



**Universidad
Zaragoza**

PRUEBAS DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
CONVOCATORIA DE FEBRERO DE 2026
EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS
TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. (2,5 puntos) Para la función $f(x) = 8 - 60x - 9x^2 + 2x^3$

- a) (0,75 puntos) Obtener los máximos y mínimos relativos.
 b) (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.
 c) (1,25 puntos) Encontrar los límites:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{2x^2} \right] \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[5 + \frac{f'(x)}{6(x+2)} \right] \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f''(x)}{12x} \right]^{x^2}$$

A2. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{3x+3}{2x+3}, & x > 0 \end{cases}$

- a) (0,5 puntos) Razonar si $f(x)$ es una función continua.
 b) (0,75 puntos) Hallar un número real m positivo tal que $f(m) = -1/5$.
 c) (1,25 puntos) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

A3. (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Encontrar los valores α reales para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.

$$\alpha^2 x + \alpha y + 2z = 8$$

- b) (1,5 puntos) Para el sistema $\begin{cases} 2x + y - 4z = -1 \\ -4x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$, analizar según los valores de α reales cuando tiene solución y resolverlo en los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

A4. (2,5 puntos) En el juego Piedra-Papel-Tijera, cada jugador elige una opción al azar y la muestra o enfrenta simultáneamente al otro u otros jugadores. La Piedra gana a la Tijera, la Tijera gana al Papel y el Papel gana a la Piedra.

- a) (0,75 puntos) Supongamos una partida con dos jugadores. Calcular la probabilidad de que la partida resulte en tablas, es decir que los dos muestren la misma opción y no gane ninguno.
 b) (0,75 puntos) Supongamos una partida con tres jugadores. Hallar la probabilidad de que se muestren exactamente una tijera, una piedra y un papel (en este caso tampoco hay ganador).
 c) (1 punto) Siguiendo con tres jugadores, determinar las probabilidades de que haya dos, uno o ningún ganador.

OPCIÓN B

B1. (2,5 puntos) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1$ con $x \neq 0$.

- a) (0,5 puntos) Obtener los puntos de corte de su gráfica con los ejes coordenados.
- b) (1,25 puntos) Calcular sus asíntotas.
- c) (0,25 puntos) Hallar el dominio de $f'(x)$.
- d) (0,5 puntos) Escribir los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B2. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a - \cos(x), & x \leq 0 \\ x^2 - \sin(x), & x > 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$

- a) (1 punto) Obtener los valores de a reales para los cuales $f(x)$ es una función continua.

- b) (1,5 puntos) Para $a = 1$, calcular $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

B3. (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) (0,75 puntos) Calcular la matriz inversa de A .
- b) (1 punto) Hallar una matriz B tal que $A(B - I) = 2I$, con I la matriz identidad de orden 2.
- c) (0,75 puntos) Razonar los valores de α reales para los que el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ es compatible determinado. Resolverlo para $\alpha = 0$.

B4. (2,5 puntos) Una comunidad de regantes está interesada en conocer el número de riegos anuales completos en función del volumen de agua almacenado en sus balsas de regulación (en m^3). Se toman datos de las últimas temporadas, con X = volumen almacenado (m^3) e Y = n.º de riegos completados.

X	5	7	10	12	16
Y	11	23	30	38	45

- a) (1 punto) Calcular la recta de regresión de Y dada X .
- b) (1 punto) Obtener el coeficiente de correlación lineal entre estas dos magnitudes.
- c) (0,5 puntos) Utilizar la recta obtenida para estimar el número de riegos si el volumen almacenado en la presente campaña es de $9,2 m^3$.

SOLUCIONES

A1. (2,5 puntos) Para la función $f(x) = 8 - 60x - 9x^2 + 2x^3$

a) (0,75 puntos) Obtener los máximos y mínimos relativos.

b) (0,5 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.

c) (1,25 puntos) Encontrar los límites:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{2x^2} \right] \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[5 + \frac{f'(x)}{6(x+2)} \right] \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f''(x)}{12x} \right]^{x^2}$$

a) Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(x) = 8 - 60x - 9x^2 + 2x^3 \Rightarrow f'(x) = -60 - 18x + 6x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -60 - 18x + 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = \boxed{5=x} \\ \frac{3-7}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada para estos dos valores.

$$f'(x) = -60 - 18x + 6x^2 \Rightarrow f''(x) = -18 + 12x \Rightarrow \begin{cases} f''(5) = -18 + 12 \cdot 5 = 42 > 0 \\ f''(-2) = -18 + 12(-2) = -42 < 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

Como $f(-2) = 8 - 60(-2) - 9(-2)^2 + 2(-2)^3 = 8 + 120 - 36 - 16 = 76$ las coordenadas del máximo relativo son $(-2, 76)$.

Como $f(5) = 8 - 60 \cdot 5 - 9 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 = 8 - 300 - 225 + 250 = -267$ las coordenadas del mínimo relativo son $(5, -267)$.

b) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada (candidatos a puntos de inflexión).

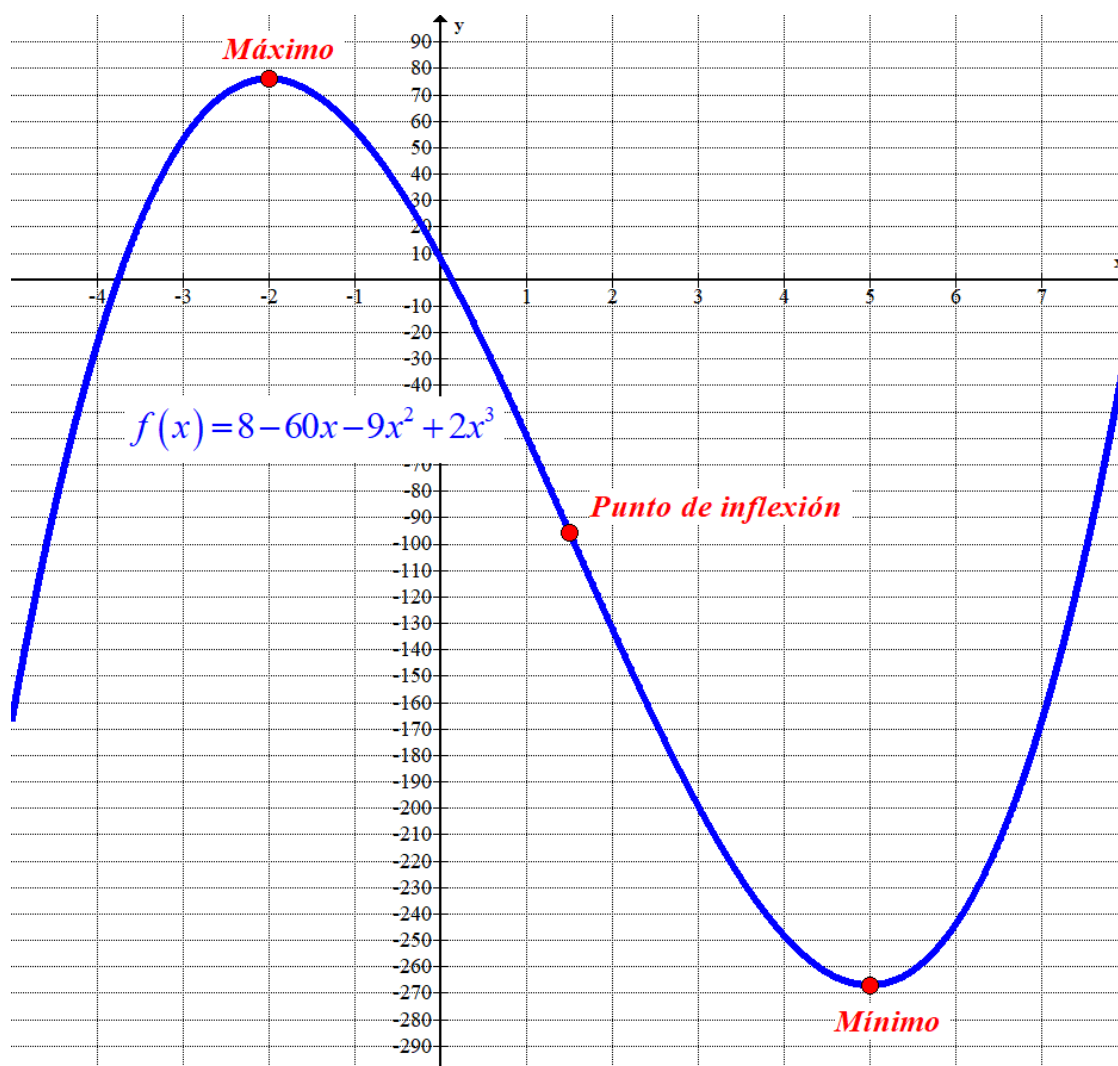
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -18 + 12x = 0 \Rightarrow 6(-3 + 2x) = 0 \Rightarrow -3 + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

Comprobamos que la tercera derivada no se anula para $x = \frac{3}{2}$.

$$f''(x) = -18 + 12x \Rightarrow f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{3}{2}$.

Como $f\left(\frac{3}{2}\right) = 8 - 60 \cdot \frac{3}{2} - 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{-191}{2}$ las coordenadas del punto de inflexión son $\left(\frac{3}{2}, \frac{-191}{2}\right)$.



c)

i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{8 - 60x - 9x^2 + 2x^3}{2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{8}{2x^2} - \frac{60x}{2x^2} - \frac{9x^2}{2x^2} + \frac{2x^3}{2x^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4}{x^2} - \frac{30}{x} - \frac{9}{2} + x \right] = \frac{4}{+\infty} - \frac{30}{-\infty} - \frac{9}{2} - \infty = 0 + 0 - 4.5 - \infty = \boxed{-\infty}$$

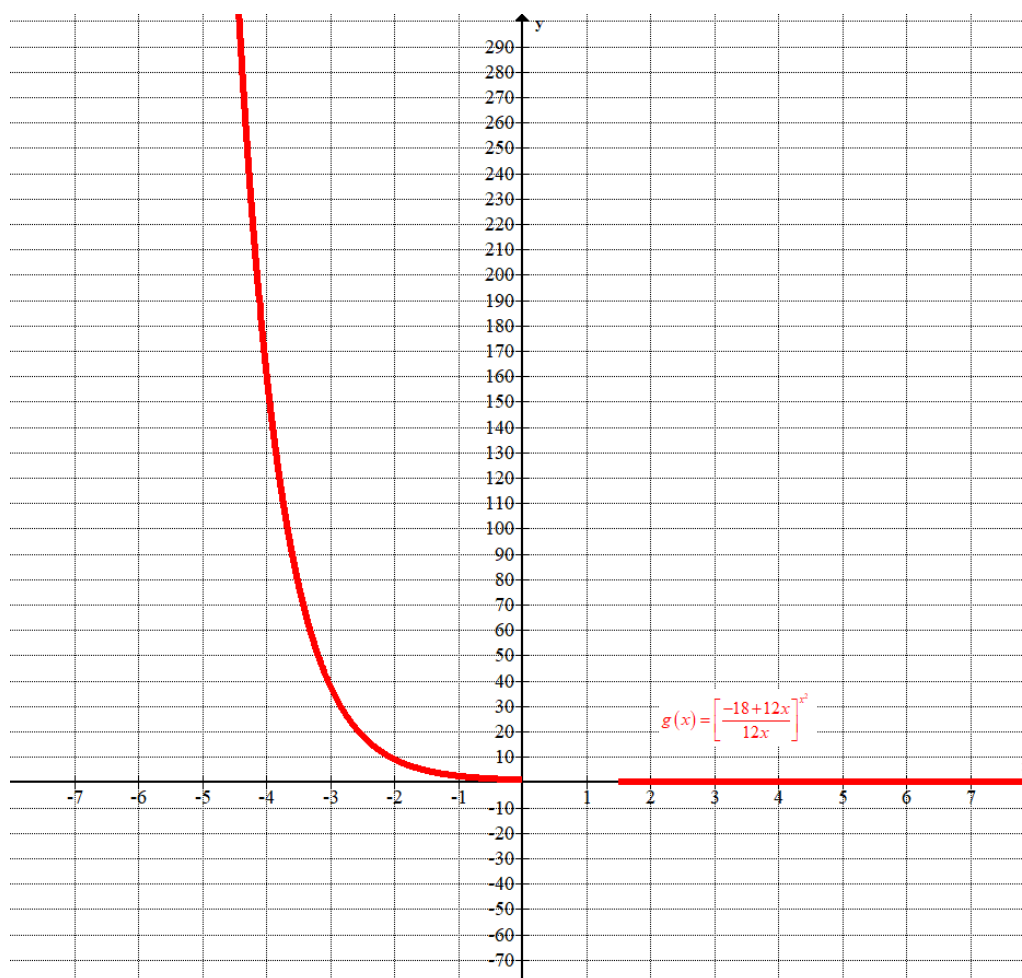
ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[5 + \frac{f'(x)}{6(x+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[5 + \frac{-60 - 18x + 6x^2}{6(x+2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[5 + \frac{-10 - 3x + x^2}{x+2} \right] =$$

$$= 5 + \frac{-10 - 3 \cdot 0 + 0^2}{0+2} = 5 + \frac{-10}{2} = \boxed{0}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f''(x)}{12x} \right]^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-18+12x}{12x} \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-18}{12x} + \frac{12x}{12x} \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{3}{2x} \right]^{x^2} = \\
 &= \left[1 - \frac{3}{\infty} \right]^{+\infty} = [1-0]^{+\infty} = 1^{+\infty} = \text{Indeterminación} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \left(1 - \frac{3}{2x} - 1 \right) \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \left(\frac{-3}{2x} \right) \right)} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x^2}{2x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x}{2} \right)} = \begin{cases} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3x}{2} \right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \\ = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-3x}{2} \right)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty} \end{cases}
 \end{aligned}$$



A2. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{3x+3}{2x+3}, & x > 0 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Razonar si $f(x)$ es una función continua.

b) (0,75 puntos) Hallar un número real m positivo tal que $f(m) = -1/5$.

c) (1,25 puntos) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a) En el intervalo $[-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$, que es una función continua, pues el denominador nunca se anula.

En el intervalo $[0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = 1 - \frac{3x+3}{2x+3}$, que es una

función continua, pues el denominador se anula para $x = -\frac{3}{2}$ que no pertenece al intervalo de definición.

Comprobamos la continuidad en el cambio de definición $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{3x+3}{2x+3} = 1 - \frac{3 \cdot 0 + 3}{2 \cdot 0 + 3} = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x = 0$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Buscamos el valor m positivo que cumple $f(m) = -1/5$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} xe^{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{3x+3}{2x+3}, & x > 0 \end{cases} \\ f(m) &= -1/5 \\ m &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{3m+3}{2m+3} = \frac{-1}{5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{3m+3}{2m+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{3m+3}{2m+3} \Rightarrow 12m+18 = 15m+15 \Rightarrow 3 = 3m \Rightarrow \boxed{m=1}$$

El valor buscado es $m = 1$.

c) En el intervalo $(-1, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = xe^{-x}$.

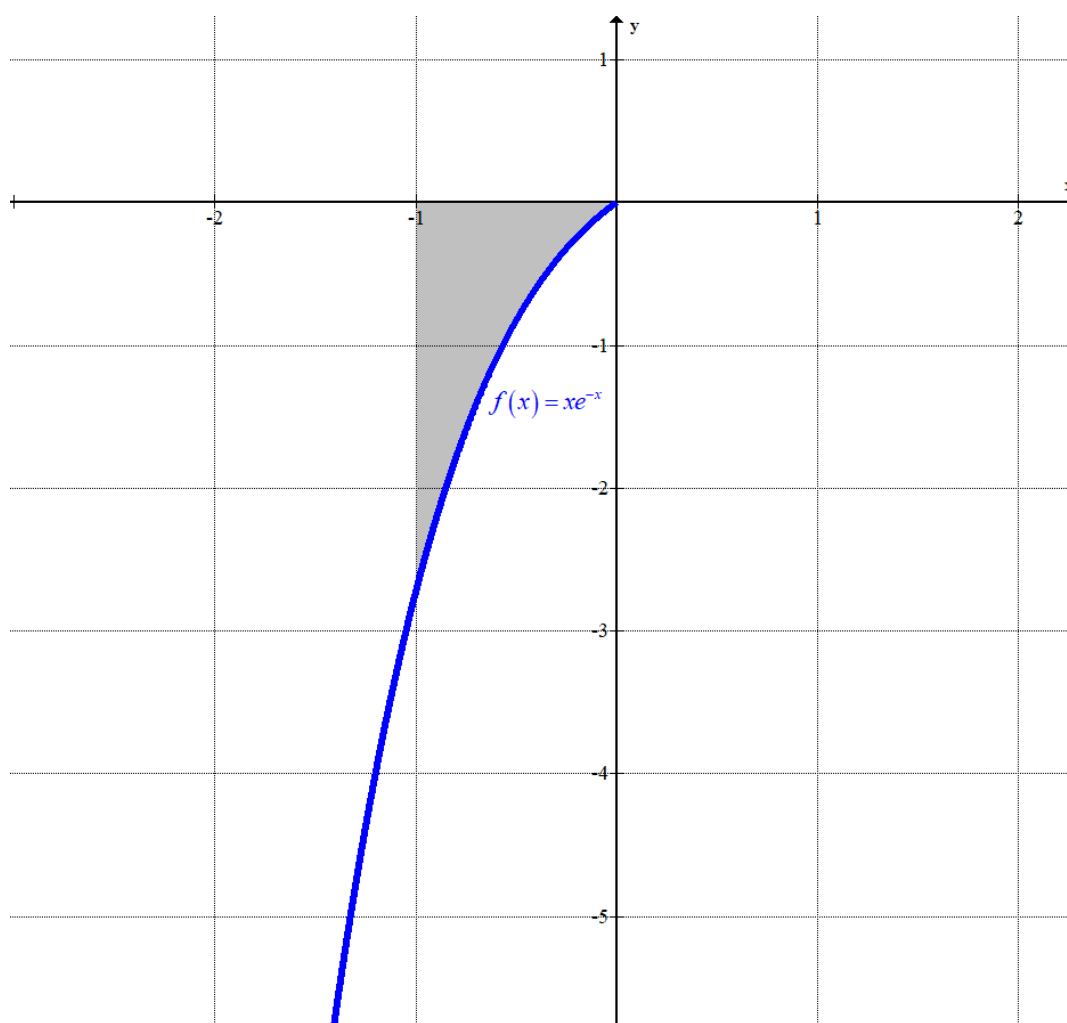
Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x e^{-x} dx = \dots$$

$$\int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx =$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\dots = \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_{-1}^0 = \left[-0 \cdot e^{-0} - e^{-0} \right] - \left[-(-1) e^{-(-1)} - e^{-(-1)} \right] = -1 - [e - e] = \boxed{-1}$$



A3. (2,5 puntos)

a) (1 punto) Encontrar los valores α reales para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.

$$\alpha^2 x + \alpha y + 2z = 8$$

b) (1,5 puntos) Para el sistema $2x + y - 4z = -1$, $-4x - 2y + 3z = -3$ cuando tiene solución y resolverlo en los casos $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3 y su rango máximo es 3. Para que su rango sea 3 el determinante de la matriz debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha^2 + 16\alpha - 8 - (-8 + 6\alpha + 8\alpha^2) = \\ &= 3\alpha^2 + 16\alpha - 8 + 8 - 6\alpha - 8\alpha^2 = -5\alpha^2 + 10\alpha = 5\alpha(-\alpha + 2) \end{aligned}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5\alpha(-\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

La matriz A tiene rango máximo (3) para cualquier valor de α distinto de 0 y de 2.

b) La matriz de coeficientes asociada al sistema $2x + y - 4z = -1$, $-4x - 2y + 3z = -3$ es $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y

su matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Sabemos que el determinante de A se anula para $\alpha = 0$ y $\alpha = 2$. Estudiamos tres situaciones diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $\alpha = 0$

En este caso el determinante de A se anula y su rango no es 3. La matriz ampliada queda

$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ -4 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \\ 4 \quad 2 \quad -8 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -5 \quad -5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -10 \quad -10 \\ 0 \quad 0 \quad 10 \quad 40 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}}^A \\ A/B \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. $\alpha = 2$

En este caso el determinante de A se anula y su rango no es 3. La matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Estudiamos su rango usando el método de Gauss.}$$

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -4 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \\ 4 \quad 2 \quad 2 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 5 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 4 \quad 2 \quad -8 \quad -2 \\ -4 \quad -2 \quad -2 \quad -8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -10 \quad -10 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 10 \quad 10 \\ 0 \quad 0 \quad -10 \quad -10 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^A \\ A/B \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B también tiene rango 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3. Y son iguales al número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

El sistema tiene solución para cualquier valor $\alpha \neq 0$.

Resolvemos el sistema para $\alpha = 1$. Por lo estudiado previamente sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 8 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ -4x - 2y + 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y - 2z + 8 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ -4x - 2y + 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2(-y - 2z + 8) + y - 4z = -1 \\ -4(-y - 2z + 8) - 2y + 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2y - 4z + 16 + y - 4z = -1 \\ 4y + 8z - 32 - 2y + 3z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y - 8z = -17 \\ 2y + 11z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 17 - 8z = y \\ 2y + 11z = 29 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(17 - 8z) + 11z = 29 \Rightarrow 34 - 16z + 11z = 29 \Rightarrow -5z = -5 \Rightarrow \boxed{z = 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 17 - 8 \cdot 1 = 9} \Rightarrow \boxed{x = -9 - 2 \cdot 1 + 8 = -3}$$

Para $\alpha = 1$ la solución del sistema es $x = -3$; $y = 9$; $z = 1$.

Resolvemos el sistema para $\alpha = 2$. Por lo estudiado previamente sabemos que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos las soluciones del sistema partiendo de la matriz ampliada equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{4 \quad 2 \quad 2}^A & 8 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 2y + 2z = 8 \\ -10y = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ \boxed{y = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 1 + z = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 3 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $\alpha = 2$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} .$

A4. (2,5 puntos) En el juego Piedra-Papel-Tijera, cada jugador elige una opción al azar y la muestra o enfrenta simultáneamente al otro u otros jugadores. La Piedra gana a la Tijera, la Tijera gana al Papel y el Papel gana a la Piedra.

- a)** (0,75 puntos) Supongamos una partida con dos jugadores. Calcular la probabilidad de que la partida resulte en tablas, es decir que los dos muestren la misma opción y no gane ninguno.
- b)** (0,75 puntos) Supongamos una partida con tres jugadores. Hallar la probabilidad de que se muestren exactamente una tijera, una piedra y un papel (en este caso tampoco hay ganador).
- c)** (1 punto) Siguiendo con tres jugadores, determinar las probabilidades de que haya dos, uno o ningún ganador.

a) Llamamos $Pi1$ y $Pi2$ a sacar Piedra cada uno de los jugadores, análogamente llamamos $Pa1$ y $Pa2$ a sacar papel. Llamamos $T1$ y $T2$ a sacar Tijera.

Los sucesos posibles son $Pi1-Pi2$, $Pi1-Pa2$, $Pi1-T2$, $Pa1-Pi2$, $Pa1-Pa2$, $Pa1-T2$, $T1-Pi2$, $T1-Pa2$ y $T1-T2$. En total hay 9 sucesos posibles, siendo todos equiprobables. Hay 3 sucesos en los que se obtiene un empate: $Pi1-Pi2$, $Pa1-Pa2$ y $T1-T2$. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que empaten es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

b) En este caso hay $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ sucesos posibles. Los sucesos en los que se muestran exactamente una tijera, una piedra y un papel son $T1-Pi2-Pa3$, $T1-Pa2-Pi3$, $Pi1-T2-Pa3$, $Pi1-Pa2-T3$, $Pa1-T2-Pi3$ y $Pa1-Pi2-T3$. En total hay 6 sucesos favorables y 27 posibles, por lo que la probabilidad pedida vale $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

c) Para que no haya ningún ganador deben salir exactamente una tijera, una piedra y un papel o bien que todos saquen lo mismo. Hay 3 sucesos en los que todos sacan lo mismo: $Pi1-Pi2-Pi3$, $Pa1-Pa2-Pa3$ y $T1-T2-T3$. En total hay $6 + 3 = 9$ casos favorables a “ningún ganador”, por lo que la probabilidad de que no haya ningún ganador vale $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Para que el jugador 1 sea el único ganador deben ocurrir: $Pi1-T2-T3$, $T1-Pa2-Pa3$ y $Pa1-Pi2-Pi3$.

Para que el jugador 2 sea el único ganador deben ocurrir: $T1-Pi2-T3$, $Pa1-T2-Pa3$ y $Pi1-Pa2-Pi3$.

Para que el jugador 3 sea el único ganador deben ocurrir: $T1-T2-Pi3$, $Pa1-Pa2-T3$ y $Pi1-Pi2-Pa3$.

En total hay 9 casos favorables a que se produzca un único ganador. La probabilidad de “un único ganador” vale $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Para que haya dos ganadores hay $27 - 9 - 9 = 9$ sucesos favorables, por lo que la probabilidad de que haya dos ganadores es también $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Estos sucesos favorables a 2 ganadores son: $Pi1-Pi2-T3$, $Pi1-T2-Pi3$, $T1-Pi2-Pi3$, $T1-T2-Pa3$, $T1-Pa2-T3$, $Pa1-T2-T3$, $Pa1-Pa2-Pi3$, $Pa1-Pi2-Pa3$ y $Pi1-Pa2-Pa3$.

Las probabilidades de que haya dos, uno o ningún ganador valen lo mismo $\frac{1}{3}$.

B1. (2,5 puntos) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1$ con $x \neq 0$.

a) (0,5 puntos) Obtener los puntos de corte de su gráfica con los ejes coordenados.

b) (1,25 puntos) Calcular sus asíntotas.

c) (0,25 puntos) Hallar el dominio de $f'(x)$.

d) (0,5 puntos) Escribir los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1 \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x} = -1 \Rightarrow x^2 - 2 = -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \rightarrow A(1,0) \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \rightarrow B(-2,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1 \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2}{0} + 1 = \text{No existe}$$

La gráfica de la función tiene dos puntos de corte con los ejes: $A(1,0)$ y $B(-2,0)$.

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x} + 1 = \frac{0^2 - 2}{0} + 1 = \infty + 1 = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} - \frac{2}{x} + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{2}{x} + 1 = \infty - \frac{2}{\infty} + 1 = \infty - 0 + 1 = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

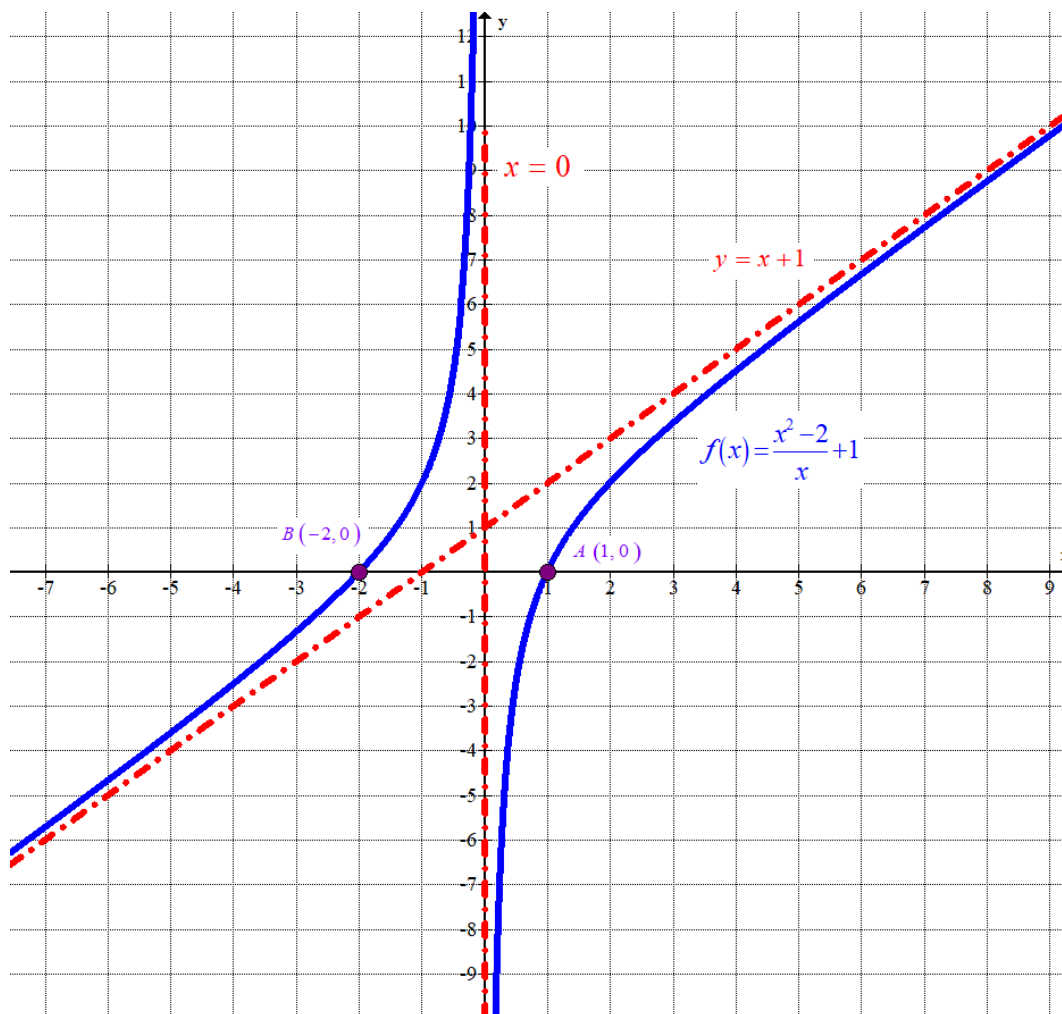
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2}{x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2}{x}}{x} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^2} + \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x} + 1 - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 + x - x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} - \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{2}{x} = 1 - \frac{2}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

La función tiene la asíntota oblicua $y = x + 1$.



c) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2) \cdot 1}{x^2} + 0 = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

El dominio de definición de la función derivada es $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \sqrt{-2} = \text{No existe}$$

La derivada no se anula nunca. No existen puntos críticos.

Como el numerador ($x^2 + 2$) y denominador (x^2) son positivos tenemos que la derivada

$f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$ siempre es positiva. La función siempre es creciente.

B2. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a - \cos(x), & x \leq 0 \\ x^2 - \operatorname{sen}(x), & x > 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$

a) (1 punto) Obtener los valores de a reales para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1,5 puntos) Para $a=1$, calcular $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x=0$.

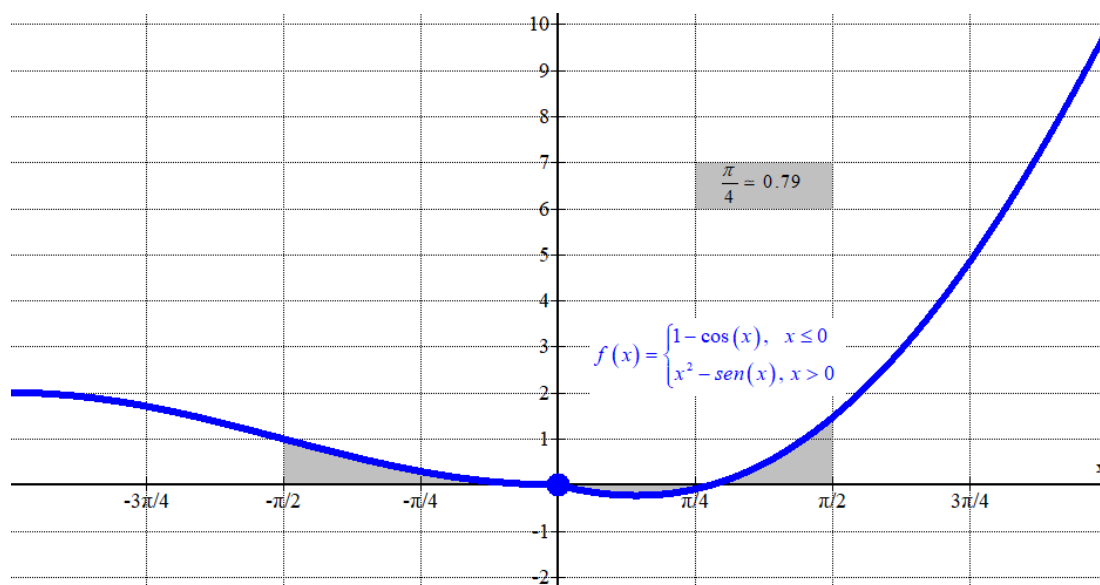
$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a - \cos 0 = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a - \cos(x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - \operatorname{sen}(x) = 0^2 - \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor buscado es $a=1$.

b) Para $a=1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x), & x \leq 0 \\ x^2 - \operatorname{sen}(x), & x > 0 \end{cases}.$

Como la función cambia de definición en $x=0$ que pertenece al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para obtener la integral definida pedida la obtendremos como la suma de dos integrales definidas.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 1 - \cos(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 - \operatorname{sen}(x) dx = \\ &= \left[x - \operatorname{sen}(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left[0 - \operatorname{sen}(0) \right] - \left[-\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] + \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[\frac{0^3}{3} + \cos(0) \right] = \\ &= 0 - \left[-\frac{\pi}{2} + 1 \right] + \frac{\pi^3}{24} + 0 - [0 + 1] = \boxed{\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} - 2 \simeq 0.86} \end{aligned}$$



B3. (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcular la matriz inversa de A.

b) (1 punto) Hallar una matriz B tal que $A(B-I) = 2I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) (0,75 puntos) Razonar los valores de α reales para los que el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix}$ es compatible determinado. Resolverlo para $\alpha = 0$.

a) Comprobamos que la matriz A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Despejamos B en la ecuación matricial.

$$A(B-I) = 2I \Rightarrow B-I = A^{-1} \cdot 2I \Rightarrow B-I = 2A^{-1} \Rightarrow B = 2A^{-1} + I$$

Determinamos la expresión de la matriz B.

$$B = 2A^{-1} + I = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz B buscada tiene la expresión $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) El determinante de la matriz A vale 1 distinto de cero, por lo que su rango es 2, igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Esta conclusión es independiente del valor de α . El sistema es compatible determinado para cualquier valor de α .

Resolvemos el sistema para $\alpha = 0$. El sistema a resolver es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 - 2y + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -3} \Rightarrow \boxed{x = 3 - 2(-3) = 9}$$

Para $\alpha = 0$ la solución es $x = 9$; $y = -3$.

B4. (2,5 puntos) Una comunidad de regantes está interesada en conocer el número de riegos anuales completos en función del volumen de agua almacenado en sus balsas de regulación (en m³). Se toman datos de las últimas temporadas, con X = volumen almacenado (m³) e Y = n.º de riegos completados.

X	5	7	10	12	16
Y	11	23	30	38	45

- a) (1 punto) Calcular la recta de regresión de Y dada X.
 b) (1 punto) Obtener el coeficiente de correlación lineal entre estas dos magnitudes.
 c) (0,5 puntos) Utilizar la recta obtenida para estimar el número de riegos si el volumen almacenado en la presente campaña es de 9,2 m³.

Realizamos una tabla para obtener las medias, las desviaciones típicas y la covarianza.

	X	Y	X · Y	X²	Y²
	5	11	55	25	121
	7	23	161	49	529
	10	30	300	100	900
	12	38	456	144	1444
	16	45	720	256	2025
Suma	50	147	1692	574	5019

Hallamos la media de ambas distribuciones.

$$\bar{X} = \frac{50}{5} = 10 \qquad \bar{Y} = \frac{147}{5} = 29.4$$

Hallamos las desviaciones típicas de ambas distribuciones.

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - (\bar{X})^2 = \frac{574}{5} - 10^2 = 14.8 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{14.8} \approx 3.8471$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum Y_i^2}{N} - (\bar{Y})^2 = \frac{5019}{5} - 29.4^2 = 139.44 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{139.44} \approx 11.8085$$

Hallamos la covarianza.

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{1692}{5} - 10 \cdot 29.4 = 44.4$$

- a) La recta de regresión de Y sobre X tiene ecuación $Y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} (X - \bar{X})$.

$$Y - 29.4 = \frac{44.4}{14.8} (X - 10) \Rightarrow Y - 29.4 = 3X - 30 \Rightarrow \boxed{Y = 3X - 0.6}$$

- b) El coeficiente de correlación lineal es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas.

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{44.4}{3.8471 \cdot 11.8085} \approx 0.9774$$

Hemos obtenido un valor muy próximo a 1 por lo que la relación entre las dos variables es muy fuerte.

- c) Si el volumen almacenado en la presente campaña es de $9,2 \text{ m}^3$ entonces $X = 9.2$. Determinamos el valor de Y usando la recta de regresión $Y = 3X - 0.6$.

$$Y = 3 \cdot 9.2 - 0.6 = 27$$

El número de riegos completados se espera que sean 27.

