

**MATEMÁTICAS**

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

1. [3 puntos] Un local para bodas tiene tres salones: salón Lugo, salón Asturias y salón Cantabria. Los salones Lugo y Asturias están conectados por una puerta, así como los salones Asturias y Cantabria, pero no hay paso directo del salón Lugo al Cantabria. Los empleados se han dado cuenta de que, al finalizar la cena y empezar el baile, algunos invitados se empiezan a mover desde su salón a un salón adyacente, y han medido que, cada hora, el 10 % de los que están en el salón Lugo pasan al Asturias y el 20 % de los que están en el salón Asturias pasan al Lugo. Por el otro lado, el 20 % de los del salón Cantabria pasan al Asturias y el 10 % de los del salón Asturias pasan al Cantabria. No hay trasvases directos entre el Cantabria y el Lugo. A la una de la madrugada, hay 190 personas en el salón Lugo, 150 personas en el salón Asturias y 142 en el salón Cantabria. ¿Cuántas personas había a medianoche en cada salón?

Plantee el problema como un **sistema lineal** y resuélvalo mediante el método de **Gauss**.

2. a) [1.5 puntos] Sea α el ángulo del **segundo cuadrante** tal que $\tan \alpha = -2$. Calcule **de forma razonada** $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ y **dibuje el ángulo** α sobre la circunferencia goniométrica (i.e., la circunferencia de radio unidad).
- b) [1.5 puntos] Calcule la ecuación de la **recta** que pasa por el **punto** $(2, 6)$ y tiene **pendiente** 12. Calcule asimismo el **punto de corte** de esta recta **con el eje** OX .
3. a) [2 puntos] Calcule los **intervalos** de **crecimiento** y **decrecimiento** de $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$
- b) [2 puntos] Calcule el **área encerrada** entre la gráfica de la **parábola** $y = x^2 - 1$ y el **eje** OX **entre** $x = 0$ y $x = 2$. Un dibujo puede ser útil.

**Opción B**

1. a) [1.5 puntos] Se consideran la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Justifique que la matriz B es la **inversa** de A y **utilice este hecho** para resolver el siguiente sistema **sin usar** ni el método de Gauss, ni sustitución, igualación y reducción.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

- b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema por el método de **Gauss**, y **clasifíquelo** según el número de soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

2. a) [1 punto] Se considera el vector $\vec{u} = (1, 2)$. Escriba un vector $\vec{v}$ ortogonal (i.e., **perpendicular**) a $\vec{u}$ y escriba el vector $\vec{w} = (1, 0)$ como **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- b) [2 puntos] Se considera la recta

$$r : \frac{x-2}{2} + \frac{y-1}{3} = 0,$$

Escriba una ecuación de la recta **paralela** a r que **pasa por el origen** y calcule la **distancia** entre ambas rectas.

3. En este ejercicio, las funciones trigonométricas que aparecen tienen como argumentos los ángulos en radianes.

- a) [2 puntos] Calcule el valor de a para que la siguiente función sea **continua** en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

¿Es **derivable** en $x = 0$ la función obtenida?

- b) [2 puntos] Calcule

$$\int (x^2 + \sin x) dx, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right)$$