esa derivada se anula para $t = 4$ que pertenece al intervalo de definición. Comprobamos cómo evoluciona la función.

- En el intervalo $[0, 4)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $I'(1) = -4 + 16 = 12 > 0$. La función es creciente en $[0, 4)$.
- En el intervalo $(4, 5]$ tomamos $t = 4.5$ y la derivada vale $I'(4.5) = -4 \cdot 4.5 + 16 = -2 < 0$. La función es decreciente en $(4, 5]$.

En el intervalo $(5, 7]$ la función tiene la expresión $I(t) = 72 - 8t$ que es una expresión polinómica cuya derivada es $I'(t) = -8 < 0$. La derivada es siempre negativa y la función es decreciente en el intervalo $(5, 7]$.

La función sigue el esquema siguiente.



Observando el esquema se aprecia que los máximos ingresos se obtienen en el cuarto mes. Como $I(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 + 2 = 34$, estos ingresos máximos son de 34000 euros.

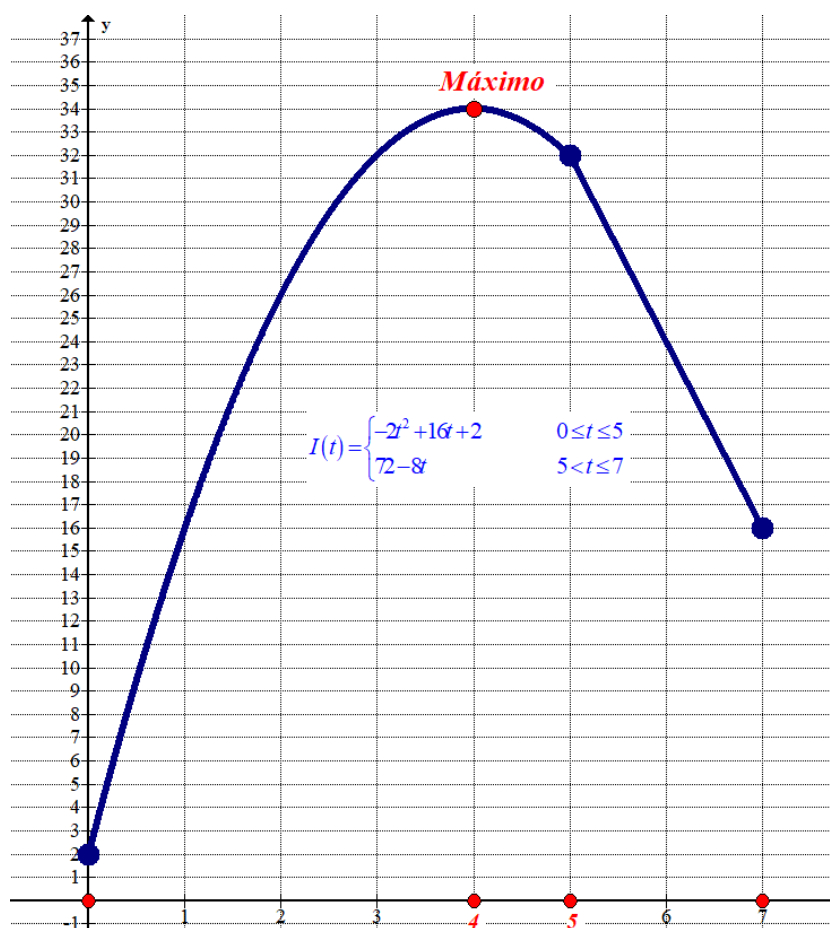
- c) Debemos dibujar un trozo de parábola y un trozo de recta. Sabemos que la parábola es cóncava ($\cap$) y que la recta es decreciente. Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

$$0 \leq t \leq 5$$

t	$I(t) = -2t^2 + 16t + 2$
0	2
1	16
2	26
4	34
5	32

$$5 < t \leq 7$$

t	$I(t) = 72 - 8t$
6	24
7	16



- d) En el intervalo $[1, 4]$ la función tiene la expresión $I(t) = -2t^2 + 16t + 2$. Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\begin{aligned} \int_1^4 I(t) dt &= \int_1^4 -2t^2 + 16t + 2 dt = \left[-2 \frac{t^3}{3} + 8t^2 + 2t \right]_1^4 = \\ &= \left[-2 \frac{4^3}{3} + 8 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \right] - \left[-2 \frac{1^3}{3} + 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right] = -\frac{128}{3} + 128 + 8 + \frac{2}{3} - 8 - 2 = \boxed{84} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4 (3 PUNTOS)**(Opción 2)**

Dada la función $f(x) = \frac{mx^2 + 8}{3x}$

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “m” para que dicha función alcance un mínimo relativo en $x = 2$. Comprueba que realmente es un mínimo relativo.
- b) **(1 PUNTO)** Para $m = 2$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “m” para que se verifique la igualdad: $\int_1^4 xf(x) dx = 64$

- a) Para que la función alcance un mínimo relativo en $x = 2$ la derivada debe anularse para este valor $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2mx) \cdot 3x - 3(mx^2 + 8)}{(3x)^2} = \frac{6mx^2 - 3mx^2 - 24}{9x^2} = \frac{3mx^2 - 24}{9x^2} = \frac{mx^2 - 8}{3x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{mx^2 - 8}{3x^2} \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m \cdot 2^2 - 8}{3 \cdot 2^2} = 0 \Rightarrow \frac{4m - 8}{12} = 0 \Rightarrow 4m - 8 = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

Para $m = 2$ la función presenta un punto crítico en $x = 2$. La función queda $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{3x}$,

siendo su derivada $f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{3x^2}$.

Comprobamos que la función tiene un mínimo relativo en $x = 2$ viendo que decrece antes de $x = 2$ y crece después. Para ello hacemos uso del signo de la derivada de la función.

- Antes de $x = 2$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 8}{3 \cdot 1^2} = \frac{-6}{3} = -2 < 0$. La función decrece antes de $x = 2$.
- Después de $x = 2$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 8}{3 \cdot 3^2} = \frac{10}{27} > 0$. La función crece después de $x = 2$.

Como la derivada de la función se anula para $x = 2$, decrece antes de $x = 2$ y crece después podemos afirmar que en $x = 2$ la función presenta un mínimo relativo.

- b) Para $m = 2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{3x}$, siendo su derivada $f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{3x^2}$. Buscamos sus puntos críticos.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$. En el apartado anterior hemos visto que la función presenta un mínimo relativo en $x = 2$, hallamos el resto de puntos críticos.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{3x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 - 8}{3x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes, entre y después de los puntos críticos $x = -2$, $x = 2$ y del valor excluido del dominio $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{2(-3)^2 - 8}{3(-3)^2} = \frac{10}{27} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{2(-1)^2 - 8}{3(-1)^2} = \frac{-6}{3} = -2 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 8}{3 \cdot 1^2} = \frac{-6}{3} = -2 < 0$.

La función decrece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 8}{3 \cdot 3^2} = \frac{10}{27} > 0$.

La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x f(x) dx = \int \cancel{x} \frac{mx^2 + 8}{3\cancel{x}} dx = \int \frac{mx^2 + 8}{3} dx = \frac{1}{3} \int mx^2 + 8 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{mx^3}{3} + 8x \right) + C$$

Calculamos la integral definida planteada.

$$\begin{aligned} \int_1^4 x f(x) dx &= \left[\frac{1}{3} \left(\frac{mx^3}{3} + 8x \right) \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{m \cdot 4^3}{3} + 8 \cdot 4 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{m \cdot 1^3}{3} + 8 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{64}{9} m + \frac{32}{3} - \frac{1}{9} m - \frac{8}{3} = 7m + 8 \end{aligned}$$

Iguamos la expresión obtenida a 64 y obtenemos el valor de “m” que cumple lo pedido.

$$\int_1^4 x f(x) dx = 64 \Rightarrow 7m + 8 = 64 \Rightarrow 7m = 56 \Rightarrow \boxed{m = \frac{56}{7} = 8}$$

El valor buscado es $m = 8$.