



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques

Model 2

Debe resolver tres de los cuatro problemas siguientes. Los cuatro problemas puntúan igual y cada uno vale diez puntos. La nota final será el resultado de dividir entre tres la suma de las puntuaciones obtenidas en cada problema. Debe justificar todas las respuestas.

- P1) a)** Determine los valores de t para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admite matriz inversa. (5 puntos)
- b)** Determine la solución del sistema de ecuaciones: (5 puntos)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- P2) a)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (3 puntos). Calcule los puntos donde esta función alcanza sus valores máximos y mínimos (1,5 puntos). ¿Cuánto vale la pendiente de la recta tangente a la función f en el punto $x = 2$? (0,5 puntos)

- b)** Calcule el valor de $a > 0$ para el que el área del recinto limitado por la función $g(x) = x + a$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ sea $\frac{5}{2}u^2$. (5 puntos)

- P3) a)** Calcule las coordenadas del punto de corte del plano de ecuación $x + y + z = 0$ y la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$. (5 puntos)

- b)** Se sabe que un plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ y que pasa por el punto medio de los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (2, -3, 3)$. Determine la ecuación del plano π . (5 puntos)

P4) Se elige un número natural entre el 1 y el 25, de modo que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. Responda a las siguientes preguntas, describiendo en cada apartado el suceso correspondiente, y utilice, en los apartados de cálculo de probabilidades, las propiedades de la probabilidad.

- a) Describa y determine el espacio muestral y los siguientes sucesos: el número escogido es divisible por 2, el número escogido es divisible por 3, y el número escogido es divisible por 2 y por 3. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido no sea divisible por 2? (1,5 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? (2 puntos)
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido no sea divisible por 2 ni por 3? (2 puntos)
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 3, pero no por 5? (2,5 puntos)

SOLUCIONES

- P1) a)** Determine los valores de t para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ admite matriz inversa. (5 puntos)
- b)** Determine la solución del sistema de ecuaciones: (5 puntos)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) La matriz A tiene inversa si su determinante es no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^2 + 0 - 0 + 4 - 0 - 3t = -t^2 - 3t + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -t^2 - 3t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1) \cdot 4}}{2(-1)} = \frac{3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{3+5}{-2} = \boxed{-4=t} \\ \frac{3-5}{-2} = \boxed{1=t} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de t distinto de -4 y 1 .

- b) Obtenemos la expresión del sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = -1} \\ y + 3z = 1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3(-1) = 1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 3 = 1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 4} \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 4x + 4 = 1 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-3}{4}}$$

La solución del sistema es $x = \frac{-3}{4}$; $y = 4$; $z = -1$.

P2) a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (3 puntos). Calcule los puntos donde esta función alcanza sus valores máximos y mínimos (1,5 puntos). ¿Cuánto vale la pendiente de la recta tangente a la función f en el punto $x = 2$? (0,5 puntos)

b) Calcule el valor de $a > 0$ para el que el área del recinto limitado por la función $g(x) = x + a$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ sea $\frac{5}{2}u^2$. (5 puntos)

a) Hallamos la derivada de la función y determinamos los valores que la anulan (puntos críticos).

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 4(-2)^3 - 4(-2) = -32 + 8 = -24 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = 4(-0.5)^3 - 4(-0.5) = -0.5 + 2 = 1.5 > 0. \text{ La función crece en } (-1, 0).$$

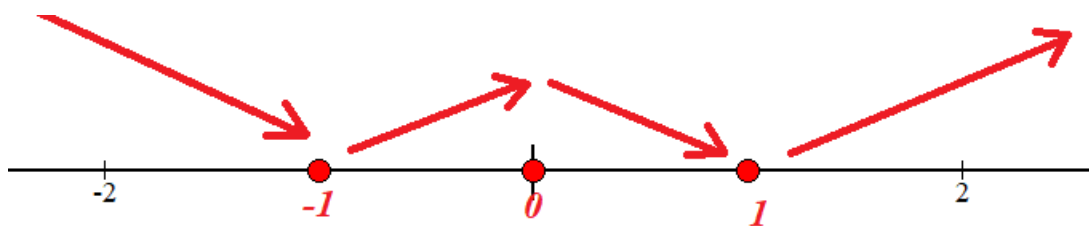
- En el intervalo $(0, +1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = 4(0.5)^3 - 4(0.5) = 0.5 - 2 = -1.5 < 0. \text{ La función decrece en } (0, +1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 32 - 8 = 24 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, +1)$ y crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Como $f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ la función presenta un mínimo relativo en el punto de coordenadas $(-1, 0)$.

Como $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$ la función presenta un máximo relativo en el punto de coordenadas $(0, 1)$.

Como $f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ la función presenta un mínimo relativo en el punto de coordenadas $(1, 0)$.

La ecuación de la recta tangente a la función f en el punto $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. La pendiente de la recta tangente a la función f en el punto $x = 2$ es el valor de la derivada para $x = 2$, es decir, $f'(2)$.

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 32 - 8 = 24$$

La pendiente de la recta tangente a la función f en el punto $x = 2$ vale 24.

b) Hallamos los puntos de corte de la función $g(x) = x + a$ con el eje x .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x + a \\ \text{Eje } x \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + a = 0 \Rightarrow \boxed{x = -a}$$

Como suponemos $a > 0$ entonces $-a < 0 \Rightarrow -a \notin (1, 2)$. La función $g(x) = x + a$ no corta el eje x , siendo positiva en el intervalo $(1, 2)$.

El área del recinto limitado por la función $g(x) = x + a$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ es el valor de la integral definida de la función $g(x)$ entre 1 y 2.

$$\text{Área} = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 x + a dx = \left[\frac{x^2}{2} + ax \right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{2} + 2a \right] - \left[\frac{1^2}{2} + a \right] = 2 + 2a - \frac{1}{2} - a = \boxed{a + 1.5}$$

Nos piden averiguar el valor de a tal que el área vale $\frac{5}{2} = 2.5$. Lo averiguamos.

$$a + 1.5 = 2.5 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El valor que cumple lo pedido es $a = 1$.

P3) a) Calcule las coordenadas del punto de corte del plano de ecuación $x + y + z = 0$ y la recta $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$. (5 puntos)

b) Se sabe que un plano π es perpendicular al vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ y que pasa por el punto medio de los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (2, -3, 3)$. Determine la ecuación del plano π . (5 puntos)

a) Hallamos el punto de corte de recta y plano. Antes pasamos la ecuación continua de la recta a paramétricas.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-(-1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + 2\lambda + \lambda - 1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 2 \cdot 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_r(1, 0, -1)}$$

El punto de corte de recta y plano es $P_r(1, 0, -1)$.

b) Si el vector $\vec{v} = (2, 3, -1)$ es perpendicular al plano π entonces este es su vector normal, por lo que su ecuación es $\pi: 2x + 3y - z + D = 0$. Determinamos el valor de D sabiendo que pasa por el punto medio de los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (2, -3, 3)$.

$$\begin{cases} P = (2, 1, 3) \\ Q = (2, -3, 3) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{(2, 1, 3) + (2, -3, 3)}{2} = (2, -1, 3) \in \pi$$

$$\begin{cases} A(2, -1, 3) \in \pi \\ \pi: 2x + 3y - z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3(-1) - 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 3 - 3 + D = 0 \Rightarrow D - 2 = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 3y - z + 2 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi: 2x + 3y - z + 2 = 0$.

P4) Se elige un número natural entre el 1 y el 25, de modo que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. Responda a las siguientes preguntas, describiendo en cada apartado el suceso correspondiente, y utilice, en los apartados de cálculo de probabilidades, las propiedades de la probabilidad.

- a) Describa y determine el espacio muestral y los siguientes sucesos: el número escogido es divisible por 2, el número escogido es divisible por 3, y el número escogido es divisible por 2 y por 3. (2 puntos)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido no sea divisible por 2? (1,5 puntos)
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? (2 puntos)
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido no sea divisible por 2 ni por 3? (2 puntos)
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 3, pero no por 5? (2,5 puntos)

a) El espacio muestral del experimento aleatorio es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots, 24, 25\}$.

Llamamos A al suceso “el número escogido es divisible por 2”, B al suceso “el número escogido es divisible por 3” y C al suceso “el número escogido es divisible por 2 y por 3”.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$$

El suceso C es la intersección de los sucesos A y B y es el conjunto de los números divisibles por $2 \cdot 3 = 6$.

$$C = A \cap B = \{6, 12, 18, 24\}$$

b) Hay 12 números divisibles por 2 entre 1 y 25. Y son 13 los números que no son divisibles por 2 entre 1 y 25. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que el número escogido no sea divisible por 2 vale $\frac{13}{25} \approx 0.52$.

c) Nos piden calcular la probabilidad de $A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{25} + \frac{8}{25} - \frac{4}{25} = \frac{16}{25} \approx 0.64$$

d) Nos piden calcular la probabilidad de $A^c \cap B^c$.

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \approx 0.36.$$

e) El conjunto de los números que cumplen lo pedido es $D = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24\}$. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 3, pero no por 5 vale $\frac{7}{25} \approx 0.28$.