



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumnado deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a las tres preguntas de las que consta dicha opción.

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

a) Obtener el rango de la matriz A en función del número real m (1 punto).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

b) Estudiar si el siguiente sistema tiene solución (1 punto):
$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

c) Estudiar si el siguiente sistema tiene solución y, en caso afirmativo, resolverlo (1,5 puntos):

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

a) Aplicamos Gauss para obtener el rango de la matriz A en función de m :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

↑

$$F2 \leftarrow F2 + F1$$

Hemos obtenido una matriz escalonada, luego se tiene que:

Si $m+2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ entonces $rg(A) = 2$

Si $m+2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ entonces $rg(A) = 1$

b) Para estudiar si el sistema tiene solución, consideremos la matriz de coeficientes del sistema A y la matriz ampliada $\bar{A}$:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Partiendo de la matriz ampliada y aplicando Gauss vamos a obtener el rango de ambas matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $F2 \leftarrow F2 + F1 \quad F3 \leftarrow F3 - F2$

Hemos obtenido una matriz escalonada, luego se tiene que:

$rg(A) = 2 \neq rg(\bar{A}) = 3$, por tanto, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

c) Análogamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $F2 \leftarrow F2 + F1 \quad F3 \leftarrow F3 - F2$

$rg(A) = rg(\bar{A}) = 3 = \text{número de incógnitas}$, por tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

Para obtener la solución del sistema de ecuaciones vamos a considerar la forma escalonada obtenida anteriormente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ -z = -1 \end{cases} \quad \text{de donde } z = 1 \text{ y sustituyendo en las ecuaciones 1 y 2 se}$$

obtiene $x = -1$, $y = 0$. Solución del sistema: $x = -1$, $y = 0$ y $z = 1$.

Para resolver este ejercicio se podría aplicar cualquier método de resolución.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Se sabe que la función de costes de una empresa es función de la cantidad producida de un bien (x) según la siguiente relación: $C(x) = 6x^2 - 84x + 1000$



- a) Minimizar la función de costes y obtener el coste mínimo (1,5 puntos).
b) Minimizar la función de coste medio (Nota: el coste medio es el coste por unidad de producción: $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$) (2 puntos).

Solución:

a) Para minimizar la función de costes tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$C'(x) = 12x - 84 = 0 \Rightarrow x = \frac{84}{12} = 7$$

Para ver que efectivamente en $x = 7$ hay un mínimo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir, que $C''(x)$ es positiva para $x = 7$.

$$C''(x) = 12 > 0 \Rightarrow \text{En } x = 7 \text{ se obtiene un mínimo para la función de costes.}$$

El coste mínimo será $C(7) = 6 \times 7^2 - 84 \times 7 + 1000 = 294 - 588 + 1000 = 706$ u.m.

b) Para calcular la función de coste medio hay que dividir la función de costes por la cantidad producida:

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{6x^2 - 84x + 1000}{x} = 6x - 84 + \frac{1000}{x}$$

Para minimizar la función de coste medio tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$C'_M(x) = 6 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 1000 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 1000 \Rightarrow x^2 = \frac{1000}{6} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1000}{6}}$$

Nos quedamos con la raíz positiva ya que no tienen sentido económico cantidades negativas.

Para ver que efectivamente en $x = \sqrt{\frac{1000}{6}}$ hay un mínimo vamos utilizar el criterio de la

segunda derivada, es decir que $C''_M(x)$ es positiva para $x = \sqrt{\frac{1000}{6}}$.

$$C''_M(x) = \frac{2000}{x^3} = \frac{2000}{\left(\sqrt{\frac{1000}{6}}\right)^3} > 0 \Rightarrow \text{En } x = \sqrt{\frac{1000}{6}} \text{ se obtiene un mínimo para la función de coste}$$

medio.

**Pregunta 3.** (3 puntos)

Las notas obtenidas por 20 alumnos en la asignatura de matemáticas han sido: 7, 4, 10, 8, 7, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 10, 5, 6, 7, 7, 6, 6, 10, 4.

a) Calcular la mediana (1 punto).

b) Calcular la desviación típica (1 punto).

c) Calcular el porcentaje de alumnos que han aprobado (nota mayor o igual a 5) y el porcentaje de alumnos que han obtenido una nota superior a 7 (1 punto).

Solución:

En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i) :

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
4	2	2	2/20=0.1	2/20=0.1
5	2	4	2/20=0.1	4/20=0.2
6	5	9	5/20=0.25	9/20=0.45
7	6	15	6/20=0.3	15/20=0.75
8	2	17	2/20=0.1	17/20=0.85
10	3	20	3/20=0.15	20/20=1
TOTAL (N)		20		

a) Para obtener la mediana, nos fijamos en la columna de las frecuencias relativas acumuladas (F_i), buscamos 0,5, si no está entonces tomamos el x_i correspondiente al primer valor que supera a 0,5. En este caso no aparece 0,5 y hay que coger 0,75 que corresponde al valor $x_i = 7 \Rightarrow Me = 7$

b) Para obtener la desviación típica primero vamos a calcular la media.

Para calcular la media aplicamos la siguiente formula: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N}$, en este caso:

$$\bar{x} = \frac{4 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 2 + 10 \times 3}{20} = \frac{136}{20} = 6,8$$



Para calcular la varianza (S_X^2) aplicamos la siguiente fórmula:

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow$$
$$S_X^2 = \frac{4^2 \times 2 + 5^2 \times 2 + 6^2 \times 5 + 7^2 \times 6 + 8^2 \times 2 + 10^2 \times 3}{20} - (6,8)^2 = \frac{984}{20} - (6,8)^2 = 2,96$$

Por lo tanto: la varianza es $S_X^2 = 2,96$ y la desviación típica será $S_X = \sqrt{2,96} = 1,72$

c) Para obtener el porcentaje de alumnos que han aprobado, nos fijamos en el porcentaje de alumnos que obtienen una nota mayor o igual a 5. Si el 10% han sacado una nota igual a 4 y, por tanto, están suspensos, el 90% ha sacado una nota mayor o igual a 5 y, por tanto, están aprobados.

Para calcular el porcentaje de alumnos que han obtenido una nota superior a 7, nos fijamos en la columna de las frecuencias acumuladas relativas. El 75% de los alumnos han sacado como mucho un 7. Por lo tanto, el 25% de los alumnos han sacado una nota superior a 7.



OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

Dado el programa lineal:

$$\text{Min } 2x - y$$

sujeto a

$$x + 3y \leq 12$$

$$2x + y \leq 10$$

$$x \leq 8$$

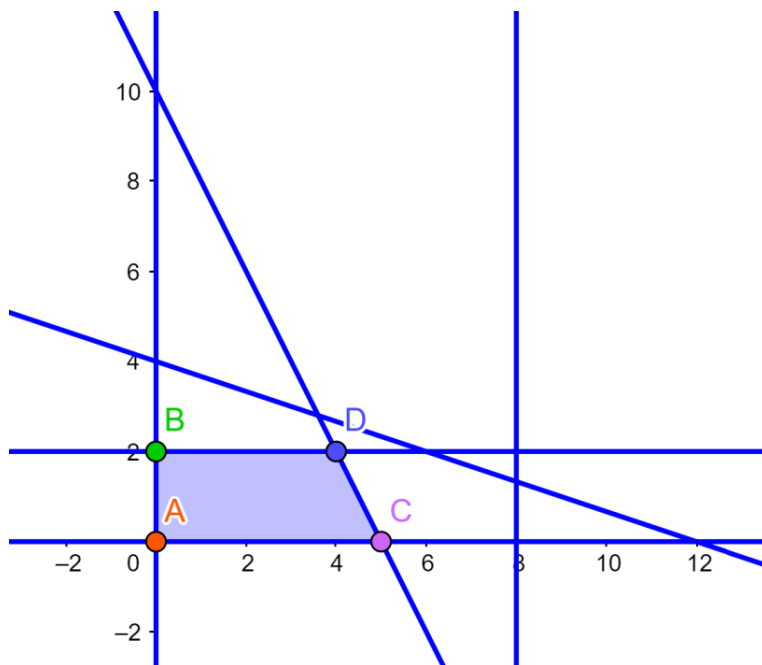
$$y \leq 2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- a) Representar gráficamente la región factible del programa lineal. (1,5 puntos)
- b) ¿Podría encontrarse el mínimo en el punto (6,4)? (0,5 puntos)
- c) Resolver el programa lineal. (1,5 puntos)

Solución:

a) El conjunto factible es el recinto representado en azul en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(5,0)$, $D(4,2)$



Región factible

b) El mínimo no podría encontrarse en el punto (6,4), ya que dicho punto está fuera de la región factible.



c) Para obtener el mínimo de la función objetivo $z(x, y) = 2x - y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible: $z(A) = 0$; $z(B) = -2$; $z(C) = 10$; $z(D) = 6$. Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $B(0, 2)$ y el valor mínimo que alcanza la función objetivo en la región factible es igual a -2 .

Pregunta 2. (3,5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

- Obtener el dominio de definición de la función (1 punto).
- Estudiar si la función es continua en los puntos $x = -3$ y $x = 1$ (1 punto).
- Calcular la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (1,5 puntos).

Solución:

a) Vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ó $x = -3$. Luego la función está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

b) Teniendo en cuenta que la función no está definida para $x = -3$ podemos concluir que en dicho punto la función no es continua (la continuidad de una función solo se puede estudiar en su dominio de definición).

En el punto $x = 1$ la función es continua ya que:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{-8} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 9} = \frac{1}{-8} \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{-8} \end{cases}$$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

Si $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = (g/h)'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

En este caso: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2}{x^2 - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9) - x^2(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-18x}{(x^2 - 9)^2}$

En el punto $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{-18}{(-8)^2} = \frac{-18}{64}$



Pregunta 3. (3 puntos)

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = 0,60 \quad P(B) = 0,40 \quad P(A|B) = 0,20$$

- a) Calcular la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez (1 punto).
- b) ¿Son A y B sucesos independientes? Razone la respuesta (1 punto).
- c) Calcule la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A (1 punto).

Solución:

a) Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0,40} = 0,20$ entonces

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = 0,20 \times 0,40 = 0,08$$

b) Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. En este caso no son independientes ya que:

$$P(A \cap B) = 0,08 \neq P(A) \times P(B) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$$

c) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,08}{0,6} = 0,13$



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Obtener el rango de la matriz: 1 punto.
- b) Estudiar el sistema: 1 punto.
- c) Estudiar y resolver el sistema: estudiar 0,5 puntos y resolver 1 punto.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Minimizar la función de costes: 1 punto.
Obtener el coste mínimo: 0,5 puntos.
- b) Derivar la función de coste medio: 1 punto.
Obtener el mínimo de la función de coste medio: 1 punto.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Calcular la mediana: 1 punto.
- b) Calcular la desviación típica: 1 punto.
- c) Calcular el porcentaje de alumnos que han aprobado: 0,5 puntos.
Calcular el porcentaje de alumnos que han obtenido más de 7: 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Pregunta 1. (3,5 puntos)

- a) Representación gráfica de la región factible: 1,5 puntos.
- b) Responder razonadamente si el mínimo puede estar en el punto: 0,5 puntos.
- c) Resolver el programa lineal: 1,5 puntos.

Pregunta 2. (3,5 puntos)

- a) Obtener el dominio de la función: 1 punto.
- b) Estudiar la continuidad: 1 punto.
- c) Calcular la derivada: 1,5 puntos.

Pregunta 3. (3 puntos)

- a) Calcular la probabilidad de la intersección: 1 punto.
- b) Razonar si son sucesos independientes: 1 punto.
- c) Calcular la probabilidad condicionada: 1 punto.