

MATEMÁTICAS: EXAMEN RESUELTO

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los tres ejercicios de que consta dicha opción.

Opción A

- [3 puntos] Un local para bodas tiene tres salones: salón Lugo, salón Asturias y salón Cantabria. Los salones Lugo y Asturias están conectados por una puerta, así como los salones Asturias y Cantabria, pero no hay paso directo del salón Lugo al Cantabria. Los empleados se han dado cuenta de que, al finalizar la cena y empezar el baile, algunos invitados se empiezan a mover desde su salón a un salón adyacente, y han medido que, cada hora, el 10 % de los que están en el salón Lugo pasan al Asturias y el 20 % de los que están en el salón Asturias pasan al Lugo. Por el otro lado, el 20 % de los del salón Cantabria pasan al Asturias y el 10 % de los salón Asturias pasan al Cantabria. No hay trasvases directos entre el Cantabria y el Lugo. A la una de la madrugada, hay 190 personas en el salón Lugo, 150 personas en el salón Asturias y 142 en el salón Cantabria. ¿Cuántas personas había a medianoche en cada salón?

Plantee el problema como un **sistema lineal** y resuélvalo mediante el método de **Gauss**.

Solución: Sean x , y , z el número de personas que hay respectivamente en los salones Lugo, Asturias y Cantabria a medianoche.

A la una, en el salón Lugo quedarán los que no se han movido de este salón ($0.9x$) más los que han llegado desde el Asturias ($0.2y$). Según el conteo de los empleados, esto suma 190 personas. Luego la primera ecuación es

$$0.9x + 0.2y = 190.$$

Razonando de forma análoga, para el salón Asturias tenemos la ecuación

$$0.1x + 0.7y + 0.2z = 150,$$

y para el salón Cantabria

$$0.1y + 0.8z = 142.$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 & | & 190 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & | & 150 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & | & 142 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow 9F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 & | & 190 \\ 0 & 6.1 & 1.8 & | & 1160 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & | & 142 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_3 \leftarrow 6.1F_3 - 0.1F_2} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 & | & 190 \\ 0 & 6.1 & 1.8 & | & 1160 \\ 0 & 0 & 4.7 & | & 750.2 \end{pmatrix}$$



Resolvemos el sistema triangular superior resultante mediante sustitución regresiva:

$$\begin{cases} 0.9x + 0.2y & = 190 \\ & 6.1y + 1.8z = 1160 \\ & & 4.7z = 750.2 \end{cases}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} z &= \frac{752}{4.7} = 159.62, \\ y &= \frac{1}{6.1}(1160 - 1.8 \cdot 159.62) = 143.06, \\ x &= \frac{1}{0.9}(190 - 0.2 \cdot 143.06) = 179.32 \end{aligned}$$

El sistema tiene solución única, pero como no salen números naturales, el problema original no tiene solución.

2. a) [1.5 puntos] Sea α el ángulo del **segundo cuadrante** tal que $\tan \alpha = -2$. Calcule **de forma razonada** $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ y **dibuje el ángulo** α sobre la circunferencia goniométrica (i.e., la circunferencia de radio unidad).
- b) [1.5 puntos] Calcule la ecuación de la **recta** que pasa por el **punto** $(2, 6)$ y tiene **pendiente** 12. Calcule asimismo el **punto de corte** de esta recta **con el eje** OX .

Solución:



- a) Usando las relaciones fundamentales de la trigonometría, tenemos que

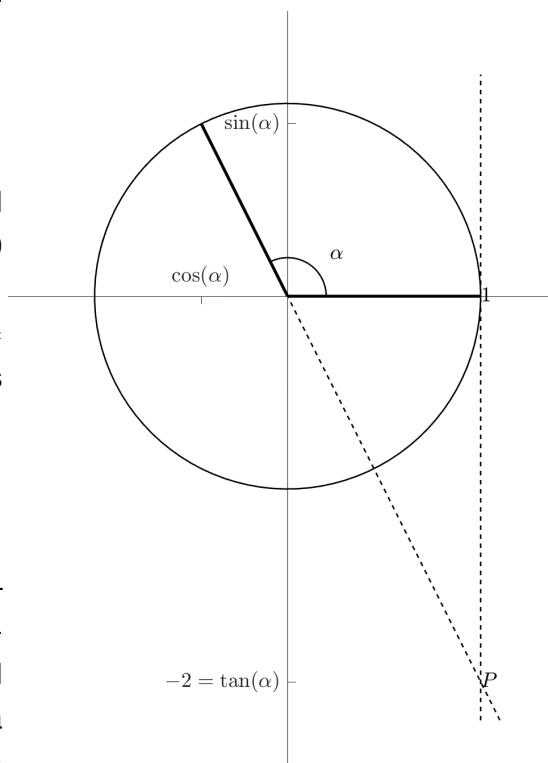
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2$$

Además, hay que tener en cuenta que, como el ángulo está en el segundo cuadrante, $\sin \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$.

De la segunda relación deducimos $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$, y sustituyendo en la primera tenemos $4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Por lo tanto

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Para dibujar el ángulo, trazamos la recta *tangente* a la circunferencia en el punto $(1, 0)$ y tomamos el punto P de coordenadas $(1, \tan \alpha)$. El ángulo está comprendido entre la parte positiva del eje OX y la parte sobre el segundo cuadrante de la recta que une el punto P con el origen.



- b) Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene

$$y - 6 = 12(x - 2) \iff y = 12x - 18$$

La recta corta al eje OX en el punto de ordenada $y = 0$. Por tanto $12x - 18 = 0$ y $x = 1.5$. El punto de corte es el $(1.5, 0)$.

3. a) [2 puntos] Calcule los **intervalos** de **crecimiento** y **decrecimiento** de $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$
 b) [2 punto] Calcule el **área encerrada** entre la gráfica de la **parábola** $y = x^2 - 1$ y el **eje OX** entre $x = 0$ y $x = 2$. Un dibujo puede ser útil.

Solución:

- a) Por un lado, hay que tener en cuenta que f no está definida para $x = -1$ ni $x = 1$. Además, en su dominio

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Se tiene que $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Estudiamos el crecimiento en los 4 intervalos resultantes:

- En $(-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.
- En $(-1, 0)$, $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.
- En $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.



- En $(1, \infty)$, $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.

Nota 1: Es incorrecto decir que f es creciente en $(-\infty, 0)$ porque f no está definida en todos los puntos de ese intervalo. También es incorrecto decir que f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ porque, por ejemplo, $-2 < -1/2$, pero $f(-2) = 5/3 > f(-1/2) = -5/3$.

Nota 2: Como f es continua en $x = 0$, la condición $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$ implica que f es estrictamente creciente en $(-1, 0]$. Análogamente, f es estrictamente decreciente en $[0, 1)$. Este nivel de detalle no es exigible en esta prueba.

- b) En el intervalo $[0, 2]$, $x^2 - 1 = 0$ si y solo si $x = 1$. En $[0, 1]$, $x^2 - 1 \leq 0$ y en $[1, 2]$, $x^2 - 1 \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |x^2 - 1| dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = 1 - \frac{1}{3} - \left(0 - \frac{0}{3} \right) + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 2 \end{aligned}$$

Opción B

1. a) [1.5 puntos] Se consideran la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Justifique que la matriz B es la **inversa** de A y **utilice este hecho** para resolver el siguiente sistema **sin usar** ni el método de Gauss, ni sustitución, igualación y reducción.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

- b) [1.5 puntos] Resuelva el siguiente sistema por el método de **Gauss**, y **clasifíquelo** según el número de soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

Solución:

- a) Para probar que B es la inversa de A , calculamos AB y obtenemos la matriz identidad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 3 \times (-1) & 2 \times (-3) + 3 \times 2 \\ 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times (-3) + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Aunque el producto de matrices no es conmutativo, si A es cuadrada y $AB = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$, sin necesidad de comprobar que $BA = I$. Efectivamente: primero, sabemos que es invertible porque $1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A) \det(B)$, luego $\det(A) \neq 0$ y A es invertible. Finalmente $AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \Rightarrow IB = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$. Esta explicación no es exigible en este nivel.

El sistema se puede escribir como $AX = b$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formalmente, se puede resolver como $X = A^{-1}b$. Aunque en general este no es un buen método, como disponemos de $B = A^{-1}$ se puede calcular directamente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nota.: Al ser b la segunda columna de la matriz identidad, el producto Bb simplemente selecciona la segunda columna de B , con lo cual se puede hacer sin necesidad de más cálculos.



b) Triangularizamos la matriz ampliada del sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1}]{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2}]{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Al tener una fila de ceros, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene un número infinito de soluciones. Resolvemos mediante sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + 3z = -2 \end{cases}$$

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, tomamos $z = \lambda$, y despejamos $y = 3\lambda + 2$, $x = 1 + \lambda - 6\lambda - 4 = -3 - 5\lambda$.

2. a) [1 punto] Se considera el vector $\vec{u} = (1, 2)$. Escriba un vector $\vec{v}$ ortogonal (i.e., **perpendicular**) a $\vec{u}$ y escriba el vector $\vec{w} = (1, 0)$ como **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [2 puntos] Se considera la recta

$$r: \frac{x-2}{2} + \frac{y-1}{3} = 0,$$

Escriba una ecuación de la recta **paralela** a r que **pasa por el origen** y calcule la **distancia** entre ambas rectas.

Solución:

- a) Definimos $\vec{v} = (-2, 1)$. Así $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = 0$, y $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

Para escribir $(1, 0) = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 1)$, resolvemos

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, tenemos que $\beta = -2\alpha$. Sustituyendo en la primera, tenemos $\alpha + 4\alpha = 1$, luego $\alpha = 1/5$ y $\beta = -2/5$. Por tanto

$$\vec{w} = \frac{1}{5}\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v}.$$

b) La recta pedida es

$$s: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0,$$

Como sabemos que $(0, 0)$ pertenece a s , podemos calcular la distancia de $(0, 0)$ a r . Hay diferentes formas de calcular la distancia pedida. Vamos a hacer un razonamiento por ortogonalidad. Otras formas, siempre que sean correctas, también serían válidas.

Sea (x, y) un punto de r . En el punto de r más cercano a $(0, 0)$, el vector que une el origen con (x, y) tiene que ser perpendicular a r . Como un vector director de r es $(2, -3)$, tenemos la

condición $(x, y) \cdot (2, -3) = 0$, esto es $2x - 3y = 0$. Despejando, tenemos $x = 3y/2$, y sustituyendo en la ecuación de la recta tenemos

$$\frac{3y/2 - 2}{2} = -\frac{y - 1}{3} \iff \frac{9}{2}y - 6 = -2y + 2 \iff \frac{13}{2}y = 8 \iff y = \frac{16}{13},$$

con lo que $x = 24/13$, y la distancia pedida es

$$d = \sqrt{\frac{16^2}{13^2} + \frac{24^2}{13^2}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \approx 2.2188.$$

3. En este ejercicio, las funciones trigonométricas que aparecen tienen como argumentos los ángulos en radianes.

a) [2 puntos] Calcule el valor de a para que la siguiente función sea **continua** en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

¿Es **derivable** en $x = 0$ la función obtenida?

b) [2 puntos] Calcule

$$\int (x^2 + \sin x) dx, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right)$$

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 0$, tienen que existir $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y ambos han de ser iguales. Es claro que $f(0) = a$. Por otro lado, usando la regla de L'Hôpital o infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Luego la condición para la continuidad es $a = 1$.

Veamos si es derivable usando la definición de derivabilidad.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - h}{h^2} = (*)$$

Llegamos a una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicamos la regla de L'Hôpital (dos veces)

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{2} = 0.$$

Luego $f'(0)$ existe y $f'(0) = 0$.

Nota: También es válido calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

b)

$$\int (x^2 + \sin x) dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$$



$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) = 1.$$



MATEMÁTICAS: CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Opción A

1. a) [3 puntos] 1 punto por el planteamiento + 1 punto por la triangularización + 1 punto por la resolución.
2. a) [1.5 punto] 0.75 puntos por el cálculo + 0.75 puntos por el dibujo.
b) [1.5 puntos] 0.75 puntos por la recta + 0.75 puntos por el punto
3. a) [2 puntos] 1 punto por la derivada + 1 punto por identificar correctamente los 4 intervalos.
b) [2 puntos] 1 punto por el planteamiento + 1 punto por la resolución.

Opción B

1. a) [1.5 puntos] 0.75 puntos por la justificación + 0.75 puntos por la resolución.
b) [1.5 puntos] 0.5 puntos por la triangularización + 0.5 puntos por la resolución + 0.5 puntos por la clasificación.
2. a) [1 punto] 0.5 puntos por el vector ortogonal + 0.5 puntos por la combinación lineal.
b) [2 puntos] 0.5 puntos por la recta paralela + 1.5 puntos por la distancia.
3. a) [2 puntos] 1 punto por el valor de a + 1 punto por la derivabilidad.
b) [2 puntos] 1 punto por la integral indefinida + 0.5 puntos por la integral definida + 0.5 puntos por el límite.