



PAU (MAIORES DE 25 AÑOS)
2026
MATEMÁTICAS APLICADAS
A LAS CIENCIAS SOCIALES

Código: 42

El examen consta de dos partes y siete preguntas obligatorias. En la Parte 1 las tres preguntas son problemas, valorados con 2 puntos. En la Parte 2 las cuatro preguntas son tipo test, valoradas con 1 punto las correctas, 0 puntos las no contestadas y $-0,5$ las incorrectas.

PARTE 1

PREGUNTA 1. Resuelva el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Luego,

obtenga $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(2 puntos)**

PREGUNTA 2. Dibuje la gráfica de una función f que esté definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en dos puntos que usted elija, que tenga una asíntota horizontal y dos verticales, y tal que f'' tenga el mismo signo que f . No hay que dar la definición de la función f , sino, tan solo, dibujar una gráfica con las características pedidas. **(2 puntos)**

PREGUNTA 3. En un cierto laboratorio de investigación, el 30 % de los trabajadores son físicos y el 70 % ingenieros. Además, el 20 % de los físicos tienen 50 años o más y el 90 % de los ingenieros son menores de 50 años. Si se elige uno de los trabajadores al azar,

- Calcule la probabilidad de que tenga 50 años o más.
- Calcule la probabilidad de que tenga 50 años o más y sea ingeniero.

(2 puntos)

PARTE 2

PREGUNTA 4. Si A es una matriz 2×3 , C una matriz 2×4 y $AB = C$, entonces

- B es una matriz 3×4 .
- B tiene que ser una matriz cuadrada.
- B es una matriz 2×4 .

(1 punto)

PREGUNTA 5. La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

- no tiene extremos.
- tiene una asíntota horizontal, que es la recta $y = 0$.
- es positiva en el intervalo $(1,2)$.

(1 punto)

PREGUNTA 6. La recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^x \sin x$ en el punto $(0, f(0))$ es

- $y = 1 + x$.
- $y = 0$.
- $y = x$.

(1 punto)

PREGUNTA 7. Sean A y B sucesos aleatorios tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Entonces,

- $P(A/B) \geq P(A \cap B)$
- $P(A/B) < P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $P(A \cap B) \neq 0$

(1 punto)

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. Resuelva el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Luego, obtenga $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(2 puntos)**

Hallamos la expresión de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0+1 & 1+0+2 \\ 2-1+1 & 2+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto, existe su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema la obtenemos despejando la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la igualdad $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

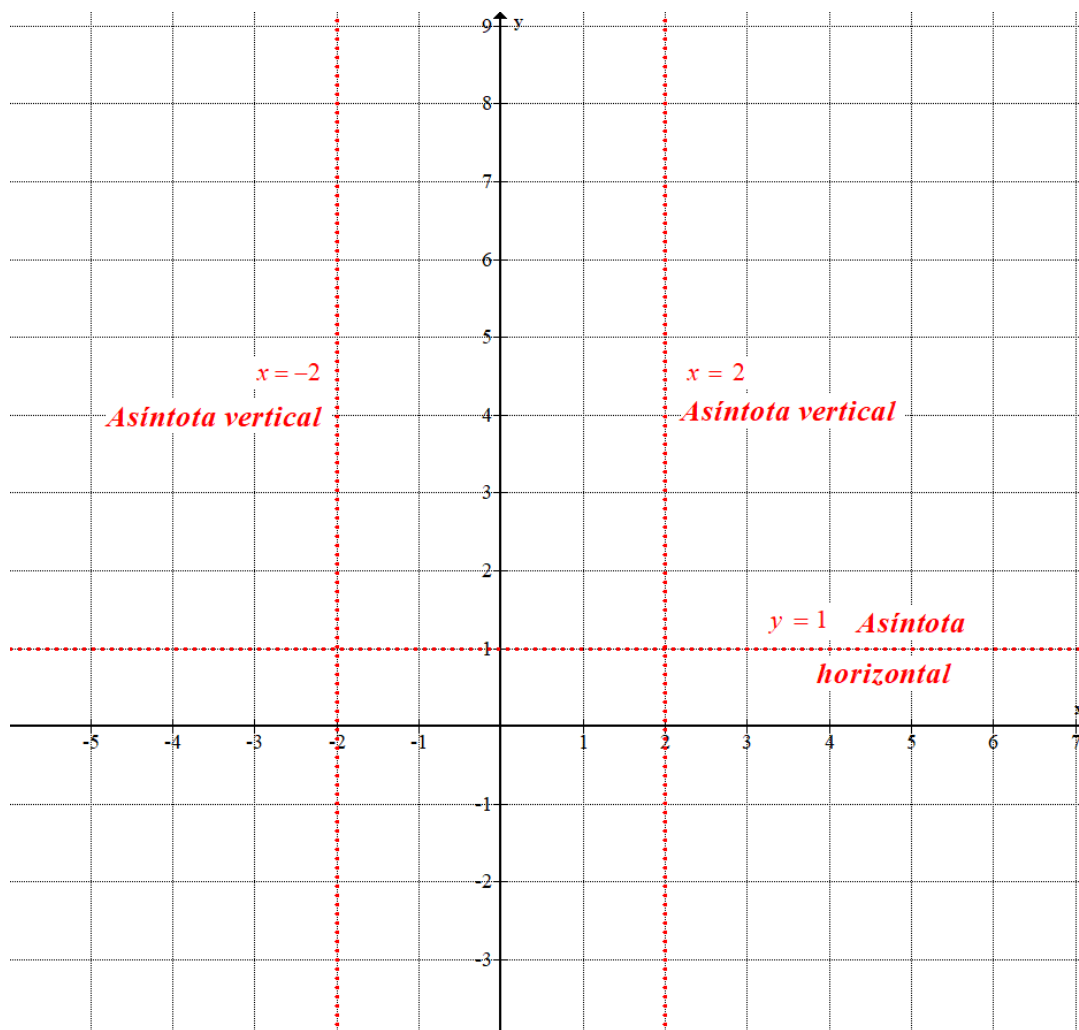
$$2 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 1 \rightarrow 2 \times 1$$

La solución del sistema es $x = \frac{1}{2}$ e $y = 0$.

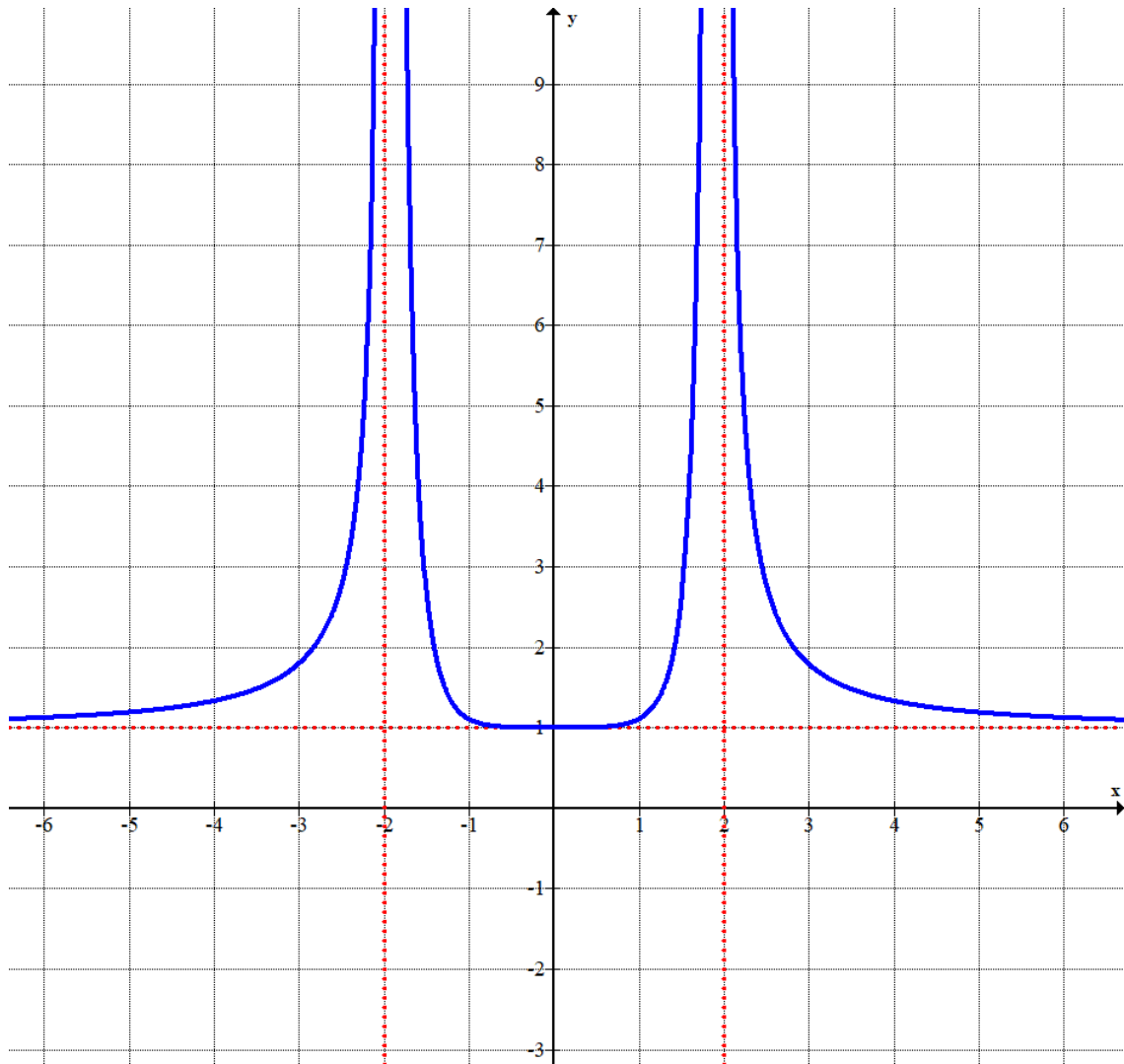
Hemos obtenido que $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

PREGUNTA 2. Dibuje la gráfica de una función f que esté definida en todo $\mathbb{R}$ excepto en dos puntos que usted elija, que tenga una asíntota horizontal y dos verticales, y tal que f'' tenga el mismo signo que f . No hay que dar la definición de la función f , sino, tan solo, dibujar una gráfica con las características pedidas. **(2 puntos)**

El signo de f'' nos indica si la gráfica de la función es cóncava ($\cap \rightarrow f'' < 0$) o convexa ($\cup \rightarrow f'' > 0$). Colocamos las dos asíntotas verticales y la horizontal, luego intentamos dibujar una gráfica que cumpla lo pedido.



Elegimos una función positiva, por lo que la gráfica tiene que ser convexa en todo su dominio de definición y además debe tener las asíntotas dibujadas.



La gráfica dibujada corresponde a una función positiva (por encima del eje de abscisas $\rightarrow f > 0$). Es una función convexa, por lo que $f'' > 0$.

La función está definida en todo $\mathbb{R}$ menos en -2 y $+2$. La función tiene dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$. También tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal.

PREGUNTA 3. En un cierto laboratorio de investigación, el 30 % de los trabajadores son físicos y el 70 % ingenieros. Además, el 20 % de los físicos tienen 50 años o más y el 90 % de los ingenieros son menores de 50 años. Si se elige uno de los trabajadores al azar,

- a) Calcule la probabilidad de que tenga 50 años o más.
b) Calcule la probabilidad de que tenga 50 años o más y sea ingeniero.

(2 puntos)

Suponemos que son 100 los trabajadores del laboratorio. Entonces serían 30 los físicos y 70 los ingenieros. Como el 20 % de los físicos tienen 50 años o más tenemos que $0.20 \cdot 30 = 6$ de los trabajadores son físicos con 50 años o más. Como el 90 % de los ingenieros son menores de 50 años tenemos que $0.90 \cdot 70 = 63$ de los trabajadores son ingenieros con menos de 50 años.

Ponemos estos datos en una tabla.

	Ingenieros	Físicos	
Menos de 50 años	63		
50 años o más		6	
	70	30	100

Completamos la tabla.

	Ingenieros	Físicos	
Menos de 50 años	63	24	87
50 años o más	7	6	13
	70	30	100

Usamos todos estos datos para responder a las preguntas planteadas.

- a) Hay un total de 100 trabajadores y 13 son trabajadores con 50 años o más. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir un trabajador al azar este tenga 50 años o más vale

$$\frac{13}{100} = 0.13.$$

- b) Hay un total de 100 trabajadores y 7 son ingenieros con 50 años o más. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir un trabajador al azar este sea ingeniero y tenga 50

años o más vale $\frac{7}{100} = 0.07.$

PREGUNTA 4. Si A es una matriz 2×3 , C una matriz 2×4 y $AB = C$, entonces

- a) B es una matriz 3×4 .
- b) B tiene que ser una matriz cuadrada.
- c) B es una matriz 2×4 .

(1 punto)

Consideramos la matriz B de dimensión $m \times n$. Hacemos un pequeño esquema para aclarar la situación.

$$\begin{array}{rcl} A \cdot B & = & C \\ 2 \times \boxed{3 \cdot m} \times n & \rightarrow & 2 \times 4 \end{array}$$

Para que sea posible el producto AB debe ser $m = 3$.

$$\begin{array}{rcl} A \cdot B & = & C \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times n & \rightarrow & 2 \times 4 \end{array}$$

El producto AB nos daría una matriz de dimensión $2 \times n$. Como debemos obtener una matriz 2×4 debe ser $n = 4$.

Como conclusión la matriz B debe ser una matriz 3×4 .

La afirmación correcta es la del apartado a). La afirmación del apartado b) no es correcta, pues la matriz B no es cuadrada, ya que tiene 3 filas y 4 columnas.

La afirmación c) tampoco es correcta.

PREGUNTA 5. La función $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

- a) no tiene extremos.
 b) tiene una asíntota horizontal, que es la recta $y = 0$.
 c) es positiva en el intervalo $(1,2)$.

(1 punto)

a) Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)(x-2) - 1 \cdot [1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-1)]}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-[x-2+x-1]}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2} = 0 \Rightarrow -2x+3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

La función tiene un punto crítico en $x = \frac{3}{2}$.

La derivada de la función tiene la expresión $f'(x) = \frac{-2x+3}{(x-1)^2(x-2)^2}$. Esta expresión tiene

el denominador siempre con valor positivo y el denominador es positivo antes de $x = \frac{3}{2}$ y negativo después, por lo que la función crece antes y decrece después. La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{3}{2}$.

La afirmación no es correcta.

b) Lo comprobamos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(\infty-1)(\infty-2)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal. La afirmación es correcta.

c) La afirmación no es correcta. Observamos que para $x = 1.5 \in (1,2)$ la función toma un valor negativo.

$$f(1.5) = \frac{1}{(1.5-1)(1.5-2)} = \frac{1}{0.5 \cdot (-0.5)} = \frac{1}{-0.25} = -4 < 0.$$

PREGUNTA 6. La recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^x \sin x$ en el punto $(0, f(0))$ es

a) $y = 1 + x$.

b) $y = 0$.

c) $y = x$.

(1 punto)

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^x \sin x$ en $x = 0$.

$$f(x) = e^x \sin x \Rightarrow f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = e^0 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0 \\ f'(0) = e^0 (\sin 0 + \cos 0) = 1 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

Las afirmaciones de los apartados a) y b) son falsas y la afirmación del apartado c) es correcta.

PREGUNTA 7. Sean A y B sucesos aleatorios tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Entonces,

- a) $P(A/B) \geq P(A \cap B)$ b) $P(A/B) < P(A \cap B)$ c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $P(A \cap B) \neq 0$
(1 punto)

Sabemos que $0 < P(B) \leq 1$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ 0 < P(B) \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A \cap B)$$

La afirmación del apartado a) es correcta y la del apartado b) es incorrecta.

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

La afirmación del apartado c) es incorrecta.

$$P(A \cap B) \neq 0 \rightarrow P(A \cap B) > 0 \Rightarrow -P(A \cap B) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) < P(A) + P(B)$$