

**Instrucciones:** El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.

Duración de la prueba: 90 minutos.

### Ejercicio 1.

**Apartado A.** En un determinado modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 Km/h, viene determinado por la función  $C(x) = 26 - 0,45x + 0,0025x^2$ , expresado en litros consumidos cada 100 kms. recorridos a una velocidad constante de  $x$  km/h.

- a1) ¿Cuántos litros cada 100 km. consume el coche a una velocidad de 120 km/h? **(0.5 puntos)**
- a2) ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km? **(0.75 puntos)**
- a3) ¿A qué velocidad consume menos? y ¿cuánto consume? **(1.25 puntos)**

### Solución:

- a1)  $C(120) = 8$  litros cada 100 km. **(0.5 puntos)**
- a2) Resolviendo la ecuación  $C(x) = 26 - 0,45x + 0,0025x^2 = 10$  se obtienen los valores  $x = 48.77$  y  $x = 131.23$  km/h. **(0.25 por planteamiento y 0.25 por cada solución correcta)**
- a3) Derivando e igualando a cero,  $C'(x) = -0,45 + 0,005x = 0 \Rightarrow x = 90$ . Luego el consumo mínimo se alcanza cuando la velocidad es de 90 km/h, siendo de  $C(90) = 5.75$  litros/100 kms **(0.25 por planteamiento, 0.75 por solución correcta de velocidad y 0.25 por valor de consumo)**

**Apartado B.** La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función  $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$  con  $0 \leq t \leq 3$ .

- b1) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? **(0.5 puntos)**
- b2) ¿En qué valor de la escala de atención se está transcurridos 1.5 minutos? **(0.75 puntos)**
- b3) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? **(1.25 puntos)**

### Solución:

- b1)  $A(3) = 70$  puntos de atención. **(0.5 puntos)**
- b2)  $A(1.5) = 77.5$  puntos de atención. **(0.25 por planteamiento y 0.5 por solución correcta)**
- b3) Derivando e igualando a cero,  $A'(t) = -20t + 40 = 0 \Rightarrow t = 2$ . Luego a los 2 minutos se presta la máxima atención  $A(2) = 80$  puntos de atención. **(0.25 por planteamiento, 0.75 por solución correcta de velocidad y 0.25 por valor del máximo)**

**Ejercicio 2.**

**Apartado A.** Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a1) Calcula, de manera razonada,  $A \cdot B - C$ .

**(1 punto)**

a2) Despeja y calcula la matriz  $X$  de la ecuación matricial  $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$ .

**(1.5 puntos)**

**Solución:**

a1) Como  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ;  $A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

**(0.75 por multiplicación y 0.25 por resta)**

a2) Despejando la matriz  $X$ , se tiene  $(A \cdot B - C)X = I \Rightarrow X = (A \cdot B - C)^{-1}$ . Calculando la inversa de la matriz  $(A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**(0.5 puntos por ecuación, 1 por resolución correcta)**

**Apartado B.** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b1) Calcula la matriz  $B \cdot C$ .

**(1 punto)**

b2) Despeja y calcula la matriz  $X$  en la ecuación  $A \cdot X = B \cdot C$ .

**(1 punto)**

b3) ¿Es posible hallar una matriz  $Y$  tal que  $YA - B = C$ ?

**(0.5 puntos)**

**Solución:**

b1)  $B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

**(0.5 puntos por planteamiento, 0.5 por resolución correcta)**

b2) Despejando la matriz  $X$ , se tiene  $X = A^{-1} \cdot B \cdot C$ . Calculando la inversa de la matriz  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  y multiplicando  $X = A^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

**(0.5 puntos por ecuación y 0.5 por resolución correcta)**

b3) Despejando la matriz  $Y$ , se tendría que  $Y = (B + C) \cdot A^{-1}$  pero los órdenes de las matrices  $B$  y  $C$  no son compatibles.

**(0.5 puntos)**

**Ejercicio 3.**

**Apartado A.** Las 24 chicas y los 18 chicos de 2º de Bachillerato de un centro docente organizan un viaje. Para financiarlo deciden trabajar por las tardes en una empresa encuestadora que contrata trabajo para dos tipos de equipos: tipo A, formado por cuatro chicas y dos chicos; y tipo B, formado por tres chicas y tres chicos. La empresa abona por una tarde de trabajo 300 € a cada equipo del tipo A y 500 € a cada equipo del tipo B. Si quieren obtener la mayor cantidad posible de dinero:

a1) Expresa la función objetivo.

**(0.5 puntos)**

a2) Expresa, mediante inecuaciones, todas las restricciones del problema y representa gráficamente la región factible.

**(1.25 puntos)**

a3) ¿Como les conviene distribuirse para obtener la mayor cantidad posible de dinero? **(0.75 puntos)**

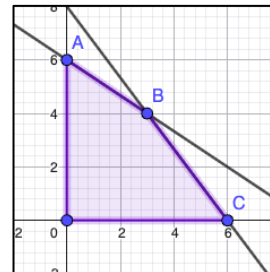
**Solución:**

a1) Sea  $A$  = “número de equipos de tipo A”,  $B$  = “número de equipos de tipo B”.

La máxima cantidad de dinero se obtendrá maximizando  $\text{Beneficio}(A, B) = 300A + 500B$  **(0.5 puntos)**

a2) Las restricciones del problema son:

$$\text{s.a: } \begin{cases} 0 \leq 4A + 3B \leq 24 \\ 0 \leq 2A + 3B \leq 18 \end{cases}$$



**(0.75 puntos por las restricciones y 0.5 por la región factible)**

a3) El beneficio en cada uno de los vértices es:  $\text{Beneficio}(A) = 3000$  €;  $\text{Beneficio}(B) = 2900$  €;  $\text{Beneficio}(C) = 1800$  €. Por tanto, el beneficio máximo se alcanza cuando se formen 6 equipos de tipo B. **(0.5 por vértices y 0.25 por solución)**

**Apartado B.** Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq k \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > k \end{cases}$

b1) ¿Para qué valor de  $k$  la función  $f(x)$  es continua en  $x = k$ ? **(1 punto)**

b2) Si  $k = 1$ , calcula los máximos y mínimos relativos de la función  $f(x)$ . **(0.75 puntos)**

b3) Si  $k = 1$ , determina en qué intervalos la función es cóncava ( $\cap$ ) y en cuáles es convexa ( $\cup$ ). **(0.75 puntos)**

**Solución:**

b1) Como en ambas ramas la función es continua, hay que comprobarlo en el punto  $x = k$ . Si  $\lim_{x \rightarrow k^-} x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow k^+} -x^2 + 4x$ , la ecuación  $-2k^2 + 2 = -k^2 + 4k \Leftrightarrow 2k^2 - 4k + 2 = 0$  tiene como solución doble  $k = 1$ . **(0.25 por condición, 0.75 por solución)**

b2) Buscando los extremos relativos de la función y evaluando la segunda derivada,

$$0 = f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & f''(0) = 2 > 0 \\ x = 2 & f''(2) = -2 < 0 \end{cases}$$

En el punto  $x = 2$  hay un máximo relativo ( $f(2) = 4$ ) y en  $x = 0$  hay un mínimo relativo ( $f(0) = 2$ ). En el punto  $x = 1$  no hay extremo. **(0.25 por condición, 0.5 por solución)**

b3) La segunda derivada de la función es:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Luego la función es cóncava en el intervalo  $]1, +\infty[$  y convexa en  $] - \infty, 1[$ . **(0.25 por condición, 0.5 por solución)**

**Ejercicio 4.**

**Apartado A.** En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, 0.4, 0.3 y 0.6. Hallar la probabilidad de que, un día cualquiera dicho grupo:

a1) Solamente vaya a uno de los lugares. **(1.25 puntos)**

a2) Vaya únicamente a dos de los lugares.

**(1.25 puntos)**

**Solución:** Si  $A = \text{"Ir al lugar de ocio A"}$ ,  $B = \text{"Ir al lugar de ocio B"}$  y  $C = \text{"Ir al lugar de ocio C"}$ , se tiene que:

$$P(A) = 0.4 \quad P(B) = 0.3 \quad P(C) = 0.6$$

a1) La probabilidad de ir sólo a uno de los lugares de ocio se puede expresar como  $P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$ , ya que son sucesos disjuntos. Así, la probabilidad pedida es  $0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.436$  **(0.5 por planteamiento, 0.75 por solución)**

a2) La probabilidad de ir únicamente a dos lugares de ocio se puede expresar como  $P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C)) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C)$ , ya que son sucesos disjuntos. Así, la probabilidad pedida es  $0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.324$  **(0.5 por planteamiento, 0.75 por solución)**

**Apartado B.** La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal, con desviación típica  $\sigma = 10$  segundos. Se toma una muestra aleatoria de 100 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 50 segundos. Se pide:

b1) Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional de las llamadas. **(1 punto)**

b2) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

b3) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la encuesta se hubiera realizado con 100 llamadas de un único cliente? Razona tu respuesta. **(0.75 puntos)**

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

**Solución:**

b1)  $z_{0.985} = 2.17$ ,  $I.C._{0.97} = (\bar{x} \pm z_{0.985} \sigma / \sqrt{n}) = (50 \pm 2.17 \cdot 10 / \sqrt{100}) = (47.83, 52.17)$  **(Obtención del cuantil, 0.25 puntos; planteamiento del intervalo, 0.5 puntos; solución, 0.25)**

b2) Para reducir la amplitud del intervalo de confianza sin modificar el nivel de confianza habría que reducir la desviación típica de la media muestral, es decir, aumentar el tamaño de la muestra. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**

b3) No sería correcto ya que 100 llamadas de un único cliente no sería una muestra aleatoria simple, ya que no se garantizaría la independencia entre las observaciones. **(respuesta correcta 0.25 y 0.5 por justificación)**