



**Universidad de
Castilla-La Mancha**

Prueba Acceso para mayores de 25 y 45 años
Materia: Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.

Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.

Apartado A. En un determinado modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 Km/h, viene determinado por la función $C(x) = 26 - 0,45x + 0,0025x^2$, expresado en litros consumidos cada 100 kms. recorridos a una velocidad constante de x km/h.

- a1) ¿Cuántos litros cada 100 km. consume el coche a una velocidad de 120 km/h? **(0.5 puntos)**
- a2) ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km? **(0.75 puntos)**
- a3) ¿A qué velocidad consume menos? y ¿cuánto consume? **(1.25 puntos)**

Apartado B. La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$ con $0 \leq t \leq 3$.

- b1) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? **(0.5 puntos)**
- b2) ¿En qué valor de la escala de atención se está transcurridos 1.5 minutos? **(0.75 puntos)**
- b3) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? **(1.25 puntos)**

Ejercicio 2.

Apartado A. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a1) Calcula, de manera razonada, $A \cdot B - C$. **(1 punto)**
- a2) Despeja y calcula la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$. **(1.5 puntos)**

Apartado B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- b1) Calcula la matriz $B \cdot C$. **(1 punto)**
- b2) Despeja y calcula la matriz X en la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$. **(1 punto)**
- b3) ¿Es posible hallar una matriz Y tal que $YA - B = C$? **(0.5 puntos)**

Ejercicio 3.

Apartado A. Las 24 chicas y los 18 chicos de 2º de Bachillerato de un centro docente organizan un viaje. Para financiarlo deciden trabajar por las tardes en una empresa encuestadora que contrata trabajo para dos tipos de equipos: tipo A, formado por cuatro chicas y dos chicos; y tipo B, formado por tres chicas y tres chicos. La empresa abona por una tarde de trabajo 300 € a cada equipo del tipo A y 500 € a cada equipo del tipo B. Si quieren obtener la mayor cantidad posible de dinero:

- a1) Expresa la función objetivo. **(0.5 puntos)**

- a2) Expresa, mediante inecuaciones, todas las restricciones del problema y representa gráficamente la región factible. **(0.75 puntos por las restricciones y 0.5 por la región factible)**
- a3) ¿Como les conviene distribuirse para obtener la mayor cantidad posible de dinero? **(0.75 puntos)**

Apartado B. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq k \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > k \end{cases}$

- b1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- b2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**
- b3) Si $k = 1$, determina en qué intervalos la función es cóncava ($\cap$) y en cuáles es convexa ($\cup$). **(0.75 puntos)**

Ejercicio 4.

Apartado A. En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, 0.4, 0.3 y 0.6. Hallar la probabilidad de que, un día cualquiera dicho grupo:

- a1) Solamente vaya a uno de los lugares. **(1.25 puntos)**
- a2) Vaya únicamente a dos de los lugares. **(1.25 puntos)**

Apartado B. La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal, con desviación típica $\sigma = 10$ segundos. Se toma una muestra aleatoria de 100 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 50 segundos. Se pide:

- b1) Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional de las llamadas. **(1 punto)**
- b2) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(respuesta completa correcta 0.75 puntos: 0.25 respuesta y 0.5 por justificación)**
- b3) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la encuesta se hubiera realizado con 100 llamadas de un único cliente? Razona tu respuesta. **(respuesta completa correcta 0.75 puntos: 0.25 respuesta y 0.5 por justificación)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

Apartado A. En un determinado modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 Km/h, viene determinado por la función $C(x) = 26 - 0,45x + 0,0025x^2$, expresado en litros consumidos cada 100 kms. recorridos a una velocidad constante de x km/h.

- a1) ¿Cuántos litros cada 100 km. consume el coche a una velocidad de 120 km/h? **(0.5 puntos)**
 a2) ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km? **(0.75 puntos)**
 a3) ¿A qué velocidad consume menos? y ¿cuánto consume? **(1.25 puntos)**

a1) Para $x = 120$ la función vale $C(120) = 26 - 0,45 \cdot 120 + 0,0025 \cdot 120^2 = 8$. A una velocidad de 120 km/h el consumo del coche es de 8 litros de gasolina cada 100 kms.

a2) Averiguamos el valor de x para que la función valga 10.

$$C(x) = 10 \Rightarrow 26 - 0,45x + 0,0025x^2 = 10 \Rightarrow 0,0025x^2 - 0,45x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{0,45 \pm \sqrt{(-0,45)^2 - 4 \cdot 0,0025 \cdot 16}}{2 \cdot 0,0025} = \frac{0,45 \pm \frac{\sqrt{17}}{20}}{0,005} = \begin{cases} \frac{0,45 + \frac{\sqrt{17}}{20}}{0,005} = \boxed{90 + 10\sqrt{17} \approx 131} \\ \frac{0,45 - \frac{\sqrt{17}}{20}}{0,005} = \boxed{90 - 10\sqrt{17} \approx 48} \end{cases}$$

Un consumo aproximado de 10 litros de gasolina cada 100 kilómetros se consigue con una velocidad de 48 km/h y con una velocidad de 131 km/h.

a3) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función $C(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} C'(x) = -0,45 + 0,005x \\ C'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -0,45 + 0,005x = 0 \Rightarrow 0,005x = 0,45 \Rightarrow x = \frac{0,45}{0,005} = 90$$

Sustituimos en la segunda el valor del punto crítico obtenido.

$$C''(x) = 0,005 \Rightarrow C''(90) = 0,005 > 0$$

Al anularse la primera derivada para $x = 90$ y la segunda derivada ser positiva podemos afirmar que la función tiene un mínimo en dicho valor. El consumo es mínimo para una velocidad de 90 km/h.

Para $x = 90$ la función vale $C(90) = 26 - 0,45 \cdot 90 + 0,0025 \cdot 90^2 = 5,75$.

El consumo mínimo es de 5,75 litros de gasolina cada 100 kilómetros.

Ejercicio 1.

Apartado B. La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$ con $0 \leq t \leq 3$.

- | | |
|---|----------------------|
| b1) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? | (0.5 puntos) |
| b2) ¿En qué valor de la escala de atención se está transcurridos 1.5 minutos? | (0.75 puntos) |
| b3) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? | (1.25 puntos) |

b1) Cuando finaliza el anuncio estamos en $t = 3$ y el nivel de atención es:

$$A(3) = -10 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 + 40 = 70$$

El nivel de atención es de 70.

b2) Transcurridos 1,5 minutos el nivel de atención es:

$$A(1.5) = -10 \cdot 1.5^2 + 40 \cdot 1.5 + 40 = 77.5$$

El nivel de atención es de 77.5 transcurridos 1.5 minutos del anuncio.

b3) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función $A(t)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(t) = -10t^2 + 40t + 40 \rightarrow A'(t) = -20t + 40 \\ A'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -20t + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{20} = 2$$

Analizamos la evolución del signo de la derivada antes y después de $t = 2$.

- En el intervalo $[0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $A'(1) = -20 \cdot 1 + 40 = 20 > 0$. La función crece en $[0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 3]$ tomamos $t = 2.5$ y la derivada vale $A'(2.5) = -20 \cdot 2.5 + 40 = -10 < 0$. La función decrece en $(2, 3]$.

El nivel de atención crece antes y decrece después de $t = 2$. El nivel de atención presenta un máximo transcurridos 2 minutos del anuncio.

Ejercicio 2.

Apartado A. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a1) Calcula, de manera razonada, $A \cdot B - C$.

(1 punto)

a2) Despeja y calcula la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$.

(1.5 puntos)

a1) Calculamos la expresión de la matriz $A \cdot B - C$.

$$\begin{aligned} A \cdot B - C &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+0+2 & 4+0+0 \\ -1+0+4 & -2-3+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a2) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I \Rightarrow A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I \Rightarrow (A \cdot B - C) X = I$$

Por lo obtenido la matriz X es la matriz inversa de $A \cdot B - C$. Comprobamos que existe y la calculamos.

$$|A \cdot B - C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A \cdot B - C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A \cdot B - C)^T)}{|A \cdot B - C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2.

Apartado B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- b1) Calcula la matriz $B \cdot C$. **(1 punto)**
 b2) Despeja y calcula la matriz X en la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$. **(1 punto)**
 b3) ¿Es posible hallar una matriz Y tal que $YA - B = C$? **(0.5 puntos)**

b1) Calculamos la matriz pedida.

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+4 & -2+1-2 \\ -2+0-2 & 4+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b2) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \cdot C \Rightarrow X = A^{-1}BC$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz A y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa de } A$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = A^{-1}BC = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 & 3-10 \\ -5+4 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = A^{-1}BC = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

b3) Estudiamos con las dimensiones de las matrices si es posible la existencia de la matriz Y .

$$\left. \begin{matrix} Y \cdot A \\ m \times \boxed{n \cdot 2} \times 2 \rightarrow m \times 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} Y \cdot A - B = C \\ m \times 2 - 2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{matrix}$$

Si consideramos la matriz Y de dimensiones $m \times n$ el producto $Y \cdot A$ se puede realizar siendo $n = 2$ obteniéndose una matriz $m \times 2$. Esta matriz que se obtiene en el producto tiene m filas, para que se pueda restar con B debe tener 2 filas, por lo que debe ser $m = 2$. Tras las operaciones obtenemos una matriz 2×2 que nunca puede ser igual a la matriz C que es una matriz 3×2 .

No es posible encontrar esa matriz Y que cumpla la igualdad.

Ejercicio 3.

Apartado A. Las 24 chicas y los 18 chicos de 2º de Bachillerato de un centro docente organizan un viaje. Para financiarlo deciden trabajar por las tardes en una empresa encuestadora que contrata trabajo para dos tipos de equipos: tipo A, formado por cuatro chicas y dos chicos; y tipo B, formado por tres chicas y tres chicos. La empresa abona por una tarde de trabajo 300 € a cada equipo del tipo A y 500 € a cada equipo del tipo B. Si quieren obtener la mayor cantidad posible de dinero:

a1) Expresa la función objetivo. **(0.5 puntos)**

a2) Expresa, mediante inecuaciones, todas las restricciones del problema y representa gráficamente la región factible. **(0.75 puntos por las restricciones y 0.5 por la región factible)**

a3) ¿Como les conviene distribuirse para obtener la mayor cantidad posible de dinero? **(0.75 puntos)**

a1) Llamamos “x” al número de equipos A, “y” al número de equipos B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Número chicos	Número chicas	Ingresos
Nº equipos A (x)	2x	4x	300x
Nº equipos B (y)	3y	3y	500y
TOTALES	2x + 3y	4x + 3y	300x + 500y

La función objetivo son los ingresos que viene expresado como $I(x, y) = 300x + 500y$.

Deseamos maximizar dichos ingresos.

a2) Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

“Disponen de 18 chicos” $\rightarrow 2x + 3y \leq 18$.

“Disponen de 24 chicas” $\rightarrow 4x + 3y \leq 24$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 18 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$2x + 3y = 18$$

$$4x + 3y = 24$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{18-2x}{3}$
0	6
3	4
9	0

x	$y = \frac{24-4x}{3}$
0	8
3	4
6	0

Primer
cuadrante



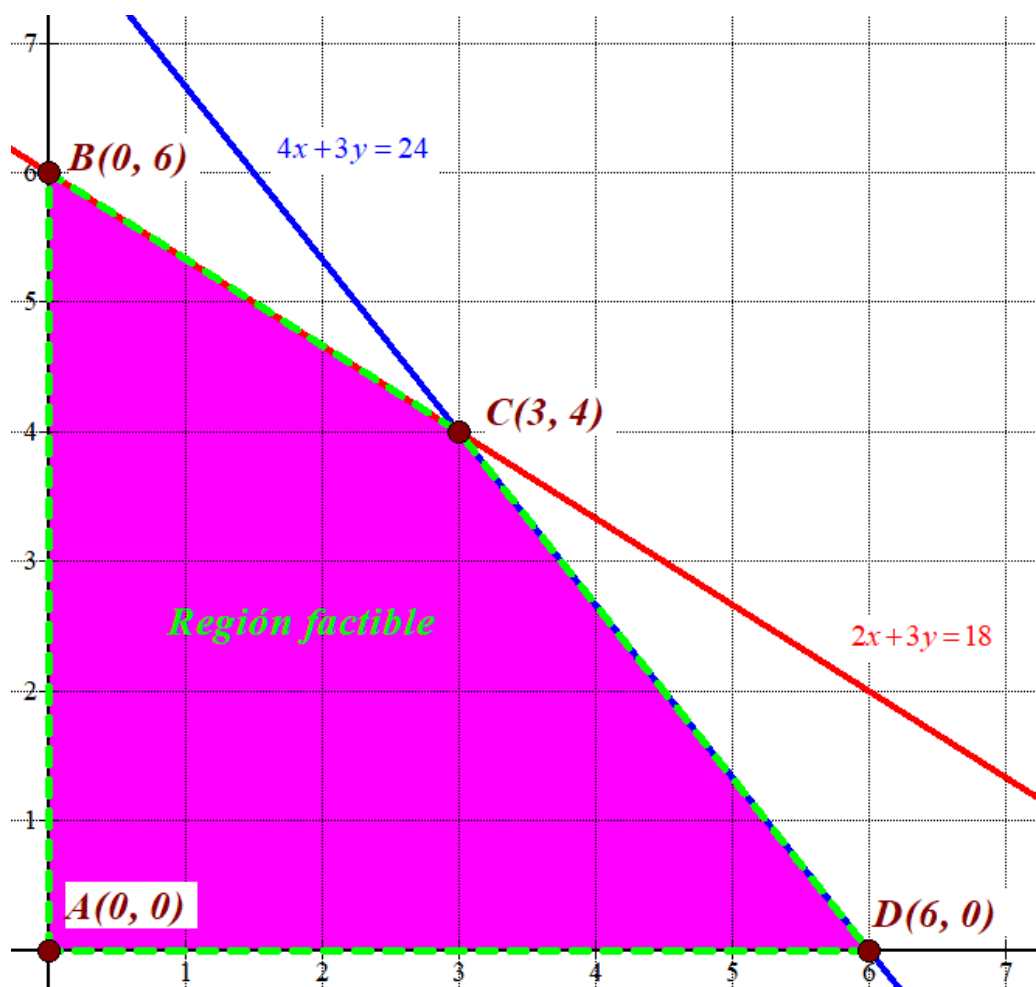
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 18 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos si el punto $P(2, 2)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \leq 18 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \leq 24 \\ 2 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 + 6 \leq 18 \\ 8 + 6 \leq 24 \\ 2 \geq 0; 2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



a3) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 300x + 500y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 6) \rightarrow I(0, 6) = 300 \cdot 0 + 500 \cdot 6 = 3000 \text{ Máximo}$$

$$C(3, 4) \rightarrow I(3, 4) = 300 \cdot 3 + 500 \cdot 4 = 2900$$

$$D(6, 0) \rightarrow I(6, 0) = 300 \cdot 6 + 500 \cdot 0 = 1800$$

Los máximos ingresos se obtienen con la formación de 6 equipos del tipo B y ninguno del tipo A. Siendo estos ingresos máximos de un importe de 3000 euros.

Ejercicio 3.

Apartado B. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq k \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > k \end{cases}$

b1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$?

(1 punto)

b2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

(0.75 puntos)

b3) Si $k = 1$, determina en qué intervalos la función es cóncava ($\cap$) y en cuáles es convexa ($\cup$). **(0.75 puntos)**

b1) Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = k$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= k^2 + 2 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} x^2 + 2 = k^2 + 2 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} -x^2 + 4x = -k^2 + 4k \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = f(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow k^2 + 2 = -k^2 + 4k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 4k + 2 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = k$ debe ser $k = 1$.

b2) Para $k = 1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^2 + 2$. La derivada de esta función es $f'(x) = 2x$ que se anula para $x = 0$. Para valores menores de $x = 0$ la derivada es negativa y la función decrece y para valores mayores de $x = 0$ la derivada es positiva y la función crece. La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = -x^2 + 4x$. La derivada de esta función es $f'(x) = -2x + 4$ que se anula para $x = 2$. Para valores menores de $x = 2$ la derivada es positiva y la función crece y para valores mayores de $x = 2$ la derivada es negativa y la función decrece. La función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

En el cambio de definición de la función la función es creciente antes de $x = 1$ y sigue siendo creciente después de este valor, por lo que la función no presenta extremo relativo en $x = 1$.

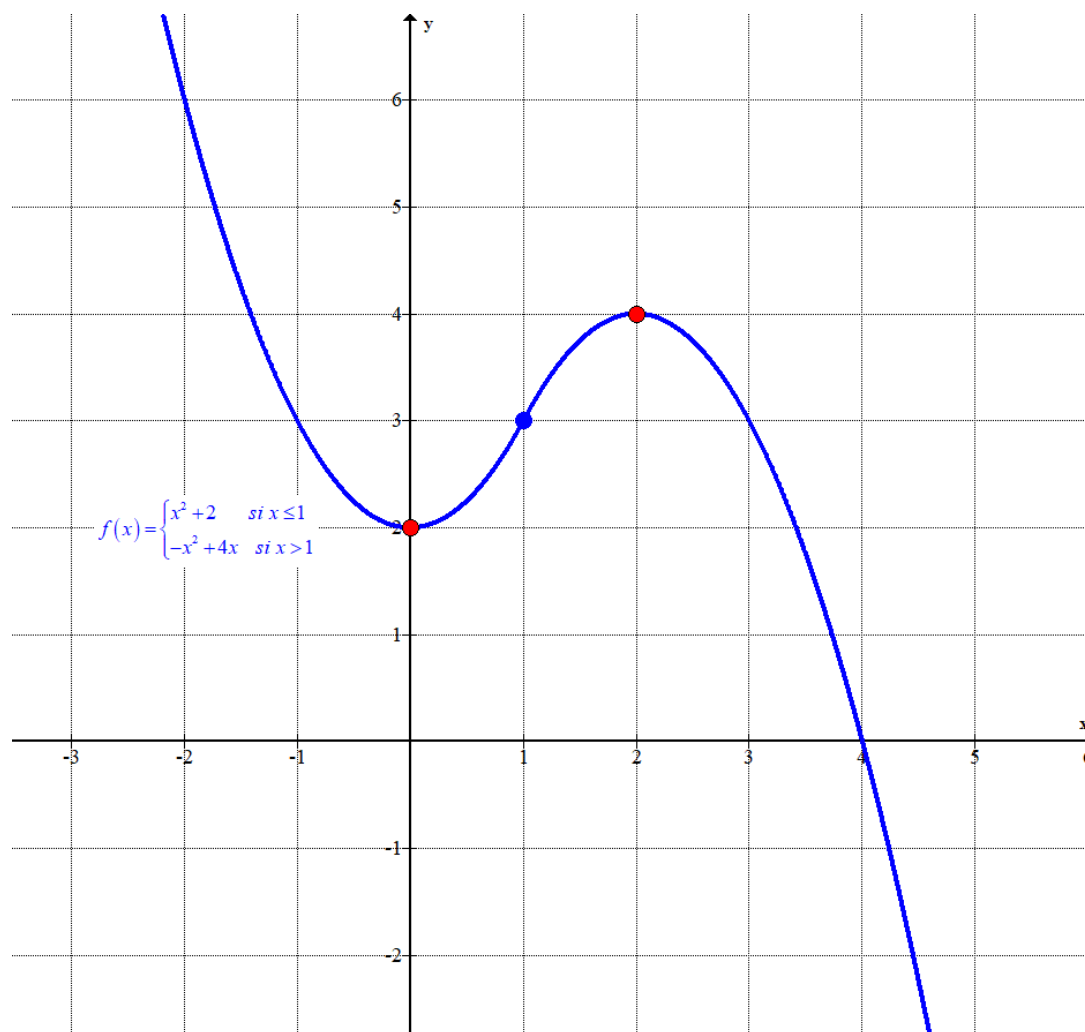
Como $f(0) = 0^2 + 2 = 2$ la función tiene un mínimo relativo en $(0, 2)$.

Como $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$ la función tiene un máximo relativo en $(2, 4)$.

b3) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función tiene la expresión $f(x) = x^2 + 2$. La derivada es $f'(x) = 2x$ y la segunda derivada es $f''(x) = 2 > 0$, que al ser siempre positiva la función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(-\infty, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = -x^2 + 4x$. La derivada es $f'(x) = -2x + 4$ y la segunda derivada es $f''(x) = -2 < 0$, que al ser siempre negativa la función es cóncava ($\cap$) en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava ($\cap$) en el intervalo $(1, +\infty)$.



Ejercicio 4.

Apartado A. En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, 0.4, 0.3 y 0.6. Hallar la probabilidad de que, un día cualquiera dicho grupo:

a1) Solamente vaya a uno de los lugares.

(1.25 puntos)

a2) Vaya únicamente a dos de los lugares.

(1.25 puntos)

Si A = “Ir al lugar de ocio A”, B = “Ir al lugar de ocio B” y C = “Ir al lugar de ocio C”, se tiene que:

$$P(A) = 0.4, P(B) = 0.3 \text{ y } P(C) = 0.6.$$

a1) El suceso pedido puede ocurrir de tres formas distintas:

Ir a A, pero no ir ni a B ni a C $\rightarrow$

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0.4(1-0.3)(1-0.6) = 0.112$$

Ir a B, pero no ir ni a A ni a C $\rightarrow$

$$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = (1-0.4) \cdot 0.3 \cdot (1-0.6) = 0.072$$

Ir a C, pero no ir ni a A ni a B $\rightarrow$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = (1-0.4)(1-0.3) \cdot 0.6 = 0.252$$

La probabilidad del suceso pedido es la suma de las tres probabilidades obtenidas:

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = 0.112 + 0.112 + 0.072 + 0.252 = \boxed{0.436}$$

a2) El suceso pedido puede ocurrir de tres formas distintas:

$$\text{No ir a A, pero ir a B y a C} \rightarrow P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = (1-0.4) \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 0.108$$

$$\text{No ir a B, pero ir a A y a C} \rightarrow P(A \cap \bar{B} \cap C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = 0.4(1-0.3) \cdot 0.6 = 0.168$$

$$\text{No ir a C, pero ir a A y a B} \rightarrow P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = 0.4 \cdot 0.3(1-0.6) = 0.048$$

La probabilidad del suceso pedido es la suma de las tres probabilidades obtenidas:

$$P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = 0.108 + 0.168 + 0.048 = \boxed{0.324}$$

Ejercicio 4.

Apartado B. La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial sigue una distribución normal, con desviación típica $\sigma = 10$ segundos. Se toma una muestra aleatoria de 100 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 50 segundos. Se pide:

b1) Calcular un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional de las llamadas. **(1 punto)**

b2) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(respuesta completa correcta 0.75 puntos: 0.25 respuesta y 0.5 por justificación)**

b3) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la encuesta se hubiera realizado con 100 llamadas de un único cliente? Razona tu respuesta. **(respuesta completa correcta 0.75 puntos: 0.25 respuesta y 0.5 por justificación)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

$X =$ "La duración de las llamadas de teléfono en una oficina comercial en segundos".

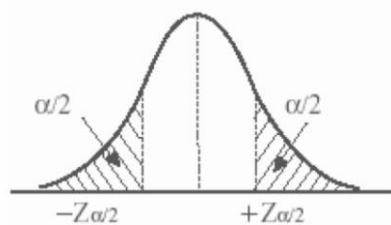
$X = N(\mu, 10)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$ y la media muestral es $\bar{x} = 50$ segundos.

b1) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 2.17$$

El intervalo de confianza para la media de las llamadas es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50 - 2.17, 50 + 2.17) = (47.83, 52.17)$$

b2) Para tener mayor amplitud en el intervalo de confianza el error debe ser mayor y el error aumenta si disminuimos el tamaño de la muestra, pues si mantenemos el nivel de confianza el valor de

$$z_{\alpha/2} \text{ se mantiene igual y } \sigma \text{ es constante. } Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

b3) La muestra debe ser aleatoria. Si la muestra se obtiene a partir de 100 llamadas al mismo cliente está muestra no es representativa del conjunto total de llamadas de la oficina comercial.

El intervalo de confianza no sería válido.